İŞLETME ve İKTİSAT için İSTATİSTİK



Paul Newbold

4. Basımdan Çeviren
Ümit Şenesen

LLL

İŞLETME VE İKTİSAT İÇİN İSTATİSTİK

PAUL NEWBOLD
Illinois Üniversitesi
Urbana-Champain

4. Basımdan Çeviren

ÜMİT ŞENESEN
İstanbul Teknik Üniversitesi
İşletme Fakültesi



LİTERATÜR YAYINLARI: 44

İşletme ve İktisat İçin
İSTATİSTİK

PAUL NEWBOLD

Çeviren: ÜMİT ŞENESEN

Birinci Basım: Eylül 2000, İstanbul
Yedinci Basım (Ekonomik Baskı): Kasım 2009, İstanbul

Genel Yayın Yönetmeni: Kenan Kocatürk
Yayın Editörü: Saadet Özkal
Tasarım: Namık Doymuş / Elit Yayın Tanıtım Ltd.
Kapak: Literatür: Tasarım Grubu
Baskı ve Cilt: Çevik Matbaası - Tel.: (0.212) 501 30 19

Sert Kapak ISBN: 978-975-8431-20-5
Ekonomik Baskı ISBN: 978-975-8431-55-7

© 1995 by Prentice-Hall, Inc.
A Simon & Schuster Company
Upper Saddle River, New Jersey 07488

© Copyright 2000, **Literatür:** Yayıncılık
Bu kitabın yayın hakları Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. ve Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Kitabın tamamı veya bir bölümü hiçbir biçimde çoğaltılamaz, dağıtılamaz, yeniden elde edilmek üzere saklanamaz.

Sertifika No: 10843

Literatür: Yayıncılık, Dağıtım, Pazarlama, San. ve Tic. Ltd. Şti.
İstiklal Caddesi, Emgen Han, No: 47 Kat: 4
Beyoğlu 34433 İstanbul
T (0212) 292 4120
F (0212) 245 5987
E literatur@literatur.com.tr
www.literatur.com.tr

İÇİNDEKİLER (ÖZET)

BÖLÜM 1	■	İstatistik Nedir? *1*
BÖLÜM 2	■	Sayısal Bilginin Özetlenmesi *7*
BÖLÜM 3	■	Olasılık *81*
BÖLÜM 4	■	Kesikli Rassal Değişkenler ve Bunların Olasılık Dağılımları *139*
BÖLÜM 5	■	Sürekli Rassal Değişkenler ve Bunların Olasılık Dağılımları *193*
BÖLÜM 6	■	Örnekleme ve Örnekleme Dağılımları *243*
BÖLÜM 7	■	Nokta Tahmini *283*
BÖLÜM 8	■	Aralık Tahmini *299*
BÖLÜM 9	■	Önsav Sınaması (Hipotez Testi) *359*
BÖLÜM 10	■	Katsayısal Olmayan Bazı Sınamalar *431*
BÖLÜM 11	■	Uyumun İyiliği Sınamaları ve Çapraz Çizelgeler *453*
BÖLÜM 12	■	Doğrusal Korelasyon ve Regresyon *477*
BÖLÜM 13	■	Çoklu Regresyon *535*
BÖLÜM 14	■	Regresyon Çözümlemesine Ek Konular *601*
BÖLÜM 15	■	Varyans Çözümlemesi *671*
BÖLÜM 16	■	İstatistikle Kalite Denetimi *723*
BÖLÜM 17	■	Zaman Serilerinin Çözümlenmesi ve Kestirim *761*
BÖLÜM 18	■	Alan Araştırması Örnekleme Yöntemleri *827*
BÖLÜM 19	■	İstatistikle Karar Verme Kuramı *881*
EK	■	Çizelgeler *931*
		Seçilmiş Alıştırmaların Yanıtları *949*
		Dizin *967*

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ xiii

1

İSTATİSTİK NEDİR? 1

1.1 Sayısal Bilgiden Anlam Çıkarılması 1
1.2 Belirsizliğin Ele Alınması 2
1.3 Örnekleme 3
1.4 İlişkilerin Çözümlenmesi 4
1.5 Kestirim 5
1.6 Belirsizlik Ortamında Karar Verilmesi 5

2

SAYISAL BİLGİNİN ÖZETLENMESİ 7

2.1 Anakütle ve Örneklem 7
2.2 Sayısal Özet: Merkezî Eğilim Ölçüleri 9
(i) Aritmetik Ortalama 9
(ii) Ortanca 13
(iii) En Sık Değer (Mod) 15
2.3 Sayısal Özet: Yayıklık Ölçüleri 16
(i) Varyans ve Standart Sapma 17
(ii) Ortalama Mutlak Sapma 25
(iii) Aralık 27
(iv) Dördebölenler Aralığı 28
2.4 Sınıflanmış Veriler ve Histogram 33
2.5 Sınıflanmış Verilerin Sayısal Özeti 41
2.6 Başka Bazı Çizim Yöntemleri 58
(i) Çubuk Çizimi 59
(ii) Zaman Serisi Çizimi 61
(iii) Pasta Çizimi 62
(iv) Serpilme Çizimi 63
(v) Kutu Çizimi 64
2.7 İstatistikle Yalan Söyleme 67
(i) Duygusal ve Yanıltıcı Söylemler 67
(ii) Yetersiz Sayısal Özetler 68
(iii) Zaman Serisi Çizimlerinde Ölçek Seçimi 68
(iv) Uygun Olmayan Çizim Ölçeği Karşılaştırmaları 70

(v) Gerçekten Rastlantı Olan Raslantılar 72
(vi) Çok Küçük Örneklemlerden Genelleme 73
Bölüm Sonu Alıştırmaları 76

3

OLASILIK 81
3.1 Giriş 81
3.2 Rassal Deneme, Sonuç, Olay 82
3.3 Olasılık Nedir? 91
3.4 Olasılık ve Önermeleri 94
3.5 Permütasyon ve Kombinasyon 100
3.6 Olasılık Kuralları 105
3.7 İki Değişkenli Olasılık 118
3.8 Bayes Teoremi 124
Bölüm Sonu Alıştırmaları 133

4

KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER VE BUNLARIN OLASILIK DAĞILIMLARI 139
4.1 Rassal Değişkenler 139
4.2 Kesikli Rassal Değişkenlerin Olasılık Dağılımları 141
4.3 Kesikli Rassal Değişkenlerin Beklenen Değerleri 146
4.4 Ortak Dağılımlı Kesikli Rassal Değişkenler 156
4.5 Binom Dağılımı (İkiterimli Dağılım) 170
4.6 Hipergeometrik Dağılım 177
4.7 Poisson Dağılımı 180
Bölüm Sonu Alıştırmaları 189

5

SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER VE BUNLARIN OLASILIK DAĞILIMLARI 193
5.1 Sürekli Rassal Değişkenler 193
5.2 Sürekli Rassal Değişkenlerin Olasılık Dağılımları 194
5.3 Sürekli Rassal Değişkenlerin Beklenen Değerleri 201
5.4 Ortak Dağılımlı Sürekli Rassal Değişkenler 205
5.5 Normal Dağılım 211
5.6 Merkezî Limit Teoremi 225
5.7 Binom ve Poisson Dağılımlarının Yaklaşığı Olarak Normal Dağılım 228
5.8 Üstel Dağılım 234
Bölüm Sonu Alıştırmaları 237

6

ÖRNEKLEME VE ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI 243

6.1 Anakütleden Örneklem Çekmek 243
6.2 Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı 248
6.3 Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı 255
6.4 Örneklem Varyansının Örnekleme Dağılımı 266
Bölüm Sonu Alıştırmaları 276
Ek A6.1 280

7

NOKTA TAHMİNİ 283

7.1 Giriş 283
7.2 Sapmasız Tahmin Ediciler ve Bunların Etkinlikleri 286
7.3 Nokta Tahmin Edicisinin Seçimi 293
Bölüm Sonu Alıştırmaları 295

8

ARALIK TAHMİNİ 299

8.1 Güven Aralıkları 299
8.2 Bir Normal Dağılım Ortalamasının Güven Aralıkları: Anakütle Varyansı Biliniyor 301
8.3 Student *t* Dağılımı 311
8.4 Bir Normal Dağılım Ortalamasının Güven Aralıkları: Anakütle Varyansı Bilinmiyor 315
8.5 Anakütledeki Oranın Güven Aralıkları (Büyük Örneklemlerde) 322
8.6 Normal Dağılmış Bir Anakütlenin Varyansının Güven Aralıkları 326
8.7 Normal Dağılmış İki Anakütlenin Ortalamaları Arasındaki Farkın Güven Aralıkları 332
8.8 İki Anakütle Oranları Arasındaki Farkın Güven Aralıkları (Büyük Örneklemlerde) 342
8.9 Örneklem Büyüklüğünün Tahmini 348
Bölüm Sonu Alıştırmaları 353

9

ÖNSAV SINAMASI (HİPOTEZ TESTİ) 359

9.1 Önsav Sınaması Kavramları 359
9.2 Bir Normal Dağılım Ortalamasının Sınanması: Anakütle Varyansı Biliniyor 366

9.3 Bir Normal Dağılım Ortalamasının Sınanması: Anakütle Varyansı Bilinmiyor 377
9.4 Bir Normal Dağılım Varyansının Sınanması 384
9.5 Anakütledeki Oranın Sınanması (Büyük Örneklemde) 388
9.6 İki Ortalama Arasındaki Farkın Sınanması 393
9.7 İki Anakütledeki Oranlar Arasındaki Farkın Sınanması (Büyük Örneklemlerde) 402
9.8 Normal Dağılmış İki Anakütledeki Varyansların Birbirlerine Eşitliğinin Sınanması 409
9.9 Bir Sınamanın Gücünün Ölçülmesi 413
9.10 Önsav Sınaması Üzerine Bazı Sözler 419
Bölüm Sonu Alıştırmaları 423

10

KATSAYISAL OLMAYAN BAZI SINAMALAR 431
10.1 Giriş 431
10.2 İşaret Sınaması 432
10.3 Wilcoxon Sınaması 437
10.4 Mann-Whitney Sınaması 442
10.5 Tartışma 446
Bölüm Sonu Alıştırmaları 450

11

UYUMUN İYİLİĞİ SINAMALARI VE ÇAPRAZ ÇİZELGELER 453
11.1 Uyumun İyiliği Sınaması 453
11.2 Uyumun İyiliği Sınaması: Anakütle Katsayıları Bilinmiyor 459
11.3 Çapraz Çizelgeler 464
Bölüm Sonu Alıştırmaları 472

12

DOĞRUSAL KORELASYON VE REGRESYON 477
12.1 Korelasyon (İlişki) 477
12.2 Sıra Korelasyonu 487
12.3 Doğrusal Regresyon (Bağlanım) Modeli 493
12.4 En Küçük Karelerle Tahmin 498
12.5 Doğrusal Regresyon Modelinin Standart Varsayımları 503
12.6 Gauss-Markov Teoremi 504
12.7 Doğrusal Regresyon Modelinin Açıklama Gücü 505
12.8 Güven Aralıkları ve Önsav Sınamaları 513
12.9 Kestirim 519

Bölüm Sonu Alıştırmaları 527
Ek A12.1 533

13

ÇOKLU REGRESYON 535
13.1 Çoklu Regresyon Modeli 535
13.2 En Küçük Kareler Tahmini 543
13.3 Çoklu Regresyon Modelinin Standart Varsayımları 546
13.4 Gauss-Markov Teoremi 547
13.5 Bir Çoklu Regresyon Modelinin Açıklama Gücü 548
13.6 Tekil Anakütle Regresyon Katsayılarının Güven Aralıkları ve Önsav Sınamaları 558
13.7 Anakütle Regresyon Katsayı Kümelerine İlişkin Sınamalar 567
13.8 Kestirim 573
13.9 Regresyon Hesaplamaları için Bilgisayar Yazılımları 581
Bölüm Sonu Alıştırmaları 588
Ek A13.1 596

14

REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİNE EK KONULAR 601
14.1 Model Kurma Yöntemi 601
(i) Modelin Kurulması 602
(ii) Katsayıların Tahmini 603
(iii) Modelin Doğrulanması 603
(iv) Yorumlama ve Çıkarsama 604
14.2 Gölge Değişkenler 604
14.3 Gecikmeli Bağımlı Değişkenler 608
14.4 Doğrusal Olmayan Modeller 621
14.5 Model Kurma Sapması 625
14.6 Çoklu Doğrusallık 628
14.7 Değişen Varyans 637
14.8 Ardışık Bağımlı Hata Terimleri 643
14.9 Özet 658
Bölüm Sonu Alıştırmaları 661

15

VARYANS ÇÖZÜMLEMESİ 671
15.1 Birkaç Anakütle Ortalamasının Karşılaştırılması 671
15.2 Tek Yönlü Varyans Çözümlemesi 674
15.3 Kruskal-Wallis Sınaması 684

15.4 İki Yönlü Varyans Çözümlemesi: Her Gözde Bir Gözlem, Rassal Bölüntüler 690
15.5 İki Yönlü Varyans Çözümlemesi: Herr Gözde Birden Çok Gözlem 702
(i) Öbek Ortalamaları 704
(ii) Bölüntü Ortalamaları 704
(iii) Göz Ortalamaları 705
(iv) Genel Ortalama 706
Bölüm Sonu Alıştırmaları 715

16

İSTATİSTİKLE KALİTE DENETİMİ 723
16.1 Kalite Denetiminin Önemi 723
16.2 Ortalama ve Standart Sapmaların Denetim Çizgeleri 726
16.3 Sürecin Yeterliliği 738
16.4 Oranların Denetim Çizgeleri 741
16.5 Gerçekleşme Sayılarının Denetim Çizgeleri 746
16.6 Özet 748
Bölüm Sonu Alıştırmaları 751
Ek A16.1 755
Ek A16.2 758

17

ZAMAN SERİLERİNİN ÇÖZÜMLENMESİ VE KESTİRİM 761
17.1 Zaman Serisi Verileri: Sorunlar ve Fırsatlar 761
17.2 Endeks Sayıları 762
17.3 Rassallık İçin Katsayısal Olmayan Bir Sınama 773
17.4 Bir Zaman Serisinin Bileşenleri 777
17.5 Hareketli Ortalamalar 783
17.6 Hareketli Ortalamalar Kullanılarak Mevsim Etkisinin Bulunması 785
17.7 Basit Üstel Düzleme 796
17.8 Holt-Winters Üstel Düzleme Kestirim Modeli 800
17.9 Ardışık Bağlanım Modelleri 813
17.10 Ardışık Bağlanımlı, Bütünleşik, Hareketli Ortalama Modelleri 820
Bölüm Sonu Alıştırmaları 823

18

ALAN ARAŞTIRMASI ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ 827
18.1 Giriş 827

18.2 Örnekleme Hataları ve Örnekleme Dışı Hatalar 833
18.3 Basit Rassal Örnekleme 836
18.4 Katmanlı Örnekleme 845
18.5 Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi 859
18.6 Başka Örnekleme Yöntemleri 865
Bölüm Sonu Alıştırmaları 877

19

İSTATİSTİKLE KARAR VERME KURAMI 881
19.1 Belirsizlik Ortamında Karar Verme 881
19.2 Olasılıkların Belirlenmesini Gerektirmeyen Çözümler 885
(i) Maximin (En düşüklerin en yükseği) Ölçütü 885
(ii) Minimax (En yükseklerin en düşüğü) Pişmanlık Ölçütü 887
19.3 Beklenen Parasal Değer 891
19.4 Örneklem Bilgisinin Kullanımı: Bayesgil Çözümleme 899
19.5 Örneklem Bilgisinin Değeri 904
19.6 Riskin Hesaba Katılması: Fayda Çözümlemesi 920
Bölüm Sonu Alıştırmaları 929

EK ÇİZELGELER 931
1 Binom Dağılımının Olasılık Fonksiyonu 931
2 $e^{-\lambda}$ Değerleri 936
3 Standart Normal Dağılımın Birikimli Dağılım Fonksiyonu 937
4 Türdeş Dağılmış Kimi Rassal Sayılar 939
5 Ki-kare Dağılımı Fonksiyonunun Eşik Değerleri 940
6 Student t Dağılımının Eşik Değerleri 941
7 F Dağılımının Eşik Değerleri 942
8 Wilcoxon Sınama İstatistiği Dağılımının Eşik Değerleri 944
9 Spearman Sıra Korelasyonu Katsayısı Dağılımının Eşik Değerleri 945
10 Durbin-Watson Sınama İstatistiği Dağılımının Eşik Değerleri 946
11 Dizilim Sınama İstatistiğinin Birikimli Dağılım Fonksiyonu 948

SEÇİLMİŞ ÇİFT SAYILI ALIŞTIRMALARIN YANITLARI 949

DİZİN 967

ÖNSÖZ

Üniversite işletme programlarının hepsinde istatistik dersi vardır ve bu programların büyük çoğunluğunda da zorunlu derstir. Bu ders grip aşısından daha az sevimlidir ama en az o kadar yararlıdır. İstatistik kavramlarının ve uygulama olanaklarının anlaşılması, günümüz yöneticisi için yaşamsal önem taşır. Sayısal bilgilerin derlenmesinin ve belirsiz bir ortamda karar verme aracı olarak akla uygun biçimde yorumlanmasının zorunlu olduğu iş yaşamında istatistik yöntemleri çok yaygın kullanılır.

Bu kitabın dördüncü baskısını hazırlarken, istatistik kavramlarının hepsinin bir bakışta anlaşılan türden olmadıklarını hiç unutmadım. Çeşitli tekniklerin gerisinde yatan akıl yürütmeleri ortaya çıkarmaya, bu tekniklerin uygulanma yollarını açıklamaya çalıştım. Öğrencinin belli durumlarda hangi veri çözümleme yöntemini, neden ve nasıl kullanmasının uygun olduğunu bulabileceği umudundayım. Öğrenci konuya bu açıdan yaklaşmalıdır. İstatistik yöntemlerinin temellerini anlamak, bu yöntemlerin ayrıntılarını, bir yemek kitabındaki tariflermiş gibi, ezberlemeye kalkışmaktan çok daha önemlidir. Bu kitabı okuyacakların çoğu, istatistik verilerinin üreticisi olmaktan çok tüketicisi olacaktır. Bu kitabın onlara, istatistik iddialarının temellerini anlamak ve bu iddiaları eleştirel bir gözle algılamak anlamında, bilinçli tüketiciler olmada bir yararı dokunacağını umarım. Yöntemin anlaşılmasına yardımcı olmak amacıyla, kitaba çok fazla sayıda sayısal örnek koydum. Bunlar, belli yöntemlerin geçerli olacakları durumların gerçekçi örnekleri olma niyeti taşımaktadır. Kitaba çok sayıda alıştırma da eklenmiştir. Her konuda verilen çeşitli alıştırmaları çözmek, öğrencinin konuyu anlamasını biçimlendirecek ve ona değerli bir uygulama deneyimi kazandıracaktır.

Konunun uygulamayla ilişkili olduğuna öğrencileri inandırabilmek için, iş yaşamının çeşitli alanlarından seçilmiş pek çok gerçek ve gerçekçi örnekle alıştırma verilmiştir. Finansman, iktisat, iş ahlakı, muhasebe, sınai örgütlenme, örgütsel davranış bu alanlar arasında sayılabilir. Bu örnekler yığınının, okuyucuyu günümüz iş yaşamında istatistik yöntemlerinin önemli olduğuna inandırması ve onun konuya olan ilgisini uyandırması beklenmektedir.

Bu kitap, iktisat ya da işletme eğitiminde bir ya da iki dönemlik dersler için uygundur. İki dönemlik bir derse gerekli olandan daha çok konu ele alınmaktadır ve çoğu öğretim üyesi her bölümü ayrıntılarıyla işlemeyecektir, hele bir de dönemin önemli bir bölümü dönem ödeviyle geçecekse... 10, 11, 14-19. Bölümlerin tamamı ya da bazı kısımları süreklilik kaybına yol açmadan atlanabilir. Bir dönemlik bir ders için çeşitli seçeneklerden biri 1-9, 12. Bölümleri, belki 13. Bölümü işlemektir. Böyle bir derste öğretim üyesi 2.6, 2.7, 4.6, 4.7, 5.8, 7.3, 9.9, 12.2 altbölümlerini atlamak isteyebilir.

Bu kitap, Illionis Üniversitesi'nde okutulan ve 1-9, 11-14 ve 17. Bölümlerdeki konuların çoğunun işlendiği iki dönemlik bir derste geliştirilmiştir. Yararlı tartışmalar, öneriler ve eleştirileri için pek çok meslektaşıma, araştırma görevlisine, hepsinden öte öğrencilerime teşekkür borçluyum. Anında verilen bu tepkilerin çoğunun anlatımdaki duruluğu artırdığını umuyorum.

Elinizdeki yeni baskıyı hazırlarken, özellikle istatistikle kalite denetimi konusunda yeni eklemeler yaptım ve kitaba belli istatistik yöntemlerinin kullanımına ilişkin çok sayıda örnek ekledim. Ancak, daha önceki baskıların iki önemli özelliğini korumaya ve geliştirmeye özen gösterdim. Bunlardan biri, temel cebirin ötesinde matematik kullanmayarak, çeşitli tekniklerin neden ve nasıl işe yaradıklarını açıklamadaki özen ve duruluk, ötekiyse iş yaşamından ve iktisattan alınan gerçek verileri içeren çok sayıda örnek ve alıştırma vermektir.

Bu ve bundan önceki baskıların hazırlanmasında bir biçimde yardımı dokunan meslektaş, araştırma görevlisi ve öğrencilerin sayısı tek tek anılamayacak kadar yüksektir. Ama bu baskıya yaptıkları katkılar nedeniyle şu meslektaşlarımı anmak gerekir:

Y. C. Chang
University of Notre Dame

S. B. Fotopoulos
Washington State University

Frank P. Jozsa, Jr.
Allentown College

Janice Lonergan
Augustuna College

William I. Notz
Ohio State University

Donald Richter
NYC School of Business

Stan Taylor
California State University, Sacramento

Prentice Hall'daki editörlerim Rich Wohl ile Tom Tucker'a ve kusursuz daktilosu nedeniyle Naoko Miki'ye ayrıca teşekkür etmek isterim. Kuşkusuz kalan bütün kusurlar yazarın sorumluluğudur.

Önsözü gerçekten okuyan çok çok küçük bir öğrenci azınlığına da istatistik çalışmalarında başarılar dilerim. Umarım iş yaşamının çeşitli alanlarında istatistiğin geçerli ve değerli olduğuna inanırlar.

—Paul Newbold

BÖLÜM 1

İstatistik Nedir?

Nasıl olsa okuyucuların çoğu kitapların giriş bölümünü okumadan geçtiklerine göre, başlıktaki soruyu "İstatistik, istatistikçilerin yaptığı iştir" diye yanıtlayıp bir sonraki bölüme atlamak geliyor insanın içinden. Ama editörüm, insanların biraz daha fazlasını beklediklerini o denli inatla savundu ki, sonunda giriş sözlerini olabildiğince kısa tutarak gelenekle uzlaşmaya karar verdim.

Zorunlu istatistik derslerinden pek olumlu söz edilmez. Gerçekten de, sıradan bir Amerikan üniversitesi yerleşkesinde böyle bir derse yazılmak, hoşlanma açısından, içki içmeyi belli bir yaşla sınırlayan yasa ile zorunlu askerlik arasında bir konumda yer alır. Bu kötü tanınma bir dereceye kadar haklıdır. Hem kullanılan kavramlar ilk bakışta kolayca anlaşılamaz, hem de bu konudaki ciddi bir dersi izlemek için sıkı çalışmak gerekir. Ancak zaman zaman dile getirilen şu yakınma kesinlikle haksızdır: **İstatistiğin gerçekle ilgisi yoktur.** Bu bölümün geri kalanı, özellikle de işletme ve iktisat sorunlarına ilişkin olarak, bu noktanın açıklanmasına ayrılmıştır.

İstatistik, istatistikçilerin yaptığı iştir. Asıl önemli olan, istatistikçilerin ilgilendiği işlerin yelpazesidir. Bu işler, günlük iş yaşamıyla iktisadi yaşamdaki hemen her noktaya değinmektedir. Bu işleri altı genel başlık altında toplayacağız.

1.1 SAYISAL BİLGİDEN ANLAM ÇIKARILMASI

Bir iş ortamında çalışan her yönetici o ortamın özelliklerine ilişkin olabildiğince çok bilgiye gereksinme duyar. Çağımızda, kısmen bilgisayarların çok büyük

çapta bilgi saklayabilmeleri nedeniyle, bu bilginin çoğu **niceldir**. Örnek olarak, faiz oranları, menkul değer fiyatları, para arzı ya da işsizlikteki dalgalanmaları birbiriyle bağdaştırmak gerekebilir. Bir ürüne olan talebin gücünü belirleyebilmek için piyasa araştırmaları yapılır. Bir denetmen, alacaklar hesabında ortaya çıkan hataların sayısıyla ve büyüklüğüyle ilgilenir. Bir insan kaynakları yöneticisi, kişisel görüşlerinin yanısıra, işe alınacak adayların beceri sınavı sonuçlarını da kullanabilir. Bu dizi sonsuza kadar uzatılabilir.

Bu örneklerin ortak özellikleri, özümsenecek bilginin *sayısal* nitelik taşıması, ayrıca, ham biçimiyle miktarının, bütünüyle anlaşılmasını neredeyse olanaksız kılacak kadar büyük olmasıdır. İstatistikçinin işlevi, bu büyük sayısal bilgi havuzunun önemli özelliklerini ortaya çıkarmak, bunların bir bileşimini yapmaktır. Amaçlardan biri, sayısal verileri anlamlı kılmaya çalışırken, onları Önemlerinden pek bir şey kaybettirmeden özetleyerek, kolayca kavranabilir bir resmi ortaya koyabilmektir.

Sayısal verilerin kapsamlı çözümlemeleriyle bileşimlerini yaparken çeşitli noktalar önem kazanır. En uygun yöntem, sayısal bilginin doğasına ve nasıl kullanılacağına bağlı olarak belirlenebilir. Kimi durumlarda, bu kitabın sonraki bölümlerinde ele alınacak biçimsel teknikleri içeren ağır silahlar deposundan bazı tekniklerin kullanılması gerekebilir. Başka durumlardaysa, görece yalın sayısal ya da görsel bir özet yeterli olabilir ve daha derinlemesine bir çözümlemeye her zaman iyi bir temel oluşturabilir. 2. Bölümde, sayısal bilgilerin özetlenmesine yarayan kimi teknikleri göreceğiz.

1.2 BELİRSİZLİĞİN ELE ALINMASI

Bu bölümün başında sorulan sorunun ikinci bir yanıtı şudur: "İstatistik, belirsizliğin bilimidir." İstatistikte, ne *olduğu* sorusuyla değil de, ne *olabileceği*, neyin *olanaklı* olduğu, neyin *olası* olduğu sorularıyla ilgileniriz. Şu söylemleri ele alalım:

> "IBM pay senetlerinin fiyatı altı ay sonra bugünkünden daha yüksek olacaktır."
>
> "Federal bütçe açığı öngörüldüğü gibi yüksek olursa, faiz oranları yılın geri kalan bölümünde yüksek düzeyini koruyacaktır."
>
> "Eğer bu fiyatı verirsek, rakiplerden düşük fiyat vermiş olur, ihaleyi de kazanırız."
>
> "Bu ürünün pazar payını geliştirmenin en iyi yolu, 18-25 yaş grubuna yönelik bir reklam kampanyasıdır."

Bu söylemlerin her birinde kullanılan kesinlik, bir miktar yapaylık içermektedir. Bu savlar ileri sürüldüğü sırada doğruluklarından *emin olmak* olanaksızdır. Her

ne kadar mali analist, önümüzdeki birkaç ay içindeki gelişmelerin IBM pay senedi fiyatlarını yükseltebileceğine inanabilirse de bundan emin olamaz. Öyleyse halis bir anlambilim bakış açısından bakıldığında bu tümcelerin, aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi, değiştirilmesi gerekir:

> "IBM pay senetleri fiyatının altı ay sonra bugünkünden daha yüksek olması *beklenmektedir.*"
>
> "Eğer bu fiyatı verirsek, rakiplerden düşük fiyat vermiş olmamız, ihaleyi de kazanmamız *olasıdır.*"

Ancak bizim belirsizlikle ilgilenmemiz, yalmzca anlambilim açısından değildir. Buraya kadar yaptığımız tek şey, kesin olmaması gereken kesin söylemlerin yerine gereksiz derecede bulanık söylemler geçirmek oldu. Öyle ya, "beklenmektedir" ya da "olasıdır" sözleri ne anlama gelir? Değiştirilmiş olan bu iki söylem belki de, ilgilenilen olayın gerçekleşmesi yönündeki beklentinin, gerçekleşmemesi beklentisinden daha yüksek olduğu biçiminde yorumlanabilir. Ama ne kadar daha yüksek? Dilimiz, belirsizliği tanımlayan sözcükler bakımından çok zengindir, gerçekten de bunların bazıları olanaksızlıktan kesinliğe kadar perde perde değişir. Yine de belli bir olayın gerçekleşmesine ilişkin belirsizliğin derecesini doyurucu bir biçimde tanımlayabilmek için, tek başına dil yetersiz kalır. Bunun yerine, bu amaca yönelik daha biçimsel bir yapı gerekmektedir.

Bu kitabın büyük bir bölümünde, sonucunun biçimsel bir belirsizlik diliyle söylenmesi gereken sorunlarla uğraşma yöntemlerini tartışacağız. Bir giriş yapmak üzere, bu dili —**olasılık**— 3. Bölümde tanıtacağız.

1.3 ÖRNEKLEME

Bir üretici bir ürünü pazara çıkarmadan önce, beklenen talep düzeyinin bir değerlendirmesini yapmak isteyebilir, bu amaçla bir pazar araştırmasına girişilebilir. Aslında üretici, olası alıcıların hepsini kapsayan **anakütle** ile ilgilenir. Ama sıradan bir pazar araştırmasında bu anakütlenin her üyesine başvurmak olanaksız değilse bile uygulanamayacak denli pahalı bir yoldur. Onun yerine anakütle üyeleri arasından küçük bir altküme —ya da **örneklem**— ile ilişki kurulur, anakütleye ilişkin çıkarsamalar bu örneklemden elde edilen bilgiye dayandırılır.

Büyük anakütlelerde örnekleme tekniği iş hayatında hep kullanılagelmiştir. Sözgelimi, bir üretim sürecinin sağlıklı işleyip işlemediği konusundaki kararlar, o sürecin çıktılarından alınan bir örneklemin kalitesine dayandırılır. Benzer biçimde, alacak hesaplarının denetlenmesi de genellikle bütün hesaplardan alınan bir örneklemle yapılır.

Elimizde bir anakütlenin örnekleminden elde edilen bilgi varken örneklem verilerinin sayısal bir özetini çıkarmak hemen her zaman kolaydır. Ancak, örneklem almak amacımız için bir araçtan başka bir şey değildir. Hedefimiz örneklem üzerine bir şeyler söylemek değil, tersine anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapmaktır. Öyleyse istatistikçinin asıl önemli sorunu, örneklemden bulunan sonuçlara dayanarak, anakütle için ne derecede genellemeler yapılabileceğidir.

Bir örneklem bir anakütleden çekildi diye, anakütlenin özelliklerini *tamı tamına* öğrenemeyiz kuşkusuz. Sözgelimi, alacak hesaplarından seçilmiş bir örneklem incelenmiş, bunlardan %8.2'si hatalı bulunmuş olsun. Buradan, anakütledeki bütün alacak hesaplarının *tam* %8.2'sinin hatalı olduğu sonucu çıkmaz. Anakütledeki bu orana ilişkin bir şeyler öğrenmiş olabiliriz ama onun kesin değerini bilemeyiz. Bir miktar belirsizlik hâlâ vardır. Demek ki örneklem bulgularına dayanarak anakütleye ilişkin çıkarsamalar yaparken varılan her sonuç doğal olarak, yukarıdaki altbölümde incelediğimiz gibi, belirsizlik dilini gerektirecektir.

Örneklem seçme yöntemlerin tartışmayı 18. Bölüme erteleyerek, örneklem verilerini çözümleme süreçlerini incelemeye 6. Bölümde başlayacağız.

Örnekleme yöntemlerinin önemli bir uygulaması ürün kalitesinin denetlenmesi alamndadır, bu konuyu da 16. Bölümde ele alacağız.

1.4 İLİŞKİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ

Para arzının artış hızı enflasyon oranını etkiler mi?

General Motors orta boy binek arabalarının fiyatını %5 artırırsa, bunun araba satışları üzerindeki etkisi ne olur?

Dağıttıkları kâr payları, toplam nakit akışları içinde yüksek bir orana ulaşan şirketlerin riski yüksek mi sayılır, düşük mü?

Hizmet işletmeleri, yerel tekel gücüne sahip oldukları bölgelerde mi, yoksa rekabet gördükleri bölgelerde mi daha kârlı çalışırlar?

Asgari ücret yasası işsizlik düzeyini etkiler mi?

Bu soruların her biri, sözkonusu iki ya da daha çok değişken arasında bir ilişki olabileceğiyle ve bu ilişkinin doğasıyla ilgilenir. Sözgelişi, %5 fiyat artışının araba satışları üstündeki etkisini araştıran soruyu yanıtlamaya nereden başlayabiliriz? Basit iktisat kuramı der ki, öteki her şey aymyken, fiyattaki bir artış talepte düşmeye yol açar. Ama bu kuram bütünüyle niteldir. Bize talebin *ne kadar* düşeceğini söylemez. Sözkonusu kuram, ürün talebi gibi, ilgilenilen büyük-

lükleri etkileyen etmenleri önermesi açısından son derecede değerlidir. Daha ileriye geçebilmek için, geçmişteki fiyat değişmelerine talebin nasıl tepki verdiğini ölçebileceğimiz nicel bilgiler derlememiz gerekir. Bundan sonraki değerlendirmemizi, geçmişte olanların, önerilen fiyat artışından sonra da yineleneceği görüşüne dayandırırız.

Araba örneğinde hedef, ilgilenilen değişkenlerin arasındaki ilişki konusunda sayısal bilgi toplamaktı. İlişkilerin çözümlenmesinde kullanılan süreçleri 11-14. Bölümlerde inceleyeceğiz.

1.5 KESTİRİM

Geleceği önceden bilebilme isteği çok insani bir özelliktir. Ancak, iş yaşamında güvenilir kestirimlere olan gereksinme meraktan da öteye geçer. Yatırım kararlarının yeni bir ürünün pazara sürülmesinden çok önce verilmesi gerekir. Birkaç yıl sonra olası pazar koşullarının nasıl olacağının kestirimi, açıktır ki çok istenen bir şeydir. Tutunmuş ürünlerde kısa dönemli satış kestirimleri, stok düzeylerini belirlemede ve üretimi planlamada önemli rol oynar. Yeni bir tahvil çıkarmayı düşünen bir şirket için gelecekteki faiz oranlarının kestirilmesi büyük önem taşır. Hükümet, tutarlı bir iktisat politikası ortaya koyabilmek için, gayrısafi yurtiçi ürün, işsizlik, enflasyon gibi değişkenlerin çeşitli politika seçenekleri karşısında alabilecekleri değerleri kestirmek gereğini duyar.

Gelecekteki değerlerin kestirimi, özünde, geçmiş davranışlardaki düzenliliklerin bulunmasıyla sağlanır. Bu nedenle, değeri kestirilecek değişkenin geçmiş davranışına ve onunla ilintili başka değişkenlerin davranışına ilişkin veriler derlenir. Bu bilgilerin incelenmesiyle, gelecekteki olası eğilimler ortaya konulabilir.

İş yaşamında kullanılan bazı kestirim yöntemlerini 17. Bölümde ele alacağız.

1.6 BELİRSİZLİK ORTAMINDA KARAR VERİLMESİ

Her işletmede kararlar, düşünülen çeşitli seçeneklerden çıkacak sonuçları belirleyecek etmenlerin gelecekteki davranışları konusunda karar vericinin emin olamadığı bir ortamda alınır.

Bir ihale için teklif verirken bir imalatçı, sözkonusu maliyetin gelecekteki toplamımn ne olacağından tam emin olamaz. Üstelik, rakiplerinin verdikleri teklifler konusunda da bilgisi yoktur. Bu belirsizliğe karşın, teklifin düzeyine karar vermek zorundadır. Bir yatırımcı, portföyündeki pay senetleri, tahviller, para piyasası araçları arasında bir denge kurmaya çalışırken, bunu, piyasanın gelecekteki hareketlerini bilmeden yapmak zorundadır. Gelecekteki olası geliş-

meler konusunda bir düşüncesi olabilir, ama geleceği tam bir kesinlikle kestirmesi olanaksızdır.

Bu örnekler, iş yaşamında karar alırken, olası seçenekler üzerinde düşünebilmek için, belirsizliği dikkate alan tekniklerin geçerli olduklarının kaçınılmazlığını göstermektedir. 19. Bölümde, bu konuda işe yarayan bazı teknikleri göreceğiz.

Bu kitabın geri kalan bölümünde, sayısal bilgilerin çözümlenmesine yarayan bir dizi teknik tanıtacağız. Bunların amacı, daha iyi kararlar alabilmek için. belirsiz bir ortamı anlamamıza yardım etmektir. Ancak şu da vurgulanmalıdır ki, bu teknikler yöneticiye yararlı araçlardan başka bir şey değildir. Bunlar, iş ortamını yıllarca tanımanın, birikmiş deneyimin yerine geçmeyi amaçlamazlar, tersine, bu tanışıklığı keskinleştirmeye yardım ederler. Öyleyse, sayısal bilgilerin özenli bir teknik çözümlemesi, çoğu zaman hayli değerliyse de, sözkonusu ortamın nitel özelliklerinin incelenmesinden kaynaklanan uzmanlıkla işbirliğine girmedikçe pek verimli olmaz. İstatistik yöntemleri, iş ortamında geçerli öteki uzmanlıklarla ortaklık kurduklarında, çok değerli yönetim araçları olduklarını kanıtlamışlardır.

BÖLÜM 2

Sayısal Bilginin Özetlenmesi

2.1 ANAKÜTLE VE ÖRNEKLEM

Bugünün dünyasında sayıların gerçek bir yaylım ateşiyle dört bir yandan saldırıya uğradığımız önermesini sık sık duyarız. "Dow-Jones ortalaması bugün 6 puan düştü," "Tüketici Fiyat Endeksi geçen ay %0.8 yükseldi" ya da "son araştırmaya göre Başkan'ın onaylanma oranı %40 düzeyindedir" gibi söylemlerin etkisini özümsemeden bir gazete okumak ya da bir haber dinlemek olanaksızdır. Borsanın durumu, enflasyonun hızı, seçmenlerin başkamn başarısı konusundaki görüşleri gibi konular, pek çoğumuzu ilgilendirir. Bu alanlardaki güncel değişmelerin akıllıca bir değerlendirmesini yapabilmek için, önemli miktarda sayısal bilginin özümsenmesi ve yorumlanması gerektiği anlaşılmaktadır. Kuşkusuz, derlenen bu bilgilerin miktarı, son birkaç yıldır olağanüstü bir hızla artmıştır. Devlet bu gelişmeye, hem kendi derleme çabalarıyla hem de şirketleri bazı bilgileri açıklamaya zorlayarak katılmıştır. Özel kesim de kendine düşeni yapmıştır. Seçmen eğilimi konusunda çok iyi tanınan Gallup araştırmaları ile televizyon programlarının haftalık Nielsen sıralamaları, pazar araştırmaları buzdağının yalnızca görünen ucudur. Büyük şirketlerin yıllık "faaliyet raporları", kuruluşun çeşitli yönlerine ilişkin sayısal bilgilerin büyük boyutlara varması nedeniyle

özümsenemez konuma düşmüştür. Bu gelişmelerden önemli ölçüde elektronik bilgisayarlar sorumludur. Hesaplamalardaki gelişmeler, birkaç yıl önce başa çıkılamaz görünen boyutlardaki bilgilerin saklamasını, bunlara erişilmesini ve bunların çözümlenmesini epeyce kolaylaştırmıştır. Sonuçta, ilgilendiğimiz bir konunun sayısal yönünü düşünmeye gittikçe daha çok zorlanmamız yaşamın bir gerçeği olmuştur. Çoğu kimse için bu gelişme kafa karıştırıcı, birçok başkaları için tedirgin edicidir. İstatistikçiler içinse bir gelir kapısıdır.

Birilerinin bu sayısal bilgiyi anlaşılır kılması gerekir. Tıpkı kendi elektrik tamirlerimizi kendimiz yapmada özgür olduğumuz gibi, bu sayıları istediğimiz gibi yorumlamada da kuşkusuz özgürüz. Ama bütün bu sayısal bilgilerin anlaşılır kılınması işi de pek öyle kolay değildir. Sözgelimi büyük bir kentteki her bir ailenin yıllık gelirine ilişkin veri yığınıyla karşılaşılınca ne yapılabilir? Tek tek gelirler üzerinde yoğunlaşmak başımızı ağrıtmaktan öte pek bir işe yaramaz. Yapılması gereken, elden geldiğince kolay ve basit bir biçimde verinin özünü ortaya çıkarmaktır. İstatistikçinin amacı, sayıların önemli özelliklerinin açık ve doğru bir görünümünü belirtecek biçimde, kısa bir özete ulaşmaktır. Aşırı kısaltmayla önemli özelliklerinin yitip gitmesine izin vermeden, bilgi yığınının olabildiğince küçülmesi istenir. Daha sonraki bölümlerde göreceğimiz gibi, sayısal verilerin çözümlenmesinde epeyce bir bilim gerekir ama sanat da daha önemli ölçüde işe karışır.

Bu bölümdeki amacımız, sayısal bilginin özetlenmesinde kullanılan kimi yöntemlere bir göz atmaktır. Bu tekniklerden kimileri sayısal özet ölçüler üretilmesini gerektirir, kimileri de doğası gereği görsel niteliktedir. Hepsinin çekici yanları olmakla birlikte, kimi özel uygulamalarda her birinin sakıncaları da olabilir. Veri çözümlemede tek bir "doğru yol" ne yazık ki yoktur. Tersine, verinin özelliklerine ve çözümlemenin amacına bağlı olarak, konuya yaklaşım yolu genellikle soruna özgüdür.

Sayısal verilerin özetlenmesi konusuna geçmeden veri kümelerinin iki türü arasındaki ayırımı ele alalım. 1000 haneli küçük bir kentteki hanehalkı gelirleri araştırmasında her bir hanehalkının gelirini elde etmek uygun olabilir. Bu veriler, o kentteki hanehalkı gelirlerinin eksiksiz bir kümesini ya da **anakütle**yi oluşturur. O zaman, toplanan bilginin yanlışsız olduğu varsayımıyla, bu anakütleye ilişkin öğrenilebilecek her şeyi bulabiliriz. Ama, bir önceki bölümde işaret ettiğimiz gibi, bir anakütlenin eksiksiz bir veri kümesini elde etmek çoğu zaman katlanılamayacak kadar pahalıya gelir. Bir araştırmacı çoğu zaman anakütlenin bir altkümesi ya da **örneklem**ini derleyebilir. Böylelikle bu kentten diyelim yalnızca elli hanehalkı geliri toplanabilir. Ancak, yalnızca örneklem alınmışsa çözümleme burada bitmez, çünkü araştırmacının amacı anakütleye ilişkin bilgi sahibi olmaktır. Bu kitabın daha sonraki bölümlerinde, örneklem bilgisine dayanarak anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapmanın bir sürü tekniğini göreceğiz Bu bölümde, ister bir örneklemden, ister bir anakütleden gelsin sayısal bilgilerin özetlenme süreçlerini ele alacağız. Teknikler her iki durumda da birbirine çok benzer, ancak zaman zaman kimi gösterim farklarını belirtmeyi uygun bulacağız.

Tanımlar

Anakütle, bir araştırmacının ilgilendiği belli bir büyüklüğe ilişkin eksiksiz sayısal bilgi kümesidir.

Örneklem, anakütle değerlerinin gözlenen altkümesidir.

Veri kümelerinin sayısal özet ölçülerini Altbölüm 2.2 ile 2.3'te ele alacağız, kimi çizimleri Altbölüm 2.4-2.6'da göstereceğiz. Çoğu uygulamada hem sayısal, hem görsel yaklaşımları kullanmak en iyi yol olabilir.

2.2 SAYISAL ÖZET: MERKEZÎ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

Çizelge 2.1, küçük bir şirkette çalışan yedi ustabaşının yıllık ücretlerini göstermektedir. Çizelgedeki sayılara şöyle bir göz atmak, şu yalın gerçeği ortaya koyar: Bu ücretlerin hepsi aynı değildir, yani ücretlerin bir yayıklığı ya da **dağılımı** vardır. Bunu göstermenin en kolay yolu, verileri, her nokta tek bir gözlemi temsil edecek biçimde Çizim 2.1'deki gibi yerleştirmektir.

Çizelge 2.1'deki sayıları özetlemeye çalışırken, dağılımlarının merkezine bakarak işe başlayabiliriz. Böyle bir amaçla bulunan özet ölçülerine **merkezî eğilim ölçüleri** denir. İşletme sorunlarında bu türden çeşitli ölçüler kullanılır. Bu altbölümde bunların üçünü ele alacağız.

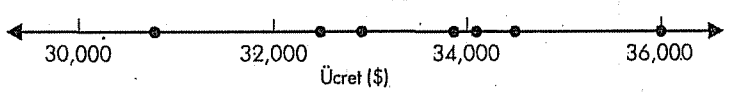
(i) ARİTMETİK ORTALAMA

Merkezî konumun hemen akla gelen bir ölçüsü ortalamadır. İstatistikte ortalama **aritmetik ortalama** adını alır.

ÇİZELGE 2.1 Ustabaşıların yıllık ücretleri

34,500 $	30,700 $	32,900 $	36,000 $	34,100 $	33,800 $	32,500 $

ÇİZİM 2.1 Ustabaşıların yıllık ücretleri; Çizelge 2.1 verileri.



Tanım

Bir sayısal gözlemler kümesinin **aritmetik ortalaması**, küme toplamının gözlem sayısına bölümüdür, yani ortalamasıdır.

Öyleyse Çizelge 2.1'deki ustabaşıların yıllık ortalama ücreti şudur:

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{34{,}500+30{,}700+32{,}900+36{,}000+34{,}10+33{,}800+32{,}500}{7}$$

$$= 33{,}500\,\$$$

Bu ustabaşılarm ortalama ücreti, ya da ücretlerinin aritmetik ortalaması, 33,500 $'dır.

Bir ortalamayı bulurken yapılan işlemlerin sözle açıklanması zor değildir. Ancak, daha sonra karşılaşacağımız aritmetik işlemlerin cebirle gösterilmesi daha kolay olacaktır. Gelin, herhangi bir veri kümesinin ortalamasını bulma işlemini açıklayan basit bir cebirsel formülü nasıl geliştireceğimizi görelim. Önce, anakütle verileri sözkonusuysa, gözlem sayısını N ile gösterelim. Örneğimizde,

$$N = 7$$

olacaktır. Sonra ilk gözleme x_1, ikinciye $x_2, \ldots$, sonuncuya da x_N diyelim. Böylece Çizelge 2.1'deki veriler için gösterim şöyle olur:

$$x_1 = 34{,}500 \qquad x_2 = 30{,}700 \qquad x_3 = 32{,}900 \qquad x_4 = 36{,}000$$

$$x_5 = 34{,}100 \qquad x_6 = 33{,}800 \qquad x_7 = 32{,}500$$

Örneklem verileriyle gösterim biraz farklıdır, gözlem sayısı n ile gösterilir. Bu gösterimler aşağıdaki çerçevede özetlenmiştir.

Gösterim

ANAKÜTLE: N tane gözlem $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ile gösterilir.

ÖRNEKLEM: n tane gözlem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile gösterilir.

Ortalama, bütün gözlemler toplanıp toplamın gözlem sayısına bölünmesiyle bulunur. Öyleyse anakütle ortalaması için şu cebirsel gösterimi yazabiliriz:

$$\text{Anakütle ortalaması} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \qquad (2.2.1)$$

(2.2.1) eşitliğinin sağ yanındaki payın, $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sayılarının *toplamı* olduğu bellidir. Kitabın daha sonraki bölümlerinde sık sık **toplama** işleminden söz edeceğiz. Burada, bu işlemi gösterecek bir simgeyi tanıtmak kolaylık sağlayabilir. Σ simgesi (Yunanca büyük harf "sigma") bu amaçla kullanılır.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

yerine şunu yazarız:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Bu gösterim şöyle okunur: "x_i sayılarını alın, $i = 1$'den (yani x_1'den) başlayarak toplayın, sırasıyla x_2, x_3, vd. toplama alın, $i = N$ olduğunda (yani x_N toplama alındığında) işlemi bitirin."

Toplama gösterimi daha genel bir biçimde de kullanılır. Diyelim ki, öncelikli olarak x_i sayılarıyla değil, bu tekil sayıların (logaritmaları ya da kareleri gibi) bir fonksiyonuyla ilgileniyor olalım. x_i büyüklüklerinin bir fonksiyonunu genellikle $g(x_i)$ ile göstereceğiz. Bu durumda bizim N tane sayımız için bu fonksiyonların toplamı

$$g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_N)$$

olur. Toplama gösterimiyle bunu daha kısa-öz olarak şöyle yazabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{N} g(x_i)$$

Toplama Gösterimi

(i) $x_1, x_2, \ldots, x_N$ bir sayılar kümesi olsun.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

(ii) $g(x_i)$, x_i'nin herhangi bir fonksiyonu olsun.

$$\sum_{i=1}^{N} g(x_i) = g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_N)$$

Çerçeve içindeki ikinci formülü açıklamak için $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sayılarının kareleri toplamını şöyle yazabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \Lambda\ x_N^2$$

Ortalamanın gösterimi artık toplama simgesi kullanılarak yazılabilir. Anakütle ortalamasını μ (Yunanca küçük harf "mü") ile örneklem ortalamasını da $\bar{x}$ ("x çizgi") ile göstereceğiz.

Ortalamalar için Cebirsel Gösterimler

(i) $x_1, x_2, \ldots, x_N$ anakütledeki N tane sayı olsun. Bu durumda **anakütle ortalaması** şudur:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

(ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ örneklemdeki n tane sayı olsun. Bu durumda **örneklem ortalaması** şudur:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ÖRNEK 2.1

Sekiz ABD şirketinin pay senedi başına kazançları, geçen yıla göre şu oranlarda değişmiştir:

%13.6 %25.5 %43.6 –%19.8 –% 13.8
%12.0 %36.3 %14.3

Pay senedi başına kazançların örneklem ortalamasım bulun.

Örneklemde $n = 8$ gözlem bulunmaktadır, öyleyse ortalama:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{13.6 + 25.5 + 43.6 + (-19.8) + (-13.8) + 12.0 + 36.3 + 14.3}{8}$$

$$= \%13.9625$$

olur. Demek ki bu örneklemde pay senedi başına kazançtaki ortalama değişme %13.9625 ya da yaklaşık olarak %14.0'dır.

ÖRNEK 2.2

Adi pay senetlerinin yedi yıl boyunca yıllık getiri oranları şöyle olmuştur:

%4.0 %14.3 %19.0 –%14.7 –%26.5 %37.2 %23.8

Bu dönemdeki getiri oranının anakütle ortalamasını bulun.

Yedi gözlemi ilgilenilen anakütle olarak alırsak, $N = 7$ olur. Bu durumda ortalama

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

$$= \frac{4.0 + 14.3 + 19.0 + (-14.7) + (-26.5) + 37.2 + 23.8}{7}$$

$$= \%8.1571$$

bulunur. Adi pay senetlerine yapılan yatırımın yedi yıl boyunca ortalama getiri oranı %8.1571'dir. Gösterim kolaylığı bakımından bu sonucu %8.2 olarak yuvalatmak en iyisidir. Ancak bu sonuç, bir sonraki altbölümde yer alan Örnek 2.4'teki gibi, başka büyüklüklerin hesaplanmasında ara bir adım olarak kullanılacaksa, daha fazla anlamlı basamağa gerek duyulur.

(ii) ORTANCA (MEDYAN)

Aritmetik ortalama, merkezî eğilim ölçüleri içinde sezgisel kavranabilen, kolayca yorumlanabilen bir ölçüdür; öteki ölçülerden daha sık hesaplanır. Ama bazı amaçlar için almaşık bir ölçü yeğlenebilir.

Çizelge 2.1'deki yedi ücreti yeniden ele alalım. Bunları artan bir sıraya dizersek şunu görürüz:

30,700 $ 32,500 $ 32,900 $ 33,800 $
34,100 $ 34,500 $ 36,000 $

Böyle sıralanmış verilerin orta değeri 33,800 $'dır. Ustabaşılardan üçü bundan daha yüksek, üçü daha düşük ücret almaktadır. Bu orta değer, bu gözlemlerin **ortancası** diye adlandırılır. Bu özel durumda gözlem sayısı tek olduğundan ortanca kolayca bulunabilir. Ama çift sayıda gözlem değeri varsa tek bir orta değer olmaz. Böyle durumlarda, gözlemler büyüklük sırasındayken ortadaki iki değerin ortalaması alınır.

Tanım

Bir gözlemler kümesinin **ortancası**, gözlemler büyüklük sırasına dizilmişken, gözlem sayısı tekse ortadaki değer, gözlem sayısı çiftse ortadaki iki değerin ortalamasıdır. Demek ki, büyüklük sırasına dizilmiş N tane gözlem varsa, ortanca, N tek iken $[(N+1)/2]$'nci gözlemdir, N çift iken $(N/2)$'nci gözlem ile $[(N+1)/2]$'nci gözlemin ortalamasıdır.

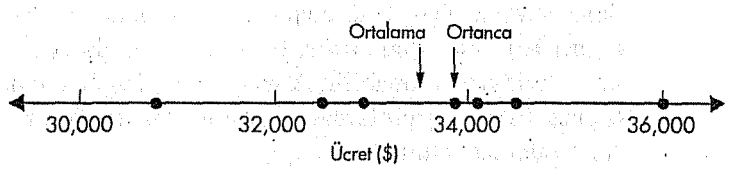
Çizelge 2.1'deki veriler için ortalamanın 33,500 $, ortancanın 33,800 $ olduğunu gördük. Bu iki değer birbirine çok yakındır, Çizim 2.2'den de görüleceği gibi, bu gözlemlerin merkezine ilişkin bir fikir edinirken hangisi kullanılırsa kullanılsın pek fark etmez. Ancak her örnekte durum böyle değildir.

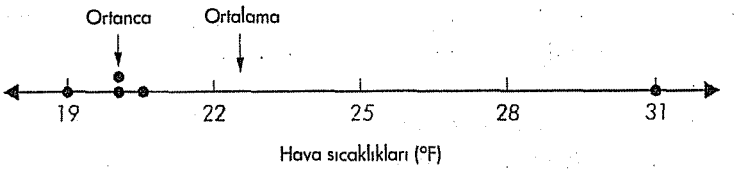
Evimden Illinois Üniversitesi'ne yürürken hava sıcaklığını gösteren üç aygıtın önünden geçerim. Bir gün ilk aygıtta sıcaklık 19°F, ikincide 31°F olarak okunuyordu. Bu bayağı kafa karıştırıcıydı ama bu aşamada gerçek sıcaklığı kestirmem için zorlansaydım, yapılabilecek en iyi şey bu iki sayının ortalamasını almak olacaktı. Yol üzerindeki üçüncü aygıta göre sıcaklık 20°F idi. 19, 31, 20 gibi üç okuma veriyken gerçek sıcaklık bunların aritmetik ortalamasıyla (23⅓°F) kestirilebilir. Ancak bu pek de istenen bir şey olmaz. Okunan iki değerin birbirine çok yakın olması dolayısıyla, 31°F gösteren aygıtın bozuk olmasından kuşkulanmak doğaldır. Öyleyse, üç gözlemin ortancası (20°F) gerçek sıcaklığın daha akla yakın bir kestirimini verir. O gün bir istatistik dersi vereceğimden, öğrencilerimin de gerçek örnekler konusunda yaptıkları yoğun baskılara daha fazla direnemeyeceğimden, dördüncü bir aygıta bakmak için yolumu uzattım. Bu kez sıcaklık 20°F idi. Bu aşamada bütün veriler şu dört gözlemden oluşuyordu:

19 20 20 31

Çizim 2.3'te gösterildiği gibi, bu değerlerin ortalaması 22.5°F, ortancası ise 20°F'dir. Bu durumda ortalama ile ortanca arasında biraz fark vardır, çoğumuz da belki ortancayı yeğleriz. 31°F gözlemi ötekilerden o kadar farklıdır ki kaçınılmaz olarak kuşku yaratmaktadır. Bu durumda bir merkezî eğilim ölçüsü bulmaya çalışan kimsenin eğilimi, bu gözleme görece olarak daha az bir ağırlık tanıması yönünde olacaktır.

ÇİZİM 2.2 Ustabaşıların yıllık ücretleri, ortalama ve ortanca ücret ile birlikte.





ÇİZİM 2.3 Aritmetik ortalaması ve ortancası ile birlikte dört hava sıcaklığı özlemi

Bu basit örnek genel bir özelliği yansıtmaktadır. Aritmetik ortalama, uç gözlemlerden önemli ölçüde etkilenirken, ortanca bu tür güçlü etkilere o kadar açık değildir. Sözgelimi, dört okumanın en yükseği olan 31°F yerine 21°F ya da 41°F geçse, ortanca sıcaklık aynı kalır.

Uç gözlemlere fazla ağırlık verilmesinin uygun görülmediği durumlarda ortanca, bir merkezî eğilim ölçüsü olarak aritmetik ortalamaya yeğ tutulur. Bir kentte, bir eyalette ya da bir ülkede hanehalkı gelirlerinin ya da servetlerinin dağılımı görece olarak az sayıda yüksek değerler içerir. Bunun sonucunda, bu tür dağılımlarda aritmetik ortalama, ortancadan biraz daha yüksek çıkar, dolayısıyla da merkezî eğilim ölçüsü olarak ortanca kullanılır. Hanehalklarının yarısının gelir ya da servetlerinin bu değerin üstünde olduğu biçiminde kolayca da yorumlanabilir. Çok zenginlerce yukarıya doğru çekilmiş ortalama ise topluluktaki sıradan bir hanehalkının iktisadi refahını fazla toz pembe gösterebilir.

Uç değerleri dikkate almama üstünlüğüne karşın ortanca, ortalamaya göre daha seyrek kullanılır. Bunun nedeni, ortalamaya dayalı çıkarsama süreçlerinin ve ortalamaya ilişkin ölçümlerin kuramsal geliştirilmesinin ortancaya dayalı süreçlerin geliştirilmesinden bir hayli daha kolay olmasıdır. Dolayısıyla çoğu istatistikçi, olağandışı uç değerlerin gereksiz etki yarattıkları durumlarla ilgili özel teknikleri çözümlemelerine katarak, aritmetik ortalama ve ona ilişkin ölçülerle çalışır.

(iii) EN SIK DEĞER (MOD)

Başka bir merkezî konum ölçüsüne, çerçeve içinde tanımlayarak, kısaca dikkat çekelim.

Tanım

Bir gözlem kümesinin **en sık değeri**, en sık rastlanan gözlemidir.

En sık değer kavramı, aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, gözlemlerin yinelendiği durumlarda geçerlidir.

ÖRNEK 2.3

Bir taşınabilir radyo üreticisi, bir haftalık üretimden elli tane radyoyu örneklem olarak seçmiştir. Her radyo iyice incelenip bulunan kusurların sayısı şöyle saptanmıştır:

KUSUR SAYISI	0	1	2	3
RADYO SAYISI	12	15	17	6

Bu örneklem için en sık değeri bulun.

İki kusur en çok yinelenen sayı olduğundan bu örneklemin en sık değeri 2'dir.

İşletme uygulamalarında en sık değer, ortalama ile ortancaya göre daha seyrek kullanılır. En sık değer belki de en belirgin olarak, hazır giyim gibi, çeşitli boylarda mal üreten imalatçılar tarafından kullanılır. Bu durumda satılan giysi boylarının en sık değeri, en fazla talep edilen boydur.

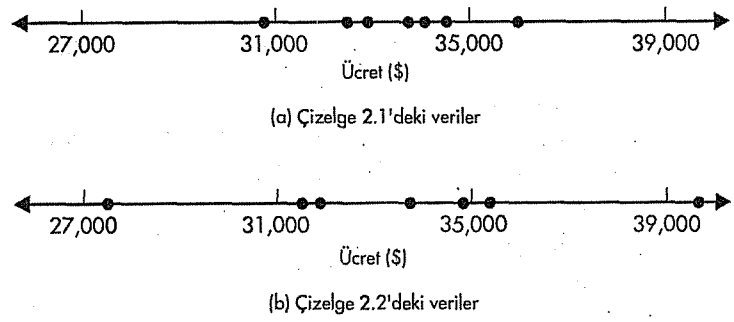
2.3 SAYISAL ÖZET: YAYIKLIK ÖLÇÜLERİ

Çizelge 2.2, ikinci bir şirketteki yedi ustabaşının ücretlerini göstermektedir. Bu çizelgedeki verilerin aritmetik ortalaması (33,500 $), Çizelge 2.1'dekiyle tam tamına aynıdır. Üstelik her iki veri kümesinde ortanca da aynıdır (33,800 $). Öyleyse kendimizi merkezî eğilim ölçüleriyle sınırlarsak, iki şirketin ücret dağılımları arasında bir fark görebilecek bir temelden yoksunuz demektir. Oysa, Çizim 2.4'ten de görüldüğü gibi, iki dağılım önemli bir açıdan birbirinden farklıdır, ikinci veri kümesi ilkinden daha *yayıktır*.

Bir merkezî eğilim ölçüsü kendi başına hemen hemen hiçbir zaman bir veri kümesinin özelliklerinin yeterli bir özeti olamaz. Genellikle buna ek olarak verideki yayıklığın derecesinin bir ölçüsüne gereksinme duyarız. Bu altbölümde bu türden çeşitli ölçüleri ele alacağız.

ÇİZELGE 2.2 İkinci bir şirketteki ustabaşıların ücretleri

34,900 $	27,500 $	31,600$	39,700 $	35,300 $	33,800 $	31,700 $



ÇİZİM 2.4 Ustabaşıların yıllık ücretleri

(i) *VARYANS VE STANDART SAPMA*

$x_1, x_2, \ldots, x_N$, ortalaması μ olan bir sayısal değerler anakütlesini göstersin. İlgimiz bu değerlerin yayıklığına yönelik olduğundan, bu değerlerin ortalamadan uzaklıklarına, yani

$$x_1 - \mu, x_2 - \mu, \ldots, x_N - \mu$$

farklarına bakmamız gayet doğaldır. Bazı anakütle değerleri ortalamadan yüksek, bazıları düşük olacağına göre, bu farkların kimisi artı, kimisi eksi değerli çıkacaktır. Gerçekten de bunlar toplamları sıfır olacak biçimde "birbirlerini götürürler".[1] Ancak yayıklığı ölçmeye çalışırken, bir gözlem ile ortalama arasındaki farkın işaretine bakılmaz. Eksi yönde bir farkı da, aynı büyüklükteki artı yönde bir fark ile eşit biçimde ele almamız gerekir. Sözgelimi, ortalamadan 1000 $ daha yüksek olan bir ücrete, ortalamadan 1000 $ daha düşük bir ücretle aynı önemi vermeliyiz. Bunu sağlamanın bir yolu da farkların kendilerine değil *karelerine* bakmaktır:

$$(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \ldots, (x_N - \mu)^2$$

Karesi alınmış bu farkların aritmetik ortalaması gözlemlerin **varyansı** denilen bir yayıklık ölçüsü verir. Toplama gösterimini kullanarak, varyansı σ^2 simgesiyle (σ Yunanca küçük harf "sigma"dır) şöyle yazabiliriz:

---

[1] Bu sonuç şöyle elde edilebilir:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = (x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \cdots + (x_N - \mu) \text{ S}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) - N\mu = N\mu - N\mu = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$$

Çizelge 2.1'deki ustabaşı ücretlerinin varyans hesaplamaları Çizelge 2.3'te açıklanmıştır. Burada anakütle ortalamasının 33,500 $ olduğu olgusu kullanılmıştır.

Çizelge 2.3'te gözlemlerin kendi ortalamasından farklarının kareleri toplamının

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = 16{,}900{,}000$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bu anakütlenin varyansı

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{16{,}900{,}000}{7} = 2{,}414{,}286$$

olur. Aynı yolu izleyerek Çizelge 2.2'deki, ortalaması yine 33,500 $ olan ücretlerin varyansım da bulabiliriz. Hesaplamalar Çizelge 2.4'te gösterilmiştir.
Gözlemlerin kendi ortalamasından farklarının kareleri toplamı

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = 86{,}580{,}000$$

olduğundan, bu anakütle varyansı aşağıdaki gibi olur:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{86{,}580{,}000}{7} = 12{,}368{,}571$$

ÇİZELGE 2.3 Çizelge 2.1'deki verilerin varyans hesaplamaları

x_i	$x_i - \mu = x_i - 33{,}500$	$(x_i - \mu)^2$
34,500	1,000	1,000,000
30,700	–2,800	7,840,000
32,900	–600	360,000
36,000	2,500	6,250,000
34,100	600	360,000
33,800	300	90,000
32,500	–1,000	1,000,000
Toplamlar	0	16,900,000

ÇİZELGE 2.4 Çizelge 2.2'deki verilerin varyans hesaplamaları

x_i	$x_i - \mu = x_i - 33{,}500$	$(x_i - \mu)^2$
34,900	1,400	1,960,000
27,500	–6,000	36,000,000
31,600	–1,900	3,610,000
39,700	6,200	38,440,000
35,300	1,800	3,240,000
33,800	300	90,000
31,700	–1,800	3,240,000
Toplamlar	0	86,580,000

Öyleyse ikinci şirketteki ücretlerin varyansının ilk şirkettekilerin varyansından büyük olduğunu görüyoruz. Bu da, Çizim 2.4'ten edindiğimiz, ikinci anakütlede daha büyük yayıklık olduğu izlenimini doğrulamaktadır.

Aşağıda verilen bir başka eşdeğer formül, hesaplama kolaylığı nedeniyle, bazen anakütle varyansını bulmada kullanılmaktadır:[2]

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2$$

Bu formül, *karelerin ortalaması eksi ortalamanın karesi* olarak kolayca akılda tutulabilir.

Artık varyans, iki ya da daha çok anakütle dağılımının yayıklıklarını karşılaştırmada kullanılabilir. Ancak, varyans hesaplanırken ortalamadan fark-ların karesi alındığından, tek bir anakütle varyansmın yorumu oldukça zordur. Yeniden başlangıçtaki ölçü birimine dönmenin basit bir yolu, varyansın kare-kökünü almaktır. Bulunan sonuca **standart sapma** denir, σ ile gösterilir. İlk şirketin ustabaşılarının maaşları için standart sapma

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}414{,}286} = 1{,}554\ \$$$

[2] Bu formülün eşdeğerliliği şöyle gösterilebilir:

$$\sum_{i=1}^{N}(x-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N}\mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2N\mu^2 + N\mu^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\mu^2$$

olur. Benzer biçimde, ikinci şirketteki ustabaşıların ücretleri şu standart sapmaya sahiptir:

$$\mu = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{12{,}368{,}571} = 3{,}517\ \$$$

Tanım

$x_1, x_2, \ldots, x_N$, ortalaması μ olan bir anakütlenin N tane üyesini göstersin. **Anakütle varyansı**, σ^2, bu değerlerin kendi ortalamalarından farklarının karelerinin ortalamasıdır.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2$$

Anakütle standart sapması σ ise bu varyansın (artı değerli) karekköüdür.

ÖRNEK 2.4

Örnek 2.2'de adi pay senetlerinin 7 yıl süreyle yıllık getiri oranlarını incelemiştik. Aynı dönemde ABD Hazine Tahvillerinin yıllık getiri oranı şöyle olmuştur:

%6.5 %4.4 %3.8 %6.9 %8.0 %5.8 %5.1

Bu iki anakütle dağılımını, ortalamaları ve standart sapmaları bakımından karşılaştırın.

Adi pay senetlerinin 7 yıllık ortalama getirilerini Örnek 2.2'de

$$\mu = \%8.1571$$

olarak bulmuştuk. Bu getirilerin kareleri toplamı şöyledir:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = (4.0)^2 + (14.3)^2 + (19.0)^2 + (-14.7)^2 + (-26.5)^2 + (37.2)^2 + (23.8)^2 = 3{,}450.11$$

Öyleyse varyans

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{3{,}450.1}{7} - (8.1571)^2 = 426.3346$$

ve standart sapma

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{426.3346} = \%20.6479$$

olur.

Hazine tahvillerinin ortalama getiri oranı

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{6.5+4.4+3.8+6.9+8.0+5.8+5.1}{7}$$

$$= \%5.7857$$

idi. Bu getiri oranlarının varyansı, önce kareler toplamı hesaplanarak şöyle bulunur:

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = (6.5)^2 + (4.4)^2 + (3.8)^2 + (6.9)^2 + (8.0)^2 + (5.8)^2 + (5.1)^2$$

$$= 247.31$$

Bu durumda varyans

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{247.31}{7} - (5.7857)^2 = 1.8557$$

olur. Dolayısıyla standart sapma da

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.8557} = \%1.3622$$

bulunur.

Bu iki yatırım türünün 7 yıl boyunca getiri oranı verileri, bütün sayılar virgülden sonra bir basamak kalacak biçimde yuvarlatılarak aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

	ADİ PAY SENEDİ	HAZİNE TAHVİLİ
Aritmetik ortalama	% 8.2	% 5.8
Standart sapma	% 20.6	% 1.4

Görüldüğü gibi, adi pay senetlerine yapılan yatırım daha yüksek getiri oranı göstermesine karşılık, Hazine tahvillerinin getirisi önemli ölçüde daha az değişkendir. Bu örneklem bağlamında standart sapmaya, yatırımın getirisiyle ilişkili belirsizliğin ya da riskin bir ölçüsü olarak bakılabilir. Burada, adi pay senetlerinin ortalama getirisinin Hazine tahvillerine göre daha yüksek olmasına karşın, getirilerin standart sapmasıyla ölçülen riskin de daha yüksek olduğunu görmekteyiz. (Finansman kuramının öngördüğü benzer sonuçlar, daha çok getiri gözlemi içeren veri kümelerinin çözümlenmesinde de ortaya çıkmaktadır.)

ANAKÜTLE STANDART SAPMASININ YORUMLANMASI

Buraya kadar, iki anakütlenin yayıklıklarının karşılaştırılmasında varyansın ya da standart sapmanın nasıl kullanılabileceğini gördük. Standart sapma tek bir anakütle için de yorumlanabilir. Bu değer özellikle, anakütle üyelerinin ortalamadan belli bir uzaklığa kadar olanlarının yüzdesini kestirmekte işe yarayabilir. Bu tür kestirimleri oluşturmak için iki kural yaygın olarak uygulanır. Bunlardan birincisi *her* anakütle için geçerlidir.

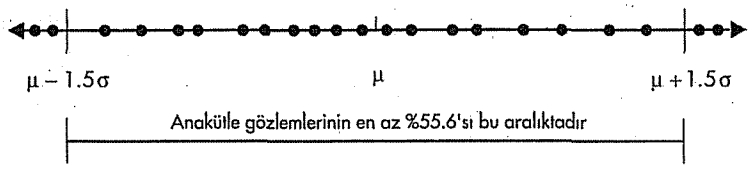
Çebişev (Tchebychev) Kuralı

Ortalaması μ, standart sapması σ olan her dağılımda anakütle üyelerinin *en az* $\%100(1 - 1/m^2)$ kadarı, $m > 1$ iken, ortalamadan en çok m standart sapma uzaklıktadır.

Çebişev kuralının uygulamada nasıl işlediğini görmek için şu çizelgeyi düzenleyelim:

m	1.5	2	2.5	3
$\%100(1 - 1/m^2)$	%55.6	%75	%84	%88.9

Öyleyse Çebişev kuralına göre anakütle değerlerinin en az %55.6'sı ortalamadan en çok 1.5 standart sapma uzaklıktadır. Çebişev kuralı görsel olarak Çizim 2.5'te verilmiştir. Bu çizimde, $(\mu - 1.5\sigma)$ ile $(\mu + 1.5\sigma)$ aralığıyla birlikte, bir anakütle değerleri kümesi gösterilmiştir. Çebişev kuralı bize, anakütle üyelerinin *en az* %55.6'sının bu aralık içinde yattığını kesin olarak söyler. (Aslında bu özel örnekte, bu aralıktaki gözlemlerin oranı %55.6'dan çok daha yüksektir.)



ÇİZİM 2.5 Çebişev Kuralının gösterilmesi

Sayısal bir örnek göstermek amacıyla, Çizelge 2.1'deki, ortalaması 33,500 $, standart sapması 1,554 $ olan anakütleyi alalım. Çebişev kuralına göre ücretlerin en az %55.6'sı ortalamadan en çok (1.5)(1.554) = 2,331 $ uzakta, yani 31,169 $ ile 35,831 $ arasında olmalıdır. Benzer biçimde bu anakütledeki ücretlerin en az %75'i ortalamadan en çok 3,108 $ uzakta, 30,392 $ ile 36,608 $ arasında yer almalıdır.

Çebişev kuralının kullanışlılığı *her* anakütleye uygulanabilmesindedir. Ama bu kesinlik aynı zamanda önemli bir sakıncanın da kaynağıdır. Çoğu anakütlede belli bir aralığa düşen değerlerin yüzdesi, Çebişev kuralının öngör-düğü altsınırdan çok daha fazladır. Gerçek dünyadaki birçok büyük anakütlenin biçimini betimleyen "standart" bir dağılımda,[3] çoğunlukla güvenilir kestirimler veren bir parmak hesabı kuralından sözedilebilir.

Parmak Hesabı Kuralı

Çok sayıda büyük anakütlede üyelerin yaklaşık %68 kadarı ortalamadan en çok bir standart sapma, yaklaşık %95 kadarı da iki standart sapma uzaklıkta yer alır.

Diyelim ki kalabalık bir ücretler anakütlesinin ortalaması 33,500 $, standart sapması 1,554 $ olsun. Parmak hesabı kuralının kestirimine göre, bu ücretlerin kabaca %68'i 31,946 $ ile 35,054 $ arasında, yaklaşık %95'i de 30,392 $ ile 36,608 $ arasındadır.

ÖRNEKLEM VARYANSI VE STANDART SAPMASI

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi n tane gözlemli bir örneklemin de varyansını ve standart sapmasını tanımlayabiliriz. Örneklem ortalamasını yine $\bar{x}$ olarak göstereceğiz. Örneklem varyansı da, örneklem değerlerinin kendi ortalamalarından farklarının karelerine yani

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \text{K}\ , (x_n - \bar{x})^2$$

[3] Altbölüm 5.5'te ele alınacak olan"Normal dağılım", çok sayıda gerçek dağılımı iyi betimlemektedir.

terimlerine dayanmaktadır. Ancak, örneklem varyansını hesaplarken bu kareli farkların ortalamasını almayız. Onun yerine, bunların toplamları, gözlem sayısının bir eksiğine bölünür. Böylece **örneklem varyansı** şöyle tanımlanır:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (2.3.1)$$

Bu tanımladığımız biçimiyle örneklem varyansı, ilgili anakütle varyansını kestirmede istenen bazı özellikleri taşır. (2.3.1) eşitliğindeki bölmeyi n yerine $(n-1)$ ile yapmanın gerekçesini açıklamanın bir yolu şudur. Bu formülde merkezî eğilim ölçüsü olarak anakütle ortalaması değil, örneklem ortalaması kullanılmak zorundadır. Eğer anakütle ortalaması μ bilinseydi, örneklemin yayıklığını bulmak için hesaplanacak büyüklük şu kareli farkların ortalaması olurdu:

$$(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \ldots, (x_n - \mu)^2$$

Ancak uygulamada μ bilinmez, onun yerine uygun bir değer, örneklem ortalaması $\bar{x}$ geçirilmek zorundadır. İşte aslında, (2.3.1) eşitliğinde anakütle yerine örneklem ortalamasının kullanılmasının sakıncasını gidermek için paydada n yerine $(n-1)$ geçirilmiştir. Bölüm 6 ve 7'de bu konuya çok daha ayrıntılı olarak yeniden döneceğiz. Temelde, bu yolla tanımlanan s^2, uzun dönemde ortalama olarak σ^2'den ne daha yüksek, ne daha düşük olur.

Anakütlede olduğu gibi örneklemde de **standart sapma** varyansın karekökü dür.

Tanımlar

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerleri, ortalaması $\bar{x}$ olan bir örneklemin n tane gözlemi olsun. **Örneklem varyansı** s^2 şöyle tanımlanır:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Hesaplamada kullanılan eşdeğer bir formül de şöyledir:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

Örneklem standart sapması s, bu varyansın (artı değerli) karekökü dür.

ÖRNEK 2.5

Örnek 2.1'deki sekiz şirketin kazançlarındaki artış yüzdelerinin örneklem standart sapmasını bulun.

Örnek 2.1'de

$$n = 8 \qquad \bar{x} = \%13.9625$$

bulmuştuk. Örneklem değerlerinin kareleri toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (13.6)^2 + (25.2)^2 + (43.6)^2 + (-19.8)^2 + (-13.8)^2 + (12.0)^2 + (36.3)^2 + (14.3)^2$$

$$= 4{,}984.83$$

yse örneklem varyansı

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{4{,}984.83 - (8)(13.9625)^2}{7} = 489.3170$$

olur. Örneklemin standart sapması da şudur:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{489.3170} = \%22.1$$

Bir veri kümesinin sayısal yayıklık ölçüleri içinde en yaygın kullanılanları varyans ve standart sapmadır. Bu yaygın kullanımın gerisinde şu gerçek yatar: Bir örnekleme dayanarak bir anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapılırken bu ölçüler en büyük kolaylığı sağlar. Ancak başka yayıklık ölçülerinin yeğ tutulabileceği durumlar da sözkonusu olabilir. Bu altbölümün geri kalanında üç almaşık ölçüye kısaca değineceğiz.

(ii) ORTALAMA MUTLAK SAPMA

Ortalaması μ olan, $x_1, x_2, \ldots, x_N$ gibi N tane sayıdan oluşan bir anakütle alalım. Daha önce yayıklığı incelerken gördük ki

$$x_1 - \mu, x_2 - \mu, \ldots, x_N - \mu$$

biçimindeki ortalamadan sapmalar, eksi işaretli bir sapmanın aynı büyüklükte artı değerli bir sapmayla aynı işlemi görmesi koşuluyla, bize geçerliliği olan bilgiler verir. Bu koşul, varyansı oluştururken farkların kareleri alınarak yerine getirilmişti. Başka bir çözüm yolu bunların mutlak değerlerini almak olabilir. (Artı

değerli bir sayının **mutlak değeri** kendisidir, ama eksi değerli bir sayının mutlak değerini bulmak için sayı –1 ile çarpılır.) Ortalama mutlak sapma da, mutlak sapmaların ortalamasıdır.

Tanım

$x_1, x_2, \ldots, x_N$, ortalaması μ olan N tane sayıyı göstersin. Bunların **ortalama mutlak sapması**, ortalamadan sapmalarının mutlak değerlerinin ortalamasıdır, yani

$$\text{OMS} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu|}{N}$$

Örneklemin ortalama mutlak sapması da benzer biçimde, örneklem gözlemlerinin kendi ortalamalarından sapmalarının mutlak değerlerinin ortalaması olarak tanımlanır.

ÖRNEK 2.6

Çizelge 2.1'deki ustabaşıların yıllık ücretlerinin ortalama mutlak sapmasını bulun.

Ustabaşıların ortalama ücreti

$$\mu = 33{,}500\ \$$$

idi. Ortalama mutlak sapma hesaplamaları şu çizelgede gösterilmiştir:

x_i	$x_i - \mu = x_i - 33{,}500$	$\lvert x_i - \mu \rvert$
34,500	1,000	1,000
30,700	–2.800	2,800
32,900	–600	600
36,000	2,500	2,500
34,100	600	600
33,800	300	300
32,500	–1,000	1,000
Toplamlar	0	8,800

Bu çizelgeden

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu| = 8{,}800$$

olduğunu görüyoruz. Öyleyse ortaklama mutlak sapma

$$\text{OMS} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu|}{N} = \frac{8{,}800}{7} = 1{,}257\ \$$$

olur. Demek ki ücretlerin kendi ortalamalarından mutlak farklarının ortalaması 1,257 $'dır.

Bir veri kümesindeki yayıklığın betimleyici bir ölçüsü olarak ortalama mutlak sapmanın, standart sapmaya göre iki üstünlüğü vardır. Birincisi, kavramsal olarak yorumunun kolay olmasıdır; "ortalamadan sapmaların mutlak değerlerinin ortalaması"nı kafamızda canlandırmak, "ortalamadan sapmaların kareli ortalamasının karekökünü" canlandırmaktan çok daha basittir. İkincisi, gerek varyansın, gerek standart sapmanın hesaplanması sırasında tek tek sapmaların kareleri alındığından, bu iki ölçü, ortalama mutlak sapmaya göre, aşırı büyük ya da aşırı küçük uç değerlerden çok daha büyük ölçüde etkilenirler. Bütün bunlara karşın, ortalama mutlak sapma uygulamada daha seyrek kullanılmaktadır, çünkü örneklem gözlemlerine dayanılarak anakütleye ilişkin çıkarsamada kullanılması sırasında güçlükler doğmaktadır.

(iii) ARALIK

Bir sayısal gözlemler kümesinin belki en yalın, en açık ölçüsü, en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farktır. Buna **aralık** denir.

> **Tanım**
>
> Bir veri kümesinin **aralığı**, en büyük ve en küçük gözlemler arasındaki farktır.

ÖRNEK 2.7

Çizelge 2.1'deki ustabaşı yıllık ücretlerinin aralığını bulun.

Çizelgeden gördüğümüz gibi en yüksek ücret 36,000 $, en düşük ücret ise 30,700 $'dır. Öyleyse

$$\text{Aralık} = 36{,}000 - 30{,}700 = 5{,}300\ \$$$

olur.

Aralığın yorumlanması gerçekten kolaydır, bazı uygulamalarda ilginç olabilmektedir. Ama yalnızca en büyük ve en küçük değerleri hesaba kattığından dolayı, alışılmadık derecede uç bir gözlem varsa, durumu çarpıtabilir. Üstelik değeri, gözlem sayısından da etkilenmeye elverişlidir. Aynı anakütleden çekilen iki örneklemden büyük olanın aralığının da ötekine göre büyük olması beklenir.

Yalnızca en büyük ve en küçük değerlere bakmanın sakıncasını göstermek üzere bir şirkette biri 36,000 $, biri 30,700 $, öteki beş tanesinin her biri 33,800 $ ücret alan yedi kişinin çalıştığını düşünelim. Bu ücretlerdeki yayıklığın, Çizelge 2.1'dekilerden daha az olduğu konusunda kolayca anlaşabiliriz, ama her iki durumda da aralık 5,300 $'dır.

Aralığın işletmelerdeki en yaygın kullammı istatistikle kalite denetimi alanındadır. Burada ardarda küçük örneklemler seçilerek, üretim süreci çıktısının özelliklerini yansıtan ölçümler alınır. Bu veriler fabrika içinde elde edildikleri yerlerde incelenir. Hesaplama kolaylığı nedeniyle çoğunlukla, bu örneklem değerlerinin standart sapması yerine aralığı yayıklık ölçüsü olarak kullanılır. Bölüm 16'da aralığın uygulanma örneğini göstereceğiz.

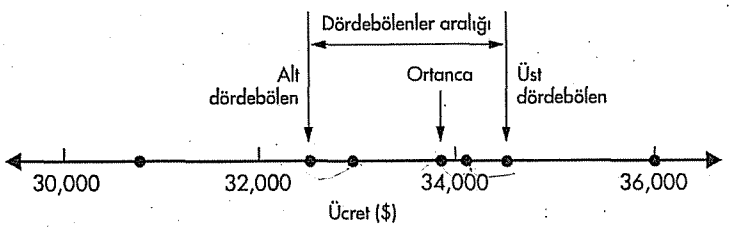
(iv) DÖRDEBÖLENLER ARALIĞI

Çok yüksek ya da çok düşük tek bir gözlemden bir hayli etkilenmesi nedeniyle aralığın doyurucu bir yayıklık ölçüsü olamayacağına işaret ettik. Bu güçlüğü yenmenin bir yolu, gözlemleri küçükten büyüğe doğru dizerek en üstten ve en alttan birkaç tanesini dışlayıp arada kalanların aralığını bulmak olabilir. Bunun özel bir uygulaması verileri eşit büyüklükte dört öbeğe ayırmaktır. Bu öbekleri birbirinden ayırmada sınır çizgisi görevini üstlenen değerlere **dördebölen**ler (kartil) denir. Çizelge 2.1'deki veriler, Çizim 2.6'da küçükten büyüğe doğru dizilmiştir. İkinci gözlem **ilk** (ya da **alt**) **dördebölen**, dördüncü gözlem **ikinci dördebölen** (ortanca ile aynı şey), altıncı gözlem de **üçüncü** (ya da **üst**) **dördebölen**dir. Dördebölenler, her dördebölenden önce ve sonra aynı sayıda gözlem bulunacak biçimde tanımlanırlar. Bu veriler için alt dördebölen 32,500, ikinci dördebölen 33,800, üst dördebölense 34,500 $'dır.

Üst ve alt dördebölenlerin farkı, özellikle merkezî eğilim ölçüsü olarak ortanca kullanıldığında, ilgi çekici bir yayıklık ölçüsü verir. Bu farka **dördebölenler aralığı** denir. Örneğimizde

$$\text{Dördebölenler aralığı} = 34{,}500 - 32{,}500 = 2{,}000\ \$$$

olur. Bu yayıklık ölçüsünün bulunmasında kullanılan genel süreç aşağıdaki çerçeve içinde gösterilmiştir.



ÇİZİM 2.6 Çizelge 2.1'deki ücret verilerinin dördebölenleri

Dördebölenler ve Dördebölenler Aralığı

N tane gözlem küçükten büyüğe doğru dizilmiş olsun. Alt dördebölen $[(N+1)/4]$ncü, üst dördebölen $[3(N+1)/4]$ncü gözlemdir. İkinci dördebölen (ortanca) ise $[(N+1)/2]$nci gözlem olur.

$(N+1)$ değeri 4'ün katı bir tamsayı değilse, dördebölenler araya katma yoluyla bulunur. Sözgelimi $N = 12$ gözlemimiz bulunsun, $(N+1) = 13$ olur. $(N+1)/4 = 3¼$ çıkar, alt dördebölen de, üçüncüyle dördüncü gözlem aralığının dörtte birinin üçüncü gozleme eklenmesiyle bulunur. Benzer biçimde $3(N+1)/4 = 9¾$ olduğundan, dokuzuncu gözlemle onuncu arasındaki farkın dörtte biri dokuzuncu gözleme eklenirse üst dördebölene erişilir.

Üst dördebölenle alt dördebölenin farkı, **dördebölenler aralığı** denen bir yayıklık ölçüsüdür.

Dördebölenler aralığı kolay, hatta bazen elverişli bir yorumlamaya sahiptir. Büyük veri kümelerinde gözlemlerin ortadaki yarısını içeren aralıktır.

ÖRNEK 2.8

Örnek 2.1'deki şirketler için pay senedi başına kazançlardaki değişmeyi gösteren sekiz örneklem değerinin dördebölenler aralığını bulun.

Bu gözlemler küçükten büyüğe doğru şöyle dizilebilir:

–%19.8	–%13.8	%12.0	%13.6
%14.3	%25.5	%36.3	%43.6

Bu verilerin ortancası, dördüncü ve beşinci gözlemlerin ortalaması, yani %13.95'tir.

$n = 8$ gözlem bulunduğundan $(n+1)/4 = 2¼$ olur. Öyleyse, ikinci gözlem (13.8) ile üçüncü gözlem (12.0) arasındaki açıklığın dörttebiri ikinci gözleme eklenirse alt dördebölen bulunur:

$$\text{Alt dördebölen} = -13.8 + \frac{1}{4}[12.0 - (-13.8)] = -\%7.35$$

Benzer biçimde $3(n + 1)/4 = 6¾$ olduğundan, altıncı gözlem (25.5) ile yedinci gözlem (36.3) arasındaki farkın dörtte üçü altıncı gözleme eklenerek üst dördebölen bulunur:

$$\text{Üst dördebölen} = 25.5 + \frac{3}{4}(36.3 - 25.5) = \%33.60$$

Son olarak dördebölenler aralığı, üst ve alt dördebölenlerin farkıdır:

$$\text{Dördebölenler aralığı} = 33.60 - (-7.35) = \%40.95$$

Dördebölenler aralığı, arasıra ortaya çıkan aşırı bir gözlemden çok az etkilenen bir yayıklık ölçüsüdür. Ancak örneklem verisinden anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapmada kuramsal bakımdan pek elverişli değildir. Bu nedenle istatistikçiler merkezî eğilim ve yayıklık ölçüleri olarak genellikle ortalamayı ve standart sapmayı kullanırlar.

ALIŞTIRMALAR

1. Büyük bir mağazanın yöneticisi, müşteri hizmetleri bölümüne iletilen, sattıkları elektrikli aygıtların kalitesine ilişkin müşteri şikâyetlerinin sayısıyla ilgilenmektedir. 10 haftalık bir sürede tutulan kayıtlar aşağıda gösterilmiştir.

HAFTA:	1	2	3	4	5
ŞİKÂYET SAYISI:	13	15	8	16	8
HAFTA:	6	7	8	9	10
ŞİKÂYET SAYISI:	4	21	11	3	15

(a) Anakütle için ortalama haftalık şikâyet sayısını bulun.
(b) Anakütle için ortanca haftalık şikâyet sayısını bulun

2. Bir şirketin ticari yapı izni alınmış 12 parsel arsası vardır. Bu arsaların 1994'teki değerleme oranları (yüzde olarak) şöyledir:

21 22 27 36 22 29
22 23 22 28 36 33

Bu anakütle için:
(a) Değerleme oranlarının ortalamasını bulun.
(b) Değerleme oranlarının ortancasını bulun.
(c) Değerleme oranlarının en sık değerini bulun.

3. Bir örneklemdeki on işletme iktisatçısından tüketici fiyat endeksinin gelecek yıl ne kadar artacağını tahmin etmesi istenmiştir. Tahminler şöyledir:

3.6 3.1 3.9 3.7 3.5
3.7 3.4 3.0 3.6 3.4

(a) Tahminlerin örneklem ortalamasını bulun.
(b) Örneklemin ortancasını bulun.

4. Yurtta kalan sekiz öğrencilik bir örneklemden, yurtta çıkan yemekleri birden (kötü) yediye (kusursuz) kadar bir ölçek üzerinde değerlendirmeleri istenmiştir. Değerlemeler şöyledir:

2 4 2 3 5 4 3 2

(a) Değerlemelerin örneklem ortalamasını bulun.
(b) Örneklemin ortancasını bulun.

5. İşletme mezunlarını işe almak isteyen bir şirket özellikle sayılardan anlayan kimselerle ilgilenmektedir. Adayların sayı bilgilerini sınamak için elli soru düzenlenmiştir. Bir ön çalışmada bu sınav, yeni mezun on kişilik bir örnekleme uygulanmış, alınan doğru yanıt sayıları aşağıda gösterilmiştir:

42 29 21 37 40
33 38 26 39 47

(a) Doğru yanıt sayılarının örneklem ortalamasını bulun.
(b) Bu örneklemin ortancasını bulun.

6. Bir büyük mağazalar zincirinin bir eyalette on mağazası vardır. Satış kayıtları incelenerek, bu yılın Noel dönemindeki satışların geçen yıldakine oranla yüzde kaç arttığı aşağıda gösterilmiştir:

10.2 3.1 5.9 7.0 3.7
2.9 6.8 7.3 8.2 4.3

Anakütledeki
(a) Satışların ortalama yüzde artış oranını bulun.
(b) Ortancayı bulun.

7. Oniki üst düzey yöneticiden oluşan bir örneklemde ikramiyelerin toplam gelirlerine oranı şöyle bulunmuştur:

15.8 7.3 28.4 18.2 15.0 24.7
13.1 10.2 29.3 34.7 16.9 25.3

(a) Örneklem ortancasını bulun.
(b) Örneklem ortalamasını bulun.

8. En uygun merkezî eğilim ölçüsünün şunlardan biri olduğu gerçekçi birer işletme örneği geliştirin.
(a) Ortalama
(b) Ortanca
(c) En sık değer

9. Alıştırma 1'deki müşteri hizmetleri bölümüne gelen şikâyetlerin sayısına ilişkin verileri alalım.
(a) Anakütle varyansıyla standart sapmasını bulun.
(b) Ortalama mutlak sapmayı bulun.
(c) Aralığı bulun.
(d) Dördebölenler aralığını bulun.

10. Alıştırma 2'deki değerleme oranı verilerini alalım.
- **(a)** Anakütlenin varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(b)** Ortalama mutlak sapmayı bulun.
- **(c)** Aralığı bulun.
- **(d)** Dördebölenler aralığını bulun.

11. Alıştırma 3'teki tüketici fiyat endeksindeki artışların on tahminlik örneklemini alalım.
- **(a)** Örneklem varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(b)** Dördebölenler aralığını bulun.

12. Alıştırma 4'teki veriler, sekiz öğrencili bir örneklemin yurt yemeklerini değerlendirmelerini göstermektedir.
- **(a)** Örneklem varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(b)** Dördebölenler aralığını bulun.

13. Alıştırma 5'teki on sınav sonucunu içeren örneklem verilerini alalım.
- **(a)** Örneklem varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(b)** Ortalama mutlak sapmayı bulun.
- **(c)** Dördebölenler aralığını bulun.

14. Alıştırma 6'daki veriler on mağazanın satış artış yüzdelerinin göstermektedir.
- **(a)** Anakütle varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(b)** Aralığı bulun.
- **(c)** Dördebölenler aralığını bulun.

15. Alıştırma 7'deki, oniki üst düzey yöneticisinin aldıkları ikramiyelerin toplam gelirleri içindeki paylarını gösteren örneklem verilerini alalım.
- **(a)** Örneklem standart sapmasını bulun.
- **(b)** Dördebölenler aralığını bulun.

16. Oniki işletme istatistiği okuyan öğrenciden oluşan bir örneklem, dönem sonu sınavından önceki haftada ders çalışma saatlerini şöyle bulmuştur:

12	7	4	16	21	5
9	3	11	14	10	6

- **(a)** Örneklem ortalamasını bulun.
- **(b)** Örneklem ortancasını bulun.
- **(c)** Örneklem varyansıyla standart sapmasını bulun.
- **(d)** Dördebölenler aralığını bulun.

17. Aşağıdaki dört anakütleyi alalım:
- **(a)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- **(b)** 1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8
- **(c)** 1, 1, 4, 4, 5, 5, 8, 8
- **(d)** –6, –3, 0, 3, 6, 9, 12, 15

Bütün bu anakütlelerin ortalamaları aynıdır. *Hesaplamaları yapmadan,* bu anakütleleri varyanslarına göre büyüklük sırasına koyun. Sonra varyansları hesapla-yarak sezginizin doğru olup olmadığına bakın.

18. Bir hesap uzmanı, bir şirketin alacak hesaplarının ortalama değerinin 295 $, standart sapmasının 63 $ olduğunu bulmuştur.
- **(a)** Bu değerlerin en az %60'ının arasında kalacağı aralığı bulun.
- **(b)** Bu değerlerin en az %80'inin arasında kalacağı aralığı bulun.

19. ABD'nin en büyük 500 şirketinin bir yılda kazanç artış oranlarının ortalaması %9.2, standart sapması %3.5 olmuştur.
   (a) Bu kazanç artış oranlarının en az %84'ünün arasında kalacağı aralığı bulun.
   (b) Parmak hesabı kuralını kullanarak, bu kazanç artış oranlarının yaklaşık %68'inin arasında kalacağı tahmin edilen aralığı bulun.

20. Belli bir marka araba lastiğinin ortalama ömrü 29,000 mil, standart sapması 3,000 mildir.
   (a) Bu marka lastik ömürlerinin en az %75'inin arasında kalacağı aralığı bulun.
   (b) Parmak hesabı kuralını kullanarak, bu marka lastik ömürlerinin yaklaşık %95'inin arasında kalacağı tahmin edilen aralığı bulun.

2.4 SINIFLANMIŞ VERİLER VE HİSTOGRAM

İlgilendiğimiz veri kümesi yalnızca birkaç gözlem içeriyorsa, merkezî eğilim ve yayıklık ölçülerinin Çizim 2.1'deki gibi bir gösterimle birlikte sunulması genellikle yeterli bir özet sağlamaktadır. Burada çizimin eklenmesinin amacı, gözlemlerin dağılımı konusunda görsel bir izlenim vermektir. Ancak, uygulamada karşılaşılan çoğu veri kümesi çok sayıda gözlem içermekte, bu tür dağılımların daha açık bir fotoğrafının verilmesi de genellikle arzu edilmektedir.

Bu altbölümde ele alınacak yöntemleri açıklamak amacıyla, adi pay senetlerinin 30 yıllık bir süre için yıllık getiri oranları, enflasyona göre düzeltilmiş olarak Çizelge 2.5'te gösterilmiştir. Bu verileri özetlemek için, ortalama ve varyansı elbette hesaplayabiliriz. Ancak amacımız, bu verilerin içerdiği bilgiyi ayrıca görsel olarak da duyumsatmaktır.

Özümsenmesi gereken bilgi miktarını azaltarak, belki de gözlemleri *sınıflamak* yoluyla, Çizelge 2.5'teki verileri yorumlama işi biraz daha kolaylaştırılabilir. Veri aralığını bölümlere ayırarak her alt aralıktaki gözlemleri sayabiliriz. Bu işlem Çizelge 2.6'da yapılmış, –39.95 ile –19.95, –19.95 ile 0.05, vb. arasında yeralan gözlem sayıları gösterilmiştir. Bu çizelgeleme, Çizelge 2.5'ten hemen algılayamadığımız basit olguları görmemizi bir hayli kolaylaştırmaktadır. Sözgelimi, artı değerli gerçek getirilerin sayısı, eksilerin iki katıdır, bütün getirilerin % 60'ı artıdır ama % 40.05'ten düşüktür, vb.

Verilerin öbeklendiği alt aralıklara **sınıf**, her bir sınıftaki gözlem sayısına da **sıklık** (ya da **frekans**) adı verilir. Belli bir sınıfın **birikimli sıklığı**, o sınıf ile ondan önceki sınıflardaki toplam gözlem sayısıdır. Sözgelimi otuz getiriden yirmibirinin %20.05'ten küçük olduğunu Çizelge 2.6'dan görebiliriz.

Bu tür çizelgelenmiş bilgi, **histogram** adı verilen bir çizimle görsel olarak da sunulabilir. Çizelge 2.6'nın histogramı Çizim 2.7'de gösterilmiştir. Sınıfların sınır çizgileri yatay eksende işaretlenmiştir. Her sınıf aralığının üstüne, alanı o sınıftaki sıklıkla orantılı olan birer dikdörtgen çizilmiştir. Bu örnekteki bütün sınıf aralıkları aynı (%20) olduğundan, dikdörtgenlerin yükseklikleri de sıklıklarla orantılıdır. Histogram, belli aralıklara düşen gözlem oranlarının çabuk, güvenilir bir görünümünü verir.

ÇİZELGE 2.5 Adi pay senetlerinin 30 yıllık sürede enflasyona göre düzeltilmiş yıllık getiri yüzdeleri

–3.2	17.4	–13.4	–9.9	20.4	15.1
2.7	–1.6	41.0	20.8	6.1	–21.8
20.9	53.4	10.3	15.1	–13.8	–34.8
24.6	31.1	–1.0	10.3	–1.5	28.3
17.2	3.6	26.0	–13.0	10.6	18.2

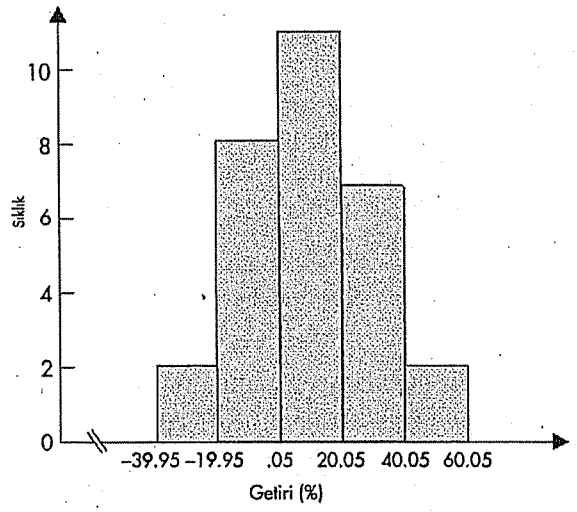
Bu durumda, Çizelge 2.6 her sınıftaki gözlem sayılarını gösterirken, bizim eğilimimiz her sınıftaki gözlem *oranları* cinsinden düşünmeye yöneliktir. Öyleyse, bu oranların, yani **göreli sıklıkların** gösterilmesi daha doğru olabilir. Ayrıca, gözlem oranlarının belli bir sınıfta ve ondan önceki sınıflarda olmaları da zaman zaman ilgimizi çeker. Bu oranlara da **birikimli göreli sıklıklar** denir. Çizelge 2.7'den görüleceği gibi, bu iki değişiklik de kolayca yapılabilir.

Göreli sıklıklar, sıklıkların toplam gözlem sayısına bölünmesiyle bulunur. Sınıf genişlikleri eşit olan bir histogram çizilirken, dik eksende sıklık yerine göreli sıklığı kullanabiliriz, Çizim 2.8'den de görüldüğü gibi, görüntü değişmez. Sözgelimi, bütün getirilerin 7/30'unun % 20.05 ile % 40.05 arasında olduğunu görebiliriz.

Birikimli göreli sıklıklar ise, göreli sıklıkların birikimli toplamlarıdır. Öyleyse ilk sınıfta birikimli göreli sıklık, göreli sıklığın kendisidir. Sonraki sınıflarda, bir önceki sınıfın birikimli göreli sıklığına, o sınıfın göreli sıklığı eklenerek birikimli göreli sıklıklar elde edilir. Bu büyüklüklerin yorumlanması hem kolay, hem de çoğu zaman değerlidir. Sözgelimi bütün getirilerin 21/30'u, %0.05–%20.05 arasında ya da önceki sınıflardadır; daha doğrusu, bütün getirilerin 21/30'u %20.05'ten küçüktür. Birikimli göreli sıklıkların içerdiği bilgiler de, Çizim 2.9'daki gibi görsel olarak sunulabilirler. Histogramdan farklı olarak, sınıf aralıkları üstüne çizilen dikdörtgenler burada *birikimli* göreli sıklıklarla orantılıdır.

ÇİZELGE 2.6 Çizelge 2.5'teki enflasyona göre düzeltilmiş getirilerin bölümlenmesi

ENFLASYONA GÖRE DÜZELTİLMİŞ GETİRİLER (SINIFLAR)	YİL SAYILARI (SIKLIKLAR)	BİRİKİMLİ SIKLIKLAR
– %39.95 - – %19.95	2	2
– %19.95 - % 0.05	8	10
%0.05 - %20.05	11	21
%20.05 - %40.05	7	28
%40.05 - %60.05	2	30



ÇİZİM 2.7 Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirileri (Çizelge 2.6'daki sınıflama kullanılmıştır)

ÇİZELGE 2.7 Enflasyona göre düzeltilmiş getirilerin, göreli sıklıklarla birikimli göreli sıklıkları gösteren bölümlenmesi

SINIFLAR	SIKLIKLAR (f_i)	GÖRELİ SIKLIKLAR (f_i/N)	BİRİKİMLİ GÖRELİ SIKLIKLAR
- %39.05 - - %19.95	2	2/30	2/30
- %19.95 - %0.05	8	8/30	10/30
%0.05 - %20.05	11	11/30	21/30
%20.05 - %40.05	7	7/30	28/30
%40.05 - %60.05	2	2/30	1
	Toplam $N = 30$	1	

Aşağıdaki çerçeve buraya kadar açıklanan terimler ile simgeleri özetlemektedir.

Tanımlar ile Simgeler

N tane sayısal gözlemin K tane sınıfa ayrıldığını düşünelim. O zaman:

(i) Bu sınıflardan her birine düşen gözlem sayısına **sıklık** denir, bunlar $f_1, f_2, \ldots, f_K$ ile gösterilir. Toplam gözlem sayısı N olduğuna göre şunu buluruz:

$$\sum_{i=1}^{K} f_i = N$$

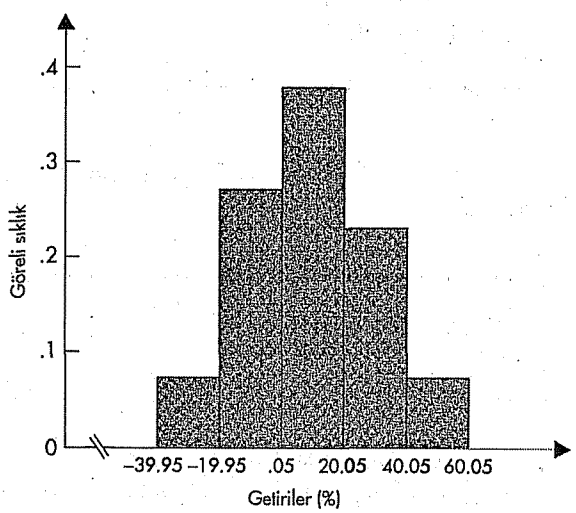
(ii) Bu sınıflardan her birine düşen gözlemlerin oranına **göreli sıklık** denir. Öyleyse i'inci sınıfın göreli sıklığı f_i/N olur.

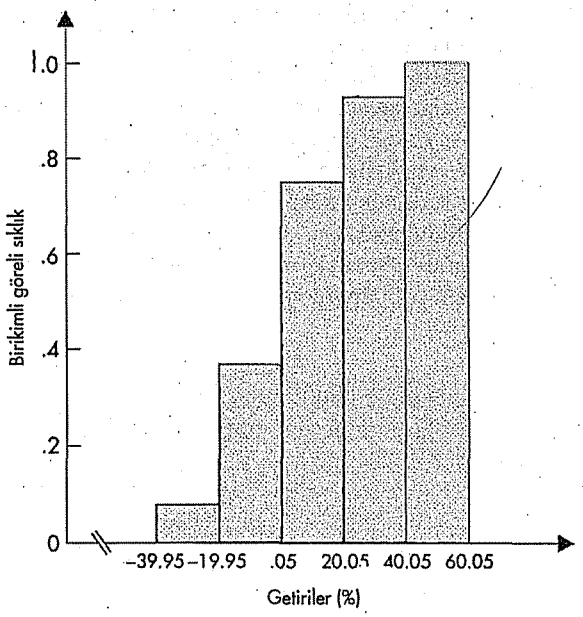
(iii) i'inci sınıfın üst sınırından küçük olan bütün gözlemlerin oranına **birikimli göreli sıklık** denir. Bu oran şöyle gösterilebilir: $(f_1/N + f_2/N + \cdots + f_i/N) = (f_1 + f_2 + \cdots + f_i)/N$.

Bir uygulamada histogram çizmenin amacı, verilerin ilginç ve önemli özelliklerini öne çıkarmaktır. Hemen her zaman kaçınılmaz olan en can alıcı soru, ne kadar ayrıntının çizime konacağıdır. Çok az ayrıntı, önemli özellikleri perdelerken, öbür uçta bu özellikler ayrıntı denizinde boğulabilir. En iyi yol gösterici sağduyudur ama yine de birkaç ana çizgi belirtilebilir:

1. Olanak içindeki gözlemlerin aralığı *üstüste binmeyen* sınıflara öyle bölünmelidir ki, belli bir gözlem bu sınıflardan birinin, ama yalnız birinin içine düşmelidir. Sınıf aralığı sınırlarının, verilerdekinden daha küçük birimlerle belirtilmesiyle bu sağlanabilir. Sözgelimi Çizelge 2.5'teki adi pay senetlerinin getiri oranları, binde olarak verilmiştir. Böylece Çizelge 2.6 ile Çizim 2.7'de %20.05, %40.05, vb. değerler kullanıldığında, her bir gözlem sınıf aralığının sınırı üstüne değil, içine düşer.

ÇİZİM 2.8 Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirilerinin histogramı (göreli sıklıklar cinsinden ölçeklendirilmiştir)





ÇİZİM 2.9 Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş birikimli göreli

2. Yorumlamayı kolaylaştırması bakımından bütün sınıf aralıkları genellikle eşit genişlikte seçilir. Böylece örneğimizde olanak içindeki bütün değerlerin aralığı, her biri %20 genişlikte eşit aralıklara ayrılmıştır. Ancak bazen bu ilkenin kullanılmaması gerekir. Eğer veri kümesinde gözlemlerin çoğunluğu aralığın görece dar bir parçasında toplanmış, ötekiler geri kalan bölgeye yayılmış ise, gözlemlerin yoğun olduğu bölümde dar, öbür taraflarda geniş sınıf aralıkları kullanmak daha doğru olabilir. Bu yapıldığında şu da unutulmamalıdır ki, histogramdaki dikdörtgenlerin yükseklikleri değil, *alanları* sıklıklarla orantılı olmalıdır. Örnek 2.9'da bütün sınıf aralıklarının eşit olmadığı bir histogram çizi-mini göstereceğiz.

3. Sınıf aralıklarının orta noktalarının, o sınıftaki gözlemleri iyi temsil etmesinin sağlanması önemlidir. Sözgelimi, dükkânlarda çoğu ürünler 19.99 $, 29.99 $, vb. biçimde fiyatlanır. Eğer fiyat aralığını 10-20 $, 20-30 $ sınıf aralıklarına bölersek, her sınıftaki fiyatların büyük çoğunluğu üst sınırlara yakın yerlerde toplanacaktır. Sınıf aralıklarını 15.50-25.50 $, 25.50-35.50 $, vb. diye ayırmak daha iyi bir çözüm olabilir. Sınıf orta noktalarını gözlem değerlerinin temsilcisi olarak almanın bir nedeni, histogramın daha güvenilir bir görsel gösterim sunabilmesini sağlamaktır. Ayrıca, bir sonraki altbölümde göreceğimiz gibi, merkezî eğilim ve yayıklık ölçüleri çoğu zaman sınıflanmış verilerden hesaplanır. Bu hesaplamalar, sınıf orta noktalarının iyi birer temsilci oldukları varsayımına dayanır.

4. Çizime girecek sınıf sayısını belirlemek çoğu zaman en zor karardır. Az sayıda sınıf kullanılırsa, ortaya çıkan kaba öbekleme, verinin önemli yanlarını gözlerden saklayabilecektir. Eğer sınıf sayısı gereğinden çok olursa, bu kez de yorumlanması güç, düzensiz dalgalanan bir resim çizilebilecektir. Genellikle en az beş, en çok yirmi sınıf kullanılması gereği duyumsanmaktadır. Gözlem sayısı arttıkça çizime daha çok sınıfı katmak bir yere kadar akla uygundur. Sözgelimi yirmi gözlemi on ya da onbeş sınıfa bölersek, bir sürü boş ya da boşa yakın sınıflarımızın olması kaçınılmazdır. Ama 200 gözlemimiz olduğunda bu sorun pek ortaya çıkmayabilir. Bu etmen gözönüne alın-dığında bile, karar çok açık seçik değildir. Böyle durumlarda bir iki deneme yapıp hangi histogramın en doğru ve en açık gösterimi verdiğine bakmak iyi bir fikir olabilir.

ÖRNEK 2.9

Hesapları denetlenen 692 Avustralya şirketinden alınan denetimdışı ücretlerin toplam denetici ödemeleri içindeki payları ilişikteki çizelgede gösterilmiştir.[4]

DENETİM DIŞI ÜCRET / TOPLAM DENETİM ÖDEMELERİ	ŞİRKET SAYISI
0.00 – 0.05	84
0.05 – 0.10	113
0.10 – 0.15	112
0.15 – 0.20	85
0.20 – 0.25	77
0.25 – 0.30	58
0.30 – 0.40	75
0.40 – 0.50	48
0.50 – 1.00	40

Göreli sıklıkları ve birikimli göreli sıklıkları bulup histogramı çizin.

Sınıf aralıklarının eşit olmayışı olgusu, aşağıdaki çizelgede gösterilen göreli sıklıklarla birikimli göreli sıklıkların hesaplanmasını etkilemez.

[4] Verilerin alındığı yer: J. R. Francis, B. M. Pollard, "An investigation of nonaudit fees in Australia," *Abacus*, 15 (1979), 136-44, Sydney University Press yayını.

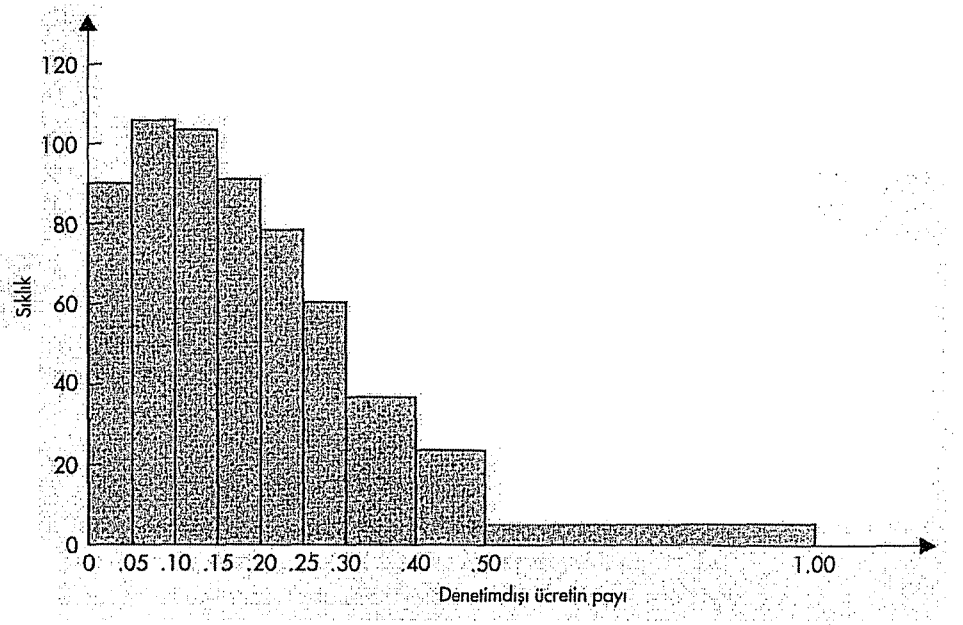
SINIFLAR	f_i	GÖRELİ SIKLIKLAR	BİRİKİMLİ GÖRELİ SIKLIKLAR
0.00 – 0.05	84	84/692	84/692
0.05 – 0.10	113	113/692	197/692
0.10 – 0.15	112	112/692	309/692
0.15 – 0.20	85	85/692	394/692
0.20 – 0.25	77	77/692	471/692
0.25 – 0.30	58	58/692	529/692
0.30 – 0.40	75	75/692	604/692
0.40 – 0.50	48	48/692	652/692
0.50 – 1.00	40	40/692	1
Toplamlar	692	1	

Bu çizelgedeki sayılar bildik yolla yorumlanabilir. Böylece, bütün bu şirketlerin $^{113}/_{692}$ ya da %16.3 kadarında denetimdışı ücretin toplam denetici ödemeleri içindeki payı 0.05 ile 0.10 arasındadır. Yine $^{309}/_{692}$ ya da %44.7 kadarının denetimdışı ücret payı toplam denetici ödemeleri içinde 0.15'ten azdır.

Histogramı çizerken, sınıf aralıkları üstüne çizilen dikdörtgenlerin *alanlarının* kendi sıklıklarıyla orantılı olması gereği unutulmamalıdır. İlk altı sınıfın genişliği 0.05 olduğuna göre, bu sınıf aralıkları üstüne yükseklikleri 84, 113, 112, 85, 77, 58 olan dikdörtgenler çizebiliriz. Sonraki iki sınıfın genişliği 0.10, yani ilk altı sınıfınkinin iki katıdır. Öyleyse bunların alanlarının sıklık-larıyla orantılı olabilmesi için, bu sınıf aralıkları üstüne çizilen dikdörtgenlerin yüksekliğinin, ilgili sıklığın yarısı kadar, yani 37.5 ve 24 olması gerekir. Son olarak, en alttaki sınıfın genişliği 0.50, yani ilk altı sınıfınkinin on katıdır. Bu demektir ki, bu son sınıf aralığı üstüne çizilecek dikdörtgenin yüksekliği sınıf sıklığının onda biri, yani 4 olmalıdır. Tamamlanan histogram, Çizim 2.10'da gösterilmiştir. Bu dikdörtgenlerin alanlarını sıklıklarıyla orantılı çizmemizin nedeni, görsel olarak alanı büyüklükle eşleştirmemizdir.

DAL-YAPRAK GÖSTERİMİ

Sınıflara ayrılmış verileri göstermenin histograma almaşık bir yolu dal-yaprak çizimidir. En doğrudan biçiminde bu iş, verileri soldaki basamaklarına göre sınıflayıp, bir sınıf içindeki her bir gözlemi sağdaki basamaklarına göre sıralamakla yapılır. Çizelge 2.5'teki otuz tane adi pay senedinin enflasyona göre düzeltilmiş yıllık getirilerini örnek olarak alalım. Önce bunları en yakın tamsayıya yuvarlayalım. Örneğimizde ilk satırın ilk dört değeri –3, 17, –13, –10 olur. Sonunda elde edilen dal-yaprak gösterimi şöyle olur:



ÇİZİM 2.10 Denetimdışı ücretin toplam denetimci ödemeleri içindeki payını gösteren histogram (Alıştırma 2.9'daki veriler kullanılmıştır)

–3	5							
–2	2		3					
–1	4	3	2	0				
0	3	2	2	1				
0	3	4	6					
1	0	0	1	5	5	7	7	8
2	0	1	1	5	6	8		
3	1							
4	1							
5	3							

Dikey çizginin solundaki sayılar sol basamaklardır, sağındaysa o sınıftaki bütün sayıların sağ basamakları sıralanmıştır. Sözgelimi, en yakın tamsayıya yuvarlatılmış olarak %20–%29 aralığında altı tane getiri vardır, bunlar 20, 21, 21, 25, 26, 28'dir.

Dal-yaprak gösterimi de histogram gibi sınıflardaki gözlem sayılarının görüntüsünü verir. Ama daha fazla ayrıntı göstermek gibi bir üstünlüğü de vardır. Böylece 20'ler sınıfında altı tane değer olduğunu görmekle kalmayız, bunların büyüklüklerini en yakın tamsayı cinsinden okuyabiliriz de.

Az önce tammlanan basit süreç, sınıflamanın kaba olması dolayısıyla yeterince bilgi vermezse, sınıfların bazılarını ya da hepsini daraltarak daha ince ayrıntılara inilebilir. Sözgelimi, gösterimde bir yerine iki satır kullanılarak, 20-24 aralığındaki değerler, 25-29 aralığından ayrı sıralanabilir.

2.5 SINIFLANMIŞ VERİLERİN SAYISAL ÖZETİ

Bir histogram, çok büyük bir sayısal veri kümesinin pek elverişli bir görsel özetidir. Ancak bir araştırmacı çoğu zaman bu görüntüye ek olarak merkezî eğilim ve yayıklığın bazı özet ölçülerini de görmek isteyebilir. Özgün veriler eldeyken, Altbölüm 2.2 ile 2.3'te açıklanan süreçler kullanılıp bu sağlanabilir. Çağdaş hesaplama araçlarıyla, çok büyük veri kümelerinde bile bu hesaplama fazla yük doğurmaz. Ancak bazen özgün veriler değil de yalnızca sınıflanmış veriler bulunabilir. Bu durumda, ortalama ve varyans gibi büyüklüklerin hassas değerlerini belirleyemeyebiliriz. Öyleyse, kaydedilmiş sınıf sıklıklarından bu ölçüleri tahmin etme yöntemlerimizin bulunması iyi olur. Bu tahminler, bütün veriler elde olsa bile, yaklaşık değerler çabucak gerektiğinde de işe yarar. Bu altbölümde yalnız sınıflanmış veriye dayalı özet sayısal ölçüleri bulma süreçlerini ele alacağız.

ÇOK GÖZLEMLİ DEĞERLER İÇEREN VERİYLE ORTALAMA VE VARYANS

Boyuna yinelenen birkaç değerden oluşan verilerin olanaklı olduğunu düşünelim. Sözgelimi, bir yayımcıya, basımevinden 500 sayfalık bir kitap gelmiş olsun. Sayfalar özenle okunup her sayfadaki yazım yanlışları kaydedilmiş, böylece Çizelge 2.8'deki veriler bulunmuş olsun.

Bu anakütlede sayfa başına düşen yanlış sayısının ortalamasıyla varyansını bulmak istediğimizi düşünelim. Burada sergilenen ve çok gözlemli değerler içeren veriler, Altbölüm 2.2 ile 2.3'te ele alınan genel veri kümelerinin özel bir durumudur. Demek ki bu özet sayısal ölçüleri hesaplarken yeni ilkeler gerekmez. 0 değerini alan 102 gözlemimiz, 1 değerini alan 138 gözlemimiz, 2 değerini alan 140 gözlemimiz, vb. vardır.

Sayfa başına ortalama yanlış, toplam yanlış sayısının sayfa sayısına bölümünden başka bir şey değildir. Toplam yanlış sayısı şöyle bulunur:

ÇİZELGE 2.8 500 sayfalık bir kitapta bulunan yanlış sayıları

YANLIŞ SAYISI		SAYFA SAYISI
0		102
1		138
2		140
3		79
4		33
5		8
	Toplam	500

$$(102)(0)+(138)(1)+(140)(2)+(79)(3)+(33)(4)+(8)(5)=827$$

Böylece ortalama yanlış sayısı

$$\mu=\frac{827}{500}=1.654$$

olur. Demek ki bu anakütlede sayfa başına ortalama yanlış sayısı 1.654'tür.

Sayfa başına yanlış sayısının varyansı, bütün gözlemlerin ortalamadan sapmalarının karelerinin ortalamasıdır. Burada 102 tane (0 – 1.654), 138 tane (1 – 1.654), vb. sapma vardır. Öyleyse kareli sapmaların toplamı

$$(102)(0-1.654)^2+(138)(1-1.654)^2+(140)(2-1.654)^2$$
$$+(79)(3-1.654)^2+(33)(4-1.654)^2+(8)(5-1.654)^2=769.1420$$

bulunur. Böylece anakütle varyansı

$$\sigma^2=\frac{769.1420}{500}=1.5383$$

standart sapması da

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1.5383}=1.240$$

çıkar. Verilerin standart sapması sayfa başına 1.240 yanlıştır.

Artık $m_1, m_2, \ldots, m_K$ gibi K olanaklı gözlem değeri bulunan ve bunlara karşılık gelen sıklık sayıları $f_1, f_2, \ldots, f_K$ olan genel durumu ele alabiliriz. Hem anakütle, hem örneklem formülleri çerçeve içinde gösterilmiştir.

Çok Gözlemli Değerlerin Ortalamasıyla Varyansı

Bir veri kümesinin, her biri $f_1, f_2, \ldots, f_K$ sıklığında $m_1, m_2, \ldots, m_K$ gözlem değerlerini içerdiğini düşünelim.

(i) N gözlemli bir *anakütle*de

$$N=\sum_{i=1}^{K} f_i$$

iken, **ortalama**

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i}{N}$$

ve **varyans**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i (m_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2}{N} - \mu^2$$

(ii) n gözlemli bir *örneklem*de

$$n = \sum_{i=1}^{K} f_i$$

iken **ortalama**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i}{n}$$

ve **varyans**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

olur.

Bunun aritmetiği en iyi çizelgeyle gösterilir. Bir kitaptaki yanlışlar verisi için bu iş Çizelge 2.9'da yapılmıştır. Varyansı etkin bir formülle almaşık bir biçimde hesapladığımıza dikkat edin.

Çizelgeden doğrudan şunu okuyabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{K} f_i = N = 500 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i = 827 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2 = 2{,}137$$

Öyleyse anakütle ortalaması, daha önceki gibi,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i}{N} = \frac{827}{500} = 1.654$$

bulunur. Varyans ise

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{2{,}137}{500} - (1.654)^2 = 1.5383$$

olup önceki hesaplamalarla uyum içindedir.

ÇİZELGE 2.9 Bir kitapta bulunan yanlışlar verisinin ortalama ve varyansının hesabı

m_i	f_i	$f_i m_i$	$f_i m_i^2$
0	102	0	0
1	138	138	138
2	140	280	560
3	79	237	711
4	33	132	528
5	8	40	200
Toplamlar	500	827	2,137

SINIFLANMIŞ VERİLERİN ORTALAMASI İLE VARYANSI

Bir araştırmacının elinde, Çizelge 2.6'daki adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirileri gibi, yalnızca sınıflara ayrılmış veri bulunduğunu varsayalım. Yalnız bu bilgiler verilmişken ortalama ile varyansı bulmak istediğimizi düşünelim. Ham veriler bulunmadığı sürece bu özet ölçülerin tam değerlerini bulamayacağımız kesindir. Sözgelimi, Çizelge 2.6'dan bu getirilerin yedisinin %20.05 ile %40.05 arasında olduğunu biliyoruz. Ama bu yedi gözlemin bu aralık içinde nerede olduklarını bilmiyoruz. Bir ilerleme sağlayabilmek için biraz yaklaştırma yapmak gerekir. Belli bir sınıf içindeki bütün gözlemlerin tam konumları bilinmediğine göre, bunların hepsi sınıf ortasında toplanmışlar gibi işe koyulabiliriz. Öyleyse %20.05 ile %40.05 arasındaki yedi gözlemin yedisinin de değerini %30.05 alacağız demektir. Eğer bu yapılırsa, çok gözlemli değerlerimiz varmış gibi olur ve bunların ortalamasıyla varyansını az önce açıklandığı gibi hesaplayabiliriz. Sınıfların bu biçimde kullanılan orta değerlerine **sınıf orta noktası** adı verilir.

Sınıflanmış Verilerin Yaklaşık Ortalamasıyla Varyansı

$f_1, f_2, \ldots, f_K$ sıklıklarında K tane sınıfa ayrılmış verimiz olsun. Eğer bu sınıfların orta noktaları $m_1, m_2, \ldots, m_K$ ise, sınıflanmış bu verilerin ortalamasıyla varyansı, daha önce verilmiş formüllerle tahmin edilir.

Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirileri Çizelge 2.6'daki gibi sınıflanmışken, ortalama ve varyans tahminlerinin hesaplanması Çizelge 2.10'da gösterilmiştir. Sınıf orta noktaları belirlendikten sonra işlemler aynen çok gözlemli değerlerde olduğu gibidir.

Çizelgeden şunları bulabiliriz:

ÇİZELGE 2.10 Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirileri sınıflanmışken ortalama ve varyans hesaplanması

SINIFLAR	ORTA NOKTALAR	SIKLIKLAR		
	m_i	f_i	$f_i m_i$	$f_i m_i^2$
–%39.95 - –%19.95	–29.95	2	–59.90	1,794.0050
–%19.95 - % 0.05	–9.95	8	–79.60	792.0200
% 0.05 - %20.05	10.05	11	110.55	1,111.0275
% 20.05 - % 40.05	30.05	7	210.35	6,321.0175
% 40.05 - %60.05	50.05	2	100.10	5,010.0050
	Toplamlar	30	281.50	15,028.0750

$$\sum_{i=1}^{K} f_i = N = 30 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i = 281.5 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2 = 15{,}028.075$$

Anakütle ortalaması

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i}{N} = \frac{281.5}{30} = 9.383$$

olarak tahmin edilir. Bu da yuvarlatılınca 30 yıllık dönemde ortalama getiri tahmini %9.4'tür.

Şimdi de anakütle varyansım tahmin edelim:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{15{,}028.075}{30} - (9.383)^2 = 412.8952$$

Bunun karekökü alınarak anakütle standart sapması bulunur:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{412.8952} = 20.320$$

Öyleyse bu getirilerin yuvarlatılmış standart sapması %20.3 olarak tahmin edilir.

Burada bir uyarı yapmak gerekir. Eğer uçtaki sınıflardan biri ötekilere göre çok genişse, ortalamayla varyansın akla yatkın birer tahminlerini bulabilmek için, o sınıfın orta noktasının o sınıftaki gözlem değerlerini iyi temsil etmesi özellikle önemlidir.

ÖRNEK 2.10

Bir kimyasal maddenin 20 ölçeklik bir örneklemesi alınıp saflık sınaması yapılmıştır. Bulunan yabancı madde oranları şöyledir:

YABANCI MADDE YÜZDESİ	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
ÖLÇEKLER	2	3	6	5	4

Yabancı madde yüzdelerinin ortalamasını ve standart sapmasını bulun. İşlemler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

SINIFLAR	m_i	f_i	$f_i m_i$	$f_i m_i^2$
0-2	1	2	2	2
2-4	3	3	9	27
4-6	5	6	30	150
6-8	7	5	35	245
8-10	9	4	36	324
	Toplam	20	112	748

Bu çizelgeden şunlar elde edilir:

$$\sum_{i=1}^{K} f_i = 20 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i = 112 \qquad \sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2 = 748$$

Örneklem ortalaması şöyle tahmin edilir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i}{n} = \frac{112}{20} = 5.6$$

Bunlar örneklem verileri olduğuna göre varyans şöyle tahmin edilir:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i m_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{748 - (20)(5.6)^2}{19} = 6.3579$$

Böylece örneklem standart sapması da şöyle tahmin edilir:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.3579} = 2.52$$

Dolayısıyla bu örneklemde ortalama yabancı madde oranı %5.6, örneklem standart sapması %2.52 olarak tahmin edilmiştir.

SINIFLANMIŞ VERİLERDE ORTANCA İLE DÖRDEBÖLENLER ARALIĞI

Altbölüm 2.2'de ortancayı, küçükten büyüğe dizilmiş gözlemlerin ortasındaki değer olarak tanımlamıştık. Eğer elimizde yalnızca sınıflanmış veriler bulunu-

yorsa, yani ilk gözlemler bilinmiyorsa, verileri büyüklük sırasına sokamayız. Ama bu işin bir bölümünü yapabiliriz. Çizelge 2.7'deki adi pay senetlerinin getirilerini alalım. En küçük iki getirinin –%39.95 ile –%19.95 arasında, sonraki en küçük sekiz getirinin –%19.95 ile %0.05 arasında, sonraki en küçük onbir getirinin %0.05 ile %20.05 arasında, vb. olduğunu biliyoruz.

Bu veri kümesinde toplam otuz gözlem olduğuna göre, ortanca, büyüklük sırasına dizilmiş verilerden onbeşinciyle onaltıncının ortalamasıdır. Diyelim onbeşinci gözlemin kaç olduğunu nasıl tahmin edebiliriz? Aslında ona ilişkin epey bir şeyler biliyoruz. Bu gözlem, %0.05 ile %20.05 aralığında olup bu aralıktaki onbir gözlemden beşincisidir.

Öyleyse görüyoruz ki, ortancanın ya da başka bir dördebölenin tahmini, sözgelimi belli bir sınıfta büyüklük sırasındaki onbir gözlemin beşincisinin konumunu tahmin etmeye indirgenmiştir. Bu tür soruları kesin yanıtlamaya yetecek bilgimiz yoktur ama, bir sınıf içindeki gözlemlerin eşit aralıklarla dizildiğini varsayıp, akla yakın bir yaklaşık değere ulaşabiliriz. Bunun uygulamada nasıl yapıldığını görmek için Çizim 2.11'deki basit örneği alalım. Bu çizelgede 0-10, 10-20, 20-30 sınıflarının her biri beşer gözlem içermektedir. Her sınıf aralığı on birimdir; eğer gözlemler eşit aralıklarla sıralanmışsa, bunun 5'e bölünmesiyle gözlemler arasında iki birim açıklık olduğu düşünülebilir. Bu da, çizimde sergilendiği gibi, ilk gözlemi sınıfın alt sınırından bir birim içeriye, son gözlemi de üst sınırdan bir birim aşağıya yerleştirerek sağlanabilir. Böylece, ortadaki sınıfta beş gözlem 11, 13, 15, 17, 19'da yer alır.

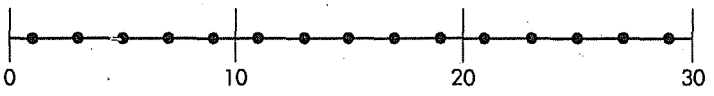
Bu basit örnek şöyle bir genel kurala yol açar:

Bir Sınıf İçindeki Bir Gözlemin Konumunun Tahmini

Alt sınırı L, üst sınırı U olan bir sınıf f gözlem içersin. Bu gözlemler küçükten büyüğe doğru sıraya dizilirse, j'inci gözlem şöyle tahmin edilir:

$$L + (j - \tfrac{1}{2}) \frac{(U - L)}{f} \qquad j = 1, 2, \ldots, f \text{ için}$$

ÇİZİM 2.11 Sınıflanmış verilerde, gözlemlerin sınıf içinde eşit aralıklarla sıralandığı varsayımıyla, dördebölenlerin tahminine örnek



ÇİZELGE 2.11 Enflasyona göre düzeltilmiş getirilerin sınıflanması (birikimli sıklıklar da gösterilmiştir)

SINIFLAR	SIKLIKLAR	BİRİKİMLİ SIKLIKLAR
–%39.95 - –%19.95	2	2
–%19.95 - %0.05	8	10
%0.05 - %20.05	11	21
%20.05 - %40.05	7	28
%40.05 - %60.05	2	30
Toplam	30	

Görünümü bir hayli ürkütücü olan bu formülün kullanımını, adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş getirileri için ortanca ile öteki dördebölenleri tahmin ederek göstereceğiz. İlk adım olarak verileri Çizelge 2.11'e yeniden koyalım. Burada birikimli sıklıkları, yani sözkonusu sınıf ile onun altındaki sınıfların sıklıklarını da gösteriyoruz.

Otuz tane gözlemimimiz bulunduğuna göre, ortanca, daha önce belirtildiği gibi, büyüklük sırasına dizilmiş gözlemlerin onbeşincisi ile onaltıncısının ortalamasıdır. Önce onbeşinci gözlemin konumunu tahmin edelim. Birikimli sıklıklardan açıkça görülmektedir ki bu gözlem, toplam onbir gözlem içeren 0.05-20.05 sınıf aralığındaki beşinci gözlemdir. Öyleyse bizim simgelerimizle,

$$j = 5 \qquad f = 11 \qquad L = 0.05 \qquad U = 20.05$$

Bu gözlemlerden beşincisinin konumu Çizim 2.12'de gösterilmiştir. Sınıf aralığı

$$U - L = 20.05 - 0.05 = 20$$

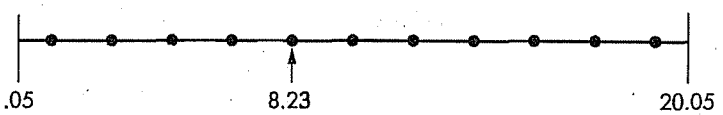
gözlem sayısı $f = 11$'e bölünür:

$$\frac{U - L}{f} = \frac{20}{11}$$

Beşinci gözlemin yerini saptamak için ilk önce yarım, sonra dört tam adım sayarız:

$$(j - \tfrac{1}{2}) = (5 - \tfrac{1}{2}) = 4\tfrac{1}{2}$$

ÇİZİM 2.12 0.05-20.05 sınıfındaki onbir gözlemden beşincisinin konumunun tahmini



Bunu alt sınır olan $L = 0.05$'e ekler, şunu buluruz:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = 0.05 + (4½)\frac{20}{11} = 8.23$$

Böylece bu gözlemi %8.23 olarak tahmin ederiz.

Benzer biçimde, onaltıncı gözlem de aynı sınıftaki altıncı gözlemdir, öyleyse öbür her şey aymyken $j = 6$ olur. Dolayısıyla tahminimiz şöyle yapılabilir:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = 0.05 + (5½)\frac{20}{11} = 10.05$$

Demek ki onbeşinci ve onaltıncı gözlemlerin ortalaması olan ortanca

$$\text{Ortanca} = \frac{8.23 + 10.05}{2} = 9.14$$

çıkar. Demek ki enflasyona göre düzeltilmiş ortanca getiri tahminimiz %9.14'tür.

Altbölüm 2.3'te alt ve üst dördebölenleri tanımlamıştık. $N = 30$ gözlemimiz olduğuna göre:

$$\frac{N+1}{4} = \frac{31}{4} = 7¾$$

Öyleyse alt dördebölen yedinci gözleme, yedinci ve sekizinci gözlemler arasındaki aralığın dörtte üçü uzaklığındadır. Çizelge 2.11'den yedinci gözlemin, –%19.95 ile %0.05 sınıfındaki beşinci gözlem olduğunu görebiliriz. Bizim gösterimimizle

$$j = 5 \qquad f = 8 \qquad L = -19.95 \qquad U = 0.05$$

Bu durumda yedinci gözlem şöyle tahmin edilir:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = -19.95 + (4½)\frac{20}{8} = -8.7$$

Benzer biçimde, sekizinci gözlem de, aynı sınıftaki altıncı değerdir. Şimdi $j = 6$ iken şunu buluruz:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = -19.95 + (5½)\frac{20}{8} = -6.2$$

İlk dördebölen yedinci gözlemden, yedinci ve sekizinci gözlemler arasındaki aralığın dörtte üçü uzaklıkta olduğundan,

$$\text{İlk dördebölen} = -8.7 + ¾[-6.2 - (-8.7)] = -6.825$$

olur.

Üst dördeböleni bulmak için şunu biliyoruz:

$$\frac{3(N+1)}{4} = \frac{93}{4} = 23¼$$

Dolayısıyla, gözlemler büyüklük sırasındayken, üst dördebölen yirmiüçüncü gözlemden, yirmiüçüncü ve yirmidördüncü gözlem aralığının dörtte biri kadar uzaktır.

Çizelge 2.11'e baktığımızda, yirmiüçüncü gözlemin, yedi gözlem içeren %20.05–%40.05 aralığındaki ikinci değer olduğunu görürüz. Böylece

$$j = 2 \qquad f = 7 \qquad L = 20.05 \qquad U = 40.05$$

olur. Öyleyse, yirmiüçüncü gözlem şöyle tahmin edilir:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = 20.05 + (1½)\frac{20}{7} = 24.336$$

Benzer biçimde, yirmidördüncü gözlem de, aynı sınıftaki üçüncü değerdir, böylece $j = 3$ iken, bu gözlemi şöyle tahmin ederiz:

$$L + (j - ½)\frac{U - L}{f} = 20.05 + (2½)\frac{20}{7} = 27.193$$

Bu durumda, üst dördebölen yirmiüçüncü gözlemden, yirmiüçüncü ve yirmidördüncü gözlem aralığının dörttebiri kadar uzak olduğuna göre, şunu buluruz:

$$\text{Üst dördebölen} = 24.336 + ¼[27.193 - 24.336] = 25.050$$

Son olarak, dördebölenler aralığı, üst ve alt dördebölenlerin farkıdır:

$$\text{Dördebölenler farkı} = 25.050 - (-6.825) = 31.875$$

Böylelikle, eğer bir yayıklık ölçüsü olarak kullanılacaksa, dördebölenler aralığını %31.875 olarak tahmin ederiz.

EN SIK DEĞER SINIFI

Altbölüm 2.2'de gördüğümüz gibi, ham veriler eldeyken bazen kullanılabilen bir merkezî eğilim ölçüsü, en çok yinelenen değer olarak tanımlanan en sık değer idi. Benzer bir kavram, veriler sınıflandırıldığında da tanımlanabilir.

Tanım

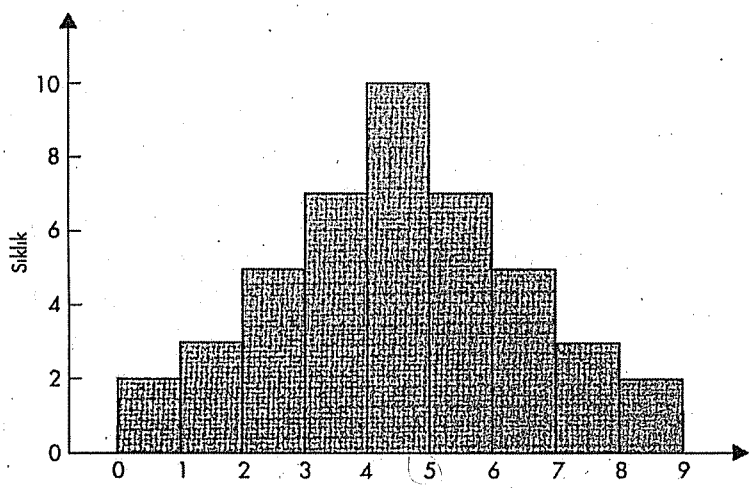
Sınıflanmış verilerde **en sık değer sınıfı**, sıklığı en yüksek olan sınıftır.

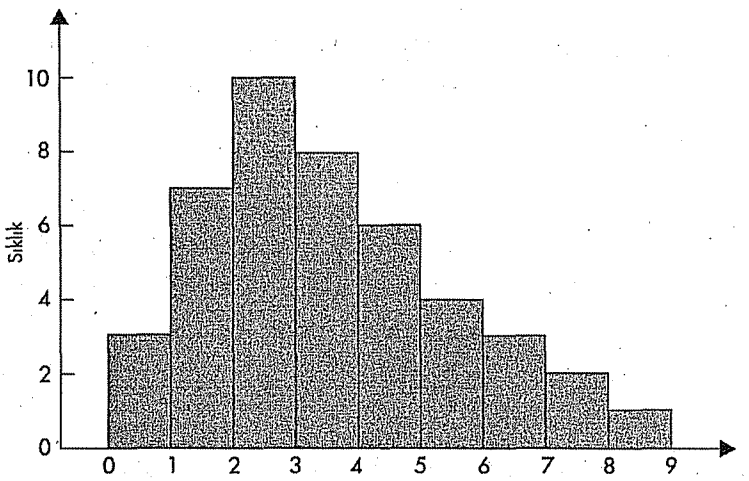
Adi pay senetlerinin enflasyona göre düzeltilmiş ve Çizelge 2.6'daki gibi sınıflanmış getirileri için en sık değer sınıfı, %0.05–%20.5 aralığıdır, yani bu aralıktaki getirilerin sayısı öbür bütün sınıflardan daha yüksektir.

ÇARPIKLIK

Çoğu uygulamalı çalışmada, yalnız merkezî eğilim ve yayıklık ölçüleri —genellikle de ortalama ve standart sapma— hesaplanır. Böylece çok büyük veri kümeleri çoğu zaman yalmzca iki sayıya indirgenir. Birçok gerçek veri kümesi için bu aşırı yalınlaştırma haklı olabilir ve başka özet ölçülerin hesaplanmasıyla pek az yeni şey öğrenilebilir. Ancak veriler yalmzca merkezî eğilim ve yayıklık ölçülerine indirgendiğinde, anakütle dağılımının biçimine ilişkin değerli bilgilerin yitirileceği kesindir. Şimdi böyle bir durumu örnekleyeceğiz.

ÇİZİM 2.13 (a) Bakışık (simetrik) dağılım

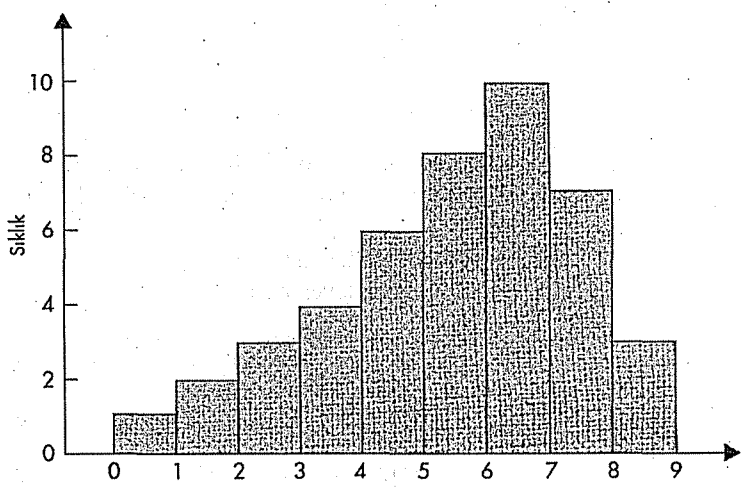




ÇİZİM 2.13 (b) Sağa çarpık dağılım

Çizim 2.13'teki üç histogramı alalım. Çizimin (a) bölümündeki histogram, verilerin merkezî eğilim değerinin iki yanında **bakışık** (simetrik) dağıldığı bir durumu göstermektedir. Aşırı büyük değerlerin gerçekleşme şansı, aşırı küçük değerlerin şansından daha yüksek değildir. Bunun tersine, çizimin (b) bölümündeki histogram, sağa doğru çok uzun kuyrukludur ama solda birden kesilmektedir. **Sağa çarpık** diye nitelenen bu tür dağılımların bir özelliği, ortalamalarının ortancadan büyük olmasıdır. Gelir ya da servetin anakütle dağılımı genellikle bu biçimdedir. Nüfusun büyük bir bölümünün gelirleri mütevazı olmakla birlikte, diyelim en yüksek gelirli %10'un gelirleri geniş bir aralığa yayılır. Çizim 2.13'ün (c) bölümündeki histogram ise, tersi bir durumu sergiler. Burada dağılım **sola çarpık**tır, böylelikle en düşük değerli gözlemler geniş bir aralıkta yer alırken en yüksekler bir araya toplanır.

Bir gözlemler dağılımının niteliklerini belirtmede, çarpıklık özelliği önemli bir yer tutar. Ama, ortalama ile standart sapma, bir dağılımın çarpıklığı konusunda hiçbir bilgi vermez. Çarpıklığı görmenin en kolay yolu histogramı incelemektir. Gerçekten de, daha önce çarpık bir dağılım örneği görmüştük. Çizim 2.10'dan açıkça görülmektedir ki, denetimdışı ücretlerin toplam denetici giderleri içindeki payının dağılımı, ciddi ölçüde sağa çarpıktır. Gerçekten de şirketlerin büyük bir bölümünde bu oran pek yüksek değildir (692 şirketin 394'ünde 0.20'den düşüktür). Yine de, önemli sayıda şirkette bu oran bir hayli yüksektir.



ÇİZİM 2.13 (c) Sola çarpık dağılım

Bir gözlemler kümesinin çarpıklığının yönü ve derecesine ilişkin sayısal bir özet ölçü bulunabilirse de burada ayrıntılara girmeye gerek yoktur. Bizim buradaki amacımız, histogram çizmenin yararına dikkat çekmek ve eğer yalnızca ortalama ve standart sapma hesaplanırsa önemli bilgilerin gözden kaçırılacağını göstermektir. Bu açıdan bakılınca histogram verileri özetlemede önemli bir araçtır. Bundan sonraki altbölümde, değişik türdeki sayısal verileri anlamada ve sergilemede yararlı olabilecek başka görsel yöntemleri ele alacağız.

ALIŞTIRMALAR

21. Aşağıdaki çizelge bir sınıftaki kırk öğrencinin sınav notlarını göstermektedir. Bu verileri özetleyen uygun bir histogram çizin.

54	56	56	59	60
62	62	66	67	68
68	70	70	73	73
73	75	77	78	79
79	81	81	82	83
83	85	86	86	88
89	89	90	90	91
93	93	94	95	98

22. Aşağıdaki çizelge en büyük yirmibeş ABD adi pay senetli yatırım fonunun pay değerlerinde 13 Kasım 1989 Cuma günü ortaya çıkan yüzde değişmeyi göstermektedir. Bu verileri özetleyen uygun bir histogram çizin.

4.7	4.7	4.0	4.7	3.0
4.4	5.0	3.3	3.8	6.4
3.3	3.6	4.7	4.4	5.4
3.0	4.9	5.2	4.2	3.3
4.1	6.0	5.8	4.9	3.8

23. Aşağıdaki çizelge en büyük yirmibeş ABD adi pay senetli yatırım fonunun 1989 yılında 12 Kasım 1989 Perşembe gününe kadar olan yüzde getirilerini göstermektedir.

(a) Bu verileri özetleyen bir histogram çizin.

(b) Bu verileri özetleyen bir dal-yaprak gösterimi hazırlayın.

38.0	24.5	21.5	30.8	20.3
24.0	29.6	19.4	25.6	39.5
13.3	28.0	30.8	32.9	30.3
19.9	24.6	32.3	24.7	18.7
36.8	31.2	50.9	30.7	20.3

24. Aşağıdaki çizelge ABD'nin elli eyaletindeki işçiler arasında sendikalaşma oranını göstermektedir Bu verileri özetleyen uygun bir histogram çizin.

EYALET	SENDİKALAŞMA ORANI (%)	EYALET	SENDİKALAŞMA ORANI (%)
Alabama	19.2	Montana	24.1
Alaska	26.2	Nebraska	15.3
Arizona	13.8	Nevada	22.9
Arkansas	15.0	New Hampshire	13.3
California	23.7	New Jersey	23.0
Colorado	15.2	New Mexico	12.1
Connecticut	21.9	New York	39.2
Delaware	21.7	North Carolina	6.5
Florida	11.7	North Dakota	14.3
Georgia	13.6	Ohio	29.5
Hawaii	32.1	Oklahoma	13.5
Idaho	14.3	Oregon	23.1
Illinois	31.5	Peensylvania	34.2
Indiana	29.3	Rhode Island	27.1
Iowa	19.2	South Carolina	6.7
Kansas	12.8	South Dakota	10.3
Kentucky	22.4	Tennessee	17.7
Louisiana	16.0	Texas	11.0
Maine	18.3	Utah	13.0
Maryland	21.0	Vermont	17.5
Massachusetts	24.4	Virginia	12.7
Michigan	34.6	Washington	13.1
Minnesota	24.4	West Virginia	36.8
Mississippi	12.4	Wisconsin	27.8
Missouri	30.0	Wyoming	14.9

25. Alıştırma 21'deki sınav sonuçlarını özetlemek için bir dal-yaprak gösterimi düzenleyin.

26. Bir sınıftaki kırk öğrenci öğretim üyesini bir (zayıf) ile beş (kusursuz) arasında bir ölçekte değerlendirmiş, çizelgede gösterilen sonuçlar ortaya çıkmıştır.

DEĞERLEME	1	2	3	4	5
ÖĞRENCİ SAYISI	1	7	15	10	7

(a) Ortalama değeri bulun.
(b) Bu değerlemelerin ortancasını bulun.
(c) En sık değer hangisidir?
(d) Bu değerleme anakütlesinin varyansı ile standart sapmasını bulun.

27. Elli tane kişisel emlak sigorta poliçesinden oluşan bir örneklemdeki son iki yıllık hasar talebi sayıları şöyledir:

TALEP SAYISI	0	1	2	3	4	5	6
POLİÇE SAYISI	21	13	5	4	2	3	2

(a) Poliçe başına düşen ortalama talep sayısını bulun
(b) Talep sayılarının örneklem ortancasını bulun.
(c) Bu örneklemdeki en sık değeri bulun.
(d) Örneklem varyansı ile örneklem standart sapmasını bulun.

28. Kırk kişilik bir sınıfın sınav notlarını gösteren Alıştırma 21'deki verilere dönelim.
(a) Histogramınızı çizerken kullandığınız sınıflamaları temel alarak:
(i) Anakütle ortalamasını,
(ii) Anakütle standart sapmasını,
(iii) Anakütle ortancasını,
(iv) Bu anakütlenin dördebölenler aralığını tahmin edin.
(b) Alıştırma 21'deki ham verileri kullanıp, (a) bölümünde tahmin ettiğiniz dört anakütle özet istatistiğini doğrudan hesaplayın.

Alıştırma 23'teki en büyük 25 ABD adi pay senetli yatırım fonlarının yüzde getirilerine ilişkin verilere dönelim.
(a) Histogramınızı çizerken kullandığınız sınıflamaları temel alarak:
(i) Bu yüzde getirilerin ortalamasını tahmin edin.
(ii) Bu yüzde getirilerin anakütle standart sapmasını tahmin edin.
(iii) Bu yüzde getirilerin ortancasını tahmin edin.
(iv) Bu yüzde getirilerin dördebölenler aralığını tahmin edin.
(b) Şimdi de ortalama ile standart sapmayı doğrudan yirmibeş gözlemden hesaplayın, bulduklarınızı (a)'daki yanıtlarınızla karşılaştırın.

30. Alıştırma 24'teki, elli eyaletin sendikalaşma oranına ilişkin verilere dönelim.
(a) Histogramınızı çizerken kullandığınız sınıflamaları temel alarak:
(i) Bu sendikalaşma oranlarının ortalamasını tahmin edin.
(ii) Bu oranların anakütle standart sapmasını tahmin edin.
(iii) Bu sendikalaşma oranlarının ortancasını tahmin edin.
(iv) Bu oranların dördebölenler aralığını tahmin edin.

(b) Şimdi de ortalama ile standart sapmayı doğrudan elli gözlemden hesaplayın, bulduklarınızı (a)'daki yanıtlarınızla karşılaştırın.

31. Yeni elemanlar almak isteyen bir şirket, Ortabatı'daki yirmi büyük üniversite yerleşkesinde işletmecilik öğrencileriyle görüşmek isteğindedir. Aşağıdaki çizelge bu yerleşkelerdeki işletmecilik öğrencilerinden şirket ile görüşme yapma isteğinde olanların sayılarını göstermektedir.

ÖĞRENCİ SAYISI	0.5–10.5	10.5–20.5	20.5–30.5	30.5–40.5
YERLEŞKE SAYISI	2	4	9	5

(a) Histogramı çizin.
(b) Göreli sıklıkları bulun.
(c) Birikimli sıklıkları bulun.
(d) Birikimli göreli sıklıkları bulun.
(e) Yerleşke başına görüşme isteyen anakütle ortalama öğrenci sayısını tahmin edin.
(f) Yerleşke başına görüşme isteyen öğrenci sayısının anakütle varyansını tahmin edin.
(g) Anakütle standart sapmasını tahmin edin.
(h) Anakütle ortancasını tahmin edin.
(i) Dördebölenler aralığını tahmin edin.
(j) En sık değer sınıfı hangisidir?

32. Aşağıdaki çizelge, kalabalık bir sınıftan rassal seçilmiş yirmibeş öğrencilik bir örneklemde bir sınava çalışmak üzere harcanmış süreleri göstermektedir.

ÇALIŞMA SÜRESİ (SAAT)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20
ÖĞRENCİ SAYISI	3	7	8	5	2

(a) Histogramı çizin.
(b) Göreli sıklıkları bulun.
(c) Birikimli göreli sıklıkları bulup bunların histogramını çizin.
(d) Örneklemin ortalama çalışma süresini tahmin edin.
(e) Örneklemin satndart sapmasını tahmin edin.
(f) Örneklem ortancası hangi sınıftadır?
(g) En sık değer sınıfı hangisidir?

33. Bir eğitim psikoloğu, yirmibeş küçük çocuğa basit bir iş vermiştir. Aşağıdaki çizelge, bu çocukların o işi bitirinceye ya da bırakıncaya kadar harcadıkları süreleri göstermektedir.

SÜRE (DAKİKA)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
ÇOCUK SAYISI	4	7	8	4	2

(a) Histogramı çizin.
(b) Örneklem için göreli sıklıkları bulun.
(c) Harcanan sürenin örneklem ortalamasını tahmin edin.
(d) Harcanan sürenin varyansı ile standart sapmasını tahmin edin.

34. Yirmi kişilik bir örneklemdeki mali uzmanlardan, bir şirketin gelecek yıldaki pay senedi başına kazancını kestirmeleri istenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

KESTİRİM (Pay başına $)	9.95–10.45	10.45–10.95	10.95–11.45	11.45–11.95	11.95–12.45
UZMAN SAYISI	2	8	6	3	1

(a) Histogramı çizin.
(b) Örneklemin göreli sıklıklarını bulun.
(c) Örneklemin birikimli sıklıklarını bulun.
(d) Örneklemin birikimli göreli sıklıklarını bulup yorumlayın.
(e) Örneklemin ortalama kestirimini tahmin edin.
(f) Kestirimlerin örneklem varyansı ile standart sapmasını tahmin edin.
(g) Kestirimlerin ortancasını tahmin edin.
(h) Örneklemin dördebölenler aralığını tahmin edin.
(i) Bu örneklemde en sık değer aralığı hangisidir?

35. Hava ulaşımındaki gecikme sorununu incelemek üzere büyük bir hava alanına gelen uçaklardan bir örneklem seçilmiştir. Aşağıdaki çizelge, 100 uçaklık bu örneklemdeki gecikmeli uçuşların sayısıyla gecikme sürelerini göstermektedir.

GECİKME SÜRESİ (DAKİKA)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
UÇUŞ SAYISI	29	23	17	14	11	6

(a) Histogramı çizin.
(b) Örneklemin göreli sıklıklarını bulun.
(c) Örneklemin birikimli göreli sıklıklarını bulup yorumlayın.
(d) Gecikme süresinin örneklem ortalamasını tahmin edin.
(e) Örneklemin varyansı ile standart hatasını tahmin edin.
(f) Gecikme süresinin örneklem ortancasını tahmin edin.
(g) Dördebölenler aralığını tahmin edin.
(h) Bu örneklemin en sık değer aralığı hangisidir?

36. Bir kış nezlesi salgını sırasında öğrenci sağlık merkezindeki kuyruklar her zamankinden uzun olur. Aşağıdaki çizelge sağlık merkezine bu dönemde gelen yirmi öğrencilik bir örneklemin bekleme sürelerini göstermektedir.

BEKLEME SÜRESİ (SAAT)	0–1	1–2	2–3	3–4
ÖĞRENCİ SAYISI	6	9	4	1

(a) Histogramı çizin.
(b) Örneklemin göreli sıklıklarını bulun.
(c) Örneklemin birikimli göreli sıklıklarını bulun.
(d) Bekleme süresinin örneklem ortalamasını tahmin edin.
(e) Bekleme süresinin örneklem varyansı ile standart hatasını tahmin edin.

(f) Bekleme süresinin örneklem ortancasını tahmin edin.
(g) Örneklemin dördebölenler aralığını tahmin edin.
(h) Bu örneklemin en sık değer aralığı hangisidir?

37. Elli yeni büyük boy araba örnekleminde yakıt tüketimi rakamları bulunup aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

YAKIT TÜKETİM (GALON BAŞINA MİL)	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24
ARABA SAYISI	3	6	13	20	8

(a) Histogramı çizin.
(b) Örneklemin göreli sıklıklarını bulun.
(c) Örneklemin birikimli göreli sıklıklarını bulun.
(d) Yakıt tüketiminin örneklem ortalamasını tahmin edin.
(e) Yakıt tüketiminin örneklem varyansı ile standart hatasını tahmin edin.
(f) Yakıt tüketiminin örneklem ortancasını tahmin edin.
(g) Örneklemin dördebölenler aralığını tahmin edin.
(h) Bu örneklemin en sık değer aralığı hangisidir?

38. Büyük bir kentteki hanehalklarının gelirlerine ilişkin aşağıdaki bilgiler bulunmuştur.

HANEHALKI GELİRİ ($)	GÖRELİ SIKLIK
10,000–15,000	0.20
15,000–20,000	0.18
20,000–25,000	0.14
25,000–30,000	0.12
30,000–40,000	0.14
40,000–50,000	0.14
50,000–60,000	0.08

(a) Histogramı çizin.
(b) Anakütlenin ortalama hanehalkı gelirini tahmin edin.
(c) Hanehalkı gelirinin anakütle standart sapmasını tahmin edin.
(d) Anakütledeki ortanca geliri tahmin edin.
(e) (b) ve (d)'deki tahminlerinizi karşılaştırıp farkı açıklayın.

2.6 BAŞKA BAZI ÇİZİM YÖNTEMLERİ

Sayısal bilginin sunumu çoğu zaman en kolay ve en çekici biçimde çizim ve gösterimlerin kullanımıyla başarılır. Verinin özellikleri sayısal çizelgelere bakmaktan çok, görsel yolla daha kolay algılanır. Bu altbölümde, yaygın kullanılan görsel tekniklerden birkaçını kısaca açıklayacağız.

(i) ÇUBUK ÇİZİMİ

Çubuk çizimleri, zaman ya da mekân içinde dağılmış sayısal niceliklerin göreli büyüklüklerini görmenin elverişli bir yoludur. Sözgelimi, Çizelge 2.12, 1992'de üç ülkeden ABD'ye gelen gezgin sayısını göstermektedir. Bu bilgi Çizim 2.14'te çubuk çizimiyle görsel biçimde sunulmuştur. Çizim öyle düzenlenmiştir ki her bir ülkeyi gösteren dikdörtgenin yüksekliği, o ülkeden gelen gezgin sayısıyla orantılıdır. Bu tür çizimlerdeki bilgiler kolayca ve çabucak özümsenebilir. Böyle çizimler iş yaşamına ve ekonomiye ilişkin bilgileri —sözgelimi şirket raporlarında ve finans basınında— sunmada sık sık kullanılır.

Aynı yaklaşım bir büyüklüğün zaman içindeki ilerleyişini göstermekte de kullanılabilir. Çizelge 2.13, yedi yıl boyunca ABD'de altı yaşından küçük çocuklu, çalışan evli kadınların oranını göstermektedir. Aynı bilgi Çizim 2.15'te çubuk çizimi olarak verilmiştir. Zaman içindeki değişimin çabuk ve güvenilir bir izleniminin edinilmesi, sayıların kendilerine bakmaktansa, bir çubuk çizimin görsel incelenmesiyle daha kolay olur.

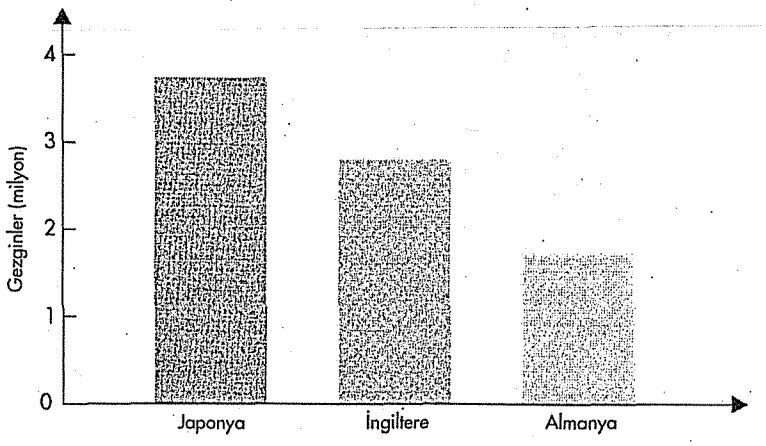
Parçaların kendileri de ilgi odağıysa, basit çubuk çiziminin ilginç ve yararlı bir uzantısı çizilebilir. Sözgelimi 60. sayfadaki Çizelge 2.14, iki yıl boyunca üç kıtadaki yağmur ormanlarının alanını göstermektedir. Bu bilgi, Çizim 2.16'daki gibi bir çubuk çiziminde her yılın toplam alanı, üç parça ton farkıyla birbirinden ayrılacak biçimde bölünerek gösterilebilir. Bu tür çizimlere genellikle *bölünmüş çubuk çizimi* denir. Bunlar hem toplamların, hem tek tek parçaların görsel karşılaştırılmasına olanak sağlar. Bu örnekte, yağmur ormanlarının alanındaki on yıllık azalmanın, üç kıtada da hemen hemen aynı olduğu görülmektedir.

ÇİZELGE 2.12 1992'de ABD'ye gelen gezgin sayıları

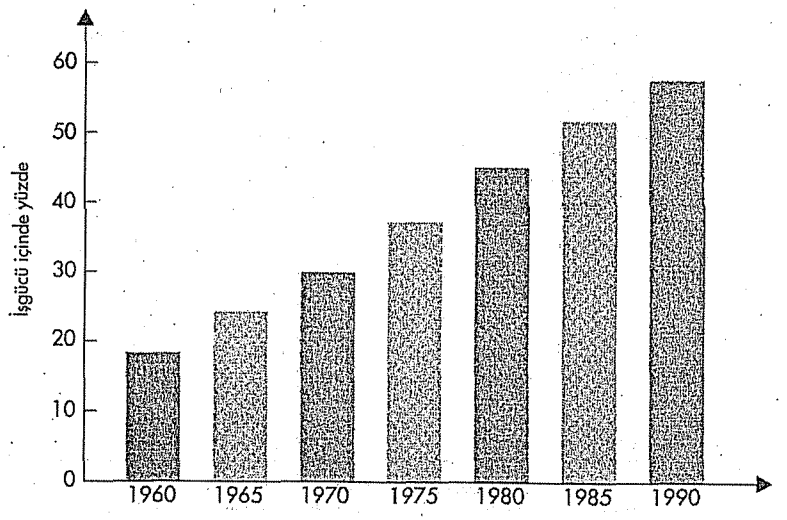
GELİŞ ÜLKESİ	SAYI (MİLYON)
Japonya	3.7
İngiltere	2.8
Almanya	1.7

ÇİZELGE 2.13 ABD'de altı yaşından küçük çocuklu, çalışan evli kadınların oranı

YIL	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
YÜZDE	19	23	30	37	45	53	59



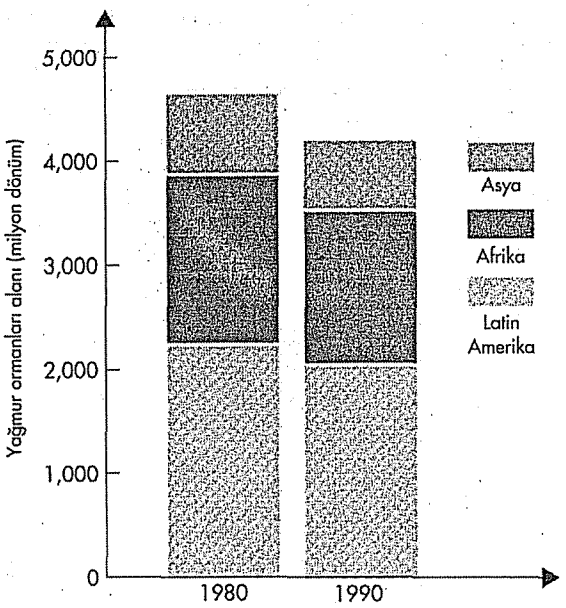
ÇİZİM 2.14 1992'de ABD'ye üç ülkeden gelen gezgin sayılarının çubuk çizimi



ÇİZİM 2.15 ABD'de altı yaşından küçük çocuklu, çalışan evli kadınların oranı

ÇİZELGE 2.14 Yağmur ormanı alanları (milyon dönüm)

	1980	1990
Latin Amerika	2,279	2,074
Afrika	1,606	1,482
Asya	767	679



ÇİZİM 2.16 Yağmur ormanlarının 1980 ve 1990'daki alanları

(ii) ZAMAN SERİSİ ÇİZİMİ

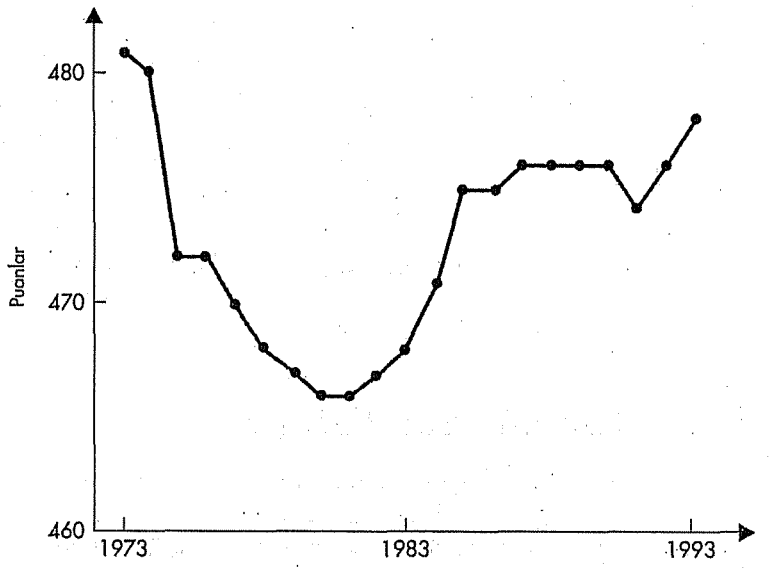
Sayısal bir büyüklüğün zaman içindeki gelişmesi, çubuk çizime almaşık olarak, bu değişkenin değerinin zamana göre çizilmesiyle de gösterilebilir. Zamanı yatay eksene, sözkonusu sayısal büyüklüğü dikey eksene yerleştirirsek, her bir gözlemi çizimde bir noktayla gösterebiliriz. Zaman içinde yanyana duran noktalar doğru parçalarıyla birleştirilerek bir zaman serisi çizimi elde edilebilir, bu da tarihsel değerlerin kolayca okunan görsel bir izlenimini verir.

Bir örnek olarak, Çizelge 2.15, 1973-1993 döneminde Öğrenci Değerlendirme Sınavı'ndaki ortalama sayısal puanları göstermektedir. Bunun zaman serisi çizimi Çizim 2.17'de verilmiştir. Burada puanların 1980-1981'e kadar düştüğünü, bunu bir düzelmenin izlediğini, 1993'te ise 1974'ten bu yana en yüksek puana ulaşıldığım görebiliriz.

Bunun gibi zaman serisi çizimleri, geçmişteki gelişmelerin elverişli bir gözlenme yoludur kesinlikle. Böylesi çizimlerin yüzeysel bir incelemesi, insanda görsel gelişmeyi gelecek dönemlere doğru uzatma isteği uyandırır. Ancak deneyimler göstermiştir ki, geleceği kestirmek için, bu hiç de güvenilir bir yol değildir. Zorluk şuradadır, bir zaman serisine bakıldığında, şans eseri olarak, düzenli bir gelişme varmış gibi görülebilir. Zaman serisi çizimi tek başına, geleceği kestirmek için yeterli bir temel oluşturmaz. Bölüm 17'de görüleceği gibi, amaç kestirim yapmak olduğunda verilerin daha özenli bir çözümlemesi gereklidir.

ÇİZELGE 2.15 Öğrenci Değerleme Sınavı'nda ortalama sayısal puanları

YIL	PUAN	YIL	PUAN	YIL	PUAN
1973	481	1980	466	1987	476
1974	480	1981	466	1988	476
1975	472	1982	467	1989	476
1976	472	1983	668	1990	476
1977	470	1984	471	1991	474
1978	468	1985	475	1992	476
1979	467	1986	475	1993	478



ÇİZİM 2.17 Öğrenci Değerleme Sınavı'nda ortalama sayısal puanları

(iii) PASTA ÇİZİMİ

Pasta çizimleri bir bütünün bileşenlerine ayrıştırılmasını gösterir. Sözgelimi, ABD'deki bütün bilgisayar suçlarının %44'ü para çalma, %16'sı bilgi ya da yazılım çalma, %16'sı yazılıma zarar verme, %12'si veri değiştirme, %10'u hizmet aşırma, %2'si de yasak alanlara girme suçlarıdır.[5]

Bu bileşenler Çizim 2.18'deki pasta çiziminde gösterilmiştir. Daire (ya da "pasta") toplam bilgisayar suçlarını, merkezden kesilmiş parçalar (ya da "pasta

[5] S. Shahabuddin, "Computer security problems and control techniques," *American Business Review*, 7, no.1 (1989), 14-22.

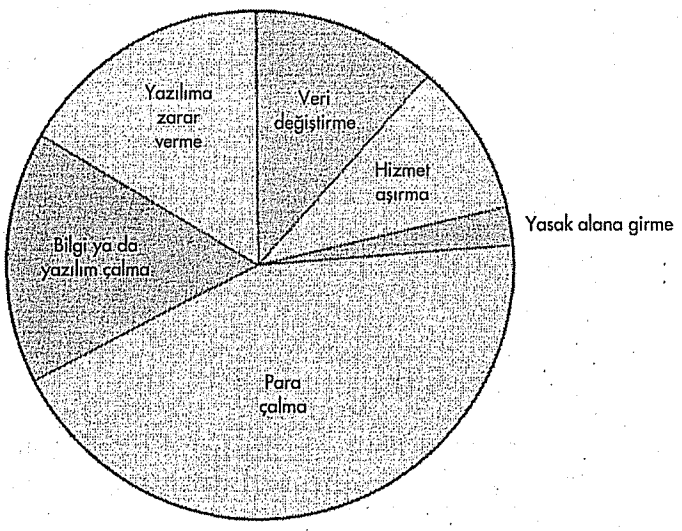
dilimleri") ise bu toplam içindeki payları temsil eder. Pasta öyle bir biçimde çizilmiştir ki, parçalar, gösterdikleri suçların sayısıyla orantılıdır. Pasta çizimleri kolayca yapılabilir. Dairenin merkezinden işe başlanır, toplam 360°, her parçanın merkezde yaptığı açıyı belirletecek biçimde bölümlere ayrılır. Sözgelimi, "veri değiştirme" için bu açı 360° 'nin 0.12'si oranında ya da 43.2° 'dir.

Pasta çizimleri de, verilerin çizimle yansıtılmasının önemini gösteren bir başka örnektir, burada alanların görsel karşılaştırılması, sayıların birbirlerine göre büyüklüklerinin değerlendirmesinde elverişli bir yol olmaktadır.

(iv) SERPİLME ÇİZİMİ

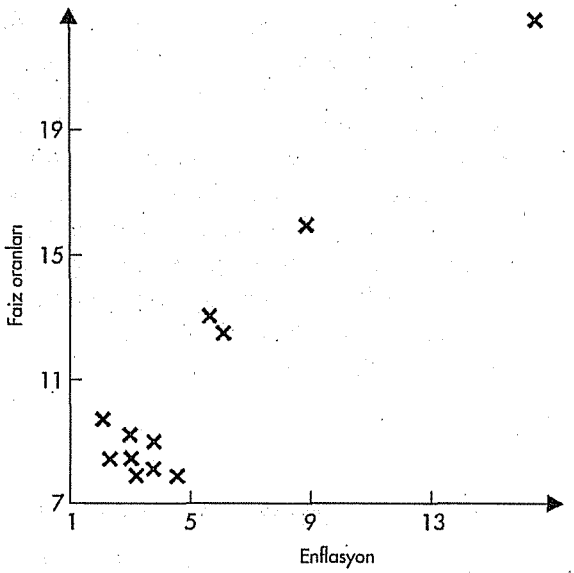
Çoğu zaman bir çift değişken arasındaki ilişkiye, eğer varsa elbette, bakmak isteriz. Sözgelimi, Çizelge 2.16, oniki Avrupa Birliği ülkesinde 1992'deki tüketici fiyatları enflasyonu ile uzun dönem faiz oranlarını göstermektedir. Enflasyonun yüksek olduğu ülkelerde, faiz oranlarının da yüksek olmasını bekleriz, çizelgeye bir göz atarsak bunun doğru olduğu görülür. Bu iki nicelik arasındaki ilişkinin daha bütüncül bir resmini görebilmek için verileri Çizim 2.19'daki serpilme çizimine yerleştirdik. Bu çizimden görüldüğü gibi, faiz oranıyla enflasyonun en düşük olduğu sekiz ülke için bu iki değişken arasında pek bir ilişki yoktur. Ama, en yüksek enflasyon oranını yaşayan dört ülke, en yüksek faiz oranlarını uygulamaktadır. Bunlardan biri (Yunanistan), ötekilerden çok daha yüksek enflasyon ve faiz oranıyla öne çıkmaktadır.

ÇİZİM 2.18 ABD'de bilgisayar suçlarının pasta çizimi



ÇİZELGE 2.16 Tüketici fiyatlarında enflasyon ve uzun dönem faiz oranları

ÜLKE	ENFLASYON (%)	FAİZ ORANI (%)	ÜLKE	ENFLASYON (%)	FAİZ ORANI (%)
Fransa	2.8	8.6	Yunanistan	15.9	22.5
Almanya	4.5	7.9	İrlanda	3.0	9.4
İtalya	5.5	13.1	Lüksemburg	3.2	7.9
İngiltere	3.7	9.1	Hollanda	3.7	8.1
Belçika	2.4	8.6	Portekiz	8.9	16.1
Danimarka	2.0	9.8	İspanya	5.9	12.6



ÇİZİM 2.19 Uzun dönem faiz oranları ile enflasyonun serpilme çizimi

Çizim 2.19'daki gibi serpilme çizimleri, bir çift sayısal değişken arasındaki ilişkinin görsel bir görünümünü verirler. Bölüm 12-14'te göreceğimiz istatistik teknikleri, bu tür verilerin ayrıntılı bir çözümlemesinin yapılmasını sağlar.

(v) *KUTU ÇİZİMİ*

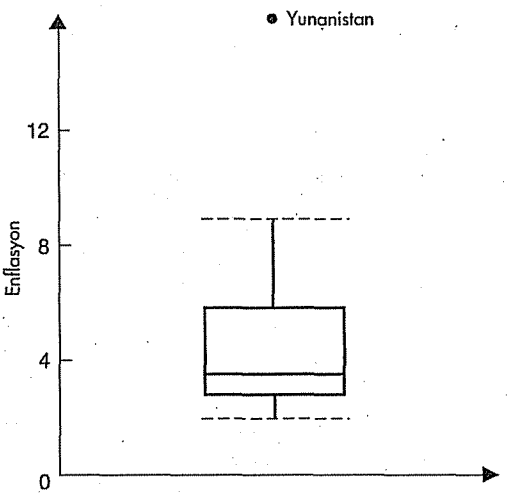
Bir veri kümesinin görsel özetini çıkarmada kutu çizimi yararlı bir araçtır. Bunu da, oniki Avrupa Birliği ülkesinin Çizelge 2.16'daki enflasyon oranlarını kullanarak örnekleyeceğiz.

Bu ülkeler için ortanca enflasyon oram %3.7, alt ve üst dördebölenler ise sırasıyla %2.85 ile %5.8'dir. Bu verilerin bir özelliği de, Yunanistan'ın %15.9 olan enflasyon oranının, öteki ülkelerden çok daha yüksek olmasıdır. Bu değer dışarıda tutulursa, bütün enflasyon oranları %2.0 ile %8.9 arasındadır.

Bu bilgi Çizim 2.20'de özetlenmiştir. Burada ölçek enflasyon oranını gösterir. Dikdörtgen (ya da "kutu"), alt ve üst sınırları alt ve üst dördebölenlere karşılık olacak biçimde çizilmiştir. Ortanca değeri hizasındaki çizgi kutunun içine çizilmiştir. Yunanistan'ın olağandışı değeri ayrık olarak gösterilirken, kutunun kenarlarından çıkan çizgiler, öteki en düşük ve en yüksek gözlemlerin düzeyindeki kesikli çizgilere kadar uzatılmıştır.

Kutu çizimleri, iki ya da daha çok veri kümesinin görsel karşılaştırıl-masında işe yarar. Bir örnek olarak, Çizelge 2.17, bir istatistik sınıfındaki onbeş ikinci, onbeş üçüncü, onbeş de dördüncü yıl öğrencisinin dönem sonu sınav sonuçlarını göstermektedir. Bu üç veri kümesinin ortancalarıyla alt ve üst dördebölenleri Çizelge 2.18'de belirtilmiştir. Çizim 2.21'de ise bu üç öğrenci kümesinin sınav sonuçları yanyana kutu çizimleriyle gösterilmiştir. Bu örnekte hiçbir kümede dışadüşen aşırı değerler görülmemektedir. Çizimlerdeki kesikli çizgiler en yüksek ve en düşük notları gösterir. Dördüncü yıl öğrencilerinin en yüksek ortanca notu elde ettikleri, ama bunların notlarının öteki kümelere göre bir hayli daha yayık olduğu çizimden açıkça görülmektedir. Üçüncü yıl öğrencilerinin en düşük notları almama konusunda göreli bir başarı sergiledikleri de ayrıca dikkat çekmektedir.

ÇİZİM 2.20 Oniki Avrupa Birliği ülkesindeki tüketici fiyatları enflasyonunun kutu çizimi



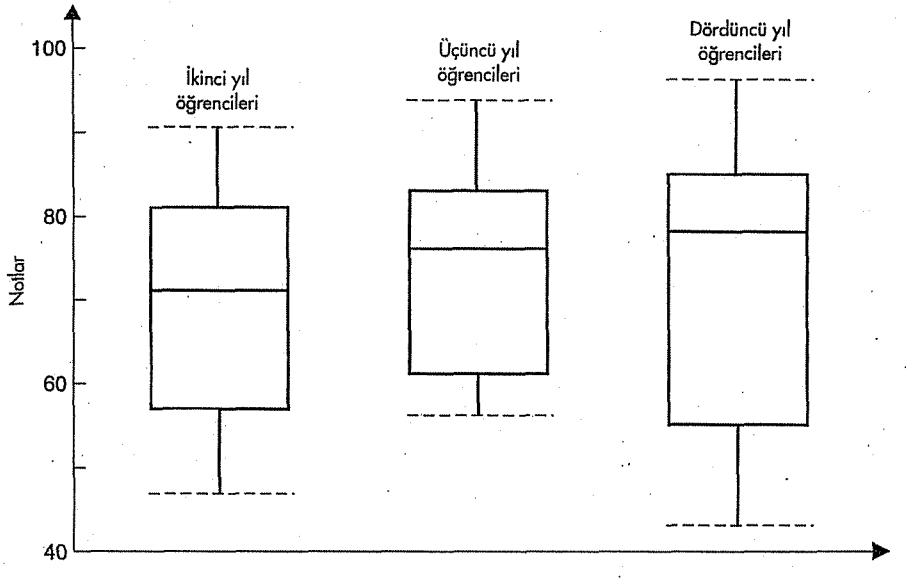
ÇİZELGE 2.17 Dönem sonu sınav sonuçları

İKİNCİ YIL ÖĞRENCİLERİ		ÜÇÜNCÜ YIL ÖĞRENCİLERİ		DÖRDÜNCÜ YIL ÖĞRENCİLERİ	
47	72	56	76	43	80
52	72	59	80	48	80
52	78	59	83	50	83
57	81	61	83	55	85
63	81	67	84	61	89
64	86	69	90	67	91
69	91	73	94	72	97
71		76		78	

Çizelge 2.18 Sınav sonuçlarının özet istatistikleri

	İKİNCİ YIL ÖĞRENCİLERİ	ÜÇÜNCÜ YIL ÖĞRENCİLERİ	DÖRDÜNCÜ YIL ÖĞRENCİLERİ
Alt dördebölen	57	61	55
Ortanca	71	76	78
Üst dördebölen	81	83	85

ÇİZİM 2.21 Sınav sonuçlarının kutu çizimleri



2.7 İSTATİSTİKLE YALAN SÖYLEME[6]

Buraya kadar, sayısal bilgilerin özetlenme ve sunulmasında uygun olabilecek çeşitli süreçleri ele aldık. Bu yöntemler akla yatkın ve özenli kullanılırlarsa, aksi halde anlaşılmaz bir yığın olarak kalacak sayılardan temel bilgileri elde etmede kusursuz araçlar olabilirler. Ama ne yazık ki, veriler özetlenirken her zaman akla yatkın ve özenli davranılamamaktadır. Böyle durumlarda özetin sunuluş biçimi insanı yanıltabilir. İstatistikçinin ustalığı, verilerden olabildiğince açık ve doğru bir resmi çıkarabilmesinde yatar. Çeşitli tekniklerin uygunsuz kullanımları çarpık bir resim çizer, bu da yanlış izlenimler uyandırabilir. Açıkça düzenbaz olmadan da "istatistikle yalan" söylenebilir. Bu altbölümde, bunun nasıl yapıldığının altı yolu sergilenecektir. Amacımız bunların uygulanmasını yüreklendirmek değil, bunların tehlikelerine karşı uyarıda bulunmaktır.

(i) DUYGUSAL VE YANILTICI SÖYLEMLER

Sayıların kendileri içlerinde değer yargıları barındırmaz. Veriler yalnız olgusal bilgi verir, kuşkusuz bunlar da belli bir savın şu ya da bu yanını savunmakta işe yarayabilir. Ancak, sunumda yapılacak basit söz hileleriyle sayıları belli bir savı desteklermiş gibi göstermek olanaklıdır. Bir sayıma göre belli bir fabrikadaki mavi yakalı işçilerin ortalama yıllık geliri 25,000 $ olsun. Bu olgu şöyle sunulabilir:

> "Bu işçilerin yıllık ortalama geliri 25,000 $'dır."

Bir sendika temsilcisi aynı bilgiyi şöyle dile getirebilir:

> "Bu işçilerin yıllık ortalama geliri yalnızca 25,000 $'dır."

Bu tümceye *yalnızca* sözcüğünün katılması yeni bir açıklama getirmez. Tersine, ortalama gelirin gereksiz yere düşük olduğu izlenimini verir. Başka bilgiler yokken böyle bir izlenim yaratmamn gereği yoktur.

Daha renkli ve daha aşırı bir örnek şu söylem olabilir.[7]

---

[6] Bu altbölümün başlığı D. Huff, I. Geis, *How to Lie with Statistics* (İstatistikle Nasıl Yalan Söylenir) (New York: Norton, 1954) kitabından esinlenmiştir. İstatistiksel bilginin sunumuyla ciddi biçimde ilgilenen herkesin bu küçük sevimli kitabı okuması temel bir zorunluluktur. Ayrıca bkz. H. Wainer, "How to display data badly", *American Statistician, 38* (1984), 137-47, ve D. S. Christensen, A. Larkin, "Criteria for high intensity graphics", *Journal of Managerial Issues, 4* (1992) 130-53.

[7] Bu hesaplama, toplam 2.1 milyon beyaz yakalı memur sayısına dayanmaktadır. Ortalama 1.75 m. boy varsayımı ile 2,287 millik bir toplam uzaklığa ulaşılır.

"Ülkedeki bütün federal memurlar birbiri ardına boylu boyunca yere yatarlarsa, New York'tan Las Vegas'a ulaşılır."

Böyle bir söylemin amacı sayısal bir bilgi vermek değil, federal memur sayısının çok fazla olduğuna ilişkin bir izlenim yaratmaktır. Okuyucunun "gereğinden çok" kamu görevlisi bulunduğu sonucuna varması teşvik edilmektedir. Burada, bu insanların boylu boyunca yere yatmaları gibi akıl almaz bir olayın gerçekleşmesi durumunda önemli bir mesafeyi dolduracakları türünden ilgisiz bir olguya düzmece bir biçimde başvurmak, arka plandaki sayısal bilgiyi gölgelemektedir. Ancak tersine bir hesaplama yaparak 2.1 milyon federal memur bulunduğu gerçeğini çıkarabiliriz.

(ii) YETERSİZ SAYISAL ÖZETLER

Olabildiğince çok bilgi iletmek amacıyla, çoğu zaman büyük veri kümelerini bir ya da iki özet ölçüye indirgemek gereklidir. Böyle özet istatistikler olmasa, yorumlama zaman zaman olanaksızlaşabilir. Yine de bu işlemde aşırıya kaçılabilir. Eğer yetersiz özet bilgi verilirse, yanlış bir izlenim yaratılabilir.

Bu tür çarpıklığın bir örneği, Nevada'da mil kare başına ortalama 13.5 kişinin düştüğü Washoe County'deki nüfus yoğunluğuyla ilgilidir.[8] Aslında bu bölgedeki insanların %80'i, mil kare başına sırasıyla 4,362 ve 6,155 kişinin düştüğü Reno ile Sparks'ta yaşamaktadır. Washoe County'nin geri kalan bölümünde —yüzölçümünün %99.8'inde— milkare başına 2.66 kişi düşer. Öyleyse bu bölgenin ortalama nüfus yoğunluğu bize pek bir şey söylemez. İnsanlarının büyük bir çoğunluğu nüfus yoğunluğu bir hayli yüksek yerlerde yaşarken, yüzölçümünün tamamına yakın bölümü, ortalamadan çok daha seyrek bir nüfusu barındırmaktadır. Ama yalnızca mil kare başına ortalama insan sayısı verilmişken, bu bölgede türdeş bir nüfus yoğunluğu olduğu gibi yanlış bir sonuca varabiliriz.

(iii) ZAMAN SERİSİ ÇİZİMLERİNDE ÖLÇEK SEÇİMİ

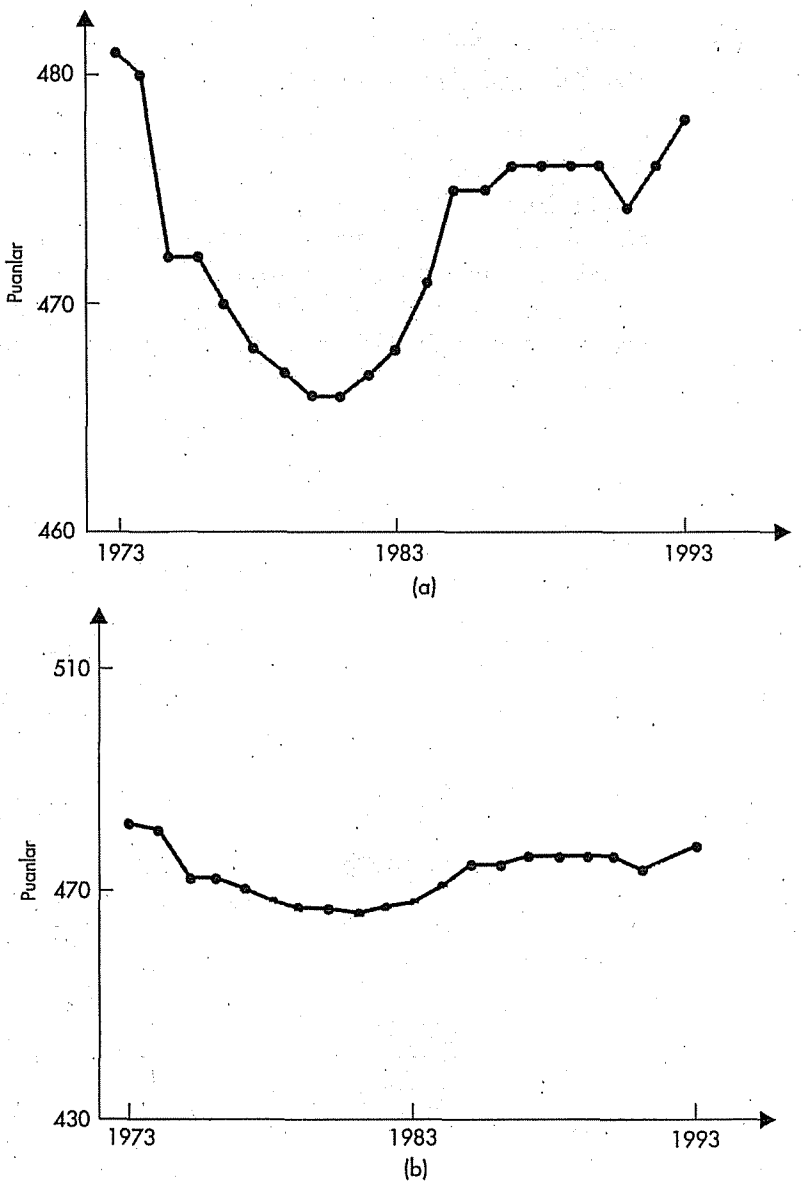
Kolaylık sağlamak amacıyla Çizim 2.22(a) olarak yeniden gösterilen Çizim 2.17, Öğrenci Değerleme Sınavı'nın onbir yıl boyunca ortalama sayısal puanım vermektedir. Bu çizim, ortalama puanlarda epeyi büyük dalgalanmalar olduğu

---

[8] Bu örnek J. W. Tukey tarafından "Methodology and the statistician's responsibility for both accuracy and relevance," *Journal of the American Statistical Association, 74* (1979), 786-93'te verilmiştir.

izlenimini uyandırmaktadır. Tam tamına aynı bilgiler bir kez de Çizim 2.22(b)' de gösterilmiştir, ancak bu kez dikey ölçek çok daha geniş alınmıştır. Ortaya çıkan resim çok daha yatıktır, ortalama puanın zaman içinde daha az dalgalandığı izlemini vermektedir.

ÇİZİM 2.22 Öğrenci Değerleme Sınavı'nda ortalama sayısal puanların zaman serisi çizimi

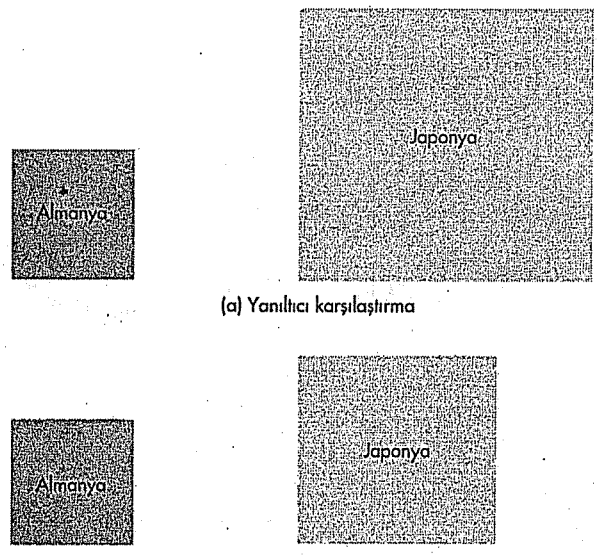


Belli bir ölçek seçerek, bir zaman serisinde zaman içinde göreli bir duraganlık olduğu ya da önemli dalgalanmaların bulunduğu izlenimlerinden biri verilebilir. Belli bir çizimde ölçeğin "doğru" bir seçimi yoktur. Onun yerine, bu tür örneklerden çıkarılabilecek sonuç şu olabilir: Yalnız çizimdeki çizginin biçimine bakmak, verilerin açık bir resmini görmeye yetmez. Ölçülerin üzerinde yer aldığı ölçeği de gözden uzak tutmamak gerekir.

(iv) UYGUN OLMAYAN ÇİZİM ÖLÇEĞİ KARŞILAŞTIRMALARI

Çizelge 2.12'de ABD'ye Almanya'dan 1.7, Japonya'dan 3.7 milyon gezgin geldiğini görmüştük. Öyleyse Japon gezginlerin sayısı, Almanların yaklaşık 2.2 katıdır. Bunu göstermenin basit bir yolu, Çizim 2.23(a)'daki gibi, Almanya için bir kenarı 1 birim, Japonya için bir kenarı 2.2 birim olan kareler çizmek olabilir. Ancak bu çizime yüzeysel bir bakış, göreli alanlar arasındaki oranın 1'e 2.2'den daha büyük olduğu izlenimini edinir. Bunun nedeni genellikle büyüklüğü alanla özdeşleştirmemizdir. Japonya karesinin alanı Almanya'nınkinin $(2.2)^2 = 4.84$ katı olduğuna göre, yaratılan izlenim, Japon gezgin sayısının Alman gezginlerinin neredeyse beş katı olduğu biçimindedir.

ÇİZİM 2.23 İki ülkeden ABD'ye gelen gezginler



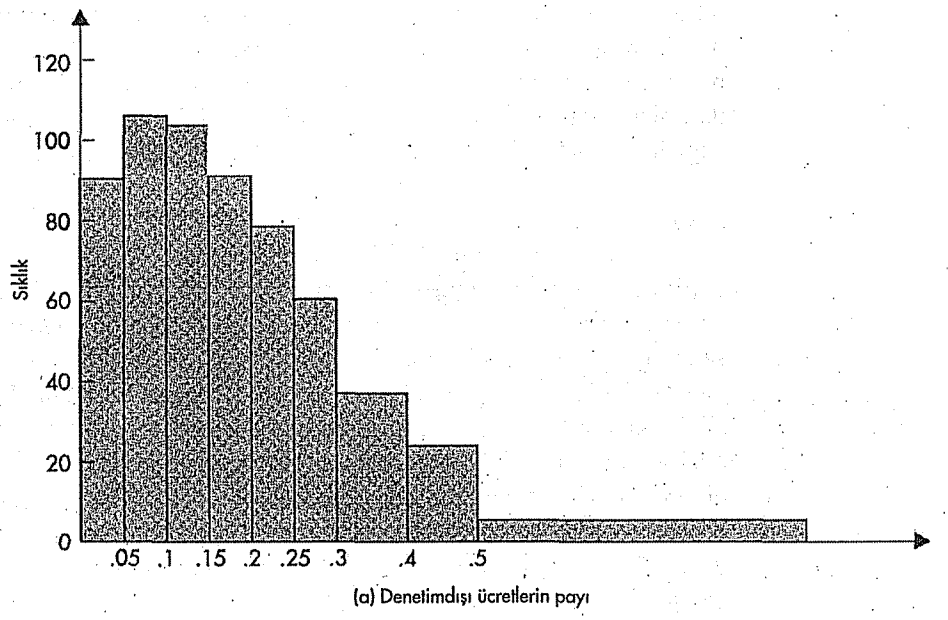
(a) Yanıltıcı karşılaştırma

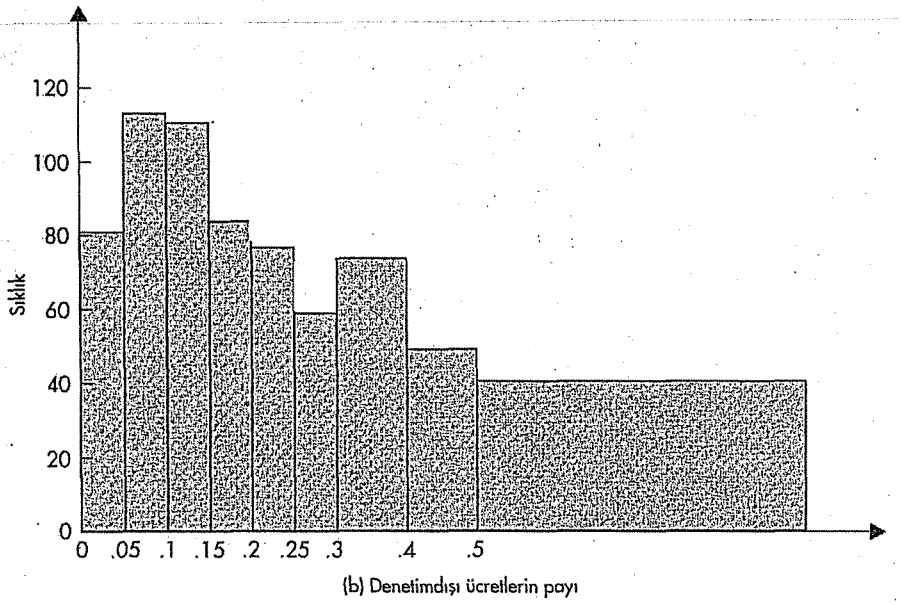
(b) Doğru çizim

Durumu düzeltmek çok kolaydır. Japonya karesinin alanı, Almanya karesinin alanının 2.2 katı olmalıdır. Dolayısıyla Japonya karesinin kenarları, Çizim 2.23 (b)'deki gibi, $\sqrt{2.2} = 1.48$ birim olmalıdır. Bu yeni çizim, iki ülke gezginlerinin birbirlerine göre sayılarına ilişkin doğru bir izlenim vermektedir.

Bu nokta, bütün sınıfların aynı genişlikte olmadığı histogramları çizerken de akılda tutulmalıdır. Örnek 2.9'da denetimdışı ücretlerin toplam denetim giderleri içindeki payını gösteren veriler kullanmıştık. Çizim 2.10'daki gibi doğru çizilirlerse, sınıf aralıkları üzerindeki dikdörtgen *alan*larının sıklıklarla orantılı olması gerekir. Kolaylık sağlamak bakımından Çizim 2.10, Çizim 2.24(a) olarak yeniden çizilmiştir. Şimdi histogramın, Çizim 2.24(b)'deki gibi, (yanlış) çizildiğini, böylece sınıf aralıkları üstündeki dikdörtgenlerin *yükseklik*lerinin sıklıklara orantılı olduğunu düşünelim. Değişim çok çarpıcıdır. Bu ikinci çizimin görsel bir incelemesi, gözlemlerin çok büyük bir oranının en yüksek sınıflarda toplandığı yanlış izlenimini doğurmaktadır.

ÇİZİM 2.24 Avustralya'da toplam denetim giderleri içinde denetimdışı ücretlerin payının alanlar sıklıklara orantılı olacak biçimde doğru çizilmiş (a) ve yükseklikler sıklıklara orantılı olacak biçimde yanlış çizilmiş (b) histogramları.





ÇİZİM 2.24 (devam)

(v) GERÇEKTEN RASTLANTI OLAN RASTLANTILAR

Zaman zaman bize bazı olayların aynı anda gerçekleştiği söylenir ve bu birlikteliğin "rastlantı olamayacak kadar rastlantısal" olduğu sonucuna varmamız istenir. Benim en beğendiğim örnek "Borsa Kestirimi Yapan Kupa Finali Kuramı"dır. Bu "kuram"a göre Kupa Finalini, eski Amerikan Futbol Ligi takımlarından biri kazanırsa borsada fiyatlar düşme eğilimine, yok eğer ilk Ulusal Futbol Ligi üyelerinden biri kazanırsa yükselme eğilimine girer. Bu basit kural, Kupa Finallerinin ilk yirmialtı yılından yirmiüçünde borsamn genel eğilimini doğru kestirmiştir.

Bu kurama kuşkuyla yaklaşılmalıdır. Bir futbol maçı sonucunun borsanın eğiliminin etkileyebileceği kavramı akla aykırıdır, kestirimci olarak gösterdiği başarıya karşın akla aykırı kalacaktır. Amatör ya da profesyonel, kaç kişinin borsanın gelecekteki eğilimini kestirmek için göstergeler aradığına bakılarak bu kanıt daha iyi bir kapsama oturtulabilir. Bu ilişki bulunana kadar kaç tane değişik ilişki araştırılmış olabilir? Ben diyeyim yüzlerce, siz deyin binlerce! Denenen çok fazla sayıda ilişki arasından bunun, geçmiş davramşlara epeyi yakın göründüğünü ileri sürmek bu duruma uygun bir yaklaşım olabilir. Ancak, bu *tek* kestirimcinin önümüzdeki beş yılda ne kadar başarılı olacağına bakmak, ilk yirmialtı yıllık kayıtların gerçekten rastlantı olup olmadığına karar vermede hakça bir değerlendirme sayılabilir.

(vi) ÇOK KÜÇÜK ÖRNEKLEMLERDEN GENELLEME

"Her üç bira içenden ikisi Schlush yerine Blast'ı yeğler." Bu söyleme nasıl tepki verilmelidir? Eğer 3,000 bira içicisinin görüşüne başvurulduysa, bunlardan 2,000 kişi de Blast'i yeğlediklerini söylediyse, bira içenlerin çoğunun Blast'ı tuttuğunu ileri süren görüşe önemli bir kanıt desteği sağlanmış demektir. Ama, yalnızca üç biracının görüşü sorulmuşsa, bunlardan ikisi de Blast'ı yeğlediklerini söylemişse, bu bizi pek etkilemez. Oysa ki, başka üç kişiye sorulsa, durumun tersine dönebileceğine ya da üçünün de Schlush'ı yeğleyeceğine inanabiliriz.

Çok küçük bir örnekleme dayanılarak anakütleye ilişkin genelleme yapmak son derecede tehlikelidir. Böyle örnekler, akla uygun bir güven düzeyinde sonuca varmamızı sağlamaya yeterli kanıt içermeyebilir. Daha sonraki bölümlerde göreceğimiz gibi, bir örneklemdeki bulguları anakütleye genellemek, örneklem kanıtları arttıkça daha kesin bir görünüm kazanır. Çok küçük örneklemler bize, daha geniş anakütleye ilişkin pek az şey söyleyebilirler, o da eğer söyleyebilirlerse.

ALIŞTIRMALAR

39. Sekiz filmin brüt gişe gelirleri milyon dolar olarak aşağıdadır:

❑ E.T.–the Extra Terrestial	399.8
❑ Return of the Jedi	263.0
❑ Raiders of the Lost Ark	242.3
❑ Beverly Hills Cop	234.7
❑ The Empire Strikes Back	223.0
❑ Ghostbusters	220.8
❑ Back to the Future	208.2
❑ Indiana Jones and the Temple of Doom	179.8

Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

40. ABD'de hanehalklarının yılda kadın giyimi için ortalama 607 $, erkek giyimi için 345 $ harcadıkları tahmin edilmiştir. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

41. 1992-93 öğretim yılında ABD'de liseli 3.4 milyon erkek, 1.9 milyon kız öğrencinin spor yaptığı tahmin edilmiştir. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

42. Yakınlarda yapılan bir tahmine göre ABD'de yılda 43,000 kadın göğüs kanserinden, 90,000 kadın şeker hastalığından ölmektedir. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

43. Onüç yıllık bir süre boyunca çeşitli ülkelerde pay senetlerinin yıllık ortalama getirisi (ABD doları ile) şöyledir: Japonya %18.0, İngiltere %17.9, Almanya %15.1, ABD %14.1, Kanada %7.7. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

44. 1986'da ABD'de 15-19 yaşları arasındaki her bin kızdan 50.2'si bebek doğurdu. Aynı sayı 1991'de 62.1'di. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

45. 1987'de ABD tıp fakültelerinden mezun olanların 13,144'ü beyaz, 1,190'ı azınlıktandı. 1992'de bu sayılar sırasıyla 11,525 ve 1,273 oldu. Bu bilgiyi bölünmüş çubuk çizimiyle gösterin.

46. 1987'de Illinois hapishanelerinde 19,152 erkek, 602 kadın tutuklu vardı. 1992'de aynı sayılar sırasıyla 29,089 ve 1,226 oldu. Bu bilgiyi bölünmüş çubuk çizimiyle gösterin.

47. Aşağıdaki çizelge, seçilmiş yıllar için ABD ulusal borcuna yapılan faiz ödemelerinin gayrısafi yurtiçi ürün içindeki yüzdesini göstermektedir. Bu verileri bir zaman serisi çiziminde göstererek ortaya çıkan görüntüyü sözcüklerle yorumlayın.

YIL	1948	1952	1956	1960	1964	1968
FAİZ	2.1	1.7	1.6	1.8	1.7	1.7
YIL	1972	1976	1980	1984	1988	1992
FAİZ	1.9	2.2	2.8	4.2	4.5	5.0

48. Aşağıdaki çizelge, ABD'de on yıllık bir sürede Tüketici Fiyat endeksindeki yüzde değişmeleri göstermektedir. Bu verileri bir zaman serisi çiziminde göstererek ortaya çıkan görüntüyü sözcüklerle yorumlayın.

YIL	1983	1984	1985	1986	1987
TÜFE % DEĞİŞME	3.8	3.9	3.8	1.1	4.4
YIL	1988	1989	1990	1991	1992
TÜFE % DEĞİŞME	4.4	4.6	6.1	3.1	2.9

49. Aşağıdaki çizelge ABD Küçük İşletmeler Dairesi'nin altı yıl boyunca dışsatımcılara açtığı kredilerin sayısını göstermektedir. Bu verileri bir zaman serisi çiziminde göstererek ortaya çıkan görüntüyü sözcüklerle yorumlayın.

YIL	1987	1988	1989	1990	1991	1992
KREDİ	58	116	112	137	148	617

50. Yakınlarda yapılan bir tahmine göre ABD federal bütçe harcamalarının %46'sı hakedişlere, %18'i savunmaya, %15'i eyaletlere ve yerel yönetimlere, %14'ü borç faizlerine, %6'sı öteki federal işlemlere, %1'i de mevduat sigortasına gitmektedir. Bu bilgiyi gösteren bir pasta çizimi düzenleyin.

51. ABD'deki bütün iş gezisi giderlerinin %46'sı havayollarına, %23'ü konaklamaya, %11'i yemeğe, %8'i araba kirasına, %12'si öteki giderlere gitmektedir. Bu bilgiyi gösteren bir pasta çizimi düzenleyin.

52. ABD'deki alkollü içki reklamı harcamalarının %71'i bira, %20'si damıtık içkiler, %7'si şarap, %2'si düşük alkollü içkiler için yapılmaktadır. Bu bilgiyi gösteren bir pasta çizimi düzenleyin.

53. **(a)** Alıştırma 24'teki elli eyaletin sendikalaşma oranını gösteren verilerle bir kutu çizimi düzenleyin.

(b) Alaska ile Hawaii'yi dışta bırakıp ABD'yi beş coğrafi bölgeye ayırın. Her bir bölgedeki sendikalaşma oranını aynı ölçekte farklı kutu çizimleriyle gösterin.

54. En büyük yirmibeş ABD adi pay senedi yatırım fonunun değerlerinde 13 Kasım 1989 Cuma günü gerçekleşmiş yüzde değişmeleri gösteren Alıştırma 22'deki verilerle bir kutu çizimi düzenleyin.

55. En büyük yirmibeş ABD adi pay senedi yatırım fonunun değerlerinde 1989 yılında 12 Kasım 1989 Cuma gününe kadar gerçekleşmiş yüzde değişmeleri gösteren Alıştırma 23'teki verilerle bir kutu çizimi düzenleyin.

56. Alıştırma 22 ile 23'teki verilere yeniden dönelim. Bu iki çizelge öyle düzenlenmiştir ki belli bir fon her ikisinde de aynı sırada yer almıştır. Bu bilgiyi gösteren bir serpilme çizimi hazırlayıp gösterdiği özellikleri tartışın.

57. Yerel bir gazeteden bulunduğunuz bölgedeki evler için duyurulmuş satış fiyatlarını öğrenin. Bu bilgiyi özetleyen bir kutu çizimi düzenleyin.

58. Aşağıdaki çizelge, elli eyaletteki yüksek öğretim harcamalarıyla kamu refahı harcamalarını toplam harcamaların yüzdesi olarak göstermektedir. Bu veriler üzerine bir inceleme yazın. Verilerin içerdiği bilgileri ortaya çıkarmak için uygun gördüğünüz her sayısal ya da görsel özet ölçüsünü kullanın.

EYALET	YÜKSEK ÖĞRETİM	KAMU REFAHI	EYALET	YÜKSEK ÖĞRETİM	KAMU REFAHI
Alabama	15.4	13.5	Montana	9.7	9.3
Alaska	8.5	5.6	Nebraska	17.0	12.4
Arizona	16.7	5.6	Nevada	10.3	6.4
Arkansas	12.0	14.8	New Hampshire	13.4	14.9
California	9.2	11.0	New Jersey	6.6	10.1
Colorado	20.0	7.5	New Mexico	14.8	9.3
Connecticut	8.7	18.1	New York	5.1	6.4
Delaware	17.3	11.1	North Carolina	13.6	11.0
Florida	8.8	9.5	North Dakota	16.2	8.8
Georgia	12.0	14.2	Ohio	11.8	11.8
Hawaii	12.7	13.8	Oklahoma	16.1	16.8
Idaho	12.7	10.8	Oregon	11.8	13.1
Illinois	8.3	19.8	Peensylvania	5.5	19.2
Indiana	17.2	8.8	Rhode Island	9.8	20.8
Iowa	13.9	14.4	South Carolina	15.1	10.7
Kansas	14.7	16.2	South Dakota	15.5	13.7
Kentucky	12.0	13.9	Tennessee	14.6	14.7
Louisiana	11.3	12.1	Texas	17.0	12.7
Maine	9.1	19.5	Utah	19.6	10.3
Maryland	8.8	13.8	Vermont	15.7	14.1
Massachusetts	5.9	23.9	Virginia	15.4	10.3
Michigan	11.3	19.8	Washington	15.1	13.7
Minnesota	12.7	10.3	West Virginia	9.7	9.3
Mississippi	11.3	14.3	Wisconsin	13.2	12.4
Missouri	12.2	16.2	Wyoming	11.4	5.3

59. Bugünkü *The Wall Street Journal*'ı alın. Bu gazetede sayısal bilgilerin görsel olarak özetlenmesinde kullanılan yöntemleri tartışın. Kullanılan yöntemler açıkça anlaşılan çizimler veriyor mu? Başka almaşık ya da ek görsel yöntemler önerebilir misiniz?

60. Büyük bir ABD şirketinin yıllık raporunu bulun. Bu raporda verileri sunmak için kullanılan görsel teknikleri açıklayarak bunlarda yapılabilecek iyileştirmeler önerin.

61. İlgilendiğiniz bir işletmecilik ya da iktisat konusunda veri derleyin. Bu verileri açık ve doğru olarak yansıtan görsel özetler hazırlayın. Bundan sonra bir de *yanıltıcı* görsel özet hazırlayabilir misiniz?

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

62. Aşağıdaki ölçülerin her birinde anakütleye ilişkin neler öğrenilebileceğini açıklayın.
    (a) Ortalama
    (b) Ortanca
    (c) Standart sapma
    (d) Dördebölenler aralığı

63. Bir anakütlenin standart sapması sıfırsa, bu anakütledeki gözlemlere ilişkin ne söyleyebilirsiniz?

64. (a) İki anakütlenin ikisi de ikişer gözlem içermektedir. Bu iki anakütlenin hem ortalaması, hem standart sapması birbirine eşittir. İlk anakütledeki gözlemlerin sayısal değerlerinin ikincidekilerle aynı olması zorunlu mudur?
    (b) İki anakütlenin ikisi de üçer gözlem içermektedir. Bu iki anakütlenin hem ortalaması, hem standart sapması birbirine eşittir. İlk anakütledeki gözlemlerin sayısal değerlerinin ikincidekilerle aynı olması zorunlu mudur?

65. Ortalamaları aynı, birincinin standart sapması ikinciden büyük olan iki anakütle için iki histogram çizin.

66. ABD'nin en büyük on pay senedi yatırım fonunun 17 Eylül 1993'te sona eren bir yıl içindeki getiri yüzdeleri aşağıda gösterilmiştir.

27.9	11.6	17.6	26.6	15.6
12.4	22.4	18.5	22.9	25.0

    (a) Bu anakütlenin
    (b) Ortalamasını bulun.
    (c) Ortancasını bulun.
    (d) Varyansını bulun.
    (e) Standart sapmasını bulun.
    (f) Aralığını bulun.
    (g) Dördebölenler aralığını bulun.

67. Büyük bir kentteki on benzin istasyonluk bir örneklemde, benzinini kendi dolduran müşteriler için kurşunsuz benzinin galon başına (sent cinsinden) fiyatları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

96 99 104 98 103 107 103 96 99 98

(a) Ortalamayı bulun.
(b) Ortancayı bulun.
(c) Varyansı bulun.
(d) Standart sapmayı bulun.
(e) Aralığı bulun.
(f) Dördebölenler aralığını bulun.

68. Aşağıdaki çizelge büyük bir petrol şirketinden kendi isteğiyle ayrılan 355 yönetici ve teknik personelin hizmet sürelerini göstermektedir.

HİZMET SÜRESİ (YIL)	ÇALIŞAN SAYISI	HİZMET SÜRESİ (YIL)	ÇALIŞAN SAYISI
0–1	4	8–9	11
1–2	41	9–10	7
2–3	67	10–11	14
3–4	82	11–12	6
4–5	28	12–13	14
5–6	43	13–14	5
6–7	14	14–15	2
7–8	17		

Veriler G. F. Dreher, "The role of performance in the turnover process," *Academy of Management Journal, 25* (1982) 137-47'den alınmıştır.

Bu örneklemin:
(a) Histogramını çizin.
(b) Ortalamasını tahmin edin.
(c) Varyansını tahmin edin.
(d) Standart sapmasını tahmin edin.
(e) Ortancasını tahmin edin.
(f) Dördebölenler aralığını tahmin edin.

69. Bir işletme çivi üretip bunları paketlerle satmaktadır. Kırk paketlik bir örneklemde aşağıdaki sayıda çivi paketlerden çıkmıştır.

ÇİVİ SAYISI	18	19	20	21	22
PAKET SAYISI	4	9	15	10	2

Bu örneklemdeki:
(a) Paket başına düşen ortalama çivi sayısını bulun.
(b) Ortancayı bulun.
(c) En sık değeri bulun.
(d) Varyansı bulun.
(e) Standart sapmayı bulun.

70. Ortalaması μ olan bir anakütledeki N gözlemi $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ile gösterelim. K herhangi bir sayı olsun.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - K)^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 + N(K - \mu)^2$$

olduğunu gösterin. Buradan, $\sum_{i=1}^{N}(x_i - K)^2$ ifadesini en küçük yapan K değerinin $K = \mu$ olduğunu çıkarın.

71. Aşağıdaki çizelge, bir örnekleme seçilen yirmibeş yerel şirkette son üç aydaki üretim artışlarını sınıflanmış olarak göstermektedir.

YÜZDE DEĞİŞME	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
ŞİRKET SAYISI	3	4	8	7	3

Bu örneklemin:

(a) Histogramını çizin.
(b) Birikimli göreli sıklıklarını bulup yorumlayın.
(c) Üretimdeki ortalama yüzde değişmeyi tahmin edin.
(d) Ortancayı tahmin edin.
(e) En sık değer sınıfını tahmin edin.
(f) Varyansı tahmin edin.
(g) Standart sapmayı tahmin edin.
(h) Dördebölenler aralığını tahmin edin.

72. Aşağıdaki çizelge ellibeş şirketin tahvil fonlarının 5 yıldaki getiri yüzdesini göstermektedir.

97.9	91.3	69.0	83.6	63.0	86.3	121.3	73.8	90.4	76.6
99.7	91.4	82.7	94.3	45.9	86.5	90.3	85.6	83.6	81.7
83.5	93.7	91.3	83.1	79.6	106.3	92.4	77.4	79.2	85.3
96.6	94.5	88.3	74.2	77.5	71.5	82.8	81.5	92.1	94.7
62.9	74.6	83.0	77.6	87.3	82.1	62.6	84.2	69.5	75.1
83.1	77.3	79.2	98.1	57.4					

(a) Bu verileri bir histogramla gösterin.
(b) Bu verileri bir dal-yaprakla gösterin.
(c) Bu veriler için kutu çizimi düzenleyin.

73. Alıştırma 66'daki yatırım fonlarının getirilerine ilişkin verilerin kutu çizimini düzenleyin.

74. Aşağıdaki çizelge, küçük işletmelerde kişisel bilgisayar kullanımını inceleyen bir araştırmada sözü edilen en önemli uygulama alanlarını göstermektedir. Bu bulguları gösteren bir pasta çizimi düzenleyin.

ALAN	%	ALAN	%
Muhasebe	32	Satış noktası	4
Yazı	16	İletişim	1
Çizelge hazırlama	13	Diğer	22
Veri tabanı yönetimi	12		

Veriler F. Farhoomand, G. P. Hrycyk, "The feasibility of computers in the small business environment," *American Journal of Small Business, 9*, no. 4 (1985), 15-22'den alınmıştır.

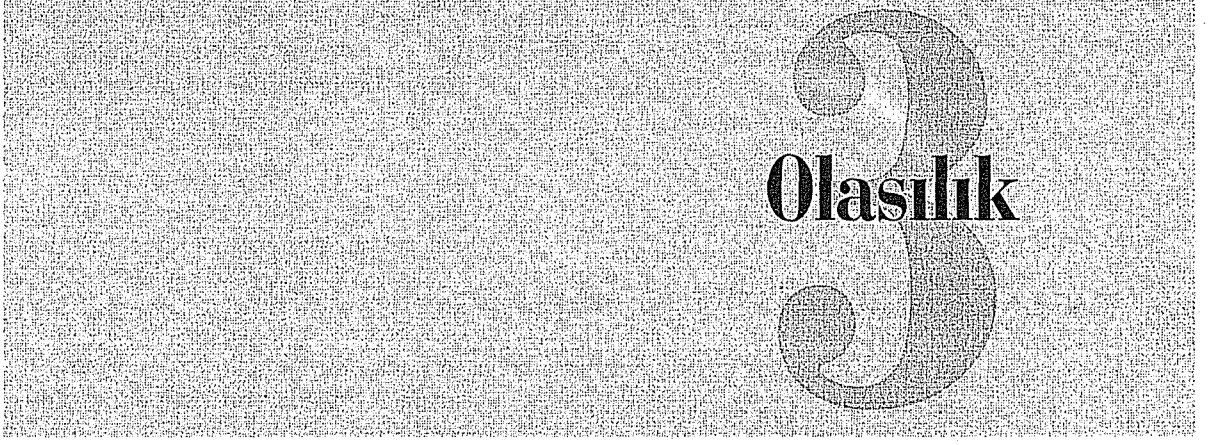
75. Üç ülkedeki en büyük basın-yayın şirketinin 1992 gelirleri, milyar dolar olarak şöyledir: Time Warner (ABD) 13.07, Bertelsmann (Almanya) 8.41, Sony (Japonya) 7.16. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

76. ABD'de doktorların %63'ü, Kanada'da %48'i, Belçika'da %47'si, Almanya'da %46'sı, İngiltere'de %37'si uzman hekimdir. Bu bilgiyi gösteren bir çubuk çizimi düzenleyin.

77. Aşağıdaki çizelgede, ABD'de hayır işi bağışlarındaki oniki yıllık yüzde değişmeler gösterilmiştir. Bu verilerin bir zaman serisi çizimini düzenleyip ortaya çıkan görüntüyü yorumlayın.

YIL	1981	1982	1983	1984	1985	1986
% DEĞİŞME	13.9	7.0	6.8	8.8	6.4	14.7
YIL	1987	1988	1989	1990	1991	1992
% DEĞİŞME	7.6	9.0	8.8	4.4	4.5	6.4

BÖLÜM 3



Olasılık

3.1 GİRİŞ

1. Bölümde örneklem gözlemlerine dayanarak anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapma sorununun önemini vurgulamıştık. Örneklem, anakütle bilgisini kazanmak için çekilir ama genellikle kesin bir bilgi vermez. Sözgelimi, müşterilerin bir ürüne tepkisini ölçmek için az sayıda satış yerinde bu ürünün deneme satışı yapılır. Eğer ürün ülke çapında pazarlanacaksa, elde edilen bulgular olası talebe ilişkin bir görüş oluşturmakta kullanılır. Bu örneklem bilgisine dayanarak bütün anakütlenin tepkisini *tam olarak* bilmek kuşkusuz olanaksızdır. Bu tepkiyi ölçecek her ölçü kaçınılmaz olarak *belirsizlik* içerecektir.

Bir örneklemi temel alıp bir anakütleye ilişkin kesin bilgiler çıkarsamak olanaksız olmakla birlikte, *belirsizliğimizin doğası konusunda* tam doğru söylemler kullanmak olanaklıdır. Bu tür söylemler, istatistik çıkarsamada temel önem taşıyan bir kavram olan **olasılık** diliyle ifade edilebilir. Bu kavrama günlük yaşamda da sık sık rastlanır. Sözgelimi, "yağış olasılığı" günlük hava tahminlerinin önemli bir parçasıdır; yatırım kararları, yatırımcının gelecekteki olası getirileri değerlendirmesine dayanır; bir beyzbol meraklısı, takımının belli bir maçı kazanma olasılığı konusunda bir fikir oluştururken, eski maç sonuçları, top atışlarına kimin başladığı gibi bilgileri kullanır.

Bu bölümde olasılık ifadelerini dile getirmekte kullanılacak biçimsel yapılar geliştirilecek, bazı temel sonuçlar çıkarılacaktır. Kavramları basit şans oyunlarına başvurarak göstermek, çoğu zaman açıklamaları anlaşılır kılmak için başvurulabilecek en kolay yoldur. Ancak bu kavramların uygulama alanları çok daha geniş olup ilerideki bölümlerde açıklanacaktır.

Belirsiz bir ortama ilişkin ifadeler kullanabilmek için bir dil geliştirme gereği vardır. Olasılığı, belirsizliğin tartışıldığı dil olarak düşünebiliriz. Birbirimizle bu dille iletişim kurmadan önce, ortak bir sözcük dağarcığımızın olması gerekir. Ayrıca, başka her dilde olduğu gibi burada da sözcüklerimizle anlaşılır şeyler söyleyebilmek için dilbilgisi kuralları da gereklidir. Öyleyse, epey bir miktar yeni terimle tamşmamız, olasılık ifadelerini türetirken de bu terimlerin kullanılışlarına aşina olmamız gerekir.

3.2 RASSAL DENEME, SONUÇ, OLAY

İki ya da daha çok sayıda değişik sonuca yol açan bir sürecin gözlendiğini, bu sonuçlardan hangisinin gerçekleşeceği konusunda önceden bir belirsizlik olduğunu düşünelim. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir:

1. Yazı-tura atılması.
2. Zar atılması.
3. Bir tüketiciye iki maldan hangisini yeğlediğinin sorulması.
4. Bir hesaplar kümesinden bir kalemin bir denetmence incelenmesi.
5. Pay senetleri fiyat endeksindeki günlük değişmenin gözlenmesi.
6. Bir kimyasal süreç sonunda üretilen bir parti kimyasal ürünün, izin verilen oranın üstünde bir kirlilik içerip içermediğinin sınanması.

Bu örneklerin her biri bir **rassal deneme** içerir.

Tanım

Bir **rassal deneme**, hangisinin gerçekleşeceği konusunda belirsizlik bulunan en az iki sonuca yol açan bir süreçtir.

Yukarıdaki ilk üç denemenin her birinde, ortaya çıkabilecek sonuçların belirlenmesi olanaklıdır. Eğer bir para havaya fırlatılırsa, sonuç ya "yazı"dır ya "tura". Bir zar atıldığında sonuç, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarından biri olur. Bir tüketici mallardan birini yeğ tutar ya da bunlar arasında kayıtsız kalır. Bunların her birinde **temel sonuçlar** diyebileceğimiz olanaklı sonuçlar sıralanmıştır. Bütün bu sonuçlardan oluşan küme, olabilecek her sonucu kapsar, rassal denemenin **örneklem uzayı** diye anılır.

Tanım

Rassal bir denemenin olanak içindeki bütün sonuçlarına **temel sonuçlar** denir, bütün temel sonuçlar kümesi de **örneklem uzayı** adını alır.

Dikkat ederseniz temel sonuçlar, herhangi ikisi aynı anda gerçekleşmeyecek biçimde tanımlanmıştır. Üstelik rassal deneme de, zorunlu olarak temel sonuçların birine yol açar. Örneklem uzayını S simgesi ile göstereceğiz.

ÖRNEK 3.1

Bir zar atıldığında temel sonuçlar 1, 2, 3, 4, 5, 6'dır. Öyleyse örneklem uzayı şöyledir:

$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

Burada altı tane temel sonuç olduğunu görüyoruz. Bunlardan herhangi ikisi aym anda gerçekleşemez, ama biri zorunlu olarak gerçekleşir.

ÖRNEK 3.2

Bir yatırımcı menkul değerler borsasını izlemekte, özellikle de Dow-Jones sanayi endeksine ilgi duymaktadır. Şu iki sonucu ele alalım:

"Dow-Jones Endeksi bugünün kapanışında, dünkü kapanıştakinden daha yüksek olacaktır."

"Dow-Jones Endeksi bugünün kapanışında, dünkü kapanıştakinden daha yüksek olmayacaktır."

Bu iki sonuçtan birinin gerçekleşmesi zorunludur, ama aym anda gerçekleşemezler. Öyleyse bu iki sonuç birlikte bir örneklem uzayı oluştururlar.

Çoğu zaman ilgi odağı, temel sonuçların kendileri değil de örneklem uzayındaki sonuçların bir altkümesidir. Sözgelimi, bir zar atıldığında ilgilenilen şey zarın çift sayı göstermesi olabilir. Bu da, 2, 4, 6 sonuçlarından biri geldiğinde gerçekleşir. Temel sonuçların bu tür kümelerine **olay** denir.

Tanım

Bir **olay**, örneklem uzayındaki temel sonuçların bir altkümesidir. Rassal denemede kendisini oluşturan temel sonuçlardan biri ortaya çıkarsa, olay **gerçekleşmiştir** denir.

Çoğu uygulamada iki ya da daha çok olayla aynı anda ilgileniriz. Sözgelimi bir zar atıldığında, "Gelen sayı çifttir" ve "Gelen sayı en az 4'tür" biçiminde iki olay ele alınabilir. İlgilenilen olayların hepsinin gerçekleştiği görülebilir. Rassal denemenin temel sonucu, bu olayların hepsinde yer alıyorsa bu durum ortaya çıkar. Her olayda yer alan temel sonuçlar kümesine bu olayların **arakesiti** denir.

Tanım

S örneklem uzayındaki iki olay A ile B olsun. Bunların $A \cap B$ ile gösterilen arakesiti, S örneklem uzayında hem A'da, hem B'de yer alan temel sonuçların altkümesidir. Öyleyse, ancak ve ancak A ile B'nin ikisi de gerçekleşirse $A \cap B$ arakesiti gerçekleşir.

Daha genel olarak, $E_1, E_2, \ldots, E_K$ gibi K tane olayın arakesiti $E_1 \cap E_2 \cdots \cap E_K$, her bir $E_i (i = 1, 2, \ldots, K)$'de yer alan bütün temel sonuçlar kümesidir.

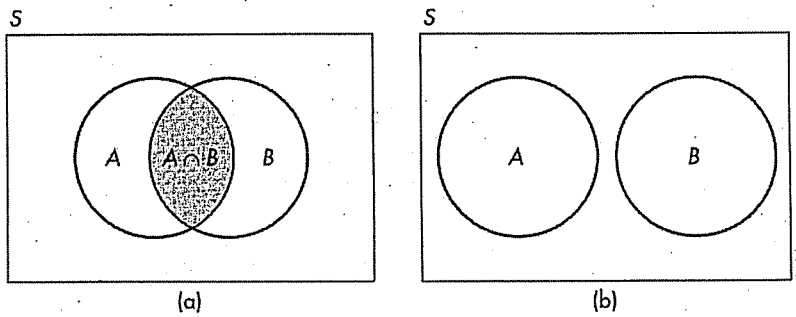
Arakesitler ve başka küme ilişkilerini düşünürken işe yarayan bir resimli gösterim yolu *Venn çizimi*dir. Çizim 3.1, A ve B küme çiftinin çizimlerini göstermektedir. Çizimin (a) parçasında S dikdörtgeni örneklem uzayını, üstüste binmiş iki kapalı alan da A ve B olaylarını belirtmektedir. Dolayısıyla, diyelim ki A'da yer alan bir temel sonuç, A alanının içindedir. Alanların örtüştüğü gölgeli alan da $A \cap B$ arakesitidir. Bir zar atıldığında 4 ve 6 sonuçları hem "Gelen sayı çifttir", hem de "Gelen sayı en az 4'tür" olayı içinde yer alır.

A ve B olaylarının ortak temel sonuçları olmayabilir de. Bu durumda alanlar, Çizim 3.1(b)'deki gibi örtüşmezler. Böyle olaylara **bağdaşmaz olaylar** denir. Sözgelimi, bir hesaplar kümesi denetlendiğinde, "Bunların %5'inden azında hata vardır" ve "Bunların %10'undan çoğunda hata vardır" olayları bağdaşmaz olaylardır.

Tanım

A ve B olaylarında ortak olan temel sonuçlar yoksa, bunlara bağdaşmaz olaylar denir. $A \cap B$ arakesitinin de **boş küme** olduğu söylenir. Dolayısıyla $A \cap B$ gerçekleşemez.

Daha genel olarak, $E_1, E_2, \ldots, E_K$ gibi K tane olaydan her bir çifti bağdaşmaz ise bütün bu olaylara **bağdaşmaz olaylar** denir. Yani $i \neq j$ için $E_i \cap E_j$ boş kümedir.



ÇİZİM 3.1 A ve B olaylarının arakesiti için Venn çizimi: (a) $A \cap B$, gölgeli alandır; (b) A ve B bağdaşmaz olaylardır

Çeşitli olaylar birlikte ele alındığında, ilgi odağı olabilecek bir başka durum, bu olaylardan en az birinin gerçekleşmesidir. Rassal denemenin temel sonucu, bu olaylardan en az birinin içinde yer alıyorsa bu durum ortaya çıkar. En az bir olayın içinde yer alan temel sonuçlar kümesine bunların **birleşimi** denir. Sözgelimi, zar atımı denemesinde, 2, 4, 5, 6 sonuçları, "Gelen sayı çifttir" ve "Gelen sayı en az 4'tür" olaylarından hiç olmazsa birinde yer alır.

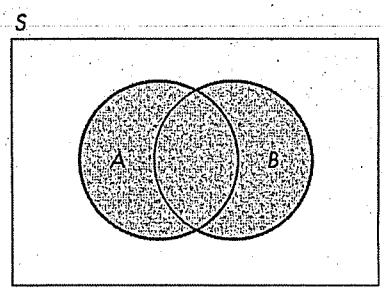
Tanım

S örneklem uzayındaki iki olay A ile B olsun. Bunların $A \cup B$ ile gösterilen **birleşimi**, S örneklem uzayındaki bütün temel sonuçlardan, en azından bir olayda yer alanların kümesidir. Öyleyse, $A \cup B$ birleşimi, ancak ve ancak ya A, ya B (ya da ikisi birden) gerçekleştiğinde gerçekleşir.

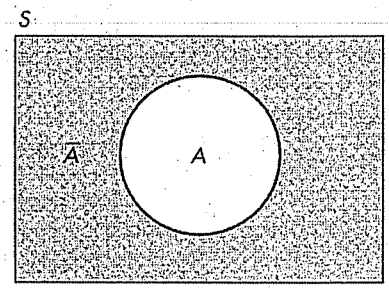
Daha genel olarak, $E_1, E_2, \ldots, E_K$ gibi K tane olay veriyken $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K$ birleşimi, bu K tane olaydan hiç olmazsa birinde yer alan bütün temel sonuçlar kümesidir.

Bir olay çiftinin birleşimi Çizim 3.2'deki Venn çiziminde gösterilmiştir. Buradan kolayca görüldüğü gibi, temel sonuç, ancak ve ancak ya ya A'nın, ya B'nin (ya da ikisinin birden) içindeyse, $A \cup B$ birleşimi içinde olabilir.

Birleşimleri bütün S örneklem uzayını oluşturan çeşitli olaylar topluluğu, özel bir ilgi çeker. Her temel sonuç S içinde olduğuna göre, rassal denemenin her sonucu bu olaylar topluluğunun hiç olmazsa birinde yer alır. Bu olaylara **bütünü kapsayıcı** olaylar denir. Sözgelimi, bir zar atıldığında "Gelen sayı en az 3'tür" ve "Gelen sayı en çok 5'tir" olayları birlikte bütünü kapsarlar — bu iki olaydan en az biri gerçekleşmek zorundadır.



ÇİZİM 3.2 A ile B olaylarının birleşiminin Venn çizimi; gölgeli alan $A \cup B$'dir.



ÇİZİM 3.3 A olayının bütünleyicisinin Venn çizimi; gölgeli alan $\overline{A}$'dir.

Tanım

S örneklem uzayında $E_1, E_2, \ldots, E_K$ gibi K tane olay bulunsun. $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K = S$ ise, bu olaylar **bütünü kapsayıcıdır.**

Az önce tanıtılan terimlerle söylersek, bir örneklem uzayında içerilen bütün temel sonuçlar kümesi, hem bağdaşmaz, hem bütünü kapsayıcıdır. Bu tür olaylardan yalnızca birinin gerçekleşmesi gerektiğine, ama birden çoğunun aynı anda gerçekleşemeyeceğine daha önce dikkat çekmiştik.

Şimdi de A olayını alalım. A'nın gerçekleşmemesiyle ilgilendiğimizi düşünelim. Rassal denemenin temel sonucu S'nin içinde olmakla birlikte A'nın içinde değilse bu durum ortaya çıkar. Bir örneklem uzayının kapsadığı, ama belli bir olayın kapsamadığı temel sonuçlar kümesine o olayın **bütünleyicisi** denir, $\overline{A}$ ile gösterilir. Açıktır ki A ile $\overline{A}$ hem bağdaşmaz (hiçbir temel sonuç her ikisinde de bulunmaz), hem bütünü kapsayıcı (her bir temel sonuç ya birinin ya ötekinin içindedir) olaylardır. A olayının bütünleyicisi Çizim 3.3'te Venn çizimiyle gösterilmiştir.

Tanım

S örneklem uzayındaki bir olay A olsun. S'de yer alan ama A'da yer almayan temel sonuçlar kümesine A'nın **bütünleyicisi** denir, $\overline{A}$ ile gösterilir.

Buraya kadar üç önemli kavramı görmüş bulunuyoruz: arakesit, birleşim, bütünleyici. İleride olasılık incelemelerinde bunların üçü de önemli olacaktır. Aşağıdaki örnekler bu kavramların somutlaşmasına yardımcı olacaktır.

ÖRNEK 3.3

Bir zar atılıyor. "Gelen sayı çifttir" olayına A, "Gelen sayısı en az 4'tür" olayına da B diyelim. Öyleyse

$$A = [2, 4, 6] \quad \text{ve} \quad B = [4, 5, 6]$$

olur. Bu olayların bütünleyicileri de sırasıyla şunlardır:

$$\overline{A} = [1, 3, 5] \quad \text{ve} \quad \overline{B} = [1, 2, 3]$$

A ve B'nin arakesiti, "Gelen sayı hem çifttir, hem de en az 4'tür" olayıdır, yani

$$A \cap B = [4, 6]$$

olur. A ve B'nin birleşimi, "Gelen sayı ya çifttir ya 4'ten büyüktür ya da her ikisidir" olayıdır, yani

$$A \cup B = [2, 4, 5, 6]$$

olur. Dikkat ederseniz A ve $\overline{A}$ olayları hem bağdaşmaz olaylardır, çünkü arakesitleri boş kümedir, hem bütünü kapsayıcı olaylardır, çünkü birleşimleri S örneklem uzayıdır, yani

$$A \cup \overline{A} = [1, 2, 3, 4, 5, 6] = S$$

olur. Aynı ifadeler B ve $\overline{B}$ olayları için de geçerlidir.

ÖRNEK 3.4

Dow-Jones sanayi endeksi ortalamasını peşpeşe iki gün izlediğimizi düşünelim. Dört temel sonucu şöyle belirleyelim:

O_1 Dow-Jones ortalaması her iki günde de yükseliyor.
O_2 Dow-Jones ortalaması ilk gün yükseliyor, ikinci gün yükselmiyor.
O_3 Dow-Jones ortalaması ilk gün yükselmiyor, ikinci gün yükseliyor.
O_4 Dow-Jones ortalaması her iki günde de yükselmiyor.

Açıktır ki, bu sonuçlardan biri gerçekleşmek zorundadır, ama birden çoğu da birlikte gerçekleşemez. Öyleyse örneklem uzayını $S = [O_1, O_2, O_3, O_4]$ biçiminde yazabiliriz.

Şimdi de iki olayı ele alalım.

A: Dow-Jones ortalaması ilk gün yükseliyor.
B: Dow-Jones ortalaması ikinci gün yükseliyor.

O_1 ya da O_2 temel sonucu gerçekleşirse A olayının gerçekleşeceğini görebiliyoruz, öyleyse $A = [O_1, O_2]$ yazabiliriz. Benzer biçimde $B = [O_1, O_3]$ de yazılabilir.

A ile B'nin arakesiti şudur: "Dow-Jones ortalaması birinci gün de yükseliyor, ikinci günde yükseliyor." Bu da, hem A, hem B'de yer alan bütün temel sonuçlar kümesidir, yani $A \cap B = [O_1]$'dir.

A ile B'nin birleşimi de şudur: "Dow-Jones ortalaması iki günden hiç olmazsa birinde yükseliyor." Bu da, ya A ya B'de ya da her ikisinde yer alan bütün temel sonuçlar kümesidir, yani $A \cup B = [O_1, O_2, O_3]$'tür.

Son olarak A'nın bütünleyicisi şudur: "Dow-Jones ortalaması ilk gün yükselmiyor." Bu da, S örneklem uzayı içinde olup da A'da bulunmayan bütün temel sonuçlar kümesidir. Demek ki $\overline{A} = [O_3, O_4]$'tür.

Bütünleyici olay içeren birleşimler ya da arakesitler de incelenebilir. Bir örnek olmak üzere, $\overline{A}$ ile B'nin arakesiti Çizim 3.4'te gösterilmiştir. Bu arakesit, hem $\overline{A}$ içinde (yani A'nın dışında), hem B içinde yer alan bütün temel sonuçları içerir. Örnek 3.3'te bu iki olayın arakesiti $\overline{A} \cap B = [5]$'tir, çünkü hem "çift olmayan", hem "en az 4" olan tek sonuç 5'tir.

Şimdi de olayların birleşimleriyle ara kesitlerini içeren üç bulgudan söz edeceğiz. Bunlar, Altbölüm 3.6'da bazı olasılık kuralları geliştirilirken kullanılacaktır.

(i) A ile B iki olay olsun. $A \cap B$ ile $\overline{A} \cap B$ olayları bağdaşmaz olaylar olup bunların birleşimi, Çizim 3.5'teki Venn çizimiyle gösterildiği gibi, B'dir. Açıktır ki

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$

olacaktır.

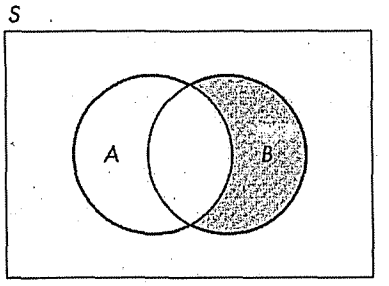
(ii) A ile B iki olay olsun. A ile $\overline{A} \cap B$ olayları bağdaşmaz olaylar olup birleşimleri $A \cup B$'dir. Bu bulgu da en iyi, Çizim 3.6'da gösterilen Venn çizimi incelenerek görülebilir. Bu çizimden şu açıkça görülmektedir:

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$$

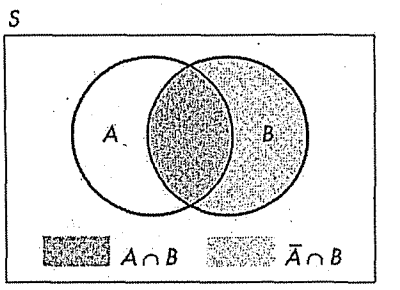
(iii) $E_1, E_2, \ldots, E_K$ birbiriyle bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı K tane olay olsun. A da başka bir olay olsun. Bu durumda K tane $E_1 \cap A, E_2 \cap A, \ldots, E_K \cap A$ olayı bağdaşmaz olaylar olup birleşimleri A'dır.

Üçüncü ifadenin doğruluğunu görebilmek için Çizim 3.7'deki Venn çizimine bakalım. Bütün örneklem uzayını gösteren büyük dikdörtgen, K tane bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı $E_1, E_2, \ldots, E_K$ olaylarını gösteren daha küçük dikdörtgenlere bölünmüştür. A olayı elips ile gösterilmiştir. Her bir E_i olayı ile A olayının arakesitlerinden oluşan olayların gerçekten de bağdaşmaz olduklarını ve birleşimlerinin A basit olayı olduğunu görebiliyoruz. Dolayısıyla şunu yazabiliriz:

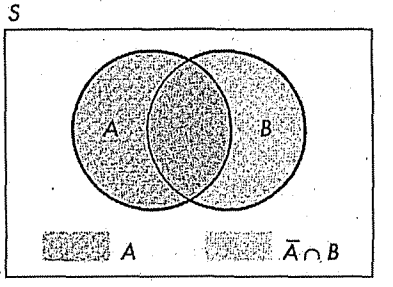
$$(E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \cdots \cup (E_K \cap A) = A$$



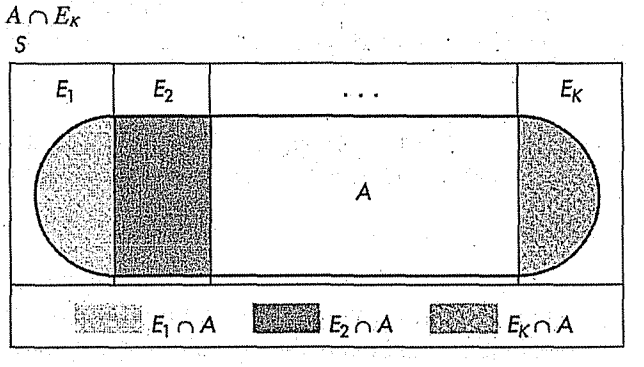
ÇİZİM 3.4 $\overline{A}$ ile B'nin arakesiti için Venn çizimi; gölgeli alan $\overline{A} \cap B$'dir



ÇİZİM 3.5 $A \cap B$ ile $\overline{A} \cap B$ için Venn çizimi



ÇİZİM 3.6 A ile $\overline{A} \cap B$ için Venn çizimi



ÇİZİM 3.7 $A \cap E_1, A \cap E_2, \ldots, A \cap E_K$ için Venn çizimi

ÖRNEK 3.5

(i) ve (ii) bulgularının doğruluğu, Örnek 3.3'teki zar atma denemesi için şöyle gösterilebilir. Daha önce olduğu gibi

$$A = [2, 4, 6] \qquad B = [4, 5, 6] \qquad \overline{A} = [1, 3, 5]$$

yazalım. Bu durumda

$$A \cap B = [4, 6] \qquad \overline{A} \cap B = [5]$$

olur. Demek ki $A \cap B$ ile $\overline{A} \cap B$ bağdaşmaz olaylardır, birleşimleri de şöyledir:

$$B = [4, 5, 6]$$

Ayrıca A ile $\overline{A} \cap B$ de bağdaşmaz olaylar olup birleşimleri aşağıdaki gibidir:

$$A \cup B = [2, 4, 5, 6]$$

ÖRNEK 3.6

(iii) bulgusunun doğruluğu da başka bir zar atma örneğiyle gösterilebilir.

$$A = [2, 4, 6] \qquad E_1 = [1, 2] \qquad E_2 = [3, 4] \qquad E_3 = [5, 6]$$

tanımlarını yapalım, böylece E_1, E_2, E_3 bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olaylar olur. Bu durumda

$$E_1 \cap A = [2] \qquad E_2 \cap A = [4] \qquad E_3 \cap A = [6]$$

olur. Bu üç olayın bağdaşmaz oldukları açıktır, birleşimleri de şöyledir:

$$(E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup (E_3 \cap A) = [2, 4, 6] = A$$

ÖRNEK 3.7

Pazar araştırmalarında zaman zaman karşılaşılan bir sorun, sormak istediğimiz kimi soruların duyarlılıkları nedeniyle, çoğu deneğin bunlara ya yanıt vermemesi ya da dürüst olmayan yanıtlar vermesidir. Bu sorunu aşmanın bir yolu *rassallaştırılmış yanıtlar* yöntemidir.[1] Bu teknikte duyarlı olunan sorunun yanına bir tane duyarlı olunmayan soru eklenir. Sözgelimi şu soru çiftini kullanabiliriz:

(a) Son 12 ayda mağazalardan hiç mal aşırdınız mı?
(b) Son 12 ayda hiç katalog üzerinden alışveriş yaptınız mı?

Deneklerden yazı-tura atmaları, yazı gelirse (a) sorusunu, tura gelirse (b) sorusunu yanıtlamaları istenir. Araştırmacı hangi sorunun yanıtlandığını *bilemeyeceği* için, bu yolla dürüst yanıtların derlenebileceği umulur. Araştırmacı, incelenen anakütlede duyarlı olunmayan soruya ilişkin bilgi sahibidir. Örneğimizde anakütlenin yüzde kaçının son 12 ayda katalog üzerinden alışveriş yaptığını araştırmacı bilmektedir. (Bu bölümde daha ileride gerekli bilgiyi elde etmek için bu yanıtların nasıl çözümleneceğini göreceğiz.)

Şimdi de şu olayları tanımlayalım:

[1] Örnek olarak bkz. M. D. Geurts, "Using a randomized response research design to eliiminate nonresponse biases in business research," *Journal of Academy of Marketing Science*, *8* (1980), 83-90.

A: Denek "evet" yanıtı veriyor.
E_1: Denek duyarlı olunan soruyu yanıtlıyor.
E_2: Denek duyarlı olunmayan soruyu yanıtlıyor.

E_1 ve E_2 olaylarının bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı oldukları açıktır. Öyleyse (iii) bulgusunun koşulları yerine gelmektedir, demek ki

$A \cap E_1$: Denek duyarlı olunan soruyu yanıtlamış, "evet" demiştir
$A \cap E_2$: Denek duyarlı olunmayan soruyu yanıtlamış, "evet" demiştir

olayları bağdaşmazdır. Üstelik, birleşimleri de A olayı olmalıdır; yani,

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)$$

3.3 OLASILIK NEDİR?

Rassal bir deneme yapıldığını, bizim de belli bir olayın gerçekleşmesiyle ilgilendiğimizi düşünelim. Olasılık kavramı, bir olayın gerçekleşebilirliğinin sayısal bir ölçüsünü verme amacını taşır. Olasılık 0 ile 1 arasındaki bir ölçekte ölçülür. Bu aralığın iki ucunda, 0 olasılığı olayın gerçekleşmesinin olanaksız olduğunu (gerçekleşmemesinin kesin olduğunu), 1 olasılığı ise olayın gerçekleşmesinin kesin olduğunu gösterir. Belirsiz olaylara, olayın gerçekleşebilirliği ne kadar fazla ise o kadar yüksek olmak üzere 0 ile 1 arasında bir olasılık vermek isteriz. Uygulamada bu düşünceler genellikle gerçekleşir. Bazı meteorolojik koşullarda yağmurun yağabilirliği, başka durumlara göre daha yüksektir. Deneyimli bir yönetici, bir ürünün başka bir ürüne göre pazara daha derinlemesine girebileceği kanısına varabilir.

Çok basit bir örnek alalım, yazı-tura attığımızı düşünelim. "Yazı gelme olasılığı ½'dir" ifadesine iki farklı düşünme yoluyla bakılabilir: *göreli sıklık* ve *öznel olasılık.*

GÖRELİ SIKLIK

Bir rassal deneme öyle bir biçimde yinelenebilir ki, başlangıç durumuna dönüp deneme yeniden yapıldığında çıkacak sonuç, önceki sonuçlardan etkilenmez. Sözgelimi, bir para ya da bir zar bu biçimde tekrar tekrar atılabilir.

N sayıda denme yapılır da A olayı bunların N_A tanesinde gerçekleşirse (NA'nın N'ye bağlı olduğu açıktır) şunu buluruz:

$$N \text{ denemede } A\text{'nın gerçekleşme oranı} = \frac{N_A}{N}$$

Eğer N çok büyükse, N'nin artmasıyla N_A/N oranında fazla bir değişme olmasını beklemeyiz; yani A'nın gerçekleşme oram hemen hemen aynı kalır. Olasılığın **göreli sıklık** kavramının gerisinde bu düşünce yatar.

Tanım

N kez yinelenen denemelerde A olayının gerçekleşme sayısı N_A olsun. O zaman, olasılığın **göreli sıklık** kavramına göre A olayının gerçekleşme olasılığı, deneme sayısı N sonsuza doğru artarken, N_A/N oranının limitidir.

Bu tanıma göre, "Bir yazı-tura atışında yazı gelme olasılığı ½'dir" dersek, paranın tekrar tekrar atılmasıyla deneme sayısı büyürken, yazı gelme oranı ½'ye çok yaklaşır demek isteriz.

Göreli sıklık kavramı, olasılıklara ilişkin düşünürken elverişli bir çerçeve çizer ama bazı kavramsal zorluklar taşımaktadır. Bu zorluklar aşağıdaki örneklerde zorluğun büyüklüğüne göre sıralanmıştır.

1. Yazı gelme olasılığının ½ olduğu sonucuna varmak için bir parayı çok büyük sayılarda atmamız gerçekten gerekli mi? Bu yapılabilir kuşkusuz, ama bütün olasılık değerlendirmelerini bu yolla yapmak doğrusu çok sıkıcı bir iş olurdu. Bu zorluğu aşmanın bir yolu, yinelenen denemeleri tamamen soyut bir kavram olarak algılamak, denemelerin fiilen yapılmasını istememektir. Sözge-limi, paranın düzgün olduğu görülüp "yazı" ve "tura" sonuçlarının gelebilirliklerinin aynı olduğu sonucuna varmak akla yatkın olabilir. Buradan da, eğer para tekrar tekrar atılırsa yazı gelme oranının ½'ye yaklaşacağı çıkarsanabilir. (Dikkat edilirse, "yazı" ve "tura" gelebilirliğinin aynı olduğuna karar verirken işin içine bir öznellik öğesi kattık.) Daha genel olarak, bir rassal denemenin n tane bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı temel sonuca yol açtığını düşünelim. Bunların her birinin gerçekleşebilirliği aynı olsun. Eğer A olayı n_A kez gerçekleşirse, A'nın gerçekleşme olasılığının n_A / n olduğu anlaşılabilir. Sözgelimi hileli olmayan bir zar atıldığında, her birinin gerçekleşebilirliği aynı altı tane temel sonuç vardır. "Gelen sayı çifttir" olayı bunların üç tanesini içerir, öyleyse olasılığı $3/6 = ½$'dir. Ne yazık ki her denemenin örneklem uzayı her zaman gerçekleşebilirliği aynı temel sonuçlardan oluşmaz.

2. Bir meteorolog, bugün yağmur yağma olasılığının 0.7 olduğunu ileri sürmektedir. Gün bir kez sona erdi mi, yeniden gündoğumuna dönüp aynı başlangıç koşullarıyla işe koyulmak olanaksızdır. Ancak, yağmur olasılığını değerlendiren bir meteorolog, tahminin yapıldığı sıradaki hava koşullarının aynısının geçerli olduğu çok sayıda geçmiş dönemin %70'inde yağmurla karşılaşıldığını ileri sürebilir. Benzer biçimde, Dow-Jones endeksinin bugün dünden daha yüksek kapanacağını, çünkü geçmişte borsanın açık olduğu günlerin %50'sinde endeksin yükseldiğini pekâlâ söyleyebiliriz.

3. 1996 Kentucky At Yarışı koşulmak üzeredir. Bir bahisçi belli bir atla ilgilenmekte, onun yarışı kazanma olasılığını 0.4 olarak görmektedir. Örnek 2'nin tersine, temelde aynı atların koştuğu aynı tür yarışlar geçmişte çok sayıda koşulmuş olamaz. Ba-

hisçinin olasılık yargısı da kesinlikle böyle bir kavrama dayanmaz. Bahisçinin (atın geçmiş başarıları gibi) çeşitli ilgili etmenleri hesaba katarak atın kazanma şansına ilişkin bir yargıya vardığını, bunun da olasılık ifadesine yansıdığını söylemek akla daha yakındır. Benzer biçimde, şirket yöneticileri zaman zaman, siyasal ortamın istikrarsız olduğu ülkelerde yüksek kâr getirebilecek yatırımlar konusunda karar verme durumunda kalırlar. Şirket varlıklarının kamulaştırılması ve karşılığında yetersiz bir ödemenin yapılmasıyla sonuçlanabilecek bir ayaklanmanın gerçekleşebilirliğini biçimsel olan ya da olmayan bir yolla değerlendirmenin karar verme sürecine girmesi kaçınılmazdır. Böyle bir değerlendirme ancak öznel olabilir.

ÖZNEL OLASILIK

Yinelenen denemeler kavramına dayanmayan başka bir görüş de olasılığa, bir olayın gerçekleşme şansı konusunda kişisel inanç derecesi olarak ifade edilen kişisel öznel bir kavram olarak bakar. Bu düşünceyi anlamanın bir yolu *hakça bahisler* yoludur.

Sözgelimi, bir para atışında yazı gelme olasılığı ½'dir dersem, paranın kusursuz düzgün olduğunu, atışın yazı getirebilirliğinin tura kadar olduğunu düşünüyorum demektir. Bu öznel olasılığı değerlendirirken, yinelenen denemeleri düşünmek zorunda değilim, tersine paranın tek bir atılışıyla ilgileniyorum. Benim öznel olasılık değerlendirmem, sonuç turaysa 1 $ ödeyeceğim, yazıysa 1 $ alacağım hakça bir bahis anlamına gelir. Yazı geldiğinde 1 $'dan fazla alabileceksem buna kendi lehime bir bahis olarak bakarım. Benzer biçimde, bir atın belli yarışı kazanması olasılığının 0.4 olduğuna inanırsam, kazanma şansının 40-60 olduğu kişisel görüşünü taşıyorum demektir. Bu inanç veriyken, at yarışı kazanamazsa 2 $ kaybedeceğim, at yarışı kazanırsa da 3 $ kazanacağım bir durumu hakça bir bahis olarak görürüm.

Öznel olasılıkların kişisel olduğunun vurgulanması gerekir. Farklı kişilerin aynı olay karşısında aynı olasılıklara ulaşmaları gereği yoktur. Yazı-tura örneğinde çoğu kimse yazı gelme olasılığının ½ olduğu sonucuna varacaktır. Ama sözkonusu paraya ilişkin daha fazla bilgisi olan bir kimse başka türlü düşünebilir. At yarışı örneğinde, iki bahisçi farklı öznel olasılıklara ulaşabilirler. Belki aynı bilgilere erişemeyebilirler, erişseler bile, bunları aynı biçimde yorumlamayabilirler. Şurası kesinlikle açıktır ki, kişisel yatırımcıların hepsi borsanın gelecekteki davranışı konusunda aynı görüşü paylaşmaz! Bu kişilerin öznel olasılıkları, ulaşabildikleri bilgiye ve onu yorumlama biçimlerine bağlıdır.

3.4 OLASILIK VE ÖNERMELERİ

İçinde olasılık değerlendirmeleri ve işlemlerinin yapılabileceği bir çerçeve geliştirmek zorundayız. Bunu yapabilmek için, olasılıkların uyması gereken üç

kural (önerme) ileri sürecek ve bu gerekliliğin "akla yakın" olduğunu göstereceğiz.

OLASILIK ÖNERMELERİ

Bir rassal denemenin örneklem uzayını S, temel sonuçları O_i, bir olayı da A ile gösterelim. "A olayının gerçekleşme olasılığı" için $P(A)$ gösterimini kullanarak, kutu içindeki koşulları yazabiliriz.

1. A, örneklem uzayı S içinde yer alan bir olaysa,

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. A, S içinde yer alan bir olay, O_i de temel sonuçlar olsun. O zaman,

$$P(A) = \sum_A P(O_i)$$

Burada toplama işlemi A içindeki bütün temel sonuçları kapsar.

3. $$P(S) = 1$$

İlk önerme, olasılığın 0 ile 1 arasında olması gerektiğini söyler. İkinci önerme, göreli sıklıklar bağlamında kullanılabilir. Bir rassal denemenin N kez yinelendiğini düşünelim. O_i temel sonucunun gerçekleşme sayısı N_i, A olayının gerçekleşme sayısı da N_A olsun. O zaman, temel sonuçlar bağdaşmaz olduğundan, A 'daki bütün temel sonuçlar için N_i 'lerin toplamı NA 'yı verir, yani

$$N_A = \sum_A N_i$$

her iki yanı deneme sayısı N'ye bölerek

$$\frac{N_A}{N} = \sum_A \frac{N_i}{N}$$

elde edilir. Ancak, olasılığın göreli sıklık kavramına göre, N sonsuza giderken, N_A/N oranı $P(A)$'ya, her bir N_i/N oranı da $P(O_i)$'ye yaklaşır. Öyleyse, olasılığa bu açıdan bakılınca, ikinci önerme mantıksal bir zorunluluk olarak görülür. Üçüncü önerme, "Bir rassal deneme yapıldığında bir şeyin gerçekleşmesi kesinlikle gerekir" biçiminde yeninden düzenlenebilir. İkinci önermedeki A yerine örneklem uzayı S konursa,

$$P(S) = \sum_S P(O_i)$$

yazılabilir. Burada toplama işlemi, örneklem uzayındaki bütün temel sonuçları kapsar. Üçüncü önerme gereği, $P(S) = 1$ olduğundan şunu yazabiliriz:

$$\sum_S P(O_i) = 1 \qquad (3.4.1)$$

Bu demektir ki, örneklem uzayındaki bütün temel sonuçların olasılıkları toplamı 1'dir.

ÖNERMELERİN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

Bu üç önermenin doğurduğu ilk sonuçlar aşağıda sıralanıp örneklenmiştir.

(i) Örneklem uzayı S, her birinin gerçekleşebilirliği aynı olan $O_1, O_2, \ldots, O_n$ gibi n tane temel sonuçtan oluşuyorsa, bunların her birinin olasılığı $1/n$'dir, yani şu yazılabilir:

$$P(O_i) = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Bu ilk sonuç Eşitlik (3.4.1)'den kaynaklanır: Eğer her temel sonuç için $P(O_i)$ aynı ise ve $\sum_S P(O_i) = 1$ ise, o zaman her sonuç için $P(O_i) = 1/n$ olur. Sözgelimi düzgün bir zar atıldığında altı temel sonucun her birinin olasılığı ⅙'dır.

(ii) Örneklem uzayı S, gerçekleşebilirliği aynı n tane temel sonuçtan oluşuyorsa, A olayı da bu sonuçlardan n_A tanesini içeriyorsa, o zaman şu yazılabilir:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Bu da (i) ile ikinci önermeden kaynaklanır. Her temel sonucun olasılığı $1/n$'dir ve 2. önermeye göre, A'daki her temel sonucun (her biri $1/n$ olan) olasılıklarının toplamı tam $P(A)$'dır. Sözgelimi, düzgün bir zar atıldığında, A olayı "Gelen sayı çifttir" ise, $n = 6$ temel sonuç vardır, bunların $n_A = 3$ tanesi A'dadır. Öyleyse,

$P(A) = 3/6 = 1/2$'dir. Dikkat ederseniz bu bulgu, Altbölüm 3.3'teki sezgisel akıl yürütmemizle uyuşmaktadır.

(iii) A ile B bütünü kapsayıcı olaylar olsun. O zaman bunların birleşiminin olasılığı, tekil olasılıklarının toplamıdır, yani

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

olur. Daha genel olarak, $E_1, E_2, \ldots, E_K$ bütünü kapsayıcı olaylar ise, şu yazılabilir:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_K)$$

Bu bulgu, ikinci önermeden gelmektedir. A ile B'nin birleşiminin olasılığı şudur:

$$P(A \cup B) = \sum_{A \cup B} P(O_i) \qquad (3.4.2)$$

Burada toplama işlemi $P(A \cup B)$ içindeki bütün temel sonuçları kapsamaktadır. Ama A *ile* B bütünü kapsayıcı olaylar olduklarından hiçbir temel sonuç her ikisi içinde bulunamaz, Eşitlik (3.4.2)'nin sağ yanı ikiye ayrılıp iki parça ayrı ayrı toplanabilir:

$$\sum_{A \cup B} P(O_i) = \sum_{A} P(O_i) + \sum_{B} P(O_i)$$

Bu eşitliğin sağ yanı, 2. önerme gereği, $P(A) + P(B)$'dir. Daha genel sonuç aynı akıl yürütmeyle bulunabilir.

(iv) $E_1, E_2, \ldots, E_K$ bütünü kapsayıcı olaylar ise, bunların birleşiminin olasılığı 1'dir:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K) = 1$$

Bu olaylar bütünü kapsayıcı olduklarından, birleşimleri bütün örneklem uzayı S'dir, dolayısıyla yukarıdaki bulgu üçüncü önermeden elde edilebilir.

ÖRNEK 3.8

Bir yardım kurumu 1,000 piyango bileti satıyor. Çekilişte on tane büyük ikramiye, 100 tane de küçük ikramiye var. Kazananların belirlenmesinde uygulanan yönteme göre, başlangıçta her biletin büyük ikramiyelerden birini kazanma şansı birbirinin aynı, küçük ikramiyelerden birini kazanma şansı da birbirinin aynıdır. Hiçbir bilet birden çok ikramiye kazanamaz. Tek bir biletle bir büyük

ikramiye kazanma olasılığı kaçtır? Bir küçük ikramiye kazanma olasılığı kaçtır? Bir ikramiye kazanma olasılığı kaçtır?

1,000 tane biletten 10'u büyük, 100'ü de küçük ikramiye kazanacak, 890 bilete bir şey çıkmayacaktır. Tek biletimiz, bu 1,000 bilet arasından seçilmiş sayılabilir. "Seçilen biletin büyük ikramiyeyi kazanması" olayına A diyelim. 1,000 tane gerçekleşebilirliği aynı sonuç olduğuna, bunların on tanesi de A olayına karşılık geldiğine göre, şunu yazabiliriz:

$$P(A) = \frac{10}{1{,}000} = 0.01$$

Benzer biçimde, "Seçilen biletin küçük ikramiyeyi kazanması" anlamına gelen B olayı için de şu yazılabilir:

$$P(B) = \frac{100}{1{,}000} = 0.10$$

"Biletin herhangi bir ikramiye kazanması" olayı A ile B olaylarının birleşiminden başka bir şey değildir. Üstelik, bilet başına bir tek ikramiyeye izin verildiğine göre, bu iki olay bağdaşmaz olaylardır. Bu durumda aranan olasılık şöyledir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.01 + 0.10 = 0.11$$

ÖRNEK 3.9

Örnek 3.4'te Dow-Jones ortalamasının iki günlük gelişmesini izleyip dört temel sonuç tanımlamıştık:

O_1: Ortalama her iki günde de yükseliyor.
O_2: Ortalama ilk gün yükseliyor, ikinci gün yükselmiyor.
O_3: Ortalama ilk gün yükselmiyor, ikinci gün yükseliyor.
O_4: Ortalama her iki günde de yükselmiyor.

Bu dört sonucun da gerçekleşebilirliğinin aynı olduğunu ileri sürmek akla yatkındır. Bu durumda, piyasanın iki günden hiç olmazsa birinde yükselme olasılığı kaçtır?

İlgilenilen olay "Piyasa iki günden hiç olmazsa birinde yükseliyor", dört temel sonuçtan üçünü içerir: O_1, O_2, O_3. Temel sonuçların gerçekleşebilirliği eşit olduğuna göre bu olayın olasılığı da ¾ olur.

ÖRNEK 3.10

Atlantik Okyanusu'ndaki Hibernia petrol alanının ilk gelişme aşamasında Newfoundland Petrol İdaresi, iktisadi olarak çıkarılabilecek petrol kaynaklarının 2 milyar varili aşma olasılığını 0.1 olarak tahmin etmiştir. Kaynakların 1 milyar varilden çok olma olasılığı 0.5 olarak tahmin edilmiştir. Bu verilerin ışığında, 1 ile 2 milyar dolar arasında kaynak bulunması olasılığı kaçtır?

"Kaynakların 2 milyar varili aşması" olayına A, "kaynakların 1 ile 2 milyar varil arasında olması" olayına da B diyelim. Bunlar bağdaşmaz olaylardır, birleşimleri $A \cup B$ ise "kaynakların 1 milyar varili aşması" olayıdır. Öyleyse şu yazılabilir:

$$P(A) = 0.1 \qquad P(A \cup B) = 0.5$$

A *ile* B bağdaşmaz olaylar olduklarından, şunu buluruz:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.5 - 0.1 = 0.4$$

ALIŞTIRMALAR

1. Bir şirketin kurması ve çalıştırmadan önce denemesi gereken yeni makineler teslim alınmıştır. Aşağıdaki çizelge makinelerin işe başlayabilmesi için gereken gün sayılarına yöneticinin biçtiği olasılıkları göstermektedir.

GÜN SAYISI	3	4	5	6	7
OLASILIK	0.08	0.24	0.41	0.20	0.07

Makinelerin çalışır duruma gelmesi için 4 günden uzun süre gerekir" olayına A, "Makinelerin çalışır duruma gelmesi için 6 günden kısa süre yeter" olayına B diyelim.

(a) A olayının olasılığını bulun.
(b) B olayının olasılığını bulun.
(c) A olayının bütünleyicisi olan olayı tanımlayın.
(d) A olayının bütünleyicisi olan olayın olasılığını bulun.
(e) A ile B olaylarının arakesiti olan olayı tanımlayın.
(f) A ile B olaylarının arakesiti olan olayın olasılığını bulun.
(g) A ile B olaylarının birleşimi olan olayı tanımlayın.
(h) A ile B olaylarının birleşimi olan olayın olasılığını bulun.
(i) A ile B olayların bağdaşmaz olaylar mıdır?
(j) A ile B olayları bütünü kapsayıcı olaylar mıdır?

2. Bir fon yöneticisi, sağlık hizmetleri sunan bir işletmenin pay senetlerine yatırım yapmayı düşünmektedir. Yöneticinin, bu işletmenin gelecek yıldaki getiri oranlarına biçtiği olasılıklar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir. "Getiri oranı % 10'dan yüksektir" olayına A, "Getiri oranı eksi değerlidir" olayına B diyelim.

GETİRİ ORANI	–%10'dan az	–%10 - 0	0 - %10	%10 - %20	% 20'den çok
OLASILIK	0.04	0.14	0.28	0.33	0.21

(a) A olayının olasılığını bulun.

(b) B olayının olasılığını bulun.
(c) A olayının bütünleyicisi olan olayı tanımlayın.
(d) A olayının bütünleyicisi olan olayın olasılığını bulun.
(e) A ile B olaylarının arakesiti olan olayı tanımlayın.
(f) A ile B olaylarının arakesiti olan olayın olasılığını bulun.
(g) A ile B olaylarının birleşimi olan olayı tanımlayın.
(h) A ile B olaylarının birleşimi olan olayın olasılığını bulun.
(i) A ile B olayların bağdaşmaz olaylar mıdır?
(j) A ile B olayları bütünü kapsayıcı olaylar mıdır?

3. Bir yöneticinin, bir projeyi izleme görevini verebileceği sekiz çalışanı vardır. Bunlardan dördü kadın, dördü erkektir. Erkeklerden ikisi kardeştir. Yönetici görevi rassal olarak seçeceği bir kişiye verecektir. Herkesin seçilme şansı eşittir. "Seçilen kişi erkektir" olayına A, "Seçilen kişi iki erkek kardeşten biridir" olayına B diyelim
(a) A olayının olasılığını bulun.
(b) B olayının olasılığını bulun.
(c) A ile B olaylarının arakesiti olan olayın olasılığını bulun.
(d) A ile B olaylarının birleşimi olan olayın olasılığını bulun.

4. Altbölüm 3.4'te, *iki olay bağdaşmaz olaylarsa*, bunların birleşiminin olasılığının tekil olasılıklarının toplamı olduğunu görmüştük. Ancak, bağdaşmaz olmayan olaylar için durum böyle *değildir*. Alıştırma 1'deki A ve B olaylarıyla bunun doğruluğunu gösterin.

5. Bir büyük mağaza yöneticisi, hizmete ilişkin yakınmaların haftalık sayılarını izlemiştir. Bu çalışma sonunda bir haftalık şikâyet sayılarının olasılıkları aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi çıkmıştır. "Haftada en az bir yakınma" olayına A, "Haftada 10'dan az yakınma" olayına B diyelim.

YAKINMA SAYISI	0	1-3	4-6	7-9	10-12	12'den çok
OLASILIK	0.14	0.39	0.23	0.15	0.06	0.03

(a) A olayının olasılığını bulun.
(b) B olayının olasılığını bulun.
(c) A olayının bütünleyicisi olan olayın olasılığını bulun.
(d) A ile B olaylarının arakesiti olan olayın olasılığını bulun.
(e) A ile B olaylarının birleşimi olan olayın olasılığını bulun.
(f) A ile B olayların bağdaşmaz olaylar mıdır?
(g) A ile B olayları bütünü kapsayıcı olaylar mıdır?

6. Bir işletme bir ürünü 100'lük partilerle almaktadır. Bir partideki kusurlu parça sayısına ilişkin araştırmalar aşağıdaki çizelgede gösterilen olasılıkları ortaya çıkarmıştır.

KUSURLU PARÇA SAYISI	0	1	2	3	3'ten çok
OLASILIK	0.29	0.36	0.22	0.10	0.03

(a) Bir partide üçten az kusurlu parça çıkma olasılığını bulun.
(b) Bir partide birden çok kusurlu parça çıkma olasılığını bulun.
(c) Çizelgedeki beş olasılığın toplamı bir'dir. Bu niye böyle olmak zorundadır?

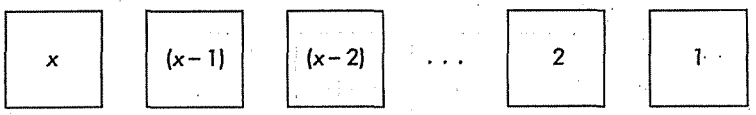
3.5 PERMÜTASYON VE KOMBİNASYON

Bir olayın olasılığını hesaplarken uygulamada zaman zaman ortaya çıkan bir zorluk, örneklem uzayındaki ve ilgilenilen olaylardaki temel sonuçların sayılmasıdır. Bazı durumlarda permütasyon ve kombinasyon kullanımı işe yarayabilir.

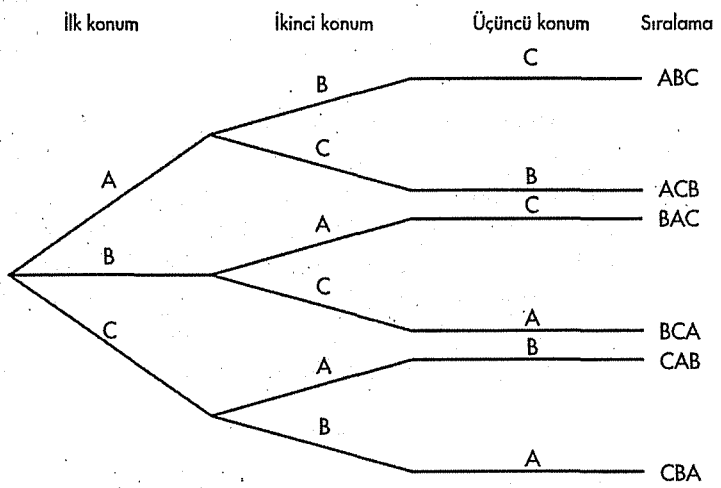
Önce *sıralama* sorunuyla işe başlayalım. Sıraya konulacak x tane nesne olsun. Her nesne yalnız bir kez kullanılacaktır. Kaç değişik dizilim yapılabilir? Bu sorunu, Çizim 3.8'de gösterildiği gibi, nesnelerin her birini, sıraya konmuş x tane kutunun her birine yerleştirmek biçiminde ele alabiliriz. İlk kutudan başlarsak, buna konabilecek x tane nesne vardır. Bu nesnelerden biri bu kutuya konduktan sonra, $(x-1)$ nesne kalmakta, böylece ikinci kutuyu doldurmanın $(x-1)$ tane yolu olmaktadır. Yani ilk kutuya bir nesne koymanın x tane, ikinci kutuya bir nesne koymanın $(x-1)$ tane yolu vardır, demek ki ilk iki kutuyu doldurmanın toplam $x(x-1)$ tane yolu vardır. İlk iki kutu dolduktan sonra, üçüncü kutu için $(x-2)$ yol kalmaktadır, öyleyse ilk üç kutu için toplam $x(x-1)(x-2)$ olmaktadır. Sonunda en son kutuya vardığımızda elimizde bu kutuya koyacak yalnız bir nesne kalır. Demek ki olanak içindeki bütün sıralamaların toplam sayısı $x(x-1)(x-2)\cdots(2)(1)$'dir, bu da kısaca $x!$ olarak yazılır (x faktöryel okunur).[2]

> x tane nesnenin olanaklı sıralanmalarının sayısı şudur:
>
> $$x(x-1)(x-2)\cdots(2)(1)=x!$$

[2] $x!$ kavramını, x'in artı değerleri için tanımlamış bulunuyoruz. Ayrıca şu tanımı da yapalım: $0!=1$.



ÇİZİM 3.8 x tane nesnenin sıralanışı



ÇİZİM 3.9 Örnek 3.11 için ağaç çizimi

ÖRNEK 3.11

A, B, C harfleri 3! = 6 değişik biçimde sıralanabilir:

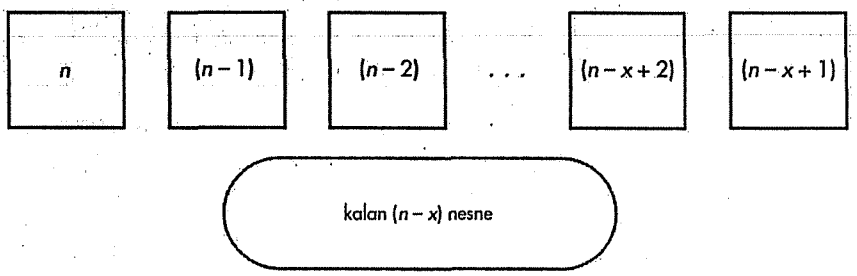
ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Bu örnek Çizim 3.9'daki *ağaç çizimi* ile gösterilebilir. Çizimin sol yanındaki kavşaktan işe başlayarak üç harften birini ilk konumu doldurmak üzere seçeriz. Ortaya çıkan yeni dallanmaları izlersek, ikinci konumu doldurmak için iki olanağımız vardır. Sözgelimi, ilk konumda A harfi varsa, ikinci konuma ya B ya da C konulabilir. Son olarak, ilk iki konum doldurulduktan sonra, son konuma konacak yalnız bir harf kalacaktır. Elde edilen olanaklı altı sıralanma çizimin sağ yanında gösterilmiştir.

ÖRNEK 3.12

Bir müşteriden beş değişik marka biranın tadını beğenme sırasına koyması istenmiştir. Aslında müşteri bu markalar arasında kayıtsızsa, belli bir sıralamanın şans eseri seçilme olasılığı kaçtır?

5! = 120 değişik sıralanma olanaklıdır. Bunların her birinin seçilme şansı aynıysa, belli birini seçme olasılığı $1/120$'dir.



ÇİZİM 3.10 n nesne arasından seçilen x nesnenin permütasyonu

Şimdi de n tane nesnemiz olduğunu, bunları x tane kutuya koyacağımızı düşünelim ($n > x$). Her bir nesne yalnız bir kez kullanılabilir. Olanak içindeki sıralanmaların sayısına, n nesneden seçilmiş x nesnenin **permütasyon** sayısı denir, ${}_nP_x$ simgesiyle gösterilir. Burada da az önceki gibi düşünebiliriz, ama bir farkla: Bu kez ilk kutuyu doldurabileceğimiz n yol, ikinci için $(n-1)$ yol, vb. son kutuya gelinceye kadar bu böyle gider. Bu noktada elimizde, Çizim 3.10'da gösterildiği gibi, bu kutuya koyabileceğimiz $(n-x+1)$ tane nesne kalmıştır. Öyleyse toplam permütasyon sayısı şudur:

$$ {}_nP_x = n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1) $$

Bunu $(n-x)(n-x-1)(2)(1)$ ile bir kez çarpıp bir kez bölerek daha elverişli bir gösterim elde edebiliriz:

$$ {}_nP_x = \frac{n(n-1)(n-2)\Lambda\ (n-x+1)(n-x)(n-x-1)\Lambda\ (2)(1)}{(n-x)(n-x-1)\Lambda\ (2)(1)} $$

$$ = \frac{n!}{(n-x)!} $$

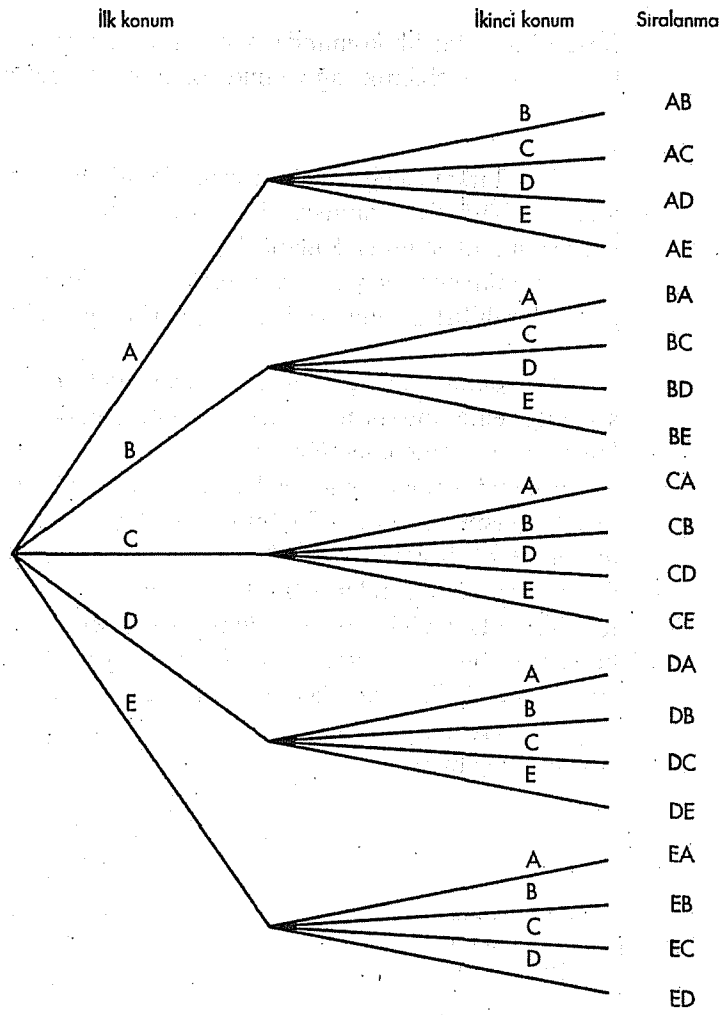
Tanım

N tane nesne arasından seçilmiş x tane nesnenin **permütasyon** sayısı ${}_nP_x$, toplam n tane arasından x tane nesne seçilir de bunlar sıraya konursa ortaya çıkabilecek sıralamaların sayısıdır. Bu sayı şudur:

$$ {}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!} $$

ÖRNEK 3.13

A, B, C, D, E, arasından iki harf seçileceğini, bunların sıralanacağını düşünelim. $n = 5$, $x = 2$ iken permütasyon sayısı $n!/(n-x)! = 5!/3! = 20$'dir. Bu sıralanmalar aşağıdadır:



ÇİZİM 3.11 Örnek 3.13'ün ağaç çizimi

AB	AC	AD	AE	BC
BA	CA	DA	EA	CB
BD	BE	CD	CE	DE
DB	EB	DC	EC	ED

Bu örneği Çizim 3.11'deki ağaç çizimiyle gösteriyoruz. Sol yandaki kavşakta, ilk konuma yerleştirilebilecek beş harf vardır. Ortaya çıkan dallanmalardan herhangi birini izlersek ikinci konuma koyabileceğimiz dört harf bulunmaktadır.

Sözgelimi, eğer ilk konumda A varsa, ikinci konuma B, C, D, E'den biri konabilir. Böylece çizimin sağ yanında olanak içindeki yirmi permütasyonu görebiliyoruz.

ÖRNEK 3.14

Beş biranın beğenilme sırasına konduğu Örnek 3.12'ye dönelim. Biralar arasında bütünüyle kayıtsız olan bir kimsenin, belli bir sıralamaya ilk üç sırayı vermesinin olasılığı ne kadardır?

Permütasyon sayısı ${}_nP_x = 5!/(5-3)! = 5!/2! = 60$'tır. Bunların her birinin gerçekleşebilirliği aynıysa, herhangi birinin gerçekleşme olasılığı 1/60'tır.

Son olarak, n tane nesne arasından x tanesinin kaç değişik biçimde seçilmesiyle ilgilendiğimizi (hiçbir nesne birden çok kez seçilemez), ama bunların sıralanmalarıyla ilgilenmediğimizi düşünelim. Dikkat ederseniz Örnek 3.13'te ikinci ve dördüncü sıralar, kendi üstlerindeki sıraların yeniden düzenlenmiş biçimleridir, dolayısıyla gözardı edilebilirler. Öyleyse beş nesne arasından ikisini seçmenin on olanaklı yolu vardır. Olanak içindeki seçim sayısına **kombinasyon** sayısı denir, n nesne arasından x tanesi seçilecekse ${}_nC_x$ ile gösterilir. Bu sayıyı bulmak için önce olanak içindeki permütasyon sayısının ${}_nP_x$ olduğuna dikkat edin. Ancak bunlardan bir çoğu aynı x tane nesnenin yeniden sıralanmış biçimidir, dolayısıyla geçersizdir. Aslında x tane nesne $x!$ biçimde sıralandığına göre, permütasyon sayısının yalnızca $1/x!$ oramyla ilgileniyoruz demektir; yani, kombinasyon sayısı şudur:

$$ {}_nC_x = \frac{{}_nP_x}{x!} = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

Tanım

n nesne arasından seçilen x tanesinin kombinasyon sayısı ${}_nC_x$, yapılabilecek olanaklı seçimlerin sayısıdır. Bu sayı şudur:

$$ {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

ÖRNEK 3.15

Bir personel yöneticisinin boş dört kadroyu doldurmak için sekiz adayı vardır. Adaylardan beşi erkek, üçü kadındır. Adayların her kombinasyonunun seçilme şansı eşitse, hiçbir kadının işe alınmama olasılığı kaçtır?

Önce, sekiz adaydan dördünün olanaklı kombinasyonlarının toplam sayısı şöyledir:

$$ {}_8C_4 = \frac{8!}{4!4!} = 70 $$

Eğer hiçbir kadın işe alınmayacaksa, başarılı adayların dördünün de beş erkek arasından gelmesi gerekir. Bu tür kombinasyonların sayısı da şudur:

$$_5C_4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

Dolayısıyla, eğer başlangıçta olanak içindeki yetmiş kombinasyonun seçilme şansı aynıysa, hepsi erkeklerden oluşan beş kombinasyondan birinin olasılığı $5/70 = 1/14$ olur.

3.6 OLASILIK KURALLARI

İlgimiz zaman zaman birleşim ya da arakesit gibi bileşik olaylar üzerinde yoğunlaşır. Bu altbölümde bu tür bileşik olayların olasılıklarını hesaplama kurallarını geliştireceğiz.

Önce, S örneklem uzayında bir A olayı olsun. Önceden biliyoruz ki A ile onun bütünleyicisi $\overline{A}$, hem bağdaşmaz, hem de bütünü kapsayıcı olaylardır. Öyleyse, A ile $\overline{A}$, bağdaşmaz olduklarından, Altbölüm 3.4'teki (iii) gereği,

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

ve A ile $\overline{A}$ bütünü kapsayıcı olaylar olduklarından, aynı altbölümdeki (iv) gereği,

$$P(A \cup \overline{A}) = 1$$

yazılabilir. Bu iki eşitliği biraraya getirirsek şunu elde ederiz:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad \text{ya da} \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Öyleyse bir olayın *gerçekleşmeme* olasılığı, 1 eksi *gerçekleşme* olasılığıdır. Sözgelimi, bir zar atıldığında 2'nin gelme olasılığı 1/6'dır, öyleyse 2'nin gelmeme olasılığı $1 - 1/6 = 5/6$'dır. İlgilenilen olayın bütünleyicisinin olasılığını doğrudan bulmak istediğimizde bu bulgunun değeri anlaşılır.

> A bir olay, $\overline{A}$ de onun bütünleyicisi olsun. O zaman şunu yazabiliriz:
>
> $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

ÖRNEK 3.16

Örnek 3.15'te beş erkek ile üç kadın dört kadroya adaydılar. Yine her kombinasyonun şansının eşit olduğunu varsayarsak, hiç olmazsa bir kadının işe alınma olasılığı kaçtır?

Hiçbir kadın işe alınmıyor" olayına A, bunun bütünleyicisi olan, "Hiç olmazsa bir kadın işe alınıyor" olayına da $\overline{A}$ diyelim. Örnek 3.15'te $P(A) = 1/14$ bulmuştuk.

Öyleyse aranan olasılık şudur:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Şimdi de A ile B iki olay olsun. A ile B bağdaşmaz olaylarsa, birleşimlerinin olasılığının tekil olasılıklarının toplamı olduğunu Altbölüm 3.4'te göstermiştik. Şimdi de bunlar bağdaşmaz olaylar olmadıkları zaman birleşiminin olasılığını bulmak istiyoruz. Burada Altbölüm 3.2'de türetilen bulgular kullanılacaktır. Önce şunu belirtelim ki, $(A \cap B)$ ile $(\overline{A} \cap B)$ bağdaşmaz olaylar olup birleşimleri B'dir. Öyleyse,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \qquad (3.6.1)$$

Ayrıca A ile $(\overline{A} \cap B)$ olayları da bağdaşmaz olaylar olup bunların birleşimi de $(A \cup B)$'dir, böylece

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \qquad (3.6.2)$$

Eş. (3.6.1) ile Eş. (3.6.2)'deki $P(\overline{A} \cap B)$ terimleri birbirini götürür, şu elde edilir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Buna **olasılıkların toplama kuralı** denir. Dikkat ederseniz bu kural, bağdaşmaz olmadıkça, bir birleşimin olasılığının tekil olasılıkların toplamı *olmadığını* söylemektedir.

Olasılıkların Toplama Kuralı

A ile B iki olay olsun. Bunların birleşiminin olasılığı şudur:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ÖRNEK 3.17

Bir hamburgerci zinciri müşterilerinin %75'inin hardal, %80'inin ketçap, %65'inin de ikisini birden kullandığını bulmuştur. Belli bir müşterinin bunlardan en az birini kullanma olasılığı kaçtır?

"Müşteri hardal kullanır" olayına A, "Müşteri ketçap kullanır" olayına da B diyelim. Örnekte söylenenlere göre şunları yazabiliriz:

$$P(A) = 0.75 \qquad P(B) = 0.80 \qquad P(A \cap B) = 0.65$$

Aranan olasılık aşağıdadır:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.75 + 0.80 - 0.65 = 0.90$$

A ve B olay çiftiyle ilgilendiğimizi, ayrıca B olayının gerçekleştiği bilgisinin bize verildiğini düşünelim. İlgilendiğimiz soru şudur: *B'nin gerçekleştiği veriyken, A*'nın gerçekleşme olasılığı ne kadardır? Bu tür soruna **koşullu olasılık** kavramı aracılığıyla yaklaşılabilir. Buradaki temel düşünce şudur: Bir olayın gerçekleşme şansı, başka olayların gerçekleşip gerçekleşmemesine bağlı olabilir. Sözgelimi, yeni bir urunu pazara sürmeye niyetli bir üretici, bu ürünü seçilmiş birkaç dükkânda satma denemesi yapabilir. Ürün bu deneme satışlarında müşterilerce iyi karşılanırsa, üretici ürünün daha geniş bir pazarda başarılı olabileceği konusunda, aksi duruma göre daha çok güven duyabilir. Dolayısıyla yüksek satış yapma olasılığına ilişkin değerlendirme, deneme satışlarının sonucuna bağlı olabilir.

Aynı biçimde, gelecek yıl faiz oranlarının düşeceğini biliyorsam, borsada faiz oranlarının yükseleceğine inandığım duruma göre çok daha fazla pay senedi alırım. Bir kez daha, pay senedi fiyatlarının izleyeceği yola ilişkin olasılık değerlendirmem, faiz oranları konusundaki bildiğime ya da inandığıma dayanır. Öyleyse belli bir olayın gerçekleşme olasılığıyla, bir başka olayın gerçekleşmesi veriyken ilgilenmemiz gerekir.

Tanım

A ile B iki olay olsun. B olayı veriyken, A olayının $P(A \mid B)$ ile gösterilen **koşullu olasılığı**, $P(B) > 0$ olması koşuluyla, şöyle tanımlanır:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Benzer biçimde, A veriyken B'nin koşullu olasılığı da, $P(A) > 0$ olması koşuluyla, şöyle tanımlanır:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Bu tanım, göreli sıklıklar cinsinden de bulunabilir. Rassal bir olayın N kez yinelendiğini, B olayının N_B, A ile B'nin birlikte $N_{A\cap B}$ kez gerçekleştiğini düşünelim. Bu durumda, *B gerçekleştiği zaman*, A'nın gerçekleşme sayısının oranı $N_{A\cap B}/N_B$ olur, B veriyken A'nın koşullu olasılığı, denemenin yinelenme sayısı çok büyükken bu oranın limiti olarak düşünülebilir. Ama

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N}$$

geçerlidir ve N büyüdükçe sağ yandaki pay ile payda, sırasıyla, $P(A \mid B)$ ve $P(B)$ olur. Böylelikle koşullu olasılık tanımının, göreli sıklıklarla uyumlu olduğu görülür.

ÖRNEK 3.18

Örnek 3.17'ye dönelim. Hamburgerci zincirinin müşterilerinden %75'i hardal, %80'i ketçap, %65'i ise her ikisini birden kullanıyorsa, bir ketçap kullanıcısının hardal, bir hardal kullanıcısının da ketçap kullanma olasılıkları kaçtır?

"Müşteri hardal kullanır" olayı A, "Müşteri ketçap kullanır" olayı B olsun. Böylece $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.80$, $P(A \cap B) = 0.65$ olur. Bir ketçap kullanıcısının hardal kullanması olasılığı, B olayı veriyken, A olayının koşullu olasılığıdır; yani:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.65}{0.80} = 0.8125$$

Aynı yolla, bir hardal kullanıcısının ketçap kullanma olasılığı da şöyledir:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.65}{0.75} = 0.8667$$

Koşullu olasılık tanımının ilk sonucu **olasılıkların çarpım kuralıdır**, bu da bir arakesitin olasılığını, tekil olayların olasılıkları ve koşullu olasılık terimleriyle dile getirir.

Olasılıkların Çarpım Kuralı

A ile B iki olay olsun. Bunların arakesitinin olasılığı şudur:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

Aynı zamanda,

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

Aşağıdaki örnek, olasılıkların çarpım kuralına ilginç bir örnek oluşturmakta ve bu bölümün daha önceki altbölümlerinde geçen bazı düşünceler arasında ilişki kurmaktadır.

ÖRNEK 3.19

Örnek 3.17'de, alan araştırmalarında duyarlı sorulara dürüst yanıtlar alma yaklaşımı olan *rassallaştırılmış yanıtlar* yöntemine kısaca değinmiştik. Hawaii'de Geurts tarafından yapılan böyle bir araştırmada,[3] her deneğe aşağıdaki iki soru yöneltilmiştir:

(a) Sosyal Güvenlik numaranızın son basamağı tek sayı mı?
(b) Hawaii Üniversitesi İşletme Fakültesi'nde daha az sayıda beyaz derili profesör olması gerektiğine inanıyor musunuz?

Deneklerden önce bir yazı-tura atmaları, "yazı" gelirse (a), "tura" gelirse (b) sorusunu yanıtlamaları istenmiştir. Bütün deneklerin yüzde otuzyedisi "evet" yamtı vermiştir. Duyarlı olunan (b) sorusuna yanıt veren bir deneğin "evet" demesi olasılığı kaçtır?

Şu olayları tanımlayalım:

A: Denek "evet" yanıtı veriyor.
E_1: Denek (a) sorusunu yanıtlıyor.
E_2: Denek (b) sorusunu yanıtlıyor.

Şimdi verilen bilgileri özetleyelim. Önce, bütün deneklerin %37'si "evet" dediğine göre, $P(A) = 0.37$'dir. Ayrıca, yamt verilecek soru yazı-tura ile kararlaştırıldığına göre, her bir sorunun yanıtlanma olsılığı 0.5'tir, yani $P(E_1) = 0.5$ ve $P(E_2) = 0.5$'tir.

(a) sorusuna verilen yanıtlar konusunda da bir şeyler biliyoruz. Sosyal Güvenlik numaralarının yarısının son basamağı tek sayı olduğuna göre, *(a) sorusu yanıtlanmışken,* "evet" yanıtı verilmesinin olasılığı 0.5'tir, yani $P(A \mid E_1) =$ 0.5'tir.

Ama bizim asıl aradığımız, (b) sorusu yanıtlanmışken "evet" yanıtının koşullu olasılığı olan $P(A \mid E_2)$'dir. Bu olasılığı bulabilmek için, önceki altbölümlerden iki bulguya başvuracağız. Birincisi, E_1 ile E_2 bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olaylar olduğuna göre, $E_1 \cap A$ ile $E_2 \cap A$ arakesitleri bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olaylardır, birleşimleri de A'dır. Buradan giderek diyebiliriz ki bu iki arakesitin olasılıklarının toplamı A'nın olasılığıdır, böylece şunu yazabiliriz:

$$P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)$$

Daha sonra, bu bağlamda aşağıdaki anlama gelebilen çarpım kuralını kullanırız:

[3] Geurts, "Using a randomized response research design."

$$P(E_1 \cap A) = P(A \mid E_1)P(E_1) \qquad \text{ve} \qquad P(E_2 \cap A) = P(A \mid E_2)P(E_2)$$

Bilinen değerleri bu eşitlikte yerine koyarsak şunu buluruz:

$$0.37 = (0.5)(0.5) + P(A \mid E_2)(0.5)$$

Artık aranan koşullu olasılığı elde edebiliriz:

$$P(A \mid E_2) = \frac{0.37 - 0.25}{0.5} = 0.24$$

Böylelikle, Hawaii Üniversitesi İşletme Fakültesi'nde beyaz derili profesör sayısının daha az olması gerektiğine inananları, araştırmaya giren anakütlenin % 24'ü olarak tahmin ederiz.

İki olayın arakesitinin olasılığının, tekil olasılıkların çarpımı *olmadığı*na dikkat edin. Ancak, uygulamada epeyi önemi olan özel bir durumda işler böyle değildir. Bu durumdaki olaylara **istatistik bakımından bağımsız** denir.

Tanım

A ile B iki olay olsun. Ancak ve ancak

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

koşulu yerine gelirse bu olaylar **istatistik bakımından bağımsız** olaylardır. Çarpım kuralına göre eşdeğer koşullar şöyledir:

(i) $P(A \mid B) = P(A)$ (eğer $P(B) > 0$ ise)

(ii) $P(B \mid A) = P(B)$ (eğer $P(A) > 0$ ise)

Daha genel olarak, ancak ve ancak

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_K) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_K)$$

koşulu sağlanırsa $E_1, E_2, \ldots, E_K$ olayları istatistik bakımından bağımsızdır.

Bu istatistik bakımından bağımsızlık tanımının mantıksal temeli en iyi koşullu olasılıklar terimleriyle görülebilir ve bu temel, olasılığa öznel bakış açısı bakımından belki de en çekici olanıdır. A olayının gerçekleşme olasılığının $P(A)$ olduğuna inandığımı düşünelim. Bu arada bana B olayının gerçekleştiği haber verilmiş olsun. Eğer bu haber benim A olayının gerçekleşebilirliği konusundaki düşüncemi değiştirmiyorsa, benim koşullu olasılık değerlendirmem $P(A \mid B)$, $P(A)$ ile aynı demektir. Bu durumda A olayının gerçekleşip gerçekleşemeyeceğini belirlerken B olayının gerçekleştiği bilgisinin bir işe yaramayacağı sonucuna

varırım; yani A olayımn gerçekleşebilirliği, B olayının gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesiyle ne artar ne azalır. Öyleyse, bu istatistik bakımından bağımsızlık tanımı, sağduyumuzdaki "bağımsızlık" kavramıyla uyuşmaktadır. Bundan böyle, anlamın açık olduğu yerlerde, *istatistik bakımından* sözlerini bırakıp olayların *bağımsız* olmasından söz edeceğiz. (Önemsiz bir örnek olarak "Dow-Jones ortalaması artacak" ve "Austin, Texas'ta yağmur yağacak" olayları bağımsızdır. İkincinin gerçekleşebilirliği konusunda inancım ne olursa olsun, ilkinin şansı konusundaki kanım bundan etkilenmez.)

İki olayın bağımsız olup olmadıklarını, bu tanımı kullanarak anlamamız sık sık istenebilir. Yöntem aşağıdaki örnekte açıklanmıştır.

ÖRNEK 3.20

Bütün lisans diplomalarının %48'inin kadınlar tarafından alındığı, bütün lisans diplomalarının %17.5'inin işletme dalında olduğu tahmin edilmiştir. Ayrıca, bütün lisans diplomalarının %4.7'si işletme dalında kadınlara verilmektedir. "Lisans diplomasını alan kadındır" ve "Lisans diploması işletme dalındadır" olayları istatistik bakımından bağımsız mıdır?

Bu iki olayı sırasıyla A ve B ile gösterelim. Şunları yazabiliriz:

$$P(A) = 0.48 \qquad P(B) = 0.175 \qquad P(A \cap B) = 0.047$$

$$P(A)P(B) = (0.48)(0.175) = 0.084 \neq P(A \cap B)$$

olduğundan iki olay bağımsız değildir. Bağımlılık koşullu olasılıktan görülebilir:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.047}{0.175} = 0.269$$

Demek ki bütün diplomaların %48'ini kadınlar alırken, işletme diplomalarının yalnızca %26.9'u kadınlara gitmektedir.

Bağdaşmaz ve *bağımsız* terimlerini birbirinden ayırmak gerekir. İki olay aynı anda gerçekleşemiyorsa, yani arakesitlerinin olasılığı 0 ise, bağdaşmaz olaylardır. Bağımsız olayların özelliği ise, arakesitlerinin olasılığının tekil olasılıklarının çarpımına eşit olmasıdır. Sözgelimi, "Borsa bugün yükselecek" ve "Texas, Austin'de bugün yağmur yağacak" gibi iki olay alalım. Bunların bağımsız olaylar olduğu konusunda kesinlikle görüş birliğine varabiliriz, ama bunlar bağdaşmaz olaylar değildir, çünkü her ikisi birden gerçekleşebilir.

Bazı durumlarda bağımsızlık, rassal denemenin özelliğinden çıkarılabilir ya da en azından akla yakın ölçüde anlaşılabilir ve arakesit olasılıkları, tekil olasılıklar çarpılıp hesaplanabilir. Bu durum özellikle yinelenen denemelerde işe yarar.

ÖRNEK 3.21

Belli bir model kişisel bilgisayarların %90'mın bir yıl boyunca onarım gerektirmeden çalışacağı bilinmektedir. Bir yönetici bunlardan üç tane almıştır. Bunların üçünün de hiçbir onarım geçirmeden bir yıl çalışabilme olasılığı kaçtır?

"i'inci bilgisayar onarım görmeksizin bir yıl çalışacak" olayına E_i diyelim. Bilgisayarlar birbirinden bağımsız çalışıyorsa, E_i olaylarının bağımsız olduklarını varsaymak akla uygundur. Öyleyse aranan olasılık şudur:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = (0.9)^3 = 0.729$$

ÖRNEK 3.22

Dow-Jones ortalamasının belli bir alışveriş gününde yükselme olasılığının 0.5 olduğunu, borsanın herhangi bir günde göstereceği oynamanın önceki günlerde olup bitenlerden bağımsız kaldığını varsayalım. Dow-Jones ortalamasımn peşpeşe dört alışveriş gününün hepsinde yükselme olasılığı kaçtır? Bu günlerden hiç olmazsa birinde ortalamanın düşmesi ya da aynı kalması olasılığı kaçtır?

"Dow-Jones ortalaması i'inci günde yükselir" olaylarına E_i adını verelim. Varsayımımız gereği $P(E_i) = ½$'dir ve bu olaylar bağımsızdır. Öyleyse, borsanın dört günün her birinde yükselme olasılığı şudur:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Dahası, "Bu günlerden en az birinde Dow-Jones ortalaması düşer ya da aynı kalır" olayı, olasılığını az önce bulduğumuz olayın bütünleyicisidir. Dolayısıyla olasılığı da şöyle bulunur:

$$1 - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Bu altbölümü, bir olayın olasılığını hesaplarken ilk adım olarak o olayın bütünleyicisinin olasılığını bulan yararlı bir tekniği gösterecek iki örnekle bitiriyoruz.

ÖRNEK 3.23

Aralarından en az iki kişinin doğum gününün aynı çıkma olasılığının %50 olabilmesi için bir toplulukta kaç kişi bulunmalıdır? Soruyu kolay ele alabilmek için 29 Şubat'ta doğan herkesi 1 Mart'a aktarıp, olası 365 doğum gününden her birinin anakütle içinde eşit sayıda gerçekleştiğini varsayıyoruz. (Bu basitleştirmeler sayısal sonucu pek az etkilemektedir.)

Topluluktaki kişi sayısına M, "En azından bir çiftin doğum günü ortaktır" olayına A diyelim. Bu durumda A'nın olasılığını doğrudan bulmak zor olabilir, çünkü birden çok sayıda ortak doğum gününü hesaba katmamız gerekir. "M kişinin hepsinin doğum günleri farklıdır" anlamına gelen bütünleyici $\overline{A}$ olayının olasılığını bulmak daha kolaydır.

İlk olarak, her bir kişi için 365 olası doğum günü bulunduğundan ve bunların her biri başka kimselerin doğum günü de olabileceğinden, M sayıda kimse

için, her birinin gerçekleşebilirliği aynı 365^M farklı düzenleme sözkonusudur. Daha sonra, bu sonuçlardan kaçının $\overline{A}$ olayı içinde yer aldığını, yani bunlardan kaçında M kişiden her birinin farklı doğum günleri olduğunu sorarız. Bu da, 365 olası gün arasından M sayıda doğum günü kaç değişik biçimde seçilebilir ve sıralanabilir sorusunu sormakla aynı şeydir. Bu da permütasyon sayısı ${}_{365}P_M$'den başkası değildir. Demek ki M tane doğum gününün hepsinin farklı olma olasılığı şöyledir:

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_{365}P_M}{365^M} = \frac{365!}{365^M(365-M)!}$$
$$= \frac{(364)(363)\cdots(366-M)}{365^{M-1}} \qquad (M \geq 2)$$

Bütünleyicinin olasılığını hesapladığımıza göre istenen olasılığı da şöyle buluruz:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{(364)(363)\cdots(366-M)}{365^{M-1}}$$

Belli sayılardaki M kişi için bu olasılık değerlerine aşağıdaki çizelgede yer verilmiştir:

M	10	20	22	23	30	40	60
$P(A)$	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.994

Demek ki, toplulukta en az yirmiüç kişi varsa, en az bir çift benzer doğum günü bulunmasının olasılığı bulunmaması olasılığından daha yüksektir. Bu olasılık, topluluk büyüdükçe hızla artar, kişi sayısı altmışa ulaşınca eş doğum günü bulma olasılığı gerçekten çok yüksektir.

İlk bakışta bu, sezgiye aykırı gibi görünebilir. Ne de olsa veri olarak alınmış herhangi iki kişinin doğum gününün aynı çıkması olasılığı çok küçüktür (1/365). Ancak, yirmi ya da daha çok kişilik bir toplulukta olası benzer doğum günlerinin sayısı çok büyüktür, bu nedenle "En az bir çift" olayı, gerçekleşebilirliği düşük olayların birleşimi olmasına karşın, hepsi birlikte düşünüldüğünde, birleşimin olasılığı yükselmektedir.

ÖRNEK 3.24

Birleşik Havayolları satışları artırmaya yönelik bir kampanyasında müşterilerle müşteri olabilecek kimselere birer belge verilmektedir. Bunların 1/325 kadarı bu havayollarının uçtuğu her hangi bir yere gidiş-dönüş bileti yerine geçmektedir. Bir kimsenin en az bir bedelsiz bilet kazanma şansının %50 olabilmesi için bu belgelerden kaç tane toplaması gerekmektedir?

İlgilenilen A olayı şudur: "M tane belgeyle en az bir bedelsiz bilet kazanılır." Burada da "M tane belgeyle hiçbir bedelsiz bilet kazanılmaz" diyebileceğimiz bütünleyici $\overline{A}$ olayının olasılığını hesaplamak en kolayıdır.

Tek bir belgeyle kazanma olasılığı 1/325'tir, öyleyse bu biletin kazanamama olasılığı 324/325 olur. Eğer bu kimsede M tane belge varsa, bunların hiçbirinin bilet kazanamaması olayı, M tane belgeden her birinin "Kazanamama" olaylarının arakesitidir. Üstelik bu olaylar bağımsızdır, öyleyse şunu yazabiliriz:

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{324}{325}\right)^M$$

Demek ki en az bir tane bilet kazanma olasılığı şudur:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{324}{325}\right)^M$$

$P(A)$'nın en az 0.5 olabilmesi için, bu kimsenin en az $M = 225$ belge toplaması gerekir.

Burada da, bulunan sonuç sezgiye aykırı görünebilir. İlk bakışta, tek bir belgenin kazanma şansı 1/325 ise, %50 kazanma şansını güvenceye almak için 163 belgenin yeterli olacağı tahmin edilebilir. Ama, burada bir birleşimin olasılığının tekil olasılıkların toplamı olacağı varsayımı kapalı olarak yapılmakta, arakesitlerdeki (M tane belgenin birden çok bilet kazanması anlamına gelen) çifte saymaların çıkarılması unutulmaktadır.

ALIŞTIRMALAR

7. Bir şirket, rakip bir şirketin kendi ürünüyle rekabet edecek bir ürünü pazara çıkarmak üzere olduğunu bilmektedir. Rakip şirketin, gerçekleşebilirlikleri aynı olan üç ambalaj planı (pahalı, normal, ucuz) üzerinde düşündüğüne inanılmaktadır. Ayrıca, yine gerçekleşebilirlikleri aynı üç pazarlama stratejisi (yoğun basın-yayın reklâmı, fiyat kırma, gelecekteki alışverişler için indirim kuponu) sözkonusudur. Rakip şirketin, pahalı ambalajlama ile yoğun reklâm kampanyasını birlikte kullanma olasılığı kaçtır? Ambalajlama planı ile pazarlama stratejisinin birbirinden bağımsız olarak kararlaştırıldığını varsayın. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
8. Bir mali analistten, yedi şirketin gelecek yıldaki kazanç beklentilerini değerlendirmesi ve kestirilen kazanç artış oranlarına göre sıralaması istenmiştir.
   (a) Kaç değişik sıralama sözkonusu olabilir? $7!$
   (b) Belli bir sıralama öylesine tahmin edilse, bu tahminin doğru çıkma olasılığı kaçtır? $1/7!$
9. Bir şirketin elli satış temsilcisi vardır. Geçen yılın en başarılı temsilcisine Hawaii'de bir Ocak tatili, ikinciye bir Las Vegas tatili ödül verilmesi kararlaştırılmıştır. Öteki temsilcilerin Buffalo'daki çağdaş satış yöntemleri konferansına katılmaları istenecektir. Kaç değişik sonuç sözkonusudur?

$$P = \frac{50!}{(50-2)!} \quad \frac{50!}{48!} = \frac{49 \cdot 50 \cdot 48!}{48!} = 2450$$

10. Bir taşınabilir değerler analistinin savına göre, altı pay senedinden oluşan bir listeden gelecek yıl en başarılı olacak üçünü doğru sırada kestirmek olanaklıdır. Doğru seçimi şans eseri yapmanın olasılığı kaçtır?
11. Bir öğrenci kurulunda ikisi lisans, ikisi lisanüstü olmak üzere altı öğrenci vardır. Bu altı öğrenci arasından üç kişilik bir yarkurul, üç kişilik kombinasyonların her birinin seçilme şansı eşit olacak biçimde seçilecektir. Bu yarkurulda hiç lisansüstü öğrencisinin bulunmamasının olasılığı kaçtır?
12. Beyzbol Amerikan Doğu Ligi'nde beş takım vardır. Mevsim sonundaki ilk üç takımı sırasıyla kestirmeniz istenmektedir. Aynı puana sahip olma durumunu bir yana bırakarak, yapabileceğiniz farklı kestirimlerin sayısını hesaplayın. Doğru kestirimi şans eseri yapmanın olasılığı kaçtır?
13. Bir yöneticinin dört göreve atayabileceği dört yardımcısı vardır: John, George, Mary, Jean. Her yardımcı bir göreve atanacak, her göreve bir yardımcı atanacaktır.
    (a) Kaç değişik atama düzenlemesi yapılabilir?
    (b) Atamalar rassal yapılırsa, Mary'nin belli bir göreve atanma olasılığı kaçtır?
14. Bir şirketin üst düzey yönetimi reklâm bütçesini iki ajans arasında bölüştürmeye karar vermiştir. Bu iş için sekiz ajans düşünülmektedir. İki ajans kaç değişik biçimde seçilebilir?
15. Bir oyundaki iki rol —kadın kahraman ve onun en yakın kız arkadaşı— için denenecek yedi adaydan biri de sizsiniz. Denemelerden önce öbür adaylara ilişkin hiçbir şey bilmiyorsunuz, rollerin her biri için her adayın şansının eşit olduğunu varsayıyorsunuz.
    (a) İki rol için oyuncu seçilirken kaç değişik seçim yapılabilir?
    (b) (a)'daki değişik seçimlerden kaçında kadın kahramanı siz oynarsınız?
    (c) (a)'daki seçimlerden kaçında kadın kahramanın en iyi kız arkadaşını siz oynarsınız?
    (d) Kadın kahramanı oynamak üzere sizin seçilmeniz olasılığını (a) ve (b)'deki bulguları kullanarak hesaplayın. Bu olasılığı bulmak için daha doğrudan bir yol gösterin.
    (e) İki rolden birini oynamak üzere sizin seçilmeniz olasılığını (a) ve (b)'deki bulguları kullanarak hesaplayın. Bu olasılığı bulmak için daha doğrudan bir yol gösterin.

Bir inşaat işinde çalışacak bir takım, beş usta ile altı işçi arasından seçilen iki usta ile dört işçiden oluşacaktır.
    (a) Kaç değişik takım seçilebilir?
    (b) Ustalardan birinin kardeşi işçidir. Bu takım rassal olarak seçilirse iki kardeşin de takımda olma olasılığı kaçtır?
    (c) Kardeşlerden ikisinin de takıma girememe olasılığı kaçtır?

Bir yatırım fonu şirketi ABD pazarında altı fona, yabancı pazarlarda dört fona yatırım yapmaktadır. Bir müşteri iki ABD fonuyla iki yabancı fona yatırım yapmak istemektedir.
    (a) Yatırımcı bu şirketin fonları arasından kaç değişik küme oluşturabilir?
    (b) ABD fonlarından biri ile bir yabancı fonun gelecek yıldaki başarımının ciddi ölçüde kötü olacağını bu yatırımcı bilmemektedir. Eğer yatırımcı alacağı fonları rassal seçerse, fonlardan birinin başarımının gelecek yıl ciddi biçimde kötü çıkma olasılığı kaçtır?

18. Bir üniversite yerleşkesindeki son sınıf öğrencilerinden %30'unun iş olanaklarını, %25'inin notları, %20'sinin ise her ikisini birden ciddi biçimde dert edindiği tahmin edilmektedir. Bu yerleşkeden rassal olarak seçilen bir son sınıf öğrencisinin bunlardan en az birini dert edinmiş olma olasılığı kaçtır?

19. Bir müzik dükkânının sahibi, dükkâna giren müşterilerden %30'unun tezgâhtardan yardım istediğini, %20'sinin ayrılmadan önce bir alışveriş yaptığını bulmuştur. Ayrıca, bütün müşterilerin %15'inin hem tezgâhtardan yardım istediği, hem alışveriş yaptığı saptanmıştır. Bir müşterinin bu iki işten en az birini yapma olasılığı kaçtır?

20. Alıştırma 19'daki bilgilere dönüp "Müşteri yardım istiyor", "Müşteri alışveriş yapıyor" olaylarını ele alalım. Aşağıdaki soruları yanıtlarken, gerekçelerinizi, ilgili olayların olasılığı cinsinden belirtin.

(a) Bu iki olay bağdaşmaz olaylar mıdır?

(b) Bu iki olay bütünü kapsayıcı mıdır?

(c) Bu iki olay istatistik bakımından bağımsız mıdır?

21. Yerel bir sivil toplum kuruluşu telefonla yardım toplamaktadır. Yardım verebilecek kimseler arasından herhangi bir kimsenin kredi kartını kullanıp hemen bağış yapma olasılığı 0.05, hemen bağış yapmasa da postayla bilgi gönderilmesini isteyenlerin olasılığı 0.25, hiç ilgilenmediğini söyleyenlerin olasılığı da 0.70'tir. İsteyen herkese postayla bilgi gönderilmekte, bunların %20'sinin de sonunda bağış yaptıkları tahmin edilmektedir. Bir görevli, sonuçları birbirinden bağımsız olduğu düşünülen bir dizi telefon görüşmesi yapmıştır.

(a) En az dört telefon görüşmesinden sonra yine de bir kredi kartı bağışı sağlayamama olasılığı kaçtır?

(b) İlk baştaki en az dört başarısız telefon görüşmesinin ardından (ya hemen kredi kartıyla ya da bilgi postalanmasından sonra) bir bağış sağlama olasılığı kaçtır?

22. Mektupla satış yapan bir işletme, siparişler karşılanırken yapılabilen üç değişik sorunla ilgilenmektedir:

A: Yanlış mal gönderilmesi.
B: Malın yolda kaybolması.
C: Malın yolda hasara uğraması.

A olayının B ile C'den bağımsız, B ile C'nin bağdaşmaz olaylar olduğunu varsayalım. Tekil olayların olasılıkları şöyledir: $P(A) = 0.02$, $P(B) = 0.01$, $P(C) = 0.04$. Rassal olarak seçilmiş bir siparişte bu aksiliklerden en az birinin gerçekleşmesi olasılığı kaçtır?

23. Bir üniversite spor takımını çalıştırıcısı, henüz lise son sınıfta olan bir yıldız oyuncuyu takımına katmak istemektedir. Bu oyuncunun gelecek yıl takımda oynayabilmesi için önce hem okulunu bitirmesi, hem de standart bir sınavdan geçmesi gerekmektedir. Çalıştırıcının kestirimlerine göre, oyuncunun okulu bitirememe olasılığı 0.02, standart sınavı geçememe olasılığı 0.15'tir, bu iki olay da birbirinden bağımsızdır. Bu kestirimlere göre, bu oyuncunun gelecek yıl üniversite takımında oynama olasılığı kaçtır?

24. Belli bir kentteki pazar araştırmasının gösterdiğine göre, belli bir haftada, bütün yetişkinlerin %18'i iş yaşamı ve finans konularında bir televizyon programı izlemekte, %12'si bu konularda bir yazı okumakta, %10'u her ikisini de yapmaktadır.

(a) Bu kentteki yetişkinlerden, iş yaşamı ve finans konularında bir televizyon programı izlemiş birinin bu konularda bir yazı okuması olasılığı kaçtır?

(b) Bu kentteki yetişkinlerden, iş yaşamı ve finans konularında bir yazı okumuş birinin bir televizyon programı izlemesi olasılığı kaçtır?

25. Bir görevli montaj hattından çıkan ürünleri incelemektedir. Kendi kayıtlarına göre bu görevli, bütün kusurlu ürünlerin yalnızca %8'ini sağlam kabul etmektedir. Montaj hattından çıkan bütün ürünlerin %1'inin kusurlu olduğu ve aynı zamanda bu görevli tarafından sağlam kabul edildiği de anlaşılmıştır. Bu montaj hattı ürünleri arasından rassal seçilmiş birinin kusurlu çıkma olasılığı kaçtır?

26. Bir analiste dört pay senediyle beş tahvilin adları verilmiş, gelecek yıl en yüksek getiriyi sağlayacak iki pay senediyle yine en yüksek getiriyi verecek iki tahvili doğru sıralarla tahmin etmesi istenmiştir. Analistin bu iki sıralamadan hiç olmazsa birinde başarılı olma olasılığı kaçtır?

27. Bir banka, kredi müşterilerini riski yüksek ve alçak olanlar diye ikiye ayırmaktadır. Kredilerinden yalnızca %15'i yüksek risklilere verilmiştir. Bütün kredilerden %5'i geri ödenmemiş olup bunların %40'ı yüksek risklilere verilmiştir. Yüksek riskli birinin krediyi geri ödememe olasılığı kaçtır?

28. Bir toplantı aynı anda yapılan iki oturumla öğleyin başlamıştır. Portföy yönetimi konusundaki oturuma katılımcıların %40'ı, borsa çizimleri konusundakine ise %50'si katılmıştır. Konusu "Rassal yürüyüş öldü mü?" olan akşam oturumuna katılım %80 olmuştur.

(a) Portföy yönetimi ve borsa çizimleri oturumlarına katılımlar bağdaşmaz olaylar ise, rassal olarak seçilmiş bir katılımcının bu iki oturumdan hiç olmazsa birine katılmış olma olasılığı kaçtır?

(b) Portföy yönetimi ve akşam oturumlarına katılımlar istatistik bakımdan bağımsız ise, rassal olarak seçilmiş bir katılımcının bu iki oturumdan hiç olmazsa birine katılmış olma olasılığı kaçtır?

(c) Borsa çizimleri oturumuna katılanların %75'i akşam oturumuna da katılmıştır. Rassal olarak seçilmiş bir katılımcının bu iki oturumdan hiç olmazsa birine katılmış olma olasılığı kaçtır?

29. Bir borsa analisti, pay senetlerini seçmede, bu alandaki ölçüleri aşan bir başarı göstereceği savını ileri sürmektedir. Bu analiste beş tane yüksek teknoloji, beş tane de havayolu şirketinin pay senetleri listesi verilip bu listelerin her ikisinde de gelecek yıl en iyi başarımı gösterecek üçer pay senedini doğru sırada seçmesi istenmiştir. Analistin savına göre bu iki seçimden yalnızca birini bile doğru yapmak çok önemli bir başarı sayılmalıdır. Aslında bu seçimler rassal ve bağımsız olarak yapılırsa, bunlardan hiç olmazsa birinde şans eseri başarılı olmanın olasılığı kaçtır?

30. Bir kalite denetimi yöneticisi, işçilere ilişkin sorunların %30'unun Pazartesi günleri, %20'sinin de günlük iş süresinin son saatinde ortaya çıktığını saptamıştır. Ayrıca işçilere ilişkin sorunların %4'ünün Pazartesi gününün son saati içinde ortaya çıktığı da anlaşılmıştır.

(a) İşçilere ilişkin bir sorunun bir Pazartesi gününde ama son saatten önce ortaya çıkma olasılığı kaçtır?

(b) "Sorun Pazartesi ortaya çıkar" ve "Sorun günün son saatinde ortaya çıkar" olayları istatistik bakımından bağımsız mıdır?

31. Bir şirket işçilerinin temel eğitim becerileriyle ilgilenmekte olup bunlardan seçilmiş bir bölümüne okuma ve uygulamalı hesap dersleri açmaya karar vermiştir. Bu işçilerin yüzde kırkı okuma, %50'si de uygulamalı hesap derslerine başvurmuştur. Okuma dersine başvuranların %30'u hesap dersine de başvurmuştur.

(a) Rassal olarak seçilmiş bir işçinin her iki derse de başvurma olasılığı kaçtır?
(b) Hesap dersine başvurmuş işçiler arasından rassal seçilmiş birinin okuma dersine de başvurmuş olma olasılığı kaçtır?
(c) Rassal olarak seçilmiş bir işçinin bu iki dersten en az birine başvurma olasılığı kaçtır?
(d) "Okuma dersine başvurma" ve "Hesap dersine başvurma" olayları istatistik bakımından bağımsız mıdır?

32. Bir çim bakım işletmesi, yaklaşan mevsimde müşteri kazanmak için telefon görüşmeleri yapmaktadır. Kayıtların incelenmesiyle bu görüşmelerin %15'inde yeni müşteriler kazanıldığı, bu yeni müşterilerin %80'inin geçen yıl rakip bir işletmeyle çalıştığı anlaşılmıştır. Ayrıca bütün telefon görüşmelerinin %60'ının geçen yıl rakip bir işletmeyle çalışan kişilerle yapıldığı tahmin edilmektedir. Geçen yıl rakip bir işletmeyle çalışan kişilerle yapılan bir görüşmenin çim bakım işletmesine yeni bir müşteri kazandırma olasılığı kaçtır?

33. Bir yayımcı bir kitabın satışını artırmak için şu üç olanaklı yöntemden hepsini, kimisini kullanabilir ya da hiçbirini kullanmayabilir:

A: Yayım öncesi pahalı bir kampanya
B: Pahalı bir kapak tasarımı
C: Önceden belirlenmiş satış düzeyini tutturan satış temsilcilerine ikramiye

Geçmişte bu üç yöntem aynı anda şirket kitaplarının yalnız %2'sinde uygulanmıştır. Kitapların yüzde yirmisine pahalı kapak tasarımı yaptırılmış, bunların %80'ine de yayım öncesi pahalı kampanya yürütülmüştür. Rakip bir yayımcı, yeni bir kitaba hem pahalı kampanya, hem pahalı kapak tasarımı yapılacağını öğrenmiş olup, satış temsilcilerine ikramiye ödenme şansının ne kadar olacağını merak etmektedir. Rakip yayımcının ilgilendiği olasılığı bulun.

3.7 İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK

Bu bölümde, daha önce geliştirdiğimiz matematik kullanılarak çözülebilen bir problem türünü tanıtacağız. Ama bu problemler kendi başlarına ele alınacak kadar önemlidir.

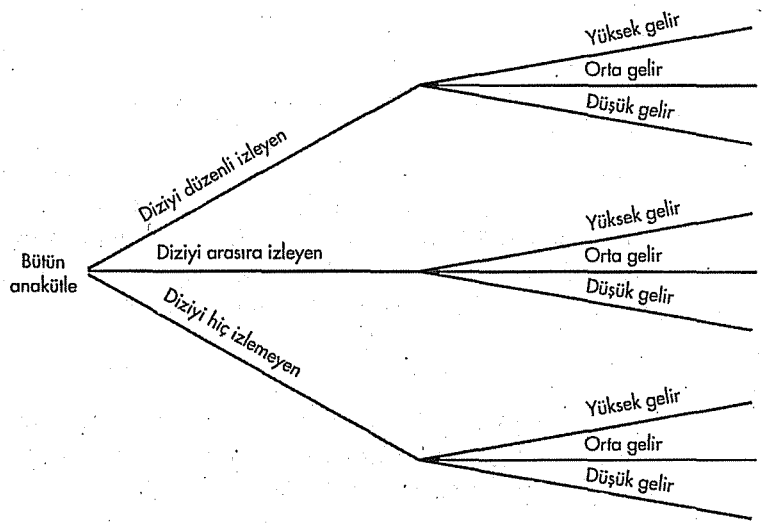
Genel çerçeve şöyledir: Rassal bir deneme yapılmakta, ilgi, farklı iki küme olayın gerçekleşmesi üzerinde odaklanmaktadır. Bu olaylara $A_1, A_2, \ldots, A_h$ ve $B_1, B_2, \ldots, B_k$ diyelim. A_i olayları da, B_j olayları gibi bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcıdır. Ancak, herhengi bir A_i olayı, B_j olayı ile birlikte gerçekleşebilir, böylece $A_i \cap B_j$ arakesiti de gerçekleşebilir. Bu arakesitler, rassal denemenin temel sonuçları olarak algılanabilir. Bu biçimde birlikte ele alınan iki küme olaya çoğunlukla *iki değişkenli olay*, olasılıklara da **iki değişkenli olasılık** denmektedir. Bu çerçeve Çizelge 3.1'de gösterilmiştir. Bu $A_i \cap B_j$ olaylarının hepsine olasılıklar verilebilirse, rassal denemenin bütün olasılık yapısı bilinir ve ilgilenilen öteki olasılıklar hesaplanabilir.

ÇİZELGE 3.1 İki değişkenli olayların temel sonuçları

	B_1	B_2	...	B_k
A_1	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$	...	$A_1 \cap B_k$
A_2	$A_2 \cap B_1$	$A_2 \cap B_2$	...	$A_2 \cap B_k$
.				
.				
.				
A_h	$A_h \cap B_1$	$A_h \cap B_2$	...	$A_h \cap B_k$

Bir örnek olmak üzere, olası bir reklâmcı, belli bir televizyon gösterisini izleyenlerin sayısının ne olacağı kadar, bu seyircinin ilgili kimi özelliklerini de bilmek isteyebilir. Böylece aileler, belli bir diziyi düzenli ya da arasıra izlemeleri yahut hiç izlememelerine göre (A sınıflamasına karşılık gelir) ve düşük, orta ya da yüksek gelirli olmalarına göre (B sınıflamasına karşılık gelir) sınıflanabilirler. Bu durumda, $h = 3$, $k = 3$ olduğundan, dokuz çapraz sınıflama Çizelge 3.1'deki gibi yazılabilir. Bu anakütlenin dokuz farklı öbeğe ayrılmasını görmenin bir başka yolu, Çizim 3.12'deki gibi bir *ağaç çizimi* kullanmaktır. Sol yanda bütün aileler anakütlesiyle başlayan, gösterinin izlendiği sıklıklara uygun üç dallanma vardır. Bu dalların her biri üç gelir düzeyine karşılık gelen üç altdallanmayla sürer. Dolayısıyla her biri bir izleme-gelir arakesitiyle ilişkili dokuz altdal vardır.

ÇİZİM 3.12 Televizyon izleme-gelir örneğinde olayların ağaç çizimi



ÇİZELGE 3.2 Televizyon izleme-gelir örneğinin olasılıkları

İZLEME SIKLIĞI	GELİR			TOPLAMLAR
	YÜKSEK	ORTA	DÜŞÜK	
Düzenli	0.04	0.13	0.04	0.21
Arasıra	0.10	0.11	0.06	0.27
Hiç	0.13	0.17	0.22	0.52
Toplamlar	0.27	0.41	0.32	1.00

İlk adım olarak olay arakesitlerinin olasılıkları gereklidir. Televizyon izleme örneğinin alan araştırmalarından elde edilen değerleri Çizelge 3.2'de verilmiştir. Sözgelimi, araştırmadaki ailelerin %10'unun yüksek gelirli olup diziyi arasıra izledikleri bulunmuştur. Araştırma birimlerinin oranlarını bu yolla olasılıklara eşitlerken, olasılığın göreli sıklık kavramını üstü örtük bir biçimde kullanıyor, araştırmanın, oranları olasılıklara yaklaşık eşitleyebileceğimiz kadar büyük olduğunu varsayıyoruz. Bu esasa göre, anakütleden rassal seçilen bir ailenin yüksek gelirli ve diziyi arasıra seyrediyor olma olasılığı 0.10'dur, yani

$$P(\text{Arasıra seyreder} \cap \text{Yüksek gelirli}) = 0.10\text{'dur.}$$

Tanım

İki değişkenli olasılıklar bağlamında, $P(A_i \cap B_j)$ arakesitlerinin olasılıklarına **ortak olasılıklar**, $P(A_i)$ ya da $P(B_j)$ tekil olay olasılıklarına da **kenar olasılıkları** denir.

Ortak olasılıklar veriyken, kenar olasılıklarını aradığımızı düşünelim. İlginin A_i olayı üzerinde toplandığı Çizelge 3.1'deki genel çerçeveyi alalım. Burada A_i olayı, $A_i \cap B_1, A_i \cap B_2, \ldots, A_i \cap B_k$ bağdaşmaz olaylarının birleşimidir. [Bu bulgu, Altbölüm 3.2'de (iii) bulgusu diye biçimsel olarak doğrulanmıştır.] Bu durumda, [Altbölüm 3.4'te (iii) bulgusu olarak saptanan] bağdaşmaz olayların toplama kuralının eklenmesiyle, A_i olayının olasılığı, A_i olayını içeren arakesitlerin olasılıklarının toplamıdır, yani şöyledir:

$$P(A_i) = P(A_i \cap B_1) + P(A_i \cap B_2) + \cdots + P(A_i \cap B_k)$$

Öyleyse, arakesit olasılıkları çapraz çizelgelendiğinde, A_i için tekil olay olasılıkları satır toplamlarından başka bir şey değildir. Benzeri bir akıl yürütmeyle, B_j için olasılıklar da sütun toplamlarıdır.

Televizyon izleme-gelir örneğinde, rassal seçilmiş bir kimsenin gösteriyi arasıra izliyor olma olasılığı şöyledir:

$$P(\text{Arasıra izler}) = P(\text{Arasıra izler} \cap \text{Yüksek gelir}) + P(\text{Arasıra izler} \cap \text{Orta gelir}) + P(\text{Arasıra izler} \cap \text{Düşük gelir}) = 0.10 + 0.11 + 0.06 = 0.27$$

Benzer biçimde,

$$P(\text{Düzenli izler}) = 0.21 \quad \text{ve} \quad P(\text{Hiç izlemez}) = 0.52$$

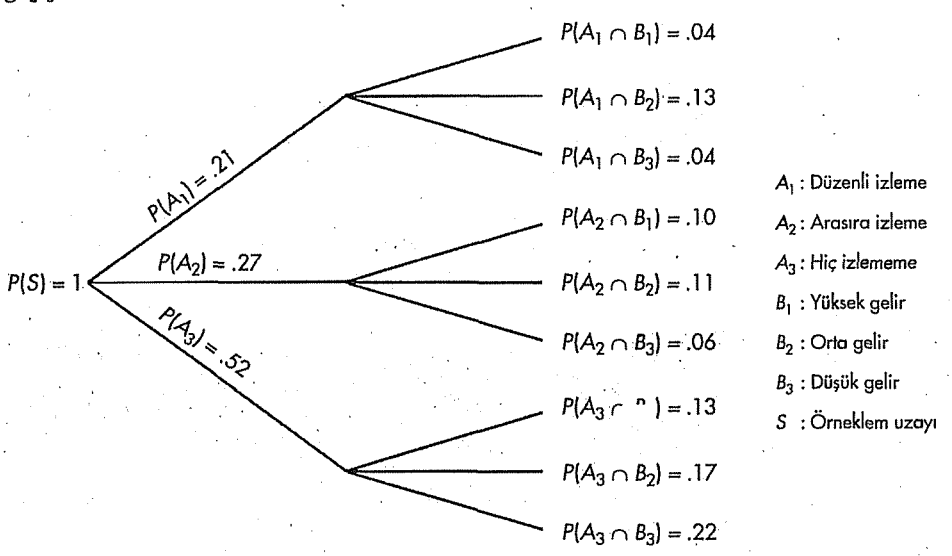
ve

$$P(\text{Yüksek gelir}) = 0.27 \quad P(\text{Orta gelir}) = 0.41$$
$$P(\text{Düşük gelir}) = 0.32$$

olur.

Kenar olasılıkları da, Çizim 3.13'teki gibi, doğrudan ağaç çizimlerinden bulunabilir. Bu çizimdeki dallar ile altdallar Çizim 3.12'dekiyle aynı olaylardır. Çizimin sol yanından başlarsak, ortak olasılıkları dokuz altdal üzerine hemen yerleştirebiliriz. Üç televizyon izleme olayının her birinin kenar olasılıkları, ilgili altdalların olasılıkları toplanarak, ana dallar üzerine yazılabilir. İlgilenilen özellik sayısı ikiden çoksa, bu yaklaşım özellikle yararlıdır. Sözgelimi, reklâmcı, hanehalkı reisinin yaşıyla ya da ailede çocuk olup olmadığıyla da ilgilenebilir.

ÇİZİM 3.13 Televizyon izleme-gelir örneği için ortak olasılıklarla kenar olasılıklarını gösteren ağaç çizimi



$A_1, A_2, \ldots, A_h$ bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olaylar olduklarından, kenar olasılıkları toplamı 1 eder. Aynı şey $B_1, B_2, \ldots, B_k$ olayları için de doğrudur. Televizyon izleme-gelir örneğinde bu durum, satır ve sütun toplamlarının 1 ettiği Çizelge 3.2'de ve ana dal üzerindeki olasılıkların toplamının yine 1'e eşit olduğu Çizim 3.13'teki ağaç çiziminde gösterilmiştir.

Çoğu uygulamada koşullu olasılıklar, kenar olasılıklarından daha çok ilgi çeker. Sözgelimi bir reklâmcı, bir gösterinin toplam izleyici sayısından çok, belli bir malı almakta olan bir ailenin o sırada izliyor olma şansıyla ilgilenir. Koşullu olasılıklar, Altbölüm 3.6'da verilen tanımın doğrudan uygulamaya konmasıyla bulunabilir. Bu durumda, B_j veriyken A_i'nin olasılığı herhangi bir A_i ve B_j olay çifti için şöyledir:

$$P(A_i \mid B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

Benzer biçimde şu da yazılabilir:

$$P(B_i \mid A_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_j)}$$

Ortak olasılıklarla kenar olasılıkları bir kez bulunduktan sonra koşullu olasılıklar elde edilebilir. Sözgelimi, rassal seçilmiş bir ailenin gelirinin orta düzeyde olduğu veriyken gösteriyi arasıra izliyor olma olasılığı şudur:

$$P(\text{Arasıra izleme} \mid \text{Orta gelir}) = \frac{P(\text{Arasıra izleme} \cap \text{Orta gelir})}{P(\text{Orta gelir})}$$

$$= \frac{0.11}{0.41} = 0.27$$

Gelir düzeyleri veriyken izleme sıklığının öteki koşullu olasılıkları da aynı yolla bulunabilir ve Çizelge 3.3'te gösterilmiştir.

İzleme sıklıkları veriyken gelir düzeylerinin koşullu olasılıkları da bulunabilir. Sözgelimi, rassal seçilen bir ailenin gösteriyi arasıra izlediği veriyken gelir düzeyinin orta olması olasılığı şudur:

ÇİZELGE 3.3 Gelir düzeyleri veriyken izleme sıklıklarının koşullu olasılıkları

İZLEME SIKLIĞI	GELİR		
	YÜKSEK	ORTA	DÜŞÜK
Düzenli	0.15	0.32	0.12
Arasıra	0.37	0.27	0.19
Hiç	0.48	0.41	0.69

ÇİZELGE 3.4 İzleme sıklıkları veriyken gelir düzeylerinin koşullu olasılıkları

İZLEME SIKLIĞI	GELİR		
	YÜKSEK	ORTA	DÜŞÜK
Düzenli	0.19	0.62	0.19
Arasıra	0.37	0.41	0.22
Hiç	0.25	0.33	0.42

$$P(\text{Orta gelir} \mid \text{Arasıra izleme}) = \frac{P(\text{Arasıra izleme} \cap \text{Orta gelir})}{P(\text{Arasıra izleme})}$$

$$= \frac{0.11}{0.27} = 0.41$$

İzleme sıklıkları veriyken gelir düzeylerinin koşullu olasılıkları Çizelge 3.4'te gösterilmiştir.

İki olayın bağımsız olup olmadıklarına da bakabiliriz. Genel olarak, A_i ve B_j gibi iki olay, ancak ve ancak ortak olasılıkları kenar olasılıklarının çarpımına eşitse, yani

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$$

ise bağımsız olur. Örneğimizde, "Arasıra izleme" ve "Yüksek gelir" olayları için Çizelge 3.2'de şunları görürüz:

$$P(\text{Arasıra izleme} \cap \text{Yüksek gelir}) = 0.10$$

$$P(\text{Arasıra izleme}) = 0.27 \qquad P(\text{Yüksek gelir}) = 0.27$$

Kenar olasılıklarının çarpımı 0.0759'dur, bu da ortak olasılık olan 0.10'dan farklıdır. Demek ki iki olay istatistik bakımından bağımsız değildir.

Her bir A_i olayının, her bir B_j olayından bağımsız olması özellikle ilginç bir durumdur. Bu durumda iki *özellik* birbirinden **bağımsızdır** denir. Burada izleme sıklığı ile gelirin bağımsız *olmadığını* az önce saptadık.

Tanım

Her biri, sırasıyla $A_1, A_2, \ldots, A_h$ ve $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ile gösterilen bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olaylara ayrıştırılabilen bir çift özellik A ve B olsun. Eğer her bir A_i olayı her bir B_j olayından bağımsız ise A ve B özellikleri **bağımsız** olur.

Çoğu uygulamada, ortak olasılıklar tam ve kesin olarak bilinemez. Elde anakütleden çekilmiş ve ortak olasılıkların tahmin edilebilmesini sağlayan bir örneklem varken, bir çift özelliğin bağımsız olup olmadığı, örneklem bulgularına dayanılarak sınanacaksa, bu durum bir hayli önemli bir soruna yol açar. Böyle bir sınamayı yapmak için gerekli işlemler Bölüm 11'de açıklanacaktır.

3.8 BAYES TEOREMİ

Bu altbölümde, olasılık değerlemelerinin, ek bilgiler geldikçe değiştirilme düzeneği açıklanacaktır. Örnek vermek için diyelim ki, bir yatırımcı belli bir pay senediyle ilgilenmekte olup, buna yapılacak bir yatırımın kârlılığının gerçekleşebilirliği konusunda bir kanıya varmıştır. Daha sonra uzman bir analistin bu pay senedini önerdiğini öğrenirse, uzmanın yeteneğine olan güvenine göre, ilk kanısını değiştirebilir.

A ile B olasılıkları sırasıyla $P(A)$ ile $P(B)$ olan iki olay olsun. Olasılık çarpım kuralına göre

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \tag{3.8.1}$$

ve

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \tag{3.8.2}$$

yazılabilir. Eş. (3.8.1) ile (3.8.2)'nin sol yanları aynı olduğuna göre sağ yanları da aynı olmalıdır. Bu durumda

$$P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B)$$

yazabiliriz. Bu eşitliği, sıfır olmadığım varsaydığımız $P(A)$ olasılığına bölersek Bayes teoremi elde edilir.[4]

Bayes Teoremi

A ile B iki olay olsun. O zaman şu yazılabilir:

[4] Bu teoreme, onu bulan İngiliz dinadamı Thomas Bayes'in (1702-1761) adı verilmiştir.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} \qquad (3.8.3)$$

Bayes teoreminin en ilginç yorumu öznel olasılıklar cinsinden yapılır. Bir kimsenin B olayıyla ilgilendiğini ve B'nin gerçekleşmesi konusunda öznel bir olasılık görüşü oluşturduğunu düşünelim. Bu bağlamda $P(B)$'ye **önsel** olasılık denir. Bu kimse daha sonra, A olayının gerçekleştiği gibi, ek bir bilgi öğrenirse, bu onun, B'nin gerçekleşebilirliği konusundaki görüşünü değiştirmesine neden olabilir. A'nın gerçekleştiği bilindiğine göre B için geçerli olasılık artık, A verilmişken B'nin koşullu olasılığıdır ve buna **ardıl** olasılık adı verilir. Bu açıdan bakıldığında Bayes teoremi, A olayının gerçekleştiği yolundaki ek bilginin gelmesiyle, önsel bir olasılığın ardıl olasılık olarak güncelleştirilmesi düzeneği olarak düşünülebilir. Teoreme göre bu güncelleştirme işlemi, önsel olasılığın $P(A \mid B)/P(A)$ ile çarpılmasıyla yapılır.

İnsanların öznel olasılık değerlemeleri oluşturup sonradan değiştirmeleri her gün yapılan işlerdendir. Bir mali denetmenin işinin önemli bir yanı, hesap bakiyelerinin doğru olup olmadığını belirlemektir. Denetmen belli bir hesabı incelemeden önce, bu hesapta hata bulunması olasılığı konusunda, önceki deneyiminin ışığında, bir görüş oluşturmuş olacaktır. Ancak bakiye, son birkaç yılın rakamlarına göre olması gerekenden önemli ölçüde farklı çıkarsa, hata olasılığının daha yüksek olacağı duygusuna kapılarak hesabı özel bir dikkatle inceleyecektir. Burada önsel olasılık, ek bilginin ışığında güncelleştirilmiş olmaktadır.

ÖRNEK 3.25

Bir şirketin hesap bakiyelerinin eski kayıtlarını inceleyen bir denetmen, hesapların %15'inin hata içerdiğini bulmuştur. Bu hatalı bakiyelerin %60'ı, eski rakamlara göre olağandışı değerler olarak görülmektedir. Bütün hesap bakiyelerinin %20'si olağandışı değerlerdir. Belli bir bakiye bu bağlamda olağandışı görülürse, hatalı çıkma olsılığı kaçtır?

İlgilenilen olaylara "Hata" ve "Olağandışı değer" adını verirsek şunları yazabiliriz:

$$P(\text{Hata}) = 0.15 \qquad P(\text{Olağandışı değer}) = 0.20$$

$$P(\text{Olağandışı değer} \mid \text{Hata}) = 0.60$$

Bayes teoremini kullanarak şunu elde ederiz:

$$P(\text{Hata} \mid \text{Olağandışı değer}) = \frac{P(\text{Olağandışı değer} \mid \text{Hata})P(\text{Hata})}{P(\text{Olağandışı değer})}$$

$$= \frac{(0.60)(0.15)}{(0.20)} = 0.45$$

Demek ki, hesap bakiyesinin olağandışı görünmesi veriyken, önsel 0.15 olan hatalı çıkma olasılığı ardıl 0.45'e çevrilmiştir.

Bayes teoremi çoğu zaman farklı ama eşdeğer bir biçimde dile getirilir. $E_1, E_2, \ldots, E_K$ olayları, K tane bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olay, A da başka bir olay olsun. Bir i için, A veriyken E_i'nin koşullu olasılığını bulmak isteyebiliriz. Bu da, Eş. (3.83)'teki B yerine E_i konarak Bayes teoremiyle doğrudan bulunabilir. Ancak, o eşitliğin sağ yanı, E_j veriyken A'nın koşullu olasılıkları ve E_j'nin tekil olasılıkları cinsinden yazılabilir. Altbölüm 3.2'de $E_1 \cap A, E_2 \cap A, \ldots, E_K \cap A$ olaylarının bağdaşmaz olaylar olduklarını, birleşimlerinin de A olduğunu görmüştük. Buradan A'nın olasılığının aşağıdaki gibi olduğunu görürüz [Altbölüm 3.4'te (iii) bulgusuna bkz.]:

$$P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + \cdots + P(E_K \cap A) \qquad (3.8.4)$$

Ayrıca, olasılıkların çarpımı kuralını kullanıp

$$P(E_j \cap A) = P(A \mid E_j)P(E_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, K)$$

yazabilir, bunu Eş. (3.8.4)'te yerine koyup

$$P(A) = P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \cdots + P(A \mid E_K)P(E_K) \qquad (3.8.5)$$

elde edebiliriz. Son olarak B yerine E_i koyarak ve Eş. (3.8.3)'te $P(A)$ yerine Eş. (3.8.5)'in sağ yanım geçirerek Bayes teoremini yeniden yazabiliriz.

Bayes Teoremi (Almaşık Gösterim)

$E_1, E_2, \ldots, E_K$ olayları, K tane bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olay, A da başka bir olay olsun. A veriyken E_i'nin koşullu olasılığı şöyle gösterilebilir:

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \cdots + P(A \mid E_K)P(E_K)}$$

Bu teoremin yeniden bu biçimde gösterilmesinin üstünlüğü, içerdiği olasılıkların çoğu zaman doğrudan tam olarak gözlenebilen olasılıklar olmasıdır. Bölüm 19'da görüleceği gibi, bu bulgunun önemli bir uygulama alanı istatistikle karar vermedir.

ÖRNEK 3.26

Bir yayınevi bir muhasebe kitabı için, ilgili muhasebe dersini veren bütün öğretim üyelerinin %80'ine tanıtım malzemesi gönderiyor. Bunları alan öğretim üyelerinden %30'u, bunları almayanların ise %10'u bu kitabı okutmaya karar veriyor. Bu kitabı okutan bir öğretim üyesinin tanıtım malzemesini almış olma olasılığı kaçtır?

Bir öğretim üyesinin tanıtım malzemesini alması olayını "Aldı", bunun bütünleyicisi olan olayı da "Almadı" ile gösterelim. Bu durumda şunları yazabiliriz:

$$P(\text{Aldı}) = 0.80 \qquad P(\text{Almadı}) = 1 - 0.80 = 0.20$$

$$P(\text{Okuttu} \mid \text{Aldı}) = 0.30 \qquad P(\text{Okuttu} \mid \text{Almadı}) = 0.10$$

Bize gerekli olan, kitabın okutulması veriyken tanıtım malzemesinin alınmış olmasının koşullu olasılığıdır. Bayes teoremi gereği bu olasılık aşağıdaki gibidir.

$$P(\text{Aldı} \mid \text{Okuttu}) = \frac{P(\text{Okuttu} \mid \text{Aldı})P(\text{Aldı})}{P(\text{Okuttu} \mid \text{Aldı})P(\text{Aldı}) + P(\text{Okuttu} \mid \text{Almadı})P(\text{Almadı})}$$

$$= \frac{(0.30(0.80)}{(0.30(0.80) + (0.10(0.20)} = 0.923$$

ÖRNEK 3.27

Bir borsa analisti çok sayıda şirketin pay senetlerinin geleceğini değerlendirmiştir. Ertesi yıl bu pay senetlerinin başarımı incelenmiş, %25'inin pazar ortalamasının çok üstünde, %25'inin çok altında, %50'sinin de ortalama kadar başarım gösterdikleri anlaşılmıştır. Pazarın çok üstünde başarılı olan pay senetlerinden yüzde kırkı, pazar kadar başarılı olanlardan %20'si ve pazarın çok altında kalanlardan %10'u analist tarafından "alınmaya değer" bulunanlardandır. Analist tarafından "alınmaya değer" bulunan bir pay senedinin pazar ortalamasının çok üstünde başarı gösterme olasılığı kaçtır?

Aşağıdaki olay tanımlarını yapalım:

E_1: Pay senedi pazar ortalamasının çok üstünde başarı gösteriyor.
E_2: Pay senedi pazar ortalamasıyla aynı başarıyı gösteriyor.
E_3: Pay senedi pazar ortalamasının çok altında başarı gösteriyor.
A: Pay senedi analist tarafından "alınmaya değer" bulunuyor.

Örneğimizde verilenlerden

$$P(E_1) = 0.25 \qquad P(E_2) = 0.50 \qquad P(E_3) = 0.25$$

olasılıkları ile

$$P(A \mid E_1) = 0.4 \qquad P(A \mid E_2) = 0.2 \qquad P(A \mid E_3) = 0.1$$

koşullu olasılıklarını yazabiliriz.

Aranan, bir pay senedinin analist tarafından "alınmaya değer" bulunması veriyken, pazar ortalamasının üstünde başarılı olmasının olasılığıdır. Bu da Bayes teoremiyle aşağıdaki gibi bulunan $P(E_1 \mid A)$ koşullu olasılığıdır:

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \cdots + P(A \mid E_K)P(E_K)}$$

$$= \frac{(0.4)(0.25)}{(0.4)(0.25) + 0.2)(0.50) + (0.1)(0.25)} = 0.444$$

ALIŞTIRMALAR

34. Bir süpermarket için yapılan araştırmada müşteriler bir yandan sık gelenler ve arasıra gelenler, öte yandan markasız ürünlerden sık sık, bazen alanlar ya da hiç almayanlar diye sınıflandırılmıştır. Aşağıdaki çizelgede araştırma konusu müşterilerin altı gözlü ortak sınıflandırmadaki oranları verilmiştir.

GELİŞ SIKLIĞI	MARKASIZ ÜRÜN ALIŞI		
	SIK SIK	BAZEN	HİÇ
Sık	0.12	0.48	0.19
Arasıra	0.07	0.06	0.08

(a) Bir müşterinin hem sık gelen, hem de markasız ürünleri sık sık alan biri olması olasılığı kaçtır?
(b) Bir müşterinin markasız üünleri hiç almamakla birlikte markete sık gelme olasılığı kaçtır?
(c) "Markasız ürünleri hiç almama" ve "Markete sık gelme" olayları bağımsız mıdır?
(d) Markete arasıra gelen birinin markasız ürünleri sık sık alma olasılığı kaçtır?
(e) "Markasız ürünleri sık sık alma" ve "Markete arasıra gelme" olayları bağımsız mıdır?
(f) Bir müşterının markete sık gelme olasılığı kaçtır?
(g) Bir müşterinin markasız ürünleri hiç almama olasılığı kaçtır?
(h) Bir müşterinin markete sık gelme ya da markasız ürünleri hiç almama yahut her iki duruma birden uyma olasılığı kaçtır?

35. Bir danışma kuruluşu şirketlerin gelecek yıldaki kazançlarını olağanüstü düşük, olağanüstü yüksek ya da normal olarak tahmin etmektedir. Bir borsacı bu tahminleri satın almayı sürdürüp sürdürmemeye karar vermeden önce eski tahminleri gerçekleşmelerle karşılaştırmıştır. Aşağıdaki çizelge dokuz gözlü ortak sınıflandırmayı göstermektedir.

SONUÇ	TAHMİN		
	OLAĞANÜSTÜ YÜKSEK	NORMAL	OLAĞANÜSTÜ DÜŞÜK
Olağanüstü yüksek	0.23	0.12	0.03
Normal	0.06	0.22	0.08
Olağanüstü düşük	0.01	0.06	0.19

(a) Tahminlerin ne kadarı olağanüstü yüksek kazanç göstermektedir?
(b) Sonuçların ne kadarı olağanüstü yüksek kazanç göstermektedir?
(c) Bir şirket olağanüstü yüksek kazanç sağlayacakken danışma kuruluşunun bunu doğru tahmin etme olasılığı kaçtır?
(d) Danışma kuruluşu bir şirketin olağanüstü yüksek kazanç sağlayacağını tahmin etmişken bunun gerçekleşme olasılığı kaçtır?
(e) Bir şirketin olağanüstü yüksek kazanç sağlaması tahmin edilmişken olağanüstü düşük kazanç sağlama olasılığı kaçtır?

36. Yerel bir gazetenin okurlarına, bir yandan gazetenin ekonomi sayfasını düzenli ya da arasıra mı okudukları yoksa hiç mi okumadıkları, öte yandan son bir yıl içinde pay senedi (ya da yatırım fonu payı) alım satımı yapıp yapmadıkları sorulmuştur. Aşağıda verilen çizelge okurların altı gözlü sınıflamadaki oranlarını göstermektedir.

PAY SENEDİ ALIM SATIMI	EKONOMİ SAYFASINI OKUMA		
	Düzenli	Arasıra	Hiç
Evet	0.18	0.10	0.04
Hayır	0.16	0.31	0.21

(a) Rassal seçilen bir okurun ekonomi sayfasını hiç okumamış olmasının olasılığı kaçtır?
(b) Rassal seçilen bir okurun pay senedi alım satımı yapmış olmasının olasılığı kaçtır?
(c) Ekonomi sayfasını hiç okumamış bir okurun son bir yıl içinde pay senedi alım satımı yapmış olmasının olasılığı kaçtır?
(d) Son bir yıl içinde pay senedi alım satımı yapmış bir okurun ekonomi sayfasını hiç okumamış olmasının olasılığı kaçtır?
(e) Ekonomi sayfasını düzenli okumayan bir okurun son bir yıl içinde pay senedi alım satımı yapmış olmasının olasılığı kaçtır?

37. Bir şirket, üç yansanayiciden düzenli olarak hassas bir parça satın almaktadır. Alınan toplam parçalar içindeki kusurlu-kusursuz oranları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

PARÇA	YANSANAYİCİ		
	A	B	C
Kusursuz	0.27	0.30	0.33
Kusurlu	0.02	0.05	0.03

(a) Gelen bütün parçalar içinden biri rassal seçilirse, bunun yansanayici B'den gelmiş olma olasılığı kaçtır?
(b) Yansanayici B'den gelen bir parçanın kusurlu çıkma olasılığı kaçtır?
(c) Rassal olarak seçilmiş bir parça kusurluysa, bu parçanın yansayici B'den gelme olasılığı kaçtır?
(d) Bir parçanın kalitesi geldiği yansanyiciden bağımsız mıdır?
(e) Kalite bakımından bu üç yansanayiciden hangisi en güvenilirdir?

38. Bir işletme istatistiği sınıfındaki öğrenciler arasında yapılan bir araştırmada, bir yandan bu dersten kaç not bekledikleri, öte yandan öğretim üyesinin çözmelerini istediği sorular dışında ek sorular çözüp çözmedikleri sorulmuştur. Aşağıdaki çizelge sekiz gözlü ortak sınıflamadaki öğrenci oranlarını göstermektedir.

EK SORU	BEKLENEN NOT			
	A	B	C	C 'DEN DÜŞÜK
Evet	0.12	0.06	0.12	0.02
Hayır	0.13	0.21	0.26	0.08

(a) Bu sınıftan rassal seçilmiş bir öğrencinin ek soru çözmüş olma olasılığı kaçtır?
(b) Bu sınıftan rassal seçilmiş bir öğrencinin A notu bekleme olasılığı kaçtır?
(c) Rassal seçilmiş bir öğrenci ek soru çözmüşse, bu öğrencinin A notu bekleme olasılığı kaçtır?
(d) Rassal seçilmiş bir öğrenci A notu bekliyorsa, bu öğrencinin ek soru çözmüş olma olasılığı kaçtır?
(e) Rassal seçilmiş bir öğrenci ek soru çözmüşse, bu öğrencinin B'den düşük not bekleme olasılığı kaçtır?
(f) Ek soru çözme ile beklenen not istatistik bakımından bağımsız mıdır?

Aşağıdaki çizelge bilgisayar satış elemanlarının medeni durumlarına ve bir yıl boyunca işten ayrılıp ayrılmadıklarına göre sınıflandırılmış oranlarını göstermektedir.[5]

MEDENİ DURUM	AYRILMADI	AYRILDI
Evli	0.64	0.13
Bekâr	0.17	0.06

(a) Rassal seçilmiş bir satış elemanının evli olma olasılığı kaçtır?
(b) Rassal seçilmiş bir bilgisayar satış elemanının son bir yıl içinde işinden ayrılmış olma olasılığı kaçtır?
(c) Rassal seçilmiş bekâr bir satış elemanının son bir yıl içinde işinden ayrılmış olma olasılığı kaçtır?

[5] Bu tahminler şu kaynaktaki bilgilere dayanmaktadır: E. F. Fern, R. A. Avila, D. Grewal, "Salesforce turnover: Those who left and those who stayed," *Industrial Marketing Management, 18* (1989), 1-9.

(d) Rassal seçilmiş bir satış elemanı işinden ayrılmamışsa, bu elemanın evli olma olasılığı kaçtır?

40. Aşağıdaki çizelge büyük kentler dışında yaşayan yetişkinlerin gazete okuyup okumadıklarına ve son seçimde oy kullanıp kullanmadıklarına göre yapılan sınıflandırmalarındaki oranları göstermektedir.[6]

OY KULLANMA	GAZETE OKUYANLAR	GAZETE OKUMAYANLAR
Evet	0.63	0.13
Hayır	0.14	0.10

(a) Bu anakütleden rassal olarak seçilen bir yetişkinin oy kullanmış olmasının olasılığı kaçtır?

(b) Bu anakütleden rassal olarak seçilen bir yetişkinin gazete okuyor olmasının olasılığı kaçtır?

(c) Rassal olarak seçilen bir yetişkin gazete okumuyorsa, bunun oy kullanmamış olmasının olasılığı kaçtır?

41. Bir üniversite öğrenci kulübü, uyum sağlama toplantısına katılan yeni öğrencilere üyeliğe ilişkin tanıtım belgeleri dağıtmıştır. Bu belgeleri alanların %40'ı erkek, %60'ı kızdır. Sonradan öğrenildiğine göre belgeleri alan erkeklerin %7'si, kızların %9'u kulübe üye olmuştur.

(a) Rassal seçilmiş yeni bir öğrenci üyelik belgelerini almışsa, kulübe üye olma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilen yeni bir öğrenci üyelik belgelerini aldıktan sonra kulübe üye olmuşsa, bu öğrencinin kız olma olasılığı kaçtır?

42 Bir şirketin gelecek yıldaki kazançlarını kestirmeye çalışan bir analist, şirketin işlerinin faiz oranlarının düzeyine karşı duyarlı olduğu kanısındadır. Analist, gelecek yılın faiz oranı bu yılınkinden %1 ya da daha yüksek olursa, kazançlarda belirgin bir artış gerçekleşmesi olasılığının 0.1 olacağına inanmaktadır. Gelecek yılın faiz oranı bu yılınkinden %1 ya da daha fazla düşerse, kazançlarda belirgin bir artış olması olasılığının 0.8 olacağı tahmin edilmektedir. Son olarak, gelecek yılın faiz oranı bu yılınkinin artı-eksi %1 yakınında kalırsa, kazançlarda belirgin bir artış olasılığı 0.5 olarak belirtilmektedir. Analist, gelecek yılın faiz oranının bu yılınkinden %1 ya da daha yüksek olma olasılığını 0.25, gelecek yılın faiz oranının bu yılınkinden %1 ya da daha düşük olma olasılığını 0.15 olarak tahmin etmektedir.

(a) Hem faiz oranının %1 ya da daha çok artması, hem de kazançlarda belirgin bir artış sağlanması olasılığı kaçtır?

(b) Bu şirketin kazançlarında belirgin bir artış sağlanması olasılığı kaçtır?

(c) Şirket kazançlarında belirgin bir artış görülmüşken, faiz oranının geçen yıla göre %1 ya da fazla düşmüş olma olasılığı kaçtır?

43. Bir şirketteki mavi yakalı işçilerin yüzde kırkikisi sağlık sisteminin değiştirilmesinden yana, %22'si ise çalışma saatleri için önerilen bir değişiklikten yanadır. Sağlık

---

[6] Bu tahminler şu kaynaktaki bilgilere dayanmaktadır: J. R. Lynn, "Newspaper ad impact in nonmetropolitan markets," *Journal of Advertising Research, 21*, no. 4 (1981), 13-19.

sistemindeki değişiklikten yana olanların yüzde otuzdördü iş saatlerindeki değişikliği de desteklemektedir.

(a) Rassal seçilmiş bir mavi yakalı işçinin hem sağlık sistemindeki, hem iş saatlerindeki değişiklikten yana olma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilmiş bir mavi yakalı işçinin iki değişiklikten en az birini desteklemesi olasılığı kaçtır?

(c) İş saatlerindeki değişikliği destekleyen bir mavi yakalı işçinin sağlık sistemindeki değişikliği de desteklemesi olasılığı kaçtır?

44. Bir üniversite birinci sınıfı öğrencilerinin yıl sonu notları incelenmiştir. Üniversitenin ilk yılında ilk dörttebire giren öğrencilerin yüzde yetmişi, ortadaki yüzde elli içinde yer alanların %50'si, alt dörttebire girenlerin ise %20'si liseden ilk %10 içinde mezun olmuştur.

(a) Rassal seçilmiş bir birinci sınıf öğrencisinin liseden ilk %10 içinde mezun olmuş olma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilmiş bir birinci sınıf öğrencisi liseden ilk %10 içinde mezun olmuş biriyse, bu öğrencinin üniversitenin ilk yılında ilk dörttebire girme olasılığı kaçtır?

(c) Rassal seçilmiş bir birinci sınıf öğrencisi liseden ilk %10 içinde mezun olmamış biriyse, üniversitenin birinci sınıfında ilk dörttebire girememe olasılığı kaçtır?

45. Okulöncesi çocuklarına yönelik kitaplar pazara sürülmeden önce, bir küme okulöncesi çocuğun tepkileri alınır. Bu tepkiler "beğendi", "kayıtsız", "beğenmedi" biçiminde sınıflanır. Daha sonra kitap satışları, pazar ölçütlerine göre, "yüksek", "orta", "düşük" diye sınıflanır. Geçmişte 1,000 kitap böyle değerlendirilmiştir. Aşağıdaki çizelge, çocukların tepkileri ile kitapların pazar başarımlarını göstermektedir.

SATIŞLAR	TEPKİLER		
	BEĞENDİ	KAYITSIZ	BEĞENMEDİ
Yüksek	173	101	61
Orta	88	211	70
Düşük	42	113	141

(a) Kitap beğenilmişse, satışların yüksek olma olasılığı kaçtır?

(b) Kitap beğenilmemişse, satışların düşük olma olasılığı kaçtır?

(c) Kitaba tepki olumsuz değilse, satışların düşük olma olasılığı kaçtır?

(d) Satışlar düşükse, kitaba olumsuz tepki gösterilmemiş olması olasılığı kaçtır?

46. Bir üretici, onarlı kutularda çocuklar için şeker üretmektedir. Bu amaçla iki makine kullanılmaktadır. Büyük bir parti üretimden sonra bu makinelerden, toplam üretimin %40'ını yapan birinin, ürettiği şekerlerden %10 kadarının saflığını bozacak bir hatayla çalıştığı anlaşılmıştır. Tek bir kutudan bir şeker rassal olarak seçilip incelenmektedir. Bu şeker kusurlu çıkmazsa, bu şekerin alındığı kutunun hatalı makinede üretilme olasılığı kaçtır?

47. Bir öğrenci üniversitedeki derslerinin %70'inden hoşlanmakta, geri kalanını sıkıcı bulmaktadır. Bu öğrencinin, öğrencilerin öğretim üyelerini değerlendirdikleri belgelere ulaşma şansı vardır. Bunlara bakınca, kendisinin hoşlandığı derslerin %60'ı

ile sıkıcı bulduğu derslerin %25'ini veren öğretim üyeleri için, öğrencilerce hayli olumlu değerlendirmeler yapıldığını görmüştür. Bir sonraki yarıyıl bu öğrenci, öğrencilerden hayli olumlu değerlendirmeler alan öğretim üyelerince verilen üç dersi almaya karar vermiştir. Bu öğrencinin bu üç derse göstereceği tepkinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayalım.

(a) Bu öğrencinin her üç dersten de hoşlanma olasılığı kaçtır?

(b) Bu öğrencinin derslerden hiç olmazsa birinden hoşlanması olasılığı kaçtır?

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

48. Henüz olasılık okumamış zeki bir arkadaşınız olduğunu varsayalım. Bu arkadaşınıza bağdaşmaz olaylar ile bağımsız olaylar arasındaki ayırımı nasıl açıklarsınız? Yanıtınızı uygun örneklerle süsleyin.

49. Aşağıdaki söylemlerin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu gerekçenizle belirtin:

(a) İki olayın birleşiminin bütünleyicisi, bu olayların bütünleyicilerinin arakesitidir.

(b) Bütünü kapsayıcı olayların olasılıkları toplamı 1'e eşittir.

(c) n nesneden seçilmiş x nesnenin kombinasyonlarının sayısı, $1 \le x \le (n-1)$ iken, n nesneden seçilmiş $(n-1)$ nesnenin kombinasyonları sayısına eşittir.

(d) A ile B iki olay olsun. Eğer A'nın olasılığı B'nin olasılığına eşitse, B veriyken A'nın olasılığı ile A veriyken B'nin olasılığı aynıdır.

(e) Bir olay ile onun tamamlayıcısının gerçekleşebilirlikleri aynı ise, o olayın olasılığı 0.5 olmalıdır.

(f) A ile B bağımsızsa, $\overline{A}$ ile $\overline{B}$ de bağımsız olmalıdır.

(g) A ile B bağdaşmaz olaylarsa, $\overline{A}$ ile $\overline{B}$ de bağdaşmaz olaylar olmalıdır.

50 Koşullu olasılığın anlamını dikkatle açıklayın. Bir olayın gerçekleşebilme şansından söz ederken bu kavram neden önemlidir?

51 "Önsel bir olasılıktan ardıl bir olasılığa geçişi sağladığı için Bayes teoremi önemlidir." Bu söylemi, henüz olasılık okumamış bir öğrenci arkadaşınızın çok iyi anlayacağı biçimde açıklayın.

52 Aşağıdaki söylemlerin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu gerekçenizle belirtin:

(a) İki olayın birleşiminin olasılığı, arakesitinin olasılığından küçük olamaz.

(b) İki olayın birleşiminin olasılığı, tekil olasılıklarının toplamından büyük olamaz.

(c) İki olayın arakesitinin olasılığı, bunlardan hiçbirinin tekil olasılığından büyük olamaz.

(d) Bir olay ile onun tamamlayıcısı bağdaşmaz olaylardır.

(e) Bir çift olayın tekil olasılıkları toplamı 1'den büyük olamaz.

(f) Bir çift olay bağdaşmaz olaylarsa, aynı zamanda bütünü kapsayıcı olmalıdır.

(g) Bir çift olay bütünü kapsayıcıysa, aynı zamanda bağdaşmaz olaylar olmalıdır.

53 Ortak olasılık, kenar olasılığı ve koşullu olasılığın birbirinden ayırımını gösterin. Ayırımı açıkça gösterebilmek için örnekler verin.

54 Aşağıdaki savların doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu gerekçenizle belirtin:

(a) B veriyken A'nın koşullu olasılığı, en az A'nın olasılığı kadar olmalıdır.
(b) Bir olay tamamlayıcısından bağımsız olmalıdır.
(c) B veriyken A'nın olasılığı, en az A ile B'nin arakesitinin olasılığı kadar olmalıdır.
(d) İki olayın arakesitinin olasılığı, tekil olasılıklarının çarpımından büyük olamaz.
(e) Bir olayın ardıl olasılığı en az önsel olasılığı kadar olmalıdır.

55. A ile B'nin birleşiminin olasılığının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)[1 - P(A \mid B)]$$

56. Bir sigorta şirketi, araba kazalarının %30'unun kısmen hava koşullarından kaynaklandığını, %20'sinin de yaralanmalara yol açtığını tahmin etmiştir. Yaralanmalara yol açan kazaların %40'ı da kısmen hava koşullarından kaynaklanmıştır.
(a) Rassal seçilmiş bir kazanın hem kısmen hava koşullarından doğmuş, hem de yaralanmaya yol açmış olma olasılığı kaçtır?
(b) "Kısmen hava koşullarından doğmuş" ve "yaralanmaya yol açmış" olaylar bağımsız mıdır?
(c) Rassal seçilmiş bir kaza kısmen hava koşullarından doğmuşsa, bunun yaralanmaya yol açmış olma olasılığı kaçtır?
(d) Rassal seçilmiş bir kazanın hem kısmen hava koşullarından doğmamış, hem de yaralanmaya yol açmamış olma olasılığı kaçtır?

57. Bir şirket acil olarak iki değişik kalınlıkta kablo ısmarlıyor. Her iki kalınlıktaki parti hazır olur olmaz hemen gönderilecektir. Geçmiş deneyime göre bu partilerden en az birinin bir hafta içinde gelme olasılığı 0.8'dir. Eğer ince kablo bir hafta içinde gelirse, kalın kablonun da bir hafta içinde gelme olasılığı 0.4 olarak tahmin edilmektedir. Ayrıca, eğer kalın kablo bir hafta içinde gelirse, incenin de bir hafta içinde gelme olasılığı 0.6 olarak tahmin edilmektedir.
(a) Kalın kablonun bir hafta içinde gelme olasılığı kaçtır?
(b) İnce kablonun bir hafta içinde gelme olasılığı kaçtır?
(c) Her iki partinin de bir hafta içinde gelme olasılığı kaçtır?

58. Büyük bir üniversite yerleşkesinde öğrenciler arasında yapılan bir araştırmaya göre öğrencilerin %35'i yerleşke içindeki birahanelerde haftada en az bir kez içki içmektedir, %40'ının not ortalaması da B ya da daha yüksektir. Ayrıca yerleşke içinde içki içenlerin %30'unun not ortalaması B ya da daha yüksektir.
(a) Rassal seçilmiş bir öğrencinin hem yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içmesi, hem de not ortalamasının B ya da daha yüksek olması olasılığı kaçtır?
(b) Rassal seçilmiş bir öğrencinin not ortalaması B ya da daha yüksekse, yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor olma olasılığı kaçtır?
(c) Rassal seçilmiş bir öğrencinin "yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor" ve "not ortalaması B ya da daha yüksek" özelliklerinden hiç olmazsa birine uyması olasılığı kaçtır?
(d) Rassal seçilmiş bir öğrencinin not ortalaması B ya da daha yüksek değilse, yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor olmama olasılığı kaçtır?
(e) "Yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor" ve "not ortalaması B ya da daha yüksek" olayları bağımsız mıdır?
(f) "Yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor" ve "not ortalaması B ya da daha yüksek" olayları bağdaşmaz olaylar mıdır?

(g) "Yerleşke içinde haftada en az bir kez içki içiyor" ve "not ortalaması B ya da daha yüksek" olayları bütünü kapsayıcı mıdır?

59. Bir üniversite yerleşkesi içindeki bir aşevinde müşterilerin %35'inin sıcak yemek ısmarladığı, %50'sinin de öğrenci olduğu bulunmuştur. Ayrıca, öğrenci olan müşterilerin %25'i sıcak yemek ısmarlamaktadır.

(a) Rassal seçilmiş bir müşterinin hem öğrenci olması, hem de sıcak yemek ısmarlaması olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilmiş bir müşteri sıcak yemek ısmarladıysa, öğrenci olma olasılığı kaçtır?

(c) Rassal seçilmiş bir müşterinin hem öğrenci olmaması, hem de sıcak yemek ısmarlamaması olasılığı kaçtır?

(d) "Müşteri sıcak yemek ısmarlar" ile "müşteri öğrencidir" olayları bağımsız mıdır?

(e) "Müşteri sıcak yemek ısmarlar" ile "müşteri öğrencidir" olayları bağdaşmaz olaylar mıdır?

(f) "Müşteri sıcak yemek ısmarlar" ile "müşteri öğrencidir" olayları bütünü kapsayıcı mıdır?

60. Bir eyaletteki çiftliklerden %20'si 160 dönümden geniş, %60'ının sahibi 50 yaşından büyüktür. 160 dönümden büyük çiftliklerin %55'inin sahibi 50 yaşından büyüktür.

(a) Bu eyalette rassal seçilmiş bir çiftliğin hem 160 dönümden geniş, hem sahibinin 50 yaşından büyük olma olasılığı kaçtır?

(b) Bu eyaletteki bir çiftliğin ya 160 dönümden geniş ya sahibinin 50 yaşından büyük (ya da her ikisinin birden doğru) olması olasılığı kaçtır?

(c) Bu eyaletteki bir çiftliğin sahibi 50 yaşından büyükse, bu çiftliğin 160 dönümden geniş olma olasılığı kaçtır?

(d) Bu eyalette çiftlik genişliği ile çiftlik sahibinin yaşı istatistik bakımından bağımsız mıdır?

61. Büyük bir şirkette çalışanların %80'i erkek, %20'si kadındır. Erkeklerin %10'u lisansüstü, %30'u lisans, %60'ı lise eğitimi görmüştür. Kadınların %15'i lisansüstü, %40'ı lisans, %45'i lise eğitimi görmüştür.

(a) Rassal olarak seçilen bir kimsenin lise mezunu erkek olma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal olarak seçilen bir kimsenin lisansüstü eğitimi görmüş olma olasılığı kaçtır?

(c) Rassal olarak seçilen bir kimse lisansüstü eğitimliyse, erkek olma olasılığı kaçtır?

(d) Bu şirkette çalışanların cinsiyet ve eğitim düzeyi istatistik bakımından bağımsız mıdır?

(e) Rassal olarak seçilen bir kimse lisansüstü eğitimli değilse kadın olma olasılığı kaçtır?

62. Büyük bir şirkette ikramiye ödeme konusunda yeni bir plana ilişkin olarak çalışanlar arasında bir oylama yapılmış, gece çalışanların %65'i ile kadınların %40'ı planı desteklemiştir. Ayrıca çalışanların %50'si gececi, %20'si kadındır. Son olarak, gece çalışanların %20'si de kadındır.

(a) Rassal seçilen bir çalışanın planı destekleyen bir kadın olması olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilen bir çalışanın ya kadın olması ya planı desteklemesi (ya da her iki duruma birden uyması) olasılığı kaçtır?

(c) Çalışanın cinsiyeti gece çalışmasından bağımsız mıdır?
(d) Bir kadın çalışanın gece çalışması olasılığı kaçtır?
(e) Erkek çalışanların %50'si planı desteklediyse, rassal seçilen bir çalışanın hem gece çalışmaması hem planı desteklememesi olasılığı kaçtır?

63. Sekiz erkek ve sekiz kadın arasından oniki jüri üyesi seçilecektir.
(a) Kaç değişik jüri seçilebilir?
(b) Seçim rassal yapılırsa, jüri üyelerinin çoğunluğunun erkek olma olasılığı kaçtır?

64. Oniki elektronik parçadan oluşan bir parti mal bir kusurlu parça içermektedir. Bu partiden iki parça sınanmak üzere rassal seçilmiştir.
(a) Bu iki parça kaç değişik kombinasyonla seçilebilir?
(b) Kusurlu parçanın seçilen iki parçadan biri olma olasılığı kaçtır?

65. Belli bir hastalığa yakalanmış 100 hastadan rassal olarak seçilen on kişiye, tedavi görmeyenlerde %50 olan iyileşme oranını tedavi görenlerde %75'e çıkaran bir ilâç verilecektir.
(a) Rassal olarak seçilen bir hastanın hem ilâcı alması hem iyileşmesi olasılığı kaçtır?
(b) İyileşen bir hastaya ilâç verilmiş olması olasılığı kaçtır?
(c) On kişilik belli bir hasta grubunun ilâç verilmek üzere seçilmiş olması olasılığı kaçtır? (Yanıtınızı faktöryel düzeyinde bırakın.)

66. *Resimli Amerika Tarihi* dergisi abonelikleri, armağan edilenler, yenilenenler, kendiliğinden mektupla yapılanlar, abone servisinin kaydettikleri olmak üzere sınıflandırılmıştır.[7] Ocak 1979'da sona eren aboneliklerin %8'i armağan, %41'i yenileme, %6'sı mektup, %45'i abone servisi yoluyla yapılmıştı. Bu dört sınıfta yenilenme oranları sırasıyla %81, %79, %60 ve %21 olmuştur. Şubat 1979'da sona eren aboneliklerin %10'u armağan, %57'si yenileme, %24'ü mektup, %9'u abone servisi yoluyla yapılmıştı. Yenilenme oranları da sırasıyla %80, %76, %51 ve %14 olmuştur.
(a) Ocak 1979'da sona eren rassal seçilmiş bir aboneliğin yenilenme olasılığı nedir?
(b) Şubat 1979'da sona eren rassal seçilmiş bir aboneliğin yenilenme olasılığı nedir?
(c) (b)'deki olasılığın (a)'dakinden yüksek olduğunu doğrulayın. *Resimli Amerika Tarihi* dergisinin yayımcılarının Ocak-Şubat arasındaki değişmeyi olumlu olarak mı yoksa olumsuz olarak mı değerlendirmeleri gerektiğine inanıyorsunuz?

67. Büyük bir kentte yaşayanların %8'i belli bir hastalığa yakalanmıştır. Bu hastalık için uygulanan bir test, hastaların %80'inde hastalığı var göstermekte, hasta olmayanların %80'inde hastalığı yok göstermektedir. Test sonucunda hasta görünen bir kimsenin gerçekten hasta olma olasılığı kaçtır?

68. Bir yaşam sigortası satıcısı, bütün satışlarının %80'ini zaten sigortalı olan kimselere yaptığını görmüştür. Görüşmesine karşın satış yapamadığı kimselerin %50'sinin de bir yaşam sigortası poliçesi sahibi olduklarını anlamıştır. Ayrıca, bü-

---

[7] Bu örnek şu kaynaktan uyarlanmıştır: C. H. Wagner, "Simpson's paradox in real life," *American Statistician, 36* (192), 46-48.

tün görüşmelerinin %40'ını satışla sonuçlandırmaktadır. Zaten yaşam sigortası olmuş bir kimseyle yapacağı bir görüşmede satış yapma olasılığı kaçtır?

69. Bir öğretim üyesi öğrencilerinin %20'sine dönem sonu sınavında A vermiştir. Bu A alanların %70'i dönem içi sınavda da A almıştır. Ayrıca dönem sonu sınavında A alamayanların %10'u dönem içinde A almıştır. Dönem içi sınavında A alan bir öğrencinin dönem sonunda da A alma olasılığı kaçtır?

70. Aşağıdaki çizelge, mali analistlerin pay senedi başına kazanç konusunda yaptıkları 1,000 kestirimle gerçekleşen sonuçları belli sınıflara göre (bir önceki yılla karşılaştırmalı olarak) göstermektedir.

SONUÇ	KESTİRİM		
	İYİLEŞME	AYNI KALMA	KÖTÜLEŞME
İyileşme	210	82	66
Aynı kalm	106	153	75
Kötüleşme	75	84	149

(a) Kestirim kazançlardaki başarımın kötüleşeceği yönündeyken sonucun da öyle çıkması olasılığı kaçtır?

(b) Kestirim kazançların iyileşeceği yönündeyken sonucun öyle çıkmama olasılığı kaçtır?

71. Bir dekan, birinci sınıfa girenlerin %62'si ile ikinci sınıfa yatay geçiş yapanların %78'inin sonunda mezun olduklarını bulmuştur. Alınan öğrencilerin %73'ü birinci sınıfa girmiş, kalanı da ikinci sınıfa yatay geçiş yapmıştır.

(a) Rassal olarak seçilmiş yeni bir öğrenci birinci sınıfa girmişse, sonunda mezun olma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal olarak seçilmiş yeni bir öğrencinin sonunda mezun olma olasılığı kaçtır?

(c) Rassal olarak seçilmiş yeni bir öğrencinin ya birinci sınıfa girmiş ya da sonunda mezun olacak bir öğrenci olması yahut da her iki duruma birden uyması olasılığı kaçtır?

(d) "Sonunda mezun olma" ile "İkinci sınıfa yatay geçiş yapma" olayları istatistik bakımından bağımsız mıdır?

72. Bir pazar araştırması grubu, alışveriş merkezlerinde yeni açılmış giysi dükkânlarının geleceğinin değerlendirilmesi işinde uzmanlaşmaktadır. Grup, gelecekteki sonuçları iyi, orta, kötü diye sınıflamaktadır. Bu gruba yapılan değerlendirme isteklerinin kayıtları incelenmiş, başarılı olmuş bütün dükkânlardan %70'i için iyi, %20'si için orta, %10'u için kötü değerlendirmesi yapıldığı anlaşılmıştır. Başarısız olmuş bütün dükkânlardan %20'si için iyi, %30'u için orta, %50'si için kötü değerlendirmesi yapılmıştır.

(a) Rassal seçilmiş bir dükkân için iyi değerlendirmesi yapılmış olmasının olasılığı kaçtır?

(b) Bir dükkân için iyi değerlendirmesi yapılmışsa başarılı olma olasılığı kaçtır?

(c) "Geleceği iyi olarak değerlendirilme" ile "Dükkân başarılı" olayları istatistik bakımından bağımsız mıdır?

(d) Rassal olarak beş dükkân seçildiğini düşünelim. En azından birinin başarılı olma olasılığı kaçtır?

73. Bir lokanta yöneticisi müşterileri iyi giyimli, ne iyi ne kötü giyimli, kötü giyimli diye sınıflayarak bütün müşterilerin sırasıyla %50, %40, %10 oranlarında bu sınıflara girdiğini bulmuştur. Yönetici, iyi giyimlilerin %70'inin, ne iyi ne kötü giyimlilerin %50'sinin, kötü giyimlilerin %30'unun şarap ısmarladıklarını görmüştür.

(a) Rassal seçilmiş bir müşterinin şarap ısmarlama olasılığı kaçtır?

(b) Şarap ısmarlayan birinin iyi giyimli olma olasılığı kaçtır?

(c) Şarap ısmarlayan birinin iyi giyinmemiş olma olasılığı kaçtır?

74. Bir plâk dükkânı sahibi, dükkâna giren müşterileri lise çağında, üniversite çağında ya da daha yaşlı diye sınıflandırıp bütün müşterilerin sırasıyla %30, %50 ve %20'sinin bu sınıflara girdiğini bulmuştur. Dükkân sahibi aynı zamanda lise çağındakilerin %20'sinin, üniversite çağındakilerin %60'ının ve daha yaşlıların %80'inin plâk aldıklarını görmüştür.

(a) Dükkâna giren müşterilerden rassal olarak seçilen birinin plâk alma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal seçilmiş bir müşteri plâk alırsa, bu müşterinin lise çağında olma olasılığı kaçtır?

(c) Rassal seçilmiş bir müşteri plâk alırsa, bu müşterinin lise çağında olmama olasılığı kaçtır?

BÖLÜM 4

Kesikli Rassal Değişkenler ve Bunların Olasılık Dağılımları

4.1 RASSAL DEĞİŞKENLER

Rassal bir denemenin yapılarak olası sonuçlara sayısal değerler verileceğini düşünelim. Bir zar atma ya da bir ailenin gelirini ölçme gibi denemelerde sonuçlar doğal olarak sayısal biçimdedir. Böyle olmadığı durumlarda bile sonuçlara sayılar vermek, özellikle yalmzca iki sonuçlu denemelerde, anlamlı ve yararlı olabilir. Sözgelimi, sınai bir süreçle üretilen bir parça "kusurlu" ya da "kusursuz" diye sınıflandırılabilir. Bu olanaklardan ilkine 1, ikincisine 0 değerini verebiliriz.

Rassal deneme yapılmadan önce sonuç konusunda bir belirsizlik olacaktır. 3. Bölümde de gördüğümüz gibi, bu belirsizlik olasılık söylemleriyle nicelleştirilebilecektir. Deneme sonuçları sayısal değerler olduğunda, bu olasılıklar kolaylıkla **rassal değişken** kavramıyla özetlenebilir.

Tanım

Rassal değişken, rassal bir denemenin sonuçlarına göre belirlenen sayısal değerleri alan bir değişkendir.

Rassal bir değişken ile onun alabileceği değerleri birbirinden ayırmak önemlidir. Simgesel olarak bunu, rassal değişkeni X gibi büyük harflerle, onun alabileceği bir değeri ise x gibi küçük harflerle göstererek yaparız. Sözgelimi, bir zar atılıp ne geldiğine bakılmadan önce, sonuç için X rassal değişkeni kullamla-

ilir. Bu rassal değişken, her birinin olasılığı ⅙ olan $x = 1, x = 2, \ldots, x = 6$ belirli değerlerini alabilir.

Başka bir önemli ayırım **kesikli** ve **sürekli** rassal değişkenler arasındadır. Zar atışı bunlardan ilkine bir örnektir; yalnızca altı olası sonuç vardır ve bunların her birine bir olasılık atanabilir.

Tanım

Bir rassal değişken, yalnızca sayılabilir sayıda değerler alabiliyorsa **kesikli**dir.

Rassal bir değişkenin yalmzca sonlu sayıda değerler alabiliyorsa kesikli olacağı bu tanımdan çıkarılabilir. Sözgelimi, bir paranın on kez atılmasından doğan yazı sayısı kesikli bir rassal değişkendir. Sonsuz sayıda olsalar bile olası sonuçlar sayılabiliyorsa, rassal değişken yine kesiklidir. İlk yazı gelinceye kadar yapılan para atışlarının sayısı buna bir örnektir. Olası sonuçlar 1, 2, 3,... olup, her birine bir olasılık atanabilir. (Sayılabilir sonsuz sayıda değerler alabilen kesikli bir rassal değişken Altbölüm 4.7'de ele alınacaktır.) Kesikli rassal değişkenin başka örnekleri şunlardır:

1. Büyük bir parti mal içinden alınan yirmilik bir örneklemdeki kusurlu parça sayısı
2. Marketlerde bir kasaya bir saat içinde gelen müşteri sayısı
3. Bir şirketin hesaplarında bulunan hata sayısı
4. Bir sağlık sigortası poliçesine ilişkin olarak bir yılda para isteme sayısı

Bunların tersine, günlük hava sıcaklığıyla ilgilendiğimizi düşünelim. Rassal değişken, sıcaklık, sürekli bir ölçekte ölçülür ve **sürekli**dir.

Tanım

Bir rassal değişken bir aralıktaki bütün değerleri alabiliyorsa **sürekli**dir.

Sürekli rassal değişkenlerde belli değerlere olasılıklar verilemez. Sözgelimi, bugünün hava sıcaklığının tamı tamına 25.131° C olmasımn olasılığı 0'dır. Sıcaklık tamı tamına bu sayı olamaz. Ama olasılıklar belli aralıklar için verilebilir, böylece "Bugün hava sıcaklığı 25-26° arasında olacaktır" olayına bir olasılık atanabilir. Sürekli rassal değişkenin başka örnekleri şunlardır:

1. Bir ailenin yıllık geliri
2. Belli bir ayda ABD'ye ithal edilen petrol miktarı

3. IBM adi pay senedi fiyatının bir aylık değişimi
4. Yeni bir parçanın takılmasıyla bozulması arasında geçen süre
5. Bir kimyasal madde üretim partisinde kirlilik oranı

Kesikli ve sürekli rassal değişkenler arasında yapılan ayırım yüzeysel gibi görünebilir. Aslında, sürekli bir ölçekte pek ender ölçüm yapılır. Sözgelimi, günlük hava sıcaklığı, onu ölçen aygıtın gösterdiğinden daha hassas verilemez. Bunun gibi, bir ailenin yıllık geliri sent cinsinden bir tam sayı olacaktır. Ancak, komşu değerlerin arasındaki farkların önemsiz olduğu hassas bir ölçekte ölçüm yapıldığında, bu ölçümler gerçekten sürekli bir ölçekte yapılıyormuş gibi davranmak kolaylık sağlar. Sözgelimi, 35,276.21 $ ve 35,276.22 $ aile gelirleri arasındaki fark pek önemli değildir ve bunların her birine olasılıklar vermek zahmetli ve gereksiz bir uygulama olacaktır.

Uygulamada, tekil sonuçlarına ayrı olasılıklar vermenin anlamlı olduğu bütün rassal değişkenleri kesikli sayarak, öbür bütün rassal değişkenleri sürekli kabul edeceğiz. Bu ayırım nedeniyle, bu iki sınıfı ayrı ele almak daha elverişlidir. Kesikli rassal değişkenler bu bölümde, sürekli rassal değişkenler ise 5. Bölümde incelenecektir.

4.2 KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİN OLASILIK DAĞILIMLARI

Kesikli bir rassal değişken X, bunun alabileceği değerlerden biri de x olsun. X rassal değişkeninin belli bir x değerini alma olasılığı $P(X=x)$ ile gösterilir. Rassal bir değişkenin **olasılık dağılımı**, olanak içindeki bütün sonuçları için olasılıklarının bir gösterimidir. Bu gösterim cebirsel, çizimsel ya da çizelge biçiminde olabilir. Kesikli rassal değişkenler için yalın bir gösterim, olanak içindeki bütün sonuçların olasılıklarını x'in değerlerine göre dizmektir.

Tanım

Kesikli bir X rassal değişkeninin **olasılık dağılımı** $P_X(x)$, X'in x değerini alma olasılığını x'in fonksiyonu cinsinden ifade eder:

$$P_X(x) = P(X=x)$$

Burada fonksiyon, x'in bütün olanaklı değerleri için hesaplanmıştır.

Bu olasılık fonksiyonu yalnız kesikli x noktalarında sıfırdan farklı değerler aldığından, bazen **olasılık kütle dağılımı** adıyla da anılır. Olasılıklar bir kez hesaplandı mı, fonksiyon kolayca çizilebilir.

ÖRNEK 4.1

Bir zar atılıyor. Rassal değişken X, üste gelen sayıyı göstersin. $P(X=1) = P(X=2) = \cdots = P(X=6) = 1/6$ olduğundan olasılık fonksiyonu şöyledir:

$$P_X(x) = P(X=x) = \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, 6 \text{ için}$$

Bu fonksiyon x'in gerçekleşemeyen öbür bütün değerleri için 0 değerini alır. Bu olasılık fonksiyonu Çizim 4.1'de gösterilmiştir. Burada 1/6 yüksekliğindeki çizgiler, $x = 1, x = 2, \ldots, x = 6$ noktalarındaki olasılık kütlelerini temsil eder.

ÖRNEK 4.2

Bir rulet çarkı 00, 0, 1, 2, ..., 36 diye numaralanmış otuzsekiz cebe bölünmüştür. "Tek sayı gelir" olayı üzerine bahse girilebilir, bu bahse giren bir oyuncu otuz sekiz olanaklı sonuçtan onsekizinde kazanır. Onsekiz tane tek sayı olduğundan,

$$P(\text{Tek sayı gelir}) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$$

Bir oyuncu, tek sayı gelmezse 1 $ kaybedeceği, gelirse 1 $ kazanacağı bir bahse girerse, bu oyuncunun (dolar cinsinden) kazancını rassal değişken X ile şöyle gösterebiliriz:

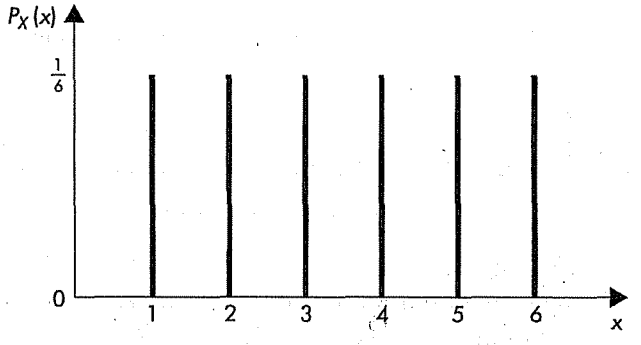
$$X = \begin{cases} -1 & \text{tek sayı gelmezse} \\ 1 & \text{tek sayı gelirse} \end{cases}$$

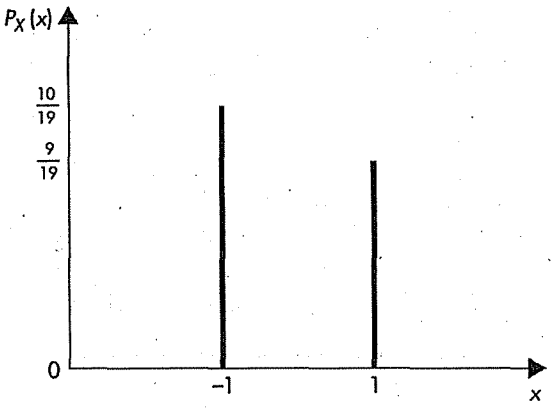
Bu durumda $P(X=1) = 9/19$, dolayısıyla da $P(X=-1) = 10/19$ olur; öyleyse X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu şudur:

$$X = \begin{cases} \frac{10}{19} & x = -1 \text{ için} \\ \frac{9}{19} & x = 1 \text{ için} \end{cases}$$

Bu fonksiyon Çizim 4.2'de gösterilmiştir.

ÇİZİM 4.1 Örnek 4.1 için olasılık çizimi





ÇİZİM 4.2 Örnek 4.2 için olasılık çizimi

Kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki çerçeve içinde verilen iki koşulu sağlamalıdır.

Kesikli Rassal Değişkenlerin Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

X, olasılık fonksiyonu $P(x)$ olan kesikli bir rassal değişken olsun. Bu durumda

(i) Her x değeri için $P_X(x) \geq 0$

(ii) Tekil olasılıkların toplamı 1'dir; yani

$$\sum_x P_X(x) = 1$$

Buradaki gösterim, x'in bütün değerleri için toplama yapıldığı anlamına gelir.

Özellik (i), yalnızca, olasılıkların eksi olamayacağını söyler. Özellik (ii), x'in bütün olanaklı değerleri için "$X = x$" olaylarının bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olduğu olgusundan türemiştir. Dolayısıyla bu olayların olasılıkları toplamı 1 eder. Bunun böyle olduğu Örnek 4.1 ile 4.2 için dolaysız biçimde doğrulanabilir. Bu, rassal bir deneme yapıldığında bir şey gerçekleşmelidir söyleminin basit bir söyleniş biçimidir.

Kesikli olasılık dağılımının bir başka gösterimi de işe yarar.

Tanım

Rassal bir değişken olan X'in **birikimli olasılık fonksiyonu** $F_X(x_0)$, X'in x_0 değerini aşmamasının olasılığını x_0'ın fonksiyonu cinsinden gösterir:

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0)$$

Bu fonksiyon, x_0'ın bütün değerleri için hesaplanır.

Bu birikimli olasılık fonksiyonu kesikli rassal değişkenler için bazen **birikimli kütle fonksiyonu** diye adlandırılır. Tanımdan görüleceği gibi, x_0 arttıkça, birikimli olasılık fonksiyonu, rassal değişkenin yalnızca artı olasılıkla bulunabileceği x_0 noktalarında değer değiştirecektir. Fonksiyon bu noktalarda, olasılık fonksiyonu cinsinden değerlendirilebilir.

Olasılık Fonksiyonu ile Birikimli Olasılık Fonksiyonu Arasındaki İlişki

X, olasılık fonksiyonu $P_X(x)$, birikimli olasılık fonksiyonu $F_X(x_0)$ olan bir rassal değişken olsun. O zaman şu yazılabilir:

$$F_X(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P_X(x)$$

Buradaki gösterim, x'in x_0'dan küçük ya da ona eşit bütün olanaklı değerleri üzerinden toplama yapıldığı anlamını taşır.

Çerçeve içindeki bulgu, x_0'dan küçük ya da ona eşit bütün x'ler için "$X = x$" bağdaşmaz olaylarının birleşiminin, "$X \leq x_0$"olayı olmasından kaynaklanır. Öyleyse bu birleşimin olasılığı, bu tekil olayların olasılıklarının toplamıdır.

ÖRNEK 4.3

Örnek 4.1'deki zar atma denemesinde, rassal değişken X'in üste gelen sayı olduğu olasılık fonksiyonumuz şudur:

$$P_X(x) = \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, \ldots, 6 \text{ için}$$

Şimdi, x_0, 1'den küçük bir sayıysa, X, x_0'dan küçük olamayacağından şu yazılabilir:

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = 0 \qquad x_0 < 1 \text{ için}$$

Eğer x_0, 1'den büyük ya da ona eşit ama 2'den küçükse, X'in x_0'a eşit ya da ondan küçük olmasının tek yolu $X = 1$ olmasıdır. Böylece şunu yazabiliriz:

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = P_X(1) = \frac{1}{6} \qquad 1 \leq x_0 < 2 \text{ için}$$

Eğer x_0, 2'den büyük ya da ona eşit ama 3'ten küçükse, X'in x_0'a eşit ya da ondan küçük olmasının tek yolu $X=1$ ya da $X=2$ olmasıdır. Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$F_X(x_0)=P(X\le x_0)=P_X(1)+P_X(2)=\frac{1}{3} \qquad 2\le x_0<3 \text{ için}$$

Bunu sürdürürsek, x_0, 6'dan büyük ya da ona eşitse, X'in kesinlikle x_0'dan küçük olacağını görürüz. Böylelikle şunu yazabiliriz:

$$F_X(x_0)=P(X\le x_0)=\sum_{x=1}^{6}P_X(x)=1 \qquad x_0\ge 6 \text{ için}$$

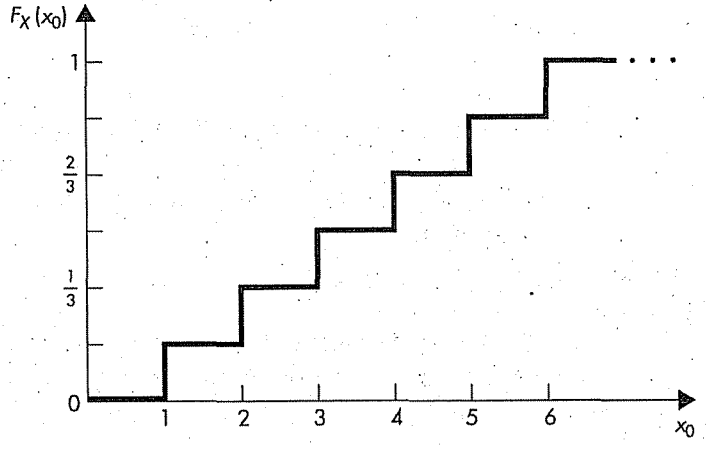
Bu durumda birikimli olasılık fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$F_X(x_0)=\begin{cases}0 & x_0<1 \text{ ise}\\ \dfrac{j}{6} & j\le x_0<j+1 \text{ ise} \qquad (j=1,2,\ldots,5)\\ 1 & x_0\ge 6 \text{ ise}\end{cases}$$

Bu fonksiyon Çizim 4.3'te gösterilmiştir. Burada birikimli olasılık fonksiyonunun 1 değerine ulaşıncaya kadar basamaklarla arttığı görülmektedir.

Kesikli rassal değişkenler için birikimli olasılık fonksiyonu her zaman 0'dan başlayıp 1'de sona eren basamaklar biçimindedir. Bu özellikler aşağıdaki çerçevede biçimsel olarak belirtilmiştir.

ÇİZİM 4.3 Örnek 4.3 için birikimli olasılık fonksiyonu



Birikimli Olasılık Fonksiyonunun Kesikli Rassal Değişkenler İçin Özellikleri

X, birikimli olasılık dağılımı $F_X(x_0)$ olan bir rassal değişken olsun. O zaman

(i) Her x_0 sayısı için $0 \leq F_X(x_0) \leq 1$ olur.

(ii) x_0 ile x_1, $x_0 < x_1$ biçiminde iki sayı ise, şu yazılabilir:

$$F_X(x_0) \leq F_X(x_1)$$

Özellik (i), bir olasılığın 0'dan küçük, 1'den büyük olamayacağını gösterir. Özellik (ii) ise, rassal bir değişkenin belli bir sayıyı aşmama olasılığının, aynı değişkenin daha büyük bir sayıyı aşmama olasılığından büyük olamayacağı anlamına gelir.

4.3 KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİN BEKLENEN DEĞERLERİ

Olasılık dağılımı, bir rassal değişkenin olasılık özelliklerine ilişkin bütün bilgileri içerir, bu dağılımın çiziminin incelenmesi de kesinlikle yararlıdır. Ancak, çoğu zaman dağılımın özelliklerinin kimi özet ölçüleri bilinmek istenebilir.

Bir olasılık dağılımının merkezinin bir ölçüsünü bulabilmek için, burada bir rassal değişkenin **beklenen değeri** kavramını göreceğiz. Bölüm 2'de sayısal gözlem kümelerini incelerken, merkezî eğilimin bir ölçüsü olarak aritmetik ortalamayı kullanmıştık. Beklenen değer, rassal bir değişkenin buna karşılık gelen merkezî eğilim ölçüsüdür. Bunun tanımına geçmeden, görünürde çekici olan almaşık bir ölçüyü aradan çıkarmak elverişli olabilir.

Şu örneğe bakalım: İşletmeciliğin belli bir alanındaki ders kitaplarının incelenmesiyle, bütün kitap sayfalarının %81'inde hiç basım yanlışı olmadığı, %17'sinde bir, %2'sinde de 2 hata olduğu görülmüştür. Bu kitaplardan birinden rassal olarak seçilmiş bir sayfadaki yanlış sayısını X rassal değişkeniyle gösterirsek, şu olasılık fonksiyonuna uygun olarak, bunun alabileceği değerlerin, 0, 1, 2 olduğu görülür.

$$P_X(0) = 0.81 \qquad P_X(1) = 0.17 \qquad P_X(2) = 0.02$$

Rassal bir değişkenin hesaplanabilecek bir merkezî eğilim ölçüsü, alabileceği değerlerin yalın bir ortalaması olabilir. Örneğimizde, bir sayfada olabilecek yanlış sayısı 0, 1, 2'dir. Bunların ortalaması da bir yanlıştır. Ancak, bir an düşü-

nen bir okuyucu bunun saçma bir merkezî eğilim ölçüsü olduğunu anlayacaktır. Bu ortalamayı hesaplarken, bütün sayfaların %81'inin hiç yanlışsız olduğunu, yalnızca %2'sinin iki yanlış içerdiğini dikkate almadık. Duyarlı bir merkezî eğilim ölçüsü elde edebilmek için, gerçekleşebilecek çeşitli sonuçları, gerçekleşme olasılıklarıyla *tartılandırmak* gerekir.

Tanım

Kesikli bir rassal değişken olan X'in **beklenen değeri** $E(X)$, şöyle tanımlanır:

$$E(X) = \sum_x xP_X(x)$$

Buradaki gösterim toplama işleminin x'in alabileceği bütün değerleri kapsadığı anlamına gelir.

Bir rassal değişkenin beklenen değerine **ortalama** denir ve μx ile gösterilir.

Beklenen değerin tanımı, uzun dönem göreli sıklıklarından çıkarılabilir. Bir rassal denemenin N kez yinelendiğini, bu denemelerden N_x tanesinde "$X = x$ olayının gerçekleştiğini düşünelim. Rassal değişkenin aldığı değerlerin ortalaması, olanaklı bütün x değerleri için xN_x/N'lerin toplamına eşit olacaktır. Şimdi, yinelenme sayısı N sonsuza doğru büyüdükçe N_x/N oranı da "$X = x$" olayının gerçekleşme olasılığına, yani $P_X(x)$'e yakınsar. Demek ki, xN_x/N büyüklüğü $P_X(x)$'e yakınsar. Öyleyse beklenen değer, rassal değişkenin çok sayıda denemede alacağı değerlerin uzun dönem ortalaması olarak görülebilir. Bölüm 2'de bir gözlemler kümesinin ortalaması için aritmetik ortalama terimini kullandığımızı anımsayın. Yukarıdaki açıklamalar aynı terimi rassal bir değişkenin beklenen değeri için de kullanmanızı haklı gösterir.

ÖRNEK 4.4

İşletmecilik kitaplarının sayfalarındaki yanlış sayısı X'in olasılık fonksiyonu şöyledir:

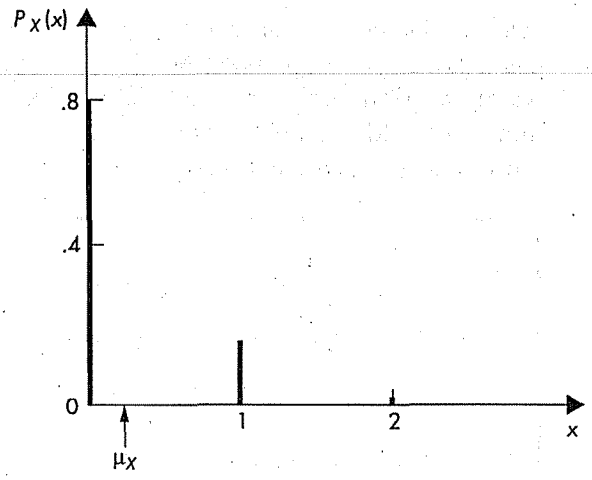
$$P_X(0) = 0.81 \qquad P_X(1) = 0.17 \qquad P_X(2) = 0.02$$

Sayfa başına ortalama yanlış sayısını bulun.

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xP_X(x)$$

$$= (0)(0.81) + (1)(0.17) + (2)(0.02) = 0.21$$

Öyleyse, çok sayıda sayfa incelendiğinde sayfa başına ortalama 0.21 yanlış bulmayı bekleyeceğimiz sonucuna varırız. Çizim 4.4 bu olasılık fonksiyonunu, ortalamayı da belirterek göstermektedir.



ÇİZİM 4.4 Örnek 4.4'teki işletmecilik ders kitaplarında sayfa başına yanlış sayısının olasılık dağılımı ve anakütle ortalaması μ_X'in yeri

Beklenen değer kavramı yalnız rassal değişkenin kendisiyle sınırlı değildir, rassal değişkenin her fonksiyonuna uygulanabilir. Sözgelimi, bir yüklenici bir yüklenimin yerine getirilmesi için gerekli süre konusunda belirsizlik içinde kalabilir. Bu belirsizlik, alabileceği değerler, sözleşme konusu işin başlamasından bitirilmesine kadar geçecek günlerin sayısından oluşan bir rassal değişkenle temsil edilebilir. Ama yükleniciyi asıl ilgilendiren geçen süre değil, sözleşmeyi yerine getirmenin maliyetidir. Bu maliyet geçen sürenin bir fonksiyonu olabilir, böylece beklenen maliyeti belirleyebilmek için, "Bitirme süresi" rassal değişkeninin bir fonksiyonunun beklenen değerini bulmak gerekir.

Tanım

X, olasılık dağılımı $P_X(x)$ olan kesikli bir rassal değişken, $g(X)$ de X'in bir fonksiyonu olsun. Bu durumda bu fonksiyonun **beklenen değeri**, $E[g(X)]$ şöyle olur:

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)P_X(x)$$

Bu $E[g(X)]$ tanımı, tıpkı daha önceki beklenen değer tanımı gibi çıkarılabilir. Yani beklenen değer, çok sayıda yinelenen denemelerde $g(X)$'in alacağı ortalama değer olarak düşünülebilir.

Bölüm 2'de, gözlemlerin kendi ortalamalarından sapma karelerinin ortalaması olan *varyans*, bir dizi sayısal gözlemin işe yarar bir yayıklık ölçüsü olarak

bulunmuştu. Bu kavram, aynı yolla, rassal bir değişkenin olasılık dağılımının yayıklığını ölçmede de kullanılabilir. Rassal bir değişkenin varyansını tanımlarken, bu değişkenin kendi ortalamasından sapmaların karelerinin tartılı bir ortalaması oluşturulur; burada $(x-\mu_X)^2$ ile ilişkilendirilebilecek tartı, rassal değişkenin x değerini almasının olasılığıdır. Öyleyse varyansa, çok sayıda yinelenen denemelerde $(X-\mu_X)^2$ fonksiyonunun alabileceği ortalama değer gözüyle bakılabilir.

Tanım

X kesikli bir rassal değişken olsun. Ortalamadan sapma karelerinin $(X-\mu_X)^2$ beklenen değeri **varyans** adını alır, σ_X^2 ile gösterilir, şöyle bulunur:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_x (x-\mu_X)^2 P_X(x)$$

Standart sapma σ, varyansın artı değerli karekökü dür.

Standart sapmayı bulmak için varyansın karekökünü almak, Bölüm 2'de belirtildiği gibi, başlangıçtaki ölçü birimiyle ölçülmüş bir nicelik sağlar.

Olasılık fonksiyonu bilindiğinde rassal bir değişkenin ortalaması ile varyansı, tanımların doğrudan uygulanmasıyla hesaplanabilir.

Kimi uygulamalarda, almaşık ama eşdeğer bir formül, hesaplama kolaylığı bakımından yeğlenebilir. Bu almaşık formülün, tanımda verilenle eşdeğer olduğu cebirsel olarak gösterilebilir.[1] Karenin beklenen değeri eksi X'in beklenen değerinin karesi diye kolayca akılda tutulabilir.

---

[1] Varyansın ilk tanımıyla işe başlayalım:

$$\sigma_X^2 = \sum_x (x-\mu_X)^2 P_X(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu_X x + \mu_X^2) P_X(x)$$

$$= \sum_x x^2 P_X(x) - 2\mu_X \sum_x x P_X(x) + \mu_X^2 \sum_x P_X(x)$$

Ama $\sum_x x P_X(x) = \mu_X$ ve $\sum_x P_X(x) = 1$ olduğunu görmüştük, öyleyse:

$$\sigma_X^2 = \sum_x x^2 P_X(x) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2$$

$$= \sum_x x^2 P_X(x) - \mu_X^2$$

Kesikli Bir Rassal Değişkenin Varyansı (Almaşık Formül)

Kesikli rassal değişken X'in varyansı şöyle gösterilebilir:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$
$$= \sum_x x^2 P_X(x) - \mu_X^2$$

ÖRNEK 4.5

İşletmecilik kitaplarının sayfalarındaki yanlış sayısı X'in olasılık fonksiyonunun şöyle olduğunu düşünelim:

$$P_X(0) = 0.81 \qquad P_X(1) = 0.17 \qquad P_X(2) = 0.02$$

Örnek 4.4'te sayfa başına ortalama yanlış sayısını $\mu_X = 0.21$ olarak bulmuştuk.

Varyansı elde edebilmek için önce karelerin beklenen değerini buluruz, yani

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P_X(x) = (0)^2(0.81) + (1)^2(0.17) + (2)^2(0.02) = 0.25$$

hesaplarız. Daha sonra varyansı

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.25 - (0.21)^2 = 0.2059$$

elde ederiz. Son olarak sayfa başına yanlış sayısının standart sapması da şudur:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.2059} = 0.45$$

Olasılık dağılımlarının yayvanlıklarını karşılaştırırken varyans kavramı çok işe yarar. Sözgelimi, bir yatırımın yıllık getirisini rassal bir değişken olarak alalım. İki yatırım aynı beklenen getiriyi gösterebilir ama, eğer varyansları bir hayli farklıysa, önemli bir açıdan birbirlerinden farklı olurlar. Yüksek bir varyans, ortalamadan çok farklı getirilerin düşük varyansa göre daha çok gerçekleşebilir olduğunun bir göstergesidir. Öyleyse bu bağlamda getirilerin varyansı, bir yatırımın riskiyle ilişkilendirilebilir — yüksek varyans, yüksek risk demektir.

X rassal değişkeninin bir fonksiyonunun da beklenen değerini tanımlamıştık. a ile b'nin sabit değerler olduğu $a + bX$ doğrusal fonksiyonu özellikle önemlidir. X, $P_X(x)$ olasılık dağılımına göre x değerini alan rassal bir değişken olsun, aşağıdaki gibi tanımlanmış yeni bir Z rassal değişkeni alalım.

$$Z = a + bX$$

Rassal değişken X, belirli bir x değerini aldığında Z de $a + bx$ değerini alır. Sık sık bu tür değişkenlerin ortalaması ile varyansını bilmek isteriz. Bu nicelikler aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.

X, ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan rassal bir değişken, a ile b de sabit birer değer olsun. $Z = a + bX$ rassal değişkenini tanımlayalım. Bu durumda Z'nin ortalaması ile varyansı şöyle bulunur:

$$\mu_Z = E(a + bX) = a + b\mu_X \tag{4.3.1}$$

ve

$$\sigma_Z^2 = \text{Var}(a + bX) = b^2\sigma_X^2 \tag{4.3.2}$$

böylece Z'nin standart sapması şöyle elde edilir.

$$\sigma_Z = |b|\sigma_X$$

Bu bulguları doğrulamak için, eğer Z, $P_X(x)$ olasılıklarıyla $a + bx$ değerlerini alıyorsa ortalamasının aşağıdaki gibi bulunacağının beklenen değer tanımından çıkarılabileceğine dikkat edin.

$$\begin{aligned} E(Z) = \mu_Z &= \sum_x (a + bX)P_X(x) \\ &= a\sum_x P_X(x) + b\sum_x xP_X(x) \end{aligned}$$

Bu durumda, bu eşitliğin sağ yanındaki ilk toplam [Altbölüm 4.2'deki (ii) bulgusu gereği] 1 olduğundan ve ikinci toplam da, tanım gereği, x'in ortalamasım verdiğinden Eş. (4.3.1)'deki gibi, şunu yazarız:

$$E(Z) = a + b\mu_X$$

Ayrıca Z'nin varyansı da tanım gereği aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2] = \sum_x [(a + bX) - \mu_Z]^2 P_X(x)$$

μ_Z yerine $a + b\mu_X$ konursa şu bulunur:

$$\sigma_Z^2 = \sum_x (bx - b\mu_X)^2 P_X(x) = b^2 \sum_x (x - \mu_X)^2 P_X(x)$$

Bu denklemin sağ yanındaki toplam, tanım gereği X'in varyansı olduğundan (4.3.2) bulgusu elde edilmiş olur.

ÖRNEK 4.6

Bir yüklenici, ihaleye girmeyi düşündüğü bir işin maliyetiyle ilgilenmektedir. Malzeme maliyetinin 25,000 $, işçiliğin günde 900 $ olacağını tahmin etmektedir. İş X gün sürerse, toplam işçilik maliyeti $900X$ dolar, işin toplam maliyeti de (dolar cinsinden)

$$C = 25{,}000 + 900X$$

olacaktır.

Yüklenici işin bitiş süresine ilişkin olarak, aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi, öznel olasılıklar oluşturmuştur.

BİTİŞ SÜRESİ (GÜN)	10	11	12	13	14
OLASILIK	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Bitiş süresi X için ortalama ve varyans doğrudan şöyle bulunabilir:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x P_X(x)$$

$$= (10)(0.1) + (11)(0.3) + (12)(0.3) + (13)(0.2) + (14)(0.1) = 11.9 \text{ gün}$$

ve

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_x (x - \mu_X)^2 P_X(x)$$

$$= (10 - 11.9)^2(0.1) + (11 - 11.9)^2(0.3) + \cdots + (14 - 11.9)^2(0.1) = 1.29$$

Şimdi de toplam maliyet C'nin ortalaması ile varyansı, Eş. (4.3.1) ile (4.3.2) kullanılarak bulunabilir. Beklenen maliyet,

$$\mu_C = E(25{,}000 + 900x) = 25{,}000 + 900\mu_X$$

$$= 25{,}000 + (900)(11.9) = 35{,}710 \text{ \$}$$

varyans,

$$\sigma_C^2 = \text{Var}(25{,}000 + 900x) = (900)^2 \sigma_X^2$$

$$= (810{,}000)(1.29) = 1{,}044{,}900$$

standart sapma,

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_C^2} = 1{,}022.20 \text{ \$}$$

olarak bulunur.

(4.3.1) ve (4.3.2) bulgularının aşağıdaki özel durumları ilginçtir:

(i) Bu denklemlerde $b = 0$ alınırsa, herhangi bir a sabiti için

$$E(a) = a \qquad \text{ve} \qquad \text{Var}(a) = 0$$

bulunur. Öyleyse, rassal bir değişken hep a değerini alırsa ortalaması a, varyansı 0 olur.

(ii) Bu denklemlerde $a = 0$ alınırsa, herhangi bir b sabiti için

$$E(bx) = b\mu_X \qquad \text{ve} \qquad \text{Var}(bx) = b^2 \sigma_X^2$$

elde edilir. Demek ki rassal bir değişken bir sabitle çarpılırsa, ortalaması o sabitle, varyansı sabitin karesiyle çarpılır.

(iii) $a = -\mu_X/\sigma_X$ ve $b = 1/\sigma_X$ alınırsa, şunları buluruz:

$$Z = a + bX = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$$E\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) = -\frac{\mu_X}{\sigma_X} + \frac{1}{\sigma_X}\mu_X = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2 = 1$$

Öyleyse, rassal bir değişkenden ortalaması çıkarılınca bulunan fark, standart sapmasına bölünürse, ortalaması 0 ve standart sapması 1 olan bir rassal değişken elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir araba satıcısı, sattığı yeni araçlardan garanti süresi içinde onarım için geri gelme sayılarının oranlarını hesaplamıştır. Bulguları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

GERİ GELME SAYISI	0	1	2	3	4
ORANLAR	0.28	0.36	0.23	0.09	0.04

   (a) Olasılık fonksiyonunu çizin.
   (b) Birikimli olasılık fonksiyonunu hesaplayarak çizin.

2. Bir şirket kalorifer kazanı yerleştirme ve onarımında uzmanlaşmaktadır. Kış öncesi dönemdeki servis çağrıları yeni bir kazan takılmasıyla sonuçlanabilmektedir. Aşağıdaki çizelge, Eylül'ün son iki haftasında bu yolla sağlanmış yeni kazan ısmarlamalarının tahmin edilen olasılıklarını göstermektedir.

ISMARLANAN KAZAN SAYISI	0	1	2	3	4	5
OLASILIK	0.10	0.14	0.26	0.28	0.15	0.07

   (a) Olasılık fonksiyonunu çizin.
   (b) Birikimli olasılık fonksiyonunu hesaplayarak çizin.
   (c) Bu dönemde en az üç ısmarlama olmasının olasılığını bulun.

3. Bir şirket paketlenmiş ataşlar üretmektedir. Paket başına ataş sayısı aşağıdaki çizelgede sergilenmiştir.

ATAŞ SAYISI	47	48	49	50	51	52	53
PAKETLERİN ORANI	0.04	0.13	0.21	0.29	0.20	0.10	0.03

(a) Olasılık fonksiyonunu çizin.
(b) Birikimli olasılık fonksiyonunu hesaplayarak çizin.
(c) Rassal seçilen bir paketin 49 ile 51 arasında (ikisi de dahil) ataş içermesi olasılığı kaçtır?
(d) Rassal olarak iki paket seçilmiştir. Bunlardan hiç olmazsa birinin en az elli ataş içermesi olasılığı kaçtır?

4. Bir belediye otobüs işletmesi yeni bir semte hat açmıştır. Sabah erken saatlerde bu semtten otobüse binenlerin sayıları kaydedilmiştir. Aşağıdaki çizelge hafta içi günlerde bu sayıların oranlarını göstermektedir.

YOLCU SAYISI	0	1	2	3	4	5	6	7
OLASILIK	0.02	0.12	0.23	0.31	0.19	0.08	0.03	0.02

(a) Olasılık fonksiyonunu çizin.
(b) Birikimli olasılık fonksiyonunu hesaplayarak çizin.
(c) Rassal seçilmiş bir hafta içi günde bu otobüste bu semtten en az dört yolcu bulunması olasılığı kaçtır?
(d) Hafta içi iki gün rassal olarak seçilmiştir. Her iki günde de bu otobüste üçten az yolcu bulunması olasılığı kaçtır?

5. (a) Büyük bir parti mal %10 kusurlu parça içermektedir. Bu partiden rassal olarak iki parça seçilip incelenmiştir. Bulunan kusurlu parça sayısını X ile gösterelim. Bu rassal değişkenin olasılık fonksiyonunu bulun.
(b) Yirmi parçalık bir partide iki kusurlu parça vardır. Bu partiden iki parça rassal seçilip incelenmiştir. Bulunan kusurlu parça sayısını Y ile gösterelim. Bu rassal değişkenin olasılık fonksiyonunu bulun. Yanıtınızın (a)'dakinden farklı olma nedenini açıklayın.

6. Bir öğrenci gelecek hafta teslim etmesi gereken bir ödevin ayrıntılarını öğrenmek gereğini duymuştur. Bu bilgiyi edinmek için sınıf arkadaşlarını arar. Belli bir aramada gerekli bilgiyi edinme olasılığının 0.40 olduğuna inanmaktadır. Bu bilgiyi edininceye kadar arkadaşlarını aramayı sürdürür. Bilgiyi edinmek için gereken arama sayısını X ile gösterelim.
(a) X'in olasılık fonksiyonunu bulun.
(b) X'in birikimli olasılık fonksiyonunu bulun.
(c) En az üç arama gerekmesinin olasılığını bulun.

7. Örnek 4.2'ye dönelim. Bir oyuncu tek sayı gelmezse 1 $ kaybedeceği, gelirse 1 $ kazanacağı bir bahse girmiştir. Oyuncunun (dolar cinsinden) kazancını X rassal değişkeniyle gösterelim. X'in ortalaması ile standart sapmasını bulun.

8. Alıştırma 1'deki bilgilere bakalım. Araçların garanti süresi dolmadan onarım için gelme sayılarının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

9. Alıştırma 2'deki bilgilere dönelim. Bu iki haftalık süre içindeki yeni kazan ısmarlama sayılarının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

10. Alıştırma 3'teki bilgilere dönelim.
(a) Paket başına ataş sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.
(b) Paketteki ataş sayısı X iken, bir paket ataş üretme maliyeti (sent cinsinden) $16 + 2X$ kadardır. Pakette kaç ataş olursa olsun, satış geliri 1.50 $'dır. Gelir ile maliyet arasındaki farkı kâr olarak tanımlarsak, paket başına kârın ortalaması ile standart sapmasını bulun.

11. Alıştırma 4'teki bilgilere dönelim.

(a) Hafta içi bir günde bu otobüse bu semtten binen yolcu sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(b) Otobüs bileti 50 sent ise, bu otobüse bu semtten binen bütün yolcuların ödedikleri paranın ortalaması ile standart sapmasını bulun.

12. Alıştırma 5'teki bilgilere dönelim.

(a) (a) bölümündeki rassal değişken X'in ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(b) (b) bölümündeki rassal değişken Y'nin ortalaması ile standart sapmasını bulun.

13. Serbest atışların %75'ini sayıya çeviren bir üniversiteli basketbol oyuncusu "bire bir" bir atış yapmak için çizgiye gelmiştir (ilk atış başarılıysa ikinci bir atış yapmasına izin verilecek, ama ilk atışı kaçırırsa ikinci atışı yapamayacaktır; her başarılı atış bir sayı getirmektedir). Eğer yapılabilirse ikinci atışın sonucunun birinci atışınkinden bağımsız olduğunu varsayalım. "Bire bir" atıştan kazanılabilecek sayıların beklenen değerini bulun. Bu bulgunuzu, ilk atış ne olursa olsun ikinci atışa izin verilen "iki atışlık faul"den gelecek sayıların beklenen değeriyle karşılaştırın.

14. Bir öğretim üyesi ders verdiği kalabalık bir sınıf için başka bir derslikte akşam üzeri saat 7'ye bir sınav koymuştur. Sınavdan önceki bir saat içinde sınavın hangi sınıfta olduğunu sormak üzere arayacak öğrenci sayısı için aşağıdaki olasılıkları tahmin etmektedir.

ARAYAN SAYISI	0	1	2	3	4	5
OLASILIK	0.10	0.15	0.19	0.26	0.19	0.11

Arama sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

15. Büyük bir muhasebe sınıfındaki öğrencilerden dersi 1 (kötü) ile 5 (mükemmel) arasında değerlendirmeleri istenmiştir. Aşağıdaki çizelge öğrencilerin değerlendirmelerini yansıtmaktadır.

DEĞERLEME	1	2	3	4	5
ORAN	0.07	0.19	0.28	0.30	0.16

Değerlemelerin ortalaması ile standart sapmasını bulun.

16. Bir bakkal, komşu bir kentin, az sayıda kimi müşterilerce bazen aranan bir gazetesini bulundurmaktadır. Bu gazete bakkala 70 sente mal olmakta, o da bunu 90 sente satmaktadır. Gün içinde satılmayan gazetelerin değeri sıfıra inmekte ve atılmaktadır. Bakkal, elinde gazete kalmadığı için karşılayamadığı isteklerin, itibar kaybı nedeniyle kendisine 5 sentlik maliyeti olduğu kanısındadır. Gazetenin günlük talep sayısının olasılık dağılımı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bakkal günlük kârını, gazete satışı gelirlerinden gazete maliyetlerini ve karşılanamayan istekten doğan itibar kaybını çıkararak bulursa, beklenen kârını en yükseğe çıkarmak için günde kaç gazete almalıdır?

İSTEK SAYISI	0	1	2	3	4	5
OLASILIK	0.12	0.16	0.18	0.32	0.14	0.08

17. Bir fabrika yöneticisi sık sık bozulan bir makineyi değiştirmeyi düşünmektedir. Geçmişe yönelik ayıtlara göre bu makinenin haftalık bozulma sayısının olasılık dağılımı aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

BOZULMA SAYISI	0	1	2	3	4
OLASILIK	0.10	0.26	0.42	0.16	0.06

(a) Haftalık bozulma sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(b) Her bozulmanın üretim kaybı nedeniyle şirkete maliyetinin 1,500 $ olduğu tahmin edilmektedir. Bu makinenin bozulmasının şirkete haftalık maliyetinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.

18. Bir yatırımcı 1,000 $'lık bir yatırım için izleyebileceği üç yolu incelemektedir. Olası getiriler aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir.

YOL 1 □ 0.15 olasılıkla 10,000 $ kazanç, 0.85 olasılıkla 1,000 $ kayıp
YOL 2 □ 0.50 olasılıkla 1,000 $ kazanç, 0.30 olasılıkla 500 $ kazanç, 0.20 olasılıkla 500 $ kayıp
YOL 3 □ Kesinlikle 400 $ kazanç

Hangi yol en yüksek beklenen kazancı verir? Yatırımcıya bu yolu seçmesini salık verir misiniz?

4.4 ORTAK DAĞILIMLI KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER

Altbölüm 3.7'de ortak olasılıkları incelemiştik. Şimdi de, aralarında ilişki olabilecek iki ya da daha çok rassal değişkeni ele alacağız. Tek bir rassal değişkende olduğu gibi, ortaya çıkabilecek bütün sonuçlar için olasılıklar burada da bir olasılık fonksiyonuyla özetlenebilir. Ancak burada ilgilendiğimiz rassal değişkenlerin belli değerleri aynı anda alma olasılıklarını tanımlamamız gerekir.

Tanım

X ile Y kesikli iki rassal değişken olsun. Bunların **ortak olasılık fonksiyonu**, X'in belli bir x değerini, Y'nin de belli bir y değerini aynı anda alma olasılığını, x ile y'nin fonksiyonu olarak gösterir. Bunun için kullanılan simge $P_{X,Y}(x, y)$'dir.

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$$

Daha genel olarak, $X_1, X_2, \ldots, X_K$ değişkenleri K tane kesikli rassal değişken ise, bunların ortak olasılık fonksiyonu şudur:

$$P_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K) = P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_K = x_K)$$

ÇİZELGE 4.1 Tüketici hoşnutluğu (X) ile oturma süresi (Y) için olasılıklar

Y	X				
	1	2	3	4	TOPLAMLAR
1	0.04	0.14	0.23	0.07	0.48
2	0.07	0.17	0.23	0.05	0.52
Toplamlar	0.11	0.31	0.46	0.12	1.00

Bunu örneklemek için, biri tüketicilerin bir kentteki yiyecek satan yerlerden hoşnutluğunu, öteki ise o kentte oturduğu süreyi ölçen iki rassal değişkeni, sırasıyla X ve Y'yi ele alalım. Diyelim ki X, düşük hoşnutluk düzeyinden yükseğe doğru sıralanan 1, 2, 3, 4 değerlerini, Y de tüketicinin o kentte oturma süresi altı yıldan kısa ise 1, değilse 2 değerini alsın. Çizelge 4.1, X ile Y'nin sekiz ortak olasılığını göstermektedir. Bunlar, bu rassal değişken çiftinin ortak olasılık fonksiyonunu oluşturmaktadır.[2] Bu durumda sözgelimi

$$P_{X,Y}(1, 1) = 0.04 \qquad P_{X,Y}(1, 2) = 0.07$$

olur. Öyleyse sözgelimi, rassal seçilmiş bir tüketicinin hoşnutluk düzeyinin 1 olması ve o kentte altı yıldan uzun süredir oturuyor olmasının olasılığı 0.07'dir.

Ortak dağılımlı rassal değişkenlerle iş görürken, sık sık tekil rassal değişkenlerin olasılık dağılımlarıyla ilgileniriz.

Tanım

X ile Y, ortak dağılımlı bir rassal değişken çifti olsun. Bu bağlamda, rassal değişken X'in olasılık dağılımı fonksiyonuna **marjinal olasılık fonksiyonu** denir ve olanaklı bütün değerlerin ortak olasılıklarının toplanmasıyla bulunur; yani

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x, y)$$

Benzer biçimde, rassal değişken Y'nin marjinal olasılık fonksiyonu da şudur:

$$P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x, y)$$

Daha genel olarak, $X_1, X_2, \ldots, X_K$ ortak dağılımlı K tane kesikli rassal değişken ise, bunlardan herhangi birinin marjinal olasılık fonksiyonu, ötekilerin değerlerinin bütün olanaklı kombinasyonlarının ortak olasılıklarının toplanmasıyla bulunur.

[2] Bu olasılıklar şu kaynaktaki bulgulardan tahmin edilmiştir: J. A. Miller, "Store satisfaction and aspiration theory," *Journal of Retailing, 52* (Fall 1976), 65-84.

Çizelge 4.1'deki X ve Y rassal değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonları, satır ve sütun toplamlarından okunabilir. Tüketici hoşnutluğu için marjinal olasılık fonksiyonu şudur:

$$P_X(1) = 0.11 \qquad P_X(2) = 0.31 \qquad P_X(3) = 0.46 \qquad P_X(4) = 0.12$$

Öyleyse sözgelimi, rassal seçilmiş bir tüketicinin 1 hoşnutluk düzeyinde bulunma olasılığı 0.11'dir. Benzer biçimde, o kentte oturma süresi için

$$P_Y(1) = 0.48 \qquad P_Y(2) = 0.52$$

Burada rassal seçilmiş bir tüketicinin altı yıldan kısa süredir o kentte oturuyor olma olasılığı 0.48'dir.

Marjinal olasılıklar toplamının 1 etmesi gerektiğini daha önce görmüştük, buradan çıkan sonuç, ortak olasılıklar toplamının da 1 etmesi gerektiğidir. Üstelik, herhangi bir olasılık eksi olamayacağına göre, ortak olasılık fonksiyonları da şu çerçevedeki özellikleri taşımalıdır.

Kesikli Rassal Değişkenlerin Ortak Olasılık Fonksiyonlarının Özellikleri

X ile Y ortak olasılık fonksiyonu $P_{X,Y}(x, y)$ olan kesikli rassal değişkenler olsun. Bu durumda:

(i) Herhangi bir x ve y çifti için $P_{X,Y}(x, y) \geq 0$'dır.
(ii) $P_{X,Y}(x, y)$ ortak olasılıklarının olanaklı bütün değerler için toplamı 1 etmelidir.

Bir rassal değişkenin değerleri veriyken başka bir rassal değişkenin koşullu olasılık fonksiyonu, Altbölüm 3.7'de anlatılanın tıpkısı bir yolla bulunabilen koşullu olasılıklarının bir araya getirilmiş biçimidir.

Tanım

X ile Y, ortak dağılımlı kesikli bir rassal değişken çifti olsun. X rassal değişkeni x değerini alırken, Y rassal değişkeninin **koşullu olasılık fonksiyonu**, X için x değeri belirlenmişken, Y'nin y değerini alma olasılığını y'nin bir fonksiyonu olarak dile getirir. Bu da $P_{Y|X}(y \mid x)$ ile gösterilir, böylece koşullu olasılık fonksiyonundan şu bulunur:

$$P_{Y|X}(y \mid x) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_X(x)}$$

Benzer biçimde, $Y = y$ veriyken X'in koşullu olasılığı şudur:

$$P_{X|Y}(x \mid y) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)}$$

Örnek olarak, Çizelge 4.1'deki bilgilere yeniden bakalım. Tüketici hoşnutluğu 2 değerini almışken, oturma süresinin 1 değerini alma koşullu olasılığı şudur:

$$P_{Y|X}(1|2) = P(Y=1|X=2) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(X=2)} = \frac{P_{X,Y}(2,1)}{P_X(2)}$$

$$= \frac{0.14}{0.31} = 0.45$$

Yani, tüketicinin hoşnutluk düzeyi 2 iken, o kentte altı yıldan kısa süredir oturuyor olma olasılığı 0.45'tir. X veriyken Y'nin koşullu olasılık fonksiyonu Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Benzer biçimde, tüketicinin oturma süresi veriyken, hoşnutluk düzeyi için koşullu olasılık fonksiyonunu bulabiliriz. Y, 2 değerini alırken, X'in 4 değerini alma olasılığı şudur:

$$P_{X|Y}(4|2) = P(X=4|Y=2) = \frac{P(X=4 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{P_{X,Y}(4,2)}{P_Y(2)}$$

$$= \frac{0.05}{0.52} = 0.10$$

ÇİZELGE 4.2 Tüketicinin hoşnutluğu (X) veriyken, oturma süresinin (Y) koşullu olasılıkları

Y	X			
	1	2	3	4
1	0.36	0.45	0.50	0.58
2	0.64	0.55	0.50	0.42

ÇİZELGE 4.3 Tüketicinin oturma süresi (Y) veriyken, hoşnutluğunun (X) koşullu olasılıkları

Y	X			
	1	2	3	4
1	0.08	0.29	0.48	0.15
2	0.13	0.33	0.44	0.10

Dolayısıyla, bir tüketicinin o kentte oturma süresi en az altı yılken, en yüksek hoşnutluk düzeyinde bulunması olasılığı 0.10'dur. Y veriyken X'in koşullu olasılık fonksiyonu Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Bölüm 3'te bağımsız olaylar düşüncesini ele almıştık. Bu kavram, rassal değişkenlere doğrudan genişletilebilir.

Tanım

X ve Y rassal değişkenlerinin ancak ve ancak ortak olasılık fonksiyonları, marjinal olasılık fonksiyonlarının çarpımına eşitse, yani ancak ve ancak, olanaklı bütün x ve y çiftleri için

$$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

ise, X ve Y rassal değişkenleri **bağımsızdır** denir.

Daha genel olarak, ancak ve ancak

$$P_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K) = P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)\cdots P_{X_K}(x_K)$$

ise, K tane $X_1, X_2, \ldots, X_K$ rassal değişkeni bağımsızdır.

X ile Y rassal değişkenleri bağımsızsa, X veriyken Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunun, Y'nin marjinal olasılık fonksiyonuyla aynı olduğu, koşullu olasılık fonksiyonları tanımından çıkarılabilir; yani

$$P_{Y|X}(y \mid x) = P_Y(y)$$

yazılabilir. Benzer biçimde şu da çıkarılabilir:

$$P_{X|Y}(x \mid y) = P_X(x)$$

Çizelge 4.1 örneği için şunları biliyoruz:

$$P_{X,Y}(1, 1) = 0.04 \qquad P_X(1) = 0.11 \qquad P_Y(1) = 0.48$$

öyleyse,

$$P_X(1)P_Y(1) = (0.11)(0.48) = 0.05$$

olur. Bu da $P_{X,Y}(1, 1)$'den farklı olduğuna göre bu iki rassal değişken bağımsız değildir. Demek ki, bir kentte oturma süresi ile o kentin yiyecek satış yerlerinden hoşnut olma düzeyi arasında bir ilişki vardır. Sözgelimi, bir kentte altı yıldan kısa süredir oturan bir tüketicinin en yüksek hoşnutluk düzeyinde bulunması olasılığının 0.15 olduğunu Çizelge 4.3'ten görebiliriz. Altı yıldan uzun süredir o kentte oturanlar için benzeri olasılık yalnızca 0.10'dur.

Tek bir rassal değişkende olduğu gibi, bir dizi rassal değişkenin ortak olasılık dağılımı da, bunların ortak birikimli olasılık fonksiyonlarıyla gösterilebilir.

Tanım

Bir çift kesikli rassal değişken olan X ile Y'nin **ortak birikimli olasılık fonksiyonu** $F_{X,Y}(x_0, y_0)$, X'in x_0, Y'nin y_0 değerini aynı anda aşmama olasılığını, x_0 ve y_0 cinsinden gösterir. Yani şudur:

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = P(X \leq x_0 \cap Y \leq y_0)$$

Bu fonksiyon x_0 ile y_0'ın bütün değerleri üzerinden hesaplanmıştır. Bu da şöyle yazılabilir:

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = \sum_{x \leq x_0} \sum_{y \leq y_0} P_{X,Y}(x, y)$$

Buradaki simgeler, x ve y rassal değişken çiftinin $x \leq x_0$ ve $y \leq y_0$ koşullarını sağlayan bütün değerleri üzerinden toplama yapıldığını gösterir.

Çizelge 4.1 örneğindeki $F_{X,Y}(2, 1)$'i, yani $X \leq 2$ ve $Y \leq 1$ olasılığını alalım. Bu olasılık şudur:

$$F_{X,Y}(2, 1) = P_{X,Y}(1, 1) + P_{X,Y}(2, 1) = 0.04 + 0.14 = 0.18$$

Öyleyse, rassal seçilmiş bir tüketicinin o kentte oturma süresinin altı yıldan az ve hoşnutluk düzeyinin en çok 2 olma olasılığı 0.18'dir.

Bir önceki altbölümde tek bir rassal değişkenin bir fonksiyonunun beklenen değerini tanımlamıştık. Bu tanım, bir dizi rassal değişkenin fonksiyonlarına genişletilebilir.

Tanım

X ile Y, ortak olasılık fonksiyonları $P_{X,Y}(x, y)$ olan bir çift kesikli rassal değişken olsun. Bu rassal değişkenlerin herhangi bir $g(X, Y)$ fonksiyonunun **beklenen değeri** şöyle tanımlanır:

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) P_{X,Y}(x, y)$$

Daha genel olarak, K tane $X_1, X_2, \ldots, X_K$ rassal değişkeninin ortak olasılık fonksiyonu $P_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ ise, $g(X_1, X_2, \ldots, X_K)$ fonksiyonunun beklenen değeri şu olur:

$$E[g(X_1, X_2, \ldots, X_K)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_K} g(x_1, \ldots, x_K) P_{X_1, \ldots, X_K}(x_1, \ldots, x_K)$$

Rassal değişkenlerin bir fonksiyonunun beklenen değeri için önemli bir uygulama alanı **ortak varyans**tır. X ile Y'nin istatistik bakımından bağımsız olmayan bir rassal değişken çifti olduğunu düşünelim. Bunlar arasındaki ilişkinin özelliği ve gücünün bir ölçüsünü bilmek isteyebiliriz. Bunu sağlamak oldukça güçtür, çünkü çok çeşitli biçimlerde birbirleriyle ilişkili olabilirler. Konuyu yalınlaştırmak için, dikkatimizi doğrusal ilişki olasılığıyla sınırlayalım. Sözgelimi, X'in yüksek bir değeri ortalama olarak Y'nin yüksek bir değerine, X'in düşük bir değeri Y'nin düşük bir değerine öyle bir biçimde karşılık gelebilir ki, bu değerler bir serpilme çiziminde gösterilirse aralarından yaklaşık bir doğru geçirilebilir. Rassal değişken X'in ortalaması μ_X, Y'nin ortalaması da μ_Y olsun. $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ çarpımını ele alalım. Eğer X'in yüksek değerleri Y'nin yüksek değerlerine, X'in düşük değerleri de Y'nin düşük değerlerine karşılık geliyorsa, bu çarpımın artı değerli olmasını ve ilişki ne kadar güçlüyse, $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ çarpımının beklenen değerinin de o kadar büyük çıkmasını bekleriz. Tersine, X'in yüksek değerleri Y'nin düşük değerleriyle, X'in düşük değerleri de, Y'nin yüksek değerleriyle eşleşiyorsa, bu çarpımın beklenen değeri eksi olur. $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ için beklenen değerin 0 olması, X ile Y arasında doğrusal bir ilişkinin yokluğu anlamına gelir. Demek ki, anakütledeki doğrusal ilişkinin bir ölçüsü olarak $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$'nin beklenen değerini incelemeliyiz.[3]

Tanım

X ortalaması μ_X olan bir rassal değişken, Y de ortalaması μ_Y olan bir rassal değişken olsun. $(X-\mu x)(Y-\mu_Y)$'nin beklenen değerine X ile Y arasındaki **ortak varyans** denir, Orv(X, Y) ile gösterilir. Kesikli rassal değişkenler için şöyle yazılabilir:

$$\text{Orv}(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\sum_x\sum_y(x-\mu_X)(y-\mu_Y)P_{X,Y}(x,y)$$

Eşdeğer bir gösterimi[4] de şudur:

[3] Bu ölçünün yorum zorluklarından temizlendiği söylenemez. Özellikle, X ile Y'nin ölçü birimlerinden bağımsız değildir. Bu konuya Bölüm 12'de yeniden döneceğiz.

[4] Çünkü:

$$\begin{aligned}\sum_x\sum_y(x-\mu_X)(y-\mu_Y)P_{X,Y}(x,y)&=\sum_x\sum_y(xy-\mu_Y x-\mu_X y+\mu_X\mu_Y)P_{X,Y}(x,y)\\&=\sum_x\sum_y xyP_{X,Y}(x,y)-\mu_Y\sum_x\sum_y xP_{X,Y}(x,y)-\mu_X\sum_x\sum_y yP_{X,Y}(x,y)+\mu_X\mu_Y\\&=\sum_x\sum_y xyP_{X,Y}(x,y)-\mu_Y\sum_x xP_X(x)-\mu_X\sum_y yP_Y(y)+\mu_X\mu_Y\\&=\sum_x\sum_y xyP_{X,Y}(x,y)-\mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

$$\text{Orv}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \sum_x \sum_y xyP_{X,Y}(x, y) - \mu_X\mu_Y$$

Buna örnek vermek için, tüketici hoşnutluğu ile oturma süresi arasındaki ortak varyansı, Çizelge 4.1'deki olasılıkları kullanarak hesaplayalım. Önce bu iki rassal değişkenin ortalamalarını bulalım.

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xP_X(x) = (1)(0.11) + (2)(0.31) + (3)(0.46) + (4)(0.12) = 2.59$$

ve

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y yP_Y(y) = (1)(0.48) + (2)(0.52) = 1.52$$

X ile Y'nin çarpımlarının beklenen değeri de şudur:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xyP_{X,Y}(x, y) \\ &= (1)(1)(0.04) + (1)(2)(0.07) + (2)(1)(0.14) + (2)(2)(0.17) \\ &\quad + (3)(1)(0.23) + (3)(2)(0.23) + (4)(1)(0.07) + (4)(2)(0.05) \\ &= 3.89 \end{aligned}$$

Son olarak, ortak varyans da şöyle bulunur:

$$\text{Orv}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 3.89 - (2.59)(1.52) = -0.05$$

Ortak varyansın eksi olması, tüketici hoşnutluğunun yüksek değerlerinin o kentte kısa oturma süreleriyle eşleştiğinin, yani iki rassal değişken arasında *ters yönlü bir ilişki* bulunduğunun göstergesidir. Bu özellik de Çizelge 4.3'ün koşullu olasılıklarından görülebilir. O kentte en uzun süredir oturmakta olan tüketicilerin, ötekilerle karşılaştırıldığında, düşük hoşnutluk düzeylerinde kalmaları daha gerçekleşebilir, yüksek hoşnutluk düzeylerine çıkmaları daha az gerçekleşebilir gibi görünmektedir.

Beklenebileceği gibi, ortak varyans kavramı ile istatistik bağımsızlık birbiriyle ilişkisiz değildir.

Ortak Varyans ile İstatistik Bağımsızlık

Bir rassal değişken çifti istatistik bakımından bağımsız ise, aralarındaki ortak varyans 0'dır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir.

Ortak varyansın 0 olmasının istatistik bağımsızlık göstermeyebilmesinin nedeni şudur: Ortak varyans doğrusal bir ilişkiyi ölçmek üzere tasarlanmıştır, başka türden bağımlılıkları tamyamayabilir. Uç bir örnek olarak X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonunun şöyle olduğunu düşünelim:

$$P_X(-1) = \frac{1}{4} \qquad P_X(0) = \frac{1}{2} \qquad P_X(1) = \frac{1}{4}$$

Y rassal değişkeni de şöyle tanımlansın:

$$Y = X^2$$

Böylece, X'in hangi değeri aldığını bilirsek, Y'nin aldığı değeri de biliriz, demek ki iki rassal değişken kesinlikle bağımsız değildir. $X = 0$ olduğunda, $Y = 0$ olacağını, X, -1 ya da 1 ise $Y = 1$ olacağını biliriz. Öyleyse X ile Y'nin ortak olasılık fonksiyonu şudur:

$$P_{X,Y}(-1, 1) = \frac{1}{4} \qquad P_{X,Y}(0, 0) = \frac{1}{2} \qquad P_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{4}$$

Bu değerlerin başka herhangi bir kombinasyonunun olasılığı 0'dır. Bu durumda şunun doğruluğunu göstermek kolaydır:

$$E(X) = 0 \qquad E(Y) = \frac{1}{2} \qquad E(XY) = 0$$

Bu demektir ki X ile Y'nin arasındaki ortak varyans 0'dır.

Ortak dağılımlar konusunu noktalayabilmek için, başka rassal değişkenlerin toplamı ya da farkı olarak yazılabilen rassal değişkenin ortalaması ile varyansım ele alalım.

Rassal Değişkenlerin Toplamları ile Farkları

X ile Y, ortalamaları μ_X ve μ_Y ve varyansları σ_X^2 ve σ_Y^2 olan iki rassal değişken olsun. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(i) Toplamlarının beklenen değeri, beklenen değerlerinin toplamıdır.

$$E(X + Y) = \mu_X + \mu_Y$$

(ii) Farklarının beklenen değeri, beklenen değerlerinin farkıdır:

$$E(X - Y) = \mu_X - \mu_Y$$

(iii) X ile Y arasındaki ortak varyans 0 ise, toplamlarının varyansı, varyanslarının toplamıdır.

$$\text{Var}(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

(iv) X ile Y arasındaki ortak varyans 0 ise, farklarının varyansı, varyanslarının *toplamı*dır.

$$\text{Var}(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$X_1, X_2, \ldots, X_K$, ortalamaları $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ ve varyansları $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_K^2$ olan rassal değişkenler olsun. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(v) Toplamlarının beklenen değeri şudur:

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_K$$

(vi) Bu rassal değişkenlerin her bir çifti arasındaki ortak varyans 0 ise, toplamlarının varyansı şöyle olur:

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_K^2$$

Buradaki (iii), (iv) ve (vi) özelliklerinin, rassal değişkenler arasındaki ortak varyans sıfırken geçerli olduğuna dikkat edin. Daha genel olarak, X ile Y arasındaki ortak varyans Orv(X, Y) ise, şu eşitliklerin doğruluğu gösterilebilir.

$$\text{Var}(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\,\text{Orv}(X, Y)$$

ve

$$\text{Var}(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\,\text{Orv}(X, Y)$$

ÖRNEK 4.7

Bir yatırımcının 1,000 $'ı vardır ve önünde, her biri en az 500 $ gerektiren iki yatırım olanağı bulunmaktadır. Birincinin 100 $ başına kazancı rassal bir değişken olan X ile gösterilebilir. Bunun olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

x	−5	20
$P_x(x)$	0.4	0.6

İkincinin 100 $ başına kazancı rassal bir değişken olan Y ile gösterilebilir. Bunun olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

y	0	25
$P_y(y)$	0.6	0.4

X ile Y rassal değişkenleri bağımsızdır.

Yatırımcı şu üç yoldan birini izleyebilir:

(a) İlk yatırıma 1,000 $ yatırabilir
(b) İkinci yatırıma 1,000 $ yatırabilir
(c) Her iki yatırıma 500'er $ yatırabilir

İzlenebilecek her bir yoldaki kazancın ortalaması ile varyansını bulun.

Rassal değişken X'in ortalaması

$$\mu_X = E(X) = \sum xP_X(x) = (-5)(0.4) + (20)(0.6) = 10\ \$,$$

varyansı

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum (x-\mu_X)^2 P_X(x)$$
$$= (-5-10)^2(0.4) + (20-10)^2(0.6) = 150$$

olur. Demek ki (a) yolunun ortalama kazancı

$$E(10X) = 10E(X) = 100\ \$,$$

olup varyansı şöyledir:

$$\text{Var}(10X) = 100\ \text{Var}(X) = 15{,}000$$

Rassal değişken Y'nin ortalaması

$$\mu_Y = E(Y) = \sum yP_Y(y) = (0)(0.6) + (25)(0.4) = 10\ \$$$

varyansı

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = \sum (y-\mu_Y)^2 P_Y(y)$$
$$= (0-10)^2(0.6) + (25-10)^2(0.4) = 150$$

olur. Demek ki (b) yolunun ortalama kazancı

$$E(10Y) = 10E(Y) = 100\ \$,$$

olup varyansı şöyledir:

$$\text{Var}(10Y) = 100\ \text{Var}(Y) = 15{,}000$$

Şimdi de (c) yolunun kazancı olan $5X + 5Y$'nin ortalamasını bulalım:

$$E(5X+5Y) = E(5X) + E(5Y) = 5E(X) + 5E(Y) = 100\ \$$$

Demek ki bütün yolların beklenen kazancı aynıdır. Ama, X ile Y bağımsız olduğundan, dolayısıyla ortak varyansları da 0 olduğundan, (c) yolunun kazancının varyansı şudur:

$$\text{Var}(5X+5Y) = \text{Var}(5X) + \text{Var}(5Y) = 25\sigma_X^2 + 25\sigma_Y^2 = 7{,}500$$

Bu varyans öbür yolların varyanslarından küçük olup, bir yatırım portföyündeki çeşitleme sonucu riskteki azalmayı yansıtır. Bu yatırımcı kesinlikle (c) yolunu izlemelidir, çünkü bu yol öbür ikisiyle aynı beklenen kazancı, daha düşük riskle getirmektedir.

Bu bölümün bundan sonraki altbölümlerinde, işletmecilik alanında önemli uygulamaları bulunan, özel bazı kesikli olasılık dağılımlarını inceleyeceğiz.

ALIŞTIRMALAR

19. Bir araştırmacı, dönem sonu sınavı haftası boyunca öğrencilerin bir gündeki yemek arası atıştırmalarının sayısının, öğrencinin o gün gireceği sınav sayısına bağlı olabileceğini düşünmektedir. Aşağıdaki çizelge, bir alan araştırmasından tahmin edilen ortak olasılıkları göstermektedir.

ATIŞTIRMA SAYISI (Y)	SINAV SAYISI (X)			
	0	1	2	3
0	0.07	0.09	0.06	0.01
1	0.07	0.06	0.07	0.01
2	0.06	0.07	0.14	0.03
3	0.02	0.04	0.16	0.04

(a) X'in olasılık fonksiyonunu, dolayısıyla da öğrencilerin o gün girdikleri ortalama sınav sayısını bulun.
(b) Y'nin olasılık fonksiyonunu, dolayısıyla da öğrencilerin o günkü ortalama atıştırma sayısını bulun.
(c) $X = 3$ veriyken, Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunu bulup yorumlayın.
(d) X ile Y arasındaki ortak varyansı bulun.
(e) Atıştırma sayısı ile sınav sayısı birbirinden bağımsız mıdır?

20. Bir emlâk komisyoncusu, bir gazete reklâmındaki satır sayısıyla, olası kiracıların başvuru hacmi arasındaki ilişkiyle ilgilenmektedir. Başvuru hacmini, düşük ilgi için 0, orta düzeyde ilgi için 1, yüksek düzeyde ilgi için 2 değerlerini alan rassal değişken X ile gösterelim. Emlâk komisyoncusu, aşağıdaki çizelgede gösterilen ortak olasılıkları tahmin etmiştir.

SATIR SAYISI (Y)	BAŞVURU HACMİ (X)		
	0	1	2
3	0.09	0.14	0.07
4	0.07	0.23	0.16
5	0.03	0.10	0.11

(a) $X = 1$, $Y = 4$ için ortak birikimli olasılık fonksiyonunu bulun, bulgunuzu yorumlayın.
(b) $X = 0$ veriyken, Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunu bulup yorumlayın.
(c) $Y = 5$ veriyken, X'in koşullu olasılık fonksiyonunu bulup yorumlayın.
(d) X ile Y arasındaki ortak varyansı bulup yorumlayın.
(e) Reklâmdaki satır sayısıyla başvuru hacmi birbirinden bağımsız mıdır?

21. Aşağıdaki çizelge, bir ile üç arasında kredi kartı olanlar için, eldeki kart sayısı (X) ile bir haftada yapılan kredili alışveriş sayısı (Y)'nin ortak olasılıklarını göstermektedir.

KART SAYISI (X)	HAFTALIK ALIŞVERİŞ SAYISI (Y)				
	0	1	2	3	4
1	0.08	0.13	0.09	0.06	0.03
2	0.03	0.08	0.08	0.09	0.07
3	0.01	0.03	0.06	0.08	0.08

(a) Bu kimselerden rassal olarak seçilen biri için haftalık alışveriş sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

(b) Bu kimselerden üç kartı olan biri için haftalık alışveriş sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

(c) Eldeki kart sayısıyla yapılan alışveriş sayısı birbirinden bağımsız mıdır?

22. Bir pazar araştırmacısı, geç saatlerdeki bir TV programında tanıtımı yapılan yeni bir kişisel bilgisayar modelinin, programı düzenli izleyenler arasında mı, yoksa izlemeyenler arasında mı daha çok tanındığını belirlemek istemektedir. Bir alan araştırmasından sonra, bütün deneklerin %15'inin hem programı düzenli izlediği, hem de ürünü tanıdığı anlaşılmıştır. Ayrıca, bütün deneklerin %16'sı programı düzenli izlemekte, %45'i ürünü tanımaktadır. Aşağıdaki gibi iki rassal değişken tanımlayalım:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{programı düzenli izliyorsa} \\ 0 & \text{izlemiyorsa} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{ürünü tanıyorsa} \\ 0 & \text{tanımıyorsa} \end{cases}$$

(a) X ile Y'nin ortak olasılık fonksiyonunu bulun.

(b) $X = 1$ veriyken, Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunu bulun.

(c) X ile Y'nin arasındaki ortak varyansı bulup yorumlayın.

23. Üniversitelere kitap satan bir satıcı, öğretim üyelerinin odalarını dolaşmakta olup öğretim üyelerinin odalarında bulunmamalarının Cuma günleri öteki günlere göre daha olası olduğunu düşünmektedir. Beştebirinin Cuma günleri yapıldığı bu uğramalara ilişkin kayıtlardan çıkardığına göre, Cuma uğramalarının %16'sında öğretim üyesini bulamamakta, bu oran öteki günlerde yalnızca %12 olmaktadır. Rassal değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{uğrama günü Cuma ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{öğretim üyesi odasında değilse} \\ 0 & \text{odasındaysa} \end{cases}$$

(a) X ile Y'nin ortak olasılık fonksiyonunu bulun.
(b) $X = 0$ veriyken, Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunu bulun.
(c) X'in ve Y'nin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulun.
(d) X ile Y'nin arasındaki ortak varyansı bulup yorumlayın.

24. Bir lokanta yöneticisi zaman zaman hem yemek, hem hizmetle ilgili yakınmalar duymaktadır. Her iki konudaki haftalık yakınma sayısının marjinal olasılık fonksiyonları aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Eğer yemekle ve hizmetle ilgili yakınmalar birbirinden bağımsızsa, ortak olasılık fonksiyonunu bulun.

YEMEKLE İLGİLİ YAKINMA SAYISI	OLASILIK	HİZMETLE İLGİLİ YAKINMA SAYISI	OLASILIK
0	0.12	0	0.18
1	0.29	1	0.38
2	0.42	2	0.34
3	0.17	3	0.10

25. Alıştırma 24'teki bilgilere dönelim. Bir haftada yapılan yakınmaların toplam sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun. Bu noktadan sonra yemekle ve hizmetle ilgili yakınmaların birbirinden bağımsız olmayabileceğini düşünüyorsunuz. Ancak bu bağımlılığın biçimi konusunda elinizde hiçbir bilgi yok. Bu durumda, bir haftada alınan yakınmaların toplam sayısının ortalaması ile standart sapması konusunda ne söyleyebilirsiniz?

26. Bir şirketin geniş alanlardan sorumlu beş, daha dar alanlardan sorumlu on temsilcisi vardır. Her iki tür temsilciden bir günde alınan sipariş sayılarının olasılık dağılımları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Herhangi bir temsilciden alınan sipariş sayısının, başka bir temsilciden alınan sipariş sayısından bağımsız olduğunu varsayarak, şirketin bir günde aldığı toplam sipariş sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

SİPARİŞ SAYISI (GENİŞ ALANLAR)	OLASILIK	SİPARİŞ SAYISI (DAR ALANLAR)	OLASILIK
0	0.08	0	0.18
1	0.16	1	0.26
2	0.28	2	0.36
3	0.32	3	0.13
4	0.10	4	0.07
5	0.06		

27. Altbölüm 4.4'te verilen bulgulara göre, X ve Y gibi herhangi iki rassal değişken için $(X - Y)$'in varyansı ile $(Y - X)$'in varyansı aynıdır. Bunun neden böyle olmasının beklendiğini açıklayın. [$(Y - X) = -(X - Y)$ olduğuna dikkat edin.]

4.5 BİNOM DAĞILIMI (İKİTERİMLİ DAĞILIM)

Rassal bir denemenin, kolaylık olsun diye "başarı" ve "yenilgi" diye adlandıracağımız, bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olan yalnızca iki sonuç verdiğini düşünelim. Başarının olasılığına p diyelim, böylece yenilginin olasılığı da $(1-p)$ olur. Şimdi de, deneme başarıyla sonuçlanırsa 1, aksi halde 0 değerini alan bir X rassal değişkeni tanımlayalım. Bu durumda bu rassal değişkenin olasılık fonksiyonu şöyledir:

$$P_X(0) = (1-p) \qquad P_X(1) = p$$

Bu dağılım **Bernoulli (Bernuli) dağılımı** diye tanınır. Ortalaması ile varyansı, Altbölüm 4.3'teki tanımların doğrudan uygulanmasıyla bulunabilir. Bir Bernoulli rassal değişkeninin ortalaması

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x P_X(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

olup varyansı şöyledir:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_x (x-\mu_X)^2 P_X(x)$$

$$= (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

ÖRNEK 4.8

Bir sigortacı belli bir görüşmenin satışla sonuçlanma olasılığının 0.4 olduğuna inanmaktadır. Bir satış yapılırsa 1, yapılmazsa 0 değerini alan bir X rassal değişkeni tanımlanırsa, o zaman X, başarı olasılığı p'nin 0.4 olduğu bir Bernoulli dağılımı gösterir; yani X'in olasılık dağılımı şöyle olur:

$$P_X(0) = 0.6 \qquad P_X(1) = 0.4$$

Bu dağılımın ortalaması $p = 0.4$, varyansı da şöyledir:

$$\sigma_X^2 = p(1-p) = (0.4)(0.6) = 0.24$$

Bernoulli dağılımının önemli bir genellemesi, iki olası sonucu olan rassal bir denemenin çok kez yinelenmesiyle ilgilidir. Tek bir denemedeki başarı olasılığını yine p olarak aldığımızı ve bir deneme sonucunun öteki denemeler üzerinde bir etki yaratmadığı n tane bağımsız deneme yaptığımızı düşünelim. Bu n denemeden başarıyla sonuçlananların sayısını gösteren X, 0'dan n'ye kadar herhangi bir tamsayı olabilir. Biz de n denemede tam tamına $X = x$ çıkma olasılığıyla ilgileniyor olalım.

Bulgularımızı iki aşamada geliştireceğiz. Önce, n denemede n tane sonuç elde edileceğine dikkat edin, bunların her biri ya başarı (B) ya da yenilgi (Y) olabilir. x tane başarı ve $(n-x)$ tane yenilgi için bir diziliş şöyledir:

$$\underbrace{B, B, \ldots, B}_{x \text{ tane}} \qquad \underbrace{Y, Y, \ldots, Y}_{(n-x) \text{ tane}}$$

Sözle belirtirsek, ilk x deneme başarı, kalanlar yenilgi göstermiştir. Şimdi, tek bir denemede başarı olasılığı p, yenilgi olasılığı $(1-p)$'dir. n deneme birbirinden bağımsız olduğuna göre, sonuçların herhangi bir diziliminin olasılığı, olasılıkların çarpımı kuralına göre (Altbölüm 3.6), tekil sonuçların olasılıklarının çarpımına eşittir. Öyleyse yukarıda belirtilen belli dizilimi gözlemleme olasılığı şöyledir:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \cdots \cdot p \cdot}_{x \text{ tane}} \qquad \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \cdots \cdot (1-p)}_{(n-x) \text{ tane}} = p^x (1-p)^{n-x}$$

Bu akıl yürütme yoluyla, x tane başarı, $(n-x)$ tane yenilgi gösteren herhangi bie belli dizilimi gözleme olasılığının $p^x(1-p)^{n-x}$ olduğu anlaşılır.

Bizim başlangıçta ilgilendiğimiz şey belli bir dizilimin gerçekleşme olasılığı değil, dizilişi nasıl olursa olsun, tam tamına x tane başarının olasılığıydı. x tane başarının, $(n-x)$ tane yenilgiyle birlikte çeşitli dizilişleri vardır. Aslında, bu olanakların sayısı, n nesnenin x taneli kombinasyonlarının sayısıdır, çünkü n tane konum arasından herhangi x tane konumu başarıları yerleştirmek için seçebiliriz. Dolayısıyla Altbölüm 3.5'e göre, şu yazılabilir:

$$n \text{ denemede } x \text{ tane başarı içeren dizilişlerin sayısı}^5 = {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Üstelik, herhangi ikisi aynı anda gerçekleşemeyeceğinden bu dizilişler bağdaşmazlar.

Şimdi, "n denemede x tane başarı" olayının, her birinin olasılığı $p^x(1-p)^{n-x}$ olan ${}_nC_x$ tane bağdaşmaz biçimde gerçekleşebileceğini göstermiş bulunuyoruz. Öyleyse, olasılıkların toplamı kuralını (Altbölüm 3.6) kullanırsak, aranan olasılık, bu ${}_nC_x$ tane tekil olasılığın toplamıdır, yani

$$P(n \text{ denemede } x \text{ tane başarı}) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Binom Dağılımı (İkiterimli Dağılım)

Rassal bir denemenin "başarı" ve " yenilgi" olarak iki bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı biçimde sonuçlanabileceğini ve tek bir denemedeki başarı olasılığının p

[5] Bu gösterimde $0! = 1$ tanımı yaptığımıza dikkat edin.

olduğunu düşünelim. Eğer birbirinden bağımsız n tane deneme yapılırsa, ortaya çıkan başarı sayısı X'in dağılımına **binom dağılımı (ikiterimli dağılım)** denir. Bunun olasılık fonksiyonu şudur:

$$P_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ için}$$

ÖRNEK 4.9

Alıştırma 4.8'deki sigortacının beş görüşme yaptığım, bunların her biri için satış yapma olasılığının 0.4 olduğunu düşünelim. O zaman satış sayısı X'in dağılımı, $n = 5, p = 0.4$ olan bir binom dağılımı olur, yani

$$P_X(x) = \frac{5!}{x!(5-x)!} (.4)^x (.6)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 5 \text{ için}$$

Başarı (yapılan satış) sayılarının olasılıkları da şunlardır:

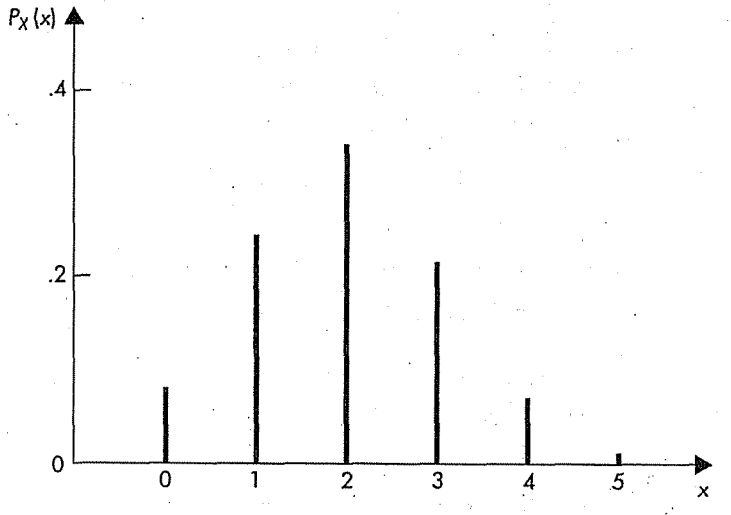
$$P(0 \text{ başarı}) = P_X(0) = \frac{5!}{0!5!} (0.4)^0 (0.6)^5 = (0.6)^5 = 0.078$$

$$P(1 \text{ başarı}) = P_X(1) = \frac{5!}{1!4!} (0.4)^1 (0.6)^4 = (5)(0.4)(0.6)^4 = 0.259$$

$$P(2 \text{ başarı}) = P_X(2) = \frac{5!}{2!3!} (0.4)^2 (0.6)^3 = (10)(0.4)^2 (0.6)^3 = 0.346$$

$$P(3 \text{ başarı}) = P_X(3) = \frac{5!}{3!2!} (0.4)^3 (0.6)^2 = (10)(0.4)^3 (0.6)^2 = 0.230$$

ÇİZİM 4.5 Örnek 4.9 ($n = 5, p = 0.4$) için binom dağılımı fonksiyonu



$$P(4 \text{ başarı}) = P_X(4) = \frac{5!}{4!1!}(0.4)^4(0.6)^1 = (5)(0.4)^4(0.6) = 0.077$$

$$P(5 \text{ başarı}) = P_X(5) = \frac{5!}{5!0!}(0.4)^5(0.6)^0 = (0.4)^5 = 0.010$$

Olasılık fonksiyonu Çizim 4.5'te gösterilmiştir. Dağılımın biçimi, p'nin ne çok küçük ne de çok büyük olduğu durumlarda oldukça sık rastlanılan binom dağılımı biçimidir. Uçlarda (0 ya da 5 başarıda) olasılıklar epeyi küçüktür, çünkü her iki durumda da bu olayı veren tek bir diziliş sözkonusudur. Dağılımın ortalarına doğru olasılıklar yükselir (doruk noktasının konumu p'ye bağlıdır), buralarda olanaklı diziliş sayısı daha yüksektir.

Binom dağılımının ortalaması ile varyansını bulmak için, Bernoulli dağılımına dönmek kolaylık sağlar. Her birinin başarı olasılığı p olan n bağımsız deneme alalım, eğer deneme başarı ile sonuçlanırsa $X = 1$, sonuçlanmazsa 0 diyelim. Dolayısıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rassal değişkenleri, her birinin başarı olasılığı p olan, n tane bağımsız Bernoulli değişkenidir. Üstelik, toplam başarı sayısı X de şöyle bulunur:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Bu, binom rassal değişkeninin, bağımsız Bernoulli rassal değişkenlerinin toplamı olması demektir. Şimdi, Bernoulli rassal değişkeninin ortalaması ile varyansını zaten bulduğumuza göre, binom dağılımının ortalaması ile varyansını bulmada Altbölüm 4.4'teki bulgular kullanılabilir. Bir Bernoulli değişkeni için

$$E(X_i) = p \qquad \text{ve} \qquad \text{Var}(X_i) = p(1-p) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \text{ için}$$

olduğunu anımsayın. O zaman binom dağılımı için

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

olur. Bernoulli rassal değişkenleri bağımsız olduğuna göre herhangi bir çift için ortak varyans sıfırdır, varyans da şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \cdots + \text{Var}(X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$

Binom Dağılımının Ortalaması ile Varyansı

Her birinin başarı olasılığı p olan n tane bağımsız denemedeki başarı sayısına X diyelim. Bu durumda X, ortalaması

$$\mu_X = E(X) = np$$

ve varyansı

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = np(1-p)$$

olan bir binom dağılımıdır.

ÖRNEK 4.10

Örnek 4.9'a dönelim. Her birinin satış olasılığı 0.4 olan beş görüşme yapan sigortacı için satışların ortalaması (ya da beklenen değeri)

$$\mu_X = np = (5)(0.4) = 2$$

varyansı

$$\sigma_X^2 = np(1-p) = (5)(0.4)(0.6) = 1.2$$

dolayısıyla standart sapması

$$\sigma_X = \sqrt{1.2} = 1.10$$

olur.

Binom dağılımının biçimine ilişkin bilgilerimiz veriyken, belli bir aralığa düşen başarı sayısının olasılığım bulmak kolaydır. "0 başarı", "1 başarı", vb. olaylar bağdaşmaz olduğundan, aranan olasılık, o aralıktaki bütün başarı sayılarının olasılıklarının toplamıdır.

ÖRNEK 4.11

Örnek 4.9'a dönelim. 2 ile 4 (her ikisi de içinde) arasındaki başarı sayısının olasılığı kaçtır? Aranan olasılık şudur:

$$P(2 \le X \le 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= P_X(2) + P_X(3) + P_X(4)$$

bu da, Örnek 4.9 bulgularıyla aşağıdaki gibi olur:

$$0.346 + 0.230 + 0.077 = 0.653$$

En az bir başarının olasılığı kaçtır? Bunu doğrudan şöyle bulabiliriz:

$$P(X \ge 1) = P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) + P_X(5)$$

Ama bu gereksiz derecede uzun bir iştir. Her kesikli değişkenin olasılıkları toplamı 1'dir, öyleyse

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - P_X(0) = 1 - 0.078 = 0.922$$

Deneme sayısı n çok küçük olmadıkça, binom olasılıklarının hesaplanması son derece zaman alıcıdır. Ancak gerçek yaşamdaki uygulamalarda bu hesaplamalar elektronik bilgisayarla ya da programlanmış hesap makinesiyle kolayca

yapılabilir. Dahası, Altbölüm 4.7'de ve gelecek bölümde göreceğimiz gibi, deneme sayısı n epeyi büyükken aranan olasılıklar, binom dağılımına uygun yakınsamalarla bulunabilir. Soru çözmeyi kolaylaştırmak için, Ekler'deki Çizelge 1, 20'ye kadar olan n değerleri ve $p = 0.5$'e kadar seçilmiş bazı p değerleri için binom olasılıklarını sıralamıştır. Daha yüksek p değerleri için şu kuralı uygulayın:[6]

- P[tek bir denemedeki başarı olasılığı p iken n denemede x tane başarı] = P[tek bir denemde başarı olasılığı $(1-p)$ iken n denemede $(n-x)$ tane başarı]
- Bunu örnekleyelim. $p = 0.6$ iken oniki denemede yedi başarı olasılığı ile, $p = 0.4$ iken oniki denemede beş başarı olasılığı aynıdır. Yani, $x = 7$, $n = 12$, $p = 0.6$ formülde yerine konursa P[tek bir denemedeki başarı olasılığı 0.6 iken 12 denemede 7 tane başarı] = P[tek bir denemede başarı olasılığı 0.4 iken 12 denemede 5 tane başarı]
- Bu olasılık Çizelge 1'den 0.2270 olarak doğrudan okunabilir. Bu değerin çizelgedeki konumu, çizelgenin ilk iki sütunundan $n = 12$, $x = 5$ satırında belirlenebilir; daha sonra $p = 0.40$ sütunundan aranan olasılık okunabilir.

ÖRNEK 4.12

Bir toplantıya katılan yirmi katılımcıya akşam yemeği çağrıları gönderilmiştir. Çağrılan her katılımcı için çağrıyı kabul olasılığının 0.9 olduğuna inanılmaktadır. Bu çağrıya uyma kararlarının bağımsız alındığı varsayılırsa, en çok onyedi kişinin çağrıyı kabul olasılığı kaçtır?

Rassal değişken X, kabul sayısını göstersin. O zaman X, $n = 20$, $p = 0.9$ olan bir binom dağılımına uyar. Aradığımız şudur:

$$P(X \leq 17) = 1 - P(X = 18) - P(X = 19) - P(X = 20)$$
$$= 1 - P_X(18) - P_X(19) - P_X(20)$$

Şimdi, $n = 20$ iken, $p = 0.9$ için onsekiz başarının olasılığı, $p = 0.1$ için iki başarının olasılığıyla aynıdır. Ekler'de Çizelge 1'den $P_X(18) = 0.2852$ buluruz. Benzer biçimde, $P_X(19) = 0.2702$, $P_X(20) = 0.1216$ bulunur. Öyleyse, en çok onyedi kabul olasılığı şudur:

$$P(X \leq 17) = 1 - 0.2852 - 0.2702 - 0.1216 = 0.323$$

Binom dağılımının önemli bir uygulama alanı **kabul örneklemesi**dir. Bir işletme bir üreticiden çok büyük miktarda mal aldığında, niteliklerine bakarak bu malları kabul edip etmeyeceğine karar vermek zorundadır. Çoğu zaman gelen partinin bütününün inceden inceye denetlenmesi olanaksız denebilecek ölçüde

[6] Binom olasılık fonksiyonunda x ile $(n-x)$'in yeri değiştirilerek bu kuralın doğruluğu görülebilir.

pahalıya mal olacağından, küçük bir rassal örneklem[7] seçilip incelenebilir. Bu inceleme sonuçlarına göre, partinin kabul edilip edilmeyeceği konusunda karar verilir. Bu türden herhangi bir belli karar kuralı için, belli bir kusurlu parça oranıyla gelen bir partiyi kabul etme olasılığı hesaplanabilir. Bunun yapılabilmesinin nedeni, partideki kusurlu oranı p, seçilen birim sayısı n ise,[8] örneklemdeki kusurlu sayısı X, şu olasılık fonksiyonuyla binom dağılımına uyar:

$$P_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ için}$$

Aşağıdaki örnek partiyi kabul olasılıklarının nasıl hesaplanabileceğini göstermektedir.

ÖRNEK 4.13

Bir şirket, çok büyük sayıda birimden oluşan bir parti malı, rassal seçilmiş yirmi birimlik bir örneklemde birden çok kusurlu parça çıkmazsa kabul etmektedir. Böylelikle, kusurlu parça sayısı sıfır ya da bir ise parti kabul edilmektedir. Örneklemdeki kusurlu parça sayısı X için, olasılık fonksiyonu $P_X(x)$ ise şu yazılabilir:

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = P_X(0) + P_X(1)$$

Partideki kusurlu oranının $p = 0.1$ olduğunu düşünelim. $N = 20$ için, örneklemde sıfır ve bir kusurlu parça olma olasılıklarını Ekler'deki Çizelge 1'den sırasıyla $P_X(0) = 0.1216$ ve $P_X(1) = 0.2702$ olarak doğrudan buluruz. Öyleyse, bu karar kuralı ile şirketin partiyi kabul olasılığı şudur:

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = 0.1216 + 0.2702 = 0.3918$$

Benzer biçimde, partideki kusurlu oranı %20 olsa, yani $p = 0.2$ ise,

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = 0.0115 + 0.0576 = 0.0691$$

$p = 0.3$ için de

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = 0.0008 + 0.0068 = 0.0076$$

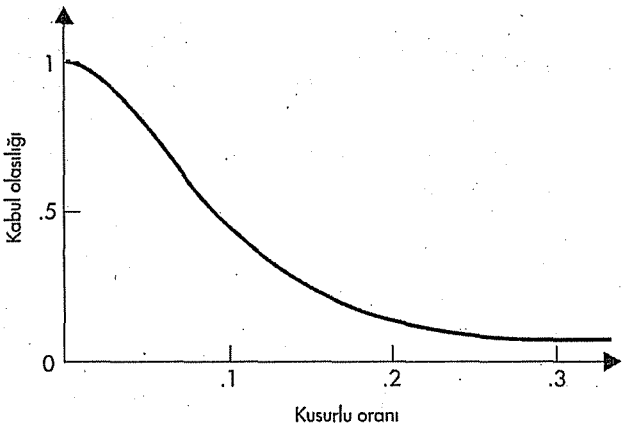
olur.

Örnek 4.13'ten görülebileceği gibi, partideki kusurlu oranı yükseldikçe, partinin kabul şansı azalmaktadır. Kabul olasılığı ile partideki kusurlu oranını Çizim 4.6'daki gibi gösterebiliriz. Bu çizim, herhangi bir kusurlu parça oranına karşılık gelen kabul olasılıklarının okunabilmesini sağlar.

---

[7] n birimlik bir **rassal örneklem**, gelen partiden seçilecek n birimlik her kümenin seçilme şansları eşit olacak biçimde seçilmesi anlamına gelir. Bölüm 6'da bu kavram ayrıntılarıyla incelenecektir.

[8] Örnekleme giren n tane birimin, gelen parti içinde çok küçük bir oran oluşturduğunu varsayıyoruz. Bu varsayımın sağlanmadığı durumlarda ne yapılabileceğini bir sonraki bölümde göreceğiz.



ÇİZİM 4.6 Yirmilik bir örneklemde ikiden az kusurlu birim çıkarsa parti kabul edildiğinde kusurlu oranının bir fonksiyonu olarak kabul olasılığı

Çeşitli örneklem büyüklükleri n'ler ve çeşitli kabul kuralları seçilerek, kabul olasılıklarını bir partideki kusurlu oranıyla ilişkilendiren bir dizi eğri çizilebilir kuşkusuz. Bir şirket bu yolla, belli kusurlu olasılıklardaki partileri kabul etme maliyeti ile nitelik denetimi maliyetini istenen dengede tutabilecek bir tasarımı seçebilecektir.

4.6 HİPERGEOMETRİK DAĞILIM

Örnek 4.13'te çok büyük bir parti maldan çekilen bir örneklemin kusurlu parçalar için incelenmesi durumunu ele aldık. Örneklenen sayının, partideki toplam birim sayısına göre çok küçük olduğunu varsayarak, soruna binom dağılımı yoluyla yaklaşabildik. Ancak, örneklem birimlerinin anakütledeki toplam birim sayısı içinde çok küçük bir oran oluşturmadığı durumlarda binom dağılımı uygun değildir. Bunun nedeni, bu gibi durumlarda, tekil birimlerin örneklemdeki sonuçlarının birbirinden bağımsız olmayacağıdır. Örnek olarak, bir parti malda, üç tanesi kusurlu olmak üzere, on birim bulunduğunu düşünelim. Bunlardan biri rassal seçildiğinde, bunun kusurlu çıkma olasılığı 3/10'dur. Şimdi, ikinci birimin seçildiğini düşünelim. Eğer ilk birim kusurluysa, kalan dokuz birimden ikisi kusurludur, böylece ilk birim kusurluyken ikinci birimin de kusurlu çıkma olasılığı 2/9 olur. İlk birim kusurlu değilken ikinci birimin kusurlu çıkma olasılığı ise, benzeri bir akıl yürütmeyle, 3/9'dur. Demek ki, "İlk birim kusurlu" ve "İkinci birim kusurlu" olayları istatistik bakımından bağımsız değildir. n tane denemedeki başarıların sayısının dağılımının binom olabilmesi için bu deneme sonuçla-

rının birbirinden bağımsız olmaları gerektiğini anımsayın. Az önce gördüğümüz gibi, küçük bir anakütleden örneklem alırken durum böyle değildir. Anakütledeki birim sayısı, örnekleme girenlerin sayısına göre çok büyükse, bağımlılığın boyutu gözardı edilebilecek kadar önemsiz olacak, böylece binom dağılımı güvenle kullanılabilecektir. Ancak, anakütledeki birim sayısı çok büyük değilse durum değişir.

Ama yine de bu gibi durumlardaki uygun olasılık dağılımını bulabiliriz. Genel olarak, her biri "başarı" ya da "yenilgi" olarak adlandırılabilecek N nesneli bir kümenin, B tane başarı, $(N-B)$ tane yenilgi içerdiğini düşünelim. Bu kümeden n tane nesneli rassal bir örneklem alınsın. Bu örneklemin x tane başarı içermesi olasılığını arıyoruz. Önce, toplam N nesne arasından n nesneli farklı örneklemlerin sayısı şu kombinasyon sayısıdır:

$$_NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Toplam B başarıdan x tanesini örnekleme seçmenin olanaklı yollarının sayısı şudur:

$$_BC_x = \frac{B!}{x!(B-x)!}$$

Örneklemde x tane başarı olduğuna göre $(n-x)$ tane de yenilgi olması gerekir, bunları toplam $(N-B)$ tane arasından seçme yollarının sayısı da şudur:

$$_{N-B}C_{n-x} = \frac{(N-B)!}{(n-x)!(N-B-n+x)!}$$

Dolayısıyla tam x tane başarı ve $(n-x)$ tane yenilgi içeren n nesneli örneklemlerin toplam sayısı şöyle bulunur:

$$_BC_x\,{}_{N-B}C_{n-x} = \frac{B!}{x!(B-x)!} \cdot \frac{(N-B)!}{(n-x)!(N-B-n+x)!}$$

Son olarak, olanaklı örneklemlerin sayısı $_NC_n$ olduğuna göre, örneklemde x tane başarı bulmanın olasılığı da şu olur:

$$P(x \text{ başarı}) = \frac{_BC_x\,{}_{N-B}C_{n-x}}{_NC_n} = \frac{\dfrac{B!}{x!(B-x)!} \cdot \dfrac{(N-B)!}{(n-x)!(N-B-n+x)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

Hipergeometrik Dağılım

İçinde B tane başarı bulunan N nesneli bir kümeden n nesneli rassal bir örneklem seçildiğini düşünelim. Örnekleme giren başarı sayısı X'in olasılık dağılımına **hipergeometrik dağılım** denir. Bunun olasılık fonksiyonu şöyledir.

$$P_X(x) = \frac{{}_B C_x \, {}_{N-B} C_{n-x}}{{}_N C_n} = \frac{\dfrac{B!}{x!(B-x)!} \cdot \dfrac{(N-B)!}{(n-x)!(N-B-n+x)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

Burada x, 0 ile $[n-(N-B)]$'nin büyük olanından başlayıp, n ile B'nin küçük olanına kadar tamsayı değerler alabilir.

Bu dağılımın ortalaması ile varyansı şöyledir:

$$\mu_X = E(X) = np$$

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) np(1-p)$$

Burada $p = B/N$, anakütledeki başarı oranıdır.

Eğer örneklem büyüklüğü n, toplam nesne sayısı N'ye göre çok küçükse hipergeometrik olasılıklar binom olasılıklarına çok yakındır ve hipergeometrik yerine binom olasılıkları kullanılabilir. Bu durumda, $(N-n)/(N-1)$, 1'e çok yakındır, böylece hipergeometrik dağılımın varyansı, binom dağılımının varyansı olan $np(1-p)$'ye çok yakın olur.

ÖRNEK 4.14

Bir şirkete yirmi birimlik bir parti mal gelmiştir. Her bir birimin incelenmesi pahalı olacağından, şirket bir partiden altı birimlik rassal bir örneklem almakta, seçilen birimlerin kusurlu sayısı biri aşmazsa partiyi kabul etmektedir. Beş kusurlu birim içeren bir partinin kabul olasılığı kaçtır?

Bu örnekte "kusurlu" birimi "başarı" olarak belirlersek, partide $N = 20$ birim vardır, bunun $B = 5$ tanesi başarıdır. $n = 6$ birimlik bir örneklem çekiliyor. Bu örneklemdeki başarı sayısı X, şu olasılık fonksiyonu olan hipergeometrik dağılıma uyar:

$$P_X(x) = \frac{{}_B C_x \, {}_{N-B} C_{n-x}}{{}_N C_n} = \frac{{}_5 C_x \, {}_{15} C_{6-x}}{{}_{20} C_6}$$

$$= \frac{\dfrac{5!}{x!(5-x)!} \cdot \dfrac{15!}{(6-x)!(9+x)!}}{\dfrac{20!}{6!14!}}$$

Örneklemde sıfır ya da bir başarı (kusurlu birim) varsa parti kabul edilir, öyleyse kabul olasılığı şudur:

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = P_X(0) + P_X(1)$$

Örneklemde hiç kusurlu bulunmaması olasılığı

$$P_X(0) = \frac{\frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{15!}{6!9!}}{\frac{20!}{6!14!}} = 0.129$$

olur. (0! = 1 olduğunu anımsayın.) Örneklemde bir kusurlu birim bulunması olasılığı da

$$P_X(1) = \frac{\frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{15!}{5!10!}}{\frac{20!}{6!14!}} = 0.387$$

olacaktır. Dolayısıyla, beş kusurlu birim içeren yirmi birimlik partinin bu yöntem kullanıldığında kabul olasılığı şöyledir:

$$P(\text{Parti kabul edilir}) = P_X(0) + P_X(1) = 0.129 + 0.387 = 0.516$$

4.7 POISSON DAĞILIMI

Aşağıdaki rassal değişkenleri ele alalım:

- Bir kentte bir hafta içinde meydana gelen ölümcül trafik kazalarının sayısı
- Belli bir günde öğleden önceki son onbeş dakika içinde bir şirketin telefon santralını arayanların sayısı
- Bir işletmenin bir parçayı yenilemek üzere bir haftada aldığı siparişlerinin sayısı
- 3 aylık bir sürede bir makinenin bozulma sayısı
- Bir fabrikada bir yıl içinde gerçekleşen grevlerin sayısı

Bu beş rassal değişkenin her biri, belli bir olayın belli bir zaman dilimindeki gerçekleşmelerinin sayısı olarak nitelendirilebilir. Deneyimlere göre bu türden sorunların çok geniş bir yelpazesinde, *Poisson olasılık dağılımı*, bu rassal değişkenin olasılık yapısını iyi temsil eder.

Zamanın yatay eksende ölçüldüğü, 0 noktasında başlayıp t noktasında biten bir zaman dilimiyle ilgilendiğimiz ve Çizim 4.7'de gösterilen duruma bakalım. Olayların gerçekleşmeleri zaman ekseni üzerinde ••• ile gösterilmiştir, böylece

bu çizimde incelenen dönemde altı olay olmuştur. Aşağıdaki varsayımların yapıldığım düşünelim:

1. Çizim 4.7'de 0 ile t arasında kalan küçük bir bölümle gösterilen herhangi bir kısa zaman dilimi için, bu aralıkta bir olayın gerçekleşme olasılığı, aralığın uzunluğuyla yaklaşık olarak orantılıdır.
2. Böyle bir zaman diliminde iki ya da daha çok kez gerçekleşme olasılığı, bir gerçekleşme olasılığına göre gözardı edilebilecek denli küçüktür.
3. Üstüste binmeyen zaman dilimlerindeki gerçekleşme sayıları birbirinden bağımsızdır.

Bu varsayımlar geçerliyse, 0 ile t aralığında x tane gerçekleşme olasılığının şöyle olduğu gösterilebilir:

$$P(x \text{ gerçekleşme}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Burada λ, 0'dan t'ye kadar olan zaman dilimindeki ortalama gerçekleşme sayısı, $e = 2.71828...$ doğal logaritmanın tabanıdır. (Ekler'deki Çizelge 2, λ'nın 0'dan 10'a kadar olan değerleri için $e^{-\lambda}$ değerlerini verir.) Bu olasılıkları gösteren dağılıma **Poisson dağılımı** denir.

Poisson Dağılımı

Rassal değişken X'in, olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibiyse, **Poisson dağılımına** uyduğu söylenir:

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \text{ için}$$

Burada λ, eksi değer almayan herhangi bir sayıdır ($\lambda > 0$).

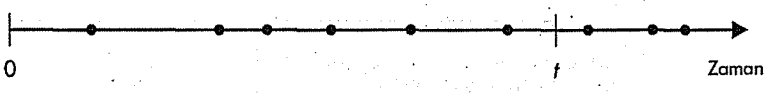
Bu dağılımın ortalaması

$$\mu_X = E(X) = \lambda$$

olup varyansı da şöyledir:

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2)] = \lambda$$

ÇİZİM 4.7 Bir olayın zaman içindeki rassal gerçekleşmelerinin (•) gösterimi



Poisson olasılık fonksiyonunun biçimi ortalaması λ'ya bağlıdır. Çizim 4.8, $\lambda = 0.5, 1, 2, 4$ için olasılık fonksiyonlarını göstermektedir.

ÖRNEK 4.15

Bir araştırmaya göre[9] İngiltere'de, 2,000 çalışanı olan sıradan bir fabrikada bir yıl içinde yapılan grevlerin sayısı, ortalaması $\lambda = 0.4$ olan bir Poisson dağılımıyla temsil edilebilir. Bu durumda bir yıldaki grev sayısı X için olasılık dağılımı şöyledir:

$$P_X(x) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \text{ için}$$

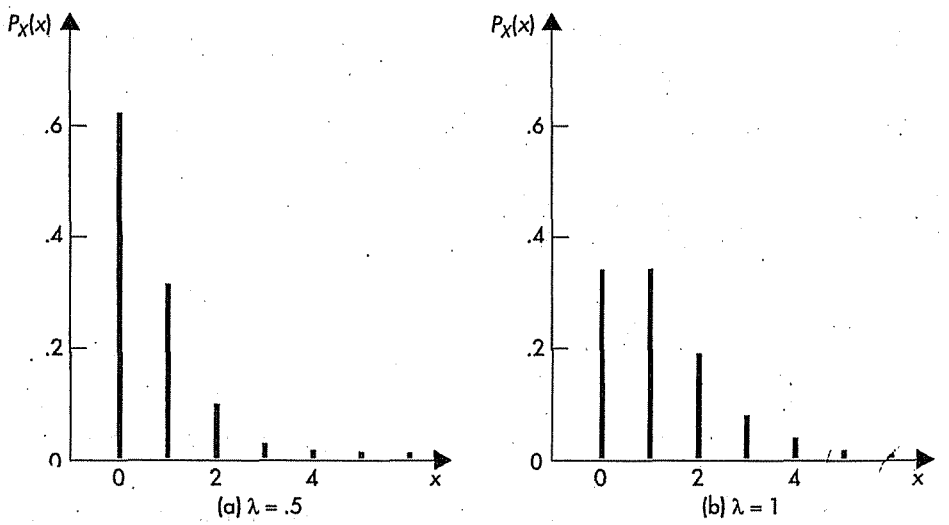
Şimdi, (Ekler'deki Çizelge 2'den) $e^{-0.4} = 0.6703$'ü kullanıp bir yıldaki belli grev sayılarının olasılıklarını hesaplayabiliriz.
Hiç grev olmaması olasılığı şudur:

$$P(0 \text{ grev}) = P_X(0) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^0}{0!} = \frac{(0.6703)(1)}{1} = 0.6703$$

Benzer biçimde

$$P(1 \text{ grev}) = P_X(1) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^1}{1!} = \frac{(0.6703)(0.4)}{1} = 0.2681$$

ÇİZİM 4.8 Poisson dağılımının olasılık fonksiyonları



[9] Bu örnek şu kaynaktan uyarlanmıştır: S. J. Prais, "The strike-pronnes of large plants in Britain," *Journal of the Royal Statistical Society A, 141* (1978), 368-84.

$$P(2 \text{ grev}) = P_X(2) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^2}{2!} = \frac{(0.6703)(0.16)}{2} = 0.0536$$

$$P(3 \text{ grev}) = P_X(3) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^3}{3!} = \frac{(0.6703)(0.064)}{6} = 0.0071$$

$$P(4 \text{ grev}) = P_X(4) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^4}{4!} = \frac{(0.6703)(0.0256)}{24} = 0.0007$$

Bu olasılıklar daha sonra, belli bir aralığa düşen grev sayısının olasılığını hesaplamakta kullanılabilir. Sözgelimi, yılda birden çok grev olma olasılığı şudur:

$$\begin{aligned} P(1\text{'den çok grev}) &= 1 - P(0 \text{ grev}) - P(1 \text{ grev}) \\ &= 1 - P_X(0) - P_X(1) \\ &= 1 - 0.6703 - 0.2681 = 0.0616 \end{aligned}$$

ÖRNEK 4.16

Poisson dağılımı özellikle *bekleme* ya da *kuyruk oluşturma* sorunlarını çözmede işe yarar. Bir fotokopi makinesine 5 dakikada ortalama iki müşteri gelmektedir. Uygulamada bu tür *geliş süreçleri* Poisson dağılımıyla temsil edilebilir. Bu örnekte durumun böyle olduğunu varsayarak, 5 dakikalık sürede gelen müşteri sayısını X ile gösterelim, böylece X, ortalaması $\lambda = 2$ olan bir Poisson dağılımına uyar, olasılık fonksiyonu da şöyledir:

$$P_X(x) = \frac{e^{-2}(2)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

[Bu, Çizim 4.8(c)'de çizilen olasılık fonksiyonudur.] Ekler'deki Çizelge 2'den $e^{-2} = 0.135335$ kullanılarak, 5 dakikalık sürede gelen sayısının olasılıkları şöyle bulunur

$$P(0 \text{ gelen}) = P_X(0) = \frac{e^{-2}(2)^0}{0!} = \frac{(0.135335)(1)}{1} = 0.1353$$

$$P(1 \text{ gelen}) = P_X(1) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} = \frac{(0.135335)(2)}{1} = 0.2707$$

$$P(2 \text{ gelen}) = P_X(2) = \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} = \frac{(0.135335)(4)}{2} = 0.2707$$

ve bu böyle gider. Öyleyse, 5 dakika içinde sözgelimi ikiden çok gelen olması olasılığı şudur.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P_X(0) - P_X(1) - P_X(2) \\ &= 1 - 0.1353 - 0.2707 - 0.2707 = 0.3233 \end{aligned}$$

Gördüğümüz gibi, bir olayın bir zaman dilinde gerçekleşme sayısının belirlenmesinde Poisson dağılımı doğal olarak devreye girer. Bu dağılımın başka kullanımı da vardır. Altbölüm 4.5'te, deneme sayısı n çok büyük olduğunda, binom rassal değişkeni için olasılık hesaplamasının çok zaman alıcı olduğunu gördük. Bu tür olasılıklar uygulamada sık sık gerekli olduğundan, n büyükken, bunların kolayca hesaplanan yaklaşık değerlerini elde bulundurmak elverişli olabilir. Deneme sayısı n büyükken ama aynı zamanda bir başarının olasılığı p, np'yi orta büyüklükte[10] tutacak kadar çok küçükken, Poisson dağılımı bu amaçla kullanılabilir. (Burada açıklanan yakınsama, $np \leq 7$ ise genellikle yeterlidir.)

Aşağıdaki durumlar bu koşulları sağlamaktadır:

1. Bir sigorta şirketi, belli yaştaki kimseler için çok sayıda yaşam poliçesi düzenler ve tek bir poliçe için bir yıl içinde tazminat talebinde bulunulması olasılığı çok düşüktür. Talep sayısının dağılımı, büyük bir n ve çok küçük bir p ile binoma uyar.
2. Bir şirketin, bir üretim sürecinde aynı anda çalışan çok sayıda makinesi olabilir. Eğer tek bir günde bunlardan herhangi birinin bozulma olasılığı çok küçükse, günlük bozulma sayısının dağılımı, büyük bir n ve çok küçük bir p ile binoma uyar.

Böyle durumlarda, binom dağılımı, ortalaması $\lambda = np$ olan Poisson dağılımıyla yakınsanabilir. Yani, yakınsayan Poisson dağılımının ortalaması λ, yakınsanan binom dağılımının bilinen ortalaması np değerinde sabitlenir.

Binom Dağılımının Poisson Yakınsaması

Her birinde başarı olasılığı p olan n bağımsız denemede başarıların sayısı X olsun. Başarı sayısı X'in dağılımı, np ortalama ile binomdur. Ancak, deneme sayısı n büyük ve np orta büyüklükte (tercihan $np \leq 7$) iken bu dağılım, ortalaması $\lambda = np$ olan Poisson dağılımınca yakınsanır. Bu durumda yakınsayan dağılımın olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

$$P_X(x) = \frac{e^{-np}(np)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

ÖRNEK 4.17

Bir analist bütün küçük şirketlerin %3.5'inin gelecek yıl iflâs edeceğini tahmin etmektedir. Bu analistin tahmininin doğru olduğu varsayımıyla, 100 küçük şirketten oluşan rassal bir örneklemde gelecek yıl en az üç iflâs olması olasılığını tahmin edin.

[10] Bölüm 5'te, np 'nin büyük değerleri için de uygun olacak bir binom dağılımı yakınsaması göstereceğiz.

İflâs sayısı X'in dağılımı, $n = 100$, $p = 0.035$ ile binomdur, öyleyse dağılımın ortalaması

$$\mu_X = np = (100)(0.035) = 3.5$$

olur. Binom dağılımımızı yakınsamak için $\lambda = 3.5$ ortalamalı Poisson dağılımını kullanacağız. Bu durumda iflâs sayısı X'in olasılık fonksiyonu şöyle yakınsanabilir:

$$P_X(x) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Böylece, Ekler'deki Çizelge 2'den $e^{-3.5} = 0.030197$ kullanılarak şunlar bulunur:

$$P_X(0) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^0}{0!} = \frac{(0.030197)(1)}{1} = 0.0302$$

$$P_X(1) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^1}{1!} = \frac{(0.030197)(3.5)}{1} = 0.1057$$

$$P_X(2) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^2}{2!} = \frac{(0.030197)(12.25)}{2} = 0.1850$$

Dolayısıyla bu 100 şirketten en az üçünün iflâs etmesi olasılığı şudur:

$$P(X \geq 3) = 1 - P_X(0) - P_X(1) - P_X(2)$$
$$= 1 - 0.0302 - 0.1057 - 0.1850 = 0.679$$

(Okuyucu, bu olasılığı, doğrudan binom dağılımının olasılık fonksiyonunu kullanarak hesaplamanın güçlüğünü düşünmelidir. Aslında, bu işlem, üç basamaklı olarak 0.684 sonucunu verir. Bizim buradaki yakınsamamız tam olasılığa yeterince yakındır.)

ALIŞTIRMALAR

28. Bir üretim yöneticisi, belli bir üretim sürecinde üretilen parçaların %5'inin kusurlu olduğunu bilmektedir. Özelliklerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılabilen bu parçalardan altısı incelenmiştir.
- **(a)** Bu parçalardan hiçbirinin kusurlu çıkmaması olasılığı kaçtır?
- **(b)** Bu parçalardan birinin kusurlu çıkması olasılığı kaçtır?
- **(c)** Bu parçalardan en az ikisinin kusurlu çıkması olasılığı kaçtır?

29. Bir politikacı, devletteki bütün üst düzey makroiktisatçıların %25'inin, kendi ileri sürmek istediği bir öneriyi kuvvetle destekleyeceklerine inanmaktadır. Bu inancının doğru olduğunu ve rassal seçilmiş beş üst düzey makroiktisatçıya ulaşıldığını düşünelim.

(a) Bu beş kişiden en az ikisinin öneriyi kuvvetle destekleme olasılığı kaçtır?
(b) Bu beş kişiden çoğunluğun öneriyi kuvvetle destekleme olasılığı kaçtır?

30. Bir kamu çıkarı grubu, telefonla bağış toplamak üzere bazı öğrencileri işe alır. Kısa bir eğitim döneminden sonra öğrenciler bağış verebilecekleri ararlar ve komisyonla çalışırlar. Eski deneyimlere göre, bu öğrencilerin başarısı sınırlı olma eğilimindedir ve %70'i ilk iki hafta içinde işi bırakır. Grup rassal sayılabilecek altı öğrenciyi işe almıştır.

(a) Bu altı kişiden en az ikisinin ilk 2 hafta içinde işi bırakma olasılığı kaçtır?
(b) Bu altı kişiden en az ikisinin ilk 2 hafta içinde işi bırakmama olasılığı kaçtır?

31. ABD dolarının belli bir hafta içinde Japon yenine karşı değer kazanma olasılığının 0.5 ve bir hafta içindeki sonucun başka herhangi bir haftadakinden bağımsız olduğunu düşünelim. 7 haftalık bir dönemin çoğu haftasında ABD dolarının Japon yenine karşı değer kazanma olasılığı kaçtır?

32. Yeni kalorifer kazanları takan bir şirket, bütün işlerin %15'inde bazı düzeltmeler yapmak üzere yeniden kazan başına gitmek gerektiğini bilmektedir. Belli bir haftada altı kazan takmıştır. Bu işlerin sonucunun birbirinden bağımsız olduğunu varsayalım.

(a) Bu kazanların hepsinin düzeltme gerektirmesi olasılığı kaçtır?
(b) Bu kazanların hiçbirinin düzeltme gerektirmemesi olasılığı kaçtır?
(a) Bu kazanların birden çoğunun düzeltme gerektirmesi olasılığı kaçtır?

33. Cubs, Cardinals* ile St. Louis'de peşpeşe beş maç yapacaktır. Herhangi bir maçta Cubs'ın kazanma olasılığı 0.4 olarak tahmin edilmektedir. Beş maçın sonuçları birbirinden bağımsızdır.

(a) Cubs'ın beş maçın hepsini kazanma olasılığı kaçtır?
(b) Cubs'ın beş maçın çoğunu kazanma olasılığı kaçtır?
(c) Cubs ilk maçı kazanırsa, beş maçın çoğunu kazanmasının olasılığı kaçtır?
(d) Maçlardan önce, Cubs'ın bu beş maç içinde beklenen kazanma sayısı kaçtır?
(e) Cubs ilk maçı kazanırsa, bu beş maç içinde beklenen kazanma sayısı kaçtır?

34. İki kent arasında uçan küçük bir havayolu sekiz yolcu alabilen uçaklar kullanmaktadır. Havayolu, biletli bir yolcunun bir uçuşa gelmeme olasılığının 0.2 olduğunu saptamıştır. Her uçuş için, ilk gelen on kişiye bilet satılmaktadır. Uçuş başına satılan bilet sayısının dağılımı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bu havayolu uçuşlarının kaçta kaçında alana gelen biletli yolcu sayısı koltuk sayısından çoktur? (Satılan bilet sayısıyla alana gelen biletli yolcu sayısının bağımsız olduğunu varsayın).

BİLET SAYISI	6	7	8	9	10
OLASILIK	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05

35. Amerikan futbolunda topu karşı takımın kale çizgisi arkasına taşıyıp orada yere koyduktan sonra, bir üniversite takımı koçunun "2 puanlık bir atış", yani top kale direkleri arasından geçerse 2 puan getirecek, geçmezse hiç puan getirmeyecek bir atış seçme olanağı vardır. Koç, bu tür bir atışta takımının başarı olasılığının 0.4 olduğuna ve çeşitli atışların sonuçlarının birbirinden bağımsız bulunduğuna inan-

* Cubs ile Cardinals iki Amerikan futbol takımıdır. (Ç.N.)

maktadır. Belli bir maçta, takım topu dört kez karşı kale arkasına taşıyıp yere bırakmış, her defasında 2 puanlık atış seçilmiştir.

(a) Bu atışlardan en az ikisinde başarı kazanma olasılığı kaçtır?

(b) Bu dört atıştan kazanılacak toplam puanların ortalaması ile standart sapmasını bulun.

36. Bir araba satıcısı, yeni araba alanlara, hangi nedenle olursa olsun iki gün içinde arabayı geri getirirlerse bedelin tamamını ödemeye söz verdiği yeni bir kampanya başlatmaktadır. Böyle bir geri ödemenin satıcıya maliyetinin 250 $ olacağı tahmin edilmektedir. Satıcı, bütün alıcıların %15'inin arabayı getirip parasını geri alacağını tahmin etmektedir. Kampanya süresince elli araba satıldığını düşünelim.

(a) Bedelini geri almak üzere getirilen araba sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(b) Bu elli araba alımının sonucu olarak yapılan toplam geri ödemelerin maliyetinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.

37. Bir yatırım fonları grubu, müşterilerine, hesaplararası para aktarımlarını telefonla yapma olanağı veren bir hizmet sunmaktadır. Telefonla arayanların %3.2'sinin ya meşgul sesi aldıkları ya da uzun süre bekletildikleri için telefonu kapadıkları tahmin edilmiştir. Fon yönetimi bu tür bir aksaklıktan doğan itibar kaybını 10 $ olarak değerlendirmektedir. Belli bir zaman diliminde 2,000 arama yapıldığını düşünelim.

(a) Meşgul sesi alan ya da bekleme nedeniyle telefonu kapatan müşteri sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(b) Bu 2,000 aramaya ilişkin toplam itibar kaybının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

38. Her birinin başarı olasılığı p olan n denemeli bir binom dağılımında ortalamanın

$$\mu_X = np$$

olduğunu görmüştük. Bu bulguyu, Örnek 4.9'un verileriyle ortalamayı doğrudan

$$\mu_X = \sum x P_X(x)$$

formülünden hesaplayarak doğrulayın, binom dağılımında iki formülün aynı yanıtı bulduğunu gösterin.

39. Bir yerleşkenin mali işler müdürü, yazılan bütün park cezalarından %78'inin ödendiğini bulmuştur. Ceza 2 $'dır. Son hafta içinde 620 ceza yazılmıştır.

(a) Bu cezalardan ödeneceklerin sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(a) Ödenen bu cezalardan toplanan para miktarının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

40. Bir şirkete büyük bir parti mal gelmiştir. Bunlardan rassal seçilen onaltı parça incelenip, kusurlu sayısı ikiden az çıkarsa parti kabul edilecektir. Aşağıdaki oranlarda kusurlu parça içeren bir partinin kabul edilme olasılığı kaçtır?

(a) %5

(b) %15

(c) %25

41. Büyük bir parti malın kabul edilip edilmeyeceğini belirlemek üzere aşağıdaki iki kural üzerinde durulmaktadır:

(i) On parçalık rassal bir örneklemde hiç kusurlu parça çıkmazsa parti kabul edilir.

(ii) Yirmi parçalık rassal bir örneklemde birden çok kusurlu parça çıkmazsa parti kabul edilir.

Bu kabul kurallarından hangisinin, %20 kusurlu parça içeren bir partiyi kabul etme olasılığı daha küçüktür?

42. Bir şirket iki satıcıdan büyük partilerle parça almaktadır. Partilerin %70'i, genellikle %10 kusurlu parça içeren mal gönderen bir satıcıdan, kalanı da genellikle %20 kusurlu parça içeren mal gönderen öbür satıcıdan gelmektedir. Bir parti mal gönderilen bir yönetici satıcıyı bilmemektedir. Bu partiden rassal seçilen yirmilik bir örneklemde bir parça kusurlu bulunmuştur. Bu partinin daha güvenilir olan satıcıdan gelme olasılığı kaçtır? [*İpucu*: Bayes teoremini kullanın.]

43. Bir şirkete onaltı birimlik bir parti mal gelmiştir. Rassal olarak dört birim seçilecek, parçalardan herhangi biri kusurlu çıkarsa parti geri yollanacaktır.

(a) Dört kusurlu parça içeren bir partinin kabul edilme olasılığı kaçtır?

(b) İki kusurlu parça içeren bir partinin kabul edilme olasılığı kaçtır?

(c) Bir kusurlu parça içeren bir partinin kabul edilmeme olasılığı kaçtır?

44. Sekiz erkek ve sekiz kadın arasından sekiz kişilik bir kurul oluşturulacaktır. Kurul üyelerinin seçimi rassal yapılırsa, bunların tam yarısının kadın olma olasılığı kaçtır?

45. Bir tahvil analistine, oniki şirket tahvili içeren bir liste verilmiştir. Analist bu listeden, gelecek yıl değer kaybı tehlikesi taşıdığını düşündüğü üçünü seçmiştir. Daha sonra listedeki oniki tahvilden dördü ertesi yıl değer kaybetmiştir. Analistin listeden üç tahvili rassal seçtiğini düşünelim. Seçilen tahvillerden en az ikisinin, ertesi yıl değer kaybeden tahviller arasında olması olasılığı kaçtır?

46. Bir banka yöneticisine on kredi başvurusu yapılmıştır. Beşinin azınlıklarca, beşinin azınlık olmayanlarca yapılmış olması dışında başvuruların genel özellikleri benzerdir. Sonunda yönetici altı başvuruyu kabul etmiştir. Eğer kabul edilen bu altı başvuru, on tane arasından rassal seçilmiş olsaydı, kabul edilenlerin yarıdan azının azınlık başvurusu olmasının olasılığı kaçtır?

47. Müşteriler kalabalık bir kasaya dakikada ortalama üç kişi olarak gelmektedir. Gelişlerin dağılımı Poisson ise, verilen herhangi bir dakika içinde kasaya iki ya da daha az müşteri gelmesinin olasılığı kaçtır?

48. Bir üretim birimindeki aylık kaza sayısı 2.6 ortalama ile Poisson dağılımına uymaktadır.

(a) Verilen bir ay içinde ikiden az kaza olasılığı kaçtır?

(a) Verilen bir ay içinde üçten çok kaza olasılığı kaçtır?

49. Bir öğretim üyesini, bir dönem sonu sınavından önceki gün ortalama 4.2 öğrenci telefonla aramaktadır. Aramaların dağılımı Poisson ise, böyle bir günde en az üç arama olmasının olasılığı kaçtır?

50. Kayıtlara göre, şehirlerarası bir yolda kalabalık sabah saatlerinde günde 3.2 araç bozulmaktadır. Dağılımın Poisson olduğunu varsayalım.

(a) Herhangi bir günde, bu karayolunda kalabalık sabah saatlerinde, ikiden az aracın bozulması olasılığını bulun.

(b) Herhangi bir günde, bu karayolunda kalabalık sabah saatlerinde, dörtten çok aracın bozulması olasılığını bulun.

51. Gelirler Genel Müdürlüğü kayıtlarına göre, vergi beyannamesi dolduranların %5.5'i formda yanlışlık yapmaktadır. Bu formlardan 100 tanesi rassal seçilse, üçten azının yanlışlık içermesi olasılığı kaçtır? Binom dağılımına Poisson yakınsamasını kullanın.

52. Bir şirkette 250 kişisel bilgisayar vardır. Bunlardan herhangi birinin belli bir hafta içinde onarım gerektirme olasılığı 0.01'dir. Belli bir hafta içinde bu bilgisayarlardan dörtten azının onarım gerektirme olasılığını bulun. Binom dağılımına Poisson yakınsamasını kullanın.

53. Bir sigorta şirketi 6,000 firmayı dolandırıcılığa karşı sigortalamıştır. Belli bir yılda herhangi bir poliçeden tazminat talebi gelmesi olasılığı 0.001'dir. Belli bir yılda en az üç talep gelmesi olasılığını bulun. Binom dağılımına Poisson yakınsamasını kullanın.

54. Bir eyalet araç sürücülerinin sigortalı olması için yasa çıkarmıştır. Bu yasaya karşın, o eyaletteki sürücülerin %7.5'i sigortalı değildir. 60 sürücülük bir rassal örneklem seçilmiştir. Örneklemdeki sürücülerden en az üçünün sigortasız çıkma olasılığını bulmak için binom dağılımına Poisson yakınsamasını kullanın. Ayrıca, Poisson yakınsaması kullanılmazsa bu olasılığı bulmak için ne gibi hesaplamalar yapılması gerektiğini gösterin.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

55. Rassal bir değişkenin beklenen değeriyle ne kastedildiğini açıklayıcı bir örnekle belirtin. Bu kavram niye önemlidir?

56. Bir yatırım danışmanı olarak, bir müşterinize, bir yatırım fonuna yapılan yatırımın (gelecek yıl) para piyasasına göre daha yüksek bir beklenen getirisi olduğunu söylüyorsunuz. Müşteri size şu soruları yöneltiyor:
   (a) Bu, yatırım fonunun, para piyasasından daha yüksek getiri sağlamasının kesin olduğu anlamına mı geliyor?
   (b) Bundan, para piyasası yerine yatırım fonuna yatırım yapmam gerektiği sonucu çıkar mı?

   Bu soruları nasıl yanıtlarsınız?

57. İş yaşamından aşağıdaki olasılık fonksiyonlarına uyan (kitaptaki örneklerle alıştırmalar dışında) gerçekçi örnekler geliştirin.
   (a) Binom dağılımı
   (b) Hipergeometrik dağılım
   (c) Poisson dağılımı

58. Aşağıdakilerin her birinden neler öğrenilebileceğini açıklayın.
   (a) Rassal bir değişkenin olasılık fonksiyonunun çizimi
   (b) Rassal bir değişkenin birikimli olasılık fonksiyonunun çizimi
   (c) Rassal bir değişkenin standart sapması
   (d) İki rassal değişkenin arasındaki ortak varyans

59. Bir yüklenici, belli tür bir yapım işinin gerektirdiği gün sayısı için olasılıkları şöyle tahmin etmektedir:

SÜRE (GÜN)	1	2	3	4	5
OLASILIK	0.05	0.20	0.35	0.30	0.10

(a) Rassal olarak seçilen bir yapım işinin üç günden kısa sürede bitirilmesi olasılığı kaçtır?
(b) Bir yapım işini bitirme süresinin beklenen değerini bulun.
(c) Bir yapım işini bitirme süresinin standart sapmasını bulun.
(d) Yüklenicinin yapım maliyeti iki parçadan oluşmaktadır: 20,000 $ sabit maliyet, artı işi tamamlamak için gerekli her gün için 2,000 $. Toplam yapım maliyetinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.
(e) Üç yapım işine girişilirse, tekil işlerin tamamlanma sürelerinin bağımsız olduğu varsayımıyla, en az iki işin en az 4'er gün sürmesi olasılığı kaçtır?

60. Bir araba satıcısı, gelecek hafta satacağı araba sayısı için şu olasılıkları tahmin etmektedir.

ARABA SAYISI	0	1	2	3	4	5
OLASILIK	0.10	0.20	0.35	0.16	0.12	0.07

(a) Hafta boyunca satılacak araba sayısının beklenen değerini bulun.
(b) Hafta boyunca satılacak araba sayısının standart sapmasını bulun.
(c) Satıcı, 250 $ haftalığa ek olarak sattığı araba başına 300 $ almaktadır. Haftalık gelirinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.
(d) Satıcının haftalık gelirinin 1,000 $'ı aşma olasılığı kaçtır?

61. Çoktan seçmeli bir sınavda dokuz soru sorulmuştur. Her soru için dört yanıt arasından biri seçilecektir. Her doğru yanıta bir puan verilmekte, yanlış yanıtlar için puan kırılmamaktadır. Öğretmen adını yanlışsız yazana bir puan ödül vermektedir. Bu sınava çalışmamış olan bir öğrenci, her soru için rassal bir yanıt seçmeye karar vermiştir.
(a) Bu öğrencinin dokuz sorudaki doğru yanıt sayısının beklenen değerini bulun.
(b) Bu öğrencinin dokuz sorudaki doğru yanıt sayısının standart sapmasını bulun.
(c) Öğrenci adını yanlışsız yazmıştır.
  (i) Bu öğrencinin sınavdaki toplam puanının beklenen değerini bulun.
  (ii) Bu öğrencinin sınavdaki toplam puanının standart sapmasını bulun.

62. İki rassal değişken için aşağıdakileri bulmayı umduğunuz gerçekçi örnekler geliştirin:
(a) Artı ortak varyans
(b) Eksi ortak varyans
(c) Sıfır ortak varyans

63. Uzun mesafeye çalışan bir taksi durağında dört araba vardır. Bunların yaşları ve geçirdikleri onarımlar farklıdır. Belli bir günde her bir arabanın kullanılabilir olma olasılıkları 0.95, 0.90, 0.90, 0.80'dir. Bir arabanın kulllanılabilir olması başka bir arabanın kullanılabilir olmasından bağımsızdır.
(a) Belli bir günde kullanılabilir araç sayısının olasılık fonksiyonunu bulun.
(b) Belli bir günde kullanılabilir araç sayısının beklenen değerini bulun.
(c) Belli bir günde kullanılabilir araç sayısının standart sapmasını bulun.

64. Bir okuldaki öğrenciler, okulda geçirdikleri yıla (X) ve geçen yıl gezdikleri müze sayısına (hiç müze gezmemişse $Y=0$, bir müze gezmişse $Y=1$, birden çok müze gezmişse $Y=2$) göre sınıflanmıştır. Bu rassal değişkenler için, aşağıdaki çizelgede gösterilen ortak olasılıklar tahmin edilmiştir.

GEZİ SAYISI (Y)	OKULDA GEÇEN YIL (X)			
	1	2	3	4
0	0.07	0.05	0.03	0.02
1	0.13	0.11	0.17	0.15
2	0.04	0.04	0.09	0.10

(a) Rassal seçilmiş bir öğrencinin geçen yıl hiç müze gezmemiş olma olasılığı kaçtır?
(b) X ve Y rassal değişkenlerinin ortalamalarını bulun.
(c) X ve Y rassal değişkenlerinin ortak varyansını bularak yorumlayın.

65. Bir basketbol takımının 3 sayılık atış yıldızı bir maçta altı tane 3 sayılık atış girişiminde bulunmuştur. Geçmişte bu tür girişimlerin %40'ı sayıya çevrilmiştir. Başlangıçta hangi varsayımları yaptığınızı belirterek, bu altı girişimin sonuçlarına ilişkin şu soruları yanıtlayın.
(a) En az iki atışın sayı olma olasılığını bulun.
(b) Tam üç atışın sayı olma olasılığını bulun.
(c) Sayı olan atışların beklenen değeri ile standart sapmasını bulun.
(d) Bu atışlar sonunda kazanılan sayıların ortalaması ile standart sapmasını bulun.

66. Belli bir üniversitenin birinci sınıfına giren öğrencilerin %55'inin dört yılda mezun olacağı tahmin edilmektedir.
(a) Birinci sınıfa yeni giren öğrencilerden rassal seçilmiş beşinden tam üçünün dört yılda mezun olma olasılığı kaçtır?
(b) Birinci sınıfa yeni giren öğrencilerden rassal seçilmiş beşinden çoğunun dört yılda mezun olma olasılığı kaçtır?
(c) Birinci sınıfa yeni giren seksen öğrenci rassal seçilmiştir. Bunlardan dört yılda mezun olacakların oranının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

67. Beyzbol Dünya Serisi maçları A ve B takımları arasında oynanacaktır. Dört maçı ilk kazanan takım seriyi de kazanacaktır. A'nın herhangi bir maçı kazanma olasılığının 0.6 olması anlamında daha iyi bir takım olduğunu düşünelim. Ayrıca bir maçın sonucunun başka bir maçınkinden bağımsız olduğunu da varsayalım.
(a) A takımının seriyi kazanma olasılığı kaçtır?
(b) Kazananı belirlemek için yedinci maçın oynanmasına gerek duyulması olasılığı kaçtır?
(c) İlk dört maçta her iki takımın da ikişer maç kazandığını düşünelim.
(d) A takımının seriyi kazanma olasılığı kaçtır?
(e) Kazananı belirlemek için yedinci maçın oynanmasına gerek duyulması olasılığı kaçtır?

68. Ayrıntılı nakit akışı bilgilerini kullanan bir mali analist, iflâs etmeye aday şirketleri saptayabileceğini ileri sürmektedir. Analiste onbeş şirketin eski kayıtları verilerek, bunlardan beşinin iflâs ettiği söylenmiştir. Analist, onbeş şirket içinden beşini

iflâsa aday olarak seçmiştir. Aslında seçtiği beş şirketten üçü gerçekten iflâs edenler arasındadır. Analistin iflâs edecek şirketleri belirleyebilme yeteneğinin sınandığı bu denemedeki başarımını değerlendirin.

69. Beş analistten oluşan bir ekip, yirmi şirketin gelecekteki kazançlarını incelemek üzeredir. Beş analistten her biri dört şirketi ele alacaktır. Bu analistlerin her biri eşit yeterlilikte değildir. Aslında içlerinden biri, değişen eğilimleri yakalamada mükemmel bir geçmişe sahip bir yıldızdır. Yöneticiler, ideal olarak, genel eğilimden sapma göstermesi beklenen şirketleri bu analiste ayırmak istemektedir ama elde bu bilgi olmadığından şirketler analistlere rassal dağıtılmıştır. Kazançları geçmişteki genel eğilimden en çok sapma gösterecek dört şirketten en az ikisinin incelenmesinin bu yıldız analiste verilmesi olasılığı kaçtır?

70. Bir havayolunun bagaj teslim masasına kalabalık saatlerde dakikada ortalama 2.4 yolcu gelmektedir. Bu gelişlerin dağılımının Poisson olduğunu varsayalım.

(a) Bir dakikada hiç yolcu gelmemesi olasılığı kaçtır?

(b) Bir dakikada üçten çok yolcu gelmemesi olasılığı kaçtır?

71. Yakınlarda yapılan bir tahmine göre, beyannamesinde gelirini 200,000 $'ın üstünde gösteren bütün tekil kişiler ya da evli çiftlerden %6.5'i ya hiç federal vergi ödememiş ya da fiilen %15'in altında vergi ödemiştir. Gelirini 200,000 $'ın üstünde gösteren 100 kişilik rassal bir örneklem seçilmiştir. Örneklemden en az iki kişinin ya hiç federal vergi ödememiş ya da fiilen %15'in altında vergi ödemiş olma olasılığı kaçtır?

72. Bir şirketin iki montaj hattından her biri, Poisson dağılımına uygun olarak, haftada ortalama 2.4 kez duraklamaktadır. Bu hatların her birinin çalışmasının ötekinden bağımsız olduğunu varsayalım. Belli bir haftada en az bir hattın en az bir kez duraklama olasılığı kaçtır?

73. Bir para üç kez atılmış olup yazı gelme sayısı X ile ilgilenilmektedir.

(a) Rassal değişken X'in olasılık fonksiyonunu bulun.

(b) Rassal değişken X'in ortalaması ile standart sapmasını bulun.

(c) Bir ya da üç kez yazı geldiğinde 2 $ kazanacağınız, iki kez yazı geldiğinde 4 $ kaybedeceğiniz, hiç yazı gelmediğinde ne kazanıp ne kaybedeceğiniz bir oyunu ele alalım. –4, 0, 2 değerlerini alabilen rassal değişken Y bu oyundaki kazançlarınızı göstersin. Bu rassal değişken Y'nin olasılık fonksiyonunu, ortalamasını ve standart sapmasını bulun.

BÖLÜM 5

Sürekli Rassal Değişkenler ve Bunların Olasılık Dağılımları

5.1 SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER

Bu bölümde, sürekli bir eksende her değeri alabilen rassal değişkenlere ilişkin olasılık söylemlerini inceleyeceğiz. Zaman, uzaklık, sıcaklık ölçüleri doğal olarak bu sınıfa girer. Bu durumlarda rassal değişkenin belli bir değeri alma olasılığı —sözgelimi, bir arabanın bir galon benzinle tam 27.236 mil gidebilmesi— 0'dır. Çok ince ayırımlı bir eksende ölçüldüğünden belli bir değeri alma olasılığı son derece düşük, ama aslında kesikli olan rassal değişkenleri sürekliymiş gibi düşünmek kolaylık sağlar. Sözgelimi, öğrencilerin dört yıllık öğrenim boyunca üniversiteye olan birikmiş borçları konusunda yapılan bir çalışmada, belli bir öğrencinin toplam borcunun sent cinsinden bir tamsayı olacağı kesinlikle doğrudur. Ama, rassal seçilmiş bir öğrencinin borcunun tam tamına 9.274,57 $ olmasının olasılığı, bu rassal değişkeni sürekliymiş gibi ele almamıza yetecek kadar küçüktür.

Sürekli rassal değişkenlerin tekil değerlerinin olasılık değerlendirmelerini yapmak anlamsız olmakla birlikte, böyle değişkenlerin belli bir aralıkta yer alma olasılığıyla pekâlâ ilgilenebiliriz. Sözgelimi, bir arabanın bir galon benzinle 27 ile 28 mil arasında yol gitmesinin olasılığı ya da rassal seçilmiş bir öğrencinin birikmiş borcunun 9,000 $ ile 10,000 $ arasında çıkmasının olasılığı, hesaplanması yararlı büyüklükler olabilir. Dolayısıyla, sürekli rassal değişkenlerin olasılık dağılımlarını belirlerken doğal bir başlangıç noktası (kesikli rassal değişkenler açıklamalarımıza benzer olarak) birikimli olasılık düşüncesidir. Bu kavram bize, rassal bir değişkenin belli bir değerin altında kalma olasılığını verir.

5.2 SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİN OLASILIK DAĞILIMLARI

Bölüm 4'te olduğu gibi rassal bir değişkene X, onun alabileceği belli bir değere de x diyelim. Burada X'in x'i aşmama olasılığına **birikimli olasılık fonksiyonu** diyoruz. Bu, Bölüm 4'teki birikimli olasılık fonksiyonunun benzeridir.

Tanım

Sürekli bir rassal değişken olan X'in **birikimli olasılık fonksiyonu** $F_X(x)$, X'in x'i aşmama olasılığını x'in bir fonksiyonu olarak verir, yani,

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Bu noktaları açıklığa kavuşturmak için, olasılık yapısı özellikle basit olan bir rassal değişken alacağız. Bunun kullanımına bir örnek olmak üzere, bir karayolu tünelinin tam 1 mil uzunluğunda olduğunu düşünelim. Rassal değişken X, tünelin bir ucundan, bir araç arızasının olduğu nokta arasındaki uzaklığı mil cinsinden göstersin. Tünelin sabit uzunluklu bir parçasında arıza olasılığının, aynı uzunluktaki başka tünel parçalarındaki arıza olasılığı ile aynı olduğunu düşünelim. Bu durumda, belli bir arıza için X'in dağılımı, 0 ile 1 arasında tekdüze (üniform) dağılımdır. Bu rassal değişkenin birikimli olasılık fonksiyonu şudur:

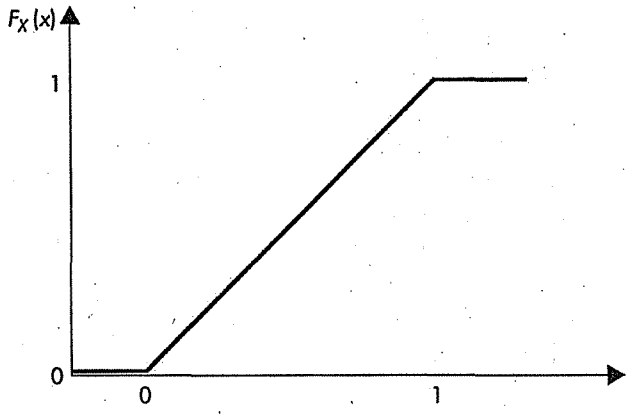
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ ise} \\ x & 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 1 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$x = 0$ ile $x = 1$ arasında bir doğru olan bu fonksiyon Çizim 5.1'de gösterilmiştir. Bu fonksiyonu kullanarak, tünelin ¼ mili içinde bir arıza olasılığını şöyle buluruz:

$$P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Şimdi, rassal bir değişkenin belli bir aralığa düşme olasılığını ölçmek istediğimizi düşünelim. Sözkonusu aralığın uçları $X = a$ ile $X = b$ olsun, böylece aradığımız şu olur: $P(a < X < b)$.[1] Eğer X, b'den küçükse, ya a'dan küçüktür ya da a ile b arasındadır. Üstelik bu son iki olay bağdaşmaz olduğundan şunu yazabiliriz:

[1] Sürekli rassal değişkenler için, $P(X < b)$'deki gibi "-den az" ya da $P(X \leq b)$'deki gibi "-den az ya da eşittir" yazmak arasında fark olmadığına dikkat edin, çünkü X'in tam b'ye eşit olma olasılığı 0'dır.



ÇİZİM 5.1 0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış rassal bir değişkenin birikimli olasılık fonksiyonu

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$$

Böylece, birikimli olasılık fonksiyonunun tanımından da şu yazılabilir:

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a < X < b)$$

Demek ki, bir rassal değişkenin belli bir aralıkta bir değer almasının olasılığı, birikimli olasılık fonksiyonundan şu çerçevede belirtildiği gibi bulunabilir.

Aralık Olasılığı ve Birikimli Olasılık Fonksiyonu

X, birikimli olasılık fonksiyonu $F_X(x)$ olan bir rassal değişken, a ile b de $a < b$ olmak üzere X'in alabileceği iki değer olsun. X'in a ile b arasında kalma olasılığı şudur:

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = b - a \qquad (5.2.1)$$

0 ile 1 aralığında tekdüze dağılmış bu rassal değişken için o aralıktaki birikimli olasılık fonksiyonu $F_X(x) = x$'tir. Dolayısıyla a ile b, $a < b$ olmak üzere, 0 ile 1 arasında iki sayı ise, şu bulunabilir:

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = b - a$$

Sözgelimi, bir arıza olursa, bunun tünelin içinde ¼ ile ¾ mil arasında (yani $a = ¼$, $b = ¾$ iken) gerçekleşme olasılığı şudur:

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Sürekli bir rassal değişkenin herhangi iki değer arasında bulunma olasılığının birikimli olasılık fonksiyonuyla belirtilebileceğini gördük. Demek ki bu fonksiyon, rassal değişkenin olasılık yapısına ilişkin bütün bilgileri içerir. Ancak, çoğu amaç için başka bir fonksiyon daha yararlıdır. Bölüm 4'te kesikli bir rasal değişkenin herhangi bir belli değer alma olasılığını gösteren olasılık fonksiyonunu kesikli rassal değişkenler için inceledik. Bu kavram sürekli rassal değişken durumunda doğrudan geçerli değildir, çünkü burada herhangi bir belli değerin ortaya çıkma olasılığı 0'dır. Ama sürekli rassal değişkenler için, bunların olasılık yapısının çizimsel yorumuna elverişli, **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denen başka bir uygun fonksiyon oluşturulabilir.

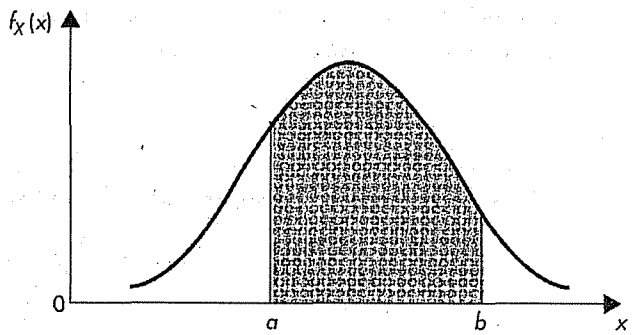
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X, sürekli bir rassal değişken ve x de bu rassal değişkenin alabileceği değerler aralığındaki herhangi bir sayı olsun. Bu rassal değişkenin **olasılık yoğunluk fonksiyonu**, $f_X(x)$, aşağıdaki özellikleri taşıyan bir fonksiyondur:

(i) x'in bütün değerleri için $f_X(x) \geq 0$

(ii) Bu yoğunluk fonksiyonunun çizildiğini düşünelim. a ile b, $a < b$ olmak üzere, rassal değişken X'in alabileceği iki değer olsun. Bu durumda X'in a ile b arasında kalma olasılığı, olasılık fonksiyonunun altında bu iki değer arasında kalan alandır.

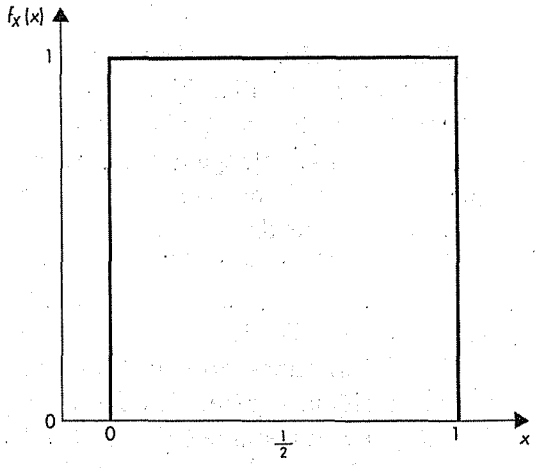
ÇİZİM 5.2 Gölgeli alan, X rassal değişkeninin a ile b arasında kalma olasılığıdır



Çizim 5.2, özellik (ii)'yi açıklamak üzere, sürekli bir rassal değişkenin gelişigüzel bir olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizimini göstermektedir. İki olanaklı değer a ile b işaretlenmiş olup, eğri altında bu noktalar arasında kalan gölgeli alan, rassal değişkenin bu aralıkta olma olasılığıdır.[2]

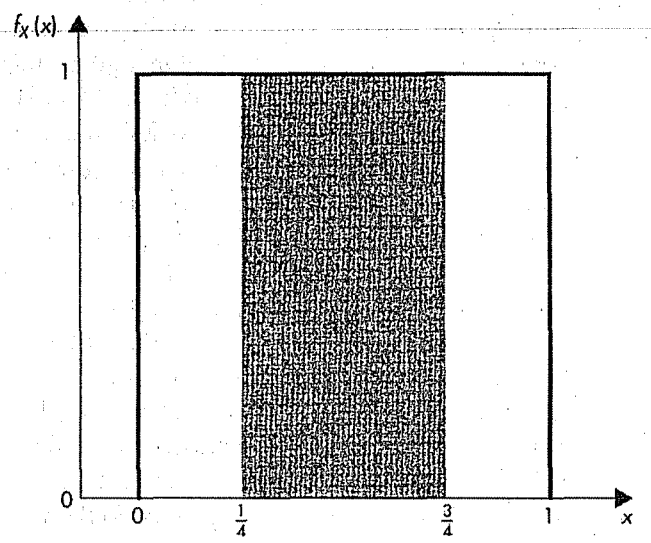
Belli bir olasılık yoğunluk fonksiyonunu görebilmek için, 0 ile 1 aralığında tekdüze dağılan bir rassal değişken örneğine dönelim. Buradaki dağılım, bir mil uzunluğundaki bir tünelde araç arızalarının olduğu mesafeyi temsil etmekteydi. Tünel içinde sabit uzunluklu herhangi bir bölümde arıza olasılığının, aynı uzunluktaki bütün bölümlerde aynı olduğu varsayılabilmekteydi. Bu varsayım altında, uygun olasılık yoğunluk fonksiyonunun biçimi çıkarsanabilir. 1 millik bütün uzunluğun eşit uzunlukta çok sayıda küçük alt-aralığa ayrıldığını düşünelim. Bir arıza olasılığı bu alt-aralıkların her birinde eşit olduğundan ve olasılık, yoğunluk fonksiyonu altındaki alana karşılık geldiğinden, olasılık yoğunluk fonksiyonu değerinin 0 ile 1 arasındaki bütün aralıkta sabit kalması gereği ortadadır. Üstelik, bir arıza olursa, bunun tünel içinde 0 ile 1 mil arasında olması gerektiğinden, bu aralıkta yoğunluk fonksiyonunun altında kalan alan toplam alan da 1 olmalıdır. Öyleyse, bu rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, Çizim 5.3'teki gibi bir birim kare olmalıdır. Yoğunluğun, olanaklı değerler aralığındaki tekdüzeliği, bu dağılıma adını vermektedir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu cebirsel olarak şöyle yazılabilir:

ÇİZİM 5.3 0 ile 1 aralığında tekdüze dağılmış rassal bir değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu



[2] Matematik bilen okuyucuların tanıyacakları gibi, bir rassal değişkenin belli bir aralıkta kalma olasılığı, olasılık yoğunluk fonksiyonunun bu iki nokta arasında alınmış tümlevidir (integralidir); yani,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$



ÇİZİM 5.4 0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış bir rassal değişkenin ¼ ile ¾ arasına düşme olasılığı; ½ 'ye eşit gölgeli alan olasılıktır

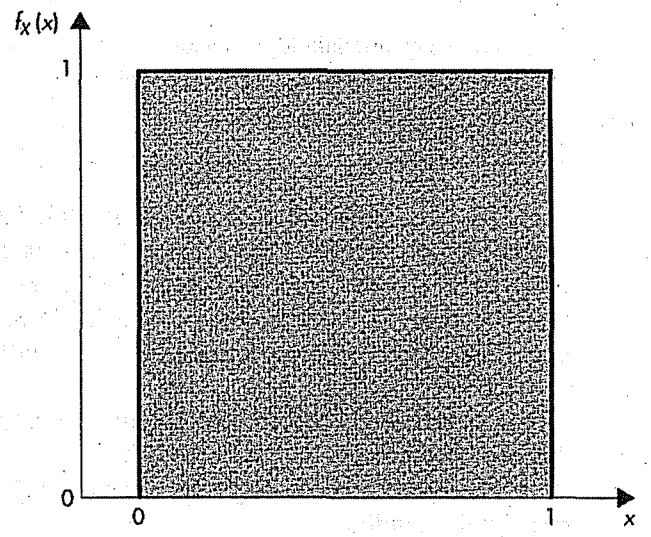
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \text{ için} \\ 0 & x\text{'in öbür bütün değerleri için} \end{cases}$$

Şimdi bu yoğunluk fonksiyonunu, rassal değişkenin belli bir aralığa düşme olasılığım bulmada kullanabiliriz. Bir arızanın tünelde ¼ ile ¾ mil arasında olması olasılığının hesabı, Çizim 5.4 'te gösterilmiştir. Yoğunluk fonksiyonunun yüksekliği $f_X(x) = 1$ olduğuna göre, bu iki nokta arasında eğri altında kalan alan aranan olasılıktır. Bu da, daha önce birikimli olasılık fonksiyonu kavramıyla ulaşılan sonucun tıpkısıdır.

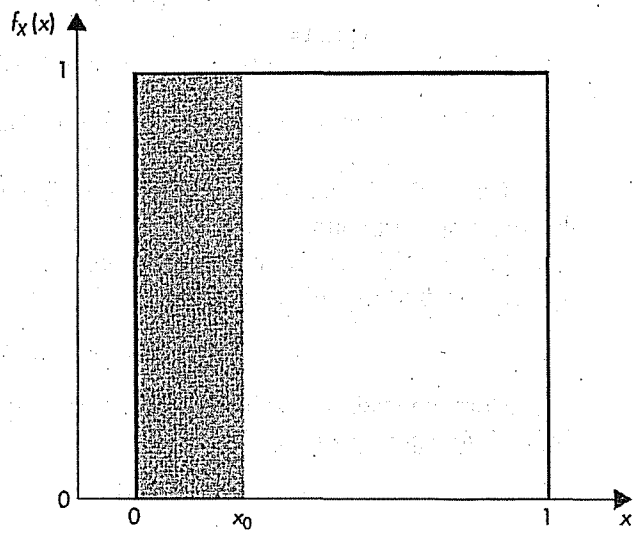
Bir rassal değişkenin bir değer çifti arasına düşmesi olasılığının, olasılık yoğunluk fonksiyonunun altında bu değerler arasında kalan alan olduğunu gördük. Bu bulgunun iki özel durumu özellikle ilgi çekicidir. Birincisi, rassal değişkenin *bir* değeri olması zorunlu olduğuna —yani, eksi sonsuzla artı sonsuz arasında yer aldığına— göre, olasılık yoğunluk fonksiyonu altındaki toplam alan 1'dir. (Bu, kesikli rassal değişkenlerde tekil olay olasılıkları toplamının 1 olmasına benzer.) İkincisi, birikimli olasılık fonksiyonunun x_0 noktasındaki değerine $F_X(x_0)$ dersek, bu da bize rassal değişkenin x_0 noktasını aşmama olasılığım gösterir; yani,

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0)$$

olur. Bunun da, olasılık yoğunluk fonksiyonu altında, x_0 'ın solunda kalan alan olduğunu görürüz.



(a) Tekdüze olasılık yoğunluk fonksiyonu altında kalan toplam alan 1'dir.



(b) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun altında, x_0'ın solunda kalan alan $F_X(x_0)$ olup bu tekdüze dağılım için x_0'dır.

ÇİZİM 5.5 Olasılık yoğunluk fonksiyonunun özellikleri

Sürekli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Altındaki Alan

X, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$, birikimli olasılık fonksiyonu $F_X(x)$ olan sürekli bir rassal değişken olsun. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(i) $f_X(x)$ altındaki toplam alan 1'dir.[3]
(ii) $f_X(x)$ altında, x_0'ın solundaki alan $F_X(x_0)$'dır. Burada x_0, rassal değişkenin alabileceği herhangi bir değerdir.[4]

Çerçeve içinde belirtilen iki özellik, tekdüze dağılım için Çizim 5.5'te gösterilmiştir. Bu çizimin (a) bölümünde, bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun altında kalan alanın 1 olduğu görülmektedir, çünkü kenar uzunluğu 1 olan bir karenin alanıdır. Çizimin (b) bölümü ise, birikimli olasılık fonksiyonunun x_0'daki değerini, yüksekliği 1, genişliği x_0 olan bir dikdörtgenin alanı olarak gösterir.

ÖRNEK 5.1

Bir onarım ekibi, 2 mil uzunluğundaki bir petrol boru hattının bir bölümünden sorumludur. Bu bölüm boyunca herhangi bir çatlağın ortaya çıktığı mesafe (mil cinsinden) tekdüze dağılmış, olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle olan bir rassal değişkendir:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5 & 0 < x < 2 \\ 0 & x\text{'in öbür bütün değerleri için} \end{cases}$$

Birikimli olasılık fonksiyonunu ve boru hattının bu bölümünde 0.5 mil ile 1.5 mil arasında bir çatlak olması olasılığını bulun.

Çizim 5.6, bu olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. Birikimli olasılık fonksiyonunun x_0'daki değeri $F_X(x_0)$, rassal değişkenin x_0'dan küçük değer alma olasılığıdır. Bu da çizimde gölgeli alanla, yani yüksekliği 0.5, genişliği x_0 olan bir dikdörtgenle gösterilmiştir. Öyleyse şu yazılabilir:

$$F_X(x_0) = 0.5x_0 \qquad 0 < x_0 < 2 \text{ için}$$

Boru hattında 0.5 mil ile 1.5 mil arasında bir çatlak oluşması olasılığını bulmak için şunlar yapılabilir:

---

[3] Biçimsel olarak, tümlev (integral) gösterimiyle şu yazılabilir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

[4] Öyleyse birikimli olasılık fonksiyonu şu tümlev (integral)dir:

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

Buradan, olasılık yoğunluk fonksiyonunun, birikimli olasılık fonksiyonunun türevi olduğu anlaşılabilir, yani

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P(0.5 < X < 1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5)$$
$$= (0.5)(1.5) - (0.5)(0.5) = 0.5$$

Aynı sonuç, olasılık yoğunluk fonksiyonu altında $x = 0.5$, $x = 1.5$ arasındaki alandan da çıkarsanabilir.

5.3 SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLERİN BEKLENEN DEĞERLERİ

Altbölüm 4.3'te kesikli bir rassal değişken olan X'in beklenen değeri kavramını ve bu rassal değişkenin bir fonksiyonunun beklenen değeri kavramlarını açıklamıştık. Bu kavramlar, rassal değişkenin sürekli olduğu duruma da genişletilebilir, ama burada belli bir değerin olasılığının 0 olması olgusu, beklentilerin hesaplanma yönteminde, çerçevede gösterildiği gibi, bazı düzeltmeler gerektirir.

Sürekli Rassal Değişkenlerin Beklenen Değerleri

Rassal bir denemenin sürekli bir rassal değişkenle gösterilebilecek bir sonuca yol açtığını düşünelim. Bu deneme bağımsız olarak N kez yinelenirse, bu rassal değişkenin beklenen değeri, N sonsuza doğru büyürken, değişkenin aldığı değerlerin ortalamasıdır. X rassal değişkeninin beklenen değeri $E(X)$ ile gösterilir.

Benzer biçimde $g(X)$, X rassal değişkeninin herhangi bir fonksiyonu ise, bu fonksiyonun beklenen değeri, deneme sayısı sonsuza doğru büyüdükçe, yinelenen bağımsız denemelerde fonksiyonun aldığı değerlerin ortalamasıdır.[5] Bu beklenti de $E[g(X)]$ ile gösterilir.

Bir sonraki çerçevede, önemli bazı belirli beklenen değerler, kesikli rassal değişkenler için kullanılan yolun tıpkısı kullanılarak tanımlanmıştır.

---

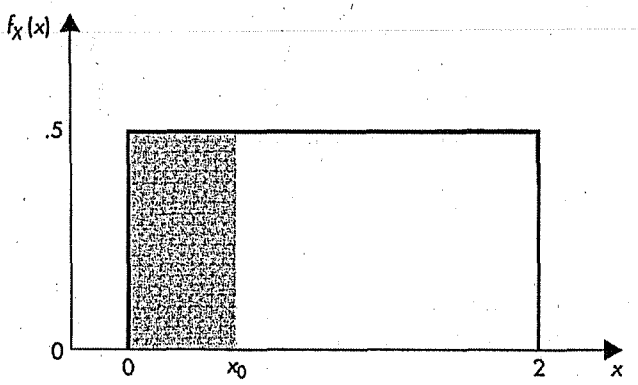
[5] Biçimsel olarak, tümlev (integral) hesabıyla, X rassal değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

ile ve $g(X)$ fonksiyonunun beklenen değeri de

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

ile gösterilir. Bu beklentiler oluşturulurken tümlev (integral)in, kesikli durumdaki toplama simgesinin rolünü oynadığına dikkat edin.



ÇİZİM 5.6 Örnek 5.1 için olasılık yoğunluk fonksiyonu; gölgeli alan birikimli olasılık fonksiyonunun x_0'daki değeridir

Tanımlar

X sürekli bir rassal değişken olsun.

(i) X'in μ_X ile gösterilen **ortalaması**, X'in beklenen değeri olarak tanımlanır, yani

$$\mu_X = E(X)$$

(ii) X'in σ_x^2 ile gösterilen varyansı, rassal değişkenin kendi ortalamasından kareli sapmaların $(X-\mu_X)^2$ beklenen değeri olarak tanımlanır, yani,

$$\sigma_X^2 = E(X-\mu_X)^2$$

Almaşık ama eşdeğer bir gösterim şu olabilir:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

(iii) X'in **standart sapması** σ_X, varyansın karekökü'dür.

Ortalama ile varyans, bir olasılık dağılımına ilişkin özet bilginin iki parçasıdır. Ortalama, olasılık dağılımının merkezinin ölçüsünü verir. Bunun fiziksel bir yorumu şöyledir: Bir olasılık dağılımım kartona çizip kesin, x ekseninde bu kartonu parmak ucunda dengeye getiren nokta, dağılımın ortalamasıdır. Sözgelimi, Çizim 5.3'teki tekdüze dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $x = ½$'nin iki yanında simetriktir, öyleyse $\mu_X = ½$ bu rassal değişkenin ortalamasıdır. 1 millik bir tüneldeki araç arızaları örneğinde, tünelin ağzından ortalama arıza uzaklığı ½ mil, çok büyük sayıda arızaların tünel içindeki ortalama uzaklığının ½ mil olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Varyans —ya da onun karekökü, standart sapma— bir olasılık dağılımının ortalamasına göre yayıklığının (ya da yayvanlığının) bir ölçüsünü verir. Bunu açıklamak üzere, 0 ile 1 aralığında bir tekdüze dağılım, bir de ¼ ile ¾ aralığında ikinci bir tekdüze dağılım düşünün. Bu iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları Çizim 5.7'de çizilmiştir. İkinci dağılımın, (b) bölümünde gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonu şudur:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 & x\text{'in bütün öbür değerleri için} \end{cases}$$

Eğri altındaki alan 1 olduğuna göre bu uygun bir yoğunluk fonksiyonudur. Her iki dağılım da $x = ½$'de ortalanmıştır, bu, her iki durumda da ortalamadır. Ancak, (a) bölümünün dağılımı bu ortalama dolayında, (b) bölümündekine göre daha yayvandır. Bu da, ikinci dağılımın varyansının daha büyük olmasında kendini göstermektedir.[6]

Altbölüm 4.3'te kesikli rassal değişkenlerin doğrusal fonksiyonlarında ortalama ile varyansın nasıl bulunacağını göstermiştik. Aslında aynı bulgular, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, sürekli rassal değişkenler için de doğrudur.

X, ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan sürekli bir rassal değişken, a ile b de sabit sayılar olsun. Rassal değişken Z'yi şöyle gösterelim:

$$Z = a + bX$$

Bu durumda Z'nin ortalaması ile varyansı şunlardır:

$$\mu_X = E(a + bX) = a + b\mu_X$$

$$\sigma_Z^2 = \text{Var}(a + bX) = b^2\sigma_X^2$$

Öyleyse Z'nin standart sapması şudur:

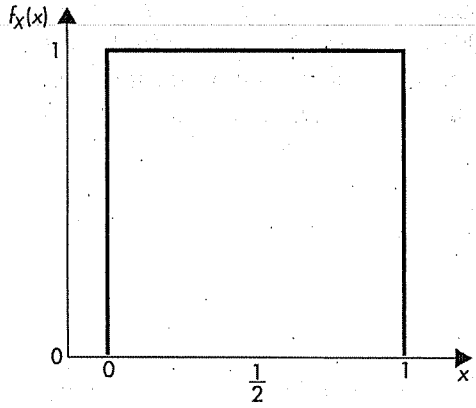
$$\sigma_Z = |b|\sigma_X$$

Bu bulguların özel bir durumu olarak

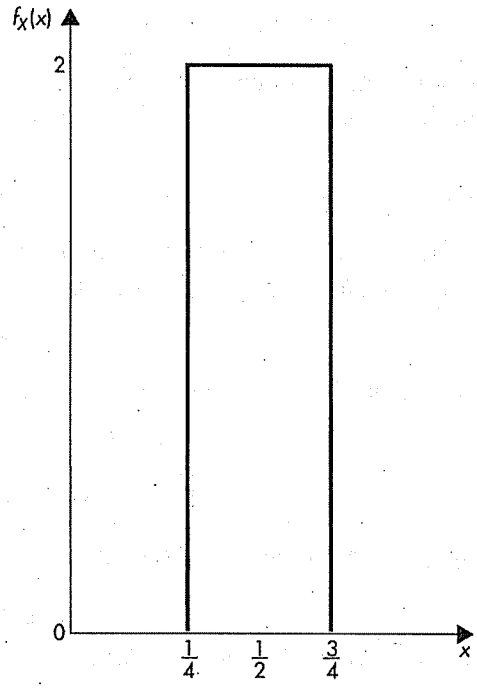
$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

rassal değişkeninin ortalaması 0, varyansı 1'dir.

[6] Aslında (a) bölümünün varyansı 1/12, (b) bölümününki 1/48'dir.



(a) 0 ile 1 aralığında tekdüze dağılmış bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu



(b) 1/4 ile 3/4 aralığında tekdüze dağılmış bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

ÇİZİM 5.7 Tekdüze dağılmış iki rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonları

ÖRNEK 5.2

Bir ev sahibi, beklenen sıcaklık aralığında, Ocak ayı ısıtma giderinin dolar olarak şöyle olacağını tahmin etmektedir:

$$Y = 290 - 5T$$

Burada T, Fahrenayt cinsinden aylık sıcaklık ortalamasıdır. Ortalama Ocak sıcaklığı, ortalaması 24° F, standart sapması 4° F olan rassal bir değişkenle temsil edilebilirse, bu ev sahibinin Ocak ayı ısınma giderinin ortalaması ile standart sapmasını tahmin edin.

Rassal değişken T'nin ortalaması ile standart sapması şunlardır:

$$\mu_Y = 24 \qquad \sigma_Y = 4$$

Dolayısıyla beklenen ısıtma gideri

$$\mu_Y = 290 - 5\mu_T$$
$$= 290 - (5)(24) = 170\ \$$$

olur. Bu giderin standart sapması ise şöyledir:

$$\sigma_Y = |-5|\sigma_T = (5)(4) = 20\ \$$$

5.4 ORTAK DAĞILIMLI SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER

Altbölüm 4.4, kesikli rassal değişkenlerin ortak dağılımlarını ele almıştı. Orada tartışılan kavramlarla bulguların pek çoğu doğal olarak sürekli rassal değişkenlere de genişletilebilir.

Tanımlar

$X_1, X_2, \ldots, X_K$ sürekli rassal değişkenler olsun.

(i) Bunların **ortak birikimli dağılım fonksiyonu** $F_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K)$, aynı anda X_1'in x_1'den küçük, X_2'nin x_2'den küçük, vb. olmasının olasılığını gösterir, yani:

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K) = P(X_1 < x_1 \cap X_2 < x_2 \cap \Lambda \cap X_K < x_K)$$

(ii) Tekil rassal değişkenlerin $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_K}(x_K)$ birikimli dağılım fonksiyonlarına **marjinal dağılım fonksiyonları** denir. Her bir i için, $F_{X_i}(x_i)$, rassal değişken X_i'nin belli bir x_i değerinin aşmama olasılığıdır.

(iii) Ancak ve ancak

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_K}(x_1, x_2, \ldots, x_K) = F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_K}(x_K)$$

ise bu rassal değişkenler **bağımsız**dır.

Buradaki istatistik bağımsızlık kavramı, kesikli durumdakinin tamı tamına aynıdır. Bir rassal değişkenler kümesinin bağımsìzlığı, herhangi birinin olasılık dağılımının ötekilerin aldığı değerlerden etkilenmemesidir. Öyleyse, sözgelimi, bir adi pay senedinin fiyatındaki peşpeşe günlük değişmelerin bağımsız olduğunu ileri sürmek, yarın ne olacağım kestirirken, eski fiyat değişikliklerine ilişkin bilgilerin bir değer taşımadığı anlamına gelir.

Beklenen değer kavramı, ortak dağılımlı sürekli rassal değişkenlerin fonksiyonlarına da genişletilebilir. Kesikli rassal değişkenler durumunda olduğu gibi, bu türden önemli bir büyüklük de, iki rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi değerlemede kullanılan **ortak varyanstır.**

Tanım

X ile Y, bir çift sürekli rassal değişken, μ_X ile μ_Y de sırasıyla bunların ortalaması olsun. Beklenen değer $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$'ye X ile Y arasındaki **ortak varyans** denir. Yani:

$$\text{Orv}(X, Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Almaşık ama eşdeğer bir gösterim şöyledir:

$$\text{Orv}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

Rassal değişkenler X ile Y bağımsız ise, aralarındaki ortak varyans 0 olur, bunun tersinin doğru olması gerekmez.

Altbölüm 4.4'teki, kesikli rassal değişkenlerin toplamlarıyla farklarının ortalamaları ve varyanslaı konusundaki bulgular, sürekli rassal değişkenler için de geçerlidir. Kolaylık sağlamak açısından burada yeniden verilmektedir.

Rassal Değişkenlerin Toplamları ile Farkları

$X_1, X_2, \ldots, X_K$, ortalamaları $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ ve varyansları $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_K^2$ olan rassal değişkenler olsun. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(i) Bunların toplamlarının ortalaması,ortalamalarının toplamıdır.

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_K$$

(ii) Bu rassal değişkenlerin her bir çifti arasındaki ortak varyans 0 ise, toplamlarının varyansı, varyanslarının toplamıdır.

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_K^2$$

X ile Y, ortalamaları μ_X ve μ_Y ve varyansları σ_X^2 ve σ_Y^2 olan iki rassal değişken olsun. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(iii) Bunların farklarının ortalaması, ortalamalarının farkıdır:

$$E(X-Y)=\mu_X-\mu_Y$$

(iv) X ile Y arasındaki ortak varyans 0 ise, bunların farklarının varyansı, varyanslarının toplamıdır.

$$\text{Var}(X-Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

(ii) ve (iv) bulguları yalnız rassal değişkenler arasındaki ortak varyans sıfır ise geçerlidir. Daha genel olarak, X ile Y, varyansları σ_X^2, σ_Y^2 ve ortak varyansları Orv(X, Y) olan bir çift rassal değişken ise şunların doğru olduğu gösterilebilir:

$$\text{Var}(X+Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\text{Orv}(X,Y)$$

$$\text{Var}(X-Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\text{Orv}(X,Y)$$

ÖRNEK 5.3

Bir yüklenici bir proje için ne malzeme, ne de işçilik maliyetinin kesin tutarından emindir. Malzeme maliyetinin ortalaması 100,000 $, standart sapması 10,000 $ olan bir rassal değişkenle gösterilebileceğine inanılmaktadır. İşçilik maliyeti ise günlük 1,500 $'dır, işi bitirmek için gereken gün sayısı da ortalaması 80, standart sapması 12 olan bir rassal değişkenle gösterilebilir. Malzeme ve işçilik maliyetlerinin bağımsız olduğu varsayılırsa, projenin (malzeme artı işçilik) toplam maliyetinin ortalaması ile standart sapması kaçtır?

Rassal değişkenler X_1 ile X_2, sırasıyla, malzeme ve işçilik maliyetleri olsun. Bu durumda, X_1'in ortalaması $\mu_1=100{,}000$, standart sapması $\sigma_1=10{,}000$'dir. Rassal değişken X_2 için

$$\mu_2=(1{,}500)(80)=120{,}000 \qquad \sigma_2=(1{,}500)(12)=18{,}000$$

yazılabilir. İşin toplam maliyeti X_1+X_2 olduğundan ortalama maliyet şudur:

$$\mu_1+\mu_2=100{,}000+120{,}000=220{,}000\ \$$$

X_1 ile X_2 bağımsız olduğundan toplamlarının varyansı şöyle olur:

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2=(10{,}000)^2+(18{,}000)^2=424{,}000{,}000$$

Bunun karekökünü alırsak standart sapmayı 20,591 $ olarak buluruz.

ÖRNEK 5.4

Örnek 4.7 gibi bu örnek de yatırımların çeşitlendirilmesiyle riskin düşürülmesini göstermektedir. Bir yatırımcının, iki almaşık yatırım arasında istediği oranda dağıtabileceği 1,000 $'ı vardır. Bu yatırımların dolar başına getirileri X ve Y rassal değişkenleriyle gösterilecektir. Bu rassal değişkenlerin ortalamalarının aynı (μ), varyanslarının aynı (σ^2) olduğu ve birbirlerinden bağımsız oldukları varsayılacaktır. Yatırımcının ilk yatırıma α $, dolayısıyla ikinciye $(1{,}000 - \alpha)$ $ ayırdığını düşünelim. Şimdi almaşık yatırımların başarısını karşılaştıracağız.

Yatırımın toplam getirisi şudur:

$$G = \alpha X + (1{,}000 - \alpha)Y$$

Rassal değişkenin beklenen değeri şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} E(G) &= \alpha E(X) + (1{,}000 - \alpha)E(Y) \\ &= \alpha\mu + (1{,}000 - \alpha)\mu = 1{,}000\mu \text{ \$} \end{aligned}$$

Beklenen getiri, α ne olursa olsun aynıdır.

Toplam getirinin varyansı da şudur:

$$\begin{aligned} \text{Var}(G) &= \alpha^2 \text{Var}(X) + (1{,}000 - \alpha)^2 \text{Var}(Y) \\ &= \alpha^2\sigma^2 + (1{,}000 - \alpha)^2\sigma^2 \\ &= (2\alpha^2 - 2{,}000\alpha + 1{,}000{,}000)\sigma^2 \end{aligned}$$

1,000 $'ın hepsi tek bir yatırıma ayrılırsa, yani $\alpha = 0$ ya da $\alpha = 1{,}000$ olursa, toplam getirinin varyansının $1{,}000{,}000\sigma^2$ olacağına dikkat edin. Ama her iki yatırıma da 500'er $ ayrılırsa, yani $\alpha = 500$ olursa, toplam getirinin varyansı $500{,}000\sigma^2$ olur. (Bu değer bu örnekte olabilecek en küçük değerdir.) Öyleyse yatırımcı, bütün parasını olanaklardan yalnız birine yatırmak yerine, yatırımı böylece yayarsa, çok daha küçük bir varyansla, yani çok daha küçük bir riskle aynı beklenen getiriye ulaşabilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir analistin elinde, bir şirketin gelecek yıldaki pay senedi başına kazancı konusunda iki tahmin, F_1, F_2 bulunmaktadır. Analizci bu iki tahminin tartılı bir ortalamasını alarak bir ara tahmin oluşturmak istemektedir. Bunu yaparken ilk tahmine X, ikinciye $(1 - X)$ tartısını verirse, ara tahmini $XF_1 + (1 - X)F_2$ olur. Analizci X tartısı için 0 ile 1 arasında bir değer vermek istemektedir, ama bu değerin ne olması gerektiği konusunda emin değildir. Sonunda X tartısının en iyi seçimi olarak ortaya çıkacak değerin aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip, 0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış rassal bir değişken olduğunu düşünün:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \text{ için} \\ 0 & x\text{'in bütün öbür değerleri için} \end{cases}$$

(a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizin.
(b) Birikimli olasılık fonksiyonunu bulup çizin.
(c) X tartısı için en iyi seçimin 0.25'ten küçük olması olasılığını bulun.
(d) X tartısı için en iyi seçimin 0.75'ten büyük olması olasılığını bulun.
(e) X tartısı için en iyi seçimin 0.2 ile 0.8 arasında olması olasılığını bulun.

2. Bir kurtarma ekibi dört mil uzunluğunda bir ırmak parçasında ortaya çıkabilecek acil durumlardan sorumludur. Deneyimlere göre, acil bir durumun olduğu yerin, bu ırmak parçasının en kuzey noktasından mil cinsinden uzaklığı, 0 ile 4 mil arasında tekdüze dağılmış rassal bir değişkenle gösterilebilir. Öyleyse, acil bir durumun, bu ırmak parçasının en kuzey noktasından mil cinsinden uzaklığın X ile gösterilse, bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle olur:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.25 & 0 < x < 4 \text{ için} \\ 0 & \text{bütün öbür } x\text{'ler için} \end{cases}$$

(a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizin.
(b) Birikimli olasılık fonksiyonunu bulup çizin.
(c) Bu ırmak parçasının en kuzey noktasından bir mil uzakta acil bir durum ortaya çıkmasının olasılığını bulun.
(d) Kurtarma ekibinin üssü, bu ırmak parçasının ortasındadır. Bu üsten 1.5 milden daha uzak bir yerde acil bir durumun ortaya çıkması olasılığını bulun.

3. Bir banliyöde yaşayan bütün ailelerin gelirleri, sürekli bir rassal değişkenle gösterilebilir. Bu banliyödeki ailelerin ortanca (medyan) gelirinin 60,000 $, bu banliyödeki bütün ailelerin %40'ının gelirinin 72,000 $'ın üstünde olduğu bilinmektedir.
(a) Rassal seçilmiş bir ailenin gelirinin 60,000 $ ile 72,000 $ arasında çıkma olasılığı kaçtır?
(b) Elde başka bilgi yokken, rassal seçilmiş bir ailenin gelirinin 65,000 $'dan az olması olasılığına ilişkin ne söylenebilir?

4. Bir ev sahibi, kış başında, üç kış ayında ısınma giderinin toplam 380 $'dan az olma olasılığını 0.4 ve 460 $'ın altında kalma olasılığını da 0.6 tahmin etmektedir.
(a) Toplam giderin 380 $ ile 460 $ arasında çıkma olasılığı kaçtır?
(b) Elde başka bilgi yokken, toplam giderin 400 $'ın altında kalma olasılığı konusunda ne söylenebilir?

5. Bir yazar, yayımcısından gelen bir sözleşmeye göre, 10,000 $'lık bir ödemeye ek olarak satılan her kitap başına 1.50 $ alacaktır. Yazarın satılacak toplam kitap sayısı konusundaki belirsizliği, ortalaması 30,000, standart sapması 8,000 olan rassal bir değişkenle gösterilebilir. Yazarın alacağı paranın ortalaması ile standart sapmasını bulun.

6. Bir yüklenici, üzerinde daha araştırma-geliştirme yapılması gereken bir proje için bir ihaleye teklif sunacaktır. Projenin özelliklerini doyurucu biçimde yerine getirmenin toplam maliyetinin 20 milyon $'a ek olarak bazı araştırma-geliştirme giderleri olacağı tahmin edilmektedir. Yüklenici ek giderleri, ortalaması 4 milyon $, standart sapması 1 milyon $ olan bir rassal değişken olarak görmektedir. Yüklenici

vereceği teklifte beklenen kazancının, beklenen maliyetin %10'u kadar olmasını istemektedir. Teklif ne olmalıdır? Eğer bu teklif kabul edilirse, bu projeden elde edilecek kazancın standart sapması ne kadar olacaktır?

7. Bir hayır kurumu telefonla bağış toplamaktadır. Bu işte çalışanlara haftada 60 $'a ek olarak topladıkları bağışın %20'si verilmektedir. Bir kişinin bir haftada topladığı bağış miktarı, ortalaması 700 $, standart sapması 130 $ olan bir rassal değişken olarak görülebilir. Burada çalışan bir kimsenin haftalık gelirinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.
8. Bir satıcı ayda 6,000 $ maaşa ek olarak topladığı sipariş tutarının %8'ini almaktadır. Bu siparişlerin yıllık tutarı, ortalaması 600,000 $, standart sapması 180,000 $ olan rassal bir değişkenle gösterilebilir. Bu satıcının yıllık gelirinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.
9. Bir yatırımcı 200,000 $'ını iki yatırıma bölüştürecektir. Bunlardan ilki kesin %10 kazanç getirecek, ikincisinin kazancının ise beklenen değeri %18, standart sapması %6 olacaktır. Yatırımcı parasını bu iki yatırıma eşit bölerse, toplam kazancının ortalaması ile standart sapmasını bulun.
10. Bir ev sahibi enerjiyi verimli kullanan yeni bir kazan taktırmıştır. Yeni kazanın bir yılda sağlayacağı enerji tasarrufunun tahmini, ortalaması 200 $, standart sapması 60 $ olan bir rassal değişken sayılabilir. Yapacağınız gerekli varsayımları belirterek, 5 yıllık bir sürede sağlanacak enerji tasarrufunun ortalaması ile standart sapmasını bulun.
11. Bir danışman üç proje üzerinde çalışmaya başlıyor. Bu projelerin beklenen kazançları 50,000 $, 72,000 $ ve 40,000 $'dır. İlgili standart sapmalar da 10,000 $, 12,000 $ ve 9,000 $'dır. Sonuçların bağımsızlığını varsayarak, danışmanın bu üç projeden toplam kazancının ortalaması ile standart sapmasını bulun.
12. Örnek 5.4'ün devamı olarak, rassal değişkenler X ile Y'nin bağımsız olduğu varsayımı dışındaki bütün belirlemelerin geçerli olduğunu varsayalım. Bu rassal değişkenlerin arasındaki ortak varyansı C ile gösterelim. Bu durumda toplam getirinin varyansının

$$\text{Var}(G) = (2\alpha^2 - 2{,}000\alpha + 1{,}000{,}000)\sigma + 2\alpha(1{,}000 - \alpha)C$$

olduğunu gösterin. $C < \sigma^2$ olduğu sürece (ki öyle olmalıdır) $\alpha = 500$ seçiminin, $\alpha = 0$ seçiminden daha az riskli olduğunu gösterin. Yatırım çeşitlemesi, C'nin hangi değerleri için riski en çok düşürecektir?

13. Bir danışmanın üç gelir kaynağı vardır: kısa süreli eğitimler yapmak, bilgisayar yazılımı satmak, projelere danışmanlık yapmak. Bu kaynaklardan beklenen yıllık gelirleri 20,000 $, 25,000 $, 15,000 $ olup bunlara karşılık gelen standart sapmalar da 2,000 $, 5,000 $, 4,000 $'dır. Bağımsızlık varsayımıyla danışmanın yıllık toplam gelirinin ortalaması ile standart sapmasını bulun.
14. Bir montaj hattında üretilen parçaların niteliğini denetlemek için beş denetçi çalıştırılmaktadır. Her denetçinin bir vardiyada denetleyebileceği parça sayısı, ortalaması 120, standart sapması 16 olan bir rassal sayıyla gösterilebilir. Bir denetçinin bir vardiyada denetlediği parça sayısına X diyelim. Demek ki denetlenen toplam sayı $5X$'tir, bunun ortalaması 600, standart sapması 80'dir. Bu akıl yürütmenin neresi yanlıştır? Denetçilerin başarımlarının birbirinden bağımsız olduğu varsayımıyla bir

vardiyada denetlenen toplam parça sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

15. Normal karayolu koşullarında, belli bir model arabanın 1 galon benzinle gidebildiği mil sayısı, ortalaması 28, standart sapması 2.4 olan bir rassal değişkenle gösterilebilir. Bu arabalardan, her birinde 1 galon benzin olan 16 tanesi birbirinden bağımsız olarak normal karayolu koşullarında sürülmüştür. Bu arabaların ulaştıkları ortalama mil sayısının ortalaması ile standart sapmasını bulun.

5.5 NORMAL DAĞILIM

Bu bölümde, istatistik çözümlemelerin çok büyük bir bölümünde merkezî bir rol oynayan sürekli bir dağılımı ele alacağız. Sözgelimi, büyük bir öğrenci grubunun bir sınava girdiğini düşünelim. Bunların notlarının büyük bir bölümü ortalama dolayında toplanacak, bazı notlar ise, genişliği sabit bir aralık içinde kuyruklara doğru azalan biçimde dağılacaktır. Bu sınavın not ortalaması 60 ise, sözgelimi 55-65 arasında not alan öğrenci sayısının, 85-95 arasındakinden çok olmasını bekleriz. Bu düşünceler, ortalamada doruğa çıkan, uçlara doğru gittikçe azalan bir olasılık yoğunluk fonksiyonunu öne sürmektedir. Bu özellikleri taşıyan bir dağılım **normal dağılımdır**, olasılık yoğunluk fonksiyonu Çizim 5.8'de gösterilmiştir. Buradan görülebileceği gibi yoğunluk fonksiyonu *çan biçimi*ndedir.

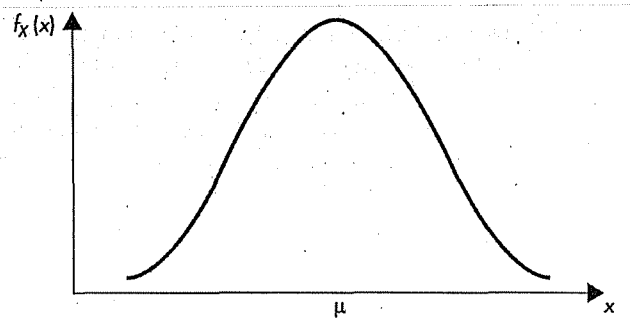
Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Rassal değişken X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty \text{ için}$$

ise, X'in **normal dağılım**a uyduğu söylenir. Burada μ ile σ^2, $-\infty < \mu < \infty$ ve $0 < \sigma^2 < \infty$ aralıklarında yer alan herhangi iki sayı, e ile π, $e = 2.71828\ldots$, $\pi = 3.14159$ olan fiziksel sabitlerdir.

Tanımdan görülebileceği gibi, tek bir normal dağılım yoktur, μ ile σ^2'nin değişik değerlerinden doğan bütün bir dağılım ailesi vardır. Bu iki katsayı çok elverişli yorumlara yol açar.



ÇİZİM 5.8 Bir normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Normal Dağılımın Bazı Özellikleri

Rassal değişken X'in, μ ve σ^2 katsayılarıyla, normal dağılıma uyduğunu düşünelim. Bu durumda şu özellikler geçerlidir:

(i) Bu rassal değişkenin ortalaması μ'dür.

$$E(X) = \mu$$

(ii) Bu rassal değişkenin varyansı σ^2'dir.

$$\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

(iii) Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu, ortalama μ'de ortalanmış, simetrik çan biçimli bir eğridir (bkz. Çizim 5.8).

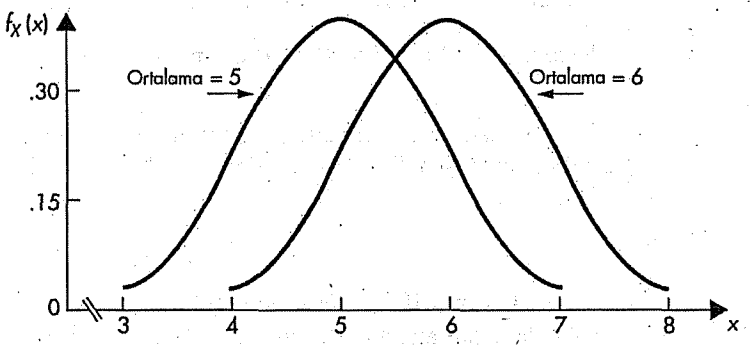
Bir normal rassal değişkenin ortalaması ile varyansı veriyken, normal dağılım ailesinden tek bir üyenin belirlenebileceği, bu özelliklerden çıkarılabilir. Bu da bize bir gösterim kolaylığı sağlar.

Gösterim

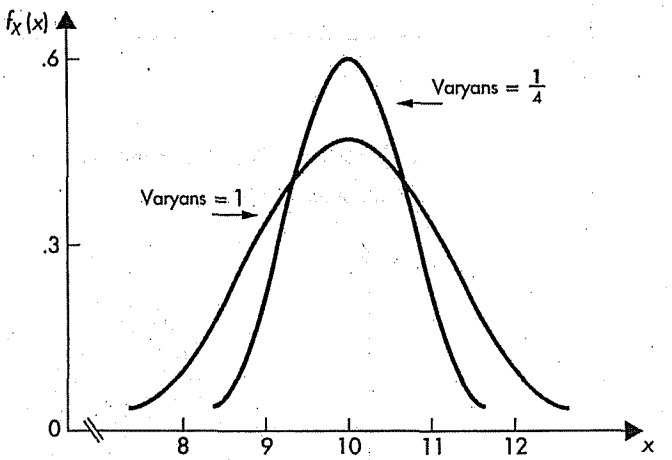
Rassal değişken X, ortalama μ ve varyans σ^2 ile bir normal dağılıma uyuyorsa bunu şöyle yazabiliriz:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Şimdi, bir dağılımın ortalaması bir merkezî konum ölçüsü verirken, varyansı da ortalamanın iki yanındaki yayıklık ya da yayvanlığın bir ölçüsüdür. Öyleyse, μ ile σ^2 katsayılarının aldığı değerler, bir normal rassal değişkenin



(a) Ortalamaları 5/6, varyansları 1 olan iki normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları



(b) Varyansları 1/4 ve 1, ortalamaları 10 olan iki normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları

ÇİZİM 5.9 Normal bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinde μ ile σ^2'nin etkileri

olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinde değişik etkiler yaratır. Çizim 5.9 (a), varyansları aynı, ama ortalamaları farklı iki normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarını gösterir. Varyansı sabit tutarken ortalamayı yükseltmenin yoğunluk fonksiyonunu yana kaydırdığı ama biçimini değiştirmediği görülmektedir. Çizim 5.9 (b)'de ise, iki yoğunluk fonksiyonu, ortalamaları aynı, varyansları farklı normal rassal değişkenlere aittir. İkisi de ortalamanın iki yanında simetriktir ama varyansı büyük olan daha yayvandır.

Belli bir normal dağılımdan olasılıkların belirlenmesi, uygulamada son derecede önemli bir sorudur. Olasılıkların belirlenmesinde ilk adım olmak üzere birikimli dağılım fonksiyonunu ele alalım.

Normal Dağılımın Birikimli Dağılım Fonksiyonu

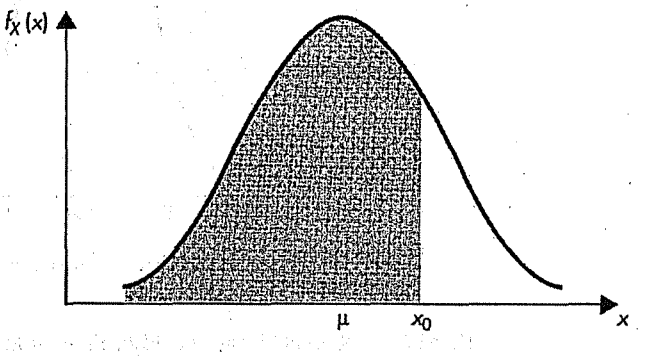
X'in ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir normal rassal değişken, yani $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğunu düşünelim. Bu durumda **birikimli dağılım fonksiyonu** $F_X(x_0)$ şöyle olur:

$$F_X(x) = P(X \leq x_0)$$

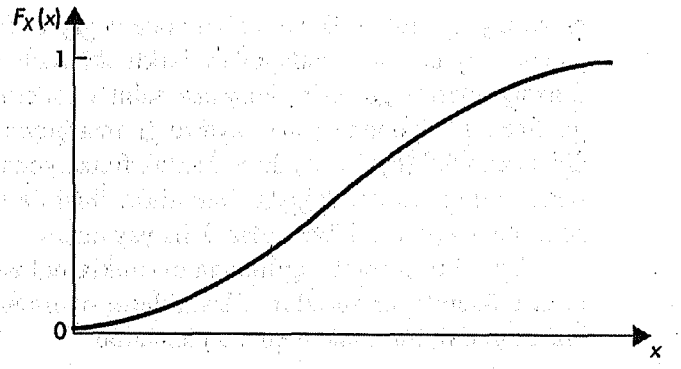
Bu da, Çizim 5.10'da gösterildiği gibi, olasılık yoğunluk fonksiyonu altında x_0'ın solunda kalan alandır. Her uygun yoğunluk fonksiyonu gibi burada da eğri altındaki toplam alan 1'dir.

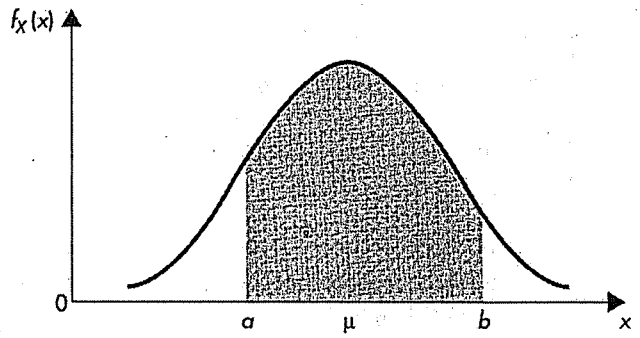
$$F_X(\infty) = 1$$

ÇİZİM 5.10 Gölgeli alan, normal bir rassal değişken için X'in x_0'dan küçük olma olasılığıdır.



ÇİZİM 5.11 Bir normal rassal değişkenin birikimli olasılık fonksiyonu





ÇİZİM 5.12 Gölgeli alan, bir normal rassal değişken olan X'in a ile b arasında kalma olasılığıdır.

Normal dağılmış bir rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonunu hesaplamak için basit bir cebirsel gösterim yoktur.[7] Birikimli dağılım fonksiyonunun genel biçimi Çizim 5.11 'de gösterilmiştir.

Herhangi bir sürekli rassal değişken için olasılıkların birikimli dağılım fonksiyonu cinsinden yazılabileceğini görmüştük.

Normal Rassal Değişkenlerin Aralık Olasılıkları

X, birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ olan bir rassal değişken, a ile b de, $a < b$ koşuluyla, olanaklı iki değer olsun. O zaman

$$P(a < X < b) = F_X(a) - F_X(b)$$

olur. Olasılık, Çizim 5.12'de gösterildiği gibi, ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonunun altında a ile b arasında kalan alandır.

İstenen her olasılık birikimli dağılım fonksiyonundan bulunabilir. Ancak ciddi bir güçlük sözkonusudur, çünkü birikimli dağılım fonksiyonunu belirleyecek uygun bir formül yoktur. İlke olarak, belirli herhangi bir normal dağılımın olasılıkları, bir elektronik bilgisayar kullanılarak sayısal yöntemler aracılığıyla bulunabilir. Ama, karşılaştığımız her normal dağılım için böyle bir işlemi yapmak zorunda kalmak adamakıllı yorucu bir iş olurdu. Neyse ki, *her* normal dağılımın olasılıkları, birikimli dağılım fonksiyonu hesaplanabilen ve çizelgeleştirilmiş *tek bir* normal dağılım olasılıklarıyla her zaman ifade edilebilir. Şimdi bu amaçla kullanılan özel dağılımı ele alacağız.

---

[7] Bunun anlamı, şu tümlevin basit bir cebirsel gösteriminin olmadığıdır:

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

Standart Normal Dağılım

Z, ortalaması 0, varyansı 1 olan bir normal rassal değişken olsun.

$$Z \sim N(0, 1)$$

Bu durumda Z'nin **standart normal dağılıma** uyduğu söylenir.

Bu rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu $F_Z(z)$ ile gösterilse, a^* ile b^* da $a^* < b^*$ olan iki sayı ise, o zaman şu yazılabilir:

$$P(a < Z < b) = F_Z(a^*) - F_Z(b^*)$$

Standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu Ek Çizelge 3'te verilmiştir. Bu çizelge, z'nin eksi olmayan değerleri için şu değerleri gösterir.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

Sözgelimi,

$$F_Z(1.25) = 0.8944$$

Standart normal rassal değişkenin 1.25'ten küçük bir değer alma olasılığı 0.8944'tür. Birikimli dağılım fonksiyonunun z'nin eksi değerlerine karşılık gelen değerleri, olasılık yoğunluk fonksiyonunun simetrisinden çıkarılabilir. z_0, artı değerli herhangi bir sayı olsun. Biz de şunu bulmak isteyelim:

$$F_Z(-z_0) = P(Z \leq -z_0)$$

Çizim 5.13'te de gösterildiği gibi, standart normal rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu ortalamanın iki yanında simetrik olduğundan, eğri altında $-z_0$'ın solundaki alan ile eğrinin altında z_0'm sağındaki alan aynıdır. Yani:

$$P(Z \leq -z_0) = P(Z \geq z_0)$$

Dahası, eğri altında kalan toplam alan 1 olduğundan

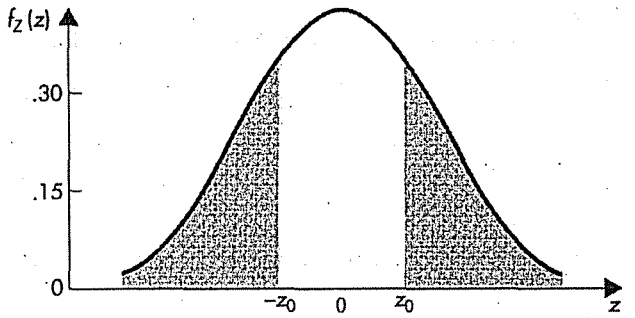
$$P(Z \geq z_0) = 1 - P(Z \leq z_0) = 1 - F_Z(z_0)$$

bulunur. Böylece şu sonuca ulaşılır:

$$F_Z(-z_0) = 1 - F_Z(z_0)$$

Sözgelimi,

$$P(Z \leq -1.25) = F_Z(-1.25) = 1 - F_Z(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$



ÇİZİM 5.13 Z standart normal rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu; birbirine eşit olan gölgeli alanlar, Z'nin $-z_0$'ı aşmama olasılığı ile Z'nin z_0'dan büyük olma olasılığını gösterir

ÖRNEK 5.5

Z bir standart normal rassal değişkense, $P(-0.50 < Z < 0.75)$'i bulun. Aranan olasılık şudur:

$$P(-0.50 < Z < 0.75) = F_Z(0.75) - F_Z(-0.50)$$
$$= F_Z(0.75) - [1 - F_Z(0.50)]$$

Daha sonra Ek Çizelge 3'ü kullanarak şunu buluruz:

$$P(-0.50 < Z < 0.75) = 0.7734 - (1 - 0.6915) = 0.4649$$

Şimdi de herhangi bir normal rassal değişkenin olasılıklarının, standart normal rassal değişkenin olasılıkları cinsinden nasıl belirtilebileceğini göstereceğiz. X rassal değişkeni, μ ortalama, σ^2 varyans ile normal dağılıma uysun. Altbölüm 5.3'te ortalamayı çıkarıp standart sapmaya bölmekle, ortalaması 0, varyansı 1 olan bir Z rassal değişkeni elde edildiğini görmüştük. Ayrıca X normal dağılmışken, Z'nin de öyle olduğu gösterilebilir. Demek ki Z'nin dağılımı standart normaldir. Bu durumda, X'in a ile b arasında olma olasılığım bulmak istediğimizi düşünün. Bu da $(X-\mu)/\sigma$'nın $(a-\mu)/\sigma$ ile $(b-\mu)/\sigma$ arasında kalmasıyla aynı şeydir, öyleyse aranan olasılık şudur:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Normal Rassal Değişkenlerin Aralık Olasılıklarının Bulunması

X, ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir normal rassal değişken olsun. Bu durumda $Z = (X-\mu)/\sigma$ da bir standart normal dağılıma uyar, yani $Z \sim N(0, 1)$'dir.

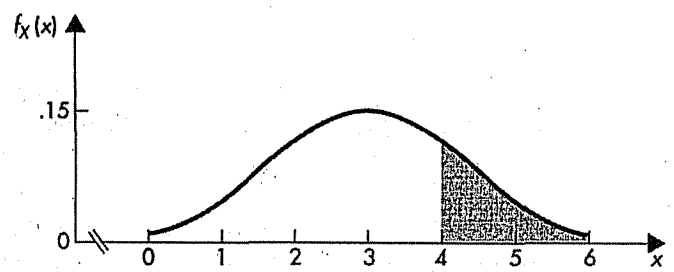
a ile b, $a < b$ koşuluyla herhangi iki sayı ise, buradan şu çıkarılabilir:

$$P(a < X < b) = \left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

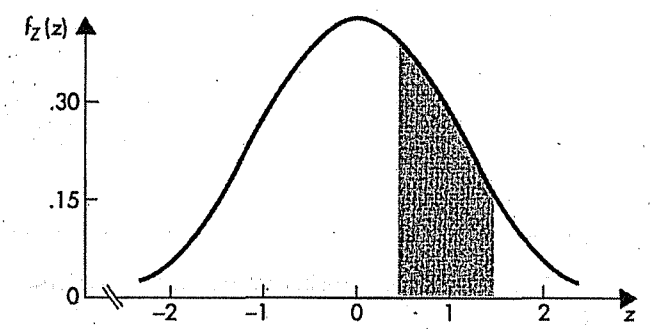
Burada Z, standart normal rassal değişken, $F_Z(z)$ ise onun birikimli dağılım fonksiyonunu gösterir.

Bu bulgu Çizim 5.14'te gösterilmiştir. Çizimin (a) bölümü, ortalaması $\mu = 3$, standart sapması $\sigma = 2$ olan X normal rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Gölgeli alan, X'in 4 ile 6 arasında kalma olasılığını gösterir. Bu da, bir standart normal rassal değişkenin $(a-\mu)/\sigma$ ile $(b-\mu)/\sigma$ arasında, yani 0.5 ile 1.5 arasında olmasının olasılığına eşittir. Bu olasılık, Çizim 5.14(b)'de standart normal eğrinin altındaki gölgeli alandır.

ÇİZİM 5.14 Normal rassal değişkenlerin aralık olasılıklarının bulunması



(a) Ortalaması 3, standart sapması 2 olan X normal rassal değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu; gölgeli alan X'in 4 ile 6 arasında olma olasılığıdır.



(b) Z standart normal rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu; gölgeli alan, Z'nin 0.5 ile 1.5 arasında kalma olasılığı olup (a)'daki gölgeli alana eşittir.

ÖRNEK 5.6

Eğer $X \sim N(15, 16)$ ise, X'in 18'den büyük olma olasılığını bulun. Bu olasılık şudur:

$$P(X > 18) = P\left(Z > \frac{18-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z > \frac{18-15}{4}\right)$$
$$= P(Z > 0.75)$$
$$= 1 - P(Z < 0.75)$$
$$= 1 - F_Z(0.75)$$

Ek Çizelge 3'ten $F_Z(0.75) = 0.7734$ alınır, böylece

$$P(X > 18) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

olur.

ÖRNEK 5.7

Eğer X, ortalaması 3, standart sapması 2 olarak normal dağılıyorsa, $P(4 < X < 6)$'yı bulun.

$$P(4 < X < 6) = P\left(\frac{4-\mu}{\sigma} < Z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{4-3}{2} < Z < \frac{6-3}{2}\right)$$
$$= P(0.5 < Z < 1.5)$$
$$= F_Z(1.5) - F_Z(0.5)$$
$$= 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$$

Bu hesaplamalar, Çizim 5.14'te gösterilenlerdir.

ÖRNEK 5.8

Bir şirket, ömrü normal dağılıma uyan, ortalaması 1,200 saat, standart sapması 200 saat olan ampuller üretmektedir. Bu şirketin üretiminden bir ampul rassal seçilse, bunun ömrünün 900 ile 1,300 saat arasında olma olasılığı kaçtır?

X ömrü saat olarak göstersin. Bu durumda şunu buluruz:

$$P(900 < X < 1{,}300) = P\left(\frac{900-\mu}{\sigma} < Z < \frac{1{,}300-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{900-1{,}200}{250} < Z < \frac{1{,}300-1{,}200}{250}\right)$$
$$= P(-1.2 < Z < 0.4)$$

$$= F_Z(0.4) - F_Z(-1.2)$$
$$= 0.6554 - (1 - 0.8849) = 0.5403$$

Demek ki, bir ampulün 900 ile 1,300 saat arasında dayanmasının olasılığı yaklaşık 0.54'tür.

ÖRNEK 5.9

Çok büyük bir öğrenci grubunun sınav notları normal dağılmakta olup ortalaması 60, standart sapması 15'tir. 85 ile 95 arasında not alan öğrencilerin oranı kaçtır?

X, sınav notunu göstersin. Bu durumda şunu buluruz:

$$P(85 < X < 95) = P\left(\frac{85-\mu}{\sigma} < Z < \frac{95-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{85-60}{15} < Z < \frac{95-60}{15}\right)$$
$$= P(1.67 < Z < 2.33)$$
$$= F_Z(2.33) - F_Z(1.67)$$
$$= 0.9901 - 0.9525 = 0.0376$$

Yani, öğrencilerin %3.76'sı 85 ile 95 arasında not almıştır.

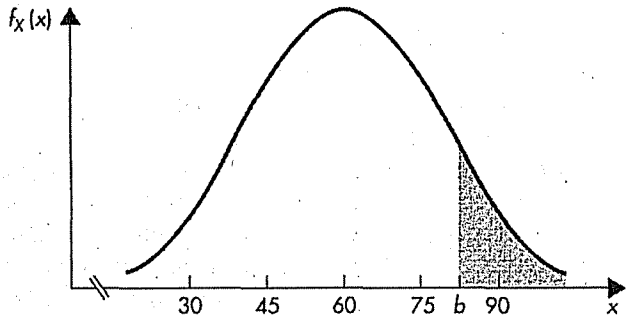
ÖRNEK 5.10

Örnek 5.9'daki sınav notlarında, hangi notun üstündeki öğrenciler, üst %10'a girer?

Daha önce böyle eşik değerlere karşılık gelen olasılıkları bulmuştuk. Burada ise belli bir olasılığa karşılık olan eşik değerini arıyoruz. Durum, ortalaması 60, standart sapması 15 olan normal dağılmış bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu veren Çizim 5.15'te gösterilmiştir. Üst %10'a girebilmek için gerekli en düşük not b olsun. O zaman, rassal seçilmiş bir öğrencinin b'den yüksek not alma olasılığı 0.10'dur. Bu olasılık, Çizim 5.15'te gölgeli alanla gösterilmiştir. Sınav notları X ile gösterilirse, X'in b'yi aşma olasılığı 0.10'dur. Öyleyse şunu yazabiliriz:

$$0.1 = P(X > b)$$
$$= P\left(Z > \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z > \frac{b-60}{15}\right)$$

Buradan şu çıkarılabilir:



ÇİZİM 5.15 Rassal değişken X'in b'yi aşma olasılığı 0.10'dur; burada X, ortalaması 60, standart sapması 15 olan normal dağılıma uyar

$$0.9 = P\left(Z < \frac{b-60}{15}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{b-60}{15}\right)$$

Eğer $F_Z(z) = 0.9$ ise, Ek Çizelge 3'ten $z = 1.28$ bulunur. Demek ki

$$\frac{b-60}{15} = 1.28$$

öyleyse

$$b = 79.2$$

olur. Sonuçta, öğrencilerin %10'u 79.2'den yüksek not almıştır.

Örnek 5.9 ile 5.10'daki sınav notları tamsayı olarak verilirse, notların dağılımı kendiliğinden kesikli olur. Ama böyle durumlarda bile, normal dağılım çoğu zaman yeterli bir yakınsama sağlar. Bu bölümde daha ileride, normal dağılımın, sık sık kesikli dağılımların yaklaşığı olarak kullanılmasını göreceğiz. Buna ön hazırlık olarak bir sonraki altbölümde, normal dağılıma bu kitapta verilen önemi çok haklı gösterecek bir bulgudan söz edeceğiz.

ALIŞTIRMALAR

16. Rassal değişken Z'nin standart normal dağılıma uyduğunu düşünelim.

(a) $P(Z < 1.20)$'yi bulun.

(b) $P(Z > 1.33)$'ü bulun.

(c) $P(Z < -1.70)$'i bulun.

(d) $P(Z > -1.00)$'i bulun.
(e) $P(1.20 < Z < 1.33)$'ü bulun.
(f) $P(-1.70 < Z < 1.20)$'yi bulun.
(g) $P(-1.70 < Z < -1.00)$'i bulun.

17. Rassal değişken Z'nin standart normal dağılıma uyduğunu düşünelim.
(a) Z'nin hangi sayıdan küçük olma olasılığı 0.70'tir.
(b) Z'nin hangi sayıdan küçük olma olasılığı 0.25'tir.
(c) Z'nin hangi sayıdan büyük olma olasılığı 0.2'dir.
(d) Z'nin hangi sayıdan büyük olma olasılığı 0.6'dır.

18. Bir üniversite yerleşkesindeki öğrencilerin bir yılda ders kitaplarına harcadığı para tutarı, ortalaması 380, standart sapması 50 $ olan bir normal dağılıma uymaktadır.
(a) Rassal olarak seçilmiş bir öğrencinin ders kitaplarına yılda 400 $'dan az para harcamasının olasılığı kaçtır?
(b) Rassal olarak seçilmiş bir öğrencinin ders kitaplarına yılda 360 $'dan çok para harcamasının olasılığı kaçtır?
(c) (a) ile (b) şıkları için bulduğunuz yanıtların neden aynı olduğunu göstermek için bir çizim düzenleyin.
(d) Rassal olarak seçilmiş bir öğrencinin ders kitaplarına yılda 300 ile 400 $ arasında para harcamasının olasılığı kaçtır?
(e) Bu yerleşkedeki bütün öğrencilerin %80'ini içerecek, ders kitaplarına harcanan para tutarı konusunda dolar cinsinden bir aralık bulmak istiyorsunuz. Neden bu tür aralıklardan istenildiği kadar bulunabileceğini açıklayın. Bunlardan en darını bulun.

19. Bir mala gelecek ay olması beklenen talep, ortalaması 1,200, standart sapması 100 birim olan bir normal dağılımla gösterilebilir.
(a) Satışların 1,000 birimi aşma olasılığı kaçtır?
(b) Satışların 1,100 ile 1,300 birim arasında kalma olasılığı kaçtır?
(c) Satışların kaç birimi aşma olasılığı 0.10'dur?

20. Belli bir marka araba lastiğinin dayanma süresi, ortalaması 35,000, standart sapması 4,000 mil olan bir normal dağılıma uymaktadır.
(a) Bu lastiklerin kaçta kaçı 38,000 milden daha uzun dayanır?
(b) Bu lastiklerin kaçta kaçı 32,000 milden daha kısa dayanır?
(c) Bu lastiklerin kaçta kaçı 32,000 ile 38,000 mil arasında dayanır?
(d) Dayanma süresinin şunları gösteren olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizin.
(i) Neden (a) ile (b) şıklarının yanıtları aynıdır?
(ii) Neden (a), (b), (c) şıklarının yanıtlarının toplamı bir eder?

21. Bir yatırım portföyünde çok sayıda şirketin pay senetleri vardır. Bu pay senetlerinin geçen yıldaki getiri oranları, ortalaması %12.2, standart sapması %7.2 olan bir normal dağılıma uymaktadır.
(a) Bu şirketlerin kaçta kaçında getiri oranı %20'den yüksektir?
(b) Bu şirketlerin kaçta kaçında getiri oranı eksidir?
(c) Bu şirketlerin kaçta kaçında getiri oranı %5 ile %15 arasındadır?

22. Bir şirket torbalar içinde kimyasal bir madde üretmekte olup bunun içine başka maddelerin karışmasıyla ilgilenmektedir. Bu karışma miktarı 12.2 gram ortalama, 2.8 gram standart sapmayla normal dağılıma uymaktadır. Bir torba rassal seçilmiştir.
(a) Bunun 10 gramdan az karışık madde içerme olasılığı kaçtır?

(b) Bunun 15 gramdan çok karışık madde içerme olasılığı kaçtır?
(c) Bunun 12 ile 15 gram arasında karışık madde içerme olasılığı kaçtır?
(d) Ayrıntılı hesaplamaya girişmeden (a) ile (b)'deki yanıtlardan hangisinin daha büyük olacağı anlaşılabilir. Nasıl?

23. Bir yüklenici belli bir sözleşmeyi yerine getirme maliyetini, ortalaması 500,000, standart sapması 50,000 $ olan normal dağılmış bir rassal değişken olarak görmektedir.
(a) Bu sözleşmeyi yerine getirme maliyetinin 460,000 $ ile 540,000 $ arasında olma olasılığı kaçtır?
(b) Bu maliyetin kaç doların altında olma olasılığı 0.2'dir?
(c) Bu maliyetin 0.95 olasılıkla içinde kalacağı en dar aralığı bulun.

24. Bir sınavın notları normal bir dağılıma uymaktadır. Rassal seçilmiş bir öğrencinin notunun, ortalamanın 1.5 standart sapma üstündeki notu aşma olasılığı kaçtır?

25. Yeni bir televizyon dizisi gösterime girecektir. Bir yayın yöneticisi, bu diziyi ilk ayda seyredecek izleyici oranı konusundaki belirsizliğin, ortalaması 18.2, standart sapması 1.6 olan bir normal dağılımla gösterilebileceği kanısındadır. Bu yöneti-cinin kanısına göre, bu oran 0.1 olasılıkla kaçtan küçüktür?

26. Bir yayın yöneticisi yeni bir televizyon dizisinin geleceğini değerlendirmektedir. Onun kanısına göre bu dizi 0.25 olasılıkla seyircinin %17.8'inden çoğunu, 0.15 olasılıkla da %19.2'sinden çoğunu çekecektir. Yöneticinin bu konudaki belirsizliği normal bir dağılımla gösterilebiliyorsa, bu dağılımın ortalaması ile standart sapması kaçtır?

27. Çok büyük sayıda öğrenicinin girdiği bir sınavda notlar, 700 ortalama, 120 standart sapma ile normal dağılmaktadır.
(a) 820'nin üstündeki notlara A verilecektir. Öğrencilerin kaçta kaçı A alır?
(b) 730 ile 820 arasındaki notlara B verilecektir. Bir öğretim üyesi bütün öğrenciler arasından rassal seçildiği düşünülebilecek 100 öğrenciye ders vermiştir. Bunlar arasından B alması beklenen öğrenci sayısı kaçtır?
(c) En düşük not alan %5 öğrencinin sınavda başarısız olmasına karar verilmiştir. Başarılı olabilmek için en az kaç not almak gerekir?

28. İki yatırımdan birini seçmek durumundayım. Her iki durumda da getiri yüzdesi konusunda belirsizlik içindeyim ama bu belirsizliğin aşağıdaki çizelgede verilen ortalama ve standart sapmalarla normal dağılıma uyacağını düşünüyorum. En az %10 getiri verme şansı yüksek olan yatırımı seçmek istiyorum. Hangisini seçeyim?

	ORTALAMA	STANDART SAPMA
A yatırımı	10.4	1.2
B yatırımı	11.0	4.0

29. Bir şirket iki satıcıdan hammadde almakta olup bunlara karışmış yabancı madde oranı konusunda titizlik göstermektedir. Her iki satıcıdan gelen mal kayıtlarına göre hammadde partilerindeki karışıklılık oranı, aşağıdaki çizelgede verilen ortalama ve standart sapmalarla normal dağılıma uymaktadır. Şirket bir partideki karışıklılık oranının %5'i geçmemesini özellikle istemekte, bu koşulu yerine getirme şansı yüksek olan satıcıdan mal almaya niyetlenmektedir. Hangi satıcı seçilmelidir?

	ORTALAMA	STANDART SAPMA
Satıcı A	4.4	0.4
Satıcı B	4.2	0.6

30. Bir öğretim üyesi, verdiği bir ev ödevini yapmak için öğrencilerin harcadığı zamanın, 150 dakika ortalama, 40 dakika standart sapmalı bir normal dağılıma uyduğunu bulmuştur.

(a) Rassal seçilmiş bir öğrencinin bu ödeve kaç dakikadan çok zaman ayırmasının olasılığı 0.9'dur?

(b) Rassal seçilmiş bir öğrencinin bu ödeve kaç dakikadan az zaman ayırmasının olasılığı 0.8'dir?

(c) İki öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bunlardan en az birinin bu ödeve en az iki saat harcamış olma olasılığı kaçtır?

31. Bir şirket fotokopi makinesi bakım-onarımını yapmaktadır. Kayıtlarına göre bir servis süresi, ortalaması 75, standart sapması 20 dakika olan bir normal dağılımla gösterilebilir.

(a) Servislerin kaçta kaçı bir saatten kısa sürmektedir?

(b) Servislerin kaçta kaçı 90 dakikadan uzun sürmektedir?

(c) (a) ile (b)'ye verilen yanıtların neden aynı olduğunu gösteren bir çizim düzenleyin.

(d) Bir servisin kaç dakikadan uzun sürmesinin olasılığı 0.1'dir?

32. Bir yetenek sınavı sonuçları, 420 ortalama, 80 standart sapma ile normal dağılmıştır.

(a) Bu sınavı alanlar arasından rassal seçilmiş birini 400 ile 480 arasında not alma olasılığı kaçtır?

(b) Bu sınavı alanlar arasında en üst %10'a girebilmek için en az kaç almak gerekir?

(c) Rassal seçilmiş biri için, aşağıdaki aralıklardan hangisinde not alma şansının en yüksek olduğunu hesap yapmadan belirtin: 400-440, 440-480, 480-520, 520-560.

(d) (c)'deki aralıklardan hangisinde not alma şansı en düşüktür?

(e) Bu sınava girenlerden ikisi rassal seçilmiştir. Bunlardan en az birinin 500'den yüksek not alma olasılığı kaçtır?

33. Tanınmış rock grubu Living Ingrates'in konser sırasında sahnede geçirdiği süre, ortalaması 200, standart sapması 20 dakika olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Bu grubun konserlerinin kaçta kaçı 180 ile 200 dakika arasında sürmektedir?

(b) İzleyicilerden biri bir Living Ingrates konserine 245 dakika kayıt yapabilen bir ses kayıt aygıtını kaçak olarak sokmuştur. Bütün konseri kaydetmek için bu aygıtın yeterli olma olasılığı kaçtır?

(c) Konser süresinin standart sapması 15 dakika olsaydı, hesaplama yapmadan, bir konserin 245 dakikadan uzun sürme olasılığının, (b)'de bulduğunuzdan daha mı yüksek, daha mı düşük, yoksa ona eşit mi olacağını söyleyin.

34. Büyük bir öğrenci grubu bir iktisat sınavına girmiştir. Sınav sonuçları, 70 ortalama ile normal dağılmıştır. Rassal seçilen bir öğrencinin 85'ten düşük not alma olasılığı 0.9332'dir. Rassal olarak dört öğrenci seçilmiştir. Bunlardan en az birinin 80'den yukarı not alma olasılığı kaçtır?

5.6 MERKEZÎ LİMİT TEOREMİ

Uygulamada karşılaşılan çoğu rassal değişken, oldukça büyük sayıda bağımsız rasssal değişkenin ya toplamı ya da ortalamasıdır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ortalaması μ, varyansı σ^2 olan ve birbirinin aynı dağılımlara uyan n tane bağımsız rassal değişken olsun. Bunların toplamını X ile gösterelim:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Altbölüm 4.4 ile 4.5'te, bir toplamın ortalamasının ortalamaların toplamına, bir toplamın varyansının, bağımsız rassal değişkenler için, varyanslar toplamına eşit olduğunu görmüştük. Öyleyse X'in ortalaması ile varyansı şudur:

$$E(X) = n\mu \qquad \text{Var}(X) = n\sigma^2$$

Şimdi, herhangi bir rassal değişkenden ortalamasını çıkarıp standart sapmasına bölersek ortalaması 0, varyansı 1 olan bir rassal değişken elde ederiz:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

rassal değişkeninin ortalaması 0, varyansı 1'dir. Bu ifadenin payı ile paydasını n'ye bölersek şunu buluruz:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Burada

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \Lambda + X_n}{n} = \frac{X}{n}$$

X'in ortalamasıdır.

Buraya kadar yeni bir şey yok. **Merkezî limit teoremi**nin sunduğu çok önemli ek bilgi, X_i'nin dağılımı ne olursa olsun, (σ^2 sonlu olmak koşuluyla) toplamdaki n büyüdükçe, Z'nin dağılımının standart normal dağılıma yakınsadığıdır.

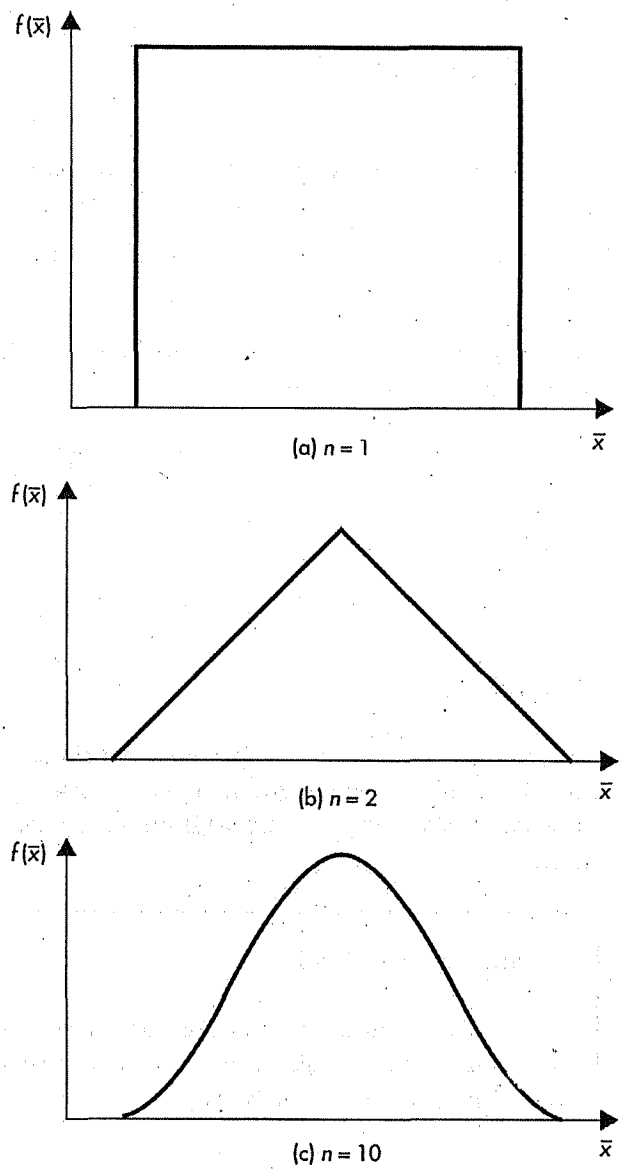
Merkezî Limit Teoremi

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, ortalaması μ, varyansı σ^2 olan ve birbirinin aynı dağılımlara uyan n tane bağımsız rassal değişken olsun. Bu rassal değişkenlerin toplamını X, ortalamasını $\overline{X}$ ile gösterelim. n büyüdükçe

$$Z = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

değişkeni standart normal dağılıma yakınsar.

ÇİZİM 5.16 n tane bağımsız tekdüze dağılmış rassal değişkenin ortalamasının olasılık yoğunluk fonksiyonlarının biçimleri



Merkezî limit teoreminin, istatistik uygulaması üzerinde ağırlıklı bir etkisi vardır. Birçok uygulama sorunu, rassal değişkenlerin toplamını ya da ortalamasını içerir ve bu durumlarda da normal dağılım çoğu zaman, bu teorem gereği, asıl dağılımın yeterince yakınsağıdır.

Bu bulgunun uygulama alanı dikkat çekecek ölçüde geniştir. Teoreme göre, bağımsız rassal değişkenler kümesinin ortak dağılımı *ne olursa olsun*, varyansları sonlu olduğu sürece, makul sayıda böyle değişkenin toplamı ya da ortalaması, normale yakın dağılmış bir rassal değişken olur. Bunu açıklamak için, Altbölüm 5.2 ile 5.3'te gördüğümüz tekdüze dağılıma dönelim. Bu rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonunun biçiminin, bir normal rassal değişkeninkinden çok farklı olduğu kesindir. Yine de, makul sayıda bağımsız tekdüze dağılmış rassal değişkenlerin ortalaması normale yakın bir dağılım gösterir. Çizim 5.16, bir, iki, on bağımsız tekdüze rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının biçimlerini göstermektedir. Bu çizimin (a) bölümünde, $n = 1$ iken, tanıdık tekdüze yoğunluk fonksiyonunu görüyoruz. Bölüm (b), $n = 2$ iken bu rassal değişkenlerin ortalamasının üçgen biçimindeki yoğunluk fonksiyonunu gösteriyor. Daha sonra, ortalamada $n = 10$ gibi az sayıda değer varken, (c) bölümünde, biçimi bir normal dağılıma şimdiden çok benzemiş olan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu buluyoruz.

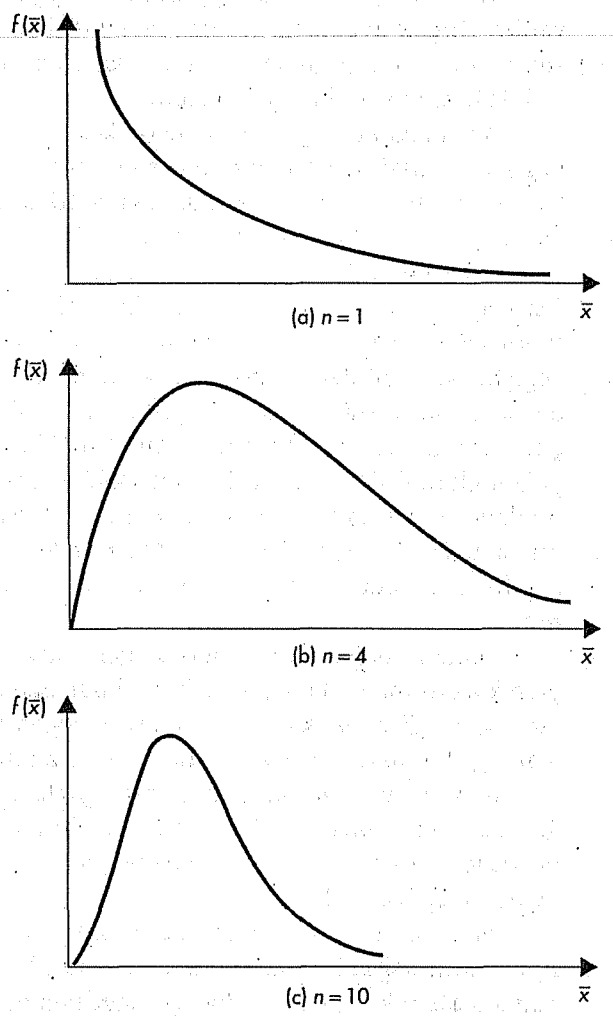
Tekdüze dağılım ortalamasına göre simetriktir. Ama, merkezî limit teoremi çarpık dağılımlara da uygulanabilir. Bunu açıklamak üzere, Çizim 5.17(a) böyle bir dağılım göstermektedir.[8] Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun biçimi, bir normal dağılımınkinden çok farklıdır. Bu çizimin (b) ile (c) bölümleri, $n = 4$ ile $n = 10$ iken bu dağılımdan bağımsız gözlemlerin ortalamalarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir. Buradan görülebileceği gibi, ortalamada on değer varken, yoğunluk fonksiyonunun biçimi, standart normal dağılımın biçimine epeyce yakındır.

Merkezî limit teoreminin geçerliliği sürekli rassal değişkenlerin toplamlarıyla sınırlı değildir. Kesikli rassal değişkenlere de genişletilebilir. Bundan sonraki altbölümde, binom ve Poisson dağılımlarına uyan rassal değişkenlerin aralık olasılıklarının iyice yaklaşıklarının elde edilmesini sağlamak için bu teoremin nasıl kullanılacağını göreceğiz.

Bölüm 6'da bir örneklemdeki bulgulara dayanarak bir anakütleye ilişkin çıkarsama yapma denen önemli bir istatistik sorununu ele alacağız. Örneklem verilerinden hesaplanan büyüklüklerin çoğu toplamlar ya da ortalamalardır. Öyleyse, merkezî limit teoremi burada da geçerli olur ve bu tür sorunlara yaklaşmada kullanılan çoğu tekniğe de geçerlilik katar.

---

[8] Bu, serbestlik derecesi bir olan bir ki-kare dağılımıdır. Bu dağılımla Altbölüm 6.4'te yeniden karşılaşacağız.



ÇİZİM 5.17 Bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımından n tane bağımsız tekdüze dağılmış rassal değişkenin ortalamasının olasılık yoğunluk fonksiyonlarının biçimleri

5.7 BİNOM VE POISSON DAĞILIMLARININ YAKLAŞIĞI OLARAK NORMAL DAĞILIM

Bölüm 4'te binom ve Poisson dağılımlarını tanıtıp, bu rassal değişkenlerin olasılıklarının nasıl hesaplanacağını göstermiştik. O zaman binom denemelerinin sayısının fazla ve Poisson dağılımının ortalamasının yüksek olduğu durumlarda bu hesaplamaların ciddi bir yük oluşturduğu ortaya çıkmıştı. Neyse ki merkezî limit teoremi sayesinde, bu dağılımları bir normal dağılıma yaklaştırarak hesap-

lamalarda büyük kolaylıklar sağlanabilir. Bu yaklaştırmaları açıklayacak ve örneklendireceğiz.

BİNOM DAĞILIMININ NORMAL YAKINSAMASI

Her birinin başarı olasılığı p olan n tane bağımsız deneme yapılırsa, ortaya çıkan başarıların sayısı X, aşağıdaki ortalama ve varyansla binom dağılımına uyar:

$$E(X) = np \qquad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

Altbölüm 4.5'te X rassal değişkeninin, n tane bağımsız Bernoulli rassal değişkeninin toplamı olarak yazılabileceğini görmüştük:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Burada rassal değişken X_i, i'inci denemenin sonucu "başarı" ise 1, değilse 0 değerini alır, bunların olasılıkları da sırasıyla p ve $1-p$'dir.

Şimdi bu, tam da merkezî limit teoreminin uygulanabileceği bir ortamdır. Dolayısıyla, deneme sayısı n büyükse,

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

rassal değişkeninin dağılımı, yaklaşık olarak standart normal dağılımdır.

Bu bulgunun önemi, n büyükken, başarı sayısının belli bir aralıkta olma olasılığım bulmayı kolaylaştırmasındadır. Diyelim ki, başarı sayısının a ile b arasında kalmasının olasılığını bilmek istiyoruz. Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

$$= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

Deneme sayısı n büyükse, Z'nin dağılımı standart normal dağılıma çok yaklaşır, böylelikle Altbölüm 5.5'teki yöntem kullanılarak yukarıdaki olasılık bulunabilir.

Deneme sayısı n orta büyüklükteyse, bu yaklaştırma kaydadeğer ölçüde iyileştirilebilir. Burada kesikli bir dağılımı, sürekli bir dağılıma yaklaştırmaktayız. Binom rassal değişkeni yalnız tamsayı değerler alırken, normal rassal değişken sürekli bir eksende tanımlanır. Bu ayırımı gözönüne almak için, yukarıdaki formüle bir süreklilik düzeltmesi uygulanarak, a ile b yerine sırasıyla $(a-0.5)$ ile $(b+0.5)$ geçirilir. Şu elde edilir:

$$P(a \le X \le b) \approx P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

Bu düzeltmenin gerekçesini anlayabilmek için, başarıların sayısının hem 10'a eşit ya da ondan büyük, hem 15'e eşit ya da ondan küçük olma olasılığını arıyoruz diyelim. Gerçekleşen başarı sayısı tamsayı olacağına göre, aranan olasılık, başarı sayısının hem 9.001'e eşit ya da ondan büyük, hem 15.999'a eşit ya da ondan büyük olma olasılığıyla aynıdır. Bu iki uç arasında bir uzlaşma olarak, 9.5 ile 15.5 uç değerleri arasındaki aralığı kullanırız.

Normal Dağılım Kullanarak Binom Olasılıklarına Yakınsama

Her birinde başarı olasılığı p olan n tane bağımsız denemede ortaya çıkan başarı sayısına X diyelim. Eğer n büyükse ve p de ne çok küçük ne çok büyükse,[9]

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

ya da süreklilik düzeltmesiyle

$$P(a \le X \le b) \approx P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

iyi bir yakınsamadır, burada Z standart normal dağılımdır.

ÖRNEK 5.11

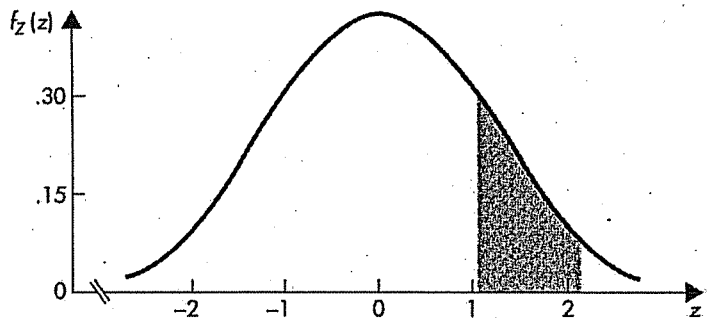
Bir satıcı, müşteri olabilecek kimselerle önceden telefonla bağlantı kurup, bunların evlerine uğramanın çabaya değer olup olmadığını anlamaya çalışmaktadır. Deneyimine göre, bu ön bağlantıların %40'ı eve uğramayla sonuçlanmaktadır. Bu satıcı 100 kişiyle telefonda bağlantı kursa, bunun sonucunda kırkbeş ile elli arasında eve gitme olasılığı kaçtır?

Eve gitme sayısına X diyelim. Demek ki X, $n = 100$ ve $p = 0.4$ ile binom dağılımına uyar. Süreklilik düzeltmesi yapmadan aranan olasılığın yaklaşığı şudur:

$$\begin{aligned} P(45 \le X \le 50) &= P\left(\frac{45-(100)(.4)}{\sqrt{(100)(.4)(.6)}} \le Z \le \frac{50-(100)(.4)}{\sqrt{(100)(.4)(.6)}}\right) \\ &= P(1.02 \le Z \le 2.04) \\ &= F_Z(2.04) - F_Z(1.02) \\ &= 0.9793 - 0.8461 = 0.1332 \end{aligned}$$

Bu olasılık, Çizim 5.18'de standart normal eğri altında bir alan olarak gösterilmiştir.

[9] Bu durumda, binom dağılımına Poisson yakınsaması kullanılmalıdır (bkz. Altbölüm 4.7).



ÇİZİM 5.18 Her birinde başarı olasılığı 0.4 olan 100 binom denemesinde başarıların 45 ile 50 arasında olma olasılığı

Bu binom olasılığı yakınsamrken süreklilik düzeltmesi yapılırsa şu bulunur:

$$P(45 \le X \le 50) = P\left(\frac{44.5-(100)(.4)}{\sqrt{(100)(.4)(.6)}} \le Z \le \frac{50.5-(100)(.4)}{\sqrt{(100)(.4)(.6)}}\right)$$
$$= P(0.92 \le Z \le 2.14)$$
$$= F_Z(2.14) - F_Z(0.92)$$
$$= 0.9838 - 0.8212 = 0.1626$$

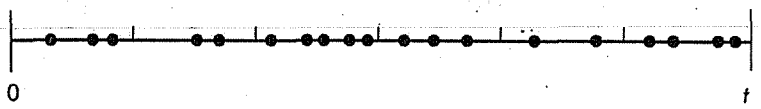
Bu iki yakınsama burada birbirine yakın sonuçlar vermiştir. Bu durumda daha basit olan yakınsama çoğu amaç için yeterlidir. (Aslında, tam olasılık, 4 basamağa kadar, 0.1621'dir.)

POİSSON DAĞILIMININ NORMAL YAKINSAMASI

Rassal değişken X, bir olayın belli bir zaman diliminde gerçekleşme sayısını, λ da bu zaman diliminde beklenen gerçekleşme sayısını ya da ortalamayı göstersin. Bu durumda X, aşağıdaki ortalama ve varyans ile Altbölüm 4.7'de açıklanan Poisson dağılımına uyar:

$$E(X) = \lambda \qquad \text{ve} \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

Şimdi, ortalama gerçekleşme sayısı λ'nın büyük olduğu durumu düşünelim. İlgilendiğimiz zaman dilimi, Çizim 5.19'da olduğu gibi, eşit uzunlukta altaralıklara ayrılmış olsun. Bu durumda toplam gerçekleşme sayısı, her altaralıktaki gerçekleşme sayılarının toplamıdır. Böylelikle, Poisson dağılımının ortalaması büyük olduğunda, toplam gerçekleşme sayısının, her biri zaman diliminin altaralıklarındaki gerçekleşme sayılarını temsil eden epeyce çok sayıda rassal değişkenin toplamıymış gibi ele alınabileceği görülür. Böylece, merkezî limit teoremine göre,



ÇİZİM 5.19 Eşit uzunlukta altaralıklara ayrılmış, 0'dan t 'ye kadar olan aralıktaki gerçekleşmeler (•)

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

rassal değişkeninin dağılımı yaklaşık standart normaldir.

Binom dağılımında olduğu gibi, bu bulgu da yaklaşık olasılık bulmada kullanılabilir. λ orta büyüklükteyse, burada da bir süreklilik düzeltmesi gerekir.

Poisson Olasılıklarının Normal Dağılım Kullanılarak Yakınsanması

X, ortalaması λ olan bir Poisson rassal değişkeni olsun. Eğer λ büyükse,

$$P = (a \le X \le b) \approx P\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le Z \le \frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ya da süreklilik düzeltmesi yapılarak

$$P = (a \le X \le b) \approx P\left(\frac{a-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le Z \le \frac{b+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

iyi bir yakınsamadır. Burada Z, standart normal dağılmaktadır.

ÖRNEK 5.12

Bir tüketici danışma merkezine telefonla günde ortalama yirmibeş başvuru yapılmakta olup bunun dağılımının Poisson olduğu düşünülmektedir. Belli bir günde yirmi ile otuz arasında başvuru yapılması olasılığını tahmin edin.

Gelen başvuru sayısına X diyelim. X'in dağılımı, ortalaması $\lambda = 25$ olan bir Poisson dağılımı olsun. Poisson dağılımı, normal dağılımla, süreklilik düzeltmesi yapılmadan yakınsanırsa şu bulunur:

$$\begin{aligned} P(20 \le X \le 30) &\approx P\left(\frac{20-25}{\sqrt{25}} \le Z \le \frac{30-25}{\sqrt{25}}\right) \\ &= P(-1 \le Z \le 1) \\ &= F_Z(1) - F_Z(-1) \\ &= 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826 \end{aligned}$$

Poisson dağılımı yakınsanırken süreklilik düzeltmesi kullanılırsa şu bulunur:

$$P(20 \le X \le 30) \approx P\left(\frac{19.5-25}{\sqrt{25}} \le Z \le \frac{30.5-25}{\sqrt{25}}\right)$$
$$= P(-1.1 \le Z \le 1.1)$$
$$= F_Z(1.1) - F_Z(-1.1)$$
$$= 0.8643 - (1 - 0.8643) = 0.7286$$

Her ikisi de bütün günlerin %70 kadarında yirmi ile otuz arasında telefon başvurusu yapılacağım söyleyen yaklaştırmalar birbirine oldukça yakındır. λ'nın buradakinden küçük değerleri için süreklilik düzeltmesi kullanılması yeğlenirken, λ en az kırk iken basit yakınsama da pekâlâ işe yarar.

ALIŞTIRMALAR

35. Bir kiralık araba şirketi, bir arabanın belli bir ayda onarım gerektirme olasılığının 0.2 olduğunu saptamıştır. Şirketin 900 arabası vardır.
- **(a)** Belirli bir ayda 200'den çok arabanın onarım gerektirmesinin olasılığı kaçtır?
- **(b)** Belirli bir ayda 175 'ten az arabanın onarım gerektirmesinin olasılığı kaçtır?

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yapmadan kullanın.)

36. Belli bir üretim sürecinde üretilen malların %10'unun kusurlu olduğu bilinmektedir. Bir günde üretilen çok büyük sayıda ürün arasından 400 tanesi rassal seçilmiştir.
- **(a)** En az otuzbeş tanenin kusurlu olma olasılığı kaçtır?
- **(b)** Seçilmiş mallar içinde kusurluların kırk ile elli tane arasında olma olasılığı kaçtır?
- **(c)** Seçilmiş mallar içinde kusurluların kırkdört ile kırksekiz tane arasında olma olasılığı kaçtır?
- **(d)** Hesaplama yapmadan, kusurlu mal sayısının aşağıdaki aralıklardan hangisinde olasılığının en yüksek olduğunu söyleyin: 37-39, 39-41, 41-43, 43-45, 45-47.

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yapmadan kullanın.)

37. Büyük bir şirketin memurlarından 100 kişilik bir örneklem, önerilen yeni çalışma planına ilişkin görüşleri alınmak üzere seçilmiştir. Şirketteki bütün memurların %60'ı bu planı destekliyorsa, örneklemdekiler içinde 50 kişiden azının planı destekleme olasılığı kaçtır?

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yapmadan kullanın.)

38. Bir yurttaki öğrencilerin yarısının yurtta verilen yemekleri beğenmediğini düşünelim. Rassal olarak kırk öğrenci seçilmiş olsun.
- **(a)** Yemekleri beğenmeyen öğrenci sayısının örneklemde onbeşten çok olma olasılığı kaçtır?
- **(b)** Yemekleri beğenmeyen öğrenci sayısının örneklemde 18 ile 22 arasında (ikisi de içinde) olma olasılığı kaçtır?

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yaparak kullanın.)

39. Bir hastane, hastaların %25'inin borçlarını en az bir ay gecikmeyle ödediklerini saptamıştır. Rassal olarak onbeş ödeme seçilmiştir.

(a) En az bir ay gecikmeli ödemelerin örneklemde ondan az olma olasılığı kaçtır?

(b) En az bir ay gecikmeli ödemelerin örneklemde oniki ile onbeş arasında (ikisi de içinde) olma olasılığı kaçtır?

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yaparak kullanın.)

40. Belli bir marka lastiğin dayanma ömrü (Alıştırma 20'deki gibi) 35,000 mil ortalama, 4,000 mil standart sapma ile normal dağılıma uymaktadır. Bu lastiklerden 100 tanelik örneklem alınmıştır. Bunlardan 25'ten çoğunun ömrünün 38,000 milden uzun olma olasılığı kaçtır?

(Binom dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yapmadan kullanın.)

41. Bir şirketin torbalar içinde ürettiği kimyasal bir madde içine başka maddelerin karışma miktarı (Alıştırma 22'deki gibi) 12.2 gram ortalama, 2.8 gram standart sapmayla normal dağılıma uymaktadır. Bu torbalardan 400 tanelik rassal bir örneklem seçilmiştir. Bunlardan en az 100 tanesinde karışma miktarının 10 gramdan az olma olasılığı kaçtır?

42. Öğleden önceki bir saat içinde bir şirketin telefon santralı ortalama kırkbeş kez aranmaktadır.

(a) Bu bir saat içinde aranma sayısının yetmişten çok olma olasılığı kaçtır?

(b) Bu bir saat içinde aranma sayısının elliden az olma olasılığı kaçtır?

(c) Bu bir saat içinde aranma sayısının elli ile yetmiş arasında olma olasılığı kaçtır?

(Poisson dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesi yapmadan kullanın.)

43. Bir yerleşkenin sağlık ocağına gün ortası saatlerde saatte ortalama otuz hasta gelmektedir.

(a) Belli bir gün ortası saatinde yirmibeşten az hasta gelmesi olasılığı kaçtır?

(b) Belli bir gün ortası saatinde kırktan çok hasta gelmesi olasılığı kaçtır?

(c) Belli bir gün ortası saatinde yirmibeş ile kırk arasında hasta gelmesi olasılığı kaçtır?

(Poisson dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesini bir kez yaparak, bir kez de yapmadan kullanın, yanıtlarınızı karşılaştırın.)

44. Bir işletme belli bir parça için haftada ortalama yirmi iki sipariş almaktadır. Bu işletme haftaya elinde yirmibeş parça stokla başlasa, bu stokun hafta sonuna kadar bitme olasılığı kaçtır?

(Poisson dağılımının normal yakınsamasını, süreklilik düzeltmesini bir kez yaparak, bir kez de yapmadan kullanın, yanıtlarınızı karşılaştırın.)

5.8 ÜSTEL DAĞILIM

Bu bölümü, özellikle *bekleme kuyruğu* sorunlarını çözmede işe yaradığı anlaşılan bir sürekli dağılımı, **üstel dağılımı** ele alarak bitireceğiz. Müşteriye *hizmet süresi*nin belirsiz olduğu durumlarda bu belirsizlik, çoğu zaman yakın bir

biçimde üstel dağılımla gösterilebilir. Üstel dağılım iki önemli noktada normal dağılımdan ayrılır: Yalnız artı değer alabilen değişkenlerle sınırlıdır, olasılık yoğunluk fonksiyonu ortalamasına göre simetrik değildir. Üstel dağılımın özellikleri aşağıdaki çerçevede özetlenmiştir.

Üstel Dağılım

Rassal değişken X, eksi değerler alamıyorsa ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} \qquad x \geq 0 \text{ için}$$

ise X'in **üstel dağılıma** uyduğu söylenir. Burada μ artı değerli herhangi bir sayı, $e = 2.71828\ldots$'dir.

Birikimli dağılım fonksiyonu ise şöyledir:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\mu} \qquad x \geq 0 \text{ için}$$

Bu dağılımın ortalaması μ, varyansı μ^2'dir.

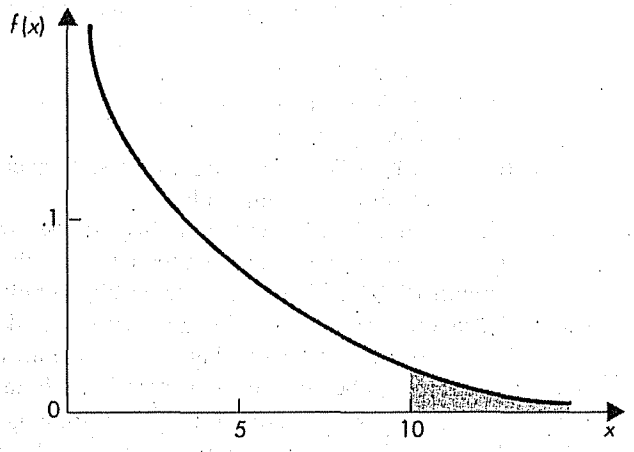
ÖRNEK 5.13

Bir kitaplığın danışma masasında kullanıcılara verilen hizmet 5 dakika ortalama süre ile üstel dağılıma uymaktadır. Bir kullanıcıya verilen hizmetin 10 dakikadan uzun sürme olasılığı kaçtır?

X, hizmet süresini dakika olarak göstersin. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle olur:

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/5}}{5} \qquad x \geq 0 \text{ için}$$

ÇİZİM 5.20 Ortalaması 5 olan üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu; gölgeli alan $P(X > 10)$'dur.



$$P(X > 10) = 1 - P(X < 10)$$

Bu fonksiyon, aranan $P(X > 10)$ olasılığını gösteren Çizim 5.20'de çizilmiştir. Bu olasılık, Ek Çizelge 2 kullanılarak şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} &= 1 - F_X(10) \\ &= 1 - (1 - e^{-10/5}) \\ &= e^{-2} = 0.135335 \end{aligned}$$

Üstel dağılım, Altbölüm 4.7'deki Poisson dağılımıyla ilişkilidir. Özellikle, bir olayın belli bir zaman diliminde gerçekleşme sayısı, ortalaması λ olan bir Poisson dağılımına uyuyorsa, bu olayın peşpeşe gerçekleşmeleri arasında geçen zamanın da ortalaması $\mu = 1/\lambda$ olan bir üstel dağılıma uyduğu gösterilebilir. Örnek 4.15'te, İngiltere'de, 2000 kişi çalıştıran, bir yıllık grev sayısının ortalama $\lambda = 0.4$ olduğu sıradan bir sanayi kuruluşunu ele almıştık. Bu durumda, peşpeşe iki grev arasında yıl cinsinden geçen zaman, yani X, ortalaması $1/0.4 = 2.5$ yıl olan bir üstel dağılıma uyar. Sözgelimi, iki grev arasında geçen zamanın 2 yıldan kısa olma olasılığı şudur:

$$\begin{aligned} P(X < 2) = F_X(2) &= 1 - e^{-(0.4)(2)} \\ &= 1 - e^{-0.8} \\ &= 1 - 0.449329 = 0.550671 \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

45. Bir öğretim üyesi öğrencileriyle görüşme saatleri içinde görüşmektedir. Öğrencilerle geçirilen zaman ortalaması 10 dakika olan bir üstel dağılıma uymaktadır.
- **(a)** Belli bir öğrencinin öğretim üyesiyle geçirdiği zamanın 20 dakikadan kısa olma olasılığını bulun.
- **(b)** Belli bir öğrencinin öğretim üyesiyle geçirdiği zamanın 5 dakikadan uzun olma olasılığını bulun.
- **(c)** Belli bir öğrencinin öğretim üyesiyle geçirdiği zamanın 10 ile 15 dakika arasında olma olasılığını bulun.

46. Bir polikliniğe gelen hastalarla ön görüşme sırasında geçen zaman, ortalaması 15 dakika olan bir üstel dağılıma uymaktadır. Rassal olarak seçilmiş bir hasta için bu sürenin 18 dakikadan uzun olma olasılığını bulun.

47. Bir laboratuvardaki hesaplama sisteminin aylık arıza sayısının, ortalaması 0.8 olan bir Poisson dağılımına uyduğu bilinmektedir. Sistem az önce arızalanmıştır. Yeni bir arızaya kadar en az iki ay geçmesi olasılığını bulun.

48. Bir olayın peşpeşe gerçekleşmeleri arasında geçen sürenin ortalaması $1/\lambda$ olan bir Poisson dağılımına uyduğunu düşünelim. Olayın gerçekleştiğini varsayalım.

(a) Gelecek gerçekleşmeye kadar 3 dakikadan daha uzun bir süre geçmesi olasılığının $e^{-3\lambda}$ olduğunu gösterin.
(b) Gelecek gerçekleşmeye kadar 6 dakikadan daha uzun bir süre geçmesi olasılığının $e^{-6\lambda}$ olduğunu gösterin.
(c) (a) ile (b)'de bulduklarınızı kullanarak, 3 dakika geçtikten sonra, olayın gerçekleşmesi için bir 3 dakika daha geçme olasılığının $e^{-3\lambda}$ olduğunu gösterin. Yanıtınızı sözcüklerle açıklayın.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

49. Aşağıdakilerden neler öğrenilebileceğini sözcüklerle açıklayın.
(a) Sürekli bir rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu
(b) Sürekli bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu
(c) Sürekli bir rassal değişkenin ortalaması
(d) Sürekli bir rassal değişkenin standart sapması
(e) Bir çift sürekli rassal değişken arasındaki ortak varyans

50. "Gerçek dünyada, ilgilenilen herhangi bir büyüklüğün ölçümleri, kaçınılmaz olarak kesikli bir eksende yapılır. Dolayısıyla, sürekli değişkenlerin incelenmesinin bir yararı yoktur, bu ancak akademik bir değer taşır." Bu söylem konusunda görüşünüzü belirtin.

51. Aşağıdaki soruları yanıtlayın:
(a) Normal dağılım olasılıklarını bulmak için niçin çizelge gerekir?
(b) Sonsuz sayıdaki farklı normal dağılımdan niçin yalnız birinin olasılıklarının çizelgelenmesi gereklidir?
(c) İstatistik çalışmalarında normal dağılım niçin önemlidir?

52. "Boy, ağırlık, uzaklık gibi ölçtüğümüz pek çok büyüklük kaçınılmaz olarak artı değerlidir. Dolayısıyla, böyle bir büyüklüğün örneklem gözlemlerinin ortalamasının da artı olması gerekir. Oysa normal dağılım, eksi sonsuzdan artı sonsuz aralığındaki bütün değerleri kapsar. Demek ki, merkezî limit teoremine karşın, normal dağılım, böyle ortalama dağılımlarına uymaz." Bu söylem konusunda görüşünüzü belirtin.

53. Uygulamada bir normal dağılımın olasılıklarını, standart normal dağılımın olasılıklarından buluruz. Elinizde standart normal dağılım çizelgesi yerine, diyelim ki ortalaması 1, standart sapması 10 olan bir normal dağılımın olasılık çizelgesi bulunsun. Başka herhangi bir normal dağılımın olasılıklarını bulmada bu çizelgeyi kullanabilir misiniz? Yanıtınız evet ise bunu nasıl yapacağınızı açıklayın.

54. Bir danışman bir sözleşmeyi yerine getirmenin kendisine maliyetinin 10,000 $ olacağını bilmektedir. Bu sözleşme bir ihale sonunda yürürlüğe girecektir. Danışman, kendininki dışında, bu ihalede verilen en düşük önerinin, 8,000 ile 20,000 $ arasında tekdüze bir dağılımla gösterilebileceği kanısındadır. Dolayısıyla, bütün öteki önerilerin en düşüğünü (bin dolar cinsinden) gösteren X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şudur:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & 8 < x < 20 \text{ için} \\ 0 & \text{öbür bütün } x \text{ değerleri için} \end{cases}$$

(a) Öbür bütün önerilerin en düşüğünün, danışmanın maliyet tahmini olan 10,000 $'ın altında olma olasılığı kaçtır?
(b) Danışman 12,000 $'lık bir öneri verirse, sözleşmeyi imzalama olasılığı kaçtır?
(c) Danışman 12,000 $'lık bir öneride bulunmaya karar vermiştir. Bu kararın beklenen kazancı ne kadardır?
(d) Danışman beklenen kazancını olabildiğince yükseğe çıkaracak bir öneri sunmak isterse, bu seçimi nasıl yapması gerektiğini tartışın.

55. Bir toplantıya katılan yöneticilerin yaşları 35 ile 65 arasında tekdüze dağılmaktadır. X, yıl cinsinden yaşları gösterse, olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle olur:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 35 < x < 65 \text{ için} \\ 0 & \text{öbür bütün } x \text{ değerleri için} \end{cases}$$

(a) Bu X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizin.
(b) Bu rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonunu bularak çizin.
(c) Bu yöneticilerden rassal seçilmiş birinin yaşının 40 ile 50 arasında olma olasılığını bulun.
(d) Bu yöneticilerin ortalama yaşını bulun.

56. X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyledir:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \text{ için} \\ 2 - x & 1 < x < 2 \text{ için} \\ 0 & \text{öbür bütün } x \text{ değerleri için} \end{cases}$$

(a) Bu rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulun.
(b) Bu yoğunluk fonksiyonunun, tam bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun özelliklerini taşıdığını gösterin.
(c) Bu rassal değişkenin 0.5 ile 1.5 arasında değer alma olasılığını bulun.

57. Bir yatırımcı bir mevduat hesabına yılda sabit %10 faizle 2,000 $ yatırmıştır. Başka bir 1,000 $'ı da beklenen getirisi yılda %16, standart sapması %8 olan bir yatırım fonuna koymuştur.
(a) Bu yatırımcının bir yıl sonra elde edeceği toplam getirinin beklenen değerini bulun.
(b) Bir yıl sonraki toplam getirinin standart sapmasını bulun.

58. Bir gezgin satıcı hamburgerlerin tanesini 1.45 $'a satmaktadır. Günlük satış dağılımının ortalaması 530, standart sapması 69 hamburgerdir.
(a) Hamburger satışlarından elde edilen günlük toplam gelirin ortalamasını bulun.
(b) Hamburger satışlarından elde edilen günlük toplam gelirin standart sapmasını bulun.
(c) Günlük maliyet (dolar olarak) şöyle gösterilebilir:

$$C = 100 + 0.95X$$

Burada X, satılan hamburger sayısıdır. Satışlardan elde edilen günlük kârın ortalaması ile standart sapmasını bulun.

59. Şirket kazançlarını tahmin eden bir analistin başarısı, gerçekleşen kazançlarla tahminlerin farkı alınarak değerlendirilmektedir.

$$\text{Gerçekleşen kazanç} = \text{Tahmin edilen kazanç} + \text{Tahmin yanılgısı}$$

tanımını yapalım. Eğer tahmin edilen kazanç ile tahmin yanılgısı birbirinden bağımsız ise, tahmin edilen kazancın varyansının, gerçekleşen kazancın varyansından küçük olacağını gösterin.

60. X_1 ile X_2, bir çift rassal değişken olsun. Ancak ve ancak X_1 ile X_2'nin varyansı aynı olduğunda, $(X_1 + X_2)$ ile $(X_1 - X_2)$ rassal değişkenleri arasındaki ortak varyansın 0 olacağını gösterin.

61. Büyük bir yerleşkedeki öğrencilerin birikimli ortalama notları, ortalaması 2.6, standart sapması 0.5 olan bir normal dağılımdır.

(a) Bu yerleşkede bir öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bu öğrencinin birikimli not ortalamasının 3.0'dan büyük olma olasılığı kaçtır?

(b) Bu yerleşkede bir öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bu öğrencinin birikimli not ortalamasının 2.25 ile 2.75 arasında olma olasılığı kaçtır?

(c) Bir öğrencinin birikimli not ortalamasının yerleşkede üst %10 içinde olabilmesi için birikimli not ortalaması en az kaç olmalıdır?

(d) Bu yerleşkede 400 öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bu öğrencilerden en az 80'inin birikimli not ortalamasının 3.0'dan büyük olma olasılığı kaçtır?

(e) Bu yerleşkede iki öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bu öğrencilerden en az birinin birikimli not ortalamasının 3.0'dan büyük olma olasılığı kaçtır?

62. Bir şirket ev klimalarının bakımını yapmaktadır. Bakım süreleri, ortalaması 60, standart sapması 10 dakika olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Tek bir bakımın 65 dakikadan uzun sürme olasılığı kaçtır?

(b) Tek bir bakımın 50 ile 70 dakika arasında sürme olasılığı kaçtır?

(c) Tek bir bakımın kaç dakikadan uzun sürmesinin olasılığı 0.025'tir?

(d) Bütün bakımların %50'sini içeren süre aralıklarının en dar olanını bulun.

(e) Rassal olarak dört bakım seçilmiş olsun. Bunlardan tam iki tanesinin 65 dakikadan uzun sürme olasılığı kaçtır?

63. Belli bir vergi beyannamesini doldurma süresi, ortalaması 100, standart sapması 30 dakika olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Rassal olarak seçilmiş birinin bu beyannameyi 85 dakikadan kısa sürede doldurma olasılığı kaçtır?

(b) Rassal olarak seçilmiş birinin bu beyannameyi 70 ile 130 dakika arasında bir sürede doldurma olasılığı kaçtır?

(c) İnsanların %5'inin bu beyannameyi doldurma süresi kaç dakikadan uzundur?

(d) İki kişi rassal seçilmiştir. Bunlardan en az birinin bu beyannameyi bir saatten uzun sürede doldurma olasılığı kaçtır?

(e) Dört kişi rassal seçilmiştir. Bunlardan tam ikisinin bu beyannameyi bir saatten uzun sürede doldurma olasılığı kaçtır?

(f) Rassal seçilmiş birinin bu beyannameyi aşağıda dakika cinsinden verilmiş aralıklardan hangisinde doldurma olasılığının en yüksek olduğunu belirtin.

70–90 90–110 110–130 130–150

(g) Rassal seçilmiş birinin bu beyannameyi aşağıda dakika cinsinden verilmiş aralıklardan hangisinde doldurma olasılığının en düşük olduğunu belirtin.

70–90 90–110 110–130 130–150

64. Bir dağıtıcı, bir öğrenci yurduna pizza götürmektedir. Pizza götürme süresi, ortalaması 20, standart sapması 4 dakika olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Bir siparişin 15 ile 25 dakika arasında götürülme olasılığı kaçtır?

(b) Bir sipariş 30 dakikadan geç kalırsa, müşteriden para alınmamaktadır. Tek bir sipariş verip bedava pizza yeme olasılığı kaçtır?

(c) Bir öğrenci dönem sonu sınavları sırasında peşpeşe beş akşam pizza ısmarlamaktadır. Bu pizzaların gelme sürelerinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayın. Bu öğrencinin en az bir bedava pizza yeme olasılığı kaçtır?

(d) Bütün pizza siparişlerinin %40'ını içeren en dar zaman aralığını bulun.

(e) Tek bir siparişin aşağıda dakika cinsinden verilmiş zaman aralıklarından hangisinde getirilme olasılığının en yüksek olduğunu belirtin.

18–20 19–21 20–22 21–23

(f) Tek bir siparişin aşağıda dakika cinsinden verilmiş zaman aralıklarından hangisinde getirilme olasılığının en düşük olduğunu belirtin.

18–20 19–21 20–22 21–23

65. Üyelerine video kasedi kiralayan bir dükkân zinciri, üyelerinin yıllık kiralama harcamasının ortalaması 100 $ olan bir normal dağılıma uyduğunu ileri sürmektedir. Ayrıca bütün üyelerin %10'unun yılda 130 $'dan çok para ödediği bulunmuştur. Üyelerin yüzde kaçı yılda 140 $'dan çok para ödemektedir?

66. Bir benzin istasyonunda müşterilerin ödediği benzin tutarının standart sapması 2.50 $ olan bir normal dağılıma uyduğu sanılmaktadır. Ayrıca müşterilerin %10'unun 15 $'dan çok ödeme yaptıkları da anlaşılmıştır. Müşterilerin % kaçı 10 $'dan az benzin almaktadır?

67. Bir pazar araştırması kuruluşu, süpermarket müşterilerinin %40'ının bir araştırmaya yanıt vermek istemediğini bulmuştur. 1,000 müşteriye sorulsa 500'den az kişinin yanıt vermek istememe olasılığı kaçtır?

68. Satış güdülendirme yöntemleri üstüne düzenli seminerler düzenleyen bir kuruluş, müşterilerinin %60'ının daha önceki seminerlere katıldığını belirlemiştir. 400 müşterilik bir örneklemde, yarıdan çok kişinin daha önce seminere katılmış olma olasılığı kaçtır?

69. Bozuk araçları çeken bir servis kuruluşu, günde ortalama yetmiş yardım çağrısı almaktadır. Belli bir günde, elliden az çağrı alma olasılığı kaçtır?

70. Büyük bir mağazada, müşteri yakınmaları bürosuna hizmetin kalitesi konusunda saatte ortalama altı yakınma gelmektedir. Dağılım Poisson'dur.

(a) Bir saatte tam altı yakınma gelme olasılığı kaçtır?

(b) Peşpeşe iki yakınma arasında 20 dakikadan uzun bir süre geçmesi olasılığı kaçtır?

(c) Peşpeşe iki yakınma arasında 5 dakikadan kısa bir süre geçmesi olasılığı kaçtır?

(d) Yakınma bürosunu yarım saat gözleyen mağaza müdürü, hiç yakınma olmadığını görmüştür. Bu durumda, çalışanlara "müşteri her zaman haklıdır" konu-

sunda yaptığı konuşmanın yararlı sonuçları olduğu kanısına varmıştır. Aslında konuşmanın hiçbir etkisi olmadığını düşünün. Müdürün yarım saat ya da daha uzun gözlemesi sırasında büroya hiç yakınma gelmemesi olasılığı kaçtır?

71. Bir Şikago radyo istasyonu, dinleyicilerinin %40'ının 25 yaşından küçük olduğu kanısındadır. Altıyüz dinleyici rassal olarak seçilmiştir.

(a) İstasyonun kanısı doğruysa, bu dinleyicilerden 260'tan çoğunun 25 yaşından küçük olması olasılığı kaçtır?

(b) İstasyonun kanısı doğruysa, bu 600 dinleyiciden kaçının 25 yaşından küçük olma olasılığı 0.6'dır?

72. Beyzbol liginde oyunların süresi, ortalaması 132, standart sapması 12 dakika olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Oyunların kaçta kaçı 120 ile 150 dakika arasında sürer?

(b) Oyunların yüzde otuzüçü kaç dakikadan uzun sürer?

(c) Oyunların kaçta kaçı 120 dakikadan önce biter?

(d) 100 oyun rassal olarak seçilse, en az yirmibeşinin 120 dakikadan kısa sürmesi olasılığı kaçtır?

73. Bir yönetim danışmanı, bir günde üst düzey yöneticilerin, aslında altındakiler tarafından görülebilecek işlere ayırdığı zamanın, 2.4 saat ortalama ile normal dağılıma uyduğunu bulmuştur. Ayrıca, üst düzey yöneticilerin %10'unun bu tür işlere günde 3.5 saatten çoğunu ayırdıkları da bulunmuştur. 400 üst düzey yöneticiden oluşan rassal bir örneklemde, 80 kişiden çoğunun bu tür işlere günde 3 saatten çok zaman ayırması olasılığını bulun.

BÖLÜM 6

Örnekleme ve Örnekleme Dağılımları

6.1 ANAKÜTLEDEN ÖRNEKLEM ÇEKMEK

Bu kitabın geri kalan bölümlerinin çoğunda, büyük bir nesneler kümesinin özellikleri konusunda, bunların görece küçük bir altkümesinden sağlanan bilgiye dayanarak, bir şeyler söylemeye çalışan bir sorun türüyle ilgileneceğiz. Bu büyük ana kümeye **anakütle**, onun altkümesinin üyelerine de **örneklem** denir.

İlgi duyulabilecek bazı anakütle örnekleri aşağıdadır:

1. Şikago kentinde oturan bütün ailelerin gelirleri
2. New York Borsası'nda alınıp satılan bütün pay senetlerinin yıllık getirileri
3. Bir şirketten bir yılda talep edilen bütün araç kazalarının sigorta paralarının tutarı
4. Belli bir modelin bütün arabalarının yıllık onarım giderleri
5. Büyük sayıda alacak hesaplarındaki yanlışlar

Özellikle bu anakütlelerin onlara özgü özelliklerini ya da *nitelik*lerini öğrenmek isteyebiliriz. Sözgelimi, Şikagolu ailelerin yıllık gelirlerinin anakütledeki dağılımının ortalamasını ya da varyansını yahut da gelirleri 15,000 $'ın altında olan ailelerin toplam içindeki payını bilmek isteyebiliriz.

Bütün anakütle yerine bir örneklemi incelememizin başlıca nedeni, anakütleye ilişkin bütün bilgiyi toplamanın, çoğunlukla olanaksız denebilecek ölçüde pahalı olmasıdır. Bütün anakütleyle ilişkiye geçmeye yetecek kadar kaynağın var gibi göründüğü durumlarda bile, yoğunlaştırılmış bir çabanın daha doğru ölçümler vereceği umuduyla, bu kaynağın anakütlenin küçük bir altkümesine

yöneltilmesi yeğ tutulabilir. Sözgelimi, on yılda bir yapılan ABD nüfus sayımlarının, kimi kesimlerin olduğundan az gösterildiği, eksik sayımlara yol açtığı çok iyi bilinmektedir.[1]

Bir anakütleden bir örneklem çekildiğinde asıl amaç, anakütleye ilişkin genel geçerliliği olan bir söylemi dile getirmektir. Dolayısıyla, örneklemin anakütlenin bir temsilcisi olması önemlidir. Sözgelimi bir pazarlama yöneticisinin, yeni bir besin maddesine ilişkin tepkileri değerlendirmek istediğini düşünelim. Bu yöneticinin araştırmasını yakın dostlarıyla ya da yakın çevredeki insanlarla sınırlandırması pek akıllıca olmaz. Bu kesimlerin, anakütledeki görüş yelpazesini yansıtmaları pek beklenemez, tersine bu yelpazenin bir yanına doğru eğilim göstermeleri olasıdır. Bu tür sorunlardan kaçınıp, örnekleme dayanarak bir anakütleye ilişkin geçerli bir çıkarsama yapmak için, örneklem seçme sürecine **rassallık** ilkesini katmak gerekir. Bunu sağlamanın en doğrudan yolu, seçme işleminin tasarımım, aynı büyüklükteki her örneklemin seçilme şansını eşit kılacak biçimde yapmaktır.

Basit Rassal Örnekleme

N tane nesne arasından *n* tanelik bir örneklem seçilmesinin istendiğini düşünelim. *n* nesneli, olanaklı her örneklemin seçilme şansını eşit kılan seçim sürecine **basit rassal örnekleme** denir. Bu yöntem öylesine yaygındır ki baştaki *basit* nitelemesi genellikle atlanır, ortaya çıkan örneklem de **rassal örneklem** adını alır.

Basit rassal örnekleme sürecinin şöyle olduğu düşünülebilir: Anakütledeki *N* birimin (çok büyük) bir şapka içine konup iyice karıştırıldığım düşünün. Bunlardan *n* tanesinin çekilmesiyle rassal bir örneklem alınmış olur. Uygulamada, bu (yapılabilse bile) gerekli değildir; Ek Çizelge 4'te verilenler gibi, **rassal sayı** çizelgeleri, aynı amaçla kullanılabilir. Anakütledeki *N* tane birime 1'den *N*'ye kadar numara verirsek, çizelgede rassal bir noktadan başlayıp buradaki sayışları, örneklemin *n* tane birimi tamamlanıncaya kadar okuruz. Bu çizelgeler, bu sürece basit rassal örneklemenin özelliklerini kazandıracak biçimde düzenlenmiştir. Bir rassal sayı çizelgesi düzenlemenin olanaklı, ama çok zahmetli bir yolu, 0'dan 9'a kadar numaralanmış on tane topu bir torbaya koymak olabilir. İyice karıştırdıktan sonra, bir top çekip üstündeki sayı bir kenara yazılır. Topu yeniden torbaya koyup aynı işlem yinelenir. İstediğimiz kadar basamak içeren rassal sayılar elde edilinceye dek bu iş sürdürülebilir. Bu sürecin özellikleri, her sayının seçilme

[1] Sözgelimi bkz. H. Hogan, "The 1990 post-enumeration survey: An overview," *American Statistician, 46* (1992), 261-269.

şansının eşit ve ardışık seçimlerin birbirinden bağımsız olmasıdır. Uygulamada rassal sayılar, az önce anlatılan sürecin elektronik bilgisayarda yetkin biçimde taklit edilmesiyle türetilir.

Bu ve bunu izleyen birkaç bölümde, anakütleye ilişkin bilgi edinmek amacıyla, örneklem sonuçlarını çözümleme yöntemleri üzerinde odaklanacağız. Basit rassal örnekleme düzeninde çekilmiş örneklemler üzerinde yoğunlaşacağız. Ancak, bu yol, örneklem birimlerinin seçiminde izlenebilecek tek yöntem değildir, hatta bazı durumlarda başka örnekleme düzenekleri üstün bile tutulabilir. Örneklem çekme yöntemlerinin ayrıntılı bir incelemesini, rassal sayı çizelgelerinin kullanılışının da bütünüyle açıklanacağı Bölüm 18'e erteliyoruz.

Örneklem birimlerinin seçiminde rassallık ilkesi, anakütleden bu yolla yinelenen örneklemler alınırken herhangi bir altöbeğin örneklemde aşırı temsil edilmesini önleyerek, örneklemin anakütleyi iyi temsil etmemesi tehlikesine karşı bir korunma sağlar. Üstelik, **örnekleme dağılımı** kavramı aracılığıyla, belli bir örneklemin belirlenmiş bir dereceye kadar, temsil edicilik özelliğinin olmaması olasılığını bulmamıza yarar.

Amacımız, örneklem bilgisine dayanarak anakütleye ilişkin *çıkarsamalar* yapmaktır. Bu anakütlede ilgilendiğimiz bütün değerlerin dağılımı, rassal bir değişkenle temsil edilebilir. Anakütlenin bütün dağılımını, küçük bir rassal örneklemin gözlemlerine dayanarak betimlemeye çalışmak fazla iddialı olur. Ama, anakütle dağılımının önemli özelliklerine ilişkin, epeyce sağlam çıkarsamalar pekâlâ yapılabilir. Sözgelimi, ortalama ile varyansa ilişkin söyleyeceklerimiz olabilir. Bir örnek olmak üzere, yirmi tane belli model arabanın yakıt tüketiminin rassal bir örneklemi verilmişken, o model bütün arabaların yakıt tüketiminin ortalaması ile varyansına ilişkin çıkarsamalar dile getirilebilir. Bu çıkarsama, yalnızca örneklem bilgisine dayanacak, dolayısıyla, doğal olarak "Belli bir model bütün arabaların galon başına mil olarak benzin tüketiminin ortalaması 25, standart sapması 2 ise, bu arabalardan rassal seçilmiş yirmi tanesinin ortalama benzin tüketiminin galon başına 24 mil olma olasılığı kaçtır?" türünden sorular sorabileceğiz demektir. Bu soruyu sorarken, anakütle ortalamasına ilişkin çıkarsamanın örneklem ortalamasına dayanacağı varsayımını örtük olarak yaparız.

Anakütleye özgü niteliklerle örneklemde bunlara karşılık gelen büyüklükleri birbirinden ayırmak gerekir. Yukarıdaki paragrafta geçen örnekte, belli model bütün arabaların anakütle benzin tüketimi, belli bir ortalama dolayında bir dağılım gösterir. Anakütleye özgü bir nitelik olan bu ortalama, sabit (ama bilinmeyen) bir değerdir. Bu niteliğe ilişkin çıkarsamalar yapmaya çalışırken, anakütleden rassal bir örneklem çekilip bu örneklemin ortalaması bulunur. Örneklem ortalaması, örneklemden örnekleme değişeceğinden bu büyüklük, bir olasılık dağılımı bulunan rassal bir değişken olarak ele alınabilir. Olanak içindeki örneklemlerin vereceği sonuçların dağılımı, anakütleye ilişkin çıkarsamaların temelini oluşturur. Bu bölümdeki amacımız, bu türden **örnekleme dağılımlarının** özelliklerini incelemek olacaktır.

İstatistik ve Örnekleme Dağılımları

Bir anakütleden rassal bir örneklem çekilip anakütle dağılımının bir özelliği konusunda çıkarsama yapılacağını düşünelim. Bu çıkarsama, örneklem bilgisinin belli bir fonksiyonu olan bir **istatistiğe** dayanır. Bu istatistiğin **örnekleme dağılımı**, bu anakütleden çekilebilecek aynı büyüklükteki bütün örneklemlerde sözkonusu istatistiğin alabileceği değerlerin olasılık dağılımıdır.

Önemli bir kavram olan örnekleme dağılımına bir örnek olmak üzere, iş deneyimleri (çalıştıkları yıl sayısı cinsinden) aşağıdaki gibi olan altı işçinin ustabaşısı konumundaki birini ele alalım:

2 4 6 6 7 8

Bu işçilerden dördü rassal olarak seçilip belli bir vardiyaya konacaktır. Altı işçinin yıl cinsinden ortalama deneyim süresi şudur:

$$\frac{2+4+6+6+7+8}{6}=5.5$$

Şimdi ilgilendiğimiz şey, bu vardiyaya seçilmiş dört işçinin yıl cinsinden ortalama deneyim süresidir. Bu süreler, altı kişilik anakütleden çekilmiş dört kişilik basit rassal örneklemdeki dört değer olarak düşünülebilir. Onbeş değişik örneklem çekilebilir. Çizelge 6.1, seçilebilecek örneklemlerle bunların ortalamalarım göstermektedir. (2, 4, 6, 7) gibi örneklemler iki kez seçilebilir, çünkü anakütlede 6 yıllık iş deneyimi olan iki işçi vardır.

Bu onbeş örneklemin her birinin seçilme şansı eşit olduğuna göre, belli bir örneklemin çekilme olasılığı 1/15'tir. Bu bilgiden yararlanıp, örneklem ortalamasının alabileceği belli bir değerin olasılığı belirlenebilir. Sözgelimi, Çizelge

ÇİZELGE 6.1 2, 4, 6, 6, 7, 8 anakütlesinden çekilebilecek dört gözlemli örneklemlerle bunların ortalamaları

ÖRNEKLEM	ÖRNEKLEM ORTALAMASI	ÖRNEKLEM	ÖRNEKLEM ORTALAMASI
2, 4, 6, 6	4.50	2, 6, 7, 8	5.75
2, 4, 6, 7	5.75	2, 6, 7, 8	5.75
2, 4, 6, 8	5.00	4, 6, 6, 7	5.75
2, 4, 6, 7	4.75	4, 6, 6, 8	6.00
2, 4, 6, 8	5.00	4, 6, 7, 8	6.25
2, 4, 7, 8	5.25	4, 6, 7, 8	6.25
2, 6, 6, 7	5.25	6, 6, 7, 8	6.75
2, 6, 6, 8	5.50		

6.1'den, olanaklı örneklemlerden üçünün ortalamasının 5.75 olduğunu görürüz. Demek ki, bir vardiyaya konan dört işçinin ortalama iş deneyiminin 5.75 yıl olmasının olasılığı 3/15'tir. Olanaklı bütün örneklem oralamalarının olasılıklarını bu yolla bulabiliriz. Bu olasılıkların bir araya getirilmesi, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımını verir.

Bu örnekleme dağılımı belki de en basit olarak, olasılık fonksiyonuyla gösterilebilir. Örneklem ortalamasını $\overline{X}$ ile gösterirsek şunları elde ederiz:

$$P(\overline{X}=5.75)=P_{\overline{X}}(5.75)=\frac{3}{15}\quad P_{\overline{X}}(4.75)=\frac{2}{15}\quad P_{\overline{X}}(6.00)=\frac{1}{15}$$

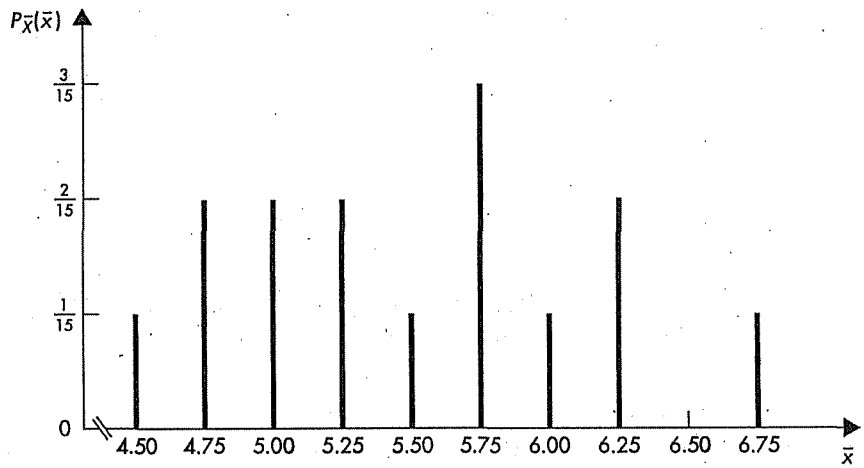
$$P_{\overline{X}}(5.00)=\frac{2}{15}\quad P_{\overline{X}}(6.25)=\frac{2}{15}$$

$$P_{\overline{X}}(5.55)=\frac{2}{15}\quad P_{\overline{X}}(6.75)=\frac{1}{15}$$

$$P_{\overline{X}}(5.50)=\frac{1}{15}$$

Bu olasılık fonksiyonu Çizim 6.1'de gösterilmiştir. Dikkat ederseniz, altı işçinin iş deneyimi 2 ile 8 yıl arasında değişirken, örneklem ortalamasının alabileceği değerler daha dar bir aralıkta, 4.50 ile 6.75 arasındadır. Üstelik, bu değerlerin büyük çoğunluğu, bu aralığın orta bölgesindedir.

Bir sonraki altbölümde, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımını, daha genel anakütlelerden yapılan örneklemeler için ele alacağız.



ÇİZİM 6.1 2, 4, 6, 6, 7, 8 anakütlesinden çekilen dört gözlemli örneklemlerin ortalamalarının örnekleme dağılımının olasılık fonksiyonu

6.2 ÖRNEKLEM ORTALAMASININ ÖRNEKLEME DAĞILIMI

Ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan bir anakütleden n gözlemli bir rassal örneklem seçildiğini, örneklem gözlemlerinin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterildiğini düşünelim. Örneklem çekilmeden önce sonuçlar belirsizlik taşıyacaktır. Bu belirsizlik, her örneklem gözleminin, ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan rassal bir değişken olarak alınmasıyla nitelendirilebilir. Şimdilik asıl amacımızın, anakütle ortalaması μ_X'e ilişkin çıkarsamalar yapmak olduğunu varsayalım. Açıktır ki, örneklem değerlerinin ortalamasıyla işe başlayabiliriz.

Tanım

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, bir anakütleden alınmış rassal bir örneklem olsun. Bu gözlemlerin aşağıdaki ortalamasına örneklem ortalaması denir:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Şimdi $\overline{X}$ rassal değişkeninin örnekleme dağılımını ele almamız gerekir.[2] Önce bu dağılımın ortalamasını bulalım. Altbölüm 4.4 ile 5.4'te hem kesikli, hem sürekli değişkenler için bir toplamın beklenen değerinin, beklenen değerlerin toplamı olduğunu görmüştük.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Her X_i rassal değişkeninin ortalaması μ_X olduğuna göre şunu yazabiliriz:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu_X .$$

Şimdi, örneklem ortalaması, örneklem gözlemleri toplamının $1/n$ ile çarpımı olduğundan, beklenen değeri de şöyle olur:

---

[2] Bölüm 4 ile 5'te olduğu gibi burada da rassal bir değişken ile onun aldığı belli bir değeri birbirinden ayırıyoruz. Böylece, örneklem çekildiğinde, ortalaması $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ olan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini gözleyebiliriz. Bu bağlamda, $\overline{X}$ rassal değişkeninin gerçekleşmiş tek bir değeri $\bar{x}$'dir.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n\mu_x}{n} = \mu_x$$

Öyleyse, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının ortalaması, anakütlenin ortalamasıdır. Bu sonucun anlamı şudur: Eğer n gözlemli örneklemler peşpeşe, birbirinden bağımsız olarak çekilirse, çekilen örneklem sayısı çok büyüyünce, örneklem ortalamalarının ortalaması anakütlenin gerçek ortalamasına çok yaklaşır. Bu bulgu, rassal örneklemenin önemli bir sonucudur ve bu tür örnekleme, örneklemin anakütleyi iyi temsil edememesine karşı bir koruyuculuk sağlar. *Belli* bir örneklemden bulunan ortalama elbette anakütle ortalamasından büyük ya da küçük olabilir. Ama *ortalama olarak*, anakütle değerinden yüksek ya da küçük bir değeri beklemek için bir neden yoktur.

ÖRNEK 6.1

Bu bulguyu Çizelge 6.1 için doğrulayalım. Bu çizelgede altı işçinin iş deneyimlerini yıl cinsinden gösteren şu anakütleyi ele almıştık:

2 4 6 6 7 8

Bu anakütlenin ortalaması, bu altı değerin ortalamasıdır, yani $\mu_X = 5.5$'tur.

Bu anakütleden çekilen dörtlü örneklemler için örneklem ortalamasının dağılımının aşağıdaki olasılık fonksiyonuyla gösterilebileceğini bulmuştuk:

$$P_{\bar{X}}(4.05) = \frac{1}{15} \qquad P_{\bar{X}}(4.75) = \frac{2}{15} \quad P_{\bar{X}}(5.00) = \frac{2}{15}$$

$$P_{\bar{X}}(5.25) = \frac{2}{15} \qquad P_{\bar{X}}(5.50) = \frac{1}{15} \quad P_{\bar{X}}(5.75) = \frac{3}{15}$$

$$P_{\bar{X}}(6.00) = \frac{1}{15} \qquad P_{\bar{X}}(6.25) = \frac{2}{15} \quad P_{\bar{X}}(6.75) = \frac{1}{15}$$

Öyleyse örneklem ortalamasının beklenen değeri anakütle ortalaması olan μ_X'tir:

$$E(\bar{X}) = \sum \bar{x} P_{\bar{X}}(\bar{x})$$

$$= (4.50)\left(\frac{1}{15}\right) + (4.75)\left(\frac{2}{15}\right) + \ldots + (6.75)\left(\frac{1}{15}\right) = 5.5$$

Öyleyse, örneklem ortalaması dağılımının merkezinin anakütle ortalaması olduğu saptanmış bulunmaktadır. Ayrıca, örneklem ortalamasının anakütle ortalamasının ne kadar yakınında olduğunu belirlemek de ilgi çekici olabilir. Sözgelimi, belli modelde yirmi arabalık bir örneklemin ortalama yakıt tüketiminin galon başına 24 mil çıktığını düşünelim. Bu değer, bu tür bütün arabalar anakütlesinin ortalama tüketim rakamına ne kadar iyi bir yaklaştırmadır? Böyle soruların yanıtı, $\bar{X}$'nin örnekleme dağılımının yayvanlığına, ya da *varyans*ına bağlıdır.

Anakütledeki gözlem sayısı, örnekleme göre çok büyükse, basit rassal örnekleme uygulaması sonucunda, örneklemin tekil gözlemleri birbirinden bağımsız olur. Altbölüm 4.4 ile 5.4'ten, toplamların varyansının, varyansların toplamı olduğunu anımsayarak şunu buluruz:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Her bir X_i'nin varyansı σ_X^2 olduğuna göre şunu çıkarabiliriz:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma_X^2$$

Bu durumda örneklem ortalamasının varyansı şu olur:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n\sigma_X^2}{n^2} = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

Öyleyse, $\overline{X}$'nin örnekleme dağılımının varyansı, örneklem büyüklüğü n arttıkça küçülür. Bunun anlamı, örneklemde ne kadar çok gözlem varsa, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının da anakütle ortalamasının o kadar yakınında toplandığıdır. Başka bir deyişle, örneklem büyüdükçe, anakütleye ilişkin çıkarsamamız da gittikçe kesinleşecektir. Bu da beklenen bir sonuçtur: Bir anakütleden ne kadar bilgi derlersek, o anakütlenin (ortalama gibi) özelliklerini o kadar iyi öğreniriz. Örneklem ortalamasının varyansı $\sigma_{\overline{X}}^2$ ile gösterilir; buna karşılık gelen ve $\overline{X}$'nin **standart hatası** diye adlandırılan standart sapma da şöyle bulunur:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Örneklemdeki gözlem sayısı n, anakütledeki gözlem sayısı N'nin çok küçük bir oranı değilse, örneklemdeki tekil gözlemler birbirinden bağımsız dağılmaz. Sözgelimi, bir anakütle gözlemi, aynı örneklemde birden çok kez yer alamayacağına göre, anakütledeki herhangi belli bir gözlemin örnekleme ikinci sırada seçilme olasılığı, ilk seçilen gözlemin hangisi olduğuna bağlıdır. Bu durumda, yukarıdaki paragrafta anlatılan, örneklem ortalamasının varyansının çıkarılmasındaki akıl yürütme artık geçerli değildir. Aslında, uygun formülün[3] aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir:

[3] Bu olguyla Bölüm 4'te karşılaşmıştık. Hipergeometrik dağılımın varyansı, binom dağılımı varyansının $(N-n)/(N-1)$ katıdır.

$$\text{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \frac{N-n}{n-1}$$

$(N-n)/(N-1)$ terimine, çoğunlukla, *sonlu anakütle düzeltme çarpanı* denir.

Buraya kadar, $\overline{X}$'nin örnekleme dağılımının ortalaması ile varyansı için formüller bulduk. Neyse ki, çoğu uygulamada, bu dağılımı bütünüyle niteleyebilmek için bu kadarı yeterlidir. Anakütle normal dağılıyorsa, örneklem ortalamasının da normal dağıldığı gösterilebilir. Örneklem büyüklüğünün anakütle içindeki oranı düşükse, örneklem ortalamasından anakütle ortalaması çıkarılıp standart hataya bölününce, standart normal dağılıma uyan şu rassal değişken elde edilir:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}} \qquad (6.2.1)$$

Ayrıca, merkezî limit teoremi gereği, anakütle normal dağılmasa bile, örneklemdeki gözlem sayısı n orta büyüklükteyse, $\overline{X}$'nin dağılımı normale çok yakın olmayı sürdürecek, böylelikle (6.2.1) büyüklüğü, standart normal dağılımın çok iyi bir yakınsaması olacaktır.

Bu altbölümün bulguları aşağıdaki çerçevede özetlenmiştir:

$\overline{X}$'nin Örnekleme Dağılımı

Ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan bir anakütleden rassal seçilmiş n gözlemli bir örneklemin ortalamasını $\overline{X}$ ile gösterelim. Bu durumda:

(i) $\overline{X}$'nin örnekleme dağılımının ortalaması μ_X'tir:

$$E(\overline{X}) = \mu_X$$

(ii) $\overline{X}$'nin örnekleme dağılımının standart sapması da şudur:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Bu büyüklüğe $\overline{X}$'nin **standart hatası** denir.

(iii) Örneklemdeki gözlem sayısı n, anakütledeki gözlem sayısı N'nin pek küçük olmayan bir oranıysa, $\overline{X}$'nin standart hatası şöyle olur:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

(iv) Anakütle normal dağılıyorsa, şu rassal değişken de standart normal dağılıma uyar:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}}$$

(v) Anakütle normal dağılmıyorsa ve örneklemdeki gözlem sayısı n orta büyüklükteyse, merkezî limit teoremi gereği, (iv) bulgusu iyi bir yakınsama olarak geçerliliğini korur.

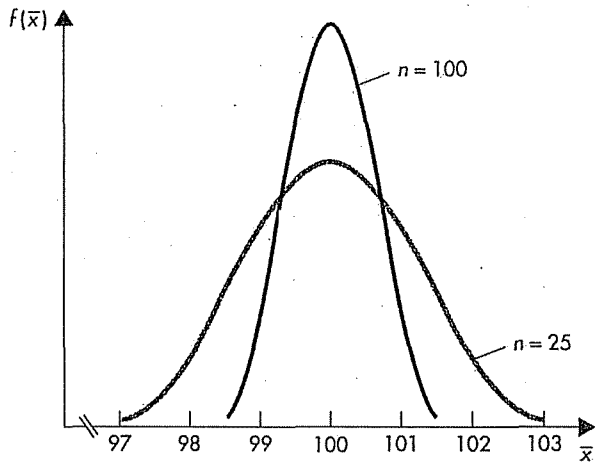
Çizim 6.2, bir normal dağılımdan çekilmiş, $n = 25$ ve $n = 100$ büyüklüğünde örneklemler için örneklem ortalamasının örnekleme dağılımını göstermektedir. Her bir dağılımın merkezinin anakütle ortalaması olduğu, ama örneklem büyüklüğü arttıkça, dağılımın o ortalama dolayında yoğunlaştığı bu çizimde gözlenebilmektedir. Bu da, örneklem ortalamasının standart hatasının, örneklemdeki gözlem sayısının azalan bir fonksiyonu olduğu olgusunun bir yansımasıdır. Öyleyse, beklendiği gibi, örneklem ortalamasımn anakütle ortalamasından sabit bir miktar farklılaşması olasılığı örneklem büyüdükçe azalmaktadır.

Şimdi bu altbölümde öğrendiklerimizi, normal dağılmış bir anakütleden çekilmiş örneklemlere dayanarak, belirli bazı örneklerle açıklayacağız.

ÖRNEK 6.2

Orta büyüklükteki bütün şirketlerin üst düzey yöneticilerinin aylıklarındaki yıllık artış yüzdeleri, ortalaması %12.2, standart sapması %3.6 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Yüzde aylık artışlarının bu anakütlesinden dokuz gözlemli rassal bir örneklem seçilmiştir. Örneklem ortalamasımn %10'dan düşük olma olasılığı kaçtır?

ÇİZİM 6.2 Ortalaması 100, standart sapması 5 olan bir normal dağılımdan çekilmiş 25 ve 100 gözlemli örneklemlerin örneklem ortalamalarının olasılık yoğunluk fonksiyonları



Şunları biliyoruz:

$$\mu_X = 12.2 \qquad \sigma_X = 3.6 \qquad n = 9$$

Örneklem ortalamasını $\overline{X}$ ile gösterelim. Bu durumda şunu bulmamız gerekir:

$$P(\overline{X} < 10) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{10 - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(Z < \frac{10 - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

Burada örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının standart hatası şöyledir:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3.6}{\sqrt{9}} = 1.2$$

Öyleyse aranan olasılık şudur:

$$P(\overline{X} < 10) = P\left(Z < \frac{10 - 12.2}{1.2}\right)$$
$$= P(Z < -1.83)$$

Burada Z rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar. Dolayısıyla Ek Çizelge 3 kullanılarak şu bulunabilir:

$$P(\overline{X} < 10) = F_Z(-1.83)$$
$$= 1 - F_Z(1.83)$$
$$= 1 - 0.9664 = 0.0336$$

Öyleyse, örneklem ortalamasının %10'dan düşük çıkma olasılığının yalnızca 0.0336 olduğu sonucuna varırız.

ÖRNEK 6.3

Bir üreticiye göre bujilerinin ömrü, ortalaması 36,000, standart sapması 4,000 mil olan bir normal dağılıma uymaktadır. Bu bujilerden onaltılık bir rassal örneklemde ortalama ömür 34,500 mil bulunmuştur. Üreticinin savı doğruysa, bu kadar ya da daha düşük bir ortalama bulma olasılığı kaç olur?

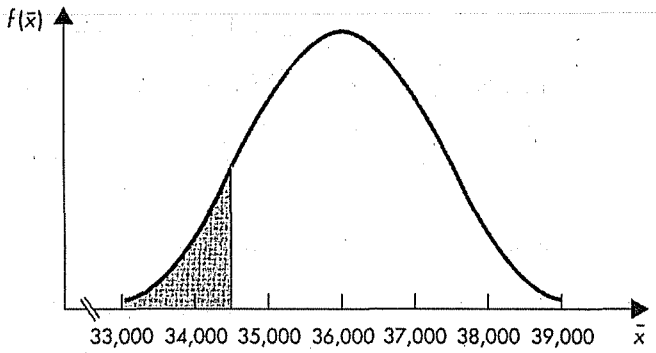
Örneklem ortalaması $\overline{X}$ ile gösterilse, aranan olasılık şu olur:

$$P(\overline{X} < 34{,}500) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{34{,}500 - \mu_X}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

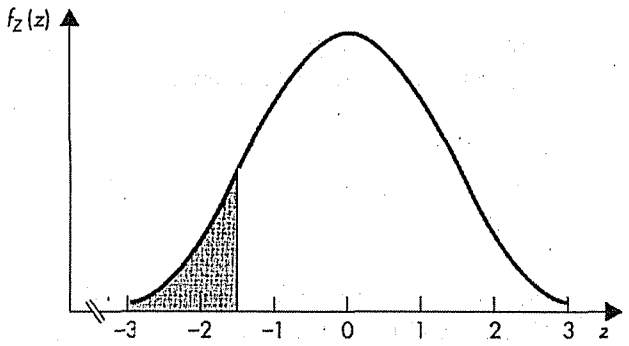
Burada $\mu_X = 36{,}000$, varsayılan anakütle ortalaması olup standart hata da şudur:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}000}{4} = 1{,}000$$

Bu durumda şunu yazabiliriz:



ÇİZİM 6.3(a) Ortalaması 36,000, standart sapması 4,000 olan normal dağılımdan rassal seçilmiş 16 gözlemli örneklemlerde örneklem ortalamasının 34,500'den küçük çıkma olasılığı; örneklem ortalaması, ortalaması 36,000, standart sapması 1,000 olan bir normal dağılıma uyar



ÇİZİM 6.3(b) Bir standart normal rassal değişkenin –1.5'ten düşük olma olasılığı

$$P(\overline{X} < 34{,}500) = P\left(Z < \frac{34{,}500 - 36{,}000}{1{,}000}\right)$$
$$= P(Z < -1.5)$$

Burada Z, standart normal dağılıma uyar.

Çizim 6.3(a), gölgeli alan örneklem ortalamasının 34,500'den düşük olma olsılığı olmak üzere, $\overline{X}$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Çizim 6.3(b)'de aynı olasılık, standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu çizimi üzerinde işaretlenmiştir. Ek Çizelge 3'ten bulunan bu olasılık şudur:

$$P(\overline{X} < 34{,}500) = F_Z(-1.5)$$
$$= 1 - F_Z(1.5)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Bu bulgu, üreticinin savı doğruysa, örneklem ortalaması için bu kadar düşük bir değer bulma olasılığının hayli küçük olduğu anlamına gelir. Bölüm 9'da, bu tür savları ya da önsavları, örneklem kanıtlarına dayanarak sınamanın genel bir çerçevesini ele alacağız.

6.3 ÖRNEKLEM ORANININ ÖRNEKLEME DAĞILIMI

Altbölüm 4.5'te, her birinde başarı olasılığı p olan n tane bağımsız deneme yapılırsa, toplam başarı sayısı X'in binom dağılımına uyduğunu görmüştük. Anakütle katsayısı p bilinmediğinde ortaya sorun çıkar. Sözgelimi, belli bir yere aday olan kimseye oy vermeye niyetli olanların oranını ya da bir derginin, belli bir ürüne müşteri olabilecek okuyucularının oranını belirlemek isteyebiliriz. Bu tür durumlarda, ilgili anakütleden çekilmiş örneklemdeki başarı oranını temel almak doğaldır.

Tanım

Başarı olasılığının p olduğu n gözlemli bir binom dağılımında başarıların sayısı X olsun. (Çoğu uygulamada, p anakütle katsayısı, büyük bir anakütlede ilgilenilen özelliği taşıyan gözlemlerin oranıdır.) Bu durumda örneklemdeki, **örneklem oranı** denen, başarı oranı şudur:[4]

$$\hat{p}_X = \frac{X}{n}$$

Örneklem oranının örnekleme dağılımının ortalaması ile varyansı, başarı sayılarının ortalaması ile varyansından kolayca çıkarılabilir, bunlar da Altbölüm 4.5'te şöyle bulunmuştu:

$$E(X) = np \qquad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

Buradan şuna ulaşabiliriz:

[4] Burada da rassal bir değişkenle onun gerçekleşmesi olanaklı belirli değerlerini birbirinden ayırıyoruz. Sözgelimi, belli bir örneklemde x tane başarı gözleyebiliriz, bu durumda gözlenen örneklem oranı $\hat{p}_x = x/n$ olur. Öyleyse $\hat{p}_x$, rassal değişken $\hat{p}_X$'in gerçekleşmiş özel bir durumudur.

$$E(\hat{p}_X) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = p$$

Yani, örneklem oranının ortalaması, anakütledeki "başarılar"ın oranı olan p'dir. Varyansı da şöyle bulunur:

$$\text{Var}(\hat{p}_X) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(X) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Örneklem oranının, standart sapması da **standart hata** adını alır. Bu da varyansın karekökü dür.

Anakütledeki gözlem sayısı N, örneklemdeki gözlem sayısına göre çok büyük değilse, örneklem oranının varyansını belirtirken **sonlu anakütle düzeltmesi**nin yapılması gerekir. Bu durumda varyans şöyle olur:

$$\text{Var}(\hat{p}_X) = \frac{p(1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Altbölüm 5.7'de, merkezî limit teoreminin bir gereği olarak, başarı sayısının dağılımının, büyük örneklemlerde, yaklaşık normal olduğunu görmüştük. Aynı şey başarı oranı için de doğrudur. Öyleyse, örneklem oramndan ortalamasını çıkarıp sonucu standart hatasına bölersek, standart normal dağılıma uyan bir rassal değişken elde ederiz.

Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

Başarı oranının p olduğu bir anakütleden çekilmiş n gözlemli bir rassal örneklemde başarı oranı $\hat{p}_X$ olsun. Bu durumda:

(i) $\hat{p}_X$'in örnekleme dağılımının ortalaması p'dir:

$$E(\hat{p}_X) = p$$

(ii) $\hat{p}_X$'in örnekleme dağılımının standart sapması şudur:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

σ_p büyüklüğüne $\hat{p}_X$'in **standart hatası** denir.

(iii) Örneklem gözlemlerinin sayısı n, anakütle gözlemlerinin sayısı N'nin küçük bir oranı değilse, $\hat{p}_X$'in standart hatası şöyle bulunur:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Örneklem büyükse,[5] şu rassal değişken standart normal dağılıma yakınsar:

$$Z = \frac{\hat{p}_X - p}{\sigma_{\hat{p}}}$$

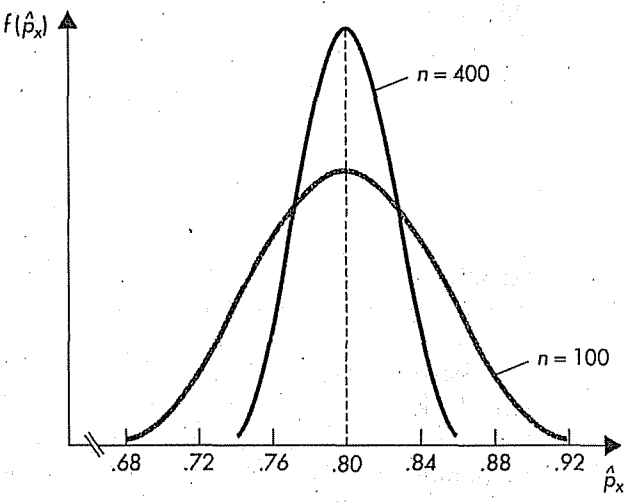
Dikkat ederseniz, p sabitken, örneklem büyüdükçe örneklem oranının standart hatası küçülür. Bu da, Çizim 6.4'te görüldüğü gibi, örneklem büyüdükçe, $\hat{p}_X$'in kendi ortalaması dolayında yoğunlaştığı anlamına gelir. Bunun sonucunda, örneklem ve anakütle oranlarının birbirinden sabit bir miktar kadar farklılaşma olasılığı örneklem büyüdükçe azalmaktadır. Başka bir deyişle, bir anakütleden daha büyük bir örneklem çekersek, belli bir niteliği taşıyan anakütle gözlemlerinin oranına ilişkin çıkarsamamız daha da sağlamlaşır.

Örneklem büyükken, örneklem oranının verilmiş bir aralıkta bulunma olasılığını hesaplamada, binom dağılımının normale yakınsaması çok kolaylık sağlar. Bu da aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

ÖRNEK 6.4

Büyük bir eskice evler anakütlesinden elektrik tesisatının güvenli olmadığı evlerin oranını bulmak üzere, 250 evlik rassal bir örneklem çekilmiştir. Aslında bütün evlerin %30'unun güvensiz tesisatı olduğunu düşünelim. Güvensiz tesisatlı evlerin örneklem içindeki oranının 0.25 ile 0.35 arasında çıkma olasılığını bulun.

ÇİZİM 6.4 Anakütle oranı 0.8 iken, 100'lük ve 400'lük gözlemli örneklemlerde örneklem oranlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları



[5] Elli ya da daha fazla gözlemli örneklemler için yakınsama genellikle doyurucudur. Yakınsamanın niteliği ayrıca p'ye de bağlıdır; en iyisi $np(1-p) > 9$ olmalıdır.

Şunlar verilmiştir:

$$p = 0.30 \qquad n = 250$$

Tesisatı güvensiz evlerin örneklem içindeki oranını $\hat{p}_X$ ile gösterelim. Bulacağımız olasılık şudur:

$$P(0.25 < \hat{p}_X < 0.35) = P\left(\frac{0.25 - p}{\sigma_{\hat{p}}} < \frac{\hat{p}_X - p}{\sigma_{\hat{p}}} < \frac{0.35 - p}{\sigma_{\hat{p}}}\right)$$
$$= P\left(\frac{0.25 - p}{\sigma_{\hat{p}}} < Z < \frac{0.35 - p}{\sigma_{\hat{p}}}\right)$$

Burada örneklem oranının örnekleme dağılımının standart hatası da şöyle bulunur:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.30)(0.70)}{250}} = 0.029$$

Öyleyse aranan olasılık şudur:

$$P(0.25 < \hat{p}_X < 0.35) = P\left(\frac{0.25 - 0.30}{0.029} < Z < \frac{0.35 - 0.30}{0.029}\right)$$
$$= P(-1.72 < Z < 1.72)$$

Burada Z rassal değişkeninin dağılımı, standart normal dağılımın iyi bir yakınsamasıdır. Dolayısıyla Ek Çizelge 3'ü kullanarak olasılığı bulabiliriz:

$$P(0.25 < \hat{p}_X < 0.35) = F_Z(1.72) - F_Z(-1.72)$$
$$= F_Z(1.72) - [1 - F_Z(1.72)]$$
$$= 0.9573 - (1 - 0.9573) = 0.9146$$

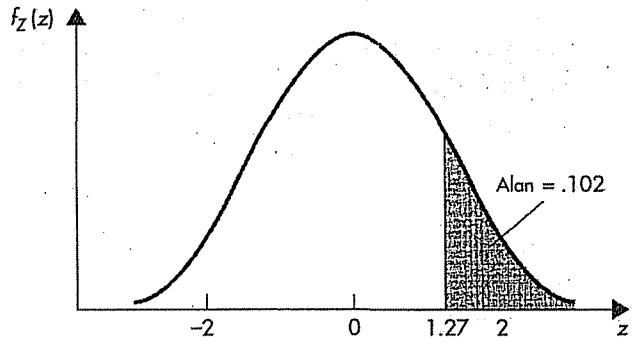
Öyleyse, bu anakütleden çekilen 250 gözlemlik rassal örneklemlerin %91.5'inde örneklem oranı bu aralık içinde kalır.

ÖRNEK 6.5

İşletmecilik mezunlarının %43'ünün, bir işletme ahlâkı dersinin, öğrencilere ahlâk değerleri aktarmada çok önemli olduğuna inandıkları tahmin edilmiştir.[6] 80 işletmecilik mezunundan oluşan rassal bir örneklemde bu görüşte olanların oranının yarıdan fazla olma olasılığını bulun.

Şunlar verilmiştir:

[6] F. R. David, L. M. Anderson, K. W. Lawrimore, "Perspectives on business ethics in management education," *S. A. M. Advanced Management Journal, 55*, no. 4 (1990), 26-32.



ÇİZİM 6.5 Standart normal rassal değişkenin 1.27'den büyük olma olasılığı. Bu aynı zamanda, anakütle oranı 0.43 iken, 80 gözlemli bir örneklemde örneklem oranının 0.50'yi aşma olasılığıdır.

$$n = 80 \qquad p = 0.43$$

Örneklem oranını $\hat{p}_X$ ile göstererek, aranan olasılığı şöyle bulabiliriz:

$$P(\hat{p}_X > 0.50) = P\left(\frac{\hat{p}_X - p}{\sigma_{\hat{p}}} > \frac{0.50 - p}{\sigma_{\hat{p}}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{0.50 - p}{\sigma_{\hat{p}}}\right)$$

Örneklem oranının örnekleme dağılımının standart hatası şöyledir:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.43)(0.57)}{80}} = 0.055$$

Bu durumda şunu buluruz:

$$P(\hat{p}_X > 0.50) = P\left(Z > \frac{0.50 - 0.43}{80}\right) = P(Z > 1.27)$$

Z rassal değişkeni yaklaşık standart normal dağılıma uyar. Dolayısıyla Ek Çizelge 3'ü kullanarak şunu elde ederiz:

$$P(\hat{p}_X > 0.50) = P(Z > 1.27)$$

$$= 1 - P(Z < 1.27)$$

$$= 1 - F_Z(1.27)$$

$$= 1 - 0.8980 = 0.1020$$

Öyleyse, örneklemdeki kişilerin yarıdan çoğunun bu görüşü taşıma olasılığı yaklaşık 0.1'dir. Bu olasılık, Çizim 6.5'te standart normal yoğunluk eğrisi altındaki gölgeli alanla gösterilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir üretim süreci doğru işliyorsa, üretilen elektrikli aygıtların ohm cinsinden direnci, ortalaması 92.0, standart sapması 3.6 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Dört aygıtlık bir rassal örneklem çekilmiştir.
   (a) Örneklemin ortalama direncinin örnekleme dağılımının ortalamasını bulun.
   (b) Örneklem ortalamasının varyansını bulun.
   (c) Örneklem ortalamasının standart hatasını bulun.
   (a) Örneklem ortalamasının 93.0 ohm'u aşma olasılığı kaçtır?
2. Belli bir üreticinin ürettiği ampullerin ömür ortalaması 1,200, standart sapması 400 saattir. Anakütle normal dağılmaktadır. Üreticinin ürünleri arasından rassal seçildiği düşünülebilecek dokuz ampul aldınız diyelim.
   (a) Örneklemin ortalama ömür ortalaması kaçtır?
   (b) Örneklem ortalamasının varyansı kaçtır?
   (c) Örneklem ortalamasının standart sapması kaçtır?
   (d) Bu dokuz ampulün ortalama olarak 1,050 saatten daha az dayanma olasılığı kaçtır?
3. Belli bir model bütün arabaların yakıt tüketiminin, galon başına mil olarak, ortalaması 25, standart sapması 2'dir. Anakütle dağılımının normale uyduğu varsayılabilir. Bu arabalardan rassal bir örneklem çekilmiştir.
   (a) Aşağıdaki durumlarda, yakıt tüketiminin örneklem ortalamasının galon başına 24 milden az olma olasılığını bulun:
      (i) Bir gözlemlik bir örneklem alınmıştır.
      (ii) Dört gözlemlik bir örneklem alınmıştır.
      (iii) Onaltı gözlemlik bir örneklem alınmıştır.
   (b) Yukarıda (a)'daki üç yanıtın niye farklı olduğunu açıklayın. Akıl yürütmenizi göstermek için bir çizim düzenleyin.
4. Bir kentteki yeni evlerin bir yıl içindeki ortalama satış fiyatı 115,000 $'dır. Anakütlenin standart sapması 25,000 $'dır. Bu kentte yapılan yeni ev satışlarından 100 gözlemlik rassal bir örneklem alınmıştır.
   (a) Örneklemdeki ortalama satış fiyatının 110,000 $'dan yüksek olma olasılığı kaçtır?
   (b) Örneklemdeki ortalama satış fiyatının 113,000 ile 117,000 $ arasında olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklemdeki ortalama satış fiyatının 114,000 ile 116,000 $ arasında olma olasılığı kaçtır?
   (d) Hiç hesaplama yapmadan, örneklemdeki ortalama satış fiyatının aşağıdaki aralıklardan hangisinde bulunma şansının en yüksek olduğunu söyleyin:

113,000-115,000 $, 114,000-116,000 $, 115,000-117,000 $, 116,000-118,000 $

(e) Siz yukarıdaki hesaplamaları yaptıktan sonra bir arkadaşınız, bu kentteki yeni evlerin satış fiyatlarının anakütle dağılımının kesinlikle normale uymadığını ileri sürmüştür? Buna yanıtınız ne olur?

5. Bir kent itfaiyesinde işe alınacak adaylardan yazılı bir yetenek sınavına girmeleri istenmiştir. Bu sınavın notları ortalaması 280, standart sapması 60 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Bunlardan dokuz notluk rassal bir örneklem çekilmiştir.
   (a) Örneklemin ortalama notunun standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklemin ortalama notunun 270'ten düşük olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklemin ortalama notunun 250'den yüksek olma olasılığı kaçtır?
   (d) Anakütlenin standart sapmasının 60 değil de 40 olduğunu düşünelim. Hiç hesaplama yapmadan, (a), (b), (c)'deki yanıtlarınızın nasıl değişeceğini söyleyin. Bulgunuzu uygun çizimlerle açıklayın.
6. Büyük bir kentin merkezindeki şirketlerde çalişan altdüzey yöneticilerden onaltı kişilik rassal bir örneklem alınarak, bu tür bütün yöneticilerin günlük işe gidiş-geliş süreleri tahmin edilecektir. Anakütledeki sürelerin, ortalaması 87, standart sapması 22 dakika olan normal bir dağılıma uyduğunu düşünelim.
   (a) Örneklemdeki ortalama gidiş-geliş süresinin standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklem ortalamasının 100 dakikadan az olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem ortalamasının 80 dakikadan çok olma olasılığı kaçtır?
   (d) Örneklem ortalamasının 85 ile 95 dakika arasında olma olasılığı kaçtır?
   (e) Elli altdüzey yöneticiden oluşan ikinci bir (bağımsız) örneklem alınmış olsun. Hiç hesaplama yapmadan, (b), (c), (d)'deki yanıtlarınızın ikinci örneklemde daha mı yüksek, daha mı düşük, yoksa aynı mı olacağını belirtin. Yanıtlarınızı açıklamak için çizimler düzenleyin.
7. Bir şirket kahvaltılık mısır gevreği üretmektedir. Kutular içindeki mısır gevreğinin gerçek ortalama ağırlığı 20 ons, standart sapması 0.6 onstur. Ağırlıkların anakütle dağılımı normaldir. Bütün üretimden rassal seçildiğini söyleyebileceğimiz dört kutu satın aldığınızı düşünelim.
   (a) Örneklemdeki ortalama ağırlığın standart hatası kaçtır?
   (b) Bu dört kutudaki ağırlıkların ortalama olarak 19.7 onstan düşük çıkma olasılığı kaçtır?
   (c) Bu dört kutudaki ağırlıkların ortalama olarak 20.6 onstan büyük çıkma olasılığı kaçtır?
   (d) Bu dört kutudaki ağırlıkların ortalama olarak 19.5 ile 20.5 ons arasında çıkma olasılığı kaçtır?
   (e) Dört kutudan ikisi rassal seçilmiştir. Bu iki kutudaki ağırlıkların ortalama olarak 19.5 ile 20.5 ons arasında çıkma olasılığı kaçtır?
8. Belli bir kentte öğrencilerin ödediği aylık kiraların standart sapmasının 40 $ olduğunu düşünelim. Bütün öğrenci anakütlesinin ödediği ortalama aylık kirayı tahmin etmek üzere 100 öğrencilik bir rassal örneklem çekilmiştir.
   (a) Aylık kiranın örneklem ortalamasının standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından yüksekliğinin 5 $'dan çok olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından düşüklüğünün 4 $'dan çok olma olasılığı kaçtır?

(d) Örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 3 $'dan çok olma olasılığı kaçtır?

9. Dönem sonu sınavlarından önceki haftada öğrencilerin ders çalışma saatleri, standart sapması 8 saat olan normal bir dağılıma uymaktadır. Bütün öğrenci anakütlesinin ortalama çalışma süresini tahmin etmek üzere 4 öğrenciden oluşan rassal bir örneklem seçilmiştir.
   (a) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından yüksekliğinin 2 saatten çok olma olasılığı kaçtır?
   (b) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından düşüklüğünün 3 saatten çok olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 4 saatten çok olma olasılığı kaçtır?
   (d) On öğrenciden oluşan ikinci bir (bağımsız) rassal örneklem seçildiğini düşünelim. Hiç hesaplama yapmadan, (a), (b), (c)'deki olasılıkların ikinci örneklemde daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa aynı mı çıkacağını belirtin.

10. Bir sınai süreç partiler halinde kimyasal madde üretmektedir. Bu kimyasal maddenin içindeki yabancı madde karışım oranının standart sapması yüz gram başına 1.6 gramdır. Anakütledeki katışım oranını tahmin etmek üzere 100 partilik bir rassal örneklem alınmıştır.
   (a) Örneklemdeki ortalama katışım oranının, anakütle ortalamasından ne kadar daha yüksek olmasının olasılığı 0.05'tir?
   (b) Örneklemdeki ortalama katışım oranının, anakütle ortalamasından ne kadar daha düşük olmasının olasılığı 0.10'dur?
   (c) Örneklemdeki ortalama katışım oranının, anakütle ortalamasından ne kadar farklı olmasının olasılığı 0.15'tir?

11. Pay senetleri New York Borsası'nda alınıp satılan bütün şirketlerin fiyat-kazanç oranları, standart sapması 3.8 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Anakütledeki ortalama fiyat-kazanç oranını tahmin etmek üzere, bu şirketlerden rassal bir örneklem çekilmiştir.
   (a) Örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 1.0'dan fazla çıkma olasılığının 0.10'dan az olabilmesi için örneklem bütyüklüğünün ne olması gerekir?
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 1.0'dan fazla çıkma olasılığının 0.05'ten az olmasını sağlayacak örneklemin (a)'dakinden büyük mü, küçük mü olması gerektiğini söyleyin.
   (c) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 1.5'ten fazla çıkma olasılığının 0.10'dan az olmasını sağlayacak örneklemin (a)'dakinden büyük mü, küçük mü olması gerektiğini söyleyin.

12. Büyük bir yerleşkedeki öğrencilerin dönem sonu sınavlarından önceki hafta ders çalışma süreleri, standart sapması 8.4 saat olan bir normal dağılıma uymaktadır. Anakütledeki çalışma süresini tahmin etmek üzere bu öğrencilerden rassal bir örneklem seçilmiştir.
   (a) Örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 2.0 saatten fazla olma olasılığının 0.05'ten az olması için örneklem büyüklüğü ne olmalıdır?
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 2.0 saatten fazla olma olasılığının 0.10'dan az olması için örneklemin (a)'dakinden büyük mü, küçük mü olması gerektiğini söyleyin.

(c) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 1.5 saatten fazla olma olasılığının 0.05'ten az olması için örneklemin (a)'dakinden büyük mü, küçük mü olması gerektiğini söyleyin.

13. Çizelge 6.1 ile Örnek 6.1'de işçilerin iş deneyimlerini gösteren $N=6$ gözlemli bir anakütleden $n=4$ gözlemli örneklemler almıştık. Anakütle ortalaması $\mu_X=5.5$ yıldı.

(a) Altı anakütle gözleminden anakütle varyansının şöyle olduğunu doğrulayın:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{47}{12}$$

(b) Örnek 6.1'deki yaklaşımı izleyerek, örneklem ortalamasının örnemleme varyansının aşağıdaki gibi olduğunu doğrulayın.

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\sum(\bar{x}-\mu_X)^2P_{\bar{X}}(\bar{x})=\frac{47}{120}$$

(c) Bu örnek için şunun doğruluğunu gösterin:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

14. N gözlemli bir anakütleden n gözlemli bir örneklem alındığında, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının varyansı aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

$\frac{(N-n)}{(N-1)}$ terimine "sonlu anakütle düzeltme çarpanı" denir.

(a) Sonlu anakütle düzeltme çarpanının alabileceği değerleri algılayabilmek amacıyla, anakütle $N=20$, 40, 100, 1,000, 10,000 gözlemli iken, $n=20$ gözlemli örneklemler için bu çarpanı hesaplayın.

(b) $N=20$ iken (a)'daki yanıtınızın, sezgisel olarak beklenenle aynı olmasının gerekçesini açıklayın.

(c) (a)'daki bulgular veriyken, değişik büyüklükteki anakütlelerden çekilen 20 gözlemli örneklemler için sonlu anakütle düzeltme çarpanını kullanmanın uygulamadaki önemini tartışın.

15. Bir kentte 500 emlakçı vardır. Bu emlakçılar tarafından bir yıl içinde satılan mülklerin ortalama değeri 800,000, standart sapması 300,000 $'dır. 100 emlakçıdan oluşan rassal bir örneklem seçilip, bunların bir yıl içinde sattığı mülklerin değerleri kaydedilmiştir.

(a) Örneklem ortalamasının standart hatası kaçtır?

(b) Örneklem ortalamasının 825,000 $'ı aşma olasılığı kaçtır?

(c) Örneklem ortalamasının 780,000 $'ı aşma olasılığı kaçtır?

(d) Örneklem ortalamasının 790,000 ile 820,000 $ arasında olma olasılığı kaçtır?

16. Bir iktisat dersine 250 öğrenci kaydolmuştur. 50 öğrencilik rassal bir örneklemdeki herkesten geçen haftanın ödevi için ne kadar zaman harcadığını tahmin etmesi istenmiştir. Anakütle standart sapmasının 30 dakika olduğunu düşünelim.

(a) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasını 2.5 dakikadan fazla aşma olasılığı kaçtır?
(b) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasının 5 dakikadan fazla altında olma olasılığı kaçtır?
(c) Örneklem ortalaması ile anakütle ortalaması arasındaki farkın 10 dakikadan fazla olma olasılığı kaçtır?

17. 600 dinleyicinin bir konsere gitmek için yolda harcadıkları sürenin ortalaması 32, standart sapması 10 dakikadır. Bu izleyicilerden 150'si rassal bir örnekleme seçilmiştir.
(a) Örneklemdeki ortalama yolculuk süresinin 31 dakikayı aşma olasılığı kaçtır?
(b) Örneklemdeki ortalama yolculuk süresinin 33 dakikadan kısa olma olasılığı kaçtır?
(c) (a) ile (b)'deki yanıtların niye aynı olduğunu açıklayan bir çizim düzenleyin.
(d) Örneklemdeki ortalama yolculuk süresinin 31 ile 33 dakika arasında olmama olasılığı kaçtır?

18. 1992'de Kanadalılar yeni bir anayasa için halkoylamasına gittiler. Quebec ilinde oy kullananların %42.4'ü anayasaya evet oyu verdi. Bu ilden 100 seçmenlik rassal bir örneklem seçilmiştir.
(a) Anayasaya evet diyenlerin örneklem oranının ortalaması kaçtır?
(b) Örneklem oranının varyansı kaçtır?
(c) Örneklem oranının standart hatası kaçtır?
(d) Örneklem oranının 0.5'ten büyük olma olasılığı kaçtır?

19. Gelirler Genel Müdürlüğü'ne göre, bütün vergi beyannamelerinin %75'i vergi iadesine yol açmaktadır. 100 beyannamelik bir rassal örneklem alınmıştır.
(a) Vergi iadesine yol açan beyannamelerin örneklem oranının ortalaması kaçtır?
(b) Örneklem oranının varyansı kaçtır?
(c) Örneklem oranının standart hatası kaçtır?
(d) Örneklem oranının 0.8'den büyük olma olasılığı kaçtır?

20. Bir plakçı, dükkânına gelen müşterilerin %20'sinin bir mal aldığını saptamıştır. Bir sabah, bütün müşteriler içinden rassal bir örneklem olarak düşünülebilecek, 180 müşteri dükkâna girer.
(a) Mal alan müşterilerin örneklem oranının ortalaması kaçtır?
(b) Örneklem oranının varyansı kaçtır?
(c) Örneklem oranının standart hatası kaçtır?
(d) Örneklem oranının 0.15'ten küçük olma olasılığı kaçtır?

21. Büyük bir hastaneler grubunun yöneticisi, bütün hastaların %30'unun faturaları en az 2 ay gecikmeli ödediği kanısındadır. 200 hastalık rassal bir örneklem alınmıştır.
(a) Faturayı en az 2 ay gecikmeyle ödeyenlerin örneklem oranının standart hatası kaçtır?
(b) Örneklem oranının 0.25'ten küçük olma olasılığı kaçtır?
(c) Örneklem oranının 0.33'ten büyük olma olasılığı kaçtır?
(d) Örneklem oranının 0.27 ile 0.33 arasında olma olasılığı kaçtır?

22. 120 yeni işletmecilik mezunu bir şirkete iş başvurusu yapmıştır. Başvuranların bu tür mezunlar içinden rassal bir örneklem olduğunu varsayarsak, bütün işletmecilik mezunlarının %40'ı kadınken, başvuranlar içinde kadın oranının %35 ile 45 arasında olma olasılığı kaçtır?

23. Bir yardım kurumu, bir yıl bağış yapanların %42'sinin ertesi yıl da yaptığını saptamıştır. Geçen yıl bağış yapanlardan 300 kişilik rassal bir örneklem çekilmiştir.
   (a) Bu yıl da bağış yapacak olanların örneklem oranının standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklemdekilerden yarıdan çoğunun bu yıl da bağış yapma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem oranının 0.40 ile 0.45 arasında olma olasılığı kaçtır?
   (d) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem oranının aşağıdaki aralıklardan hangisinde bulunma şansı en yüksektir? 0.39-0.41, 0.41-0.43, 0.43-0.45, 0.45-0.47.

24. Bir şirket pay senedine çevrilebilir tahvil çıkarmayı düşünmektedir. Yönetim, şimdiki ortaklardan %20'sinin öneri koşullarını çekici bulacağı kanısındadır. Bu kanının doğru olduğunu düşünelim. Şimdiki ortaklardan 130'u rassal bir örnekleme seçilmiştir.
   (a) Bu öneriyi çekici bulanların örneklem oranının standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklem oranının 0.15'ten büyük olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem oranının 0.18 ile 0.22 arasında olma olasılığı kaçtır?
   (d) Şimdiki ortaklardan 500 kişinin bir örnekleme seçildiğini düşünelim. Hiç hesaplama yapmadan, (b) ile (c)'deki olasılıkların daha önce bulunanlardan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa aynı mı olduğunu belirtin.

25. Bir eyalette çim biçme makinesi alanların %30'unun bir bakım anlaşması da imzaladığı saptanmıştır. Bir ay içinde, bütün çim biçme makinesi alanların rassal bir örneklemi olarak düşünülebilecek 280 kişiye çim biçme makinesi satılmıştır.
   (a) Bakım anlaşması imzalayanların örneklem oranının standart hatası kaçtır?
   (b) Örneklem oranının 0.25'ten büyük olma olasılığı kaçtır?
   (c) Örneklem oranının 0.32'den küçük olma olasılığı kaçtır?
   (d) Hiç hesaplama yapmadan, örneklem oranının aşağıdaki aralıklardan hangisinde bulunma şansı en yüksektir? 0.29-0.31, 0.30-0.32, 0.31-0.33, 0.32-0.34.

26. Karayollarının bakımına ek bir gelir sağlamak amacıyla akaryakıt vergisinin artırılmasını olumlu bulanların seçmenler içindeki oranını tahmin etmek üzere 100 seçmenlik bir rassal örneklem alınmıştır. Bu öneriyi olumlu bulanların örneklem oranının standart hatası en çok kaç olabilir?

27. Alıştırma 26'da, 100 seçmenlik örneklemin, anakütle oranını güvenilir biçimde tahmin etmek için yeterli görülmediğini düşünelim. Bunun yerine, örneklem oranı ile (değeri her ne ise) anakütle oranı arasındaki farkın 0.03'ten büyük çıkma olasılığının 0.05'i aşmaması istenmektedir. Bu koşulun yerine getirilebilmesi için örneklem büyüklüğü kaç olmalıdır?

28. Bir şirket, elektrikli traş makinesi alabilecek kimselerden kaçta kaçının televizyonda ülke çapında yayımlanan beyzbol final maçlarını seyrettiğini tahmin etmek istemektedir. Rassal bir örneklemle, elektrikli traş makinesi alabilecek kimseler olarak belirlenen 120 kişiden bilgi derlenmiştir. Elektrikli traş makinesi alabilecek anakütleden 0.25'inin yayını izlediğini düşünelim.
   (a) Yayını izleyenlerin örneklem oranının anakütle oranını ne kadar aşmasının olasılığı 0.10'dur?
   (b) Yayını izleyenlerin örneklem oranının anakütle oranının ne kadar altında kalmasının olasılığı 0.05'tir?
   (c) Yayını izleyenlerin örneklem oranının anakütle oranından ne kadar farklı olmasının olasılığı 0.30'dur?

29. Yetişkin Amerikalıların %50'sinin, ulusal sağlık hizmetlerinin önemli bir düzenleme gerektirdiğine inandığını düşünelim. 150 kişilik yetişkin Amerikalıdan oluşan bir rassal örneklemde bu oranın %56'dan büyük çıkma olasılığı kaçtır?
30. Yetişkin Amerikalıların %50'sinin, federal bütçenin şu sıralardaki açıklarının ülke ekonomisine uzun dönemde zarar verdiğine inandığını düşünelim. 250 kişilik yetişkin Amerikalıdan oluşan bir rassal örneklemde bu oranın %58'den büyük çıkma olasılığı kaçtır?
31. Bir gazeteci, 500 büyük ABD şirketinin genel müdürlerinin, pay senetlerinin bilgisayar programlı alım-satımı konusundaki görüşlerini öğrenmek istemektedir. Zaman darlığı nedeniyle bunlardan yalnız seksenbirine rassal olarak erişilebilmiştir. Anakütledekilerin %55'i bu uygulamanın yasaklanması gerektiği kanısındaysa, örneklemdekilerin yarıdan azının aynı görüşü paylaşma olasılığı kaçtır?
32. Küçük bir üniversitede birinci sınıfa 528 yeni öğrenci alınmıştır. Bunlardan 211'i kendi kişisel bilgisayarlarını yerleşkeye getirmiştir. 120 yeni öğrenciden oluşan rassal bir örneklem alınmıştır.
    (a) Kendi kişisel bilgisayarını yerleşkeye getirenlerin örneklem oranının standart hatası kaçtır?
    (b) Örneklem oranının 0.33'ten küçük olma olasılığı kaçtır?
    (c) Örneklem oranının 0.40 ile 0.50 arasında olma olasılığı kaçtır?
33. Bir fabrikada 438 işçi çalışmaktadır. Bunlardan 239'unun gelecekte hak kazanacakları sağlık sigortası hizmetleriyle ilgili kuşkuları vardır. Bu kuşkuyu taşıyan-ların anakütle içindeki oranını tahmin etmek için bu işçilerden 80 kişilik rassal bir örnekleme sorular sorulmuştur.
    (a) Kuşkulu olanların örneklem oranının standart hatası kaçtır?
    (b) Örneklem oranının 0.5'ten küçük olma olasılığı kaçtır?
    (c) Örneklem oranının 0.5 ile 0.6 arasında çıkma olasılığı kaçtır?
34. Orta büyüklükteki bütün şirketlerin genel müdürlerinin yıllık maaş artış yüzdeleri, ortalaması %12.2, standart sapması %3.6 olan normal bir dağılıma uymaktadır. Bu yöneticilerden seksenbir tanesi rassal bir örnekleme seçilmiştir. Örneklemdekilerin yarıdan çoğunun %10'dan az maaş artışı almış olma olasılığı kaçtır?

6.4 ÖRNEKLEM VARYANSININ ÖRNEKLEME DAĞILIMI

Altbölüm 6.2'de, örneklem bilgilerine dayanarak, bir anakütlenin ortalamasına ilişkin çıkarsama yapma sorununu ele almıştık. Şimdi de dikkatimizi anakütle varyansına çeviriyoruz.

Bilinmeyen ortalaması μ_X ve bilinmeyen varyansı σ_X^2 olan bir anakütleden, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterilen n gözlemli bir rassal örneklem çekilmiş olsun. Burada anakütlenin varyansı aşağıdaki beklenen değerdir:

$$\sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2$$

Böylece, örneklemdeki n gözlem üzerinden bulunacak $(X-\mu_X)^2$'nin ortalamasının bakılması gereken büyüklük olduğu açıktır. Ancak, anakütle ortalaması μ_X bilinmemediğinden, uygulamada bu büyüklük hesaplanamaz. Bilinmeyen μ_X yerine örneklem ortalaması $\overline{X}$ konularak, $(X-\overline{X})^2$'nin ortalamasının düşünülmesi doğaldır. Aslında, Bölüm 2'de belirttiğimiz gibi, örneklem varyansı şöyle tanımlanır:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

Tanım

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem olsun.

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

büyüklüğüne **örneklem varyansı** denir,[7] karekökü de **örneklem standart sapması** adını alır.

İlk bakışta, örneklem varyansı tanımımızda paydada n yerine $(n-1)$ kullanılması şaşırtıcı görülebilir. Bizi bu formülü kullanmaya iten neden şudur: Eğer örneklem varyansı böyle tanımlanırsa, onun örnekleme dağılımının ortalamasının gerçek anakütle varyansı,[8] yani

$$E(s_X^2) = \sigma_X^2$$

olduğu gösterilebilir.

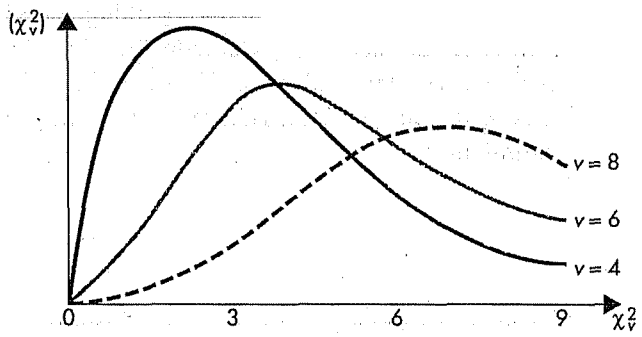
Örneklem varyansının beklenen değerinin, anakütle varyansına eşit olduğu sonucu epeyce geneldir. Ancak, örnekleme dağılımını daha iyi niteleyebilmek için, arkada yatan anakütle dağılımına ilişkin daha çok şey bilmemiz gerekir. Çoğu uygulamada, anakütle dağılımının normale uyduğu varsayımı akla uygundur. Bu durumda,

---

[7] Burada da rassal değişken s_X^2 ile onun alabileceği belli değerleri birbirinden ayırıyoruz. Böylece, gerçekten gözlenen örneklem, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise, s_X^2 şöyle gerçekleşir:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

[8] Bu bulgu, bu bölümün sonundaki Ek A6.1'de gösterilmiştir. Dikkat ederseniz, bu ancak örneklem gözlemlerinin sayısı, anakütle gözlem sayısının küçük bir oranıysa geçerlidir.



ÇİZİM 6.6 Serbestlik derecesi $\nu = 4, 6, 8$ olan ki-kare dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_X^2}$$

rassal değişkeni, $(n-1)$ serbestlik dereceli χ^2 (ki-kare) dağılımı diye bilinir.[9]

Ki-kare dağılımları ailesi istatistik çözümlemede sıkça kullanılır. Bu dağılımlar bir rassal değişkenin yalnız artı değerleri için tanımlanır, bu da, örneklem varyansı eksi değer alamayacağına göre bizim durumumuza uygundur. Çizim 6.6'da gösterilen yoğunluk fonksiyonu, çarpıktır. Ki-kare dağılımı ailesinin belli bir üyesi, çoğunlukla ν simgesiyle gösterilen ve *serbestlik derecesi* denen tek bir katsayıyla nitelenir. Bir rassal değişken, serbestlik derecesi ν olan bir χ^2 dağılımına uyuyorsa, χ^2_ν ile gösterilir. Bu dağılımın ortalaması ile varyansı, sırasıyla serbestlik derecesi ile onun karesine eşittir:

$$E(\chi^2_\nu) = \nu \qquad \text{ve} \qquad \text{Var}(\chi^2_\nu) = 2\nu$$

Bu bağlamda $(n-1)s_X^2/\sigma_X^2$ rassal değişkeni, bir $\chi^2_{(n-1)}$ değişkenidir, dolayısıyla ortalaması şudur:

$$E\left[\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2}\right] = (n-1)$$

Böylece, daha önce olduğu gibi, şunları elde ederiz:

$$\frac{(n-1)}{\sigma_X^2}E(s_X^2) = (n-1)$$

$$E(s_X^2) = \sigma_X^2$$

[9] Serbestlik derecesi ν olan ki-kare dağılımı, bağımsız standart normal rassal değişkenlerin kareleri toplamının dağılımıdır.

s_X^2 'nin varyansını bulmak için şunu yazarız:

$$\text{Var}\left[\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2}\right] = 2(n-1)$$

Öyleyse

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma_X^4}\text{Var}(s_X^2) = 2(n-1)$$

böylece

$$\text{Var}(s_X^2) = \frac{2\sigma_X^4}{(n-1)}$$

olur. Dolayısıyla, örneklem varyansının örnekleme dağılımının varyansını bulmada χ^2 dağılımının özelliklerinden yararlanılır.[10]

χ^2 dağılımının anakütle katsayısı ν, **serbetlik derecesi** sayısı diye bilinir. Bu terimleri anlayabilmek için örneklem varyansına bakalım. O da

$$(X_1 - \overline{X}),\ (X_2 - \overline{X}),\ldots,\ (X_n - \overline{X})$$

büyüklüklerinin karelerini içerir. Öyleyse, örneklem varyansını hesaplamada bu n tane bilgi kullanılır. Ancak, ($\overline{X}$ tanımı gereği) bunların toplamının 0 olması gerektiğinden birbirinden *bağımsız* değillerdir. Demek ki, $(X_i - \overline{X})$'lerden herhangi $(n-1)$ tanesini bilirsek, geri kalan bir taneyi ilk $(n-1)$ taneden hesaplayabiliriz. Sözgelimi,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$$

olduğuna göre şu yazılabilir:

$$X_n - \overline{X} = -\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \overline{X})$$

n tane $(X_i - \overline{X})$ büyüklüğü, $(n-1)$ tane bağımsız bilgiye eşdeğerdir. Durum şöyle ele alınabilir: Bilinmeyen σ_X^2 için çıkarsama yapmak istiyoruz. Anakütle ortalaması μ_X biliniyorsa, bu çıkarsama

$$(X_1 - \mu_X),\ (X_2 - \mu_X),\ldots,\ (X_n - \mu_X)$$

değerlerinin karelerine dayandırılabilir. Bu büyüklükler birbirinden bağımsızdır ve σ_X^2'nin tahmini için n serbestlik derecemiz vardır. Ama, anakütlenin bilin-

[10] Bu bulgunun yalnızca anakütle normal dağıldığı zaman geçerli olduğunu unutmayın.

meyen ortalaması yerine uygulamada kendi tahmini olan $\overline{X}$ kullanıldığından, bu serbestlik derecelerinden biri kullanılmış ve anakütle varyansına ilişkin çıkarsama yapabilmek için elimizde $(n-1)$ tane bağımsız bilgi eşdeğeri kalmış olur. Öyleyse, $(n-1)$ serbestlik derecemiz vardır denir.

Bir χ^2 rassal değişkeni için zaman zaman birikimli dağılım fonksiyonunun değerlerini bulmamız gerekir. Bu tür problemler çoğunlukla, belirlenmiş olasılıklara karşılık gelen eşik değerlerinin belirlenmesi biçiminde dile getirilir. Sözgelimi, bir rassal değişken χ^2_{10} dağılımına uyuyorsa,

$$P(\chi^2_{10} < K) = 0.90$$

ya da aynı anlama gelen

$$P(\chi^2_{10} > K) = 0.10$$

olasılıklarını sağlayan K sayısına gereksinmemiz olabilir. Ek Çizelge 5'te ki-kare rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu, bu eşik değerleri doğrudan okunabilecek biçimde verilmiştir. $P(\chi^2_{10} > K) = 0.10$ ise, χ^2_{10} rassal değişkeni için Çizelge 5'ten $K = 15.99$ okunabilir. Bu olasılık, Çizim 6.7'de bu rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu altında bir alan olarak gösterilmiştir.

Örneklem Varyansının Örnekleme Dağılımı

Varyansı σ_X^2 olan bir anakütleden rassal seçilmiş n gözlemli bir örneklemin örneklem varyansını s_X^2 ile gösterelim. Bu durumda,

(i) s_X^2'nin örnekleme dağılımının ortalaması σ_X^2'dir:

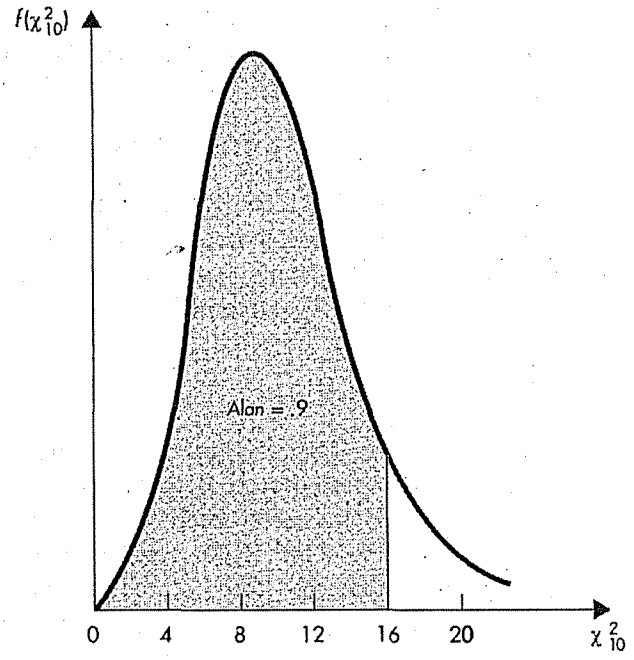
$$E(s_X^2) = \sigma_X^2$$

(ii) s_X^2'nin örnekleme dağılımının varyansı, arkada yatan anakütle dağılımına bağlıdır. Bu dağılım normal ise bu varyans şöyle bulunur:

$$\text{Var}\,(s_X^2) = \frac{2\sigma_X^4}{n-1}$$

(iii) Anakütle normal dağılıyorsa, $\dfrac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2}$ dağılımı $\chi^2_{(n-1)}$'e uyar.

Bir anakütleden rassal bir örneklem çekip, anakütle varyansına ilişkin çıkarsama yapmak istediğimizi düşünün. Arkada yatan dağılımın normal olduğu varsayımı veriyken, ki-kare dağılımı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi kullanılabilir.



ÇİZİM 6.7 Serbestlik derecesi 10 olan bir ki-kare rassal değişkeninin 15.99'dan küçük olma olasılığı (0.9)

ÖRNEK 6.6

Bir üretim süreci düzgün işlerken, üretilen parçaların ohm cinsinden direnci, standart sapması 3.6 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Dört parçalık bir rassal örneklem alınmıştır. Örneklem varyansının 30'dan büyük çıkma olasılığı kaçtır?

Şunlar bilinmektedir:

$$n = 4 \qquad \sigma_X = 3.6 \qquad \sigma_X^2 = (3.6)^2 = 12.96$$

Aranan olasılık şöyle bulunur:

$$P(s_X^2 > 30) = P\left(\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} > \frac{30(n-1)}{\sigma_X^2}\right)$$

$$= P\left(\chi_3^2 > \frac{(30)(3)}{12.96}\right)$$

$$= P(\chi_3^2 > 6.94)$$

Ek Çizelge 5'ten şunları okuyabiliriz:

$$P(\chi_3^2 > 6.25) = 0.10 \qquad P(\chi_3^2 > 7.81) = 0.05$$

Öyleyse, 6.94 değeri 6.25 ile 7.81 arasında olduğundan, aradığımız olasılık 0.05 ile 0.10 arasında olmalıdır:

$$0.05 < P(s_X^2 > 30) < 0.10$$

Tam olasılığı bulmak için çizelge yeterli değildir ama bunun için pek çok bilgisayar programı vardır. Dikkat ederseniz, ancak ve ancak örneklem standart sapması $\sqrt{30} = 5.48$'den büyükse, örneklem varyansı da 30'dan büyük olabilir. Bunun sonucunda şu yazılabilir:

$$0.05 < P(s_X > 5.48) < 0.10$$

ÖRNEK 6.7

Bir bezelye konservesi üreticisi, ürünün ortalama ağırlığının, kutunun üstünde yazılana yakın olmasıyla ilgilenmektedir. Buna ek olarak kutu ağırlıklarının fazla değişmemesini de istemektedir; aksi halde ürünün büyük bir oranı belirtilen ağırlıktan önemli ölçüde uzaklaşacaktır. Anakütledeki ağırlıkların normal dağıldığını düşünelim. Yirmi kutuluk rassal bir örneklem tartıldığında aşağıdaki eşitlikleri sağlayan K_1 ve K_2 değerlerini bulun:

$$P\left(\frac{s_X^2}{\sigma_X^2} < K_1\right) = 0.05 \qquad \text{ve} \qquad P\left(\frac{s_X^2}{\sigma_X^2} > K_2\right) = 0.05$$

Şunu biliyoruz:

$$0.5 = P\left(\frac{s_X^2}{\sigma_X^2} < K_1\right) = P\left[\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} < (n-1)K_1\right]$$

$$= P[\chi^2_{(n-1)} < (n-1)K_1]$$

Burada $n = 20$ örneklem büyüklüğü, $\chi^2_{(n-1)}$ ise $(n-1) = 19$ serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkenidir. Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$0.05 = P(\chi^2_{19} < 19K_1) \qquad \text{ya da} \qquad 0.95 = P(\chi^2_{19} > 19K_1)$$

Dolayısıyla Ek Çizelge 5'ten

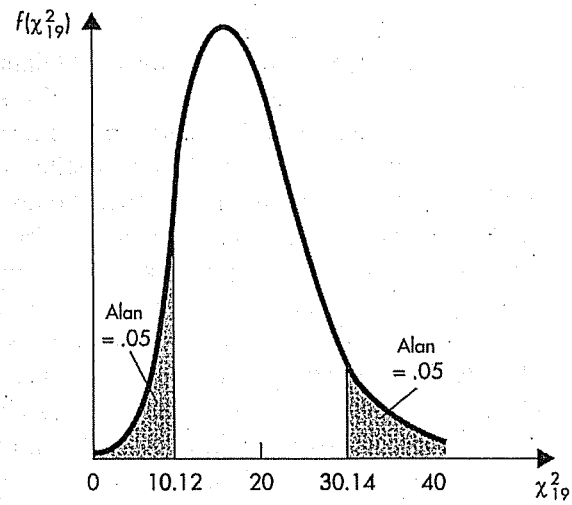
$$19K_1 = 10.12$$

$$K_1 = 0.533$$

bulunur. Varılan sonuç şudur: Örneklem varyansının, anakütle varyansınınn %53.3'ünden daha küçük olma olasılığı 0.05'tir.

Ayrıca K_2 sayısını da şu koşulla bulmak istiyoruz:

$$0.05 = P\left(\frac{s_X^2}{\sigma_X^2} > K_2\right)$$



ÇİZİM 6.8 Serbestlik derecesi 19 olan bir ki-kare rassal değişkeninin 10.12'den küçük ve ayrıca 30.14'ten büyük olma olasılığı 0.05'tir.

Bunun eşdeğerini şöyle yazabiliriz:

$$0.5 = P\left[\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} > (n-1)K_2\right]$$

$$= P[\chi^2_{(n-1)} > (n-1)K_2]$$

Böylece, $n = 20$ olduğundan,

$$0.05 = P(\chi^2_{19} > 19K_2)$$

bu durumda Ek Çizelge 5'ten

$$19K_2 = 30.14$$

$$K_2 = 1.586$$

bulunur. Bunun da anlamı şudur, örneklem varyansımn, anakütle varyansından %58.6 daha büyük olmasının olasılığı 0.05'tir.

Bu olasılıklar, Çizim 6.8'de, χ^2_{19} dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu altındaki alanlar olarak gösterilmiştir.

Şunu vurgulamak gerekir ki bu örneklerin tekniği, bu bölümün daha önceki örneklerindekilere göre uygulamada o kadar yaygın kullanılmaz. İçinden örneklem seçilen anakütlenin normal dağıldığı varsayımı burada daha önemlidir. Normal bir dağılımdan çekilen bir örneklemin ortalaması ile varyansına ilişkin olasılık söylemlerinin nasıl oluşturulduğunu görmüş bulunuyoruz. Ancak, bunlardan varyansa ilişkin olanlar, içinden örneklem çekilen dağılımın normallikten

uzaklaşmasından, ortalamaya ilişkin olanlara göre çok daha fazla etkilenmektedir. Örneklem ortalamasına ilişkin olasılık söylemleri oluşturulurken, merkezî limit teoremi, orta büyüklükteki örneklemlerde, örneklem alınan dağılımın normallikten bir miktar ayrılmasının türetilen olasılık söyleminin geçerliliği üzerinde yalnızca küçük bir etki yarattığı konusunda bize güvence verir. Bunun sonucunda, örneklem ortalamasına dayanan bir çıkarsamanın, anakütle dağılımının normallikten uzaklaşmasına karşı *dirençli* olduğunu, ama örneklem varyansına dayanan çıkarsamalarda böyle olmadığını söyleyebiliriz.

Yine de, uygulamada anakütle varyansı sıklıkla bir araştırmacının doğrudan ilgi alanı içindedir. Şurası unutulmamalıdır ki, eldeki örneklem pek büyük değilse, anakütlede normallikten ciddi uzaklaşmalar, bu altbölümde anlatılan tekniğe dayalı çözümlemelerin sonuçlarını büyük ölçüde geçersiz kılabilir. Dolayısıyla özenli bir çözümlemecinin, bu koşullarda çıkarsama yaparken kesin konuşmaması gerekir.

ALIŞTIRMALAR

35. Bir üretim süreci, içindeki katışıklılık oranı, varyansı 1.75 olan bir normal dağılıma uyan bir kimyasal maddeyi partiler halinde üretmektedir. Bu partilerden yirmilik bir rassal örneklem alınmıştır. Örneklem varyansının 3.10'u geçme olasılığını bulun.

36. Belli bir pay senedinin aylık getiri oranları birbirinden bağımsız olup 1.7 standart sapmalı bir normal dağılıma uymaktadır. 12 aylık bir örneklem seçilmiştir.
(a) Örneklem standart sapmasının 2.5'ten küçük olma olasılığını bulun.
(b) Örneklem standart sapmasının 1.0'dan büyük olma olasılığını bulun.

37. Yeni mezun muhasebecilerin ilk yılki maaşlarının 2,500 $ standart sapmalı bir normal dağılıma uyduğuna inanılmaktadır. Onaltı gözlemli rassal bir örneklem çekilmiştir.
(a) Örneklem standart sapmasının 3,000 $'dan çok olma olasılığını bulun.
(b) Örneklem standart sapmasının 1,500 $'dan az olma olasılığını bulun.

38. 100 tane çoktan seçmeli sorudan oluşan bir matematik sınavına, büyük bir üniversitenin yeni öğrencilerinin hepsi girmektedir. Başlangıçta bir ön araştırmada yirmi öğrencilik rassal bir örneklem bu sınava girmiştir. Üniversiteye yeni giren bütün öğrencilerin anakütlesinde doğru yanıt sayısının dağılımı, varyansı 250 olan bir normal dağılımdır.
(a) Örneklem varyansının 100'den küçük olma olasılığı kaçtır?
(b) Örneklem varyansının 500'den büyük olma olasılığı kaçtır?

39. Büyük bir kentteki tek aileli evlerde yaz ayları elektrik faturalarının 100 $ standart sapmalı bir normal dağılıma uyduğu bulunmuştur. 25 faturalık rassal bir örneklem çekilmiştir.
(a) Örneklem standart sapmasının 75 $'dan az olma olasılığını bulun.
(b) Örneklem standart sapmasının 150 $'dan çok olma olasılığını bulun.

40. Dönem sonu sınavlarından önceki hafta öğrencilerin televizyon seyretme süreleri 4.5 saat standart sapmalı bir normal dağılıma uymaktadır. Otuz öğrencilik bir rassal örneklem seçilmiştir.

(a) Örneklem standart sapmasının 3.5 saati aşma olasılığı 0.95'ten yüksek midir?

(b) Örneklem standart sapmasının 6 saatten az olma olasılığı 0.95'ten yüksek midir?

41. Çizelge 6.1'de, işçilerin deneyim sürelerini gösteren $N = 6$ gözlemli bir anakütleden çekilebilecek dört gözlemli onbeş örneklemi ele almıştık. Bu altı gözlem için anakütle varyansı

$$\sigma_X^2 = \frac{47}{12}$$

idi. Onbeş örneklemin her biri için örneklem varyansını hesaplayın. Bu onbeş varyansın ortalamasını bularak, örneklemdeki gözlem sayısının anakütle içindeki oranı küçük değilken, örneklem varyansının beklenen değerinin anakütle varyansına eşit olmadığını gösterin. [Aslında, burada sizin de doğrulayabileceğiniz gibi $E(s_X^2) = N\sigma_X^2/(N-1)$'dir.]

42. Bir üretim sürecinde, süresi bir normal dağılıma uyan zamanlama sinyalleri veren elektronik parçalar üretilmektedir. Altı parçalık rassal bir örneklem alınıp zamanlama sinyallerinin süreleri ölçülmüştür.

(a) Örneklem varyansının, anakütle varyansının yüzde kaçından büyük olma olasılığı 0.05'tir?

(b) Örneklem varyansının, anakütle varyansının yüzde kaçından küçük olma olasılığı 0.10'dur?

43. Pay senedi yatırım fonlarından on tanesi rassal örneklemeyle seçilmiştir. Anakütledeki bütün pay senedi yatırım fonlarının getiri oranları normal bir dağılıma uyuyor olsun.

(a) Örneklem varyansının, anakütle varyansının yüzde kaçından büyük olma olasılığı 0.10'dur?

(b) Şu tümceyi tamamlayacak a ve b gibi bir sayı çifti bulun: Örneklem varyansının, anakütle varyansının % a'sı ile % b'si arasında olma olasılığı 0.95'tir?

(c) Yirmi yatırım fonu içeren bir örneklem çekilmiş olsun. Hiç hesaplama yapmadan, bunun (b)'deki yanıtınızı nasıl değiştireceğini belirtin.

44. Onbeş iktisatçıdan oluşan rassal bir örneklemdeki her iktisatçıdan gelecek yıl için enflasyon oranı kestirimi yapması istenmiştir. İktisatçılar anakütlesinin kestirimlerinin, %1.8 standart sapmalı bir normal dağılıma uyduğunu varsayalım.

(a) Örneklem standart sapmasının hangi sayıdan büyük olma olasılığı 0.01'dir?

(b) Örneklem standart sapmasının hangi sayıdan küçük olma olasılığı 0.025'tir?

(c) Örneklem standart sapmasının aralarında kalma olasılığı 0.90 olan bir sayı çifti bulun.

45. Hassas bir ölçü aygıtı, oniki kere ölçüm yapılarak denenmektedir. Ölçümler normal dağılıma uymaktadır.

(a) Örneklem varyansının, anakütle varyansının yüzde kaçından büyük olma olasılığı 0.95'tir?

(b) Örneklem varyansının, anakütle varyansının yüzde kaçından büyük olma olasılığı 0.90'dır?

(c) Şu tümceye uyan a ve b gibi bir sayı çifti belirleyin: Örneklem varyansının, anakütle varyansının % a'sı ile % b'si arasında kalma olasılığı 0.95'tir.

46. Bir ilâç şirketi aktif madde içeren haplar üretmektedir. Şirket, bu maddenin hap başına ortalama ağırlığıyla ilgilenmekte, aynı zamanda varyansın (miligramın karesi cinsinden) 1.5'i aşmamasını da istemektedir. Yirmi haplık bir örneklem alınmış, örneklem varyansı 2.05 bulunmuştur. Anakütle varyansı aslında 1.5 iken, örneklem varyansının bu kadar ya da daha yüksek çıkmasının şansı nedir? Anakütle dağılımının normal olduğunu varsayın.

47. Bir üretici, katışıklılık oranı (librenin karesi cinsinden) 15.4 varyanslı partiler gönderen bir satıcıdan hammadde almaktadır. Rakip bir satıcı, bu hammaddeyi aynı ortalama katışıklılık oranıyla ama daha düşük bir varyansla sağlayabileceğini ileri sürmektedir. İkinci satıcıdan alınan yirmibeş partilik bir rassal örneklemde katışıklılık oranının varyansı 12.2 bulunmuştur. Anakütledeki varyans aslında 15.4 iken, örneklem varyansının bu kadar ya da daha düşük bulunmasının olasılığı kaçtır?

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

48. Örneklem ortalamasının bir örnekleme dağılımı vardır sözü ne anlatmak istemektedir?

49. Bir yatırımcı, altı değişik para piyasası fonu üzerinde düşünmektedir. Bu fonların vadeleri gün olarak şöyledir:

41 39 35 35 33 38

Bu fonlardan ikisi rassal olarak seçilecektir.

(a) Kaç tane iki fonlu örneklem çekilebilir?

(b) Çekilebilecek bütün örneklemleri sıralayın.

(c) Örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının olasılık fonksiyonunu çıkarın.

(d) Örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının ortalamasının, anakütle ortalamasına eşit olduğunu doğrudan gösterin.

50. Merkezî limit teoreminin örneklem ortalamasının örnekleme dağılımıyla ne ilgisi vardır?

51. Alıştırma 49'a dönelim. İki gözlemli örneklemler için ortalama vadesi 36 günden uzun olan fonların örneklem oranının örnekleme dağılımının olasılık fonksiyonunu çıkarın. Ayrıca, örneklem oranının örnekleme dağılımının ortalamasının, anakütle oranına eşit olduğunu doğrudan gösterin.

52. Bir hukuk fakültesinin öngördüğü bir yetenek sınavına giren bütün adayların aldığı notlar, ortalaması 420, standart sapması 100 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Rassal olarak yirmibeş not seçilmiştir.

(a) Örneklemdeki ortalama notun 450'den yüksek çıkma olasılığını bulun.

(b) Örneklemdeki ortalama notun 400 ile 450 arasında çıkma olasılığını bulun.

(c) Örneklemdeki ortalama notun kaçtan büyük çıkma olasılığı 0.10'dur?

(d) Örneklemdeki ortalama notun kaçtan küçük çıkma olasılığı 0.10'dur?
(e) Notların örneklem standart sapmasının kaçtan büyük çıkma olasılığı 0.05'tir?
(f) Notların örneklem standart sapmasının kaçtan küçük çıkma olasılığı 0.05'tir?
(g) Rassal örneklem olarak elli not alınsaydı, örneklem ortalama notunun 450'den büyük çıkma olasılığı, (a)'daki doğru yanıttan daha mı büyük, daha mı küçük yoksa ona eşit mi olurdu? Burada ayrıntılı hesaplamalara girmek gereksizdir. Akıl yürütmenizi yansıtacak bir çizim düzenleyin.

53. Bir şirket evlerdeki hava temizleyicilerinin bakımını yapmaktadır. Evlerden gelen çağrılarda bakım süresinin, ortalaması 60, standart sapması 10 dakika olan bir normal dağılıma uyduğu bulunmuştur. Dört çağrılık rassal bir örneklem seçilmiştir.
(a) Örneklemdeki ortalama bakım süresinin 65 dakikadan uzun olma olasılığı kaçtır?
(b) Örneklemdeki ortalama bakım süresinin kaç dakikadan uzun olma olasılığı 0.10'dur?
(c) Bakım sürelerinin örneklem standart sapmasının kaç dakikadan uzun olma olasılığı 0.10'dur?
(d) Bakım sürelerinin örneklem standart sapmasının kaç dakikadan kısa olma olasılığı 0.10'dur?
(e) Bu çağrılardan ikiden çoğunun 65 dakikadan uzun sürme olasılığı kaçtır?

54. ABD pay senedi yatırım fonlarının getiri yüzdeleri belli bir yılda, ortalaması 14.8, standart sapması 6.3 olan bir normal dağılıma uymaktadır? Bu yatırım fonlarından dokuz tanelik rassal bir örneklem seçilmiştir.
(a) Örneklemdeki ortalama getiri yüzdesinin 19.0'dan yüksek çıkma olasılığı kaçtır?
(b) Örneklemdeki ortalama getiri yüzdesinin 10.6 ile 19.0 arasında çıkma olasılığı kaçtır?
(c) Örneklemdeki ortalama getiri yüzdesinin kaçtan küçük çıkmasının olasılığı 0.25'tir?
(d) Getiri yüzdelerinin örneklem standart sapmasının kaçtan büyük çıkmasının olasılığı 0.10'dur?
(e) Bu fonlardan yirmisi örnekleme seçilseydi, örneklemdeki getiri oranı ortalamasının 19.0'dan büyük çıkma olasılığı, (a)'daki doğru yanıttan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa ona eşit mi olurdu? Akıl yürütmenizi gösteren bir çizim düzenleyin.

55. Belli bir elektronik parçanın ömrünün, ortalaması 600, standart sapması 400 saat olan bir normal dağılıma uyduğu bilinmektedir.
(a) Onaltı parçalık bir rassal örneklemde örneklem ortalamasının 1,500 saatten uzun olma olasılığını bulun.
(b) Onaltı parçalık bir rassal örneklemde örneklem ortalamasının kaç saatten uzun olma olasılığı 0.15'tir?
(c) Onaltı parçalık bir rassal örneklemde örneklem standart sapmasının kaç saatten uzun olma olasılığı 0.10'dur?
(d) 121 parçalık rassal bir örneklemde, örneklemdeki parçaların yarıdan azının 1,500 saatten uzun ömürlü olma olasılığını bulun.

56. Anakütlenin varyansı σ_X^2 iken, N gözlemli bir anakütleden çekilen n gözlemli bir örneklemin örneklem varyansının örnekleme dağılımının ortalamasını çıkarmak için Ek A6.1'e başvurun. Ek A6.1'deki akıl yürütmeyi uygun biçimde değiştirerek

$$E(s_X^2) = N\sigma_X^2/(N-1)$$

olduğunu gösterin. $n = N$ iken bu bulgunun sezgisel olarak akla yakınlığına dikkat edin.

57. İnsanların belli bir vergi formunu doldurmaları için geçen sürenin, ortalaması 100, standart sapması 30 dakika olan bir normal dağılıma uyduğu bulunmuştur. Bu formu dolduranlardan dokuz kişilik rassal bir örneklem seçilmiştir.

(a) Örneklemdeki ortalama sürenin iki saatten uzun olma olasılığı kaçtır?

(b) Örneklemdeki ortalama sürenin kaç dakikadan uzun olma olasılığı 0.20'dir?

(c) Bu sürenin örneklem standart sapmasının kaç dakikadan uzun olma olasılığı 0.05'tir?

(d) Bu sürenin örneklem standart sapmasının kaç dakikadan kısa olma olasılığı 0.05'tir?

58. Belli bir fakültedeki son sınıf öğrencilerinin %80'inin mezun olmadan bir iş önerisini kabul ettikleri anlaşılmıştır. İşe girenlerin ücretleri, ortalaması 29,000, standart sapması 4,000 $ olan bir normal dağılıma uymaktadır.

(a) Altmış son sınıf öğrencisinden oluşan bir örneklemde, bu öğrencilerin %70'ten azının bir iş önerisini kabul etmiş olma olasılığı kaçtır?

(b) Altı son sınıf öğrencisinden oluşan bir örneklemde, bu öğrencilerin %70'ten azının bir iş önerisini kabul etmiş olma olasılığı kaçtır?

(c) Bir iş önerisini kabul etmiş altı son sınıf öğrencisinden oluşan bir örneklemde, ortalama ücretin 30,000 $'dan yüksek olma olasılığı kaçtır?

(d) Bir son sınıf öğrencisi rassal olarak seçilmiştir. Bu öğrencinin 30,000 $'dan yüksek ücretli bir iş önerisini kabul etmiş olma olasılığı kaçtır?

59. Ürün paketlemede kullanılan plastik torbalar, dayanma gücü, inç kare başına 1.8 libre standart sapması olan bir normal dağılıma uyacak biçimde üretilmektedir. Onaltı torbalık bir rassal örneklem seçilmiştir.

(a) Dayanma gücünün örneklem standart sapmasının kaçtan büyük olmasının olasılığı 0.01'dir?

(b) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından ne kadar fazla olmasının olasılığı 0.15'tir?

(c) Örneklem ortalamasının, anakütle ortalamasından ne kadar farklı olmasının olasılığı 0.05'tir?

60. Bir kalite denetimi yöneticisi, belli bir süreçte üretilen hapların içindeki aktif bir maddenin miktarındaki değişkenlikle ilgilenmektedir. 21 haplık rassal bir örneklem seçilmiştir. Bu aktif madde miktarının örneklem varyansının, anakütle varyansının iki katından büyük olma olaslığı kaçtır?

61. Gözü bağlı yapılan bir tad denemesinde iki marka biradan hangisinin üstün tutulduğunu belirlemek üzere 100 öğrencilik bir örneklem seçilmiştir. Öğrenci anakütlesinin %50'sinin A marka birayı üstün bulduğunu düşünelim.

(a) Örneklemdeki öğrencilerden %60'tan çoğunun A marka birayı seçme olasılığı kaçtır?

(b) Örneklemde A marka birayı seçen öğrenci oramnın %45 ile 55 arasında olma olasılığı kaçtır?

(c) Elde yalnızca on öğrencilik bir örneklem olduğunu düşünelim. Olasılık hesaplama yönteminin, (a) ile (b)'deki sonuçlarla karşılaştırıldığında, nasıl değiştiğini gösterin.

62. Çok sayıda öğrencinin girdiği bir sınavın sonuçları, standart sapması 40 olan bir normal dağılıma uymaktadır. Anakütle not ortalamasını kestirmek üzere onaltı gözlemli bir örneklem seçilmiştir. Örneklem ortalamasını $\overline{X}$ ile gösterelim. Anakütle ortalamasının $(\overline{X} - 10)$ ile $(\overline{X} + 10)$ aralığında bulunma olasılığı kaçtır?

63. Bir sıvı temizlik maddesi üreticisi, bu sıvının satıldığı kaplardaki ortalama ağırlığın en az 30 ons olduğunu ileri sürmektedir. Bu ağırlığın anakütlede standart sapması 1.3 ons olan normal bir dağılıma uyduğu bilinmektedir. Üreticinin savını sınamak üzere onaltı kaplık rassal bir örneklem alınmıştır. Örneklemdeki ağırlık ortalaması 29.5 onsun altında çıkarsa bu sav sorgulanacaktır. Aslında anakütledeki ortalama ağırlık 30 ons iken, bu savın sorgulanma olasılığı kaçtır?

64. Belli bir yılda ev satışlarının %40'ı kısmen satıcı tarafından finanse edilmiştir. 250 satışlık rassal bir örneklem incelenmiştir.
   (a) Örneklem oranının kaçtan büyük olma olasılığı 0.8'dir?
   (b) Örneklem oranının kaçtan küçük olma olasılığı 0.9'dur?
   (c) Örneklem oranının, anakütle oranından ne kadar farklı olmasının olasılığı 0.7'dir?

65. Bir aday, seçmenlerin %30'unun başlangıç desteğini sağlayabilirse bir eyalette seçim kampanyasına girişecektir. 300 seçmenlik rassal bir örneklem alınarak, örneklemde adayı destekleme oranının 0.28'i geçmesi durumunda kampanya yapılmasına karar verilmiştir.
   (a) Aslında başlangıç desteği %20 iken kampanya yapma kararı verme olasılığı kaçtır?
   (b) Aslında başlangıç desteği %40 iken kampanya yapmama kararı verme olasılığı kaçtır?

66. Belli bir dergiye abone olanların gelirlerinin, standart sapması 6,600 $ olan bir normal dağılıma uyduğu bilinmektedir. Yirmibeş abonelik rassal bir örneklem alınmıştır.
   (a) Bunların gelirlerinin örneklem standart sapmasının 4,000 $'dan büyük olmasının olasılığı kaçtır?
   (b) Bunların gelirlerinin örneklem standart sapmasının 6,000 $'dan küçük olmasının olasılığı kaçtır?

67. Bir üretim sürecinde bir kimyasal madde partiler halinde üretilmektedir. Deneme yapmak için yirmi partilik örneklemler alınmıştır. Örneklenen partilerde katışıklılık oranının standart sapması %2.5'i geçerse, bütün üretim süreci baştan sona incelenmektedir. Katışıklılık oranının anakütle dağılımının normal olduğunu varsayalım. Anakütledeki katışıklılık oranı %2 iken, üretim sürecinin bütünüyle incelenme olasılığı kaçtır?

EK A6.1

Bu ekte örneklem varyansının örnekleme dağılımının ortalamasının anakütle varyansına eşit olduğu gösterilecektir. Örneklemdeki gözlemlerin örneklem ortalamasından sapmaların karelerinin toplamının beklenen değerini, yani aşağıdaki toplamın beklenen değerini bulmakla işe başlayalım.

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu_X)-(\overline{X}-\mu_X)]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu_X)^2-2(\overline{X}-\mu_X)(X_i-\mu_X)+(\overline{X}-\mu_X)^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2-2(\overline{X}-\mu_X)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu_X)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2-2n(\overline{X}-\mu_X)^2+n(\overline{X}-\mu_X)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2-n(\overline{X}-\mu_X)^2$$

Bunların beklenen değerini alırsak şunu buluruz:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2\right]-nE[(\overline{X}-\mu_X)^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu_X)^2]-nE[(\overline{X}-\mu_X)^2]$$

Şimdi, her bir $(X_i-\overline{X})^2$'nin beklenen değeri, anakütle varyansı σ_X^2 ve $(\overline{X}-\mu_X)^2$'nin beklenen değeri de örneklem ortalamasının varyansı, yani σ_X^2/n'dir. Öyleyse, şunu buluruz:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=n\sigma_X^2-\frac{n\sigma_X^2}{n}=(n-1)\sigma_X^2$$

Son olarak, örneklem varyansının beklenen değeri şöyle bulunur:

$$E(s_X^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma_X^2 = \sigma_X^2$$

Bu da en başta aradığımız sonuçtur.

BÖLÜM 7

Nokta Tahmini

7.1 GİRİŞ

Bu bölümde, rassal bir örneklemin içerdiği bilgiye dayanarak bir anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapmanın olanaklarını araştıracağız. Dikkatimizi anakütlenin belli özellikleri, ya da **anakütle katsayıları** üzerinde yoğunlaştıracağız. İlgilenilen anakütle katsayıları, anakütle ortalaması ya da varyansını, yahut bazı nitelikleri taşıyan gözlemlerin anakütle içindeki oranını içerir. Sözgelimi şunlara ilişkin çıkarsamalar yapmak isteyebiliriz:

1. Belli bir semtteki bütün ailelerin ortalama geliri
2. Kimyasal bir maddenin üretim partilerindeki katışıklılık düzeyinin değişkenliği
3. Bir şirkette çalışanlar arasında prim sisteminin değiştirilmesinden yana olanların oranı

Anakütleye ilişkin yapılan her çıkarsama zorunlu olarak örneklem **istatistik**lerine —yani örneklem bilgisinin fonksiyonlarına— dayanacaktır. Uygun istatistiğin seçimi ilgilenilen anakütle katsayısına bağlı olacaktır. Gerçek anakütle parametresi bilinemeyecek, örneklemenin amacı bu değeri kestirmek olacaktır.

Tanımlar

Bir anakütle katsayısının bir **tahmin edicisi**, örneklem bilgisine dayanan rassal bir değişken olup, bunun gerçekleşmeleri anakütle katsayısına yakınsama sağlar. Bu rassal değişkenin belli bir gerçekleşmesine **tahmin** denir.

Tahmin edici ile *tahmin* terimleri arasındaki farkı belirginleştirmek amacıyla, bir semtteki bütün ailelerin ortalama gelirinin, yirmi ailelik bir örnekleme dayanarak tahmin edilmesini ele alalım. Tahminimizi örneklem ortalamasına dayandırmamız akla yakın görünmektedir, öyleyse anakütle ortalamasının *tahmin edici*si, örneklem ortalamasıdır diyebiliriz. Örneklemi aldıktan sonra, örneklemdeki ailelerin ortalama gelirini 49,356 $ olarak bulduğumuzu düşünelim. Bu durumda anakütlenin ortalama aile gelirinin *tahmini*, 49,356 $'dır. Bu ayırımı simgesel olarak yapmış, rassal değişkeni $\bar{X}$, bunun belli bir gerçekleşmesini ise $\bar{x}$ ile göstermiştik.

Bilinmeyen bir anakütle katsayısının tahmin edilmesi tartışılırken iki olanak gözönüne alınmalıdır. Birincisi, örneklemden tek bir sayı, "temsil edici" ya da belki "en iyi temsil edici" olarak hesaplanabilir. Aile gelirlerinin semt ortalaması için bulunan 49,356 $'lık tahmin böyle bir tahminin örneği olabilir. Almaşık olarak, gerçek katsayıyı içinde barındırdığına epeyce güvendiğimiz bir aralık bulmaya çalışabiliriz. Bu bölümde ilk tür tahmin sorununu ele alacak, aralık tahmini konusunu Bölüm 8'e bırakacağız.

Tanımlar

Bir anakütle katsayısının **nokta tahmin edicisi**, örneklem ortalamasının tek bir sayı veren bir fonksiyonudur. Buna karşılık olan gerçekleşmeye ise anakütle katsayısının **nokta tahmini** denir.

Semt aile geliri örneğinde, tahmin edilecek katsayı, anakütlenin ortalama aile geliridir. Kullanılan nokta tahmin edicisi, örneklem ortalaması, bulunan nokta tahmini de 49,356 $'dır.

Açıklamalara örnek vermek amacıyla, bu bölümde, Bölüm 6'da hepsiyle karşılaştığımız, dört nokta tahmin edicisini ele alacağız. Bunlar örneklem ortalaması, varyansı, standart sapması ve oramdır. Çizelge 7.1 kullandığımız simgeleri özetler.

ÇİZELGE 7.1 Anakütle katsayıları, nokta tahmin edicileri ve tahminlerinin simgeleri

ANAKÜTLE KATSAYISI	TAHMİN EDİCİ	TAHMİN
Ortalama (μ_X)	$\overline{X}$	$\overline{x}$
Varyans (σ_X^2)	s_X^2	s_x^2
Standart sapma (μ_X)	s_X	s_x
Oran (p)	$\hat{p}_X$	$\hat{p}_x$

ÖRNEK 7.1

New York Borsası'nda belli bir günde alım-satımı yapılan on pay senetlik rassal bir örneklemin fiyat-kazanç oranları şöyledir:

10 16 5 10 12 8 4 6 5 4

Anakütle ortalamasının, varyansının, standart sapmasının ve fiyat-kazanç oranı 8.5'i aşan pay senetlerinin anakütle içindeki oranının nokta tahminlerini bulun.

Bu örneklem büyüklüklerinden ilk üçünü bulmak için hesaplamaları şu çizelgeyle gösterelim:

I	x_i	x_i^2
1	10	100
2	16	256
3	5	25
4	10	100
5	12	144
6	8	64
7	4	16
8	6	36
9	5	25
10	4	16
Toplamlar	80	782

Öyleyse şunları biliyoruz:

$$n = 10 \qquad \sum x_i = 80 \qquad \sum x_i^2 = 782$$

Demek ki anakütle ortalamasının nokta tahmini olan örneklem ortalaması şöyle bulunur:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{80}{10} = 8$$

Anakütle varyansının nokta tahmini şöyle elde edilir:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$$

$$= \frac{782 - (10)(8)^2}{9} = 15.78$$

Anakütle standart sapmasının nokta tahmini de şudur:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{15.78} = 3.97$$

Son olarak, fiyat-kazanç oranın 8.5'i geçen pay senetlerinin örneklemdeki sayısı $x = 4$'tür. Öyleyse, anakütle oranının nokta tahmini de şöyle yapılır:

$$\hat{p}_x = \frac{x}{n} = \frac{4}{10} = 0.4$$

Bu altbölümde ele alınan belli tahmin sorunları için, nokta tahminin seçimi, sezgisel mantığa dayandı. Bu bölümün geri kalanında, nokta tahmin edicilerinde aranan çeşitli özelliklerden söz edeceğiz. Bu da bize, içinde belli bir seçimin değerlendirilebileceği, almaşıkların incelenebileceği bir çerçeve sağlayacaktır. Daha baştan belirtilmelidir ki, her durumda geçerli biricik "en iyi" nokta tahmin edicisini veren tek bir düzenek yoktur. Elimizde bulunan yalnızca, belli tahmin edicileri değerlendirebileceğimiz bir ölçütler kümesidir. Çoğu genel amaç için örneklem ortalamasının, varyansının, standart sapmasının, oranının kendilerine karşılık gelen anakütle büyüklüklerinin yeterli tahmin edicileri olduğunu göreceğiz. Ancak, daha sonraki bölümlerde, uygun nokta tahmin edicisi seçiminin çok açık olmadığı tahmin sorunlarıyla karşılaşacağız.

7.2 SAPMASIZ TAHMİN EDİCİLER VE BUNLARIN ETKİNLİKLERİ

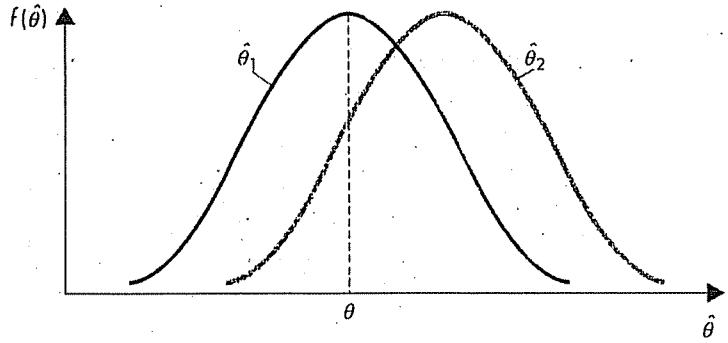
Bu açıklamalar sırasında tahmin edilecek anakütle katsayısını θ, bunun nokta tahmin edicisini de $\hat{\theta}$ ile göstereceğiz. Bölüm 6'da gördüğümüz gibi, $\hat{\theta}$ rassal değişkeninin örnekleme dağılımını bulmak bazen olanaklıdır. Tahmin edicinin örnekleme dağılımının ortalaması, bilinmeyen anakütle katsayısı θ ise, tahmin edicinin **sapmasız** olduğu söylenir.

Tanımlar

$\hat{\theta}$ tahmin edicisinin örnekleme dağılımının ortalaması, anakütle katsayısı θ ise, yani

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ise, $\hat{\theta}$'ya θ'nın **sapmasız tahmin edicisi** denir. Buna karşılık gelen nokta tahmininin de **sapmasız tahmin süreciyle** elde edildiği söylenir.



ÇİZİM 7.1 θ için sapmasız tahmin edici $\hat{\theta}_1$ ile sapmalı $\hat{\theta}_2$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonları

Beklenen değer kavramına göre, örnekleme süreci birçok kez yinelenirse, sapmasız bir tahmin ediciyle bulunan değer, *ortalama olarak*, anakütle katsayısına eşit olur. Öbür her şey aynıyken, sapmasızlığın, bir nokta tahmin edicisi için aranan bir özellik olduğunu söylemek akla uygun görünmektedir. Çizim 7.1, biri sapmasız olan, öbürü olmayan iki tahmin edicinin örnekleme dağılımlarını göstermektedir.

Ele alınan üç tahmin edici için, Bölüm 6'da şunları görmüştük:

$$E(\overline{X})=\mu_X \qquad E(s_X^2)=\sigma_X^2 \qquad E(\hat{p}_X)=p$$

Öyleyse, örneklem ortalaması, varyansı ve oranının, kendilerine karşılık gelen anakütle katsayılarının sapmasız tahmin edicileri olduğunu söyleyebiliriz. İşte bu nedenledir ki örneklem varyansını tanımlarken, örneklem ortalamasından sapmaların kareli toplamını n'ye değil $(n-1)$'e böldük. Bunlardan ikincisi sapmasız bir tahmin edici verirken, birincisi vermez. Örneklem standart sapmasının örnekleme dağılımının ortalaması, anakütle standart sapmasına eşit *değil*dir. Demek ki, örneklem standart sapması, anakütle standart sapmasının sapmasız bir tahmin edicisi değildir.

Bazı Tahmin Edicilerin Sapmasızlığı

(i) Örneklem ortalaması, varyansı ve oranı, kendilerine karşılık gelen anakütle katsayılarının sapmasız tahmin edicileridir.

(ii) Örneklem standart sapması, genellikle, anakütle standart sapmasının sapmasız bir tahmin edicisi değildir.

ÖRNEK 7.2

Örnek 7.1'deki bulgulara dönelim. Anakütle ortalaması, varyansı ve fiyat-kazanç oram 8.5'i aşan pay senetleri oranının

$$\bar{x} = 8 \qquad s_X^2 = 15.78 \qquad \hat{p}_x = 0.4$$

biçimindeki tahminlerinin, sapmasız tahmin süreçleriyle elde edildiğini artık söyleyebiliriz. Ama, anakütle standart sapmasının tahmini, $s_x = 3.97$, sapmasız bir tahmin süreciyle bulunmamıştır.

Sapmasız olmayan bir tahmin ediciye **sapmalı** denir. **Sapma**nın ölçüsü, tahmin edicinin ortalaması ile gerçek anakütle katsayısı arasındaki farktır.

Tanım

$\hat{\theta}$, θ'nın tahmin edicisi olsun. $\hat{\theta}$'daki sapma, kendi ortalaması ile θ arasındaki farktır.

$$\text{Sapma}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Buna göre sapmasız bir tahmin edicinin sapması 0 olur.

Çoğu uygulama sorununda değişik sapmasız tahmin ediciler bulunabilir ve bunlar arasından seçim yapmak için bir yöntem gerekir. Bu durumda, dağılımı, tahmin edilen anakütle katsayısının daha yakınlarında yoğunlaşan tahmin edicinin yeğlenmesi doğaldır. Böyle bir tahmin edicinin değerlerinin, tahmin edilen anakütle katsayısından belli bir sabit miktar kadar farklı çıkmasının olabilirliği, rakiplerine göre daha azdır. Varyansı yoğunlaşmanın bir ölçüsü gibi kullanırsak, bir tahmin ediciyi ötekine yeğlerken işe yarayacak bir ölçüt olarak, bir tahmin edicinin **etkinliği** kavramıyla karşılaşırız.

Tanımlar

$\hat{\theta}_1$ ile $\hat{\theta}_2$, θ'nın aynı sayıda gözleme dayanan iki sapmasız tahmin edicisi olsun. Bu durumda:

(i) Eğer

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$$

ise $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$'den **daha etkin**dir denir.

(ii) Bir tahmin edicinin ötekine göre **göreli etkinliği,** varyanslarının oranıdır:

$$\text{Göreli etkinlik} = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}$$

Çizim 7.2, iki sapmasız tahmin edicinin örnekleme dağılımlarını göstermektedir. $\hat{\theta}_1$'in daha etkin olduğu açıktır.

ÖRNEK 7.3

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan bir normal dağılımdan rassal çekilmiş bir örneklem olsun. Örneklem ortalaması $\overline{X}$, anakütle ortalamasının sapmasız bir tahmin edicisi olup varyansı şöyledir:

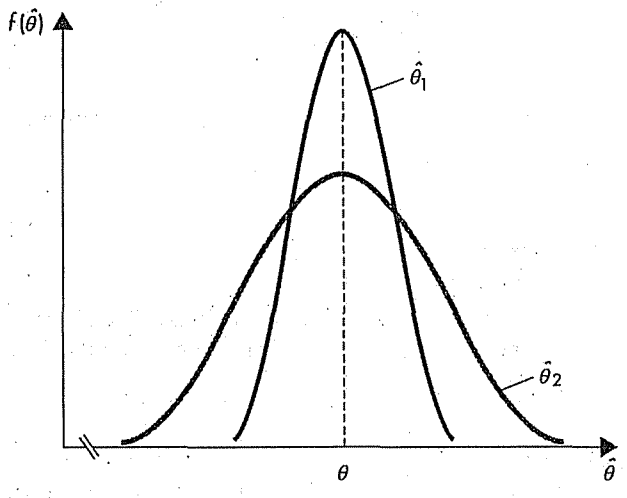
$$\text{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

Almaşık bir tahmin edici olarak örneklem gözlemlerinin ortancasını kullanabilirdik. Varyansı

$$\text{Var (Ortanca)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{1.57\sigma_X^2}{n}$$

olan bu tahmin edicinin de μ_X için sapmasız olduğu gösterilebilir, Örneklem ortalaması ortancaya göre daha etkindir. Ortalamamn ortancaya göre göreli etkinliği şöyle yazılabilir:

ÇİZİM 7.2 $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ gibi iki sapmasız tahmin edicinin olasılık yoğunluk fonksiyonları; $\hat{\theta}_1$ daha etkindir.



$$\text{Göreli etkinlik} = \frac{\text{Var (Ortanca)}}{\text{Var}(\overline{X})} = 1.57$$

Örneklem ortancasının varyansı, örneklem ortalamasınınkine göre %57 daha büyüktür. Burada, örneklem ortancasının, örneklem ortalaması kadar varyansının olabilmesi için %57 oranında daha çok gözleme dayanması gerekmektedir. Bölüm 2'de, ortancanın ortalamaya göre üstünlüğünün, uç değerlere çok daha az ağırlık vermesi olduğuna dikkat çekmiştik. Şimdi de, göreli etkinlik bağlamında, örneklem ortancasının bir merkezî eğilim ölçüsü olarak kullanılmasının yetersiz kalabileceğini görüyoruz.

Bazı tahmin sorunlarında,[1] bir öbek sapmasız tahmin edici arasından en küçük varyanslı olanı aranır. Sayıları görece az olan bazı durumlarda, bir anakütle katsayısının *bütün* sapmasız tahmin edicileri içinden en etkini seçilebilir.

Tanım

$\hat{\theta}$, θ'nın sapmasız bir tahmin edicisi ise ve başka hiçbir sapmasız tahmin edicinin varyansı daha küçük değilse, $\hat{\theta}$'ya, θ'nın **en etkin** ya da **varyansı en küçük sapmasız tahmin edicisi** denir.

En küçük varyanslı sapmasız tahmin ediciler arasında şu örnekler sayılabilir:

1. Bir normal dağılımdan örnekleme yapıldığında örneklem ortalaması
2. Bir normal dağılımdan örnekleme yapıldığında örneklem varyansı
3. Bir binom örneklem oranı

En küçük varyanslı sapmasız tahmin edicilerin kullanılması çekicidir. Ama bu tür tahmin ediciler her zaman bulunamayabilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir kimyasal maddeden sekiz partilik bir rassal örneklem katışıklılık oranı bakımından incelenmiştir. Örneklemde bulunan katışıklılık yüzdeleri şöyledir:

3.2 4.3 2.1 2.8 3.2 3.6 4.0 3.8

[1] Bunun en önemli örnekleri, Bölüm 12 ile 13'te ele alınacaktır.

(a) Örneklem ortalamasını, varyansını, standart sapmasını bulun. Katışıklılık oranı %3.75'ten yüksek olan partilerin örneklem oranını bulun.
(b) Hangi anakütle büyüklüklerinin tahminleri için, (a)'da bulduklarınızın sapmasız tahmin süreçlerine dayanırsınız?

2. Belli bir yerleşim bölgesinden rassal seçilmiş sekiz evlik bir örneklemde satış fiyatları (bin dolar cinsinden) aşağıdaki gibidir:

92 83 112 127 109 96 102 90

(a) Örneklem ortalamasını, varyansını, standart sapmasını bulun.
(b) Hangi anakütle büyüklüklerinin tahminleri için, (a)'da bulduklarınızın sapmasız tahmin süreçlerine dayanırsınız?
(c) Örneklem ortalamasının varyansının bir nokta tahminini bulmak için, bir sapmasız tahmin süreci kullanın.
(d) Bu bölgede 92,000 $'dan daha yüksek fiyata satılan evlerin anakütle oranını tahmin için bir sapmasız tahmin edici kullanın.

3. Kalabalık bir iktisat sınıfının öğrencileri, bu dersi 1 (zayıf) ile 5 (mükemmel) arasında değerlendirmiştir. Rassal seçilmiş on değerlendirme sonucu şöyledir:

3 3 4 3 5 2 4 4 4 5

(a) Örneklem ortalamasını, varyansını, standart sapmasını bulun. Ayrıca 3'ten büyük değerlerin örneklem oranını da bulun.
(b) Hangi anakütle büyüklüklerinin tahminleri için, (a)'da bulduklarınızın sapmasız tahmin süreçlerine dayanırsınız?
(c) Bir sapmasız tahmin süreci kullanıp örneklem ortalamasının varyansının nokta tahminini bulun.

4. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen iki gözlemli rassal örneklem X_1 ile X_2 olsun. μ'nün aşağıdaki üç nokta tahmin edicisini ele alalım:

$$\overline{X} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \qquad \hat{\mu}^{(1)} = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \qquad \hat{\mu}^{(2)} = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

(a) Bu üç tahmin edicinin de sapmasız olduğunu gösterin.
(b) Bu tahmin edicilerden hangisi en etkindir?
(c) $\overline{X}$'nin öbür iki tahmin ediciye göre göreli etkinliğini bulun.

5. Elm Park kasabasında onaltı ailelik bir rassal örneklemde yıllık ortalama gelir 69,200 $, standart sapma 6,200 $ bulunmuştur. Cherry Hills kasabasında on ailelik bağımsız bir örneklemde ise yıllık ortalama gelir 86,700 $, standart sapma 9,400 $ çıkmıştır. Elm Park'taki gelirlerin anakütle ortalamasını μ_1 ile, varyansını σ_1^2 ile, Cherry Hills'deki gelirlerin anakütle ortalamasını μ_2 ile, varyansını σ_2^2 ile gösterelim.
(a) Anakütle ortalamaları arasındaki fark olan $(\mu_2 - \mu_1)$'in bir nokta tahminini bulmak için bir sapmasız tahmin süreci kullanın.
(b) $\overline{X}_1$ ile $\overline{X}_2$ iki örneklem ortalamasını göstersin. Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak, $(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)$'in varyansının bir nokta tahminini bulun.

6. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen bir rassal örneklem X_1, X_2, X_3 olsun. μ'nün aşağıdaki iki nokta tahmin edicisini ele alalım:

$$\hat{\mu}^{(1)} = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6} \qquad \hat{\mu}^{(2)} = \frac{X_1 + 4X_2 + X_3}{6}$$

(a) Her iki tahmin edicinin de sapmasız olduğunu gösterin.
(b) Hangi tahmin edici daha etkindir?
(c) Göreli etkinliği bulun.
(d) Anakütle ortalamasının bu iki tahmin ediciden de daha etkin olan bir sapmasız tahmin edicisini bulun.

7. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen bir rassal örneklem X_1, X_2, X_3, X_4 olsun. μ'nün aşağıdaki iki nokta tahmin edicisini ele alalım:

$$\hat{\mu}^{(1)} = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10} \qquad \hat{\mu}^{(2)} = \frac{X_1 + 4X_2 + 4X_3 + X_4}{10}$$

(a) Her iki tahmin edicinin de sapmasız olduğunu gösterin.
(b) Hangi tahmin edici daha etkindir?
(c) Göreli etkinliği bulun.
(d) Anakütle ortalamasının bu iki tahmin ediciden de daha etkin olan bir sapmasız tahmin edicisini bulun.

8. θ bir anakütle katsayısı, $\hat{\theta}_1$ ile $\hat{\theta}_2$ de bu katsayının iki sapmasız tahmin edicisi olsun. Herhangi bir α sayısı ile $\alpha\hat{\theta}^{(1)} + (1-\alpha)\hat{\theta}^{(2)}$ tahmin edicisinin θ için sapmasız olduğunu gösterin. Böylece bir anakütle katsayısı için iki tane sapmasız tahmin edici varsa, bunların sonsuz sayıda olduğunu çıkarsayın.

9. 100 seçmenlik bir rassal örneklem, altmışsekiz seçmenin federal bütçe açığından endişe duyduğunu, altmışiki seçmenin ise federal akaryakıt vergisine karşı olduğunu ortaya çıkarmıştır. Örneklemdekilerin kırkikisi hem federal bütçe açığından endişe duymakta, hem de federal akaryakıt vergisine karşı çıkmaktadır.
(a) Hem federal bütçe açığından endişe duyan, hem de federal akaryakıt vergisine karşı çıkan seçmenlerin anakütle oranını tahmin etmek için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.
(b) Federal bütçe açığından endişe duyanlar içinde federal akaryakıt vergisine karşı çıkan seçmenlerin anakütle oranını tahmin etmek için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

10. Bir üniversite yerleşkesinde 480 erkek ile 370 kız öğrenci yurtlarda kalmaktadır. Altmış erkek öğrencilik rassal bir örneklemin yirmidördü yurt yemeklerinden hoşnuttur. Altmış kız öğrencilik rassal bir örneklemin otuzikisi yurt yemeklerinden hoşnuttur. Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak, bu yerleşkede yurtlarda kalan bütün öğrencilerin içinde yurt yemeklerinden hoşnut olanların yüzdesinin bir nokta tahminini bulun.

11. Bir kentten alınmış 100 seçmenlik rassal bir örneklem, altmışiki seçmenin emlâk vergisinde hemen bir indirime gidilmesini istediğini ortaya çıkarmıştır. Aynı anakütleden alınan 200 seçmenlik bağımsız bir rassal örneklem ise, 102 seçmenin kamu kütüphanecilik sisteminin hizmetlerinin artırılmasından yana olduğunu bul-

muştur. Emlâk vergisinde indirim isteyenlerin anakütle oranına p_1, kamu kütüphanecilik hizmetlerinin artırılmasından yana olanların anakütle oranına da p_2 diyelim.

(a) İki anakütle oranı arasındaki $(p_1 - p_2)$ farkının bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) $\hat{p}_1$ ile $\hat{p}_2$ iki örneklem oranını gösteriyorsa, $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$'nin varyansını bulun.

12. Yirmi tahvil piyasası profesyonelinden oluşan rassal bir örneklem seçilmiştir. Bu örneklemdekilerden yedisi, düşük kaliteli şirket tahvillerinden oluşan bir portföyün gelecek yıl için iyi bir yatırım olduğu kanısındadır. Oniki tahvil piyasası profesyonelinden oluşan başka bir bağımsız rassal örneklemde altı kişi, uzun dönemli devlet tahvillerinin iyi bir yatırım olduğu görüşündedir. Düşük kaliteli şirket tahvillerinden oluşan bir portföyün gelecek yıl için iyi bir yatırım olduğu kanısını taşıyan tahvil piyasası profesyonellerinin anakütle oranına p_1, uzun dönemli devlet tahvillerinin iyi bir yatırım olduğu görüşündekilerin anakütle oranına da p_2 diyelim.

(a) İki anakütle oranı arasındaki $(p_1 - p_2)$ farkının bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) $\hat{p}_1$ ile $\hat{p}_2$ iki örneklem oranını gösteriyorsa, $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$'nin varyansını bulun.

13. Altmış hesap bakiyesinden oluşan rassal bir örneklemde dört bakiye en az bir tane ciddi hata, on bakiye de en az bir hafif hata içermektedir. Bakiyelerden ikisi en az bir ciddi ve bir hafif hata içermektedir. Hiç hatasız bakiyelerin anakütle içindeki oranının bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

14. Her birinde başarı olasılığı p olan n tane bağımsız denemedeki başarı sayısı X olsun. Örneklemdeki başarı oranının varyansmın sapmasız bir tahmin edicisini bulun.

7.3 NOKTA TAHMİN EDİCİSİNİN SEÇİMİ

Uygulamada sık sık karşılaşılan, bir anakütle katsayısının uygun bir nokta tahmininin nasıl seçileceği sorunu hiç de kolay değildir, üstelik, bu kitabın kapsamını aşan bir hayli matematik incelik gerektirir. Bu önemli soruna ilişkin birkaç kısa görüş belirtmekle yetineceğiz.

Altbölüm 7.2'de, bütün sapmasız tahmin ediciler ya da belki bunların geniş bir öbeği içindeki en etkinini seçmenin çekici bir olanak olduğunu gördük. Ancak bu yaklaşım, iki nedenle, uygulamada karşımıza çıkan bütün nokta tahmini sorunları için geçerli bir reçete sunmaktan uzaktır.

Birincisi, her ne kadar, öbür her şey aynıyken, bir tahmin edicinin sapmasızlığı aranan bir özellik ise de, öbür her şey kimi zaman aynı olmayabilir. Hiçbir sapmasız tahmin edicinin yeterli sayılamayacağı ve birazcık sapmaya razı olarak çok şeyin kazanılabileceği tahmin sorunları vardır. Bir $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin, bir θ anakütle parametresine beklenen yakınlığının bir ölçüsü o tahmin edicinin **ortalama hata karesi**, yani anakütle katsayısı ile tahmin edicisinin kareli farkının beklenen değeridir:

$$\text{OHK}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Eğer tahmin edicinin varyansında yeterli ölçüde bir düşüş sağlanacaksa, sapmasız bir tahmin ediciden sapmalı birine geçilerek daha küçük bir ortalama hata karesi elde edilebileceğini gösteren şu eşitlik yazılabilir:

$$\text{OHK}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + [\text{Sapma}(\hat{\theta})]^2$$

Bir nokta tahmin edicisi seçerken akla uygun bir süreç, en küçük ortalama hata karesi taşıyanı aramaktır biçiminde bir sonuca varmak çekici görünmektedir. Ancak, bu yaklaşım kullanılamaz, çünkü bir tahmin edicinin ortalama hata karesi aslında bilinmeyen θ katsayısına dayanır. Kimi durumlarda, θ'mn alabileceği *bütün* değerler için, bir tahmin edicinin öbüründen daha küçük bir ortalama hata karesi taşıdığı gösterilebilir. Bu durumda ikinci bir tahmin edicinin **kabul edilemez** olduğu söylenir. Nokta tahmin edicilerinin bu yolla karşılaştırılması, zaman zaman, daha üstün tahmin süreçleri önermede işe yarayabilir.

En küçük varyanslı sapmasızlığı, tahmin edici seçiminde ölçüt olarak kullanmanın ikinci bir zorluğu, bu tahmin edicilerin belirlenmesinin çoğu zaman olanaksız olmasıdır. Gerçekten de, çoğu önemli sorunda, herhangi bir sonlu örneklem için, olanaklı tahmin edicilerin ortalamasının ya da varyansımn hesaplanması bile olanaksızdır. Bu durumda, tahmin edicilerin, sapma, etkinlik ya da en küçük varyans terimleriyle karşılaştırılmaları yapılamaz.

Belki de şaşırtıcı bir şey ama, sonlu örneklemlerde bir nokta tahmin edicisinin örnekleme dağılımının özelliklerinin belirtilmesi bile zorken, örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaşırken dağılımın niteliklerinin ortaya çıkarılması çoğu zaman daha kolaydır. Bu olgu, istatistikçileri, örneklem gözlemlerinin sayısı sonsuza giderken nokta tahmin edicilerinin limitteki davranışını aramaya yöneltmiştir. Tahmin edilecek bir anakütle katsayısı θ, bunun n tane gözleme dayanan tahmin edicisi de $\hat{\theta}_n$ olsun. Bu tahmin edicinin anakütle katsayısına "yakınlığı" ile ilgilendiğimize göre, $\hat{\theta}$'nın θ'dan artı değerli bir ε kadar farklı olmasının olasılığına bakalım:

$$P[|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon]$$

Ne kadar küçük olursa olsun herhangi bir artı değerli ε için, örneklem büyüklüğü n sonsuza giderken bu olasılık 1'e yaklaşıyorsa, bu tahmin edici **tutarlı** diye nitelenir. Kabaca söylenirse, tutarlı bir tahmin edicinin sonsuz büyüklükte örneklem bilgisiyle kullanımı, doğru sonucu verir. Tersine, tutarsız bir tahmin edici, sonsuz büyüklükte bir örneklem bilgisine dayansa bile, doğru sonucu vermez. Bu nedenle, bir nokta tahmin edicisinin tutarsızlığı istenmeyen bir özelliktir.

Bütün sapmasız tahmin ediciler tutarlı olmadığı gibi, bütün tutarlı tahmin ediciler de sapmasız değildir. Sözgelimi, bir normal dağılımdan örnekleme yapılırken, (örneklem ortalaması ve varyansının ilgili anakütle katsayıları için tutarlı

olması gibi), örneklem standart sapması da anakütle standart sapması için tutarlıdır. Ayrıca, örneklem oranı da anakütle oranının tutarlı bir tahmin edicisidir.

Çoğu tahmin sorununda, çeşitli tutarlı tahmin ediciler bulunabilir ve bunlar arasından seçim yapacak bir yöntem gereklidir. Tutarlı bir tahmin edici için, örneklem gözlemlerinin sayısı sonsuza giderken, $n^{-1/2}(\hat{\theta}_n - \theta)$'nın dağılımının normale yaklaştığı genellikle gösterilebilir. Öyleyse, Altbölüm 7.2'deki açıklamalara koşut olarak, limitteki bu dağılımın varyansının en küçük olduğu tutarlı tahmin ediciyi aramak doğaldır. Bu tür tahmin edicilere **kavuşmazda en iyi normal** tahmin ediciler denir. Aslında, nokta tahmin edicilerini bulmak için, çok genel koşullar altında kavuşmazda en iyi normal tahmin edicileri verdiği gösterilebilecek **en yüksek olabilirlik yöntemi** denen bir süreç vardır. Bu yaklaşımın, en uygunluk özelliği nedeniyle, uygulanması çoğunlukla çok kolay olup, yeni tahmin sorunlarına yaklaşılırken uygulanması, öteki bütün süreçlere göre daha yaygındır. Bu noktayı yeniden vurgulamayacağız ama, bu kitabın daha sonraki bölümlerinde karşılaşacağımız çoğu tahmin edici, en yüksek olabilirlik tahmin edicileri ya da onların çok yaklaşıklarıdır.

İstatistikçilerin nokta tahmini sorunlarına yaklaşımlarındaki bütün olanaklar, bu anlatılanlarla sınırlı değildir. Sözgelimi kimi durumlarda, alışılmadık büyüklükteki bir uç değerin tahmin edici üzerindeki etkisine karşı korunmak önemli olabilir. Bu nokta, ortancanın bir merkezî eğilim ölçüsü olarak ortalamaya üstünlüğünün ele alındığı Bölüm 2'deki açıklamaların bir yansımasıdır.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

15. Bir nokta tahmin edicisinin başarısını değerlendirirken etkinlik kavramının ne gibi bir pratik yararı vardır?

16. θ_1'in sapmasız bir tahmin edicisi $\hat{\theta}_1$, θ_2'nin sapmasız bir tahmin edicisi de $\hat{\theta}_2$ olsun.

(a) $(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$'nin, $(\theta_1 + \theta_2)$'nin sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu gösterin.

(b) $(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$'nin, $(\theta_1 - \theta_2)$'nin sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu gösterin.

17. On iktisatçıdan oluşan rassal bir örneklem gelecek yıl için reel gayrisafi yurtiçi büyüme oranı kestirimleri yapmıştır:

2.2 2.8 3.0 2.5 2.4 2.6 2.5 2.4 2.7 2.6

Aşağıdakilerden her birinin nokta tahminlerini bulurken sapmasız tahmin süreçleri kullanın:

(a) Anakütle ortalaması.

(b) Anakütle varyansı.

(c) Örneklem ortalamasının varyansı.

(d) Reel gayrisafi yurtiçi ürünün en az %2.5 büyüyeceğini kestiren iktisatçıların anakütle oranı.

(e) Reel gayrisafi yurtiçi ürünün en az %2.5 büyüyeceğini kestiren iktisatçıların örneklem oranının varyansı.

18. Büyük bir sanayi kuruluşunda çalışan oniki memurluk rassal bir örneklemden, geçen ay yapılan fazla mesailer için şu sayıları bulunmuştur:

22 16 28 12 18 36 23 11 41 29 26 31

Aşağıdakilerden her birinin nokta tahminlerini bulurken sapmasız tahmin süreçleri kullanın:

(a) Anakütle ortalaması.
(b) Anakütle varyansı.
(c) Örneklem ortalamasının varyansı.
(d) Geçen ay bu kuruluşta otuz saatin üstünde fazla mesai yapan memurların anakütle oranı.
(e) Geçen ay bu kuruluşta otuz saatin üstünde fazla mesai yapan memurların örneklem oranının varyansı.

19. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen bir rassal örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Ayrıca, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de herhangi bir sabit sayılar kümesi olsun. μ'nün şu tahmin edicisini ele alalım:

$$\hat{\mu} = c_1X_1 + c_2X_2 + \Lambda + c_nX_n$$

(a) Ancak ve ancak

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$$

ise $\hat{\mu}$'nın, μ'nün sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu gösterin.

(b) $\hat{\mu}$'nın varyansının şöyle olduğunu gösterin:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2(c_1^2 + c_2^2 + \Lambda + c_n^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

(c) $\hat{\mu}$, μ'nün sapmasız bir tahmin edicisi ise

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(c_i - n^{-1}) + n^{-1}]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_i - n^{-1})^2 + n^{-1}$$

olduğunu gösterin. Dikkat ederseniz, c_i sayılarını seçmede serbest olsak,

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{için} \qquad c_i = n^{-1}$$

aldığımızda bu ifade en küçük değerine iner.

(d) (a)-(c)'deki bulguları kullanarak, $\hat{\mu}$ biçimindeki bütün tahmin ediciler içinde örneklem ortalamasının en etkin olduğunu gösterin.

20. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen bir rassal örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Ayrıca $\bar{X}$ da örneklem ortalamasını göstersin.

(a) $$\hat{\sigma}_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 / n$$

ifadesinin, σ^2'nin sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu gösterin.

(b) $$\hat{\sigma}_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 / n$$

ifadesinin, σ^2'nin sapmalı bir tahmin edicisi olduğunu gösterin, sapmayı bulun. (örneklem varyansınm, σ^2 için sapmasız olduğu olgusundan yararlanın.)

21. Sapmasız hiçbir tahmin edicinin bulunamadığı kimi tahmin sorunları vardır. Sözgelimi, ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden bir gözlemli bir örneklem seçilse, μ için sapmasız bir tahmin edici elde ederiz, ama σ^2 için sapmasız bir tahmin edici bulamayız. Bu açıklamanın neden akla uygun olduğunu açıklayın.

22. Kalabalık bir istatistik dersi sınıfı, hem işletmecilik, hem toplumsal bilim öğrencilerinden oluşmaktadır. On işletmecilik öğrencisi rassal örnekleme seçilmiş olup bunların dönem sonu sınav notları aşağıdadır:

62 57 85 59 64 63 71 58 77 72

Bağımsız bir örneklemeyle rassal seçilmiş sekiz toplumsal bilimler öğrencisinin notları da şöyledir:

73 79 73 62 51 60 57 59

(a) İşletmecilik ve toplumsal bilimler öğrencilerinin anakütle not ortalamaları arasındaki farkın bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) İşletmecilik ve toplumsal bilimler öğrencilerinin 70'ten yukarı not alanlarının anakütle oranları arasındaki farkın bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

23. On tane X marka arabadan oluşan bir rassal örneklem, galon başına mil cinsinden şu yakıt tüketimi değerlerini vermiştir:

27.2 27.2 26.8 26.9 25.3
26.0 26.4 25.7 28.1 25.7

Oniki tane Y marka arabadan oluşan bağımsız bir rassal örneklem ise şu sonuçları vermiştir:

24.2 24.3 25.3 24.8 25.1 25.0
24.9 23.9 26.0 26.1 26.0 26.3

(a) X ile Y marka arabaların yakıt tüketimlerinin anakütle ortalamaları arasındaki farkın bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) Yakıt tüketim değerleri galon başına 25.5 milin üstünde olan X ile Y marka arabaların anakütle ortalamaları arasındaki farkın bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

24. Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir anakütleden seçilen bir rassal örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. μ'nün aşağıdaki tahmin edicisini ele alalım.

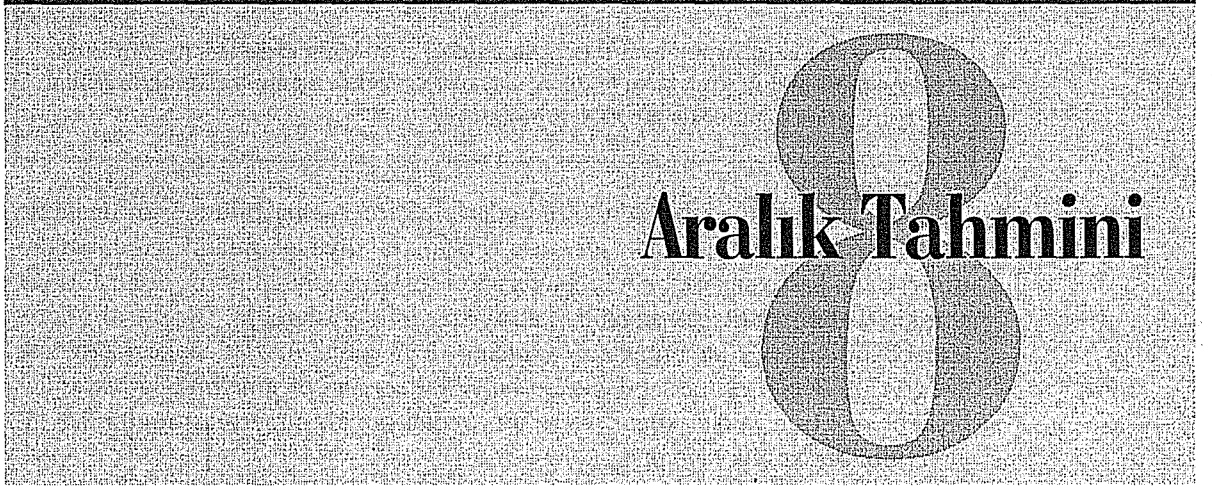
$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \Lambda + nX)$$

(a) $\hat{\mu}$ 'nın, μ 'nün sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu gösterin.

(b) $\hat{\mu}$ 'nın, örneklem ortalaması $\overline{X}$ 'ye göre göreli etkinliğini bulun.

$$\left[\textit{İpucu}: \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

BÖLÜM 8



Aralık Tahmini

8.1 GÜVEN ARALIKLARI

Bir önceki bölümde, bilinmeyen bir anakütle katsayısının nokta tahminini —yani bir anlamda "iyi bir bahis" denebilecek tek bir sayının üretilmesini— ele aldık. Uygulamada çoğu sorun için bir nokta tahmini yeterlidir. Sözgelimi, büyük bir parti maldan rassal seçilmiş parçaların incelenmesi, bütün parçaların %10'unun kusurlu olduğu tahminini ortaya koymuş olsun. Bu sayıyı gören bir yönetici, şöyle sorular sorabilir: "Gerçek kusurlu oranının %5 ile %15 arasında olduğundan az çok emin olabilir miyim?" ya da "Bu durumda bütün parçaların %9 ile %11'i arasındaki bir oranının kusurlu olduğu mu görülüyor?" Böyle sorular, tek bir nokta tahmininin içerdiğinin ötesinde bir bilgiyi aramakta, bu tahminin güvenilirliğini sorgulamaktadır. Daha doğrudan söylenirse, tahmini yapılan büyüklüğün arasında kalacağı bir aralık demek olan bir **aralık tahmini** sorulmaktadır.

Bir anakütleden örnekleme yapılırken, başka her şey aynı kaldığında, görece büyük bir örneklemden, küçük bir örneklemden elde edebileceğimizden daha güvenli bilgi sağlamayı bekleriz. Ama, bu etmen nokta tahminine yansımamaktadır. Sözgelimi, bir partideki kusurlu parça oranı konusundaki nokta tahminimiz, on parçalık bir örneklemde bir kusurlu parça görsek de, 1,000 parçalık bir örneklemde 100 kusurlu bulsak da değişmez. Daha sonra göreceğimiz gibi, anakütle katsayılarına ilişkin bilgimizin hassaslığı aralık tahminine **yansır**. Daha açıkçası, örneklem büyüdükçe, başka her şey aynıyken, bir anakütle katsayısının gerçek değeri konusundaki belirsizliğimizi yansıtan güven aralığı daralır.

Tanımlar

Bir anakütle katsayısının **aralık tahmin edicisi**, o anakütle katsayısının içine düşebileceği bir aralığı (örneklem bilgisine dayanarak) belirlemenin bir kuralıdır. Buna karşılık gelen tahmine de **aralık tahmini** denir.

Buraya kadar, aralık tahmin edicilerini, gerçek ama bilinmeyen anakütle katsayılarını "içerebilir" ya da içermesi "çok olası" diye tanımladık. Açıklamalarımızı daha hassaslaştırmak için, bu terimleri olasılık söylemlerine dönüştürmek gerekir. Tahmin edilecek anakütle katsayısını θ ile gösterelim. Bir rassal örneklem çekildiğini ve bu örneklem bilgisine dayanarak, A, B'den küçük olmak üzere A ile B gibi iki rassal değişken bulunabileceğini düşünelim. Bu rassal değişkenler, A'nın θ'dan küçük ve B'nin θ'dan büyük olma olasılığının 0.9 olduğu gibi bir özellik taşıyorsa,

$$P(A < \theta < B) = 0.9$$

yazabiliriz. Bu durumda A ile B arasındaki aralığa, θ'nın %90 güven aralığı tahmin edicisi denir. Eğer A ile B'nin belli örneklem gerçekleşmeleri a ve b ile gösterilirse, o zaman a ile b aralığına θ'nın %90 **güven aralığı** adı verilir. Olasılığın sıklık kavramına göre, bu tür aralıkları şöyle yorumlayabiliriz: Eğer anakütleden yinelemeli örneklemler alınır da bu yolla aralıklar hesaplamrsa, bu aralıkların %90'ı bilinmeyen anakütle katsayısını içerecektir.

Daha genel olarak, güven aralıklarını, 1'den küçük her istenen olasılık içeriğinde tanımlayabiliriz. Rassal değişkenler A ile B şöyle olsun:

$$P(A < \theta < B) = 1 - \alpha$$

Burada α, 0 ile 1 arasında herhangi bir sayıdır. (Bir üst paragraftaki örnekte $1 - \alpha = 0.9$'dur, böylece $\alpha = 0.1$ olur.) Öyleyse, anakütleden yinelemeli örneklemler seçilir de bu aralık hesaplamrsa, aralıkların $(1 - \alpha)$ ya da $\%100(1 - \alpha)$ oranı θ'yı içerecektir. Bu yolla hesaplanan bir güven aralığına, θ'nın $\%100(1 - \alpha)$ güven aralığı denir.

Tanımlar

θ, bilinmeyen bir anakütle katsayısı olsun. Örneklem bilgisine dayanarak,

$$P(A < \theta < B) = 1 - \alpha$$

eşitliğini sağlayan A ve B rassal değişkenlerini bulabileceğimizi düşünelim. A ile B'nin belli örneklem gerçekleşmeleri a ve b ile gösterilirse, o zaman a ile b aralığına θ'nın **$\%100(1 - \alpha)$ güven aralığı** adı verilir. $(1 - \alpha)$ büyüklüğü de, bu aralığın **olasılık içeriği** ya da **güven düzeyi** adını alır.

Eğer anakütleden çok büyük sayıda yinelenen örneklemler seçilirse, bu yolla bulunan aralıkların %100(1 – α) oranı, θ katsayısını içerecektir. Bu yolla hesaplanan güven aralığı şöyle yazılır:

$$a < \theta < b$$

Bu bölümün geri kalanında, çok rastlanan çeşitli tahmin sorunlarına güven aralığı bulan süreçler geliştirecek, bunlara örnekler vereceğiz. Aralık tahmininin başka örnekleri, daha sonraki bölümlerde yer alacaktır.

8.2 BİR NORMAL DAĞILIM ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARI: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNİYOR

Ortalaması bilinmeyen ama varyansı *bilinen* bir normal dağılımdan rassal bir örneklem çekildiğini, amacın da anakütle ortalamasının güven aralığını bulmak olduğunu düşünelim. Bu sorun gerçekçilikten uzaktır, çünkü ortalama bilinmezken anakütle varyansının tam tamına bilinmesi (olanaksız değilse bile) pek enderdir. Ancak kimi zaman benzer anakütlelerden geçmişte o denli sık örnekleme alınır ki, sözkonusu anakütlenin varyansımn, geçmiş deneyimlere dayanılarak büyük bir yaklaşıklıkla bilindiği varsayılabilir. Üstelik, bu altbölümde az ileride göreceğimiz gibi, örneklemimiz yeterince büyükse, anakütle varyansımn bilindiği durum için geliştirilen süreçler, bu varyans örneklemden tahmin edilirse de kullanılabilir. Yine de, bu sorunla işe başlamanın asıl yararı, güven aralıklarını bulma süreçlerinin oldukça kolay bir açıklamasına izin vermesidir.

Bilinmeyen ortalaması μ ve bilinen varyansı σ^2 olan bir anakütleden çekilen rassal bir örneklemin gözlemleri $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ve örneklem ortalaması $\overline{X}$ olsun. Bu durumda anakütle ortalamasının güven aralıkları,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

rassal değişkeninin standart bir normal dağılıma uyduğu bulgusuna dayanır.

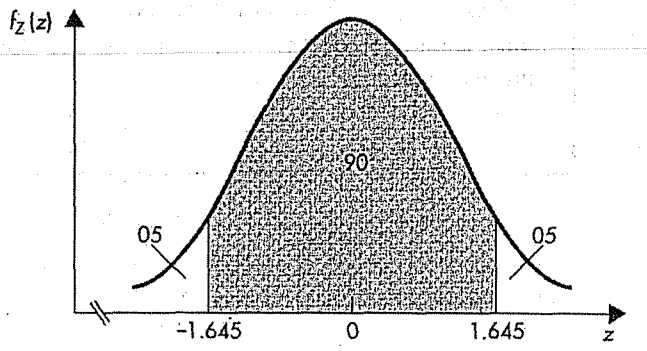
Anakütle ortalamasının %90 güven aralığım bulmak istediğimizi düşünelim. Standart normal dağılım değişkeninin, Ek Çizelge 3'te verilen, birikimli dağılım fonksiyonundan şunu elde ederiz:

$$P(Z < 1.645) = F_Z(1.645) = 0.95$$

Dolayısıyla,

$$P(Z > 1.645) = 0.05$$

buluruz. Ayrıca, standart normal dağılım değişkeni ortalaması 0'a göre bakışık (simetrik) olduğundan,



ÇİZİM 8.1 Z standart bir normal rassal değişken iken $P(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$

$$P(Z < -1.645) = 0.05$$

elde ederiz. Demek ki Z'nin -1.645 ile 1.645 arasında kalma olasılığı da şöyledir:

$$P(-1.645 < Z < 1.645) = 1 - P(Z > 1.645) - P(Z < -1.645)$$
$$= 1 - 0.05 - 0.05 = 0.90$$

Bu olasılık hesapları Çizim 8.1'de gösterilmiştir.

Buraya kadar, standart bir normal rassal değişkenin -1.645 ile 1.645 arasında yer alma olasılığının 0.90 olduğunu gösterdik. Şimdi de bu olasılık söylemini, anakütle ortalamasının bir güven aralığına aşağıdaki gibi dönüştürelim:

$$0.90 = P(-1.645 < Z < 1.645)$$
$$= P\left(-1.645 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) < 1.645$$
$$= P\left(\frac{-1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= P\left(\overline{X} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Dolayısıyla, $(\overline{X} - 1.645\sigma/\sqrt{n})$ ile $(\overline{X} + 1.645\sigma/\sqrt{n})$ aralığının anakütle ortalaması μ'yü içerme olasılığı 0.90'dır. Öyleyse, güven aralığı tanımımıza göre, $(\overline{x} - 1.645\sigma/\sqrt{n})$ ile $(\overline{x} + 1.645\sigma/\sqrt{n})$ aralığı, μ'nün %90 güven aralığıdır. Burada $\overline{x}$, örneklem ortalamasının gözlenen belirli değeridir. Basitlik amacıyla bu güven aralığı şöyle yazılabilir:

$$\overline{x} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

ÖRNEK 8.1

Standart sapması 6 olan normal bir dağılımdan çekilmiş onaltı gözlemli rassal bir örneklemin ortalaması 25'tir. Anakütle ortalaması μ'nün %90 güven aralığını bulun.

Şunları biliyoruz:

$$\bar{x} = 25 \qquad \sigma = 6 \qquad n = 16$$

%90 güven aralığı şöyle verilmiştir:

$$\bar{x} - \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

Böylece şunu buluruz:

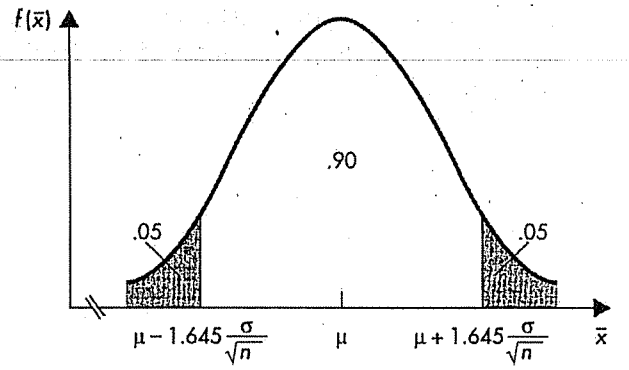
$$25 - \frac{(1.645)(6)}{\sqrt{16}} < \mu < 25 + \frac{(1.645)(6)}{\sqrt{16}}$$

ya da

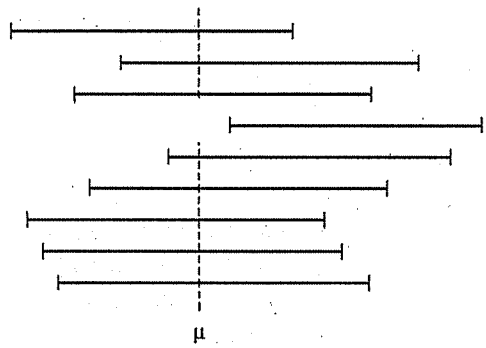
$$22.5325 < \mu < 27.4675$$

Güven aralığının tam bir yorumunu Örnek 8.1 bağlamında yapmak için burada biraz duralım. Bu örnekte, örneklemin onaltı gözlemine dayanarak, bilinmeyen anakütle ortalamasının %90 güven aralığının 22.5325 ile 27.4675 arasında yattığını bulduk. Bu örneklem, anakütleden çekilebilecek bir sürü örneklemden yalnızca biridir. Yeniden işe koyulup onaltı gözlemli ikinci bir örneklem seçtiğimizi düşünelim. Bu ikinci örneklemin ortalamasının birinciden farklı çıkacağı neredeyse kesindir. Buna göre, ikinci örneklemin bulgularından bir %90 güven aralığı hesaplansa, bu da Örnek 8.1'de bulunandan farklı olacaktır. Bu anakütleden çok sayıda onaltı gözlemli örneklemler çektiğimizi, her örneklemin bulgularından bir %90 güven aralığı hesapladığımızı düşünebiliriz. Aralığın olasılık içeriği şu anlama gelir: Bu yolla bulunan aralıkların %90'ı gerçek anakütle ortalamasını içerir. İşte bu anlamda aralık tahminimize "%90 güven" duyduğumuzu söyleyebiliriz.

Bu durum Çizim 8.2'de gösterilmiştir. Bu çizimin (a) bölümü, ortalaması μ, standart sapması σ olan bir anakütleden alınan n gözlemin örneklem ortalamasının örnekleme dağılımını gösterir. Bu örnekleme dağılımı μ ortalama, $\sigma/\sqrt{n}$ standart sapma ile normaldir. Anakütle ortalamasının bir güven aralığı, örneklem ortalamasının gözlenen değerine —yani örnekleme dağılımımızdan çekilmiş bir gözleme— dayanır. Çizim 8.2'nin (b) bölümü, anakütleden çekilmiş bağımsız örneklemlerden elde edilen %90 güven aralıkları dizisini göstermektedir. Bu aralıkların gözlenen örneklem ortalamaları olan orta noktaları, çoğu zaman anakütle ortalaması μ'ye oldukça yakındır. Ancak, kimileri bir hayli farklı olabilir. Çok sayıdaki bu aralıkların %90'ının anakütle ortalamasını içerdiği konusunda bize güvence verilmektedir.



(a) Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan normal bir dağılımdan çekilmiş n gözlemli örneklem ortalamasının örnekleme dağılımı



(b) Anakütle ortalamasının bazı %90 güven aralıkları

ÇİZİM 8.2 Bir %90 güven aralığının yorumu

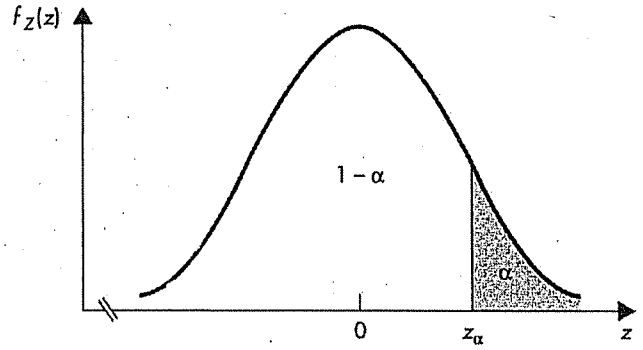
Şimdi de istenen herhangi bir olasılık içerikli güven aralıklarını bulmanın genel durumuna geçiyoruz. Bunu yapabilmek için yeni bir simgeleme göstereceğiz.

Gösterim

Z bir standart normal rassal değişken, α da $0 < \alpha < 1$ aralığında herhangi bir sayı olsun. Şu eşitliği sağlayan sayıyı da z_α ile gösterelim.

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

Bu simgeleme Çizim 8.3'te gösterilmiştir. Standart normal rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu çizelgelerinden z_α'nın nasıl bulunacağı buradan açıkça görülmektedir. $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ olduğuna göre, Çizim 8.3'te görüldüğü gibi, şu yazılabilir:



ÇİZİM 8.3 $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, burada Z standart normal rassal bir değişkendir

$$F_Z(z_\alpha) = P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$$

Dolayısıyla, belirlenmiş herhangi bir α için z_α, Ek Çizelge 3'ten okunabilir. Sözgelimi, $\alpha = 0.025$ ise

$$1 - \alpha = 0.975$$

olur, böylece

$$F_Z(z_\alpha) = F_Z(z_{0.025}) = 0.975$$

bulunur ve çizelgeden şu okunur:

$$z_{0.025} = 1.96$$

Dolayısıyla şu yazılabilir:

$$P(Z > 1.96) = 0.025$$

Çizelge 8.1, güven aralığı bulmada sık sık kullanılan α değerlerine karşılık olan z_α değerlerini göstermektedir. Okuyucu bunların doğruluğunu Ek Çizelge 3'ten görebilir.

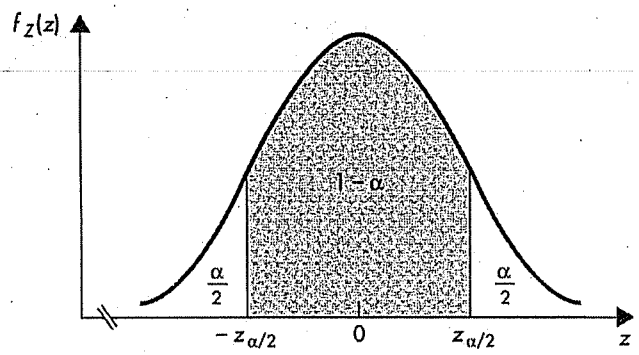
Şimdi, anakütle ortalamasının $\%100(1 - \alpha)$ güven aralığının istendiğini düşünelim. Az önce verilen simgelemeyi kullanarak şunu yazarız:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Standart normal yoğunluk fonksiyonunun kendi ortalaması 0'a göre simetrik olmasından dolayı şu da yazılabilir:

ÇİZELGE 8.1 Standart normal birikimli dağılım fonksiyonu çizelgesinden z_α değerleri

α	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
z_α	2.575	2.33	1.96	1.645	1.28



ÇİZİM 8.4 $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$, burada Z bir standart normal rassal değişkendir.

$$P(Z < -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Dolayısıyla

$$p(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$$

bulunur. Bu olasılık hesapları Çizim 8.4'te gösterilmiştir.

Standart normal rassal değişkenin çeşitli olasılık içerikli değerlerinin bir aralığım bulduk. Bu bilgiyi anakütle ortalamasının aynı olasılık içerikli bir güven aralığım türetmekte kullanabiliriz. %90 güven aralığım bulurken kullandığımız akıl yürütmeyi burada da uygulayarak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) \\
&= P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \\
&= P\left(\frac{-z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\overline{X} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Güven aralığının tanımına göre, örneklem ortalamasının gözlenen belirli değeri $\bar{x}$ ise, anakütlenin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bir Normal Anakütle Ortalamasının Güven Aralıkları: Anakütle Varyansı Biliniyor

Ortalaması μ, varyansı σ^2 olan bir normal dağılımdan çekilen n gözlemli rassal bir örneklemimiz olsun. σ^2 biliniyorsa, gözlenen örneklem ortalaması da $\bar{x}$ ise, anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı da şu olur:

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

burada $z_{\alpha/2}$ şu eşitliği sağlayan sayıdır:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Z rassal değişkeni de standart normal dağılıma uyar.

Bu genel güven aralıklarının yorumu, belirli %90 güven aralığının yorumuna benzer. Anakütleden n gözlemli örneklemler yinelemeli ve bağımsız olarak çekilirse ve $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları çerçeve içinde verilen formülle hesaplanırsa, çok büyük sayıda yinelenen denemelerde bu aralıkların $\%100(1-\alpha)$ kadarı gerçek anakütle ortalamasını içerir.

ÖRNEK 8.2

Bir üretim süreci, torba içinde, rafine şeker üretmektedir. Bu torbaların içerik ağırlıkları standart sapması 1.2 ons olan bir normal dağılıma uymaktadır. Yirmibeş torbalık rassal bir örneklemde ortalama ağırlık 19.8 ons çıkmıştır. Bu süreçte üretilen bütün şeker torbalarının ortalama ağırlığının %95 güven aralığını bulun.

%95 güven aralığı istendiğine göre şu yazılabilir:

$$100(1-\alpha) = 0.95$$

Buradan da

$$\alpha = 0.05$$

bulunur. Öyleyse,

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025}$$

diyebiliriz. Demek ki

$$P(Z > z_{0.025}) = 0.025$$

eşitliğini sağlayan $z_{0.025}$ sayısını arıyoruz. Bu durumda

$$P(Z > z_{0.025}) = F_Z z_{0.025}) = 0.975$$

olur. Burada $F_Z(z)$, standart normal rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonudur. Öyleyse, Ek Çizelge 3'ten şu elde edilir:

$$z_{0.025} = 1.96$$

Anakütle ortalaması μ'nün %95 güven aralığı şudur:

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Burada

$$\bar{x} = 19.8 \qquad z_{\alpha/2} = 1.96 \qquad \sigma = 1.2 \qquad n = 25$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki aranan güven aralığı şöyledir:

$$19.8 - \frac{(1.96)(1.2)}{\sqrt{25}} < \mu < 19.8 + \frac{(1.96)(1.2)}{\sqrt{25}}$$

ya da

$$19.33 < \mu < 20.27$$

Böylece, gerçek ortalama ağırlığın %95 güven aralığı 19.33 ile 20.27 ons arasıdır.

Bir normal dağılımın varyansı biliniyorken, ortalamasının güven aralıklarının genel doğasını incelemek için burada biraz duracağız. Aşağıdaki bulgular, aralık tahmininin yapısını anlamada bize ışık tutacaktır. Bunlardan çoğu başka aralık tahminlerine de genişletilebilir.

Anakütle ortalamasının $\%100(1 - \alpha)$ güven aralığının

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

olduğunu görmüştük. Beklenebileceği gibi, örneklem ortalaması $\bar{x}$, bu aralığın merkezidir. Aralığın genişliği w —yani uç noktalar arasındaki uzaklık— şudur:

$$w = \frac{2z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Öyleyse, güven aralığı genişliğinin, kendi olasılık içeriği, anakütle standart sapması ve gözlem sayısına bağlı olduğu görülebilir. Aşağıdaki bulgular özellikle geçerlidir:

1. Verilmiş bir olasılık içeriği ve örneklem büyüklüğü için, *anakütle standart sapması σ büyüdükçe, anakütle ortalamasının güven aralığı da genişler.* Bu, sezgilerle uyumludur, çünkü, öteki her şey aynıyken, anakütlenin kendi ortalaması dolayındaki

dağılımı ne kadar yayvansa, ortalamaya ilişkin çıkarsamamız da o kadar belirsizlik taşır. Bu fazladan belirsizlik, daha geniş güven aralığı olarak ortaya çıkar.

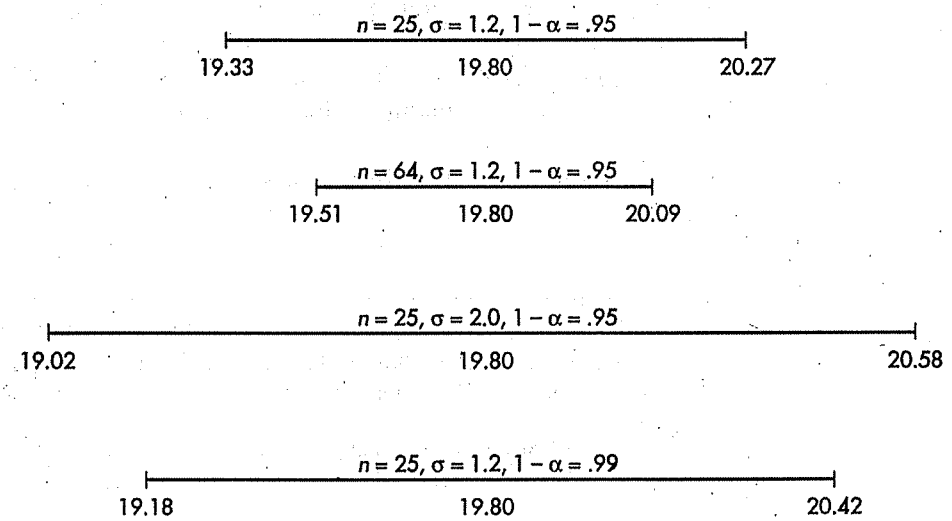
2. Verilmiş bir olasılık içeriği ve anakütle standart sapması için, *örneklem hacmi n büyüdükçe, anakütle ortalamasının güven aralığı da daralır.* Bu da sezgilerle uyumludur. Bir anakütleden ne kadar çok bilgi alırsak, onun ortalamasına ilişkin çıkarsamamız o kadar hassas olur. Bu fazladan hassaslık, daha dar güven aralıklarında yankısını bulur.

3. Verilmiş bir anakütle standart sapması ve örneklem büyüklüğü için, *olasılık içeriği* $(1-\alpha)$ *yükseldikçe, anakütle ortalamasının güven aralığı da genişler.* Sözgelimi, bir %99 güven aralığı, aynı bilgiye dayanan bir %95 güven aralığından geniştir. Bu bulgu da şuradan kaynaklanır. $(1-\alpha)$ genişledikçe, α küçülür, dolayısıyla $z_{\alpha/2}$ büyür. Sonuçta, olasılık söylemindeki artan kesinliği, bu söylemlerdeki azalan hassalıkla karşılarız. Bu da, olasılık içeriği yükseldiğinden, anakütle katsayılarının daha geniş güven aralıklarına yansır.

Bu bulgular Örnek 8.2'nin verileriyle Çizim 8.5'te gösterilmiştir. Bu çizim, örneklem ortalaması için, örneklem hacmindeki, anakütle standart sapmasındaki ve aralığın olasılık içeriğindeki artışların güven aralığı üzerindeki etkisini gösterir.

Bu altbölümde ortalamanın güven aralığını türetirken, bu aralık tahminlerinin uygulama sorunlarındaki kullanım alanlarını daraltan iki koşuldan söz ettik: anakütle ortalaması normaldir ve bu anakütlenin varyansı bilinmektedir. Ancak,

ÇİZİM 8.5 Örneklem hacmi n'nin, anakütle standart sapması σ'nın ve olasılık içeriği $(1-\alpha)$'nın, normal bir dağılımın ortalamasının güven aralığı üzerindeki etkileri; her bir durumda örneklem ortalaması 19.80'dir



örneklem büyükse, bu koşulların ikisi de önemini yitirir. Bu durumda, merkezî limit teoremi gereği, bu altbölümde açıklanan güven aralıkları, anakütle dağılımı normal olmasa bile, yeterince iyi birer yakınsama için uygun olma konumlarını sürdürür. Üstelik, örneklem büyükse, örneklem standart sapması anakütle standart sapmasının yeterince iyi bir tahmin edicisi olup, aralıkların olasılık içeriklerini fazla etkilemeden, onun yerine kullanılabilir. Böylece, anakütle standart sapması yerine örneklem standart sapmasını geçirerek, bu aralıkları, tıpkı daha önce yaptığımız gibi hesaplayabiliriz.

Anakütle Ortalamasının Güven Aralığı: Büyük Örneklemde

Ortalaması μ olan bir dağılımdan n gözlemli rassal bir örneklem çektiğimizi düşünelim. Örneklem ortalaması ile standart sapmasını $\bar{x}$ ve s_x ile gösterelim. Eğer n büyükse,[1] μ'nün $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı iyi bir yaklaşıklıkla şöyle bulunur:

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}$$

Anakütle normal dağılmasa bile bu yaklaşıklık çoğunlukla yeterliliğini korur.

Öyleyse, örneklem büyük olduğunda, daha önce yapılan iki varsayımı gevşetebilir, bunun sonucunda, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, bulgularımızın uygulama alanını büyük ölçüde genişletebiliriz.

ÖRNEK 8.3

Rassal bir örneklemdeki 172 muhasebe öğrencisinden, belli bir işin özelliğini bir (önemsiz) ile beş (son derece önemli) arasında değerlendirmeleri istenmiştir.[2] "İş güvencesi" için ortalama değer 4.38, standart sapma 0.70 çıkmıştır. Anakütle ortalaması için %99 güven aralığım bulun.

Gözlem değerleri bir ile beş arasındaki tamsayılar olduğuna göre anakütle dağılımının normal olmadığı kesindir. Yine de, merkezî limit teoremi sayesinde, bu büyüklükteki bir örneklem için örneklem ortalamasımn örnekleme dağılımı normale yakındır, bu da aşağıdaki hesaplamaları yapmamızı haklı kılar. Aşağıdaki

[1] Gevşek bir kural olarak, $n = 30$ ya da daha çok gözlemin "büyük" bir örneklem oluşturduğunu düşünebiliriz. Ancak buradan, 30 büyüklüğünde bir örneklemde yaklaşıklılığın tam, 29'da ise berbat olduğu sonucunu çıkarmamalıyız. Örneklem büyüdükçe bu yaklaşıklık da yavaş yavaş artmaktadır.

[2] Bulguların alındığı kaynak: P. Bundy, D. Norris, "What accounting students consider important in the job selection process," *Journal of Applied Business Research, 8*, no. 2, (1992), 1–6.

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}$$

aralığım hesaplayacağız. Burada

$$\bar{x} = 4.38 \qquad s_x = 0.70 \qquad n = 172$$

olup $z_{\alpha/2}$ aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Bu durumda, %99 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunlar bulunur:

$$\alpha/2 = 0.005 \qquad z_{\alpha/2} = 2.575$$

Anakütle ortalamasının aranan %99 güven aralığı aşağıdadır:

$$4.38 - \frac{(2.575)(0.70)}{\sqrt{172}} < \mu < 4.38 + \frac{(2.575)(0.70)}{\sqrt{172}}$$

$$4.24 < \mu < 4.52$$

Demek ki anakütledeki ortalama değerleme için %99 güven aralığımız 4.24 ile 4.52 arasındadır

8.3 STUDENT *t* DAĞILIMI

Bir önceki altbölümde anakütle varyansı bilinirken normal bir anakütlenin ortalamasının güven aralığını türettik. Dikkat ettiyseniz, örneklem büyük olunca anakütle varyansının bilindiği varsayımı gevşetilebildi. Şimdi de uygulamada bir hayli önemi olan, anakütle varyansımn bilinmediği ve örneklemin büyük olmadığı durumu ele alacağız. Bunu yapmak için de olasılık dağılımlarının yeni bir türünü açıklamamız gerekecektir.

Altbölüm 8.2'de anlatılanlar aşağıdaki rassal değişkenin standart normal dağılıma uymasına bağlıydı:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{8.3.1}$$

Anakütle standart sapmasının bilinmediği durumlarda bu bulgu doğrudan kullanılamaz. Böyle durumlarda Eş. 8.3.1'deki bilinmeyen σ yerine örneklem standart sapması s_x'i geçirerek şunu elde ederiz:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_x/\sqrt{n}}$$

Bu rassal değişken normal dağılıma uymaz, ama dağılımı bilinmekte olup **Student *t*** denen dağılım ailesinin bir üyesidir.[3]

Student *t* Dağılımı

Ortalaması μ olan normal bir dağılımdan çekilmiş ortalaması $\overline{X}$, standart sapması s_x olan n gözlemli rassal bir örneklem veriyken

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s_x / \sqrt{n}}$$

rassal değişkeni **$(n-1)$ serbestlik dereceli Student *t* dağılımına** uyar.[4]

Student t dağılım ailesinin belirli bir üyesi, v katsayısı ile göstereceğimiz serbestlik derecesi ile nitelenir. Serbestlik dercesi v olan bir Student t rassal değişkeni t_v ile gösterilir. Student t dağılımının biçimi, standart normal dağılımınkine oldukça benzer. Her iki dağılımın da ortalaması 0'dır, olasılık yoğunluk fonksiyonları ortalamalarına göre simetriktir. Ancak, Student t'nin yoğunluk fonksiyonu, standart normal dağılımınkinden daha yayvandır, bu da daha büyük bir varyansla kendini gösterir. Bu da, standart normal dağılımın ve 3 serbestlik dereceli Student t dağılımının yoğunluk fonksiyonlarını gösteren Çizim 8.6'dan görülebilir. Student t dağılımındaki fazladan yayıklık, bilinen anakütle standart sapması yerine bunun örneklemdeki tahmin edicisinin geçirilmesinden doğan ek belirsizliğin sonucudur. Serbestlik derecesi sayısı büyüdükçe, Student t de standart normal dağılıma gittikçe daha çok benzer. Büyük serbestlik dereceleri için iki dağılım neredeyse aynıdır. Bu da sezgisel olarak akla yakın olup, büyük bir örneklemde örneklem standart sapmasının, anakütle standart sapmasının çok hassas bir tahmin edicisi olmasından kaynaklanır.

---

[3] Bu bulgu 1908'de W. S. Gosset tarafından yayımlandı. Gosset, İrlanda'da Guinness Breweries şirketinde çalışıyordu. Bu şirket çalışanlarının bilimsel araştırma yayımlamasını yasaklamıştı. Gosset'nin araştırması "Student" takma adıyla yayımlandı, bu ad artık bu dağılıma verilmiştir.

[4] Dikkat ederseniz, serbestlik derecelerinin sayısı, Altbölüm 6.4'teki gibi, aynı büyüklükteki örnekleme dayanan ki-kare dağılımının serbestlik derecesine karşılık gelmektedir. Biçimsel olarak, v serbestlik dereceli Student t rassal değişkeni

$$t_v = \frac{Z}{\sqrt{\chi_v^2 / v}}$$

biçiminde tanımlanır; burada Z, standart normal rassal değişken; χ_v^2, v serbestlik dereceli ki-kare rassal değişkeni olup Z ile χ_v^2 birbirinden bağımsızdır.

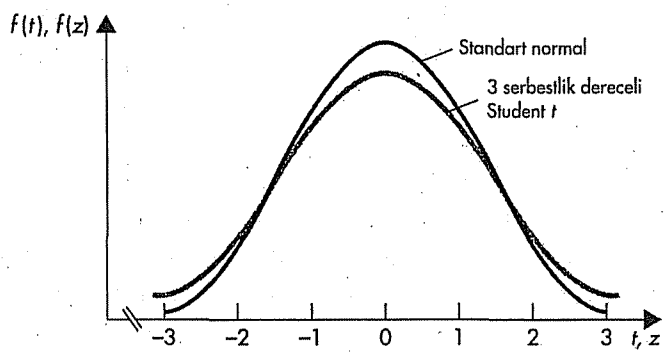
Anakütle ortalamasına ilişkin çıkarsamaları Student t dağılımına dayandırabilmek için bu dağılımla ilgili olasılıklara gerek duyarız. Bu olasılıkları betimleyebilmek için, aşağıdaki çerçevede verilen ve Çizim 8.7'de gösterilen kimi yeni simgeler gerekmektedir.

Simgeler

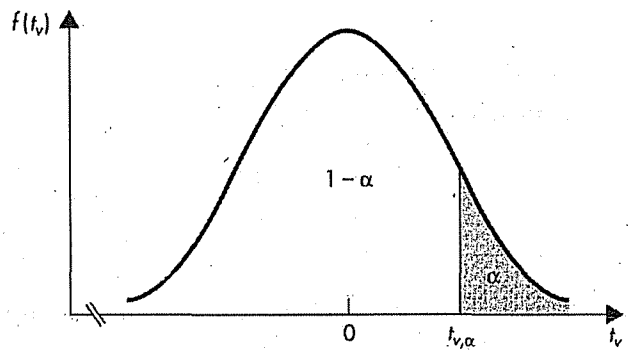
ν serbestlik dereceli Student t dağılımına uyan bir rassal değişken t_ν ile gösterilecektir. $t_{\nu,\alpha}$ ise, aşağıdaki eşitliği sağlayan sayı olarak tanımlanır:

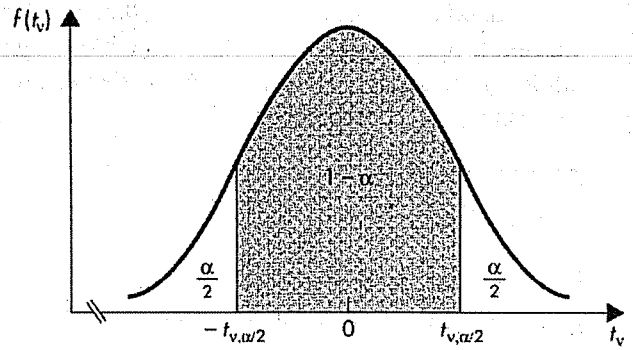
$$P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

ÇİZİM 8.6 Standart normal dağılımın ve 3 serbestlik dereceli Student t dağılımının yoğunluk fonksiyonları



ÇİZİM 8.7 $P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$, burada t_ν, serbestlik derecesi ν olan bir Student t rassal değişkendir





ÇİZİM 8.8 $P(-t_{\nu,\alpha/2} < t_\nu < t_{\nu,\alpha/2}) = 1 - \alpha$, burada t_ν, serbestlik derecesi ν olan Student t rassal değişkenidir

Sık rastlanan uygulamalarda belli bir α olasılığına karşılık olan $t_{\nu,\alpha}$ değerini bulmamız gerekir. Bu değerler, doğrudan Ek Çizelge 6'dan okunabilir. Örnek olmak üzere, 15 serbestlik dereceli Student t rassal değişkeninin 0.1 olasılıkla aşabileceği sayıyı bulmak istediğimizi düşünelim. Yani:

$$P(t_{15} < t_{15,0.1}) = 0.1$$

Çizelgeden doğrudan şunu okuyabiliriz:

$$t_{15,0.1} = 1.341$$

Şimdi, Student t dağılımım kullanarak normal bir dağılımın ortalamasının güven aralıklarını hesaplayacağız. Altbölüm 8.2'deki standart normal dağılım açıklamalarımıza koşut olarak şunu yazabiliriz:

$$P(t_\nu > t_{\nu,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Dahası, Student t yoğunluk fonksiyonunun 0 değerli ortalamanın iki yanında bakışık (simetrik) olmasının bir sonucu olarak

$$P(t_\nu < -t_{\nu,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

yazılabilir. Son olarak, bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olayların olasılıkları toplamı 1 ettiğinden

$$P(-t_{\nu,\alpha/2} < t_\nu < t_{\nu,\alpha/2}) = 1 - P(t_\nu > t_{\nu,\alpha/2}) - P(t_\nu < -t_{\nu,\alpha/2})$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

bulunur. Bu olasılıklar, standart normal dağılım için olan Çizim 8.4'e karşılık gelen Çizim 8.8'de gösterilmiştir.

8.4 BİR NORMAL DAĞILIM ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARI: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNMİYOR

Artık, Altbölüm 8.2'deki akıl yürütmeye benzer biçimde, varyansı bilinmeyen bir normal anakütlenin ortalaması için, Student t dağılımım kullanarak güven aralıklarını türetebiliriz.

Ortalaması μ olan, varyansı bilinmeyen bir normal dağılımdan n gözlemli bir örneklemin rassal çekildiğini, anakütle ortalamasımn güven aralıklarının istendiğini düşünelim.

$\overline{X}$ ile s_X^2, örneklem ortalaması ile varyansını göstersin. Altbölüm 8.3'ten

$$t_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{s_x / \sqrt{n}}$$

rassal değişkeninin $(n-1)$ serbestlik dereceli bir Student t dağılımına uyduğunu biliyoruz.

Anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığının istendiğini düşünelim. Altbölüm 8.2'deki akıl yürütmenin tıpkısını kullanıp, şunu buluruz:

$$\begin{aligned}
(1-\alpha) &= P(-t_{n-1,\alpha/2} < t_{n-1} < t_{n-1,\alpha/2}) \\
&= P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{s_x/\sqrt{n}} < t_{n-1,\alpha/2}\right) \\
&= P\left(\frac{-t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\overline{X} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, güven aralıkları tanımımızdan, $\overline{x}$ ile s_x örneklem ortalaması ile standart sapmamn gözlenmiş belirli değerleriyse, anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığının şöyle bulunduğu sonucuna varırız:

$$\overline{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}$$

Bir Normal Dağılım Ortalamasının Güven Aralıkları: Anakütle Varyansı Bilinmiyor

Ortalaması μ olan, varyansı bilinmeyen bir normal dağılımdan çekilmiş n gözlemli bir rassal örneklemimiz olduğunu düşünelim. Gözlenen örneklem ortalaması ile

standart sapması, sırasıyla, $\bar{x}$ ile s_x ise, anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{x}-\frac{t_{n-1,\alpha/2}s_x}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{t_{n-1,\alpha/2}s_x}{\sqrt{n}}$$

Burada $t_{n-1,\alpha/2}$ aşağıdaki eşitliği sağlayan sayıdır:

$$P(t_{n-1}>t_{n-1,\alpha/2})=\alpha/2$$

t_{n-1} rassal değişkeni de $(n-1)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.

Şimdi, örneklem gözlemlerinin sayısı azken, bir normal anakütlenin ortalamasının güven aralıklarının bulunmasında Student t dağılımının nasıl kullanılacağını göstereceğiz.

ÖRNEK 8.4

Belli bir modelin belli bir yıl yapımı olan altı arabalık bir rassal örnekleme göre galon başına mil cinsinden yakıt tüketimini şöyledir:

18.6 18.4 19.2 20.8 19.4 20.5

Anakütle dağılımının normal olduğunu varsayarak, bu model ve bu yapım arabalar için anakütledeki ortalama yakıt tüketiminin %90 güven aralığını bulun.

İlk adım olarak, aşağıdaki çizelgeden kolaylıkla hesaplanabilen örnek-lem ortalaması ile varyansım bulmalıyız.

Öyleyse örneklem ortalaması

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\qquad \sigma x_i=\frac{1}{6}(116.9)=19.4833$$

örneklem varyansı

$$s_x^2=\frac{1}{(n-1)}(\sum x_i^2-n\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{5}[2{,}282.41-(6)(19.4833)^2]=0.96$$

i		x_i	x_i^2
1		18.6	345.96
2		18.4	338.56
3		19.2	368.64
4		20.8	432.64
5		19.4	376.36
6		20.5	420.25
	Toplamlar	116.9	2,282.41

örneklem standart sapması

$$s_x = \sqrt{0.96} = 0.98$$

bulunur.

Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımı verilmişken, anakütle ortalamasının güven aralıklarını şöyle yazabiliriz:

$$\bar{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}$$

burada

$$\bar{x} = 19.48 \qquad s_x = 0.98 \qquad n = 6$$

Ayrıca, $n-1=5$ olduğu ve %99 güven aralığı istendiği için, $\alpha = 0.1$, böylece $\alpha/2 = 0.005$ olur, Ek Çizelge 6'dan

$$t_{n-1,\,\alpha/2} = t_{5,0.05} = 2.015$$

okunur. Öyleyse anakütledeki ortalama yakıt tüketiminin %90 güven aralığı şöyledir:

$$19.48 - \frac{(2.015)(0.98)}{\sqrt{6}} < \mu < 19.48 + \frac{(2.015)(0.98)}{\sqrt{6}}$$

ya da

$$18.67 < \mu < 20.29$$

Demek ki, bu arabaların anakütledeki ortalama yakıt tüketiminin %90 güven aralığı galon başına 18.67 ile 20.29 mil arasındadır.

Kimi zaman, tek bir güven aralığı yerine farklı olasılık içeriği taşıyan bir dizi güven aralığı hesaplamak elverişli olur. Bunlara birlikte bakıldığında, tahmin edilmek istenen anakütle katsayısının alabileceği değerler daha açık olarak görülür. Çizim 8.9, Örnek 8.4'teki verilerden hesaplanan %80, %95, %99 güven aralıklarını da göstermektedir. Dikkat edilirse, beklendiği gibi, olasılık içeriği yükseldikçe, aralıklar da genişlemektedir.

ÖRN 8.5

Motorlu taşıma işkolundaki birleşmelerin etkilerini inceleyen bir araştırmada,[5] onyedi birleşme içeren bir rassal örneklem incelenmiş, birleşme sonrası kamyonla taşınan yükte ton başına gelirin, birleşme öncesine göre artış oranı ölçülmüştür. Bu örneklemdeki her taşıma şirketine karşılık, aynı yerleşimde ve

[5] Alındığı kaynak: R. P. Boisjoly, T. M. Corsi, "The economic implications of less-than-trackload motor carrier mergers," *Journal of Economics and Business, 33* (1980), 13-20.

büyüklükte birleşme yapmamış bir şirket karşılaştırma amacıyla incelenmiştir. Birleşmiş ve birleşmemiş iki şirketin bu artış oranları arasındaki fark hesaplanmıştır. Örneklemdeki fark değerlerinin ortalaması 0.105, standart sapması 0.440 çıkmıştır. Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımıyla, anakütle ortalamasının %95 güven aralığım bulun.

Anakütle ortalamasının güven aralıkları şöyle bulunabilir:

$$\bar{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_x}{\sqrt{n}}$$

Burada

$$\bar{x} = 0.105 \qquad s_x = 0.440 \qquad n = 17$$

$n - 1 = 16$ olduğuna ve %95 güven aralığı istendiğine göre $\alpha = 0.05$ olur. Ek Çizelge 6'dan

$$t_{n-1,\,\alpha/2} = t_{16,0.025} = 2.120$$

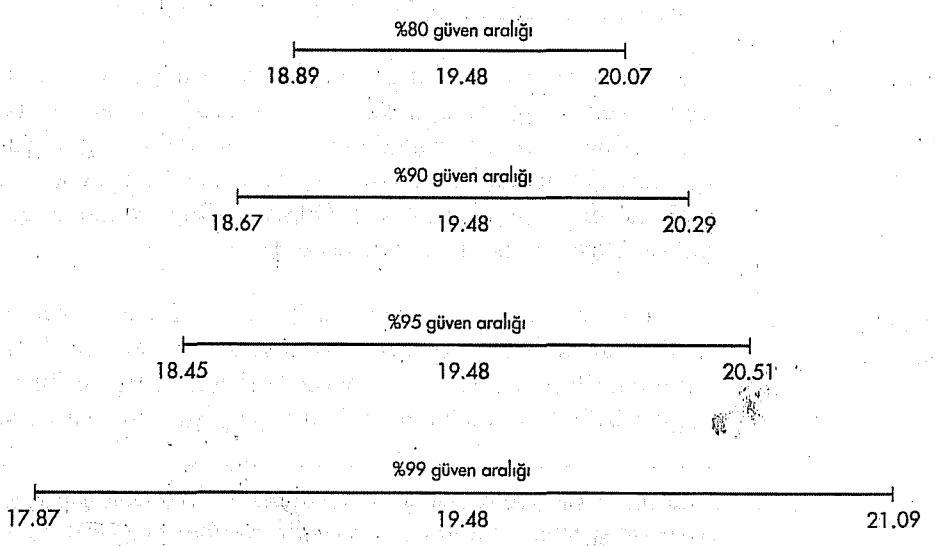
bulunur. Öyleyse anakütle ortalamasımn %95 güven aralığı şöyledir:

$$0.105 - \frac{(2.120)(0.440)}{\sqrt{17}} < \mu < 0.105 + \frac{(2.120)(0.440)}{\sqrt{17}}$$

ya da

$$-0.121 < \mu < 0.331$$

ÇİZİM 8.9 Örnek 8.4'teki verilerden bulunan anakütledeki ortalama yakıt tüketiminin %80, %90, %95, %99 güven aralıkları



Birleşmiş ve birleşmemiş şirketlerin büyüme oranlarındaki artışın anakütle ortalaması için %95 güven aralığı –0.121 ile 0.331 arasıdır. Dikkat ederseniz farkın anakütledeki ortalamasının bu aralığı 0'ı içermektedir, bu da verilerin, ortalamada birleşmiş ve birleşmemiş şirketler arasında fark olmadığı bulgusunu güçlü biçimde yadsımadığı anlamına gelir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir üniversitedeki MBA programının öğrenci işleri yöneticisi, geçmişteki adayların lisans mezuniyet notlarının 0.45 standart sapmayla normal dağıldığını saptamıştır. Bu yıl adaylar arasından yirmibeş kişilik rassal bir örneklem seçilmiş, bunların ortalama mezuniyet notu 2.90 bulunmuştur.
   (a) Anakütle ortalamasının %95 güven aralığını bulun.
   (b) Bu örneklem bulgularına dayanan bir istatistikçi, anakütle ortalamasının bir güven aralığını 2.81 ile 2.99 arası olarak bulmuştur. Bu aralığın olasılık içeriğini bulun.
2. Bir tuğla üretimi sürecinin, ağırlıkları 0.12 libre standart sapmayla normal dağılmış bir çıktı verdiği bilinmektedir. Bugünkü çıktıdan alınmış onaltı tuğlalık rassal bir örneklemin ortalaması 4.07 libredir.
   (a) Bugün üretilen bütün tuğlaların ortalama ağırlığının %99 güven aralığını bulun.
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalamasının %95 güven aralığının, (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.
   (c) Ertesi gün yirmi tuğlalık bir örneklem alınmasına karar verilmiştir. Hiç hesaplama yapmadan, ertesi günün çıktısının ortalama ağırlığı için doğru hesaplanmış %99 güven aralığının (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.
   (d) Aslında bugünkü çıktının anakütle standart sapması 0.15 libredir. Hiç hesaplama yapmadan, bugünün çıktısının ortalama ağırlığı için doğru hesaplanmış %99 güven aralığının (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.
3. Bir üretim yöneticisi, torba içindeki bir kimyasal maddenin katışıklılık miktarının 3.8 gram standart sapmayla normal bir dağılıma uyduğunu geçmiş üretimlerden bilmektedir. Dokuz torbalık rassal bir örneklem gram cinsinden aşağıdaki katışıklılık miktarlarını göstermiştir:

   18.2 13.7 15.9 17.4 21.8 16.6 12.3 18.8 16.2

   (a) Katışıklılık için anakütle ortalamasının %90 güven aralığını bulun.
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalamasının %95 güven aralığının, (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.
4. Bir insan kaynakları yöneticisi, ilk kez işe giren adayların yetenek sınavı sonuçlarının geçmişte 32.4 standart sapmayla normal dağıldığını bilmektedir. Şimdiki aday-

lardan dokuzunu içeren bir rassal örneklemde sınav sonuçlarının ortalaması 187.9'dur.

(a) Şimdiki adayların sınav sonuçlarının anakütle ortalamasının %80 güven aralığını bulun.

(b) Bu örneklem bulgularına dayanan bir istatistikçi, anakütle ortalamasının bir güven aralığını 165.8 ile 210.0 arası olarak bulmuştur. Bu aralığın olasılık içeriğini bulun.

5. Pazarlama derslerine yazılmış 1,562 öğrencilik bir rassal örnekleme seçilenlerden, "Reklâmların çoğu ortalama bir tüketicinin zekâsına hakaret etmektedir" görüşünü bir (kesinlikle katılmıyorum) ile yedi (kesinlikle katılıyorum) arası bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[6] Yanıtların örneklem ortalaması 3.92, örneklem standart sapması 1.57'dir. Anakütledeki yanıt ortalamasının %95 güven aralığını bulun.

6. Rassal bir örneklemdeki 541 müşteriden, "Üretim ve satış sırasında elinden gelen bütün özeni göstermiş bile olsa, bir satıcı kusurlu bir maldan dolayı sorumlu tutulmalıdır" görüşünü bir (kesinlikle katılmıyorum) ile beş (kesinlikle katılıyorum) arası bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[7] Yanıtların örneklem ortalaması 3.81, örneklem standart sapması 1.34 çıkmıştır.

(a) Yanıtların anakütle ortalamasının %90 güven aralığını bulun.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalamasının %80 güven aralığının, (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

7. Bir rassal örneklemdeki 457 Japon imalat yöneticisinden "Müşteriye sunulan kusurlu malların azaltılması maliyeti yükseltir" görüşünü bir (kesinlikle katılıyorum) ile beş (kesinlikle katılmıyorum) arası bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[8] Yanıtların örneklem ortalaması 3.59, örneklem standart sapması 1.045 bulunmuştur. Bu bulgulara dayanılarak anakütle ortalaması için 3.49 ile 3.69 arası bir güven aralığı hesaplanmıştır. Bu aralığın olasılık içeriğini bulun.

8. Yazılı bir iletinin etkinliğini ölçmek için cümlecik okunabilirliği süreci geliştirilmiştir. (Cümlecik sınamasında %57 ya daha yüksek bir oran yazılı bir metnin yeterince anlaşıldığını göstermektedir.) Rassal bir örneklemdeki 357 yeminli muhasebeciden mali raporlardan parçalar okumaları istenmiştir.[9] Sınama başarısının örneklem ortalaması %60.41, örneklem standart sapması %11.28 çıkmıştır. Anakütledeki ortalama başarının %90 güven aralığını bulun, bulgunuzu yorumlayın.

9. Rassal bir örnekleme giren 174 profesyonel pazarlama araştırmacısından "Kimi zaman müşterimin/amirimin istediği sonuçları vermesi kesin olan araştırma teknikle-

---

[6] Verilerin kaynağı: J. C. Andrews, "The dimensionality of beliefs toward advertising in general," *Journal of Advertising, 18*, no.1 (1989), 26-35.

[7] J. DeConinck, J. Kopf, "Consumers' attitudes toward product liability reform," *American Business Review, 10*, no. 2 (1992), 78-83.

[8] S. J. Daniel, W. D. Reitsparger, "Linking quality strategy with management control systems: empirical evidence from Japanese industry," *Accounting, Organizations and Society, 16* (1991), 601-18.

[9] Belirten kaynak: A. H. Adelberg, "A methodology for measuring the understandability of financial report messages," *Journal of Accounting Research, 17* (1979), 565-92.

rini kullanırım" görüşünü bir (kesinlikle katılıyorum) ile yedi (kesinlikle katılmıyorum) arası bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[10] Yanıtların örneklem ortalaması 6.06, örneklem standart sapması 1.43 çıkmıştır.

(a) Bu bulgulara dayanılarak anakütle ortalaması için 5.96 ile 6.36 arası bir güven aralığı hesaplanmıştır. Bu aralığın olasılık içeriğini bulun.

(b) Bu alıştırmanın bulgusunu Alıştırma 7'ninkiyle karşılaştırın. İki güven aralığının genişlikleri eşittir ama olasılık içerikleri bir hayli farklıdır. Bu farkın gerekçesi nedir?

10. Bir perakende giyim mağazası, üniversite öğrencilerinin öğrenim yılının ilk ayı içindeki giyim harcamalarıyla ilgilenmektedir. Rassal bir örneklemdeki dokuz öğrenci için ortalama harcama 157.82 $, örneklem standart sapması 38.89 $'dır. Anakütle dağılımının normal olduğu varsaymıyla, anakütledeki ortalama harcamanın %95 güven aralığını bulun.

11. Bir otoyolun belli bir bölümünde yol alan arabaların hızlarıyla ilgilenilmektedir. Rassal bir örneklemdeki yedi araba için radarla ölçülen saat başına mil olarak hızlar şöyledir:

79 73 68 77 86 71 69

(a) Örneklem ortalaması ile varyansını bulun.

(b) Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımıyla, otoyolun bu bölümünde yol alan bütün arabaların ortalama hızını %95 güven aralığını bulun.

12. Bir klinikte zayıflama rejimi uygulanmaktadır. Kayıtlardan anlaşıldığına göre, rassal bir örneklemdeki on müşteri rejimin sonunda libre cinsinden şu kadar zayıflamıştır:

18.2 25.9 6.3 11.8 15.4 20.3 16.8 19.5 12.3 17.2

Anakütle dağılımının normal olduğunu varsayın.

(a) Anakütle ortalaması için %99 güven aralığını bulun.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalamasının %90 güven aralığının (a)'da bulduğunuzdan daha mı geniş, daha mı dar yoksa onunla aynı mı olduğunu belirtin.

13. Kalabalık bir öğrenci kitlesinin bir sınavdan aldığı notların normal dağıldığı bilinmektedir. Rassal bir örnekleme giren yirmibeş not şu bulguları vermiştir:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 1{,}508 \qquad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 95{,}628$$

(a) Örneklem ortalaması ile varyansını bulun.

(b) Anakütle ortalaması için %90 güven aralığını bulun.

14. Bir anakütle bilinmeyen bir ortalama ve bilinmeyen bir varyansla normal dağılmıştır. İki gözlemli bir rassal örneklem verilmişken, Altbölüm 8.4'teki bilgilerle, anakütle ortalamasının güven aralıkları bulunabilir. Ancak tek gözlemli bir örneklemle bu olanaksızdır. Bu beklentinin gerekçesini açıklayın.

---

[10] J. P. Akaah, "Organizational Culture and ethical research behavior," *Journal of Academy of Marketing Science, 21* (1993), 59-63.

15. Bir işletmecilik fakültesinin mezunlara iş bulma görevlisi, mezuniyetten 5 yıl sonraki ortalama yıllık ücreti tahmin etmek istemektedir. Bir rassal örnekleme seçilen bu tür yirmibeş mezun için örneklem ortalaması 42,740 $, örneklem standart sapması 4,780 $ bulunmuştur. Anakütlenin normal dağıldığı varsayımıyla, anakütle ortalamasının %90 güven aralığını bulun.

16. Bir elektronik oyunlar üreticisi, bunları üniversite barlarına kurmayı düşünmektedir. Bu girişimin kârlılığını inceleyen bir ön çalışmada rassal seçilmiş on tane üniversite barına bu oyunlar bir haftalığına yerleştirilmiştir. Dolar cinsinden haftalık kârı x_i ile gösteren örneklem bulguları aşağıdadır:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1{,}120 \qquad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 5{,}184$$

(a) Gerekli gördüğünüz varsayım varsa belirterek, bütün üniversite barlarındaki haftalık ortalama kârlılığın % 80 güven aralığını bulun.

(b) Hiçbir hesaplama yapmadan, anakütle ortalamasının %90 güven aralığının (a)'da bulduğunuzdan daha mı geniş, daha mı dar yoksa onunla aynı mı olduğunu belirtin.

17. Bir araba kiralama şirketi, arabalarının onarım nedeniyle çalışamaz durumda kaldığı süreyle ilgilenmektedir. Rassal bir örneklemdeki dokuz arabanın son bir yıl içinde çalışamadığı günler aşağıdadır:

16 10 21 22 8 17 19 14 19

Gerekli gördüğünüz herhangi bir varsayım varsa belirterek, bu şirketin bütün arabalarının bir yılda işten kaldıkları ortalama gün sayısının %90 güven aralığını bulun.

8.5 ANAKÜTLE ORANININ GÜVEN ARALIKLARI (BÜYÜK ÖRNEKLEMLERDE)

Şimdi anakütle birimlerinden özel bir nitelik taşıyanların oranıyla ilgilendiğimizi düşünelim. Sözgelimi, bütün yetişkin Amerikalılar içinde tabanca taşımayı denetleme yasasından yana olanların oranını tahmin etmek isteyebiliriz. Anakütleden rassal bir örneklem alınırsa, anakütledeki oranın doğal bir nokta tahmin edicisi, örneklem oranıdır. Bu altbölümde, anakütle oramnın güven aralıklarını türeteceğiz.

Binom çerçevesi içinde, her birinin başarı olasılığı p olan n tane bağımsız denemede "başarı"ların oranını $\hat{p}_x$ ile gösterelim. Altbölüm 6.3'te örneklem birimlerinin sayısı n büyükse,

$$Z = \frac{\hat{p}_x - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \qquad (8.5.1)$$

rassal değişkeninin dağılımının, standart normal dağılıma iyice yakın olduğunu gördük. Ne yazık ki, bu bulgu, Eş. (8.5.1)'in paydasında bilinmeyen p bulunduğundan, anakütle oranının güven aralıklarını bulmamız için pek yeterli değildir. Ama, örneklem büyükse, paydadaki p yerine onun tahmin edicisi olan $\hat{p}_x$ geçirilirse iyi bir yakınsama elde edilebilir:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

Öyleyse büyük örneklemlerde

$$Z = \frac{\hat{p}_x - p}{\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/n}}$$

rassal değişkeninin dağılımı yaklaşık olarak standart normaldir. Bu bulgu artık, anakütle oranının güven aralıklarını elde etmede kullanılabilir.

Daha önce olduğu gibi burada da $z_{\alpha/2}$'yi

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan sayı olarak tanımlıyoruz. Burada Z rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) \\
&= P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}_x - p}{\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/n}} < z_{\alpha/2}\right) \\
&= P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < \hat{p}_x - p < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}\right) \\
&= P\left(\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < p < \hat{p}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, gözlenen örneklem oram $\hat{p}_x$ ise, anakütle için yaklaşık bir $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şudur:

$$\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < p < \hat{p}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

Anakütle Oranının Güven Aralıkları (Büyük Örneklemde)

Başarı oranı p olan bir anakütleden çekilmiş n gözlemli rassal bir örneklemde "başarı" oranını $\hat{p}_x$ ile gösterelim. Bu durumda, n büyükse, anakütle oranının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı

$$\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < p < \hat{p}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

ile bulunur, burada $z_{\alpha/2}$

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayı, Z ise standart normal dağılıma uyan bir rassal değişkendir.[11]

Anakütle oranının güven aralıklarının orta noktası, örneklem oranıdır. Ayrıca, öteki her şey aynıyken, örneklem büyüklüğü n arttıkça, güven aralığının daraldığı görülebilir. Bu da, örneklem büyüdükçe anakütle oranına ilişkin bilginin hassaslaşmasını yansıtır.

ÖRNEK 8.6

Rassal bir örnekleme giren 344 sınai alıcıya "Personelinizin satıcılardan hediye kabul etmesi konusunda şirketinizin politikası nedir?" diye sorulmuştur. Bu alıcılardan seksenüçüne göre, ya alıcılar kendi kararlarını kendileri vermekte ya da bir politika bulunmamaktadır (yani aslında konu alıcıların kararına bırakılmıştır).[12] Satıcılardan hediye alma konusundaki kararları kendileri veren bütün alıcıların anakütle oranının %90 güven aralığını bulun.

Gerçek anakütle oram p, örneklem oranı $\hat{p}_x$ ise anakütle oranının güven aralıkları

$$\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < p < \hat{p}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

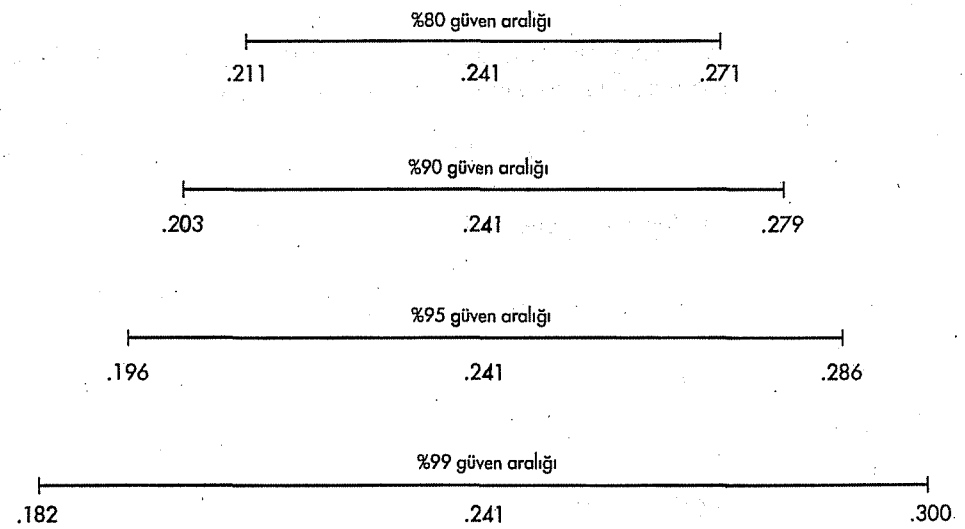
ile bulunur. Burada %90 güven aralığı için $\alpha = 0.10$ olur, böylece

$$\alpha/2 = 0.05 \qquad z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

Ek Çizelge 3'ten elde edilir. Öyleyse şunları biliyoruz demektir:

[11] Bu yolla bulunan güven aralıkları, $n = 40$ ya da daha çok gözleme dayandığında genellikle bir hayli güvenilir olmaktadır.

[12] Belirten kaynak: M. M. Bird, "Gift-giving and gift-taking in industrial companies," *Industrial Marketing Management, 18* (1989), 91-94.



ÇİZİM 8.10 Anakütle oranının Alıştırma 8.6 verilerine dayanan %80, %90, %95, %99 güven aralıkları

$$n = 344 \qquad \hat{p}_x = 83/344 = 0.241 \qquad z_{\alpha/2} = 1.645$$

Dolayısıyla, anakütlenin %90 güven aralığı şöyledir:

$$0.241 - 1.645\sqrt{\frac{(0.241)(0.759)}{344}} < p < 0.241 + 1.645\sqrt{\frac{(0.241)(0.759)}{344}}$$

ya da

$$0.203 < p < 0.279$$

Demek ki, bütün sınai alıcılar anakütlesi için bu aralık %20.3 ile %27.9 arasıdır. Çizim 8.10 ayrıca, anakütle oranının %80, %95, %99 güven aralıklarını da göstermektedir. Her zaman olduğu gibi, olasılık içeriği yükseldikçe, aynı verilere dayanan güven aralığı genişlemektedir.

ÖRNEK 8.7

Üniversite yerleşkelerinde işe almak üzere öğrencilerle görüşen 142 şirket görevlisinden oluşan rassal bir örnekleme, işe almada mezuniyet notunun oynadığı rolün ne olduğu sorulmuştur. Bu örneklemdeki kişilerden 87'si "kritik," "son derece önemli," ya da "çok önemli" yanıtlarını vermiştir.[13] Bu görüşteki işe alma görevlilerinin anakütle oranı için %95 güven aralığını bulun.

[13] Bu bilgilerin alındığı yer: R. M. Schramnn, R. N. Dortch, "An analysis of effective resumé content, format, and appearance, based on college recruiter perceptions," *Bulletin of the Association of Business Communication, 54,* no. 3, (1991), 18-23.

%95 güven aralığı için $\alpha = 0.05$ iken, Ek Çizelge 3'ten $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ okunur. Öyleyse şunları biliyoruz demektir:

$$n = 142 \qquad \hat{p}_x = 87/142 = 0.613 \qquad z_{\alpha/2} = 1.96$$

Bu değerleri genel formülde yerine koyarsak %95 güven aralığını

$$0.613 - 1.96\sqrt{\frac{(0.613)(0.387)}{142}} < p < 0.613 + 1.96\sqrt{\frac{(0.613)(0.387)}{142}}$$

ya da

$$0.533 < p < 0.693$$

olarak buluruz. Dolayısıyla, mezuniyet notunu kritik, son derece önemli ya da çok önemli bulan işe alma görevlilerinin oranı için %95 güven aralığı %53.3 ile %69.3 arasıdır.

Anakütle oranına ilişkin bilgimizin hassas olmadığım yansıtan bu aralık bir hayli geniştir. Daha dar güven aralıkları, daha büyük örneklemler alınarak bulunabilir. Altbölüm 8.9'da, belli genişlikte bir güven aralığı elde edebilmek için gerekli örneklem büyüklüğünü nasıl saptayacağımızı göreceğiz.

8.6 NORMAL DAĞILMIŞ BİR ANAKÜTLENİN VARYANSININ GÜVEN ARALIKLARI

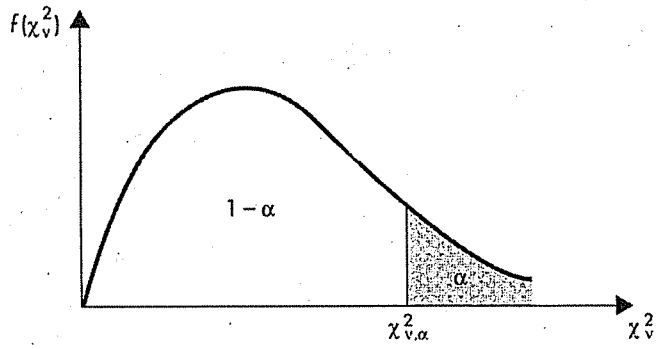
Altbölüm 8.2 ile 8.4'te anakütle ortalaması için güven aralıklarını nasıl bulacağımızı görmüştük. Zaman zaman bir anakütlenin varyansı için de güven aralıkları bulmak gerekir. Beklenebileceği gibi, bu tahminler örneklem varyansına dayanır.

Varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem seçmiş olalım, örneklem varyansını da s_X^2 ile gösterelim. Altbölüm 6.4'te

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma^2}$$

rassal değişkeninin, $(n-1)$ serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımına uyduğunu görmüştük. Bu bulgu, normal bir dağılımdan örneklem alındığında anakütle varyansı için güven aralıklarının türetilmesinin temelini oluşturur.

Varyansın güven aralıklarını hesaplayabileceğimiz bir formül geliştirmek için, Çizim 8.11'de gösterilen ve aşağıdaki çerçevede betimlenen yeni bir gösterim gerekmektedir.



ÇİZİM 8.11 $P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$, burada χ^2_ν, ν serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkenidir

Gösterim

ν serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyan bir rassal değişken χ^2_ν ile gösterilecektir.

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan sayıyı da χ^2_ν olarak tanımlayalım.

Belli bir α olasılığına karşılık gelen $\chi^2_{\nu,\alpha}$ sayısını bulmamız gerekir. Bu da, ki-kare rassal değişkeninin Ek Çizelge 5'te verilen birikimli dağılım fonksiyonunun değerleriyle sağlamr. Sözgelimi, 6 serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkeninin 0.05 olasılıkla aşabileceği, yani

$$P(\chi^2_6 > \chi^2_{6,0.05}) = 0.05$$

eşitliğini sağlayan sayıyı bulmak istediğimizi düşünelim. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

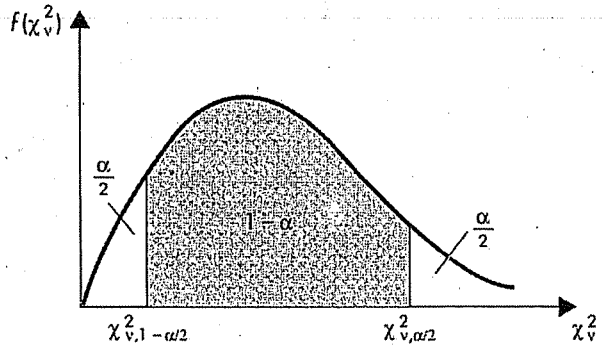
$$\chi^2_{6,0.05} = 12.59$$

Az önce tanımlanan gösterimi kullanıp

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

yazabiliriz. Benzer biçimde, $\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}$ de

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$



ÇİZİM 8.12 $P(\chi^2_{\nu,1-\alpha/2} < \chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,\alpha/2}) = 1-\alpha$, burada χ^2_ν, ν serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkenidir

biçiminde tanımlanır, böylelikle

$$P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$P(\chi^2_{\nu,1-\alpha/2} < \chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$$

elde edilir. Bu olasılık Çizim 8.12'de gösterilmiştir.

Bunu açıklamak için, 6 serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkeninin aralarında kalma olasılığı 0.9 olan bir çift sayı aradığımızı düşünelim. Bu durumda

$$1-\alpha = 0.9 \qquad \alpha = 0.1$$

olur, böylece şu bulunur:

$$P(\chi^2_{6,0.95} < \chi^2_6 < \chi^2_{6,0.05}) = 0.9$$

Daha önce $\chi^2_{6,0.05} = 12.59$ olduğunu saptamıştık. Ek Çizelge 5'ten

$$\chi^2_{6,0.95} = 1.64$$

olduğu görülür. Demek ki, bu ki-kare rassal değişkeninin 1.64 ile 12.59 arasında kalmasının olasılığı 0.9'dur.

Anakütle varyansının güven aralıklarını bulmak üzere, $(n-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımı için şunu biliyoruz:

$$1-\alpha = P(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,\alpha/2})$$
$$= P\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right)$$
$$= P\left[\frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right]$$

Dolayısıyla, örneklem varyansının gözlenen belli değeri s_x^2 ise, anakütle varyansının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyledir:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

Normal Bir Anakütlenin Varyansı İçin Güven Aralıkları

Varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden rassal seçilmiş n gözlemli bir örneklemimiz olsun. Gözlenen örneklem varyansı s_x^2 ise, anakütle varyansının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

ile bulunur, burada $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini, $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ ise

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlar. χ^2_{n-1} rassal değişkeni de $(n-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyar.

ÖRNEK 8.8

Bir rassal örneklemdeki onbeş baş ağrısı hapında etkin madde yoğunluğunun standart sapması %0.8 çıkmıştır. Bu hapların anakütlesindeki varyansın %90 güven aralığını bulun.

Şunları biliyoruz:

$$n = 15 \qquad s_x^2 = (0.8)^2 = 0.64$$

%90 güven aralığı istendiğine göre, $\alpha = 0.1$ olur. Ek Çizelge 5'ten şunlar görülür:

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{14,0.05} = 23.68 \qquad \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{14,0.95} = 6.57$$

Anakütle varyansının %90 güven aralığı da şöyle bulunur:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

Yerine koyma ile

$$\frac{(14)(0.64)}{23.68} < \sigma^2 < \frac{(14)(0.64)}{6.57}$$

ya da

$$0.378 < \sigma^2 < 1.364$$

bulunur. Öyleyse etkin madde yoğunlaşmasının anakütledeki varyansımn %90 güven aralığı 0.378 ile 1.364 arasıdır.

Standart sapma varyansın karekökü olduğuna göre, anakütle standart sapmasının %90 güven aralığını elde etmek için bunların kare köklerini alırız. O zaman bu aralık

$$0.61 < \sigma < 1.17$$

olur. Demek ki, bu haplardaki etkin madde yoğunluğunun anakütledeki standart sapmasının %90 güven aralığı %0.61 ile %1.17 arasıdır.

Bu altbölümü, anakütle dağılımı normal değilse az önce gösterilen sürecin tehlikeli olacağı uyarısıyla bitiriyoruz. Varyans için aralık tahmininin geçerliliğinin normallik varsayımına bağlılığı, Altbölüm 6.4'te geliştirilen anakütle ortalaması için aralık tahmininkinden çok daha önemlidir.

ALIŞTIRMALAR

18. San Francisco Giant beyzbol kulübünün sahipleri Ekim 1992'de, takım adının satılarak takımın St. Petersburg, Florida'ya taşınması konusunu düşünüyordu. *The San Francisco Examiner* gazetesinin rassal olarak seçtiği San Francisco Körfez Bölgesi vergi yükümlülerinden 610 kişilik bir örneklem içinde bu taşınmadan hoşnut olmayanların oranı %50.7 idi. Körfez Bölgesi vergi mükellefleri anakütlesi içinde bu görüşte olanlar oranının %99 güven aralığını bulun.

19. Amerikan Basketbol Birliği (NBA) maçlarından ilk çeyrek sonunda durumu berabere olmayalar arasından 189'u rassal bir örnekleme seçilmiştir. Bu maçların 132'sinde ilk çeyrek sonunda önde olan takım maçı da kazanmıştır.[14]
   (a) İlk çeyrek sonunda önde olan takımın maçı kazandığı durumların anakütledeki oranı için %90 güven aralığını bulun.
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle oranının %95 güven aralığının (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar yoksa onunla aynı mı olduğu belirtin.

20. Rassal bir örneklemdeki 323 sendikalı işçiden %47.9'u şu söyleme ya katılmakta ya da çok katılmaktadır: "Bir işe sendikalı olmayan bir işçi gönderilirse sendika üyeleri çalışmayı reddetmelidir."[15] Bir istatistikçi bu bilgilere dayanarak bu görüşteki bütün sendika üyelerinin oranının güven aralığını %45.8 ile %50.0 arası olarak hesaplamıştır. Bu aralığın güven düzeyini bulun.

21. Büyük denetim şirketlerinde çalışan 134 denetmenden oluşan rassal bir örneklemdeki 82 kişi, yeni bir denetim işi kendilerine verildiğinde, her zaman, bir önceki denetmenden denetmen değiştirilmesinin nedenini öğrenmek istediklerini söylemiştir.[16] Anakütle oranının %95 güven aralığını bulun.

22. Rassal bir örnekleme seçilmiş 95 küçük sanayi işletmesinden 29'u, ürünleri yeniden canlandırmak ya da rekabet başarımını geliştirmek için alınan en önemli önlem olarak kalite iyileştirmeyi göstermişlerdir. [17]
   (a) Anakütle oranının %99 güven aralığını bulun.
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle oranının %90 güven aralığının (a)'da bulunandan daha mı geniş, daha mı dar yoksa onunla aynı mı olduğu belirtin.

23. ABD'de doğrudan yatırım yapan ve bağımsız Amerikan dağıtımcıları kullanan yabancı imalatçılardan 96'sı rassal bir örnekleme seçilmiştir. Bu örneklemdekilerden 32'si, bu dağıtımcıların yol gösterme ve teknik destek işlevini ya hiç yerine getirmediklerini ya da ender olarak yaptıklarını söylemiştir.[18] Anakütle oranının %80 güven aralığını bulun.

24. Bir rassal örneklemdeki 198 pazarlama öğrencisinden 98'i özgeçmişin abartılmasını aktöreye aykırı bulmuştur.[19] Bir istatistikçi bu bilgiye dayanarak anakütle oranının bir güven aralığını 0.445 ile 0.545 arası olarak bulmuştur. Bu aralığın olasılık içeriği kaçtır?

---

[14] H. Cooper, K. M. DeNeve, F. Mosteller, "Predicting professional sports game outcomes from intermediate game scores," *Chance, 5*, no. 3 (1992), 18-22. (Bu basketbol maçları dört devre üzerinden oynanır. (Ç.N.)

[15] S. Chang, L. Robinson, "Perceptions of labor unions by union members and their potential employers, *Mid-American Journal of Business, 5*, no. 2, (1990), 25-30.

[16] J. C. Lambert, S. J. Lambert, T. G. Calderon, "Communication between successor and predecessor auditors," *Auditing: A Journal of Practice and Theory, 10*, no.1, (1991), 92-109.

[17] W. Davig, S. Brown, "Incremental decision making in small manufacturing firms," *Journal of Small Business Management, 30*, no. 2 (1992), 53-60.

[18] B. Rosenbloom, T. L. Larsen, "How foreign firms view their US distributors," *Industrial Marketing Management, 21* (1992), 93-101.

[19] P. A. Dabholkar, J. J. Kellaris, "Toward understanding marketing students' ethical judgement of controversial personal selling practices," *Journal of Business Research, 24* (1992), 313-29.

25. Bir rassal örneklemdeki onbeş mali analist, General Motors Şirketi'nin gelecek yıldaki pay senedi başına kazancını tahmin etmiştir. Örneklemin standart sapması 0.880 $'dır. Bütün analistlerin pay senedi başına kazanç tahminlerinin varyansı için %95 güven aralığını bulun.
26. Alıştırma 11'in verilerini kullanıp, otoyolun bu bölümünde giden bütün araba hızlarının anakütle varyansı için %80 güven aralığını bulun.
27. Alıştırma 12'nin verilerini kullanıp, bu kliniğin zayıflama programına katılanların verdikleri kiloların anakütle standart sapması için %90 güven aralığını bulun.
28. Alıştırma 13'ün verilerini kullanıp, öğrencilerin bütün sınav sonuçlarının anakütle standart sapması için %95 güven aralığını bulun.
29. Bu altbölümde anlatılan anakütle varyansının güven aralıkları, örneklem varyansını orta nokta olarak almaz. Bunun gerekçesini çizimle göstererek açıklayın.
30. Aynı örneklem bilgisi verilmişken, anakütle varyansı için bu altbölümde bulunanlardan daha dar güven aralıkları aynı olasılık içeriğiyle (ilke olarak) bulunabilir. Bunun gerekçesini çizimle göstererek açıklayın.
31. Bir psikolog, çalışanların sınav başarı notlarının varyansını tahmin etmek istemektedir. Onsekiz gözlemli bir örneklemde örneklem standart sapması 10.4 bulunmuştur. Anakütle varyansı için %90 güven aralığını bulun. Bu aralık tahminini hesaplarken herhangi bir varsayım yaptıysanız bu nedir?
32. Bir üretici, bir satıcıdan gelen hammadde partilerindeki katışıklılık oranının değişkenliğiyle ilgilenmektedir. Onbeş partilik rassal bir örneklem, katışıklılık oranının standart sapmasının %2.36 olduğunu göstermiştir. Anakütle olasılık dağılımını normal varsayalım.
    (a) Anakütle varyansı için %95 güven aralığını bulun.
    (b) %99 güven aralığı (a)'da bulunandan daha mı geniştir, daha mı dardır?
33. Bir üretici metal bir yüzeyi plastikle kaplamaktadır. Bir haftalık çıktıdan alınan dokuz gözlemlik bir rassal örneklemde kaplamanın kalınlığı ölçülmüştür. Örneklemde bulunan değerler (milimetre cinsinden) şöyledir:

    19.8 21.2 18.6 20.4 21.6 19.8 19.9 20.3 20.8

    Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımıyla anakütle varyansının %90 güven aralığını bulun.

8.7 NORMAL DAĞILMIŞ İKİ ANAKÜTLENİN ORTALAMALARI ARASINDAKİ FARKIN GÜVEN ARALIKLARI

İstatistik çıkarsamanın önemli bir sorunu da iki anakütle ortalamasının karşılaştırılmasıyla ilgilidir. Bir örnek olmak üzere, bir şirket iki ayrı satıcıdan kimyasal madde alıyor ve iki satıcının kimyasal maddelerindeki katışıklılık düzeyini karşılaştırmak istiyor olabilir. Başka bir örnek olarak, bir çiftçi iki farklı gübre kullanmayı düşünüyor, dönüm başına ortalama verimler arasındaki farkla ilgileniyor olabilir.

Anakütle ortalamalarını karşılaştırmak için iki anakütleden birer rassal örneklem seçilir, anakütle ortalamaları arasındaki farkın çıkarsaması bu örneklem sonuçlarına dayandırılır. Bu bilginin çözümlenmesi için uygun yöntem, örneklemlerin seçilmesinde kullanılan sürece bağlıdır. Çok yaygın kullanılan, aşağıdaki iki örnekleme düzenini ele alacağız:

1. EŞLENİK ÇİFTLER □ Bu düzende örneklem gözlemleri, her biri birer anakütleden çiftler halinde seçilir. Düşünce şudur: Bu çiftleri oluşturan gözlemler, incelenen konu dışında, birbirlerine olabildiğince benzemelidir ki ilgilenilen karşılaştırma doğrudan yapılabilsin. Sözgelimi, bir hızlı okuma kursunun etkinliğini ölçmek istediğimizi düşünelim. Başvurulabilecek bir yaklaşım, bir örneklemdeki öğrencilerin kurstan önce dakikada kaç sözcük okuduklarını kaydedip bunları *aynı öğrencilerin* kurstan sonraki sonuçlarla karşılaştırmak olabilir. Bu durumda, her bir çift gözlem, tek bir öğrencinin "önceki" ve "sonraki" ölçümlerinden oluşur.
2. BAĞIMSIZ ÖRNEKLEMLER □ Bu düzende örneklemler iki anakütleden, bir örneklemin gözlemleri ötekindekilerden etkilenmeyecek biçimde, bağımsız olarak seçilirler. İki satıcıdan kimyasal madde alan üretici örneğinde, iki satıcıdan gelen partilerden bağımsız örneklemler seçebilir, her bir örneklem partisinin katışıklılık oranını ölçebiliriz.

Hangi örnekleme yöntemi kullanılırsa kullanılsın, bu altbölümdeki amacımız, iki anakütle ortalamasının arasındaki fark için güven aralıkları bulmaktır.

EŞLENİK ÇİFTLERE DAYALI GÜVEN ARALIKLARI

Ortalamaları μ_X ve μ_Y olan iki anakütleden, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ile gösterilen n tane eşlenik gözlem çiftinden oluşan rassal bir örneklem çekmiş olalım. Böylece $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ortalaması μ_X olan anakütleden çekilmiş gözlemleri, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ise ortalaması μ_Y olan anakütleden seçilmiş eşlenik örneklem değerlerini gösterir. Çizelge 8.2, iki ayrı model arabanın her birinden seçilmiş sekizer arabalık bir rassal örneklemden elde edilen yakıt tüketimi değerlerini göstermektedir. Örneklem arabaları çiftler halindedir, belli bir çifti oluşturan her bir araba, yol ve sürücü değişkenliklerini ortadan kaldırmak için, aynı yolda aynı sürücü tarafından kullanılmıştır. Çizelge aynı zamanda sayılar arasındaki farkları da (d_i) göstermektedir. Bu farklar, iki model arabanın anakütle ortalaması arasındaki farklardan oluşan, ortalaması $(\mu_X - \mu_Y)$ olan bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklemi temsil ederler.

Çizelgedeki bilgilerden, yakıt tüketimindeki farkların örneklem ortalaması ile varyansı hesaplanabilir. Ortalama

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{8}(6.2) = 0.775$$

ÇİZELGE 8.2 Eşlenik araba çiftlerinde gözlenmiş yakıt tüketimi, galon başına mil

	X ARABALARI	Y ARABALARI	FARKLAR	
i	x_i	y_i	d_i	d_i^2
1	19.4	19.6	–0.2	0.04
2	18.8	17.5	1.3	1.69
3	20.6	18.4	2.2	4.84
4	17.6	17.5	0.1	0.01
5	19.2	18.0	1.2	1.44
6	20.9	20.0	0.9	0.81
7	18.3	18.8	–0.5	0.25
8	20.4	19.2	1.2	1.44
		Toplamlar	6.2	10.52

varyans ise

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)$$

$$= \frac{1}{7}[10.52 - 8.775]^2 = 0.816$$

olur, böylece gözlenen örneklem standart sapması da şu olur:

$$s_d = \sqrt{0.816} = 0.903$$

Şimdi o anakütleden seçilmiş rassal bir örneklem (farkların d_i değerleri) verilmişken, anakütle ortalaması $(\mu_X - \mu_Y)$ için güven aralıklarını arayabilir durumdayız. Anakütle dağılımının normal olduğu varsayılırsa, Altbölüm 8.4'te geliştirilen süreç hemen uygulanabilir, çünkü eşlenik çiftlerdeki farklar, ortalaması tahmin etmeye çalıştığımız büyüklük olan bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturur.

Ortalamalar Arasındaki Farklar İçin Güven Aralıkları: Eşlenik Çiftler

Ortalamaları μ_X ile μ_Y olan dağılımlardan n tane eşlenik gözlem çiftinden oluşan rassal bir örneklem çekilmiş olsun. n tane $d_i = x_i - y_i$ farkının gözlenen örneklem ortalaması ile standart sapmasını $\bar{d}$ ve s_d ile gösterelim. Farkların anakütle dağılımının normal olduğu varsayılırsa, $(\mu_X - \mu_Y)$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{d} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_d}{\sqrt{n}} < \mu_X - \mu_Y < \bar{d} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_d}{\sqrt{n}}$$

Burada $t_{n-1,\alpha/2}$

$$P(t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlar, t_{n-1} rassal değişkeni de serbestlik derecesi $(n-1)$ olan bir Student t dağılımına uyar.

Yakıt tüketimi örneğinde şunları bulmuştuk:

$$\bar{d} = 0.775 \qquad s_d = 0.903 \qquad n = 8$$

%99 güven aralığı için $\alpha = 0.01$'dir, dolayısıyla Ek Çizelge 6'dan şu okunur:

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{7,0.005} = 3.499$$

Böylece anakütle ortalamaları arasındaki farkın %99 güven aralığım, bu bilgileri aşağıdaki eşitsizlikte yerine koyarak bulabiliriz:

$$\bar{d} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_d}{\sqrt{n}} < \mu_X - \mu_Y < \bar{d} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} s_d}{\sqrt{n}}$$

yani

$$0.775 - \frac{(3.499)(0.903)}{\sqrt{8}} < \mu_X - \mu_Y < 0.775 + \frac{(3.499)(0.903)}{\sqrt{8}}$$

ya da

$$-0.342 < \mu_X - \mu_Y < 1.892$$

bulunur. Öyleyse bu iki tür arabanın yakıt tüketimleri arasındaki farkın %99 güven aralığını, Çizelge 8.2'deki verilere dayanarak, galon başına –0.342 ile 1.892 olarak bulduk. Bu aralık sıfırı içerdiğinden, anakütle ortalamalarının aynı olduğunu ileri süren görüşe karşı kanıtlar pek de güçlü değildir.

BAĞIMSIZ ÖRNEKLEMLERE DAYANAN GÜVEN ARALIKLARI

Şimdi de ilgilenilen iki anakütleden büyüklükleri aynı olması gerekmeyen bağımsız örneklemler çektiğimizi düşünelim. Ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan anakütleden n_x tane gözlemli rassal bir örneklem, ortalaması μ_Y, varyansı σ_Y^2

olan anakütleden n_y tane gözlemli bağımsız bir rassal örneklem çekmiş olalım. Bunların ortalamaları da sırasıyla $\overline{X}$ ile $\overline{Y}$ olsun.

İlk adım olarak, iki anakütlenin bilinen varyanslarla normal dağılıma uyduğu durumu inceleyelim. İlgi konusu, iki anakütlenin ortalamaları arasındaki fark olduğuna göre, çıkarsamayı bunlara karşılık gelen örneklem ortalamalarının farkına dayandırmak doğaldır. Bu rassal değişkenin ortalaması

$$E(\overline{X}-\overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_X - \mu_Y$$

ile, örneklemler bağımsız olduğundan, varyansı da

$$\text{Var}\,(\overline{X}-\overline{Y}) = \text{Var}\,(\overline{X}) - \text{Var}\,(\overline{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}$$

ile bulunur. Ayrıca, bu dağılımın normal olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_y}}}$$

rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar. Anakütle ortalamaları arasındaki farkın güven aralıklarını elde edebilmek için Altbölüm 8.2'dekine koşut bir akıl yürütme kullanılabilir. Bu aralık gerçek anakütle varyanslarını gerektirdiğinden, doğrudan kullanılması pek enderdir. Ancak, Altbölüm 8.2'de olduğu ve aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, örneklemler büyük olduğunda uygulanma alanı da büyük ölçüde genişler.

Ortalamalar Arasındaki Fark İçin Güven Aralıkları: Bağımsız Örneklemler (Varyanslar Biliniyor ya da Örneklemler Büyük)

Ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları σ_X^2 ile σ_Y^2 olan normal dağılımlardan n_x ve n_y gözlemli bağımsız rassal örneklemler çekmiş olalım. Örneklem ortalamaları $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ ise $(\mu_X - \mu_Y)$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları şöyle bulunur:

$$(\overline{x}-\overline{y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}} < \mu_X - \mu_Y < (\overline{x}-\overline{y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}$$

Burada $z_{\alpha/2}$

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

eşitliğini sağlayan sayı olup Z rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar.

Örneklem büyüklükleri n_x ile n_y yüksekse,[20] yukarıdaki eşitsizlikte anakütle varyansları yerine bunlara karşılık gelen gözlenmiş örneklem varyansları s_x^2 ile s_y^2 konulup, $(\mu_X - \mu_Y)$ için %100 $(1-\alpha)$ güven aralıkları iyi bir yakınsama ile elde edilir. Büyük örneklemler için, anakütle dağılımı normal olmasa bile, bu yaklaşıklık çoğunlukla yeterlidir.

ÖRNEK 8.9

Sigara içen 96 kişilik bir rassal örneklemde, kısa süreli iş devamsızlığının ortalaması ayda 2.15 saat, standart sapması da ayda 2.09 saattir. Ömründe hiç sigara içmemiş 206 kişilik bağımsız bir örneklemde ise ortalama devamsızlık ayda 1.69 saat, standart sapma ayda 1.91 saattir.[21] İki anakütle ortalaması arasındaki farkın %99 güven aralığını bulun.

Sigara içenler için

$$\bar{x} = 2.15 \qquad n_x = 96 \qquad s_x = 2.09$$

olduğunu, ömründe hiç sigara içmeyenler için de

$$\bar{y} = 1.69 \qquad n_y = 206 \qquad s_y = 1.91$$

olduğunu biliyoruz.

Örneklemler büyük olduğuna göre, çerçeve içinde verilen formülde anakütle varyansları yerine örneklem varyanslarını kullanabiliriz. Bu durumda anakütle ortalamaları arasındaki farkın güven aralıkları şu biçimi alır:

$$(\bar{x}-\bar{y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{x}-\bar{y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}}$$

Burada %99 güven aralığı için

$$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$$

olup, aranan aralık şudur:

$$(2.15-1.69) - 2.575\sqrt{\frac{(2.09)^2}{96}+\frac{(1.91)^2}{206}} < \mu_X - \mu_Y$$

$$< (2.15-1.69) + 2.575\sqrt{\frac{(2.09)^2}{96}+\frac{(1.91)^2}{206}}$$

$$-0.19 < \mu_X - \mu_Y < 1.11$$

[20] Her bir örneklemde otuzar gözlem bu yaklaşım için genellikle yeterlidir.

[21] Belirten kaynak: M. R. Manning, J. S. Osland, A. Osland, "Work-related consequences of smoking cessation," *Academy of Management Journal, 32* (1989), 606-21.

Sıfır, anakütle ortalamaları arasındaki farkın %99 güven aralığı içinde olduğuna göre, iki grubun ortalama devamsızlıklarının aynı olduğunu ileri süren görüşe karşı kanıtlar pek ağırlıklı değildir.

ÖRNEK 8.10

Bağımsız rassal örneklemlere seçilen öğretim üyeleri ile üst düzey yöneticilerden, son on yılda yapılan stratejik yönetim araştırmalarının yönetim uygulamalarındaki geçerliliğini, bir (büyük ölçüde azaldı) ile beş (büyük ölçüde arttı) arasında değerlendirmeleri istenmiştir.[22] 321 öğretim üyelik örneklemde ortalama not 3.01, örneklem standart sapması 1.09 bulunmuştur. 94 üst düzey yöneticilik örneklemde ise ortalama 2.88, örneklem standart sapması 1.01'dir. Öğretim üyelerinin anakütle ortalamasını μ_X, üst düzey yöneticilerininkini de μ_Y ile göstererek $(\mu_X - \mu_Y)$ için %95 güven aralığını bulun.

Yine, örneklemler büyük olduğundan anakütle varyansları yerine, örneklem varyanslarını geçirerek aralıkları aşağıdaki eşitsizlikten buluruz:

$$(\bar{x}-\bar{y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{x}-\bar{y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x}+\frac{s_y^2}{n_y}}$$

Burada

$$n_x = 321 \qquad \bar{x} = 3.01 \qquad s_x = 1.09$$
$$n_y = 94 \qquad \bar{y} = 2.88 \qquad s_y = 1.01$$

olup %95 güven aralığı için

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

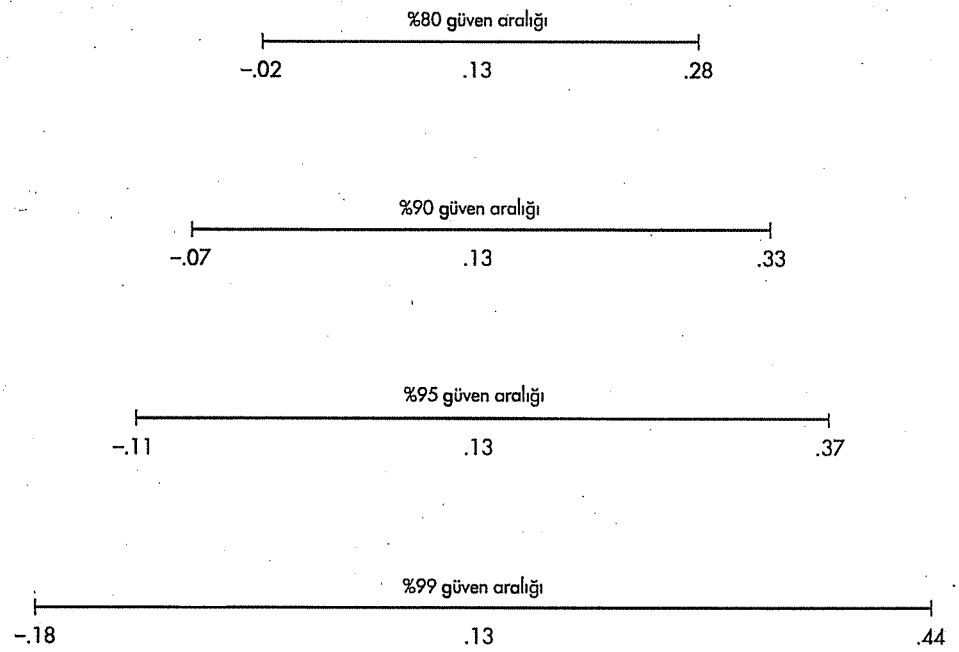
olur. Öyleyse güven aralığı şudur:

$$(3.01-2.88) - 1.96\sqrt{\frac{(1.09)^2}{321}+\frac{(1.01)^2}{94}} < \mu_X - \mu_Y$$
$$< (3.01-2.88) + 1.96\sqrt{\frac{(1.09)^2}{321}+\frac{(1.01)^2}{94}}$$

$$-0.11 < \mu_X - \mu_Y < 0.37$$

Bu aralık sıfırı içermektedir, bu da anakütle ortalamalarının farklı olduğuna ilişkin güçlü kanıt olmadığı anlamına gelir. Çizim 8.13, bu güven aralığıyla birlikte %80, %90, %99 güven aralıklarını da göstermektedir.

[22] S. A. Zahra, J. A. Pearce, "Priorities of CEOs and strategic management professors for future academic research," *Journal of Managerial Issues, 4* (1992), 171-89.



ÇİZİM 8.13 Örnek 8.10'un verilerine dayanılarak bulunan %80, %90, %95, %99 güven aralıkları

Şimdi de örneklemlerin büyük olmadığı, iki normal anakütleden çekilmiş bağımsız rassal örneklemlere dayanılarak iki anakütle ortalaması arasındaki farkın güven aralığım gerektiren durumu ele alacağız. Aslında, anakütle varyansları bilinmiyorsa, bu genel probleme eğilmenin önemli güçlükleri vardır. Ancak, iki anakütle varyansının eşit olduğunun varsayılabileceği özel bir durumda,[23] oldukça doğrudan bir yöntem kullanılabilir.

Ortalamaları μ_X ile μ_Y olan iki normal anakütleden n_x ile n_y gözlemli bağımsız rassal örneklemler aldığımızı, bu anakütlelerin aynı (bilinmeyen) σ^2 varyansına sahip olduklarım düşünelim. Anakütle ortalamalarına ilişkin çıkarsama, daha önce olduğu gibi, örneklem ortalamaları arasındaki $(\overline{X}-\overline{Y})$ farkına dayanır. Bu rassal değişken, ortalaması $(\mu_X-\mu_Y)$, varyansı

[23] Bu varsayımın geçerliliğini sınamak için verilerin nasıl kullanılacağını Bölüm 9'da göreceğiz.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\bar{X}-\bar{Y}) &= \text{Var}(\bar{X}) - \text{Var}(\bar{Y}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y} \\ &= \sigma^2\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right) \\ &= \sigma^2\left(\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}\right)\end{aligned}$$

olan normal bir dağılıma uyar. Dolayısıyla

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}\right)}} \tag{8.7.1}$$

rassal değişkeni de standart normal dağılıma uyar. Ama bu bulgu, bilinmeyen anakütle varyansım içerdiğinden bu durumuyla kullanılamaz. Bu varyans her iki anakütlede de ortak olduğundan, iki örneklemdeki bilgi kümeleri bunu tahmin etmek için bir araya getirilebilir. Kullanılan tahmin edici şudur:

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{(n_x + n_y - 2)}$$

Burada s_x^2 ile s_y^2 iki örneklem varyansıdır.

Eş. (8.7.1)'deki bilinmeyen σ^2 yerine s^2 tahmin edicisi konursa, şu rassal değişken elde edilir:

$$t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{s\sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}}$$

Bu rassal değişkenin, $(n_x + n_y - 2)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyduğu gösterilebilir. Bu bulgu veriyken, anakütle ortalamalarının farkı için güven aralıkları, Altbölüm 8.4'te kullanılan akıl yürütmeye benzer biçimde elde edilebilir.

İki Normal Anakütlenin Ortalamaları Arasındaki Farkın Güven Aralıkları: Bağımsız Örneklemler, Anakütle Varyansları Eşit

Ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları aynı olan iki normal dağılımdan n_x ve n_y gözlemli bağımsız rassal örneklemler seçtiğimizi düşünelim. Gözlenen örneklem ortalamaları ile varyansları $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x^2, s_y^2 ise, $(\mu_X - \mu_Y)$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları şöyle bulunur:

$$(\bar{x}-\bar{y}) - t_{n_x+n_y-2,\,\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{x}-\bar{y}) + t_{n_x+n_y-2,\,\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}}$$

Burada

$$s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{(n_x+n_y-2)}$$

$t_{n_x+n_y-2,\,\alpha/2}$ ise

$$P(t_{n_x+n_y-2} > t_{n_x+n_y-2,\,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan sayı olup, $t_{n_x+n_y-2}$ rassal değişkeni, (n_x+n_y-2) serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.

ÖRNEK 8.11

Planlamanın bankaların mali başarımı üzerindeki etkilerini inceleyen bir çalışmada,[24] "kısmen biçimsel plan" yapan altı bankalık bir rassal örneklemde net gelirdeki yıllık yüzde artış ortalaması 9.972, standart sapması 7.470 çıkmıştır. Hiçbir biçimsel planlaması olmayan dokuz bankalık bağımsız bir rassal örneklemde net gelirdeki yıllık yüzde artış ortalaması 2.098, standart sapması 10.834 olmuştur. İki anakütlenin aynı varyansla normal dağıldığını varsayarak, bunların ortalamaları arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

"Kısmen biçimsel plan" yapanlara x, hiç biçimsel planı olmayanlara y dersek, şunları yazabiliriz:

$$n_x = 6 \qquad \bar{x} = 9.972 \qquad s_x = 7.470$$

$$n_y = 9 \qquad \bar{y} = 2.098 \qquad s_y = 10.834$$

Ortak anakütle varyansımn tahmini de şöyledir:

[24] D. R. Wood, R. L. LaForge, "The impact of comprehensive planning on financial performance," *Academy of Management Journal, 22* (1979), 516-26.

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{(n_x + n_y - 2)}$$

$$= \frac{(5)(7.470)^2 + (8)(10.834)^2}{13} = 93.693$$

$$s = \sqrt{93.693} = 9.680$$

Aranan aralık şu biçimdedir:

$$(\bar{x} - \bar{y}) - t_{n_x+n_y-2,\alpha/2} s \sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{x} - \bar{y}) + t_{n_x+n_y-2,\alpha/2} s \sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}$$

Burada %90 güven aralığı için $\alpha = 0.10$'dur, böylece Ek Çizelge 6'dan şu okunur:

$$t_{n_x+n_y-2,\alpha/2} = t_{13,0.05} = 1.771$$

Öyleyse, net gelirdeki yıllık yüzde artışların anakütle ortalamaları arasındaki farkın %90 güven aralığı şöyle bulunur:

$$(9.972 - 2.098) - (1.771)(9.680)\sqrt{\frac{6+9}{54}}$$

$$< \mu_X - \mu_Y < (9.972 - 2.098) + (1.771)(9.680)\sqrt{\frac{6+9}{54}}$$

ya da

$$-1.161 < \mu_X - \mu_Y < 16.909$$

Bu iki tür banka için net gelirdeki yıllık yüzde artışların anakütle ortalamaları arasındaki farkın %90 güven aralığı 0'ı içermektedir. Bu da iki anakütle ortalamasının aynı olduğu görüşüne karşıt kanıtların çok güçlü olmadığı anlamına gelir.

8.8 İKİ ANAKÜTLE ORANLARI ARASINDAKİ FARKIN GÜVEN ARALIKLARI (BÜYÜK ÖRNEKLEMLERDE)

Altbölüm 8.5'te, tek bir anakütle oranının güven aralıklarını çıkarmıştık. Zaman zaman iki oranı karşılaştırmakla ilgileniriz. Sözgelimi, futbol oynayan üniversite öğrencilerinden mezun olanların oranıyla, sporcu olmayanlar arasındaki mezun oranını karşılaştırmak isteyebiliriz. Bu altbölümde, iki anakütleden bağımsız rassal büyük örneklemler alındığında, anakütle oranları arasındaki farkin güven aralıklarının nasıl elde edileceğini göreceğiz.

"Başarı" oranı p_X olan bir anakütleden çekilen n_x gözlemli rassal bir örneklemin, örneklem ortalamasını $\hat{p}_X$; "başarı" oranı p_Y olan bir anakütleden çekilen n_y gözlemli rassal bir örneklemin de örneklem ortalamasını $\hat{p}_Y$ olarak verdiğini düşünelim. Bizim asıl ilgimiz anakütle farkı $(p_X - p_Y)$ olduğundan, rassal değişken $(\hat{p}_X - \hat{p}_Y)$'yi incelememiz doğaldır. Bunun ortalaması şudur:

$$E(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) = E(\hat{p}_X) - E(\hat{p}_Y) = p_X - p_Y$$

Örneklemler bağımsız seçildiklerinden varyansı da şu olur:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) &= \text{Var}(\hat{p}_X) + \text{Var}(\hat{p}_Y) \\ &= \frac{p_X(1-p_X)}{n_x} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_y} \end{aligned} \qquad (8.8.1)$$

Buna ek olarak, örneklemler büyükse, bu rassal değişkenin dağılımı normale yakındır, böylece ortalaması çıkarılıp standart sapmasına bölünürse standart normal bir rassal değişken bulunur. Üstelik, büyük örneklemlerde, Eş. (8.8.1)' deki bilinmeyen anakütle oranları yerine örneklemlerde bunlara karşılık olan büyüklükler konursa bu yaklaşıklık sürer. Öyleyse,

$$Z = \frac{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_x} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_y}}}$$

rassal değişkeni iyi bir yakınsamayla, standart normal dağılıma uyar.

Bu bulgu, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, örneklemler büyükken, iki anakütle oram arasındaki farkın güven aralıklarının türetilmesine izin verir.

Anakütle Oranları Arasındaki Farkın Güven Aralıkları (Büyük Örneklemlerde)

Başarı oranı p_X olan bir anakütleden rassal çekilmiş n_x gözlemli bir örneklemde gözlenen başarı oranı $\hat{p}_x$ ile, başarı oranı p_Y olan bir anakütleden rassal çekilmiş n_y gözlemli bir örneklemde gözlenen başarı oranı $\hat{p}_y$ ile gösterilsin. Bu durumda, örneklemler büyükse,[25] $(p_X - p_Y)$ için $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları şöyle bulunur:

[25] Her bir örneklemde en az kırk gözlem varsa yakınsama genellikle yeterlidir.

$$(\hat{p}_x - \hat{p}_y) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n_x} + \frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{n_y}}$$

$$< p_X - p_Y < (\hat{p}_x - \hat{p}_y) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n_x} + \frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{n_y}}$$

burada $z_{\alpha/2}$,

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, Z rassal değişkeni de standart normal dağılıma uyar.

Bu süreci şimdi iki örnekle açıklayacağız.

ÖRNEK 8.12

Üniversitelerdeki pazarlama derslerinde müşteri destekli projeler (MDP) araştırmasında, MDP kullanan öğretim üyelerine "MDP'ler öğretim üyeleri için aman alıcıdır" tümcesi verilmiştir. Amerikan İşletmecilik Fakülteleri Birliğine tanınan okullardaki doksaniki MDP kullanıcısından oluşan rassal bir örneklemde kırkdokuz kişi bu görüşe katılmıştır. Tanınmamış okullardaki seksenaltı MDP kullanıcısından oluşan bağımsız bir örneklemde ise otuzaltı kişi bu görüşe katılmıştır.[26] Anakütle oranları sırasıyla p_X ve p_Y ile gösterilirse, $(p_X - p_Y)$ için %90 güven aralığını bulun.

Örneklem bilgilerinden şunları yazabiliriz:

$$n_x = 92 \qquad \hat{p}_x = \frac{49}{92} = 0.533 \qquad n_y = 86 \qquad \hat{p}_y = \frac{36}{86} = 0.419$$

%90 güven aralığı için $\alpha = 0.10$'dur, böylece

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

bulunur. Bu değerler güven aralığı formülünde yerine konursa şu bulunur:

$$(0.533 - 0.419) - 1.645\sqrt{\frac{(0.533)(0.467)}{92} + \frac{(0.419)(0.581)}{86}}$$

$$< p_X - p_Y < (0.533 + 0.419) + 1.645\sqrt{\frac{(0.533)(0.467)}{92} + \frac{(0.419)(0.581)}{86}}$$

ya da

$$-0.008 < p_X - p_Y < 0.236$$

[26] Belirten kaynak: V. Vincent, G. de los Santos, "Combining theory and practice in college marketing courses," *Business Forum, 14*, no. 1 (1989), 25-28.

Sıfır bu %90 güven aralığının kılpayı içinde olduğundan, iki ortalama oranının aynı olduğunu ileri süren görüşe karşıt kanıt bu verilerde çok güçlü değildir.

ÖRNEK 8.13

Son sınıf kız ve erkek muhasebe öğrencilerinden bağımsız rassal örneklemler seçilmiştir. 120 erkekten 107'si on yıl sonra tam zamanlı olarak çalışmayı beklemektedir. 141 kızdan 73'ü aynı beklentidedir.[27] İki anakütle oranları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

Örneklem değerleri şunlardır:

$$n_x = 120 \quad \hat{p}_x = \frac{107}{120} = 0.892 \quad n_y = 141 \quad \hat{p}_y = \frac{73}{141} = 0.518$$

%95 güven aralığı için $\alpha = 0.05$'tir, böylece

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

olur. Dolayısıyla aranan aralık şöyle bulunur:

$$(0.892 - 0.518) - 1.96\sqrt{\frac{(0.892)(0.108)}{120} + \frac{(0.518)(0.482)}{141}} < p_X - p_Y$$

$$< (0.892 - 0.518) + 1.96\sqrt{\frac{(0.892)(0.108)}{120} + \frac{(0.518)(0.482)}{141}}$$

ya da

$$0.275 < p_X - p_Y < 0.473$$

Sıfırın bu aralığın bir hayli dışında kalması, son sınıf muhasebe öğrencileri anakütlesinde erkeklerin kızlara göre on yıl sonra tam zamanlı çalışıyor olma beklentisinin daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir.

ALIŞTIRMALAR

34. Büyük bir Amerikan orta-batı kentinde birbirinin aynı evlerden oluşan on çiftlik rassal bir örneklem seçilmiş, her çift evin birinde güneş enerjisi sistemi kurulmuştur. Bütün bu evlerin üç kış ayındaki toplam yakıt giderleri (dolar cinsinden) aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi saptanmıştır. Normal anakütle dağılımları varsayımıyla, iki anakütle ortalaması arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

[27] R. J. Maupin, "Gender roles in transition: career and family expectations of accounting students," *Mid-American Journal of Business, 8* (1993), 33-37.

ÇİFT	GÜNEŞ ENERJİSİ YOK	GÜNEŞ ENERJİSİ VAR	ÇİFT	GÜNEŞ ENERJİSİ YOK	GÜNEŞ ENERJİSİ VAR
1	485	452	6	386	380
2	423	386	7	426	395
3	515	502	8	473	411
4	425	376	9	454	415
5	653	605	10	496	441

35. Satış teknikleri konusunda bir kursa katılanlar arasından rassal bir örnekleme seçilmiş altı satış görevlisi, kurstan önce ve sonra üçer ay izlenmiştir. Aşağıdaki çizelge bu altı kişinin her iki dönemde sağladıkları satış tutarlarını, bin dolar olarak göstermektedir. Anakütle dağılımlarının normal olduğunu varsayarak, iki anakütle ortalaması arasındaki farkın %80 güven aralığını bulun.

SATIŞ GÖREVLİSİ	KURSTAN ÖNCE	KURSTAN SONRA
1	212	237
2	282	291
3	203	191
4	327	341
5	165	192
6	198	180

36. Birlikte öğrenme tekniklerini kullanan bir sınıftaki kırk muhasebe öğrencisinden oluşan bir rassal örneklemde ortalama sınav notu 322.12, örneklem standart sapması 54.53'tür. Aynı dersi alan ama birlikte öğrenme tekniği uygulamayan sınıftan alınan altmış bir öğrencilik bağımsız bir rassal örneklemde örneklem ortalaması ile örneklem standart sapması sırasıyla 304.61 ile 62.61 çıkmıştır.[28] İki anakütlenin ortalama notları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

37. Yeminli muhasebeciler arasında, muhasebe mesleğindeki kadınlar üzerine yapılan bir araştırmada örnekleme seçilenlerden "Müşterilerin gözünde, aynı işlerde çalışan kadınlar erkeklerle aynı derecede kabul görür" görüşünü, bir (kesinlikle katılmıyorum) ile beş (kesinlikle katılıyorum) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. 172 kadın muhasebeciden oluşan rassal bir örneklemde ortalama yanıt 3.483, örneklem standart sapması 0.970'tir. 186 erkek muhasebeciden oluşan bağımsız bir rassal örneklemde örneklem ortalaması ile standart sapması sırasıyla, 3.435 ile 0.894'tür.[29] İki anakütle ortalaması arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

[28] S. M. Lightner, "Accounting education and participating group dynamics," *Collegiate News and Views*, 35, no. 1(1981), 5-9.

[29] M. W. Trapp, R. H. Hermanson, D. H. Turner, "Current perceptions of issue related to woman employed in public accounting," *Accounting Horizons, 3*, no. 1 (1989) 71-85.

38. Halen tam zamanlı çalışan yeni işletmecilik mezunları arasında bir araştırma yapılmıştır. Bu araştırmadaki denekler kendi aile geçmişlerini sosyoekonomik bakımdan yüksek ya da düşük diye sınıflamıştır.[30] Yüksek sosyoekonomik konumdaki rassal örnekleme seçilmiş 138 yeni işletmecilik mezunu için ortalama gelir 36,558 $, örneklem standart sapması 11,624 $'dır. Bağımsız bir rassal örnekleme seçilmiş düşük sosyoekonomik konumdaki 266 yeni işletmecilik mezunu için ortalama gelir 37,499 $, örneklem standart sapması 16,521 $'dır. İki anakütle ortalaması arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

39. Sabit varlıklarını yeniden değerleyen 190 firmalık bir rassal örneklemde borçların maddi varlıklar içindeki ortalama payı 0.517, örneklem standart sapması 0.148'dir. Sabit varlıklarını yeniden değerlemeyen 417 firmalık bir rassal örneklemde[31] borçların maddi varlıklar içindeki ortalama payı 0.489, örneklem standart sapması 0.159'dur. İki anakütle ortalaması arasındaki farkın %99 güven aralığını bulun.

40. Bir araştırmacı, bir ilâcın, insanların bir psikomotor eşgüdümü işindeki başarısı üzerinde yaptığı etkiyi tahmin etmek istemektedir. Dokuz kişilik bir örnekleme test öncesi bu ilâç verilmiştir. Bunların ortalama başarı notu 9.78, örneklem varyansı 17.64 olmuştur. Kontrol grubu olarak kullanılan on kişilik bağımsız bir örnekleme ise test öncesi, hiçbir etkisi olmayan bir madde ilâç gibi verilmiştir. Bu kontrol grububun ortalama notu 15.10, örneklem varyansı 27.01 olmuştur. İki anakütle dağılımının aynı varyansla normal oldukları varsayımıyla, bunların ortalamaları arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

41. Bir şirket satış görevlilerinden rassal bir örnekleme seçilen onikisini, şevklerini, dolayısıyla da etkinliklerini artıracağı düşünülen bir kursa göndermiştir. Bu satış görevlilerinin ertesi yıl yarattıkları satışların ortalaması 435,000 $, örneklem standart sapması 56,000 $'dır. Aynı dönemde, kursa katılmayanlardan rassal bir örnekleme seçilen onbeş satış görevlisinin satışlarının ortalaması 408,000 $, standart sapması 43,000 $'dır. İki anakütle dağılımının aynı varyansla normal oldukları varsayımıyla, bunların ortalamaları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

42. Bir iktisada giriş sınıfındaki öğrenciler, öğretim yardımcılarının yürüteceği kısa sınav uygulamaları için bölümlere ayrılmıştır. Bir öğretim yardımcısına verilen bölümdeki yirmibir öğrencinin dönem sonu sınav notu ortalaması 72.1, standart sapması 11.3 olmuştur. İkinci bir öğretim yardımcısına verilen bölümdeki onsekiz öğrencinin dönem sonu sınavındaki not ortalaması 73.8, standart sapması 10.6 olmuştur. Bu verilerin aynı varyanslı normal anakütlelerden çekilen bağımsız rassal örneklemler olduğu varsayımıyla, iki anakütle ortalaması arasındaki farkın %80 güven aralığını hesaplayın.

43. Rassal bir örneklemdeki 112 büyük perakendeciden 70'i regresyonu bir tahmin yöntemi olarak kullanmaktadır. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 135 küçük pera-

---

[30] W. Whitely, T. W. Dougherty, G. F. Dreher, "Relationship of career monitoring and socioeconomic origin to managers' and professionals' early career progress," *Academy of Management Journal, 34* (1991), 331-51.

[31] P. Brown, H. Y. Izan, A. L. Loh, "Fixed asset revaluations and managerial incentives," *Abacus, 28* (1992), 36-57.

kendeciden 65'i regresyonu bir tahmin yöntemi olarak kullanmaktadır.[32] İki anakütle oranı arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

44. 1979'da bir rassal örneklemdeki 1,203 işletmecilik öğrencisinden %20.2'si öğretim üyeliğinin bir meslek olarak hiç de çekici olmadığını söylemiştir. 1989'da bağımsız rassal bir örneklemdeki 1,203 işletmecilik öğrencisinden %13.2'si öğretim üyeliği mesleğine aynı tepkiyi göstermiştir.[33] İki ayrı yılda öğretim üyeliği mesleğinin hiç de çekici olmadığı görüşündekilerin iki anakütle oranı arasındaki farkın %99 güven aralığını bulun.

45. Rassal bir örnekleme giren 154 hekimden %59.0'ı hastane reklâmı yapmanın kötü ya da çok kötü bir düşünce olduğu görüşündedir. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 310 müşteriden %24.2'si aynı görüştedir.[34] İki anakütlede hastane reklâmına ilişkin olumsuz görüşü olanların oranları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

46. 100 erkekten oluşan bir rassal örneklemde, emlak vergilerindeki artış hızını ertelemek için eyalet anayasasının değiştirilmesinden yana olan altmışbir kişi vardır. Bağımsız rassal bir örneklemdeki 100 kadından ellidördü bu değişiklikten yanadır. İki anakütle oranı arasındaki farkın güven aralığı

$$0.04 < p_X - p_Y < 0.10$$

olarak bulunmuştur. Bu aralığın olasılık içeriği kaçtır?

47. Süpermarket müşterileri gözlenerek bir malı alıp sepete koydukları anda kendilerine soru yöneltilmiştir. Bir malı her zamanki fiyatından alanlardan oluşan bir rassal örneklemdeki 570 kişiden 308'i alırken fiyata baktığını ileri sürmüştür. İndirimli fiyattan mal alanlardan oluşan bağımsız bir rassal örneklemdeki 232 kişiden 157'si aynı şeyi yaptığını ileri sürmüştür.[35] İki anakütle oranları arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

8.9 ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜNÜN TAHMİNİ

Buraya kadar, verilmiş bir örneklemin içerdiği bilgiye dayanarak bir anakütle katsayısına ilişkin güven aralıkları bulma yöntemlerini geliştirdik. Bir araştırmacı böyle bir süreci izleyerek bulduğu güven aralığının çok geniş olduğunu düşünebilir. Olasılık içeriği veriyken daha dar bir güven aralığı elde etmenin yolu, çoğunlukla, daha büyük bir örneklem almaktır.

---

[32] R. T. Peterson, "Forecasting practices in retail industry," *Journal of Business Forecasting Methods and Systems, 12*, no. 1 (1993), 11-14. Regresyon konusunu 12–14. bölümlerde ele alacağız.

[33] W. R. Swinyard, F. W. Langrehr, S. M. Smith, "The appeal of retailing as a career: a decade later," *Journal of Retailing, 67* (1991), 451-65.

[34] J. A. Bell, C. R. Vitaska, "Who likes hospital advertising–consumer or physician?" *Journal of Health Care Marketing, 12*, no. 2 (1992), 2-7.

[35] P. R. Dickson, A. G. Sawyer, "The price knowledge and search of supermarket shoppers," *Journal of Marketing, 54*, no. 3 (1990), 42-53.

Kimi durumlarda araştırmacı, güven aralığının genişliğini önceden saptayıp bunu sağlamaya yetecek büyüklükte bir örneklem seçebilir. Bu altbölümde, iki aralığın tahmini sorunları için bu yolla örneklem büyüklüğününü nasıl saptanacağını göstereceğiz. Başka sorunları çözmek için benzeri süreçlerden yararlanılabilir.

NORMAL BİR DAĞILIMIN ORTALAMASI İÇİN ARALIKLAR: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNDİĞİNDE

Ortalaması μ, bilinen varyansı σ^2 olan normal bir anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem alındığında, anakütle ortalaması için $\%100(1-\alpha)$ güven aralıklarının

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

ile bulunabileceğini Altbölüm 8.2'de görmüştük. Burada $\bar{x}$ gözlenen örneklem ortalaması, $z_{\alpha/2}$ ise standart normal dağılımın uygun eşik değeridir. Bu aralık, örneklem ortalamasını orta nokta olarak alır ve örneklem ortalamasının iki yanında

$$L = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (8.9.1)$$

kadar uzanır. Burada L aralığın yarısıdır. Şimdi araştırmacının bu L'yi önceden saptamak istediğini düşünelim. Eş. (8.9.1)'den şunu biliyoruz:

$$\sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{L}$$

Bu eşitliğin iki yanının karesini alırsak,

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{L^2}$$

elde ederiz. Örneklem büyüklüğü için bu seçim, güven aralığının, örneklem ortalamasının iki yanında L kadar uzandığını gösterir.

Normal Bir Dağılımın Ortalamasının Güven Aralığı İçin Örneklem Büyüklüğü: Anakütle Varyansı Biliniyor

Bilinen varyansı σ^2 olan normal bir dağılımdan rassal bir örneklem alındığını düşünelim. Örneklem büyüklüğü

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2}$$

ise, anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı örneklem ortalamasının iki yanında L kadar uzar. Burada $z_{\alpha/2}$

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, Z ise standart normal dağılıma uyar.

Örneklemdeki gözlem sayısının elbette tamsayı olması gerekir. Örneklem büyüklüğü formülünden bulunan n tam sayı değilse, güven aralığımızın istenen genişliği aşmamasını sağlamak için bu sayıyı bir üst tamsayıya *yuvarlarız.*

ÖRNEK 8.14

Bir sınai süreçte üretilen metal çubukların boyları, standart sapması 1.8 milimetre olan normal bir dağılıma uymaktadır. Bu anakütleden çekilmiş dokuz gözlemli rassal bir örnekleme dayanılarak, anakütle ortalaması için %99 güven aralığı

$$194.65 < \mu < 197.75$$

biçiminde bulunmuştur. Bir üretim yöneticisinin bu aralığı uygulama için çok geniş bulduğunu, bunun yerine ortalamanın iki yanında en çok 0.50 mm uzanan bir %99 güven aralığı istediğini düşünelim. Böyle bir aralığa ulaşabilmek için örneklem büyüğü kaç olmalıdır?

Şunları biliyoruz:

$$L = 0.50 \qquad \sigma = 1.8 \qquad z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$$

Öyleyse aranan örneklem büyüklüğü şudur:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2}$$

$$= \frac{(2.575)^2 (1.8)^2}{(0.5)^2} = 85.93$$

Dolayısıyla, yöneticinin isteğini yerine getirebilmek için, en az seksenaltı gözlemli bir örneklem gerekmektedir. Örneklem hacmindeki bu büyük artış,

örneklem ortalamasının tahmininde, daha dar bir güven aralığıyla sağlanan, daha büyük bir hassaslığa ulaşmanın ek bedelini gösterir.

ANAKÜTLE ORANININ ARALIKLARI

Altbölüm 8.5'te, anakütle p oranının $\%100(1-\alpha)$ güven aralıklarının, n gözlemli rassal bir örnekleme dayanılarak

$$\hat{p}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}} < p < \hat{p}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

ile bulunacağını görmüştük. Burada $\hat{p}_x$ gözlenen örneklem oranıdır. Bu aralık, örneklem oranını orta nokta olarak alır ve örneklem oranının iki yanında

$$L = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

kadar uzanır. Şimdi bu bulgu, belirli bir genişlikteki bir güven aralığını elde etmek için gerekli örneklem büyüklüğünü saptamada doğrudan kullanılamaz, çünkü örneklem oranını içermektedir, o da önceden bilinemez. Ancak, sonuç ne olursa olsun $\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)$, örneklem oranı 0.5 iken alacağı değer olan 0.25'ten büyük olamaz. Öyleyse L'nin alabileceği en büyük değer olan L_* şöyle bulunur:

$$L_* = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0.25}{n}} = \frac{0.5z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \qquad (8.9.2)$$

Bu durumda, bir araştırmacının, örneklem oranının her iki yanında en çok L_* kadar uzanan güven aralığını *sağlayabilecek* yeterince büyük bir örneklemi seçmek istediğini düşünelim. Eş. (8.9.2)'den şunu biliyoruz:

$$\sqrt{n} = \frac{0.5z_{\alpha/2}}{L_*}$$

Bunun karesini alarak

$$n = \frac{0.25z_{\alpha/2}^2}{L_*^2}$$

buluruz. Bu da bize aranan örneklem büyüklüğünü verir.

Örneklem Oranının Güven Aralığı İçin Örneklem Büyüklüğü

Bir anakütleden rassal bir örneklem aldığımızı düşünelim. Örneklemdeki gözlem sayısı

$$n = \frac{0.25 z_{\alpha/2}^2}{L_*^2}$$

ise, anakütle oranı için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığının, örneklem oranının her iki yanında en çok L_* kadar uzaması sağlanabilir.

ÖRNEK 8.15

Örnek 8.7'de, üniversite mezunlarının işe alınmasında bitirme notunun çok önemli olduğunu düşünen iş görüşmesi görevlilerinin anakütle içindeki oranı için %95 güven aralığını hesaplamıştık. 142 gözleme dayanan bu aralık

$$0.533 < p < 0.693$$

biçimindeydi. Bunun yerine, anakütle oranının, örneklem oranının her iki yanında en çok 0.06 uzayan %95 güven aralığım sağlamak istediğimizi düşünelim. Bu durumda örneklem büyüklüğü ne olmalıdır?

Şunları biliyoruz:

$$L_* = 0.06 \qquad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Öyleyse örneklemdeki gerekli gözlem sayısı

$$n = \frac{0.25 z_{\alpha/2}^2}{L_*^2} = \frac{0.25(1.96)^2}{(0.06)^2} = 266.78$$

olur. Daha dar olan bu güven aralığını sağlayabilmek için, en az 267 örneklem gözlemi gerekmektedir.

KAMUOYU YOKLAMALARININ BASINA YANSIMASI

Basın, güncel ilgi konusu olan kamuoyu yoklamalarının bulgularını sık sık yayımlamaktadır. Bu yayınlar çoğunlukla belli görüşteki anakütle yüzdesinin tahminlerini verir, sıklıkla da şöyle sona erer: "Burada artı-eksi %3 örneklem hatası bulunmaktadır" ya da "Kamuoyu yoklaması %3 hata payı içerir." Açıkça söylenmemekle birlikte, "örneklem hatası" ya da "hata payı", %95 güven aralığının genişliğinden söz etmektedir. Özellikle de, bu aralıklar örneklem yüzdesi artı-eksi örneklem hatası ya da hata payıdır, yani bizim gösterimimizle L_* sayısının yüzde olarak belirtilmesidir.

Örnek olmak üzere, 1992 başkanlık seçimi yarışması öncesindeki bir kamuoyu yoklaması, 1,065 ABD seçmeninden oluşan bir örneklemin görüşlerini dile getirmiş, sonucun "%3 hata payı" taşıdığını belirtmiştir. Bunun anlamı, belli bir görüşteki anakütle yüzdesinin %95 güven aralığı, örneklemdeki yüzde artı-eksi en çok %3'tür. Bunu görebilmek için, Eş. (8.9.2)'den

$$L_* = \frac{0.5z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \frac{(0.5)(1.96)}{\sqrt{1{,}065}} = 0.030$$

ya da yüzdelerle söylersek %3 buluruz. Uygulamada örneklem büyüklüğü bu sonucu elde edecek biçimde seçilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

48. Alıştırma 1'deki bilgileri kullanarak, anakütledeki ortalama notun, örneklem ortalamasının iki yanında 0.05 puan uzanan %95 güven aralığını elde edebilmek için gerekli örneklem gözlemi sayısını bulun.
49. Alıştırma 2'deki bilgileri kullanarak, anakütledeki ortalama tuğla ağırlığının, örneklem ortalamasının iki yanında 0.01 kadar uzanan %90 güven aralığı için gerekli örneklem büyüklüğünü bulun.
50. Alıştırma 3'teki bilgileri kullanarak, anakütledeki ortalama katışıklılık oranının, örneklem ortalamasının iki yanında 0.5 gram uzanan %99 güven aralığı için gerekli örneklem gözlemi sayısını bulun.
51. Bir araştırmacı takımı, öbür her şey aynıyken, yabancı bir ürün yerine yerli bir ürünü satın alacaklarını ileri süren tüketicilerin oranını tahmin etmek istemektedir. Anakütle oranının %95 güven aralığının, örneklem oranının iki yanında en çok 0.04 kadar uzaması istenmektedir. Bunun sağlanabilmesi için gerekli örneklem ne kadar büyük olmalıdır?
52. Bir siyasetçi, tartışmalı bir yasa tasarısını savunan seçmenlerinin oranını tahmin etmek istemektedir. Örneklem oranının her iki yanında en çok 0.05 uzanan bir %99 güven aralığı isteniyor olsun. Bunun için kaç örneklem gözlemi gerekir?
53. Bir araştırmacı iki anakütle oranını karşılaştırmak, bunun için de her iki anakütleden eşit büyüklükte bağımsız rassal örneklemler almak istemektedir. İki anakütle oranı arasındaki farkın %90 güven aralığının, örneklem oranları arasındaki farkın her iki yanında 0.05'ten fazla uzamaması gerekmektedir. Her bir anakütleden çekilecek örneklemlerin büyüklüğü kaç olmalıdır?

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

54. İki anakütleden çekilen bağımsız rassal örneklemlere dayanan bir araştırmacı, X arabaları ile Y arabalarının ortalama yakıt tüketimleri arasındaki farkın %95 güven aralığını galon başına 0.6 ile 1.9 mil olarak bulmuştur. Bu, ortalama yakıt tüketimleri arasındaki gerçek farkın galon başına 0.6 ile 1.9 mil arasında olma olasılığının

%95 olduğu anlamına mı gelmektedir? Yanıtınız hayırsa aralık tahmininin geçerli bir yorumunu yapın.

55. Bir biracılık şirketi, kutular içindeki bira miktarının standart sapması 0.2 ons olan normal bir dağılıma uyduğunu bilmektedir.
   (a) Yirmibeş kutuluk rassal bir örneklem seçilmiş, bu örneklem bulguları kullanılarak, anakütle ortalamasının bir güven aralığı 11.98 ile 12.12 ons arasında bulunmuştur. Bu aralık hangi güven düzeyiyle ilişkilidir?
   (b) Bu biracılık şirketinin bir yöneticisi, anakütle ortalamasının %99 güven aralığını, örneklem ortalamasının iki yanında en çok 0.07 ons olacak biçimde istemektedir. Bu amaca ulaşabilmek için örneklemde kaç gözlem olmalıdır?

56. 595 profesyonel paketlemeciden oluşan bir rassal örneklemden, tanınmamış bir marka ürünün ülke çapında bilinen bir markaya çok benzer biçimde paketlenmesini, bir (bütünüyle aktöreye aykırı) ile yedi (bütünüyle aktöreye uygun) arası bir ölçekte değerlendirmesi istenmiştir.[36] Örneklem ortalama yanıtı 3.38, örneklem standart sapması 1.80'dir.
   (a) Anakütle ortalamasının %90 güven aralığını bulun.
   (b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalaması için %99 güven aralığının (a)'da bulunan aralıktan daha mı dar, daha mı geniş, yoksa onunla aynı mı olduğunu belirtin.

57. Bir havayolu şirketinin hafta içi günlerdeki bir uçuşa olan müşteri talebinin normal dağılıma uyduğu varsayılmaktadır. Seksenbir uçuş için, bu talep sayılarından oluşan rassal bir örneklem seçilmiştir. Örneklem ortalaması 112, örneklem standart sapması 36 çıkmıştır. Ayrıca bu seksenbir uçuştan otuzu varacağı alana 15 dakikadan fazla gecikmeyle inmiştir.
   (a) Bu uçuşa olan talebin anakütle ortalaması için %95 güven aralığını bulun.
   (b) Bu uçuşa olan talebin anakütle varyansı için %95 güven aralığını bulun.
   (c) Bu tür bütün uçuşlardan, varacağı alana 15 dakikadan fazla gecikmeyle inenlerin anakütle içindeki oranı için %95 güven aralığını bulun.

58. Belli bir marka araba lastiğinden onaltı tanelik rassal bir örneklemde, örneklemin ortalama ömrü 32.0 bin mil, örneklem standart sapması 6.4 bin mil çıkmıştır. Anakütlenin normal dağılıma uyduğu varsayılmaktadır.
   (a) Anakütle ortalamasının bin mil cinsinden %90 güven aralığını bulun.
   (b) Anakütle standart sapmasının bin mil cinsinden %90 güven aralığını bulun.

59. Öğrencilerin bir sınav için saat cinsinden çalışma sürelerinin normal dağılıma uyduğunu düşünelim. Rassal bir örnekleme seçilen altı öğrencinin bu sınava hazırlık süreleri şöyle bulunmuştur:

12.2	18.4	23.1	11.7	8.2	24.0

   (a) Örneklem ortalaması ile örneklem varyansını bulun.
   (b) Anakütle ortalaması için %99 güven aralığını bulun.
   (c) Anakütle varyansı için %99 güven aralığını bulun.

---

[36] P. F. Bone, R. J. Corey, "Ethical dilemmas in packaging: beliefs of packaging professionals," *Journal of Macromarketing, 12*, no. 1 (1992), 45-54.

(d) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalaması için %90 güven aralığının, (a)'da bulunan aralıktan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

60. (a) Merkezî limit teoreminin örneklem ortalamasının güven aralığıyla ilişkisini açıklayın.

(b) Altbölüm 8.7'de, anakütle ortalamaları arasındaki farkın güven aralığını bulmak için iki farklı süreçten söz etmiştik. Niye iki farklı süreç gerektiğini açıklayın, her birinin uygun düşeceği gerçekçi örnekler verin.

61. Bir kredi kartı şirketi, kredi kartı taşıyanların bir aylık alışverişlerinin ortalama değerini tahmin etmek için, oniki ayın hesap özetinden oluşan rassal bir örneklem seçmiş, dolar cinsinden aşağıdaki tutarları bulmuştur:

91.21	98.26	143.62	65.93	95.08	159.11
34.27	127.26	211.87	53.91	139.53	87.80

Anakütle dağılımını normal varsayarak bütün kredi kartı taşıyanların ortalama aylık alışveriş tutarlarının %90 güven aralığını bulun.

62. Kısa bir süre önce yöneticiliğe yükselmiş 1,158 kişiden oluşan rassal bir örneklemin %47.9'u bir istatistik dersini genel yöneticilik kariyerine hazırlanmanın çok önemli ya da biraz önemli bir parçası olarak görmektedir.[37]

(a) Kısa bir süre önce yöneticiliğe yükselmiş kimselerden bu görüşte olanların anakütle içindeki oranının %99 güven aralığını bulun.

(b) Örneklem bilgisine dayanan bir istatistikçi, anakütle oranının bir güven aralığını 0.458 ile 0.500 arası olarak hesaplamıştır. Bu aralığın olasılık içeriği kaçtır?

63. 1988 Calgary Kış Olimpiyat Oyunları'nın resmi kredi kartı destekleyicisinin kim olduğunu bildiğini ileri süren 177 kişilik rassal bir örneklemde 106 kişi Visa adını doğru olarak bilmiştir.[38] Bu savı ileri sürenlerden gerçekten bilenlerin anakütle içindeki oranının %90 güven aralığını bulun.

64. Rassal bir örneklemdeki 113 Amerikalı tüketiciden 57'si, Amerikan malı bir TV alıcısı sahibi olduğunu ileri sürmüştür.[39]

(a) Aynı savı ileri süren bütün Amerikalı tüketicilerin anakütle içindeki oranı için %95 güven aralığını bulun.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle oranı için %90 güven aralığının, (a)'da bulunan aralıktan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

---

[37] Buna inanmıyorsanız bkz: H. W. Hildebrandt, F. A. Bond, E. L. Miller, A. W. Swinyard, " An executive appraisal of courses which best prepare one for general management," *Journal of Business Communication, 19*, no. 1 (1982), 5-15.

[38] D. M. Sandler, D. Shani, "Olympic sponsorship versus ambush marketing: Who gets the gold?", *Journal of Advertising Research, 29*, no. 4 (1989), 9-14.

[39] G. A. Pitman, S. T. Choe, "Attitudinal variations toward Japanese investment in the United States," *S.A.M. Advanced Management Journal, 54*, no. 3 (1989), 15-18.

65. Çalışanların pay senedi sahibi olma planının uygulandığı 87 işletmelik bir örneklemde, 54 işletme böyle bir planın asıl nedeninin vergiyle ilgili olduğunu söylemiştir.[40]

(a) Asıl nedenin bu olduğu işletmelerin anakütle içindeki payının %90 güven aralığını bulun.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle oranı için %95 güven aralığının, (a)'da bulunan aralıktan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

66. Tüketim malları sanayiindeki 151 pazarlama yöneticisinden oluşan rassal bir örneklemin %76.0'ı, marka belirlemenin görevlilerin elinde olmasının, yeni bir pazara girişte önemli ya da son derece önemli bir engel oluşturduğunu söylemiştir.[41] Bu bilgiyi kullanan bir istatistikçi, bu görüştekilerin anakütledeki oranı için

$$0.720 < p < 0.800$$

güven aralığını hesaplamıştır. Bu aralığın olasılık içeriğini bulun.

67. New York Borsası'nda işlem gören on pay senedinden oluşan rassal bir örneklemin başarımı incelenmiştir. Aşağıdaki sayılar, bu pay senetlerinin son bir yıldaki getiri oranlarıdır:

12.61	8.20	16.28	9.73	3.10
13.12	7.20	6.35	–1.89	4.20

(a) Anakütle standart sapmasının %95 güven aralığını bulun, yaptığınız bir varsayım varsa belirtin.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle standart sapması için %99 güven aralığının, (a)'da bulunan aralıktan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

68. Rassal bir örnekleme seçilmiş orta düzey yirmi yönetici, çağcıl yöntemlerin öğretildiği bir işletmecilik okulunun yoğun yaz kursuna gönderilmiştir. Bunların, bu kurs öncesinde ve sonrasında üstleri tarafından verilen birer yıllık başarım notları aşağıdaki çizelgededir. Yapılması gereken bir varsayım varsa belirterek, bu işletmecilik okulunun yaz kursuna gitmeden önceki ve sonraki başarım notlarının arasındaki fark için %95 güven aralığını bulun.

ÖNCE	69	54	82	67	60	73
SONRA	73	50	83	78	56	74
ÖNCE	75	78	64	72	70	63
SONRA	74	87	69	72	77	75

[40] S. B. Block, "The advantages and disdvantages of ESOPs: A long-range analysis," *Journal of Small Business Management, 29*, no. 1 (1991), 15-21.

[41] F. Karakaya, M. J. Stahl, "Underlying dimensions of barriers to market entry in consumer goods market," *Journal of Academy of Marketing Science, 20* (1992), 275-78.

69. Büyük bir şirkette işe girecek adayların yazılı bir beceri sınavından geçip bir insan kaynakları yöneticisiyle yüzyüze görüşme yapması gerekmektedir. İnsan kaynakları yöneticisi görüşmeden sonra her adayı 0 ile 100 arası bir ölçekte değerlendirmektedir. İnsan kaynakları yöneticilerinin değerlendirmeleri arasındaki tutarlılığı denetlemek için rassal örneklemeyle on çift aday seçilmiştir. Eşleştirme, her bir çiftteki adayların yazılı beceri sınav sonuçları aynı olacak biçimde düzenlenmiştir. Her bir çiftteki adaylar, adları John Doe ve Jean Ray olan iki insan kaynakları yöneticisinden biriyle görüşmüştür. Bu görüşmelerden sonraki değerlendirme sonuçları aşağıdaki çizelgededir:

JOHN DOE	80	65	87	64	73	78	83	91	84	83
JEAN RAY	74	63	91	65	64	71	69	90	79	87

(a) Yaptığınız bir varsayım varsa belirterek, Doe ile Ray'in anakütle ortalama değerlemeleri arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

(b) Hiç hesaplama yapmadan, anakütle ortalamaları arasındaki fark için %99 güven aralığının, (a)'da bulunan aralıktan daha mı geniş, daha mı dar, yoksa onunla aynı mı olduğunu söyleyin.

70. Bir büyük mağazanın bir aydan uzun süredir hesabı bulunan müşterileri arasından rassal örnekleme ile seçilmiş on müşteri hesabının ay sonundaki borç tutarları (dolar olarak) aşağıda gösterilmiştir:

58.36 43.97 65.18 62.39 17.97

47.62 63.21 75.91 51.70 18.23

Bağımsız bir rassal örnekleme ile seçilmiş sekiz yeni müşterinin aynı ay sonu borç tutarları da şöyle bulunmuştur:

21.72 43.81 29.21 27.96 37.83 23.64 16.25 31.93

Yaptığınız herhangi bir varsayım varsa özenle belirterek, iki anakütle ortalamaları arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

71. Rassal bir örneklemdeki sekiz sanayi şirketinin yönetim kurulu başkanlarının görevde kalma süreleri ay olarak şöyle bulunmuştur:

96 71 144 62 31 18 56 92

Bağımsız bir rassal örneklemdeki altı banka yönetim kurulu başkanının benzer süreleri de şunlardır:

71 173 94 111 135 87

Yaptığınız bir varsayım varsa özenle belirterek, iki anakütle ortalamaları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

72. Örneklemlere seçilmiş hastalardan, sağlık sistemini bir (çok doyurucu) ile dört (hiç doyurucu değil) arasındaki bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[42] Sağlık Koruma Örgütü (S.K.Ö.) üyelerinden oluşan 879 kişilik bir örneklemde, ortalama doyuruculuk düzeyi 1.48, örneklem standart sapması 0.68'dir. S.K.Ö. üyesi olmayan 801 kişilik bağımsız bir örneklemde, ortalama doyuruculuk düzeyi 1.86, örneklem standart sapması 0.80'dir. İki anakütle ortalaması arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

73. Bir üniversitede giriş düzeyindeki muhasebe derslerini alan 569 erkekten oluşan rassal bir örneklemde 90 kişi dersi bırakmıştır. Aynı dersleri alan 517 kızdan oluşan bağımsız bir örneklemde ise dersi bırakanların sayısı 85'tir.[43] Giriş düzeyindeki üniversite muhasebe deslerini alan kız ve erkek anakütlelerinde dersi bırakma oranları arasındaki farkın %90 güven aralığını bulun.

74. Rassal bir örneklemdeki 69 Kanada sanayi kuruluşundan 43'ü pazar araştırmasını kendisi yapmaktadır. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 69 Kanada tüketim malları işletmesinden 30'u pazar araştırmasını kendisi yapmaktadır.[44] Pazar araştırmasını kendisi yapan iki tür işletmenin anakütleleri içindeki oranları arasındaki farkın %95 güven aralığını bulun.

75. Küçük İşletme Merkezi müşterilerinden yeni iş kurmayı düşünenler arasından seçilmiş örneklemlere anket uygulanmıştır. 94 erkekten oluşan rassal bir örneklemde 50 kişi işin planlamasında dışarıdan yardım görmüştür. 68 kadından oluşan bağımsız bir rassal örneklemde yardım alan sayısı 40'tır.[45] İşin planlanmasında yardım alan erkek ve kadınların anakütleleri içindeki oranları arasındaki farkın %99 güven aralığını bulun.



76. Alıştırma 64'te, Amerikan malı TV alıcısına sahip olduğunu söyleyen Amerikalı tüketicilerin oranı için bir güven aralığı bulmuştuk. Anakütle oranının %95 güven aralığının, örneklem oranının her iki yanında en çok 0.05 uzanmasını sağlamak için kaç örneklem gözlemi gerekir?

---

[42] A. L. Dolinsky, R. K. Caputo, "The role of health care attributes and demographic characteristics in the determination of health care satisfaction," *Journal of Health Care Marketing, 10*, no. 4 (1990) 31-39.

[43] V. L. Carpenter, S. Friar, M. G. Lipe, "Evidence on the performance of accounting students: race, gender, and expectations," *Issues in Accounting Education, 8* (1993), 1-17.

[44] M. L. Ripley, "Why industrial advertising is often done in-house," *Industrial Marketing Managemenet, 21* (1992), 331-34.

[45] J. J. Chrisman, A. L. Carsrud, J. DeCastro, L. Herron, "A comparison of assistance needs of male and female pre-venture entrepreneurs," *Journal of Business Venturing, 5* (1990), 235-48.

BÖLÜM 9

Önsav Sınaması (Hipotez Testi)

9.1 ÖNSAV SINAMASI KAVRAMLARI

Bir anakütleden bir örneklem çekildiğinde, elde edilen kanıtlar, anakütlenin niteliğine ilişkin çıkarsamalar yapmakta kullanılır. Daha önce gördüğümüz gibi, yapılabilecek işlerden biri, nokta tahminleri ya da güven aralıkları hesaplayarak anakütlenin bilinmeyen katsayılarını tahmin etmektir. Öte yandan örneklem bilgisi, bir araştırmacının anakütleye ilişkin olarak kurduğu bir **hipotez**in ya da **önsav**ın geçerliliğini sınamada kullanılabilir. Bu tür durumların aşağıdaki örneklerini ele alalım.

1. Kutularla mısır gevreği üreten bir sanayici, kutu içindekilerin ortalama olarak en az 20 ons geldiğini ileri sürmektedir. Bu savı sınamak için, rassal bir örnekleme giren kutular tartılabilir, örneklem bulgularına dayanılarak bir çıkarsama yapılabilir.

2. Çok sayıda parçalar içeren partilerle mal alan bir şirket, bir partiyi ancak içindeki kusurlu parça oranı %5 'i geçmezse kabul etmeyi isteyebilir. Bir partiyi kabul edip etmeme kararı, rassal bir örnekleme giren parçaların incelenmesine dayandırılabilir.

3. Bir öğretim üyesi, bir istatistik dersinde düzenli olarak yapılan kısa sınavların yararlı olup olmadığıyla ilgilenmektedir. Bu sınavlar aynı dersi alan iki sınıftan birinde uygulanmakta, öbüründe uygulanmamaktadır. Öğretim üyesi, bu kısa sınavların başarıyı yükselttiği biçimindeki önsavı sınamak için, bu iki sınıftaki öğrencilerin dönem sonu sınavındaki ortalama başarılarını karşılaştırmaktadır.

4. Bir siyaset bilimcisi, bir vergi reformu tasarısının erkeklerle kadınlara eşit biçimde hitabedip etmediğini merak etmektedir. Bunu anlamak için, rassal olarak seçilmiş erkek ve kadın örneklemlerinin görüşlerini derlemektedir.

Burada verilen örneklerin ortak bir konusu vardır. Bir anakütleye ilişkin bir önsav oluşturulmakta, bu önsavın geçerliliğine ilişkin çıkarsamalar örneklem bilgisine dayandırılmaktadır. Bu altbölümde, bu tür problemlere yaklaşımın genel bir çerçevesini çizeceğiz. Özel süreçler daha sonraki altbölümlerde ele alınacaktır.

Tartışmamızı hayli genel tutabilmek amacıyla, ilgilendiğimiz anakütle katsayısını (sözgelimi anakütledeki ortalamayı, varyansı ya da oram) θ ile gösterelim. Bu anakütle katsayısına ilişkin bir önsav oluşturulduğunu, buna aykırı yeterli kanıt bulunmadıkça bu önsavın geçerliliğine inanılacağını düşünelim. Buna *ortaya atılan önsav* denebilir. İstatistikteki önsav sınamasının diliyle bunun adı **sıfır önsavı**dır. Sözgelimi, tersine kanıt olmadığı sürece, bir sanayicinin mısır gevreği kutuları net ağırlıkları ortalamasının en az 20 ons olduğu savına inanabiliriz. Örneklem bilgisi toplandıktan sonra bu önsav sorgulanır ya da *sınanır*. Eğer doğru çıkmazsa, bunun almaşığı doğru olmalıdır. Bir araştırmacı önsav sınaması yaparken, sıfır önsavının karşısına koyabileceği bir **karşı önsav** geliştirir. Mısır gevreği üreticisi örneğinde, ortalama net ağırlığın en az 20 ons olduğu önsavını, karşısına ortalama ağırlığın 20 onstan düşük olduğu biçiminde bir karşı önsav koyarak sınarız. Sıfır önsavını H_0, karşı önsavı da H_1 ile göstereceğiz.

İster sıfır önsavı ister karşı önsav olsun, bir önsav, anakütle katsayısı θ için tek bir değeri, diyelim θ_0'ı gösterebilir. Bu durumda önsav **basit**tir denir. "Anakütle katsayısı θ, belirli bir θ_0 değerine eşittir biçimindeki sıfır önsavı" yerine, kolaylık sağlayan

$$H_0: \theta = \theta_0$$

gibi kısa bir gösterim geçirilebilir. Sözgelimi, daha önceki örneğimizde geçen siyaset bilimcisi, vergi reformu tasarısından yana olan erkek ve kadınların anakütle oranları arasındaki farkın 0 olduğu önsavıyla araştırmasına başlayabilir.

Bir önsav, bilinmeyen anakütle katsayısı için bir değerler *aralığı* da belirleyebilir. Böyle bir önsava **bileşik**tir denir, bu önsav anakütle katsayısının birden çok değeri için doğru olabilir. Sözgelimi, mısır gevreği kutularının ortalama ağırlığı en az 20 onstur diyen önsav bileşiktir. Bu önsav, anakütle ortalama ağırlığının 20 onsa eşit ya da ondan büyük *her* değeri için doğrudur.

Birçok uygulamada, diyelim $H_0: \theta = \theta_0$ gibi basit bir önsav, birleşik bir karşı önsavıyla sınanır. Bazı durumlarda, sıfır önsavının yalnız bir yanındaki almaşıklara ilgi duyulur. Sözgelimi, bu sıfır önsavını,

$$H_1: \theta > \theta_0$$

biçiminde yazabileceğimiz, θ'nın gerçek değeri θ_0'dan büyüktür karşı önsavıyla sınamak isteyebiliriz. Bunun tersine ilgimiz

$$H_1: \theta < \theta_0$$

biçiminde de olabilir. Bu tür karşı önsavlara **tek yanlı karşı önsav** denir. Başka bir olanak şudur: Bu basit önsavı, θ'mn gerçek değeri θ_0'dan farklı bir değerdir diyen çok genel bir karşı önsavla, yani

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

ile sınamak isteyebiliriz. Buna da **iki yanlı karşı önsav** denir.

Uygun önsav ya da karşı önsavların belirlenmesi soruna bağlıdır. Bunu göstermek için daha önceki örneklerimize dönelim:

1. Kutu başına mısır gevreğinin anakütledeki (ons cinsinden) ortalama ağırlığını θ ile gösterelim. Sıfır önsavı şudur: Bu ortalama en az 20 onstur, böylece

$$H_0: \theta \geq 20$$

bileşik sıfır önsavı yazılabilir. Açık bir karşı önsav, gerçek ağırlık ortalaması 20 onstan azdır, yani:

$$H_1: \theta < 20$$

2. Bir şirket gelen bir parti malda kusurlu oranının %5'ten yüksek olduğundan kuşkulandıracak bir kanıt bulunmadıkça o partiyi kabul etme eğilimindedir. θ, anakütledeki kusurlu oranını göstersin. Buradaki önsav, bu oranın en çok 0.05 olduğu, yani

$$H_0: \theta \leq 0.05$$

biçimindedir. Bu önsav, örneklem bilgisine dayanılarak

$$H_1: \theta > 0.05$$

biçimindeki karşı önsavla sınanır. Öyleyse sıfır önsavı, gelen partinin niteliğinin bir bütün olarak yeterli olduğunu söylerken, karşı önsav bu yeterli değildir der.

3. Bir öğretim üyesinin, sınıfta düzenli aralarla kısa sınavlar yapılmasının, dönem sonu sınavlarındaki başarıyı etkilemediğini ileri sürdüğünü düşünelim. Kısa sınav yapılan ve yapılmayan sınıflardaki öğrencilerin anakütledeki ortalama notları arasındaki farkı θ ile gösterelim. Bu durumda sıfır önsavı,

$$H_0: \theta = 0$$

biçimindeki basit sıfır önsavıdır. Ama öğretim üyesi, kısa sınavların ortalama başarıyı yükselttiğinden de kuşku duyabilir, dolayısıyla bu sıfır önsavını

$$H_1: \theta > 0$$

karşı önsavıyla sınamak isteyebilir.

4. Bir siyaset bilimcisi, bir çalışma önsavı olarak, vergi reformu tasarısının erkeklerle kadınlara aynı ölçüde hitabedeceği görüşünde olabilir. Tasarıdan yana olanların iki anakütle oranı arasındaki fark θ ise, sıfır önsavı

$$H_0: \theta = 0$$

olur. Eğer siyaset bilimcisinin, tasarıya asıl desteğin şu anakütleden değil de bu anakütleden geleceği konusunda iyi nedenleri yoksa, bu sıfır önsavı aşağıdaki iki yanlı karşı önsavla sınanır:

$$H_1: \theta \neq 0$$

Sıfır ve karşı önsavları belirleyip örneklem bilgisini derledikten sonra, sıfır önsavına ilişkin bir karar vermek gerekir. Sıfır önsavını **kabul etmek** ya da karşı önsav lehine sıfır önsavını **reddetmek** iki olanaktır. Bu iki sonuçtan birine ulaşmak için, örneklem kanıtlarına dayalı bir **karar kuralı** geliştirmek gerekir. Bundan sonraki altbölümlerde, şimdilik yalnızca genel biçimleri açıkça görülen belirli karar kurallarını el alacağız. Diyelim ki, on kutu mısır gevreğinden oluşan rassal bir örneklem alıp bunların içeriklerini tarttık. Örneklemin ortalama ağırlığı 20 onstan çok küçükse, anakütle ortalamasının en az 20 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavından kuşkulanabiliriz. Bu durumda karar kuralı, örneklem ortalaması "çok düşük" ise sıfır önsavını reddetmek biçimindedir. Öyleyse, bir anakütle ortalamasına ilişkin sıfır önsavı sınanırken, varacağımız sonucun örneklem ortalamasının gözlenen değerine dayanması akla uygundur. Öbür her şey aynıyken, örneklem ortalaması ile sıfır önsavının anakütle ortalaması için öngördüğü değer arasındaki fark büyüdükçe, bu önsavın doğruluğundan o kadar çok kuşkulanırız.

Elimizde olan yalnızca anakütleden çekilmiş bir örneklemse, anakütle katsayısı hassas olarak bilinemez. Buna uygun olarak, sıfır önsavının doğru mu yoksa yanlış mı olduğu da *kesinlikle bilinemez*. Dolayısıyla hangi karar kuralı benimsenirse benimsensin, ilgilenilen anakütle katsayısına ilişkin yanlış sonuçlara ulaşma şansı hep vardır. Gerçekten de, Çizelge 9.1'de belirtildiği gibi, olanak içindeki iki tür hatadan biri işlenebilir. İki olanaklı durum sözkonusudur: sıfır önsavı ya doğrudur ya yanlıştır. Doğru sıfır önsavımn reddedilmesiyle bir hata işlenebilir, buna **I. Tür hata** denir. Karar kuralı, doğru bir sıfır önsavım reddetme olasılığını α olarak alıyorsa, bu α'ya sınamanın **anlamlılık düzeyi** denir. Sıfır önsavı ya kabul ya reddedileceğine göre, doğru bir sıfır önsavım kabul etme olasılığı da $(1-\alpha)$ olur. **II. Tür hata** denen öteki olanaklı hata ise, yanlış bir sıfır önsavımn kabul edilmesinden doğar. Belli bir karar kuralı için, sıfır önsavı yanlışken böyle bir hata işleme olasılığının β olduğunu düşünelim. Bu durumda yanlış bir sıfır önsavını reddetme olasılığı $(1-\beta)$ olur, buna da sınamanın **gücü** denir.

Bu düşünceleri, daha önceki örneklerimizden birini kullanarak açıklayacağız. Bir vergi reformu tasarısının kadınlarla erkeklere aynı derecede hitabedip etmeyeceğini merak eden siyaset bilimcimizin sorununa dönelim. Sıfır önsavı, *anakütlede*, bu tasarıdan yana olan erkeklerin oranının kadınların oranıyla aynı olduğudur. Bu sıfır önsavı, iki anakütle oranımn farklı olduğunu ileri süren karşı önsavla sınanacaktır. Sıfır önsavını sınayabilmek için, erkeklerle kadınlardan bağımsız örneklemler alınıp örneklem üyelerinin görüşleri sorulur. Sıfır önsavma ilişkin çıkarsamayı, tasarıdan yana erkek ve kadınların *örneklem*

oranları arasındaki farka dayandırmak doğaldır. Bu fark büyükse, *anakütle oranlarının* eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavı reddedilir; aksi halde bu önsav kabul edilir. Vergi reformu tasarısından yana olan erkeklerin örneklem ortalamasını $\hat{p}_x$, kadınların örneklem ortalamasını da $\hat{p}_y$ ile gösterelim. Bu durumda olanaklı bir karar kuralı şu olabilir:

$$(\hat{p}_x - \hat{p}_y) > 0.05 \quad \text{ya da} \quad (\hat{p}_x - \hat{p}_y) < -0.05 \text{ ise} \quad H_0\text{'ı reddet}$$

Şimdi diyelim ki, tasarıyı destekleyen iki anakütle oranının eşit olduğunu ileri süren sıfır önsavı aslında doğru olsun. Yine de örneklem oranları 0.05'ten daha fazla fark gösterebilir, karar kuralımıza göre de sıfır önsavı reddedilir. Bu durumda I. Tür hata işlenmiş olur. Bunun (sıfır önsavı doğruyken) gerçekleşmesi olasılığı anlamlılık düzeyi olan α'dır. Tersine sıfır önsavının yanlış olduğunu, aslında tasarıyı destekleyen kadın ve erkeklerin anakütle oranlarının aynı olmadığını düşünelim. Ama iki örneklem oranı arasındaki fark yine de 0.05'ten az olabilir. O zaman, karar kuralımıza göre, sıfır önsavı kabul edilir ve II. Tür hata işlenmiş olur. Böyle bir hatayı yapma olasılığı, iki anakütle oranı arasındaki farkın büyüklüğüne bağlıdır. Tasarıdan yana erkeklerin oranı %80, kadınların oranı %20 iken, verilmiş bir örneklem büyüklüğünde sıfır önsavını kabul etme şansı, bu oranların %55 ve %45 olduğu duruma göre daha azdır.

Kuşkusuz ideal olarak, her iki tür hata olasılığının olabildiğince küçük olmasını isteriz. Ama, ikisi arasında açık bir al-ver ilişkisi vardır. Örneklem bir kez alındıktan sonra, karar kuralında, doğru bir sıfır önsavını reddetme şansını azaltan bir düzeltme, bu önsavı yanlışken kabul etme şansını arttırır. Özellikle, mısır gevreği kutularında gerçek ortalama ağırlığın en az 20 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavını, rassal bir örneklemi temel alarak sınamak istediğimizi düşünelim. Belli bir örneklem büyüklüğü —diyelim $n = 30$ gözlem— verilmişken, örneklemin ortalama ağırlığı 18.5 onstan az çıkarsa sıfır önsavını reddeden bir karar kuralını benimseyebiliriz. Şimdi, I. Tür hatanın olasılığını azaltan

ÇİZELGE 9.1 Belli bir gerçek durum verilmişken, sıfır önsavının doğruluğu ile bu önsava ilişkin kararlar; karar almayla ilgili olasılıklarla birlikte

SIFIR ÖNSAVINA İLİŞKİN KARARLAR	GERÇEK DURUM	
	SIFIR ÖNSAVI DOĞRU	SIFIR ÖNSAVI YANLIŞ
KABUL	Doğru karar Olasılık = $1 - \alpha$	II. Tür hata Olasılık = β
RED	I. Tür hata Olasılık = α (α'ya **anlamlılık düzeyi** denir)	Doğru karar Olasılık = $1 - \beta$ ($1 - \beta$'ya sınamanın **gücü** denir)



ÇİZİM 9.1 Bir sınamanın anlamlılık düzeyini belirlemenin yarattığı sonuçlar

bir karar kuralı bulmak kolaydır. Eğer karar kuralımızı "Örneklemin ortalama ağırlığı 18 onstan azsa sıfır önsavını reddedin" biçiminde değiştirirsek, bu amaca ulaşmış oluruz. Ama bunun da bir bedeli vardır. Değiştirilmiş bu karar kuralını kullanarak, sıfır önsavım, ister doğru olsun ister yanlış, kabul etme şansımız daha yüksektir. Böylece I. Tür hata olasılığını azaltırken, II. Tür hata olasılığını artırmış oluruz. Her iki hata olasılığını birden azaltmanın tek yolu, daha büyük örneklem alarak, anakütle ortalamasına ilişkin daha çok bilgi edinmektir. Uygulamada çoğunlukla yapılan, I. Tür hata olasılığını belli bir düzeyde tutmak, yani anlamlılık düzeyini sabitlemektir. Bu, uygun karar kuralım, o da II. Tür hata olasılığını belirler. Bu zincir Çizim 9.1'de gösterilmiştir.

Bu zinciri açıklayabilmek amacıyla, mısır gevreği kutu ağırlıklarının gerçek ortalamasının en az 20 ons olup olmadığını, otuz gözlemli bir örnekleme dayanarak sınama sorununa dönelim. Bir karar kuralı verilmişken, bu sınamaya ilişkin I. ve II. Tür hata olasılıklarını belirleyebiliriz. Ama, gerçekte, önce I. Tür hata olasılığını sabitleyerek işe başlıyoruz. Sözgelimi, sıfır önsavını doğruyken reddetme olasılığının 0.05'i geçmemesini sağlamak istediğimizi düşünelim. Bunu, "Örneklem ortalaması K onstan düşükse sıfır önsavını reddedin" karar kuralındaki K için uygun bir sayı seçerek yapabiliriz. (Bunun nasıl yapılacağını bir sonraki altbölümde göreceğiz.) K sayısı bir kez seçildi miydi, II. Tür hata olasılığı, Altbölüm 9.9'daki süreçler izlenerek, hesaplanabilir.

Karar kuralı, belirli bir anlamlılık düzeyinin seçilmesiyle belirlendiğine göre, sınama gücünün, sıfır önsavının reddedilip reddedilmeyeceği kararında doğrudan bir rol oynamadığını görmüş bulunuyoruz. Ancak, belli anlamlılık düzeyi seçiminden doğan gücün hesaplanması, araştırmacıya, karar kuralının niteliklerine ilişkin değerli bilgiler verir. Bir araştırmacının, çoğu kez, çekeceği örneklem gözlemlerinin sayısını seçmede bir miktar serbestliği vardır. Belli bir anlamlılık düzeyinde örneklem büyüdükçe, sınamanın gücü de artar. Bir analist örneklemin ne büyüklükte olacağına karar verirken, artan gücün yarattığı yararlar ile ek örneklem bilgisi elde etmenin maliyetini dengelemelidir. Güç hesaplamalarının başka bir önemli yararı da, aynı sorunu çözümlemek için iki ya da daha çok sınamanın olanaklı olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu sınamalara ilişkin karar kuralları, belli bir örneklem büyüklüğünde aynı anlamlılık düzeyini verecek biçimde belirlenmişse, II. Tür hata olasılığı en küçük –yani gücü en yüksek– süreci seçmek doğaldır.

9.2–9.8 Altbölümlerinde, anlamlılık düzeyleri veriyken, bazı önemli önsav sınaması sorunları için karar kurallarının nasıl geliştirileceğini göstereceğiz. Bir sınamanın gücünü incelemeye Altbölüm 9.9'da döneceğiz.

Kolaylık sağlaması için, bu altbölümde tanıtılan yeni terimler aşağıdaki çerçevede özetlenmiştir.

Kimi Önsav Sınaması Terimleri

SIFIR ÖNSAVI (H_0): Tersine yeterli kanıt bulununcaya kadar doğru sayılan ortaya atılmış önsav.

KARŞI ÖNSAV (H_1): Sıfır önsavının karşısında sınandığı, sıfır önsavı yanlışsa doğru olduğu varsayılan önsav.

BASİT ÖNSAV: İlgilenilen anakütle katsayısı için tek bir değer belirleyen önsav.

BİLEŞİK ÖNSAV: İlgilenilen anakütle katsayısı için bir değerler aralığı belirleyen önsav.

TEK-YANLI KARŞI SAV: Bir anakütle katsayısının, basit bir sıfır önsavınca belirlenen bir değerin ya bu yanında ya da öteki yanındaki (yani ya ondan küçük ya da ondan büyük) olanaklı bütün değerlerini içeren karşı önsav.

İKİ-YANLI KARŞI ÖNSAV: Bir anakütle katsayısının, basit bir sıfır önsavınca belirlenen değer dışındaki olanaklı bütün değerlerini içeren karşı önsav.

ÖNSAV SINAMASI KARARI: Araştırmacıyı, örneklem kanıtına dayanarak, sıfır önsavını *kabul* ya da *red*detmeye götürecek biçimde geliştirilmiş karar kuralı.

I. TÜR HATA: Doğru sıfır önsavının reddi.

II. TÜR HATA: Yanlış sıfır önsavının kabulü.

ANLAMLILIK DÜZEYİ: Doğru sıfır önsavını reddetme olasılığı. (Bu olasılık bazen yüzde olarak yazılır, böylece bir sınamanın α anlamlılık düzeyi $\%100\alpha$ düzeyli sınama diye gösterilir.)

SINAMA GÜCÜ: Yanlış bir sıfır önsavının reddedilme olasılığı.

Sıfır önsavına ilişkin olası kararlar için *kabul* ya da *red* terimleri, belli sınamaların sonuçlarının biçimsel özetlenmelerinde yaygın olarak kullanılır. Ama, bu terimler, sıfır önsavı ya da karşı önsavın bakışık (simetrik) olmama durumunu, ya da anlamlılık düzeyinin sabitlendiği ve II. Tür hata olasılığının denetimdışı bırakıldığı bir sürecin sonuçlarını yeterince yansıtmaz. Daha önce de belirttiğimiz gibi, sıfır önsavı ortaya atılan *–veriler aksine yeterli kanıt içermediği sürece* doğru sayılan– önsavdır. Üstelik, bir anlamlılık düzeyini, genellikle de düşük bir olasılıkta sabitlemekle, doğru bir sıfır önsavının reddedilme şansının küçük olmasını sağlarız. Böyle bir kurgu içinde, az sayıda veriyle, bir sıfır önsavım, büyük farkla yanlış değilse pek reddedemeyiz. Gördüğümüz gibi, örneklem gözlemlerinin sayısı arttıkça, yanlış bir sıfır önsavım farketme şansımız da yükselir. Öyleyse, bir sıfır önsavım "kabul" ettiğimizde, aslında onun lehinde fazla bir şey söylemiş olmayız. Bu durum için "Doğru bir sıfır önsavım reddetme olasılığını α düzeyinde sabitlediğimizde, elimizdeki veriler, bu sıfır önsavını reddedebilmek için yeterince güçlü kanıt içermemektedir" daha bil-

giçce ama daha doğru bir söylem olur. Bu nedenle bazı yazarlar, "Sıfır önsavı kabul edilir" yerine "Sıfır önsavı reddedilemez" deyişini yeğlerler. Biz "kabul" terimini bu düşüncenin etkili bir dile getirilişi olarak kullanmayı sürdüreceğiz, ama bu deyişin böyle bir yorumunu da unutmamak önemlidir. Bu durum, sanığın başlangıçta suçsuz olduğu, suçlu hükmünü verdirebilmek için buna karşı güçlü kanıt bulma görevinin savcının sırtında bulunduğu mahkeme ortamına benzer. Klasik önsav sınaması çerçevesinde, sıfır önsavı da, aynı anlamda, başlangıçta doğru sayılır. Bizi bunun tersine inandırma görevi de örneklem verilerine düşer.

Bu bölümün bundan sonraki altbölümlerinde, birkaç özel önsavın sınanmasını göstereceğiz.

9.2 BİR NORMAL DAĞILIM ORTALAMASININ SINANMASI: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNİYOR

Klasik önsav sınaması yöntemini açıklamak için, ortalaması μ, varyansı σ^2 olan normal bir dağılımdan rassal olarak çekilmiş $X_1, X_2, \ldots, X_n$'den oluşan n gözlemli bir örneklemin elimizde bulunduğu durumu düşünelim. Amaç, bilinmeyen anakütle ortalamasına ilişkin önsavları sınamaktır. Başlangıçta anakütle varyansının bilindiği varsayılacaktır. Daha sonra, örneklemdeki gözlem sayısı büyük olunca, bu varsayım ile normallik varsayımının gevşetilebileceğini göreceğiz.

Anakütle ortalamasının μ_0 gibi belli bir değere eşit olduğunu söyleyen basit sıfır önsavını sınama sorununuyla işe başlayalım. Bu önsav şöyle gösterilir:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

İlgilenilen karşı önsavın, anakütle ortalamasının bu belli değerden büyük olduğunu söylediğini, yani

$$H_1: \mu > \mu_0$$

olduğunu düşünelim.

Anakütle ortalamasına ilişkin sınamaları, $\overline{X}$ örneklem ortalamasına dayandırmak doğaldır. Özellikle, gözlenen örneklem ortalaması μ_0'dan aşırı derecede büyükse, bu sıfır önsavının, karşı önsav karşısında, doğruluğundan kuşku duyulur. Önceden belirlenmiş bir α anlamlılık düzeyi içeren bir sınama biçimi gerekmektedir. Yani, aslında doğru olan sıfır önsavını reddetme olasılığının α kadar olduğu bir karar kuralı isteriz. Böyle bir sınamanın temeli şu olguda yatar:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar, yani örneklem ortalamasının örnekleme dağılımı, μ ortalama ve $\sigma/\sqrt{n}$ standart sapma ile normaldir. Sıfır önsavı doğruyken $\mu = \mu_0$ olur, böylece

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (9.2.1)$$

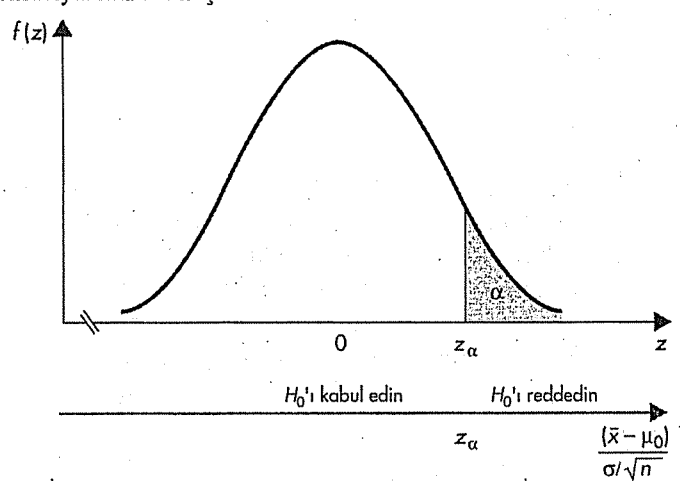
rassal değişkeni de standart normal dağılıma uyar. Şimdi, örneklem ortalaması, anakütle ortalaması için ortaya atılan μ_0 değerini büyük ölçüde aşarsa, sıfır önsavı reddedilmelidir. Böylelikle, (9.2.1) rassal değişkeni için yüksek bir değer gözlenirse H_0 reddedilecektir. Sıfır önsavını doğruyken reddetme olasılığını α düzeyinde sabit tutmak istiyoruz. Bölüm 8'de olduğu gibi,

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan sayıyı z_α ile gösterelim. Buna göre, sıfır önsavı doğruyken (9.2.1) rassal değişkeninin z_α'dan büyük çıkma olasılığı da α olur. Böylece, gözlenen örneklem ortalaması $\bar{x}$ ile gösterilirse, şu karar kuralını benimsediğimizi düşünelim:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin}$$

ÇİZİM 9.2 Sıfır önsavı $H_0: \mu = \mu_0$ doğruyken $Z = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve H_0'ın α anlamlılık düzeyinde $H_1: \mu > \mu_0$ karşı önsavıyla sınanması için karar kuralı



Bu durumda, doğru iken H_0'ı reddetme olasılığı α olacaktır, öyleyse α, bu karar kuralına dayanan sınamanın anlamlılık düzeyidir. Bu durum Çizim 9.2'de gösterilmiştir. Bu çizim, sıfır önsavı doğruyken, (9.2.1) rassal değişkeninin örnekleme dağılımını, olasılık yoğunluk fonksiyonu çizimi aracılığıyla göstermektedir. Çizim ayrıca, sıfır önsavı doğruyken z_α değerinin aşılması olasılığının, sınamanın anlamlılık düzeyi α olduğunu da göstermektedir. Buna göre, sıfır önsavı doğruyken, çizimde gölgeli alanla gösterilmiş ilgili red bölgesinde bir örneklem sonucu bulma olasılığı, α kadar olmalıdır.

Bir Normal Anakütlenin Ortalamasının Sınanması: Anakütle Varyansı Biliniyor

Ortalaması μ, bilinen varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Gözlenen örneklem ortalaması $\bar{x}$ ise, α anlamlılık düzeyinde

$$H_0: \mu = \mu_0$$

sıfır önsavının

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla sınanması,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin}$$

karar kuralıyla yapılır. Burada z_α,

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayı, Z de standart normal değişkendir.

ÖRNEK 9.1

Bilye yatağı üreten bir süreç düzgün çalışırken bu yatakların ağırlıkları, ortalaması 5 ons, standart sapması 0.1 ons olan bir normal dağılıma uymaktadır. Bu süreçte bir düzeltme yapılmıştır. Fabrika müdürü bunun sonucunda bütün bilye yataklarının ortalama ağırlığının biraz arttığını, standart sapmanın ise aynı kaldığını düşünmektedir. Onaltı yataklık rassal bir örneklem alınmış, bunların ortalama ağırlığı 5.038 ons bulunmuştur. 0.05 ve 0.10 (yani %5 ve %10) anlamlılık düzeylerinde, anakütle ortalama ağırlığının 5 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavını, bunun 5 onstan büyük olduğu karşı önsavıyla sınayın.

Anakütlenin (ons cinsinden) ortalama ağırlığını μ ile gösterip

$$H_0: \mu = \mu_0 = 5$$

sıfır önsavım,

$$H_1: \mu > 5$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz. Karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin. Örnekte verilenlerden şunları biliyoruz:

$$\bar{x} = 5.038 \qquad \mu_0 = 5 \qquad \sigma = 0.1 \qquad n = 16$$

öyleyse şunu buluruz:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.038 - 5}{0.1/\sqrt{16}} = 1.52$$

%5 düzeyinde bir sınama için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{0.05} = 1.645$$

1.52, 1.645'ten büyük olmadığı için %5 anlamlılık düzeyinde sıfır önsavını reddedemeyiz; yani, bu anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı kabul edilir. Başka bir deyişle, aslında doğru olan sıfır önsavını reddetme olasılığının 0.05 olmasını sağlayan bir sınama kullanırsak, örneklem verileri, bu önsavı reddetmek için yeterli kanıt içermemektedir.

%10 düzeyinde bir sınama için şunu biliyoruz:

$$z_{0.10} = 1.28$$

1.52, 1.28'den büyük olduğundan %10 anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilir. Öyleyse verilerde gerçek ortalama ağırlığın 5 onsu geçtiğine ilişkin bir ipucu vardır.

Bir sıfır önsavını reddetmenin ne anlama geldiğini görmek için biraz duralım. Örnek 9.1'de, anakütle ortalamasının 5 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavı, anlamlılık düzeyi 0.1 olan bir sınamayla reddedilmiştir. Bu kesinlikle, anakütlenin gerçek ortalamasının 5 onsu aştığını *kanıtladığımız* anlamına gelmez. Yalnız örneklem bilgisi veriyken, bir anakütle katsayısına ilişkin *kesin* bir şey hiçbir zaman söylenemez. Onun yerine, verilerin, sıfır önsavının doğruluğu konusunda kuşku doğurduğunu ileri sürebiliriz. Eğer bu önsav doğru olsaydı, gözlenen

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.52$$

değeri, standart normal dağılımdan çekilmiş tek bir gözlemi temsil ederdi. Aslında önsavları sınarken, eğer sıfır önsavı gerçekten doğruysa, böyle aşırı bir değer gözleme şansının ne olduğu sorusunu soruyoruz. Örnek 9.1'de, 1.28'den

büyük bir değer gözleme olasılığının 0.1 olduğunu gördük. Öyleyse, önsavı reddetmekle ya sıfır önsavının yanlış olduğunu ya da pek gerçekleşemeyecek —gerçekleşme olasılığı anlamlılık düzeyiyle belirlenmiş— bir olayla karşı karşıya olduğumuzu söylüyoruz demektir. İşte örneklem bilgisi, sıfır önsavı konusunda bu anlamda kuşku yaratmaktadır.

Dikkat ederseniz Örnek 9.1'de, sıfır önsavı 0.10 anlamlılık düzeyinde reddedildi ama daha düşük olan 0.05 düzeyinde reddedilmedi. Anlamlılık düzeyini düşürmekle, doğru bir sıfır önsavını reddetme olasılığını azaltmış, dolayısıyla karar kuralını, sıfır önsavı doğru olsa da olmasa da, bu önsavın reddedilme şansını azaltacak biçimde değiştirmiş oluruz. Açıktır ki, sıfır önsavının reddedilebileceği anlamlılık düzeyi düştükçe, doğruluğu konusunda yaratılan kuşku büyür. Araştırmacılar çoğu zaman, önsavları önceden belirlenmiş anlamlılık düzeylerinde sınamak yerine, bir sıfır önsavının reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini belirlerler.

Tanım

Bir sıfır önsavının reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyine, sınamanın **olasılık değeri** ya da ***p* değeri** adı verilir.[1]

Örnek 9.1'de

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=1.52$$

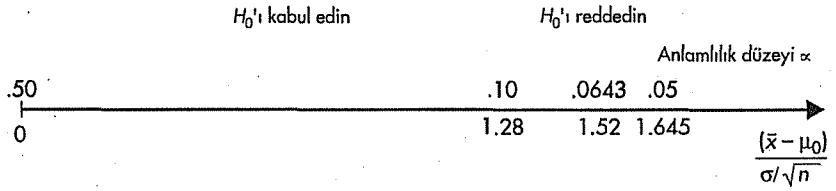
bulduk. Bu durumda karar kuralımıza göre, z_α'nın 1.52'den küçük olduğu her α anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilir. Ek Çizelge 3'ten, $z_\alpha = 1.52$ iken α'nın 0.0643'e eşit olduğunu görürüz. Öyleyse bu değer, sınamanın ***p* değeri**dir. Bunun da anlamı, %6.43'ten yüksek bütün anlamlılık düzeylerinde bu sıfır önsavının reddedilebileceğidir. Sınamanın anlamlılık düzeyi α ile karar kuralına giren ve bunun karşılığı olan z_α arasındaki birebir ilişkiyi içeren Çizim 9.3'te bu durum gösterilmiştir.

Basit sıfır önsavı yerine

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

bileşik sıfır önsavını,

[1] Son birkaç yıldır bu kavramı anlamanın önemi gittikçe artmaktadır. Günümüzdeki bütün bilgisayar istatistik paket programları, *p* değerini sıradan bir iş olarak vermekte, bazı el hesap makineleri de bunu hesaplayabilmektedir. Bunun sonucu olarak, bugünkü uygulamalı araştırmalarda çoğu zaman *p* değeri belirtilmektedir.



ÇİZİM 9.3 H_0: $\mu = \mu_0$ önsavı, H_1: $\mu > \mu_0$ karşı önsavıyla 0.10, 0.0643, 0.05 anlamlılık düzeylerinde sınandığında red bölgeleri

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla, α anlamlılık düzeyinde sınamak istediğimizi düşünelim. Basit sıfır önsavı durumunda geliştirdiğimiz karar kuralıyla, anakütle ortalaması tam tamına μ_0 ise, sıfır önsavını reddetme olasılığının α olduğunu görmüştük. Aynı karar kuralıyla, gerçek anakütle ortalaması μ_0'dan küçük herhangi bir değerse, sıfır önsavını reddetme şansımız daha da azdır. Öyleyse, bu karar kuralını bu bağlamda kullanmak, bileşik sıfır önsavını doğruyken reddetme olasılığının *en çok* α kadar olmasını *sağlar.*

Normal Bir Dağılımın Ortalamasının Sınanması (Varyans Biliniyor): Bileşik Sıfır Önsavı ve Bileşik Karşı Önsav

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

sıfır önsavını α anlamlılık düzeyinde

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla sınamanın uygun bir yolu, sıfır önsavı

$$H_0: \mu = \mu_0$$

iken kullanılan yolun aynısıdır.

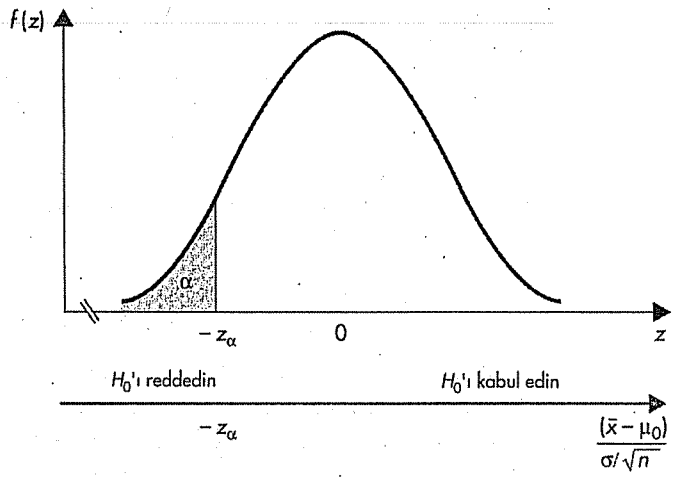
Şimdi,

$$H_0: \mu = \mu_0$$

basit sıfır önsavının, gerçek ortalamanın μ_0'dan *küçük* olduğunu söyleyen

$$H_1: \mu < \mu_0$$

karşı önsavıyla sınanmasını görelim. Bu durumda sıfır önsavına ancak, örneklem ortalaması, önsavda ortaya atılan anakütle ortalamasından bir hayli *küçükse* gölge düşer. Burada da, sıfır önsavı doğruysa, (9.2.1) rassal değişkeni standart



ÇİZİM 9.4 Sıfır önsavı $H_0 : \mu = \mu_0$ doğruyken $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α anlamlılık düzeyinde $H_1 : \mu < \mu_0$ karşı önsavıyla H_0 sınaması için karar kuralı

normal dağılıma uyar. Z standart normal değişkense, anlamlılık düzeyi α olan bir sınamaya ulaşmak için yalnızca,

$$P(Z < -z_\alpha) = \alpha$$

olduğuna dikkat etmemiz yeter. Öyleyse, gözlenen örneklem ortalaması $\bar{x}$ ise, uygun karar kuralı da şudur:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin}$$

Bu durum Çizim 9.4'te gösterilmiştir. Bu çizim, Çizim 9.2 ile karşılaştırılmalıdır. Açıktır ki bunlar birbirini aynadaki yansımaları gibidir.

Daha önce geliştirilene benzer bir akıl yürütmeyle, basit sıfır önsavı yerine

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

bileşik sıfır önsavını koyarsak, aynı karşı önsavla bu karar kuralının yine geçerli olacağını görebiliriz.

Bir Normal Dağılımın Ortalamasının Sınanması: Anakütle Varyansı Biliniyor

Ortalaması μ, bilinen varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Gözlenen örneklem ortalaması $\bar{x}$ ise, α anlamlılık düzeyinde

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{ya da} \quad H_0: \mu \geq \mu_0$$

sıfır önsavlarından birinin

$$H_1: \mu < \mu_{0s}$$

karşı önsavıyla sınanması

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \text{ ise} \quad H_0\text{'ı reddedin}$$

karar kuralıyla yapılır.

Şimdi,

$$H_0: \mu = \mu_0$$

sıfır önsavını, iki yanlı

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

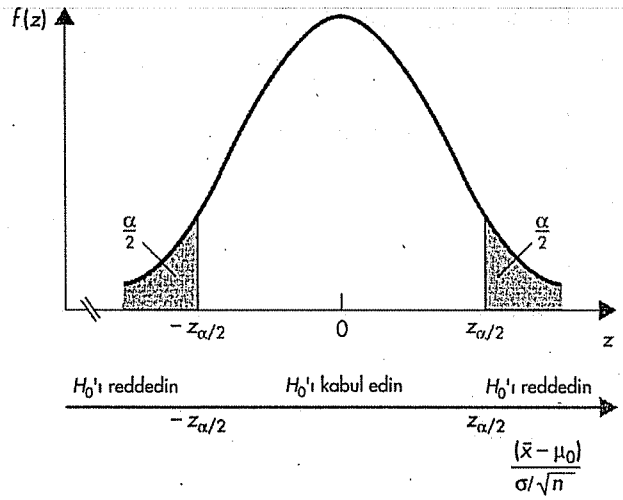
karşı önsavıyla sınadığımızı düşünelim. Burada araştırmacının, önsavda ortaya atılan anakütle ortalamasının bir yanındaki sapmaların öbür yamndakinden daha güçlü olacağına ilişkin güçlü bir nedeninin olmadığı varsayılmaktadır. Öyleyse gözlenen örneklem ortalaması, μ_0'dan çok daha yüksek *ya da* çok daha düşük çıkarsa sıfır önsavından kuşku duyulabilir. Burada da, sıfır önsavı doğruyken (9.2.1) rassal değişkeni standart normal dağılıma uyar. α anlamlılık düzeyinde bir sınamaya ulaşmak için, sıfır önsav geçerliyken,

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ve} \quad P(Z < -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

olduğuna dikkat edin. Demek ki Z'nin $z_{\alpha/2}$'den büyük ya da $-z_{\alpha/2}$'den küçük olma olasılığı α'dır. Dolayısıyla α düzeyinde bir sınama,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \; z_{\alpha/2}\text{'den büyük ya da } -z_{\alpha/2}\text{'den küçük ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

karar kuralından elde edilir. Bu da Çizim 9.5'te gösterilmiştir. Buradan, sıfır önsavının reddedildiği örneklem sonuçları bölgesinin iki parçaya ayrıldığını görüyoruz. Bu bölgenin üst parçası, önsavda ortaya atılan anakütle ortalamasının büyük ölçüde üstünde gözlenen örneklem ortalaması değerlerine; alt parçası ise, μ_0'ın önemli ölçüde altında gözlenen örneklem ortalaması değerlerine karşılıktır.



ÇİZİM 9.5 Sıfır önsavı H_0: $\mu = \mu_0$ doğruyken $Z = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α anlamlılık düzeyinde H_1: $\mu \neq \mu_0$ karşı önsavıyla H_0 sınaması için karar kuralı

Normal Bir Dağılımın Ortalamasının İki-yanlı Karşı Önsavla Sınanması: Anakütle Varyansı Biliniyor

Ortalaması μ, bilinen varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Gözlenen örneklem ortalaması $\bar{x}$ ise, α anlamlılık düzeyinde

$$H_0: \mu = \mu_0$$

sıfır önsavının

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

karşı önsavıyla sınanması

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \text{ ya da } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

karar kuralıyla yapılır.

Okuyucu belki de güven aralığı belirleme ile önsav sınama süreçleri arasındaki benzerliğin ayırdına varmıştır. Altbölüm 8.2'de anlatılanların gözden geçirilmesi şu ilişkiyi ortaya koyacaktır: H_0: $\mu = \mu_0$ sıfır önsavı, iki-yanlı H_0: $\mu \neq \mu_0$ karşı önsavıyla, α anlamlılık düzeyinde, *ancak ve ancak*, μ için $\%100(1-\alpha)$

güven aralığı μ_0 değerini içermiyorsa reddedilir. Bu ilişki, bu bölümün geriye kalan altbölümlerinde geliştirilen bu tür sınamaların çoğunda geçerlidir.

ÖRNEK 9.2

Bir montaj hattı işleminin bir parçası olan bir matkap, metal levhalarda delik açmakta kullanılmaktadır. Matkap düzgün çalışırken delik çapları, ortalaması 2 inç, standart sapması 0.06 inç olan bir normal dağılıma uymaktadır. Matkabın düzgün çalışıp çalışmadığım anlamak için belli zamanlarda rassal seçilmiş deliklerin çapları ölçülmektedir. Standart sapmanın değişmediğini varsayalım. Dokuz gözlemli rassal bir örneklemde ortalama çap 1.95 inç çıkmıştır. Anakütle ortalamasının 2 inç olduğunu söyleyen sıfır önsavını, öyle olmadığını ileri süren karşı önsavla sınayın. %5 anlamlılık düzeyi kullanın, ayrıca sınamanın p değerini de bulun.

Anakütlenin (inç cinsinden) ortalama çapını μ ile gösterelim. Bu durumda,

$$H_0: \mu = \mu_0 = 2$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu \neq 2$$

karşı savıyla sınamak istiyoruz. H_0'ı H_1 lehine reddetmenin karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \qquad \text{ya da} \qquad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin. Şunları biliyoruz:

$$\bar{x} = 1.95 \qquad \mu_0 = 2 \qquad \sigma = 0.06 \qquad n = 9$$

Öyleyse şunu buluruz:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.95 - 2}{0.06/\sqrt{9}} = -2.50$$

%5 düzeyinde sınama için $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$'dır. Bu durumda, –2.50, –1.96'dan küçük olduğundan, %5 anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilir.

Aslında, karar kuralına göre, $-z_{\alpha/2}$'nin –2.50'den büyük olduğu her α anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilecektir. Ek Çizelge 3'ten, $z_{\alpha/2} = 2.50$ iken, $\alpha/2$'nin 0.0062'ye eşit olduğu görülür. Demek ki $\alpha = 0.0124$'tür. Sınamanın p değeri budur; sıfır önsavının, %1.24'ten büyük her anlamlılık düzeyinde iki yanlı karşı önsav lehine reddedilebileceği anlamına gelir. Bu da, matkabın düzgün çalıştığı önsavına önemli ölçüde gölge düşürür. Bulduğumuz şey şudur: Sıfır önsavı doğru olsaydı, iki inçten bu denli ya da daha uzak bir örneklem ortalaması bulmanın olasılığı yalnızca 0.0124 olurdu.

Buraya kadar, anakütle varyansınm bilindiği (genellikle gerçekçi olmayan) durumla ilgilendik. Ancak, eldeki örneklem gözlemlerinin sayısı büyükse, bu

sınamalar, uygulamadaki sorunların önemli bir bölümünü ele alabilecek biçimde değiştirilebilir. Altbölüm 8.2'de olduğu gibi, anakütle normal dağılmasa bile, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının büyük örneklemlerde yaklaşık normal dağıldığı sonucuna varmamızı sağlayan merkezî limit teoremi yardıma koşmaktadır.

Ortalama Sınamaları: Büyük Örneklemlerde

Ortalaması μ, bilinen varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Eğer örneklem büyükse,[2] anakütle varyansının bilindiği durum için geliştirilmiş olan sınama süreci, bu varyansın bilinmediği durumda da, σ^2 yerine gözlenen örneklem varyansı s_x^2 konarak kullanılabilir. Üstelik, bu süreçler, anakütle dağılımı normal olmasa bile yaklaşık olarak geçerliliğini korur.

ÖRNEK 9.3

Rassal bir örnekleme seçilmiş 541 tüketiciden, kusurlu ürünler için ödenen tazminata bir üst sınır konulması görüşünü, bir (kesinlikle karşıyım) ile beş (kesinlikle katılıyorum) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[3] Yanıtların ortalaması 3.68, standart sapması 1.21'dir. Anakütle ortalamasının 3.75 ya da daha yüksek olmasının bu görüşe önemli bir destek anlamına geldiğini düşünelim. Anakütle ortalamasının en az 3.75 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, 3.75'ten küçük olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

İstediğimiz

$$H_0: \mu \geq \mu_0 = 3.75$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu < 3.75$$

karşı önsavıyla sınamaktır. Karar kuralı

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -z_\alpha$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddetmektir. Burada şunları biliyoruz:

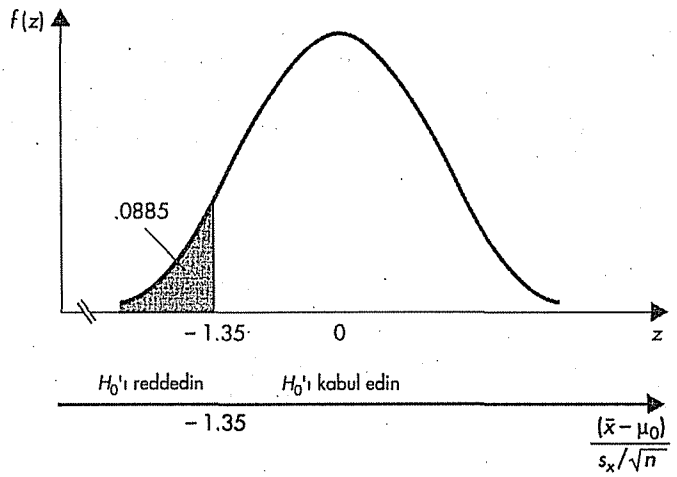
$$\bar{x} = 3.68 \qquad \mu_0 = 3.75 \qquad s_x = 1.21 \qquad n = 541$$

Dolayısıyla şunu buluruz:

---

[2] Otuz ya da daha çok gözlemli örneklemler için bu yaklaşıklık genellikle yeterlidir.

[3] J. DeConinck, J. Kopf, "Consumers' attitudes toward product liability reform," *American Economic Review, 10*, no. 2 (1992), 78-83.



Çizim 9.6 Örnek 9.3'teki sınamanın bulgusu: Sıfır önsavı $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ karşı önsavıyla 0.0885'ten yüksek anlamlılık düzeylerinde reddedilir

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{3.68-3.75}{1.21/\sqrt{541}} = -1.35$$

Karar kuralına göre, $-z_\alpha$'nın –1.35'ten büyük olduğu her α anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilecektir. Ek Çizelge 3'ten, $z_\alpha = 1.35$ iken, α'nın 0.0885 'e eşit olduğu görülür. Dolayısıyla, anakütle ortalaması 3.75 iken, 3.68 ya da daha küçük bir örneklem ortalaması gözlemenin olasılığı 0.0855 olur. Sıfır önsavı, %8.85 ya da daha yüksek anlamlılık düzeylerinde reddedilebilir, öyleyse bu önsava karşı orta güçte kanıt vardır. Bu sınamanın bulgusu Çizim 9.6'da gösterilmiştir. Bu çizim, anakütle ortalaması 3.75 iken, karar kuralı ölçütünün dağılımını gösterir. Bu çizimde ayrıca, sınama istatistiğinin gözlenen değeri –1.35'e karşılık gelen sol-kuyruk alanının olasılığı da gösterilmiştir.

9.3 BİR NORMAL DAĞILIM ORTALAMASININ SINANMASI: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNMİYOR

Bu altbölümde yine, normal dağılmış bir anakütleden n gözlemli bir rassal örneklemin çekildiği ve anakütle ortalaması μ'ye ilişkin önsav sınamaları yapılmasının gerektiği sorunu ele alacağız. Ancak anakütle varyansının bilindiği varsayımını artık bırakacağız. Örneklem büyük değilse, Altbölüm 9.2'nin

sonunda incelediğimiz süreçler geçerli olmaz. Yine de, Altbölüm 8.3 ile 8.4'te varılan bir bulguya dayanan geçerli sınamalar türetilebilir. Orada, örneklem ortalamasıyla varyansı $\overline{X}$ ve s_X^2 ile gösterildiğinde,

$$t_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{s_X / \sqrt{n}}$$

rassal değişkeninin $(n-1)$ serbestlik derecesindeki bir Student t dağılımına uyduğu görülmüştü. Altbölüm 9.2'de benimsenen düşünce yolu aynen uygulanırsa, standart normal dağılımın rolünü şimdi Student t dağılımının üstlenmesiyle, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, geçerli sınamalar bulunabilir.

Bir Normal Dağılım Ortalamasının Sınanması: Anakütle Varyansı Bilinmiyor

Ortalaması μ olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Gözlenen örneklem ortalamasıyla standart sapması $\overline{x}$ ve s_x ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: \mu = \mu_0$ ya da $H_0: \mu \leq \mu_0$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla sınamak için karar kuralı şöyledir:

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \mu = \mu_0$ ya da $H_0: \mu \geq \mu_0$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \mu < \mu_0$$

karşı önsavıyla sınamak için karar kuralı şöyledir:

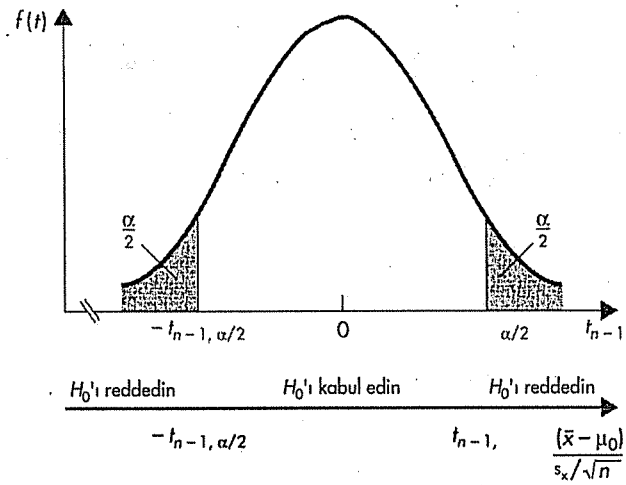
$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: \mu = \mu_0$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamak için karar kuralı şöyledir:



ÇİZİM 9.7 Sıfır önsavı H_0: $\mu = \mu_0$ doğruyken $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(s_x/\sqrt{n})$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α anlamlılık düzeyinde $H_1: \mu \neq \mu_0$ karşı önsavıyla H_0 sınaması için karar kuralı

$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2}$ ya da $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}$ ise H_0'ı reddedin.

Burada $t_{n-1,\alpha}$,

$$P(t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan sayıdır, t_{n-1} rassal değişkeni ise $(n-1)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.

Çizim 9.7, iki-yanlı karşı önsavla sınama kurgusunu gösterir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu artık Student t dağılımı olup bu çizim, anakütle varyansının bilindiği duruma ilişkin olan Çizim 9.5'e benzer. Açıktır ki, tek-yanlı karşı önsavlarla yapılan sınamalar da, Çizim 9.2 ile 9.4'e benzer çizimlerle gösterilebilir.

ÖRNEK 9.4

Bir perakende satış mağazaları zinciri, kendi satışlarının Aralık'ta Kasım'a göre %20 daha yüksek olduğunu bilmektedir. İçinde bulunulan yıl altı mağazalık rassal bir örneklem seçilmiştir. Bunların Aralık ayı satışlarının artış yüzdeleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

19.2 18.4 19.8 20.2 20.4 19.0

Normal bir anakütle dağılımı varsayımıyla, satışlardaki gerçek ortalama artışın yüzde 20 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla, %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

Satışlarda Aralık ayı artışı yüzdesinin anakütle ortalamasını μ ile gösterip,

$$H_0: \mu = \mu_0 = 20$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu \neq 20$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz. Karar kuralı,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2} \qquad \text{ya da} \qquad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}$$

ise H_0'ı reddedin biçimindedir.

Örneklem ortalaması ile varyansı, aşağıdaki çizelgede gösterilen hesaplamalar yapılarak bulunur:

	x_i	x_i^2
	19.2	368.64
	18.4	338.56
	19.8	392.04
	20.2	408.04
	20.4	416.16
	19.0	361.00
Toplamlar	117.0	2,284.44

Örneklem ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{117}{6} = 19.5$$

olup örneklem varyansı şöyledir:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{2{,}284.44 - (6)(19.5)^2}{5} = 0.588$$

Böylece örneklem standart sapması da aşağıdaki gibi olur:

$$s_x = \sqrt{0.588} = 0.767$$

Daha sonra şunu buluruz:

$$\frac{x - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{19.5 - 20}{0.767/\sqrt{6}} = -1.597$$

Anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.10$ olan bir sınama istendiğinden Ek Çizelge 6'dan şunu okuruz:

$$t_{n-1,\alpha/2} = t_{5,0.05} = 2.015$$

Öyleyse, –1.597, –2.015 ile 2.015 arasında kaldığından, gerçek ortalama artışın yüzde 20 olduğunu söyleyen sıfır önsavı, %10 düzeyinde kabul edilir. Verilerdeki bu önsava karşı kanıt pek güçlü değildir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir deterjan üreticisi, satılan kutuların net ağırlıklarının en az 16 ons olduğunu ileri sürmektedir. Ağırlıkların dağılımının, 0.4 ons standart sapmayla normal olduğu bilinmektedir. Rassal bir örnekleme seçilmiş onaltı kutunun ağırlıklarının örneklem ortalaması 15.84 ons bulunmuştur. Anakütle ortalama ağırlığının en az 16 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavını, %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

2. Partilerle pil alan bir şirket, partiyi teslim almadan önce dokuz pilden oluşan bir örneklem seçip denemektedir. Şirket, partideki bütün pillerin gerçek ortalama ömrünün en az 50 saat olmasıyla ilgilenmektedir. Geçmiş deneyime göre, pil ömürlerinin anakütle dağılımı, 3 saatlik standart sapmayla normal sayılabilir. Belli bir partiden alınan dokuz pillik rassal bir örneklemin ortalama ömrü 48.2 saat bulunmuştur. Anakütle ömür ortalamasının en az 50 saat olduğunu söyleyen sıfır önsavını %10 düzeyinde sınayın.

3. Bir ilâç sanayicisi, haplardaki katışıklılık oranıyla ilgilenmekte, bu oranın %3'ü geçmesinden korkmaktadır. Belli bir parti üretiminde katışıklılık oranının %0.4 standart sapmayla normal dağıldığı bilinmektedir. Belli bir parti üretimden alınan altmışdört haplık rassal bir örneklem için yapılan denetlemede katışıklılık oranının örneklem ortalaması %3.07 bulunmuştur.

(a) Katışıklılık oranının anakütle ortalamasının %3 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, bu oranın %3'ten büyük olduğunu ileri süren karşı önsavla, %5 düzeyinde sınayın.

(b) Bu sınamanın p değerini bulun.

(c) Karşı önsavın tek-yanlı değil de iki-yanlı olduğunu düşünelim (Sıfır önsavı $H_0: \mu = 3$). Hiçbir hesaplama yapmadan, bu sınamanın p değerinin (b)'de bulunandan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa aynı mı olduğunu belirtin. Gerekçenizi bir çizimle gösterin.

(d) Bu soru bağlamında, tek-yanlı bir karşı önsavın, iki-yanlı bir karşı önsavdan daha uygun olmasını açıklayın.

4. Bir sanayici, yakıta konulan bir katkı maddesiyle arabaların galon başına ek olarak ortalama 3 mil daha gidebildiklerini ileri sürmektedir. Rassal bir örnekleme seçilmiş 100 araba bu maddeyi denemede kullanılmıştır. Sağlanan artışın örneklem ortalaması galon başına 2.4 mil, standart sapması ise galon başına 1.8 mil olmuştur. Anakütle ortalamasının galon başına en az 3 mil olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın. Bu sınamanın p değerini bulup bulgunuzu yorumlayın.

5. Bir rassal örnekleme seçilmiş, pazarlama derslerini alan 1,562 lisans öğrencisinden, "Reklâm yaşam düzeyimizin yükselmesine yardımcı olur" görüşünü bir (kesinlikle karşıyım) ile yedi (kesinlikle katılıyorum) arasında bir ölçekle değerlendirmesi istenmiştir.[4] Yanıtların örneklem ortalaması 4.27, örneklem standart sapması 1.32'dir. Anakütle ortalamasının 4 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla, %1 düzeyinde sınayın.

6. Emeklilik Ödemesi Garanti Şirketi'nin kuruluştan sonra, tek işverenli planlarında vaadedilen emekli ödemelerindeki yüzde değişmelerden 76'sı rassal bir örneklem olarak gözlenmiştir.[5] Değişme yüzdelerinin örneklem ortalaması 0.078, örneklem standart sapması 0.201 çıkmıştır. Değişme yüzdelerinin anakütle ortalamasının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı bir karşı önsavla sınamanın p değerini bulun ve yorumlayın.

7. Bir rassal örnekleme seçilmiş 172 muhasebe öğrencisinden, işe başlama aylığının bir iş niteliği olup olmadığını bir (önemli değil) ile beş (son derece önemli) arasında bir ölçekte değerlendirmesi istenmiştir.[6] Değerlendirmenin örneklem ortalaması 3.31, örneklem standart sapması 0.70 çıkmıştır. Değerlendirmenin anakütle ortalamasının en çok 3.0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, 3.0'dan büyük olduğunu ileri süren karşı önsavla, %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

8. Rassal bir örnekleme seçilmiş 170 kişiye bir kestirim sorusu verilmiştir.[7] Her bir örneklem üyesinden, iktisadi bir değişkenin bir sonraki değerini iki yolla kestirmesi istenmiştir. Daha önceki yirmi gözlem değeri hem sayılarla, hem de bir çizimdeki noktalarla verilmiştir. Deneklerden bir sonraki değeri hem bir sayı, hem çizimde bir nokta olarak kestirmesi istenmiştir. Mutlak kestirim hataları ölçülmüştür. Bu durumda örneklem (sayısal ile noktasal) kestirimler arasındaki 170 farktan oluşmaktadır. Bu farkların örneklem ortalaması –2.91, örneklem standart sapması 11.33'tür. Bu farkların anakütle ortalamasının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, bu ortalamanın eksi olduğunu ileri süren karşı önsavla sınamanın p değerini bulup yorumlayın. (Karşı önsav, insanların genellikle çizimle kestirimde sayılara göre daha başarılı olduğunu ileri süren önsav olarak düşünülebilir.)

9. Bir şirketin hesaplarına göre ortalama alacak bakiyesi 125.32 $ görünmektedir. Bir denetmen bu hesaplardan rassal bir örnekleme seçilmiş onaltısını incelemiştir. Örneklem ortalaması 131.78 $, örneklem standart sapması ise 25.41 $ çıkmıştır. Anakütle dağılımının normal olduğunu varsayalım. Anakütle ortalamasının 125.32 $ olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

10. Rassal bir örnekleme dayanılarak

---

[4] J. C. Andrews, "The dimensionality of beliefs toward advertising in general," *Journal of Advertising, 18*, no. 1 (1989), 26-35.

[5] G. R. Niehaus, "The PBGC's flat fee schedule, moral hazard and promised pension benefits," *Journal of Banking and Finance, 14* (1990), 55-68.

[6] P. Bundy, D. Norris, "What accounting students consider important in the job selection process," *Journal of Applied Business Research, 8*, no. 2 (1992), 1-6.

[7] J. M. Carey, E. M. White, "The effects of graphical versus numarical response on the accuracy of graph-based forecasts," *Journal of Management, 17* (1991), 77-96.

$$H_0: \mu = \mu_0$$

sıfır önsavı,

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla sınanmış, sıfır önsavı %5 anlamlılık düzeyinde kabul edilmiştir.

(a) Bu, μ'nün %95 güven aralığının μ_0'ı zorunlu olarak içerdiği anlamına gelir mi?

(b) Bu bulgu, gözlenen örneklem ortalaması μ_0'dan büyükse, μ'nün %90 güven aralığının μ_0'ı zorunlu olarak içerdiği anlamına gelir mi?

11. İsim hakkı satan bir şirket, bu ismi alan işletmecilerin ilk yılda başlangıç yatırımlarının %10'u kadar getiri sağladıklarını duyurmaktadır. Bu işletmecilerden rassal olarak seçilen onunun ilk yıl sağladıkları getiri oranları aşağıdadır:

6.1 9.2 11.5 8.6 12.1 3.9 8.4 10.1 9.4 8.9

Anakütlede getirilerin normal dağıldığını varsayarak şirketin savını sınayın.

12. Şişelerde şampuan üreten bir süreç düzgün işlediğinde net ağırlıkları ortalaması 20 ons olan şişeler üretmektedir. Tek bir üretim partisinden rassal seçilen dokuz şişenin (ons cinsinden) net ağırlıkları aşağıdadır:

21.4 19.7 19.7 20.6 20.8 20.1 19.7 20.3 20.9

Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımıyla sürecin düzgün işlediği önsavını iki-yanlı karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

13. Bir istatistik öğretim üyesi, öğrencilerin girdikleri sınavın zorluk derecesini ölçebilme yetenekleriyle ilgilenmektedir. Bu sınava kalabalık bir öğrenci grubu girmiş, ortalama not 78.5 olmuştur. Sekiz öğrencilik rassal bir örneklemden bu ortalama notu kestirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin kestirimleri şöyledir:

72 83 78 65 69 77 81 71

Normal dağılım varsayımıyla, kestirimlerin anakütle ortalamasının 78.5 olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın. İki-yanlı bir karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyi kullanın.

14. Bir bira dağıtımcısı, süpermarketlerde, çok tanınmış bir sporcunun gerçek boyutlardaki bir fotoğraf afişinin asılmasıyla bu biranın satışının haftada ortalama 50 kasa artacağını ileri sürmektedir. Rassal bir örnekleme seçilen yirmi süpermarkette ortalama satış artışı 41.3 kasa, örneklem standart sapması 12.2 kasadır. Satış artışlarının anakütle ortalamasının en az 50 kasa olduğunu söyleyen sıfır önsavını, yaptığınız herhangi bir varsayım varsa belirterek, %5 düzeyinde sınayın.

15. Toplu sözleşme görüşmeleri sırasında bir şirket, yeni bir teşvik planının, üretimdeki bütün işçiler için haftalık ortalama ücreti en az 400 $'a çıkardığını ileri sürmüştür. Bir sendika temsilcisi rassal olarak onbeş işçi seçip bunların haftalık ücretinin ortalamasını 381.35 $, standart sapmasını da 48.60 $ bulmuştur. Normal bir dağılım varsayın.

(a) Şirketin savını sınayın.

(b) Aynı örneklem bulguları elli işçilik bir rassal örneklemden elde edilseydi, şirketin savı (a)'dakinden daha düşük bir anlamlılık düzeyinde reddedilebilir miydi?

9.4 BİR NORMAL DAĞILIM VARYANSININ SINANMASI

Bu altbölümde, anakütle varyansı σ^2'yi, normal bir anakütleden çekilmiş n gözlemli bir rassal örnekleme dayanarak sınama süreçleri geliştireceğiz.

Bu sınamaları örneklem varyansı s_X^2'ye dayandırmak doğaldır. Belli sınamalar geliştirmenin temelinde

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma^2}$$

rassal değişkeninin $(n-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyduğu olgusu yatar.[8] Sıfır önsavı, anakütle varyansının belli bir σ_0^2 değerine eşit olduğunu söylüyorsa, yani önsav

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

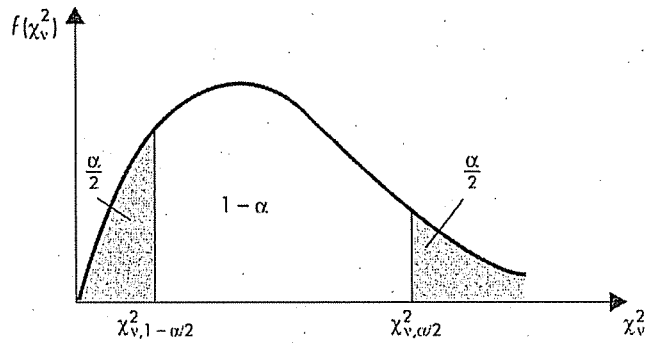
biçimindeyse, bu varsayım doğruyken,

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} \qquad (9.4.1)$$

rassal değişkeni, $(n-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyar. Normal bir anakütlenin varyansına ilişkin önsav sınamaları, bu durumda, (9.4.1) büyüklüğünün örneklemde gözlenen değerine dayandırılır. Karşı önsav, gerçek varyansın σ_0^2'den büyük olduğu biçimindeyken, gözlenen örneklem varyansı σ_0^2'den çok daha büyükse sıfır önsavından kuşkulanırız. Öyleyse (9.4.1) için yüksek bir değer gözlenirse sıfır önsavı reddedilir. Tersine, karşı önsav anakütle varyansının, sıfır önsavının belirlediği değerden küçük olduğu biçimindeyse, sıfır önsavı (9.4.1)'in küçük değerleri için reddedilir. Son olarak, anakütle varyansının σ_0^2'den farklı olduğunu söyleyen iki-yanlı karşı önsav için, (9.4.1) değerinin olağandışı yüksek ya da olağandışı düşük çıkması durumunda sıfır önsavını reddederiz.

---

[8] Bir kez daha uyarıyoruz ki bu bulgunun geçerliliği, anakütle dağılımının normal olduğu varsayımına sıkı sıkıya bağlıdır.



ÇİZİM 9.8 Ki-kare dağılımı için kimi olasılıklar

Uygun sınamaların türetilme mantığı, Altbölüm 9.2'dekinin aynıdır. Önce, Altbölüm 8.5'te verilen bir gösterimi anımsayalım. Serbestlik derecesi ν olan bir ki-kare rassal değişkeninin α olasılığıyla aştığı sayıyı $\chi^2_{\nu,\alpha}$ ile gösterelim:

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

Buradan

$$P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = \alpha$$

ve

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,\alpha/2}) = \alpha$$

yazılabilir. Bu olasılıklar Çizim 9.8'de gösterilmiştir. Normal varyans sınamaları da aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibidir.

Bir Normal Dağılım Varyansının Sınamaları

Varyansı σ^2 olan bir normal anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çekilmiş olsun. Gözlenen örneklem varyansı s_x^2 ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ya da $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ya da $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

sıfır önsavını,

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha/2} \text{ ya da } \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

Burada $\chi^2_{n-1,\alpha}$,

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, χ^2_{n-1} rassal değişkeni de serbestlik derecesi $(n-1)$ olan bir ki-kare dağılımına uyar.

İki-yanlı karşı önsavla yapılan sınamanın karar kuralı Çizim 9.9'da gösterilmiştir.

ÖRNEK 9.5

Yerleşik ölçülere uyabilmek için bir kimyasal maddenin satış partilerinde katışıklılık yüzdesinin varyansının 4'ü aşmaması çok önemlidir. Yirmi partilik rassal bir örneklemde katışıklılık yüzdesinin örneklem varyansı 5.62 çıkmıştır. Anakütle varyansımn 4'ten büyük olmadığım söyleyen sıfır önsavım sınayın.

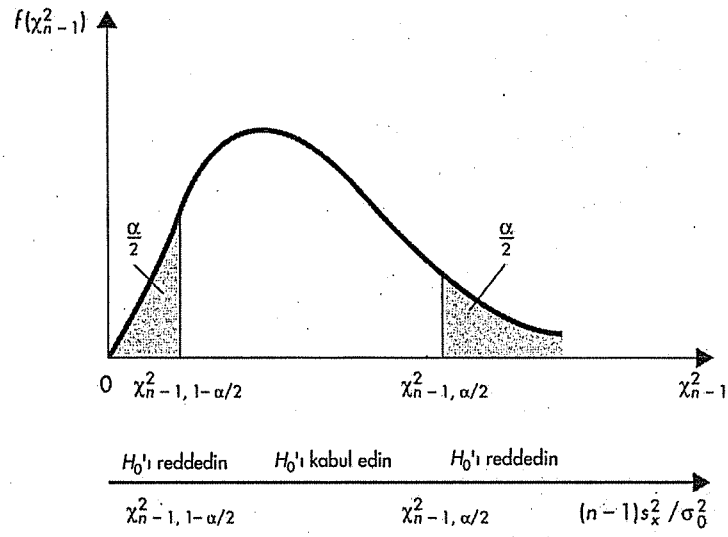
Katışıklılık oranının anakütle varyansına σ^2 diyelim.

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 4$$

sıfır önsavı

$$H_1: \sigma^2 > 4$$

karşı önsavıyla sınanacaktır.



ÇİZİM 9.9 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ sıfır önsavı doğruyken $\chi^2_{n-1} = (n-1)\,s_x^2/\sigma_0^2$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α anlamlılık düzeyinde H_0 'ın H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ karşı önsavıyla sınanmasının karar kuralı

Anakütle dağılımının normal olduğu varsayımına dayanarak, α anlamlılık düzeyindeki bir sınamada karar kuralı,

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$$

ise H_0 'ı H_1 lehine reddedin biçimindedir. Örnekte verilenlere göre şunları biliyoruz:

$$s_x^2 = 5.62 \qquad n = 20 \qquad \sigma_0^2 = 4$$

Öyleyse şunu bulabiliriz:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)(5.62)}{4} = 26.695$$

%10 düzeyinde sınama için $\alpha = 0.10$'dur, $(n-1) = 19$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımında bunun karşılığı olan eşik değeri Ek Çizelge 5'ten

$$\chi^2_{19,0.10} = 27.20$$

olarak okunur. Dolayısıyla, 26.695, 27.20'den büyük olmadığından, sıfır önsavı %10 düzeyinde reddedilemez. Demek ki veriler, katışıklılık yüzdesinin anakütle varyansının en çok 4 olduğunu söyleyen sıfır önsavına karşı yeterince güçlü kanıt içermemektedir.

9.5 ANAKÜTLEDEKİ ORANIN SINANMASI (BÜYÜK ÖRNEKLEMDE)

Çoğu uygulama sorununda, büyük bir anakütlenin belli bir niteliği taşıyan üyelerinin oranına ilişkin önsavları sınamak isteriz. Anakütle oranına ilişkin çıkarsama, rassal bir örneklemde ilgilenilen niteliği taşıyan bireylerin oranına dayanır.

Anakütle oranım p ile, n gözlemin rassal bir örneklemdeki oranı da $\hat{p}_x$ ile gösterelim. Örneklem büyükse,

$$Z = \frac{\hat{p}_x - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

rassal değişkeninin iyi bir yaklaşıklıkla standart normal dağılıma uyduğunu biliyoruz. Örneklem oranının örnekleme dağılımı, merkezî limit teoreminin bir sonucu olarak, daha önceki bölümlerde gördüğümüz gibi, örneklem büyükken yaklaşık olarak normaldir.

Eğer sıfır önsavı, anakütle oranı belirlenmiş bir p_0 değerine eşittir biçimindeyse, bu önsav doğruyken,

$$Z = \frac{\hat{p}_X - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

rassal değişkeni de standart normal dağılıma uyar. Artık anakütle oranı için uygun sınamaları, aşağıdaki çerçevede betimlendiği gibi türetebiliriz.

Anakütledeki Oranın Sınanması (Büyük Örneklemde)

Bir anakütleden n gözlemli rassal bir örneklem çektiğimizi, bunun p oranındaki üyesinin belli bir niteliği taşıdığını düşünelim. Bu durumda, örneklemdeki gözlem sayısı büyükse,[9] gözlenen örneklem oranı da $\hat{p}_x$ ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: p = p_0$ ya da $H_0: p \leq p_0$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: p > p_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

[9] Burada kastedilen yaklaşıklık, kırk ya da daha çok gözlemli örneklemler için genellikle yeterlidir.

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: p = p_0$ ya da $H_0: p \geq p_0$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: p < p_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: p = p_0$

sıfır önsavını

$$H_1: p \neq p_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha/2} \text{ ya da } \frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

Daha önce olduğu gibi burada da z_α,

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, Z rassal değişkeni ise standart normal dağılıma uyar.

Bu sınamalardan ikincisinin karar kuralı Çizim 9.10'da gösterilmiştir.

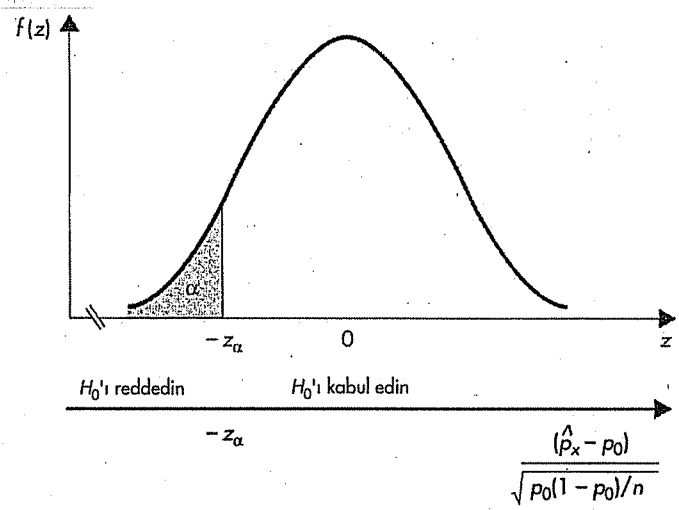
ÖRNEK 9.6

Rassal bir örnekleme seçilmiş 802 süpermarket müşterisinden 378'i, bir malı alışveriş arabasına koyduktan hemen sonra doğru fiyatı söyleyebilmiştir.[10] Bütün müşterilerin en az yarısının doğru fiyatı söyleyebileceğini ileri süren sıfır önsavını, anakütle oranının yarıdan az olduğunu ileri süren karşı önsavla, %10 düzeyinde sınayın. Ayrıca bu sınamanın p değerini de bulun.

Bu koşullarda doğru fiyatı söyleyebilen süpermarket müşterilerinin anakütledeki oranını p ile gösterelim.

$$H_0: p \geq p_0 = 0.50$$

[10] P. R. Dickson, A. G. Sawyer, "The price knowledge and search of supermarket shoppers," *Journal of Marketing, 54*, no. 3 (1990), 42-53.



ÇİZİM 9.10 $H_0: p = p_0$ sıfır önsavı doğruyken

$Z = \dfrac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve α anlamlılık düzeyinde H_0'ın $H_1: p < p_0$ karşı önsavıyla sınanmasının karar kuralı

sıfır önsavını

$$H_1: p < 0.50$$

karşı önsavıyla sınayalım.

Karar kuralı,

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_\alpha$$

ise H_0'ı karşı önsav lehine reddedin biçimindedir. Bu örnekte şunları biliyoruz:

$$p_0 = 0.50 \qquad n = 802 \qquad \hat{p}_x = 378/802 = 0.471$$

%10 düzeyinde bir sınama için $\alpha = 0.10$'dur, böylece

$$z_\alpha = z_{0.10} = 1.28$$

bulunur. Öyleyse sınama istatistiği de şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.471 - 0.50}{\sqrt{(0.50)(0.50)/802}} = -1.64$$

–1.64, –1.28'den küçük olduğuna göre sıfır önsavı %10 düzeyinde reddedilir.

Ek Çizelge 3'ten gördüğümüz gibi, $z_\alpha = 1.64$ ise, $\alpha = (1 - 0.9495) = 0.0505$'tir. Bu da sınamanın p değeridir. %5.05'ten yukarı bütün anlamlılık

düzeylerinde sıfır önsavı reddedilebilir. Öyleyse veriler, bir ürünü alışveriş arabasına koyduktan hemen sonra müşterilerin yarıdan azının doğru fiyatı söyleyebilecekleri konusunda güçlü bir izlenim vermektedir.

ALIŞTIRMALAR

16. Bir montaj hattı işlemine bir kamu denetmeninin ısrarıyla yeni bir güvenlik aygıtı takılmıştır. Bu aygıtın takılmasından sonra, sekiz günlük rassal bir örneklemde bitmiş parça sayısı cinsinden üretim aşağıdaki gibi olmuştur:

618 660 638 625 571 598 639 582

Yönetim, günlük üretimdeki oynamalardan kuşku duymakta, 500'ün üstünde herhangi bir varyansı istememektedir. Günlük üretimin anakütle varyansının 500'ü geçmediği biçimindeki sıfır önsavını %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

17. Bir makinenin ürettiği plastik levhalar, kalınlıklarında değişme olabileceği kuşkusuyla düzenli aralıklarla gözden geçirilmektedir. Gerçek kalınlık varyansı 2.25 milimetre kareyi geçerse, ürün kalitesi bozulmaktadır. Belli bir vardiyadan alınmış rassal bir örneklemi oluşturan on levhanın kalınlık ölçümleri yapılmış, aşağıdaki (milimetre cinsinden) sonuçlar elde edilmiştir:

226 226 232 227 225 228 225 228 229 230

(a) Örneklem varyansını bulun.

(b) Anakütle varyansının en çok 2.25 olduğunu söyleyen sıfır önsavını %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

18. Bir dersin uygulamalarını yapan bir öğretim yardımcısının etkinliğini değerlendirmenin bir yolu, dönem sonu sınavında öğrencilerinin aldığı notları incelemektir. İlgi odağı elbette ortalama nottur. Ama, varyans da yararlı bilgiler içerir, çünkü öğretmenlerin daha yetenekli öğrenciler için çok uygun olan öğretim biçimleri, daha az yetenekli ya da daha az hevesli öğrencilerde başarılı olmayabilir. Bir öğretim üyesi her dönemin sonunda sınıfın bütün şubelerine aynı sınav sorularını sormaktadır. Bu sınav sonuçlarının varyansı çoğunlukla 300'e çok yakındır. Otuz kişilik bir şubeye uygulama yapan yeni bir öğretim yardımcısının varyansı 400'dür. Bu öğrencilerin sınav notlarının, normal bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem oluşturduğu varsayımıyla, bu notların anakütle varyansının 300 olduğunu söyleyen önsavı, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

19. Bir şirket, termostatik kontrolla işleyen elektrikli aygıtlar üretmektedir. Bu kontrolların fiilen işlediği sıcaklığın standart sapması 2.0° fahrenhaytı geçmemelidir. Bu kontrollardan yirmi tanelik rassal bir örneklemde, sıcaklıkların örneklem standart sapması 2.36° fahrenhayt bulunmuştur. Gerek duyduğunuz bir varsayım varsa belirterek, anakütle standart sapmasının 2.0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, standart sapmanın daha büyük olduğunu söyleyen karşı önsavla, %5 düzeyinde sınayın.

20. Bir öğretim üyesi, öğrencileri bağımsız çalışmaya ve dersin okuma malzemesi üzerinde daha özenli düşünmeye yöneltmek amacıyla, bir makroiktisat dersinin notlamasına daha büyük bir bağımsız çalışma bölümü eklemiştir. Bir meslektaşı, öğrenci

başarısında değişkenliğin artabileceği konusunda kendisini uyarmıştır. Ancak, öğretim üyesi değişkenliğin azalacağı kanısında olduğu yanıtını vermiştir. Kayıtlara göre, geçmişte bu dersin dönem sonu sınavında öğrencilerin notları 18.2 standart sapmayla normal dağılıma uymuştur. Yeni yaklaşımın uygulandığı yirmibeş kişilik bir sınıfta, dönem sonu sınav notlarının standart sapması 15.3 olmuştur. Bu yirmibeş öğrencinin, aynı yaklaşımın uygulanabileceği bütün öğrencilerin rassal bir örneklemi olduğu varsayımıyla, anakütle standart sapmasının en az 18.2 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, standart sapmanın daha küçük olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

21. İflas etmiş perakendeci firma sahiplerinden oluşan 361 kişilik bir örneklemde 105 kişinin işletmeyi açmadan önce profesyonel destek almadığı belirtilmiştir.[11] Bu anakütlenin en çok %25'inin işletmeyi açmadan önce profesyonel destek almadığını söyleyen sıfır önsavını sınayın.

22. ABD'de 998 yetişkinden oluşan rassal bir örneklemin %17.3'ü şu söyleme az ya da çok katılmadığını belirtmiştir: "Kapitalizm bir iktisadi düzenden daha fazla bir şeydir; kurumların, davranışların ve kültürün bir birleşimidir." ABD'deki bütün yetişkinlerin en az %25'inin bu söylemle uyuşmadığını ileri süren sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.[12]

23. 160 işletmecilik mezunundan oluşan bir rassal örneklemde yetmişiki örneklem üyesi şu söylemle az ya da çok uyuştuklarını belirtmiştir: "Bir yöneticinin yükselmesinde, dürüstlüğünün öne çıkmasından çok, firmaya para kazandıran biri olarak tanınması daha önemlidir."[13] Bütün işletmecilik mezunlarının yarısının bu söyleme katıldıklarını ileri süren sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın. Sınamanın *p* değerini bulup yorumlayın.

24. ABD muhasebe firmalarındaki 199 denetmen ortaktan oluşan rassal bir örneklemde 104 kişi şu söylemle az ya da çok uyuştuklarını belirtmiştir: "Çalışmadan doğan nakit akışı, geçerli bir kârlılık ölçüsüdür."[14] Bu anakütlenin yarısının bu söyleme katıldıklarını ileri süren sıfır önsavını, iki-yanlı karşı savla %10 anlamlılık düzeyinde sınayın. Ayrıca, bu sınamanın *p* değerini bulup yorumlayın.

25. Küçük şirketlerin genel müdürlerinden oluşan elli kişilik bir rassal örnekleme, işe başvuranlara ilişkin beklentileri sorulmuştur. Örneklemdekilerden yirmisekizi, görüşmeye gelenin şirketle ilgili elden geldiğince çok bilgi toplamış olmasının beklendiğini belirtmiştir.[15] Bütün görüşme yapanlardan yarısının bu beklenti içinde olduğunu söyleyen sıfır önsavını, anakütle oranının yarıdan çok olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

---

[11] D. B. Bradley, H. L. Saunders, "A seven year strategic marketing profile of retail and ser-vice business bankruptcy," *Journal of Applied Business Research, 5*, no. 2 (1989), 69-79.

[12] Veriler R. A. Peterson, G. Albaum, G. Kozmetsky, "Capitalism and business: Public perceptions," *Business Horizons, 32*, no. 4 (1989), 63-66'dan alınmıştır.

[13] M. M. Dolecheck, J. Caldwell, C. C. Dolecheck, "Ethical perceptions and attitudes of business personnel," *American Business Review, 6*, no. 1 (1988), 47-54.

[14] J. E. McEnroe, "Cash flow accounting revisited: a note on a partial replication of the Lee study," *Abacus, 25* (1989), 56-60.

[15] B. Wells, N. Spinks, "Interviewing: What small companies say," *Bulletin of the Association of Business Communication, 55*, no. 2 (1992), 18-22.

26. Azınlık kökenli 172 küçük işletme sahibinden oluşan rassal bir örneklemde 118 kişi, başlangıç sermayesinin en önemli kaynağının kişisel tasarruflar olduğunu söylemiştir.[16] Azınlık kökenli küçük işletme sahiplerinden %75'i için başlangıç sermayesinin en önemli kaynağının kişisel tasarruflar olduğu sıfır önsavını, anakütle oranının %75'ten düşük olduğu karşı önsavıyla sınayın.

27. 202 üniversite muhasebe öğretim üyesinden oluşan rassal bir örnekleme sorular sorulmuştur. Bunlardan 140'ı, muhasebe derslerinde dürüstlüğe biraz daha çok yer verilebileceği kanısındadır.[17] Üniversite muhasebe öğretim üyelerinden en az %75'inin bu görüşte olduğunu ileri süren sıfır önsavını sınayın.

9.6 İKİ ORTALAMA ARASINDAKİ FARKIN SINANMASI

Bu altbölümde, iki anakütleden çekilmiş rassal örneklemlerin bulunduğu durumu inceleyeceğiz. İlgilendiğimiz büyüklük, iki anakütle ortalamaları arasındaki farktır. Önsavları sınamak için süreçler geliştirirken, uygun yöntem burada da örneklemlerin çekiliş biçimine dayanır. Altbölüm 8.7'de olduğu gibi, eşlenik çiftlerle bağımsız örneklemleri ayrı ayrı ele almamız gerekir.

EŞLENİK ÇİFTLERE DAYALI SINAMALAR

Burada, n tane eşlenik çift gözlemden oluşan rassal bir örneklemin, ortalamaları μ_X ile μ_Y olan anakütlelerden çekilmiş olduklarını varsayalım. Örneklem gözlemlerinin kendileri $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ile gösterilsin.

Bir kimsenin televizyon reklamı izlerkenki beyin çalışması ile daha sonra bu reklamın içeriğini anımsama yeteneği arasındaki ilişkinin araştırıldığı bir çalışmada, Çizelge 9.2'deki veriler elde edilmiştir.[18] Deneklere on ürünün ikişer markasının reklamları gösterilmiştir. Her bir reklam için 24 saat sonra anımsama yeteneği ölçülmüş, her reklam çiftinin birer üyesi "güçlü anımsanan" ve "zayıf anımsanan" diye adlandırılmıştır. Çizelge, deneklerin bu reklamları seyrederkenki toplam beyin çalışmalarının bir indeksini göstermektedir.

---

[16] H. D. Feldman, C. S. Koberg, T. J. Dean, "Minority small business owners and their paths to ownership," *Journal of Small Business Management, 29*, no. 4 (1991), 12-27.

[17] E. Milam, F. McNair, "An examination of accounting faculty perceptions of the importance of ethics coverage in accounting courses," *Business and Professional Ethics Journal, 11*, no. 2 (1992), 57-71.

[18] V. Appel, S. Weinstein, C. Weinstein, "Brain activity and recall of TV advertising," *Journal of Advertising Research, 19*, no. 4 (1979), 7-15.

ÇİZELGE 9.2 On çift televizyon reklamı izleyen deneklerin beyin çalışmaları

ÜRÜN	GÜÇLÜ ANIMSANAN	ZAYIF ANIMSANAN	FARKLAR	
i	x_i	y_i	d_i	d_i^2
1	137	53	84	7,056
2	135	114	21	441
3	83	81	2	4
4	125	86	39	1,521
5	47	34	13	169
6	46	66	–20	400
7	114	89	25	625
8	157	113	44	1,936
9	57	88	–31	961
10	144	111	23	1,089
		Toplamlar	210	14,202

Güçlü anımsanan reklamlar için beyin çalışmasının anakütle ortalamasını μ_X ile, zayıf anımsanan reklamlar için anakütle ortalamasını da μ_Y ile gösterirsek, d_i farkları, ortalaması $(\mu_X - \mu_Y)$ olan bir anakütleden rassal çekilmiş on gözlemli bir örneklemi temsil eder. Bu farkların anakütle dağılımı normal varsayılırsa, Altbölüm 9.3'teki yöntemler, $(\mu_X - \mu_Y)$'ye ilişkin önsavların sınan-masında hemen kullanılabilir. Bu özel örnekte, beyin çalışma düzeylerinin orta-lamaları arasında fark yoktur diyen

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$

sıfır önsavının doğal bir sınaması, güçlü anımsanan reklamlar için beyin çalışması ortalama olarak daha yüksektir diyen

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$$

karşı önsavıyla yapılır.

Daha genel olarak, $(\mu_X - \mu_Y)$ farkının belirlenmiş bir D_0 değerine eşit olduğunu söyleyen önsavı, aşağıdaki çerçevede gösterilen süreçle sınayabiliriz.

İki Anakütle Ortalaması Arasındaki Farkın Sınanması: Eşlenik Çiftler

Ortalamaları μ_X ile μ_Y olan iki dağılımdan çekilmiş n tane eşlenik çift gözlemden oluşan rassal bir örneklemimiz olduğunu düşünelim. $\bar{d}$ ile s_d, n tane $(x_i - y_i)$ farkının gözlenen örneklem ortalaması ile standart sapmasını göstersin. Eğer farkların anakütle dağılımı normalse, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \leq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \geq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y < D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$

sıfır önsavını,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq D_0$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Burada $t_{n-1,\alpha}$,

$$P(t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, t_{n-1} de serbestlik derecesi $(n-1)$ olan Student t dağılımına uyar.

İki anakütle ortalamasının birbirine eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınarken bu formüllerde $D_0 = 0$ alırız.

Şimdi televizyon reklamı seyreden deneklerin beyin çalışmaları örneğimize dönelim. Çizelge 9.2'den farkların örneklem ortalamasını

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{10}(210) = 21$$

buluruz. Örneklem varyansı

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}[14{,}202 - (10)(21)^2] = 1{,}088$$

örneklem standart sapması da

$$s_d = \sqrt{1{,}088} = 32.98$$

olur. Şimdi

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0 = 0$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz. Sınama şuna dayanır:

$$\frac{\bar{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{21}{32.98/\sqrt{10}} = 2.014$$

Bu büyüklük, $(n-1) = 9$ serbestlik dereceli Student t dağılımının çizelge değerleriyle karşılaştırılır. Ek Çizelge 6'dan, %5 ve %2.5 düzeyindeki sınamalar için şunları okuruz:

$$t_{9,0.05} = 1.833 \qquad t_{9,0.025} = 2.262$$

Demek ki, anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını %5 düzeyinde reddebileceğiz ama %2.5 düzeyinde reddedemeyeceğiz. Öyleyse Çizelge 9.2'deki verilerin, ortalama olarak, güçlü anımsanan reklamlardaki beyin çalışmasının, zayıf anımsananlara göre daha yüksek olduğuna ilişkin epeyi kanıt içerdiğini görüyoruz. Bu iki öbek için beyin çalışmasının ortalamaları aslında aynı olsaydı, gözlenen kadar ya da ondan daha aşırı örneklem bulgusuyla karşılaşma olasılığı 0.025 ile 0.05 arasında olurdu.

BAĞIMSIZ ÖRNEKLEMLERE DAYALI SINAMALAR

Şimdi de ortalaması μ_X, varyansı σ_X^2 olan normal bir anakütleden n_x gözlemli rassal bir örneklemimiz ve ortalaması μ_Y, varyansı σ_Y^2 olan normal bir anakütleden n_Y gözlemli bağımsız bir rassal örneklemimiz olduğunu düşünelim.

Altbölüm 8.7'de, örneklem ortalamaları $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ ile gösterilirse,

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}}$$

rassal değişkeninin standart normal dağılıma uyduğunu görmüştük. Eğer iki anakütlenin varyansları biliniyorsa, anakütle ortalamaları arasındaki farkın sınanması, daha önceki akıl yürütmenin aynısı kullanılarak, bu bulguya dayandırılabilir. Dahası (merkezî limit teoremi sayesinde), iki örneklem büyükse, anakütle dağılımları normal olmasa bile, anakütle varyansları yerine örneklem varyansları geçirildiğinde, bu bulgu iyi bir yaklaşıklıkla geçerliliğini korur. Bu da, aşağıdaki çerçevede özetlendiği gibi, yaygın bir uygulanma alanı olan sınamaların türetilmesini sağlar.

Anakütle Ortalamaları Arasındaki Farkın Sınanması: Bağımsız Örneklemler (Varyanslar Biliniyor ya da Örneklemler Büyük)

Ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları σ_X^2 ile σ_Y^2 olan normal dağılımlardan n_x ve n_Y gözlemli bağımsız rassal iki örneklemimiz olsun. Gözlenen örneklem ortalamaları $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \leq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\overline{x} - \overline{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} > z_\alpha \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \geq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y < D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\overline{x} - \overline{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} < -z_\alpha \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq D_0$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} > z_{\alpha/2} \quad \text{ise} \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Örneklemlerin gözlem sayıları n_x ile n_y büyükse,[19] anakütle ortalamaları arasındaki farkın α anlamlılık düzeyindeki sınamaları, anakütle varyansları yerine örneklem varyansları s_x^2 ile s_y^2 geçirilerek iyi bir yaklaşıklıkla elde edilebilir. Büyük örneklemlerde, anakütle dağılımları normal olmasa bile, bu sıkı yaklaşıklık korunur.

ÖRNEK 9.7

Yeminli muhasebeciler arasında, bu meslekteki kadınlara karşı davranışlar konusunda bir araştırma yapılmıştır.[20] Araştırmaya yanıt verenlerden şu söylemi, bir (kesinlikle karşıyım) ile beş (kesinlikle katılıyorum) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. "Yeminli muhasebeci kadınlara, erkeklerle aynı işler verilir." 186 erkek muhasebecinin yanıt ortalaması 4.059, örneklem standart sapması 0.839'dur. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 172 kadın muhasebecinin yanıt ortalaması 3.680, örneklem standart sapması 0.966'dır. İki anakütle ortalamasının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, erkek muhasebecilerin gerçek ortalamasının daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

Erkek ve kadın muhasebecilerin anakütle ortalamalarını sırasıyla μ_X ve μ_Y ile gösterelim.

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu_X - \mu_Y = 0$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz. Karar kuralı

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(s_x^2/n_x) + (s_y^2/n_y)}} > z_\alpha$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin biçimindedir. Bu örnekte

[19] Her bir örneklem en az 30 gözlem içerdiğinde bu yaklaşıklık genellikle doyurucudur.

[20] M. W. Trapp, R. H. Hermanson, D. H. Turner, "Current perceptions of issues related to women employed in public accounting," *Accounting Horizons, 3*, no. 1 (1989), 71-85.

$$n_x = 186 \qquad \bar{x} = 4.059 \qquad s_x = 0.839$$

$$n_y = 172 \qquad \bar{y} = 3.680 \qquad s_y = 0.966$$

olduğundan şunu yazabiliriz:

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(s_x^2/n_x)+(s_y^2/n_y)}} = \frac{4.059-3.680}{\sqrt{[(0.839)^2/186]+[(0.966)^2/172]}} = 3.95$$

Ek Çizelge 3'e bakarak, iki anakütle ortalamasının eşitliğini ileri süren sıfır önsavı gerçekten doğru olsaydı, bu denli aşırı bir örneklem bulgusu ile karşılaşma şansının pek olmayacağı görülebilir. Sözgelimi, %0.01 düzeyinde bir sınama için $\alpha = 0.0001$'dir, öyleyse $z_\alpha = z_{0.0001} = 3.75$ olur. 3.95, 3.75'ten büyük olduğundan, bu denli düşük bir anlamlılık düzeyinde bile, sıfır önsavı reddedilir. Bu verilerde, yanıtların anakütle ortalamasının erkeklerde kadınlara göre daha yüksek olduğu konusunda karşı konamayacak güçte kanıt bulunmaktadır; yani, bu meslekteki erkekler ortalama olarak, kadınlara erkeklerle aynı işlerin verildiği konusunda, kadınlara göre daha iyimserdir.

Şimdi de örneklemlerdeki gözlem sayısının büyük olmadığı durumu ele alacağız. İki anakütle varyansının birbirine eşit olduğu varsayımı yapılabilirse, o zaman bu sınamalar (Altbölüm 8.7'de verilen)

$$t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{s\sqrt{\dfrac{n_x+n_y}{n_x n_y}}}$$

rassal değişkeninin $(n_x + n_y - 2)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyduğu bulgusuna dayanır. Burada

$$s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2+(n_y-1)s_y^2}{(n_x+n_y-2)}$$

birleştirilmiş varyansın bir tahmin edicisidir. Anakütle ortalamaları arasındaki fark için uygun sınamalar aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.

İki Normal Anakütle Ortalaması Arasındaki Farkın Sınanması: Bağımsız Örneklemler, Anakütle Varyansları Eşit

Ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları aynı olan normal dağılımlardan n_x ve n_y gözlemli bağımsız rassal iki örneklemimiz olsun. Gözlenen örneklem varyansları s_x^2 ile s_y^2 ise, anakütlelerin birleştirilmiş varyanslarının bir tahmini

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$$

ile yapılabilir. Bu durumda, gözlenen örneklem ortalamaları $\bar{x}$ ile $\bar{y}$ ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyleri α olur:

(i) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \leq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{s\sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}} > t_{n_x+n_y-2,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$ ya da $H_0: \mu_X - \mu_Y \geq D_0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y < D_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{s\sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}} < -t_{n_x+n_y-2,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $H_0: \mu_X - \mu_Y = D_0$

sıfır önsavını,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq D_0$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{s\sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}} < -t_{n_x+n_y-2,\alpha/2} \text{ ya da } \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{s\sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}} > t_{n_x+n_y-2,\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

Burada $t_{n_x+n_y-2,\alpha}$

$$P(t_{n_x+n_y-2} > t_{n_x+n_y-2,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır. $t_{n_x+n_y-2}$ ise $(n_x + n_y - 2)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.

ÖRNEK 9.8

Bir çalışma, oturum başkanının varlığının bir grup insanın ürettiği düşünce sayısı üzerindeki etkisini araştırmıştır.[21] Dört kişilik gruplar, oturum başkanı varken ve yokken gözlenmiştir. Oturum başkanı bulunan dört grupluk rassal bir örneklemde grup başına üretilen ortalama düşünce sayısı 78.0, örneklem standart sapması 24.4 bulunmuştur. Oturum başkanı bulunmayan dört grupluk bağımsız bir rassal örneklemde ise üretilen ortalama düşünce sayısı 63.5, örneklem stnadart sapması 20.2 çıkmıştır. Anakütle dağılımlarının aynı varyansla normal olduğunu varsayarak, anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, oturum başkanı olan gruplarda gerçek ortalamanın daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

Oturum başkanı olan ve olmayan grupların anakütle ortalamalarını sırasıyla μ_X ve μ_Y ile gösterelim. Bu durumda amaç,

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$

sıfır önsavını,

$$H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$$

karşı önsavıyla sınamaktır. Karar kuralı,

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\dfrac{n_x + n_y}{n_x n_y}}} > t_{n_x+n_y-2,\alpha}$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin biçimindedir. Bu verilerden şunları biliyoruz:

$$\bar{x} = 78.0 \qquad s_x = 24.4 \qquad n_x = 4$$

$$\bar{y} = 63.5 \qquad s_y = 20.2 \qquad n_y = 4$$

Öyleyse anakütlelerin aynı olan varyansı

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$$

$$= \frac{(3)(24.4)^2 + (3)(20.2)^2}{4 + 4 - 2} = 501.7$$

ile tahmin edilir böylece aynı olan standart sapma da

$$s = \sqrt{501.7} = 22.4$$

---

[21] E. F. Fern, "The use of focus groups for idea generations: The effect of group size, acquaintanceship, and moderator on response quantity and quality," *Journal of Marketing Research, 19* (1982), 1-13.

ile tahmin edilmiş olur. Bu durumda t istatistiği

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s\sqrt{\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}}} = \frac{78.0-63.5}{22.4\sqrt{\frac{8}{16}}} = 0.915$$

olur. %10 düzeyinde bir sınama için Ek Çizelge 6'dan

$$t_{n_x+n_y-2,0.10} = t_{6,0.10} = 1.440$$

Öyleyse, 0.915, 1.440'tan küçük olduğuna göre, anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavı, %10 anlamlılık düzeyinde, tek-yanlı karşı önsav lehine reddedilemez. Örneklem verileri, oturum başkanı bulunan gruplarda ortalama olarak daha çok düşünce üretileceğine ilişkin güçlü kanıt içermemektedir. Ancak, bu kadar küçük örneklemlerle, bu sınamadan büyük bir güç bekleyemeyiz, dolayısıyla sıfır önsavım düşük anlamlılık düzeylerinde reddedebilmek için, anakütle ortalamaları arasında epeyi büyük farkların olması gerekir.

Örnek 9.8'deki sınama, iki anakütle varyansının eşit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Aslında bu varsayımın sağlanmadığı durumlarda da geçerli olan sınamalar geliştirilebilir, ama bunlar burada daha fazla tartışılmayacaktır.

9.7 İKİ ANAKÜTLEDEKİ ORANLAR ARASINDAKİ FARKIN SINANMASI (BÜYÜK ÖRNEKLEMLERDE)

Şimdi de iki anakütle oranını karşılaştırmaya yöneliyoruz. Altbölüm 8.8'de olduğu gibi, "başarı" oranı p_X olan bir anakütleden çekilmiş n_x gözlemli rassal bir örneklemde örneklem oranı $\hat{p}_X$, "başarı" oranı p_Y olan bir anakütleden çekilmiş n_y gözlemli bağımsız rassal bir örneklemde örneklem oranı $\hat{p}_Y$ olsun.

Altbölüm 8.8'de, örneklem gözlemlerinin sayıları büyükse,

$$Z = \frac{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n_x} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_y}}}$$

rassal değişkeninin, merkezî limit teoremi sayesinde, çok iyi bir yaklaşıklıkla, standart normal dağılıma uyduğunu görmüştük.

Anakütle oranları p_X ile p_Y'nin eşit olduğunu söyleyen önsavı sınamak istediğimizi düşünelim. Bunların ortak değerine p_0 dersek, bu önsav doğruyken

$$Z = \frac{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y)}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n_x} + \frac{p_0(1-p_0)}{n_y}}} = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}\right)}} \qquad (9.7.1)$$

büyüklüğü, iyi bir yaklaşıklıkla standart normal dağılıma uyar.

Son olarak, (9.7.1) gösterimindeki ortak oran p_0,

$$\hat{p}_0 = \frac{n_x \hat{p}_X + n_y \hat{p}_Y}{n_x + n_y}$$

ile verilen biraraya getirilmiş $\hat{p}_0$ tahmin edicisiyle kestirilebilir. (9.7.1)'deki bilinmeyen p_0 yerine $\hat{p}_0$ geçirilirse, örneklem büyük olmak koşuluyla, dağılımı standart normal dağılıma yakın olan bir rassal değişken elde edilir. Bu bulgu, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, sınamalarımızın temelini oluşturur.

İki Anakütle Oranının Eşitliğinin Sınanması (Büyük Örneklemlerde)

Başarı oranı p_X olan bir anakütleden gelen n_x gözlemli rassal bir örneklemdeki başarı oranını $\hat{p}_X$, başarı oranı p_Y olan bir anakütleden gelen n_y gözlemli bağımsız rassal bir örneklemdeki başarı oranını $\hat{p}_Y$ ile gösterelim. Anakütle oranlarının eşit olduğu önsavı ileri sürülürse, ortak oran

$$\hat{p}_0 = \frac{n_x \hat{p}_X + n_y \hat{p}_Y}{n_x + n_y}$$

ile bulunur. Bu durumda, örneklemler büyükse,[22] aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur.

(i) $H_0: p_X - p_Y = 0$ ya da $H_0: p_X - p_Y \leq 0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: p_X - p_Y > 0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

[22] Her bir örneklemde en az kırk gözlem varsa yaklaşıklık genellikle iyidir.

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} > z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'reddedin.}$$

(ii) $H_0: p_X - p_Y = 0$ ya da $H_0: p_X - p_Y \geq 0$

sıfır önsavlarından birini,

$$H_1: p_X - p_Y < 0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} < -z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'reddedin.}$$

(iii) $H_0: p_X - p_Y = 0$

sıfır önsavını,

$$H_1: p_X - p_Y \neq 0$$

iki-yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} < -z_{\alpha/2}$$

ya da $$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} > z_{\alpha/2} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

ÖRNEK 9.9

Rassal bir örneklemdeki 203 İngiliz ticari dergi reklamından elliikisinde gülmece vardır. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 270 Amerikan ticari dergi reklamından da elli altısı gülmece içermektedir.[23] Bütün İngiliz ve Amerikan ticari dergi reklamları içinde gülmece içerenlerin oranının aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavım, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

Gülmeceli İngiliz ve Amerikan reklamlarının anakütle oranlarına sırasıyla p_X ve p_Y diyelim.

$$H_0: p_X - p_Y = 0$$

[23] L. S. McCullogh, R. K. Taylor, "Humor in American, British, and German ads," *Industrial Marketing Management, 22* (1993), 17-28.

sıfır önsavını

$$H_1: p_X - p_Y \neq 0$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz. Karar kuralı

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad > z_{\alpha/2}$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin. Bu örnekte şunları biliyoruz:

$$n_x = 203 \qquad \hat{p}_x = 52/203 = 0.256 \qquad n_y = 270 \qquad \hat{p}_y = 56/270 = 0.207$$

Bu durumda, sıfır önsavı geçerliyken ortak oranın tahmini şudur:

$$\hat{p}_0 = \frac{n_x\hat{p}_X + n_y\hat{p}_Y}{n_x + n_y} = \frac{(203)(0.256)-(270)(0.207)}{203+270} = 0.228$$

Öyleyse test istatistiği de şöyle bulunur:

$$\frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} = \frac{0.256-0.207}{\sqrt{(0.228)(0.772)}\left(\frac{203+270}{(203)(270)}\right)} = 1.26$$

$z_{\alpha/2} = 1.26$'ya karşılık gelen $\alpha/2$ değeri, Ek Çizelge 3'ten $\alpha/2 = 0.1038$ olarak okunur. Dolayısıyla, iki-yanlı karşı savla sınamanın p değeri 0.2076'dır. Gülmeceli reklamların anakütle oranlarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavı, %20.76'dan büyük anlamlılık düzeylerinde reddedilebilir. Bu da, verilerde sıfır önsavına karşı orta güçte kanıt bulunduğunu gösterir.

ALIŞTIRMALAR

28. Bir üniversitenin mezunlara iş bulma görevlisi, kız ve erkek işletmecilik mezunlarının ilk işlerinde farklı ücret önerisi alıp almadıklarını belirlemek istemektedir. Görevli, nitelikleri, ilgi alanları, yetişmeleri elden geldiğince birbirine benzeyen ikişer kişiyi eşleştirerek sekiz çiftlik rassal bir örneklem seçmiştir. Her çiftteki ana farklılık bir kişinin erkek bir kişinin kız olmasıdır. Aşağıdaki çizelge, iş görüşmeleri sonunda her örneklem üyesinin aldığı en yüksek ücret önerisini göstermektedir. Dağılımların normal olduğunu varsayarak, anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını erkeklerin ücretinin kızlardan yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

ÇİFT	EN YÜKSEK ÜCRET ÖNERİSİ (DOLAR)	
	ERKEK	KIZ
1	26,200	22,600
2	24,700	23,600
3	28,400	29,300
4	21,700	22,300
5	28,600	26,200
6	29,300	25,900
7	28,300	28,500
8	24,300	21,300

29. Bir kurum öğrencilere bir beceri sınavı için hazırlık kursu açmıştır. Bu kursun başarısını ölçme denemesinin bir parçası olarak oniki öğrenci seçilmiş, benzer akademik geçmişi olanlar eşleştirilerek altı çift oluşturulmuştur. Her çiftten rassal seçilen bir kişi sınavdan önce kursa katılmış, çiftin öbür üyesi katılmamıştır. Sınav sonuçları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Not farklarının normal dağılıma uyduğu varsayımıyla, iki anakütle ortalamasının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, hazırlık kursuna giden öğrencilerin notlarının daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

ÖĞRENCİ ÇİFTİ	KURSA GİDEN	KURSA GİTMEYEN
1	82	75
2	73	71
3	59	52
4	48	46
5	69	70
6	93	83

30. Eyaletlerden ve federal devletten yetki almış kredi birliklerini inceleyen bir çalışmada, 145 eşlenik kredi birliği çifti oluşturulmuştur. Her çiftte eyalet izinli bir, federal devlet izinli bir kredi birliği vardır. Çiftler oluşturulurken büyüklük, kuruluş tarihi gibi etmenler gözönüne alınmıştır.[24] Her kredi birliği için toplam borçların toplam varlıklara oranı hesaplanmıştır. Bu oran için (devlet izinli – eyalet izinli) farklarının örneklem ortalaması 0.0518, bu farkların örneklem standart sapması 0.3055'tir. İki anakütle ortalamasının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

31. MATWES süreci, kadın yöneticilere yönelik davranışları ölçmek üzere tasarlanmıştır. Yüksek puanlar olumsuz, düşük puanlar olumlu davranışları göstermektedir. 151 erkek, 108 kadın MBA öğrencisi bağımsız rassal örneklemlere

[24] T. Kohers, S. M. Rao, "The choice of regulatory regime and its effect on financial profile: A study of credit union chartering," *American Business Review, 6*, no. 2 (1988), 38-45.

seçilmiştir.[25] İlk grup için ortalama ve standart sapma MATWES puanları 85.8 ve 19.3; ikinci grup için aynı puanlar 71.5 ve 12.2'dir. Anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, gerçek ortalama MATWES puanının erkeklerde kadınlara göre daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

32. Rassal bir örneklemdeki 125 Japon girişimci için iş değiştirme sayılarının ortalaması 1.91, örneklem standart sapması 1.32'dir.[26] Bağımsız bir rasal örneklemdeki 86 Japon şirket yöneticisi için iş değiştirme sayılarının ortalaması 0.21, örneklem standart sapması 0.53'tür. Anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, Japon girişimcilerin ortalama iş değiştirme sayısının, Japon şirket yöneticilerine göre daha çok olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

33. Bir siyaset bilimi profesörü, genel seçimlerde oy kullanan ve kullanmayan öğrencilerin özelliklerini karşılaştırmakla ilgilenmektedir. Son başkanlık seçiminde oy kullandığını söyleyen 114 öğrencilik rassal bir örneklemde birikimli not ortalamalarının ortalaması 2.71, standart sapması 0.64 çıkmıştır. Oy kullanmayan 123 öğrencilik bağımsız bir rassal örneklemde ortalama 2.79, standart sapma 0.56 bulunmuştur. Anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

34. Mali denetmenler büyük ölçüde, hesaplarda yapılabilecek hilelerle ve bunların bulunmasıyla ilgilenirler. Bu denetmenlerin hilenin varlığını değerlendirme sırasında "tehlike işaretleri soru kâğıdı"ndan, yani incelenen hilenin olası belirtilerinin bir listesinden yararlanabilecekleri ileri sürülmüştür. Bunun doğruluğu anlamak için, yeminli muhasebe firmalarının orta düzey denetmenlerinden oluşan örneklemlere, hileli durumlarla ilgili denetim raporu bilgileri verilmiş, hile bulunması şansını sıfır ile 100 arasındaki bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[27] Otuzüç denetmenli bir örneklem tehlike işaretleri soru kâğıdını kullanmıştır. Bunların ortalama değerlendirmesi 36.21, örneklem standart sapması 22.93 çıkmıştır. Bu soru kâğıdını kullanmayan otuzaltı denetmenli bağımsız bir örneklemde örneklem ortalaması ve standart sapması sırasıyla 47.56 ve 27.56 bulunmuştur. İki dağılımın eşit varyansla normal dağılıma uyduğunu varsayıp, anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

35. Şirketlerin halka açılma tanıtım broşürleri incelenmiştir.[28] Kazanç tahminlerinin açıklandığı yetmiş broşürlü rassal bir örneklemde "borç/özsermaye" oranının ortalaması 3.97, örneklem standart sapması 6.14'tür. Kazanç tahminlerinin açıklanmadığı ellibir broşürlü bağımsız bir rassal örneklemde ortalama borç/özsermaye oranı 2.86, örneklem standart sapması 4.29'dur. Borç/özsermaye oranı anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

---

[25] P. Dubno, "Attitudes toward women executives: A longitudinal approach," *Academy of Management Journal, 28* (1985), 235-39.

[26] T. Ohe, S. Honjo, C. MacMillan, Japanese entrepreneurs and corporate managers: a comparison," *Journal of Business Venturing, 5* (1990), 163-76.

[27] K. V. Pincus, "The efficacy of a red flags questionnaire for assessing the possibility of a fraud," *Accounting, Organizations and Society, 14* (1989), 153-63.

[28] P. M. Clarkson, A. Dontoh, G. Richardson, S. E. Sefcik, "The voluntary inclusion of earnings forecasts in IPO prospectuses," *Contemporary Accounting Research, 8* (1992, 601-26.)

36. Bir yayımcı, üniversite ders kitaplarının üç renkli pahalı kapak tasarımlarının satışlar üzerindeki etkisiyle ilgilenmektedir. Yayımcı işletmecilik alanında çıkarmayı planladığı yirmi kitaptan rassal seçtiği on tanesine pahalı kapak tasarımı yaptırmıştır. Geri kalan on tanesinin kapağı sadedir. Pahalı kapaklı kitapların ilk yıl satışları ortalaması 9,254, örneklem standart sapması 2,107'dir. Sade kapaklıların ilk yıl satışları ortalaması 8,167, örneklem standart sapması 1,681'dir. İki anakütle dağılımının aynı varyansla normal dağıldığını varsayıp anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını, pahalı kapak tasarımı olan kitapların gerçek ortalamasının daha yüksek olduğu karşı önsavıyla sınayın.

37. 1980'de rassal bir örnekleme giren 1,556 kişiye şu konudaki tepkisi sorulmuştur: "İnsan refahında anlamlı bir gelişmenin gerçekleşebilmesi için önce kapitalizm değişiklik geçirmelidir." Örneklemdekilerin %38.4'ü bu söyleme katılmıştır.[29] Aynı tümce 1989'da 1,108 kişilik bir rassal örnekleme sunulduğunda %52.0'ı bu görüşe katılmıştır. Bu söylemi benimseyenlerin anakütle oranlarının her iki yılda da aynı olduğunu ileri süren sıfır önsavını, 1989'da daha yüksek bir oranın bu görüşte olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

38. ATT'den başka şirketlerin şehirlerarası telefon iletişimini başlatmasından bir yıl sonra, ev telefonu kullanıcılarına bir anket yapılmıştır.[30] Rassal bir örneklemdeki 368 ATT kullanıcısından doksanikisi, bağımsız bir rassal örneklemdeki 116 başka şirket kullanıcısından ise otuzyedisi sunulan seçenekleri öğrenmeye çabaladıklarını söylemiştir. İki anakütle oranının aynı olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

39. Kapanmak üzere olan bir süpermarket zincirinde çalışanlara, kendilerini işe ortak edecek bir plana ilişkin görüşleri sorulmuştur. Bazı çalışanlar 200 $ peşin olmak üzere bu plana 5,000 $ yatırmayı taahhüt etmişler, ötekiler ise taahhüde girmemişlerdir. Taahhüde girenlerden rassal seçilmiş 175 kişilik bir örneklemde yetmişsekiz kişi, taahhüde girmeyen 604 kişilik rassal bir örneklemden 208 kişi önceden işten çıkarılmıştır.[31] Taahhüde girenlerle girmeyenler anakütlelerinde işten atılanlar oranının aynı olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

40. Rassal bir örneklemdeki 381 yatırım amaçlı şirket tahvilinden 191'inin batık fonu vardır. Bağımsız bir rassal örneklemdeki 166 spekülatif amaçlı şirket tahvilinden 145'inde batık fon vardır.[32] İki anakütle oranının aynı olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

---

[29] R. A. Peterson, G. Kozmetsky, G. Albaum, "The public's attitude toward capitalism: 1980-89," *Business Horizons, 34*, no. 5 (1991), 59-63.

[30] J. F. Snyder, P. T. Nelson, C. C. Morris, "The end of the telecommunication monopoly: Subsequent residential customer choice among long distance carriers," *Southern Business Review, 17*, no. 2 (1991), 40-54. (ATT = Amerikan Telefon ve Telgraf Şirketi, Ç.N.)

[31] Veriler A. Hochner, C. S. Gramrose, "Sources of motivation to choose employee ownership as an alternative to job loss," *Academy of Management Journal, 28* (1985), 860-75'ten alınmıştır.

[32] M. W. Marr, J. P. Ogden, "Market imperfections and the choices of maturity and call provisions in corporate debt," *Journal of Business Research, 19* (1989), 17-31.

41. Bağımsız rassal örneklemlerdeki tüketicilere arabalarından memnuniyetlerine ilişkin biraz farklı iki soru sorulmuştur.[33] İki sorunun da yanıt seçenekleri aynıdır. Arabalarından ne kadar *memnun oldukları* sorulan 240 örneklem üyesinden 138'i "çok memnunum" yanıtını seçmiştir. Arabalarından ne kadar *memnun olmadıkları* sorulan 240 örneklem üyesinden 128'i "çok memnunum" yanıtını seçmiştir. İki anakütle oranının aynı olduğu sıfır önsavını, açıkça görülen tek-yanlı karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

42. ABD'de rassal bir örnekleme giren 1,200 kişiden 480'i hukukçulara olumlu bakmaktadır.[34] Bağımsız bir rassal örneklemdeki 1,000 Kanadalıdan 790'ı hukukçulara olumlu bakmaktadır. İki anakütle oranının aynı olduğu sıfır önsavını, hukukçulara olumlu bakanlar oranının Kanadalılar arasında daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

9.8 NORMAL DAĞILMIŞ İKİ ANAKÜTLEDEKİ VARYANSLARIN BİRBİRLERİNE EŞİTLİĞİNİN SINANMASI

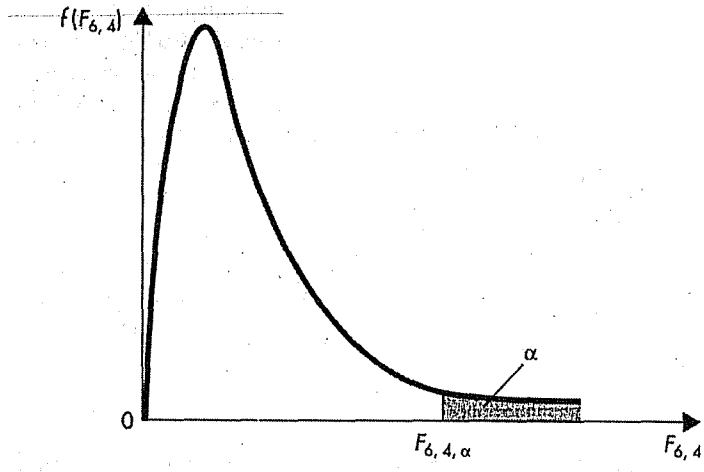
Altbölüm 9.6'da anakütle ortalamalarını karşılaştırmak için geliştirilen sınamalardan biri iki anakütlenin varyanslarının eşitliği varsayımına dayanmaktaydı. Pek çok uygulamada bu varsayım akla uygun olsa da, bu varsayımın geçerliliğini sınamak sağduyulu bir davranış olur. Kaldı ki, anakütle dağılımlarının karşılaştırılmasında bazen asıl ilgi varyansların kendi üzerinde olur ve onların karşılaştırması yapılmak istenir.

Bu altbölümde, iki normal anakütleden çekilmiş bağımsız örnekler varken anakütle varyanslarının eşitliğinin sınanması gerektiği durumları ele alacağız. Böyle bir sınama geliştirebilmek için bir başka olasılık dağılımını daha öğrenmek zorundayız. Varyansı σ_X^2 olan bir normal anakütleden çekilmiş n_x gözlemli rassal bir örneklemin örneklem varyansı s_X^2, varyansı σ_Y^2 olan bir normal anakütleden çekilmiş n_y gözlemli rassal bir örneklemin örneklem varyansı s_Y^2 olsun. Bu durumda

$$F = \frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \qquad (9.8.1)$$

[33] R. A. Peterson, W. R. Wilson, "Measuring consumer satisfaction: fact and artifact," *Journal of Academy of Marketing Science, 20* (1992), 61-71.

[34] K. L. Hooks, "Professionalism and self-interest: a critical view of the expectations gap," *Critical Perspectives in Accounting, 3* (1991), 109-36.



ÇİZİM 9.11 Pay serbestlik derecesi 6, payda serbestlik derecesi 4 olan F dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu; $F_{6,4}$ değerinin $F_{6,4,\alpha}$'dan büyük olma olasılığı α'dır.

rassal değişkeni F **dağılımı** diye bilinen bir dağılıma uyar.[35] Bu dağılım ailesi istatistik çözümlemelerde yaygın olarak kullanılır. Bu ailenin bir üyesi iki değerle belirlenir: payın ve paydanın serbestlik dereceleri. Bu bağlamda, örneklem varyansı s_X^2'nin serbestlik derecesinin $(n_x - 1)$, s_Y^2'nin serbestlik derecesinin $(n_y - 1)$ olduğunu anımsayalım. Öyleyse (9.8.1) rassal değişkeni, payında $(n_x - 1)$, paydasında $(n_y - 1)$ serbestlik derecesi olan bir F dağılımıdır.

F dağılımı, yalnız eksi olmayan değerler için tanımlanmış, bakışık olmayan bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu yoğunluk fonksiyonu Çizim 9.11'de verilmiştir.

***F* Dağılımı**

Varyansları σ_X^2 ve σ_Y^2 olan iki normal anakütleden n_x ve n_y gözlemli bağımsız iki rassal örneklem çekilmiş olsun. Bunların örneklem varyansları s_X^2 ve s_Y^2 ise,

$$F = \frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2}$$

rassal değişkeninin dağılımı, pay serbestlik derecesi $(n_x - 1)$, payda serbestlik derecesi $(n_y - 1)$ olan bir ***F* dağılımıdır**. Pay serbestlik derecesi ν_1, payda serbestlik derecesi ν_2 olan bir F dağılımı F_{ν_1,ν_2} ile gösterilecektir.

[35] F dağılımı biçimsel açıdan, her biri kendi serbestlik derecesine bölünmüş iki bağımsız ki-kare rassal değişkeni arasındaki oranın uyduğu dağılım olarak tanımlanır.

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} > F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan sayıyı da $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$ ile göstereceğiz.

α'nın 0.05 ve 0.01'e eşit olduğu $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$ eşik noktaları Ek Çizelge 7'de verilmiştir. Sözgelimi, pay serbestlik derecesi 10, payda serbestlik derecesi 20 için bu çizelgeden

$$F_{10,20,0.05} = 2.35 \qquad F_{10,20,0.01} = 3.37$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$P(F_{10,20} > 2.35) = 0.05 \qquad P(F_{10,20} > 3.37) = 0.01$$

Uygulamalı çalışmalarda, büyük varyansın paya gelmesi sağlanmak koşuluyla, anakütle varyanslarının eşitliği önsavını sınamak için gerekli eşik noktaları yalnız bunlardır. Anakütle varyansları eşitse, (9.8.1)'e göre,

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

rassal değişkeni, F_{n_x-1,n_y-1} dağılımına uyar. Uygun önsav sınamaları aşağıdaki çerçevede betimlenmiştir.

Normal Dağılmış İki Anakütledeki Varyansların Birbirlerine Eşitliğinin Sınanması

Varyansları σ_X^2 ve σ_Y^2 olan iki normal anakütleden n_x ve n_y gözlemli bağımsız rassal örneklemlerin gözlenen örneklem varyansları s_X^2 ve s_Y^2 olsun. Bu durumda aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyleri α olur:

(i) $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ ya da $H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

sıfır önsavını, iki-yanlı

$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha} \text{ ise } \quad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Burada s_x^2, iki varyanstan büyük olanıdır. $F_{n_x-1,n_y-1,\alpha}$ ise

$$P(F_{n_x-1,n_y-1} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayı olup, F_{n_x-1,n_y-1}, pay serbestlik derecesi $(n_x - 1)$, payda serbestlik derecesi $(n_x - 1)$ olan bir F dağılımına uyar.

ÖRNEK 9.10

Pazara yeni sürülmüş onyedi AAA dereceli sınai tahvilden oluşan rassal bir örneklemde vadelerin (ay kare cinsinden) varyansı 123.35'tir. Onbir yeni CCC dereceli sınai tahvilden oluşan bağımsız bir rassal örneklemde vadelerin varyansı 8.02'dir.[36] Anakütle varyansları sırasıyla σ_X^2 ve σ_Y^2 ile gösterilirse,

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

sıfır önsavını, iki-yanlı

$$H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

karşı önsavıyla sınayın. İki anakütle dağılımının normal olduğunu varsayın.

Karar kuralı

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}$$

ise H_0'ı H_1 lehine reddedin biçimindedir. Şu verileri biliyoruz:

$$n_x = 17 \qquad s_x^2 = 123.35 \qquad n_y = 11 \qquad s_y^2 = 8.02$$

Burada büyük olan örneklem varyansının s_x^2 olmasını sağladık. Bu durumda sınama istatistiği şu olur:

$$\frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{123.35}{8.02} = 15.38$$

[36] M. W. Marr, J. P. Ogden, "Market imperfections and the choices of maturity and call provisions in corporate debt," *Journal of Business Research, 19* (1989), 17-31.

Serbestlik dereceleri $(n_x - 1) = 16$ ve $(n_y - 1) = 10$ olduğuna göre, Ek Çizelge 7'den bir aradeğer biçilerek

$$F_{16,10,0.01} = 4.53$$

bulunur. Karşı önsav iki-yanlı olduğundan, bu değer %2 düzeyinde sınama yapmak için uygun eşik değeridir. Açıktır ki, 15.38, 4.53'ten çok daha büyüktür, öyleyse sıfır önsavı reddedilir. Bu iki tür tahvilde vadelerin varyanslarının farklı olduğuna ilişkin çok güçlü kanıt bulunmuştur.

9.9 BİR SINAMANIN GÜCÜNÜN ÖLÇÜLMESİ

Altbölüm 9.2-9.8'de belli bir anlamlılık düzeyindeki sınamaları geliştirme üzerinde yoğunlaştık. Yani, I. Tür hata işleme —bir sıfır önsavını doğruyken reddetme— olasılığını önceden atanmış bir değerde sabit tutan karar kuralları geliştirdik. Altbölüm 9.1'de belirtildiği gibi, böyle bir karar kuralı zorunlu olarak, II. Tür bir hata işleme —yanlış bir sıfır önsavını kabul etme— olasılığı anlamına gelir. Üstelik, zaman zaman bu tür bir hata yapma olasılığının ne kadar olduğunu bilmek önemli olabilir, bu sayede, bir sıfır önsavı kabul edildiğinde, bu sıfır önsavı yanlışken böyle bir kararın verilmiş olma şansını değerlendirebiliriz.

Bu altbölümde, bazı sınamalarımızın sıfır önsavının doğru olmadığı durumdaki özelliklerini ilk kez inceleyeceğiz. Özellikle de, varyansı bilinen bir normal dağılımın ortalamasına ilişkin sınamalar ve anakütle oranına ilişkin sınamalar için güç hesabının nasıl yapılacağını göstereceğiz.

NORMAL BİR DAĞILIMIN ORTALAMASINA İLİŞKİN SINAMALAR: ANAKÜTLE VARYANSI BİLİNİYOR

Altbölüm 9.2'deki süreçleri kullanarak, normal bir anakütle ortalamasının belli bir μ_0 değerine eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınadığımızı düşünelim. II. Tür hata işleme olasılığı β, gerçek anakütle ortalamasına bağlıdır. Bu olasılık şöyle bulunur:

(i) Sınamanın karar kuralını kullanıp, örneklem ortalaması değerlerinin sıfır önsavının kabulüne yol açan değer aralığını belirleyin.

(ii) İlgilenilen anakütle ortalaması μ_1 değeri için, ortalaması μ_1 olan bir anakütleden çekilmiş n gözlemli örneklemlerde örneklem ortalamalarının (i)'de belirlenen güven aralığı içine düşme olasılığını bulun.

Bir örnek olmak üzere, Örnek 9.1'de onaltı gözlemli rassal bir örneklem verilmişken, bilye yatağı ağırlıklarının gerçek ortalamasının 5 ons olduğunu söyleyen sıfır önsavını, gerçek ortalamanın 5 onstan fazla olduğunu ileri süren karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınamıştık. Anakütle dağılımının 0.1 ons standart sapmayla normal dağıldığı varsayılmıştı. Böylece

$$H_0: \mu = \mu_0$$

sıfır önsavını

$$H_1: \mu > \mu_0$$

karşı önsavıyla ve

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin}$$

karar kuralını kullanıp şu bilgilerle sınamıştık:

$$\mu_0 = 5 \qquad n = 16 \qquad \sigma = 0.1 \qquad z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Bu durumda,

$$\frac{\bar{x} - 5}{0.1/4} > 1.645$$

ya da

$$\bar{x} > 1.645(0.1/4) + 5 = 5.041$$

ise sıfır önsavı reddedilir. Tersine,

$$\bar{x} \leq 5.041$$

ise sıfır önsavı kabul edilir. Böylelikle, (i)'e uygun olarak, ağırlıkların örneklem ortalaması 5.041 onsu geçmedikçe sıfır önsavının kabul edilmesine yol açan sınama sürecini belirlemiş oluyoruz.

Şimdi de, gerçek ağırlık ortalaması 5.05 onsken sıfır önsavımn kabul edilme olasılığını belirlemek istediğimizi düşünelim. Aslında istediğimiz şey, ortalaması $\mu_1 = 5.05$, standart sapması 0.1 olan normal bir anakütleden rassal seçilmiş onaltı gözlemli bir örneklemde örneklem ortalamasının 5.041'i aşmama olasılığıdır. Bu da şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 5.041) &= P\left(Z \leq \frac{5.041 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{5.041 - 5.05}{0.1/4}\right) \\ &= P(Z \leq -0.36) \\ &= 1 - 0.6406 = 0.3594 \end{aligned}$$

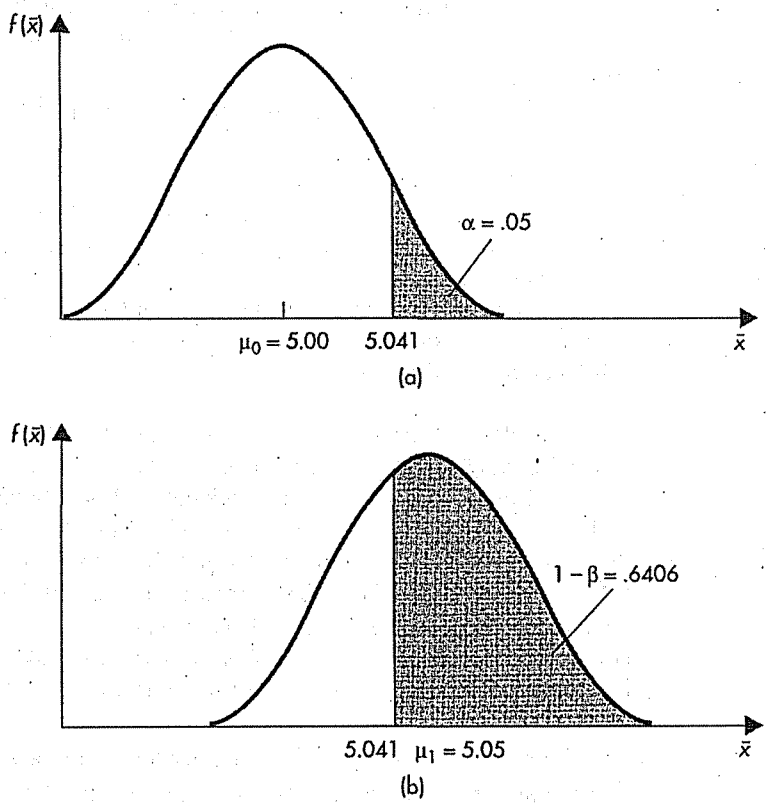
Öyleyse bu kuralla, gerçek ortalama 5.05 iken sıfır önsavım kabul etmeyi içeren II. Tür hatanın β olasılığının 0.3594 olduğunu saptamış bulunuyoruz. Anakütle ortalamasının bu değeri için sınamanın gücü

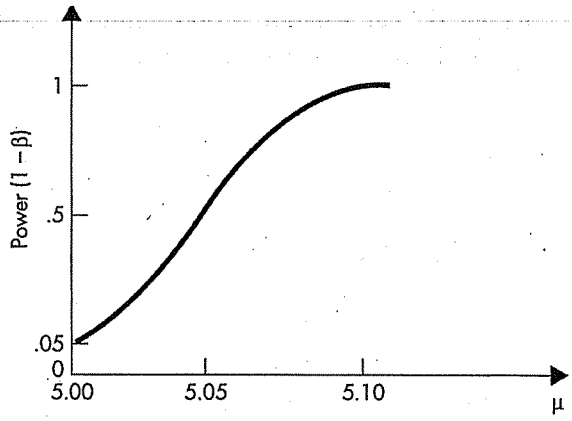
$$1 - \beta = 0.6406$$

olur.

Bu güç hesaplamaları, anakütle ortalaması 5 ve 5.05 iken örneklem ortalamasının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını gösteren Çizim 9.12'de verilmiştir. Bu çizimin (a) bölümünde, anakütle ortalaması 5 iken, örneklem ortalamasının 5.041'i aşma olasılığının, sınama anlamlılık düzeyi olan 0.05 olduğunu görüyoruz. Çizimin (b) bölümü ise, anakütle ortalaması 5.05 iken örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Bunun (a) bölümünden bir farkı, ortalamaların 5.05 ile 5'in farkı olan 0.05 kadar sağa kaymış

ÇİZİM 9.12 Onaltı gözlem ve $\sigma = 0.1$ için (a) $\mu = 5$, (b) $\mu = 5.05$ iken örneklem ortalamasının örnekleme dağılımları; çizim, H_0: $\mu = 5$ önsavını H_1: $\mu > 5$ karşı önsavıyla sınamanın $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyine karşılık gelen $1 - \beta$ güç hesaplamasını göstermektedir; güç, $\mu = 5.05$ için hesaplanmıştır.





ÇİZİM 9.13 H_0: $\mu = 5$ önsavının, H_0: $\mu > 5$ karşı önsavıyla sınanmasının güç fonksiyonu ($\alpha = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $n = 16$)

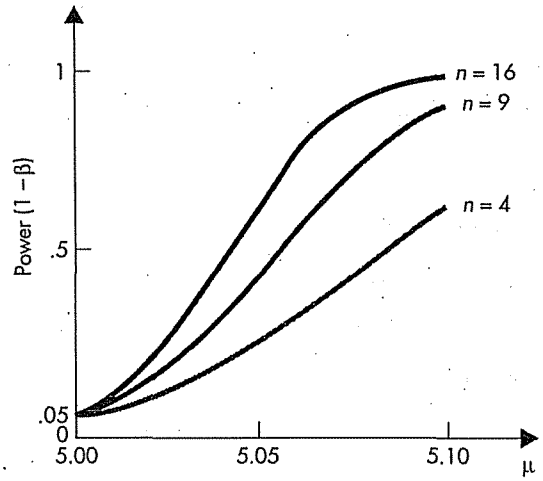
olmasıdır. Bu çizimdeki gölgeli alan, anakütle ortalaması 5.05 iken örneklem ortalamasının 5.041'i aşma olasılığını gösterir. Bu da, daha önce bulunduğu gibi, bu noktada hesaplanmış güçtür.

Benzer hesaplamalar, anakütle ortalamasının herhangi bir μ_1 değeri için sınamanın gücünü verir. Çizim 9.13 bu gücü, ortalama μ'nün bir fonksiyonu olarak gösterir.

Güç fonksiyonunun şu özellikleri taşıdığına dikkat edin:

1. Öbür her şey aynıyken, gerçek ortalama μ_1, önsavdaki ortalama μ_0'dan ne kadar uzaksa, sınamanın gücü de o kadar fazladır. Çizim 9.13'te gösterilen bu durumun anlamı, önsavdaki ortalamadan sapmaların büyük olanlarını yakalamamızın küçükleri yakalamamızdan daha olası olmasıdır.
2. Öbür her şey aynıyken, sınamanın anlamlılık düzeyi ne kadar küçükse, sınama gücü de o kadar düşük olur. Başka bir deyişle, I. Tür hatanın olasılığı azaltıldıkça, II. Tür hatanın olasılığı artar.
3. Öbür her şey aynı iken, anakütle varyansı ne kadar büyükse, sınama gücü de o kadar düşük olur. Anakütlede büyük değişkenlik varken, önsavdaki ortalamadan uzaklaşmaların küçük olanlarını yakalamamız daha az olasıdır.
4. Öbür her şey aynıyken, örneklem ne kadar büyükse, sınama gücü de o kadar fazla olur. Bu da yine sezgisel olarak akla uygundur. Anakütleden daha çok bilgi aldıkça, sıfır önsavından herhangi bir sapmayı yakalama şansımız artar. Bu da Çizim 9.14'te gösterilmiştir. Bu çizim, $n = 16$'lık örneklemlerin güç fonksiyonunun yanısıra, aynı sınamanın $n = 4$ ve $n = 9$ gözleme dayanan güç fonksiyonlarını da gösterir. Dikkat ederseniz anakütle ortalamasının önsavdakinden büyük her değeri için, gözlem sayısı büyüdükçe sıfır önsavını reddetme olasılığı da artmaktadır.

Daha önce açıklanan akıl yürütmeleri kullanarak, iki-yanlı karşı önsavlarla yapılan sınamaların da gücünü hesaplayabiliriz. Ancak, bu hesaplamaları burada yapmak yerine, anakütle oranı sınamaları sırasında ele alacağız.



ÇİZİM 9.14 H_0: $\mu = 5$ önsavının, H_0: $\mu > 5$ karşı önsavıyla sınanmasının güç fonksiyonu ($\alpha = 0.05$, $\sigma = 0.1$), 4, 9, 16 örneklem büyüklükleri için gösterilmiştir.

ANAKÜTLE ORANININ SINANMASI (BÜYÜK ÖRNEKLEMDE)

Altbölüm 9.5'in yaklaşımını kullanarak, belirli bir özellik taşıyan üyelerin anakütle içindeki oranının belli bir p_0 değeri kadar olduğunu ileri süren sıfır önsavını sınayabiliriz. Verilmiş bir anakütle oranı için II. Tür hata yapma olasılığı β, şöyle bulunur:

(i) Sınamanın karar kuralıyla, örneklem oranı değerlerinin sıfır önsavını kabul etmeye yol açan değer aralığını bulun.

(ii) Anakütle oranının ilgilenilen p_1 değeri için, anakütle oranı p_1 iken n gözlemli örneklemlerde örneklem oranlarının, (i)'de belirlenen kabul aralığının içine düşme olasılığını bulun.

Sözgelimi, şirketlerin pay senedi başına kazançlarının kestirimi pek çok mali analist tarafından düzenli olarak yapılır. 600 kestirimli rassal bir örneklemde bu kestirimlerin 382 tanesi gerçekleşen kazançların üzerinde çıkmıştır.[37] Diyelim ki, iki-yanlı karşı önsavla, kestirimlerin gerçekleşen kazançlardan daha büyük olanlarının anakütle oramnın 0.50 olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınamak istiyoruz. (Mali analistlerin genel eğilimi gereksiz yere aşırı iyimser ya da aşırı kötümser değilse, bu önsavın doğru olmasını bekleriz). Bu önsavı %5 anlamlılık düzeyinde sınayalım. Amacımız

[37] Veriler R. M. Barefield, E. E. Comiskey, "The accuracy of analysts' forecasts of earnings per share," *Journal of Business Research, 3* (1975), 241-52'den alınmıştır.

$$H_0: p = p_0 = 0.50$$

sıfır önsavını

$$H_1: p \neq p_0$$

karşı önsavıyla sınamaktır. Karar kuralı şudur:

$$\frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

Burada

$$p_0 = 0.50 \qquad n = 600 \qquad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

olduğundan,

$$\frac{\hat{p}_x - 0.50}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{600}}} > 1.96 \qquad \text{ya da} \qquad \frac{\hat{p}_x - 0.50}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{600}}} < -1.96$$

ise H_0 reddedilir. Buna eşdeğer olarak,

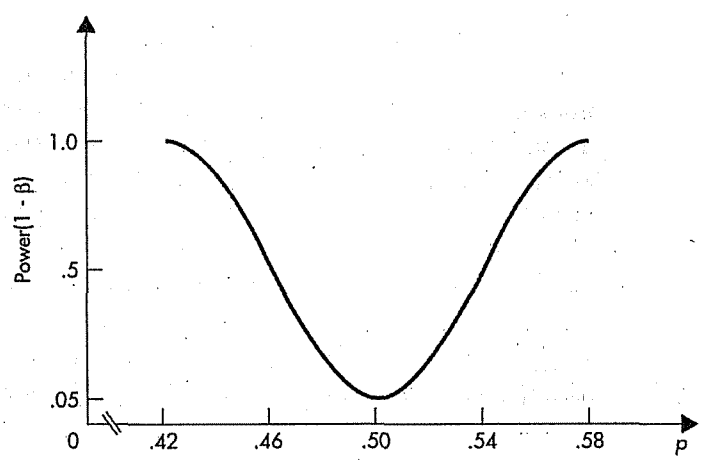
$$\hat{p}_x > 0.50 + 1.96\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{600}} = 0.50 + 0.040 = 0.54$$

ya da

$$\hat{p}_x < 0.50 - 0.040 = 0.46$$

ise H_0 reddedilir.

ÇİZİM 9.15 $H_0: p = 0.50$ önsavının, $H_1: p \neq 0.50$ karşı önsavla sınanmasının güç fonksiyonu ($\alpha = 0.05$, $n = 600$)



$$0.46 \leq \hat{p}_x \leq 0.54$$

ise H_0 kabul edilir. Aslında örneklem oranı

$$\hat{p}_x = 382/600 = 0.637$$

olduğuna göre sıfır önsavı %5 düzeyinde reddedilir.

Şimdi de, gerçek anakütle oranı 0.55 iken bu sıfır önsavının bu karar kuralıyla kabul edilebilme olasılığım bulmak istediğimizi düşünelim. Bu durumda, anakütle oranı $p_1 = 0.55$ iken, 600 gözlemli rassal bir örneklemde örneklem oranının 0.46 ile 0.54 arasında çıkma olasılığım sormuş oluruz. Bu olasılık şöyle bulunur:

$$P(0.46 \leq \hat{p}_X \leq 0.54) = P\left(\frac{0.46 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \leq Z \leq \frac{0.54 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right)$$

$$= P\left(\frac{0.46 - 0.55}{\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{600}}} \leq Z \leq \frac{0.54 - 0.55}{\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{600}}} \right)$$

$$= P(-4.43 \leq Z \leq -0.49)$$

$$= 0.3121$$

Öyleyse, karar kuralı veriyken, gerçek anakütle oranı 0.55 için sıfır önsavını kabul ederek II. Tür hata işlemenin olasılığı $\beta = 0.3121$'dir. Anakütle oranının bu değeri için sınamanın gücü ise

$$1 - \beta = 0.6879$$

olur. Bu olasılık, her p_1 anakütle oranı için benzer biçimde hesaplanabilir. Çizim 9.15 bu örnek için güç fonksiyonunu göstermektedir. Karşı önsav iki-yanlı olduğundan, güç fonksiyonunun biçimi, Çizim 9.13'tekinden farklıdır. Burada anakütle orammn olası değerlerini, önsav değerinin her iki yanında ele alıyoruz. Gördüğümüz gibi, sıfır önsavını yanlışken reddetme olasılığı, gerçek anakütle oranı önsavdaki değerden uzaklaştıkça artmaktadır.

9.10 ÖNSAV SINAMASI ÜZERİNE BAZI SÖZLER

Uygulamalı araştırmalarda klasik önsav sınama yöntemleri, başka herhangi bir teknikten belki de daha sık kullanılır. Süreçlerin görece basitliği, çözümleri için rakip önsavların varolduğu gerçek yaşam sorunlarının sıklığıyla birleşince,

önsav sınamalarını son derece çekici kılmaktadır. Yine de, sınama sonuçlarının yorumlanması konusunda bazı uyarılar gereklidir.

Sıfır önsavının önsav sınamasında oynadığı can alıcı rol, belki de en çok kaygı yaratan noktadır. Sık rastlanan türden bir araştırmada anlamlılık düzeyi —yani bir sıfır önsavını doğruyken reddetme olasılığı— düşük bir düzeyde belirlenir. Sonra bu önsavı yıkmak için anakütleden kanıt derlenir. Ama, ciddi boyutta yanlış bir sıfır önsavım, ya çok az bilgi edinilebilmesi ya da kullanılan sınamanın gücünün düşük olması nedeniyle reddedemeyebiliriz. Eğer sıfır önsavı gerçekten özelse ve araştırmacı şu ya da bu nedenle ondan vazgeçmeye pek istekli değilse, bu durum pekâlâ ortaya çıkabilir. Sözgelimi sıfır önsavının reddi, üretim sürecinde pahalı değişikliklere yol açacaksa durum böyle olabilir. Ancak, sıfır önsavının özel olması, çoğu zaman ne gerekir ne de uygundur. Böyle durumlarda, rakip önsavların bakışık (simetrik) ele alınması doğru olur. Rakip önsavlar arasında seçim yaparken hem I. Tür hem II. Tür hataların yaratacağı maliyetleri (eğer nicelleştirilebiliyorlarsa) hesaba katmak uygulanabilecek aşikâr bir yol olabilir. Bu tür düşünceler, Bölüm 19'da incelenecek istatistik karar kuramı içine yerleştirilmiştir.

Kimi durumlarda, çok büyük miktarlarda örneklem bilgisi bulunur ve tersine bir sorun doğar: sıfır önsavı büyük ölçüde tehlikeye atılır. O zaman, anlamlılık sözcüğünün, istatistikte anlamlılık sınamalarındaki kullanımıyla sözlük tanımı arasında bir ayırım yapmak önem kazanır. İki kentten çok sayıda hanehalkının örnekleme alındığını düşünelim. Çözümlemede şöyle bir söylem yer alabilir: "İki kentin yıllık gelirlerinin örneklem ortalamaları arasında 2.37 $ fark vardır, bu da anlamlıdır." Anlaşılan söylenmek istenen şudur: Anakütle ortalamalarının eşitliği önsavı, böylesi büyük örneklemlere dayanılarak, alışıldık anlamlılık düzeylerinde reddedilmektedir. Yine de, yıllık gelirlerin anakütle ortalamaları arasındaki farkın eldeki en iyi kestirimi yalnızca 2.37 $'dır, bunun da gerçek yaşamda hiçbir önemi yoktur!

Bu bölümde geliştirilen sınamalar, genellikle gerideki anakütle dağılımına ilişkin bir varsayıma dayandırıldı. Çoğu zaman dağılımın normal olduğunu varsaydık. Bu varsayım çiğneniyorsa, bu süreçlerin geçerliliklerini korumaları kesin değildir. Özellikle, doğru anlamlılık düzeyleri, normallik varsayımına dayananlardan farklı olur. Herhangi bir anakütle dağılımının *tam tamına* normal olduğuna inanmak güç olduğuna göre, anlamlılık düzeylerinin, ana dağılımın normal olmamasından ne kadar etkilendiklerini sormak önem kazanır. Bu etki görece küçükse, sınamaların normallikten uzaklaşmaya karşı *dirençli* oldukları söylenir. Genel olarak söylemek gerekirse, anakütle ortalamaları üzerindeki sınamaların dirençli oldukları bilinir.[38] Ama, (Altbölüm 9.8'deki gibi) anakütle

[38] Ancak, anakütle ortalamalarının eşitliği konusunda, Altbölüm 9.6'da ele alınan, bağımsız örneklemlere dayalı sınamaların, iki örneklemin büyüklükleri farklı olduğu zaman dirençleri azalır.

varyanslarını karşılaştıran sınamalar dirençli değildir. Bir sonraki bölümde, geçerlilikleri anakütle dağılımına ilişkin özel varsayımlara dayanmayan kimi sınamaları ele alacağız.

ALIŞTIRMALAR

43. Bir şirketin mali raporunu inceleyen kimseler ne kadar uzmansa, şirketin geleceğine yönelik kestirimlerin de o kadar değişkenlik kazanacağı savı ortaya atılmıştır. Otuzar kişiden oluşan farklı uzmanlık düzeylerinde iki bağımsız örneklem seçilmiştir.[39] "Düşük uzmanlık" örneklemi, orta düzeyde bir muhasebe dersini henüz başarmış kimselerden oluşmaktadır. "Yüksek uzmanlık" örnekleminin üyeleri ise, lisans öğrenimlerini tamamlayıp tanınmış yeminli muhasebecilik firmalarında çalışan kimselerdir. Örneklem üyelerinden, yıllık çalışma raporuna bakarak şirketin gelecek dönemdeki çalışmadan doğan net nakit akışlarını tahmin etmeleri istenmiştir. Örneklem varyansı düşük uzmanlık örnekleminde 451.770, yüksek uzmanlık örnekleminde ise 1,614.208'dir. İki anakütle varyan-sının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, yüksek uzmanlık düzeyi için örneklem varyansının daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

44. Bir şirketin pazar payının, etkin bir fiyat rekabetinin bulunduğu bir işkolunda, düopol ya da gizli anlaşmanın hüküm sürdüğü bir işkoluna göre daha değişken olacağı ileri sürülmüştür. Buhar türbinli jeneratör sanayiinde yapılan bir çalışmada,[40] etkin fiyat rekabeti yapılan 4 yıllık sürede General Electric şirketinin pazar payı varyansı 114.09 bulunmuştur. Bunu izleyen 7 yıllık bir düopol ve gizli anlaşma döneminde ise bu varyans 16.08 çıkmıştır. Verilerin normal iki anakütleden rassal seçildiğini varsayın. %5 anlamlılık düzeyinde, iki anakütle varyansının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını, etkin fiyat rekabeti yıllarındaki pazar payı varyansının daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

45. Alıştırma 34'te muhasebe hilesinin varlığını değerlendirirken anakütle varyansının, tehlike işaretleri soru kâğıdı kullananlarla kullanmayanlar için aynı olduğu varsayılmıştı. Bu varsayımı, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

46. Alıştırma 36'da kapakları sade ve pahalı tasarım olan kitapların ilk yıl satışları için anakütle varyanslarının eşit olduğu varsayılmıştı. Bu varsayımı, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

47. Örnek 9.8'de oturum başkanı bulunan ve bulunmayan grupların türettiği düşünce sayısı ortalamalarının eşit olduğu önsavı sınanmıştı. Bu sınama iki anakütle varyansının eşit olduğu varsayımına dayanmaktaydı. Bu varsayımı, oturum başkanlı grubun varyansının yüksek olduğu karşı önsavıyla sınayın.

48. Alıştırma 2'ye dönelim. Pillerin gerçek ortalama ömrü 49 saatken, %10 düzeyinde yapılan bir sınamanın gücünü bulun.

---

[39] D. Snowball, "Some effects of accounting expertise and information load. An empirical study," *Accounting, Organizations and Society, 5* (1980), 323-38.

[40] B. T. Allen, "Tacit collusion and market sharing: The case of steam turbine generators," *Industrial Organization Review, 4* (1976), 48-57.s

49. Alıştırma 3(a)'ya dönelim. Katışıklılık oranının gerçek ortalaması %3.10 iken, %5 düzeyinde bir sınamada sıfır önsavını reddetmenin olasılığını bulun.

50. Alıştırma 5'e dönelim. Gerçek ortalama yanıt 3.95 iken, %1 düzeyinde bir sınamada sıfır önsavını kabul etmenin olasılığını bulun.

51. Örnek 9.6'ya dönelim. Aslında süpermarket müşterilerinden %45'i bir ürünü alışveriş arabasına koyduktan hemen sonra fiyatını doğru biliyorsa, %10 düzeyin-deki bir sınamanın gücünü bulun.

52. Alıştırma 22'ye dönelim. Aslında ABD'li bütün yetişkinlerin %20'si o görüşe katılıyorsa, sıfır önsavını %5 düzeyindeki bir sınamada reddetme olasılığını bulun.

53. Alıştırma 24'e dönelim. Aslında bütün denetmen ortakların %60'ı çalışmadan doğan nakit akışının geçerli bir kârlılık göstergesi olduğunda anlaşıyorsa, %10 düzeyindeki bir sınamayla sıfır önsavını kabul etme olasılığını bulun.

54. Bir ayaküstü lokantalar zinciri her gün "çift-köfte" ağırlıklarının en az 32 ons olduğu sınamasını yapmaktadır. Karşı önsav, ortalama ağırlığın 32 onstan düşük olduğu yolunda olup yeni işlem süreçleri gerektiğini göstermektedir. Çift-köfte ağırlıklarının 3 ons standart sapmayla normal dağıldığı varsayılmaktadır. Karar kuralı, örneklem ortalama ağırlığı 30.8 onstan düşük çıkarsa sıfır önsavını reddedin biçimindedir.

(a) $n = 36$ tane çift-köfte içeren rassal örneklemler seçilse, bu karar kuralı kullanıldığında I. Tür hata işleme olasılığı kaçtır?

(b) $n = 9$ tane çift-köfte içeren rassal örneklemler seçilse, bu karar kuralı kullanıldığında I. Tür hata işleme olasılığı kaçtır? Yanıtınızın (a)'dakinden neden farklı olduğunu açıklayın.

(c) Gerçek ortalama ağırlık 31 ons olsun. Otuzaltı çifte köfte içeren rassal örneklemler seçilse, bu karar kuralı kullanıldığında II. Tür hata işleme olasılığı kaçtır?

55. Bir şarap üreticisinin ileri sürdüğüne göre, kendi ürününü dondurulmuş üzüm suyundan ayıramayan müşterilerin oranı en çok 0.10'dur. Bu üretici bu sıfır önsavını, gerçek oranın 0.10'dan büyük olduğu karşı önsavıyla sınamaya karar verir. Benimsediği karar kuralı, iki ürün arasındaki tad farkını anlayamayanların oranı 0.14'ü geçerse sıfır önsavını reddedin biçimindedir.

(a) 100 müşterilik bir rassal örneklem seçilse, bu karar kuralıyla I. Tip hata işleme olasılığı kaçtır?

(b) 400 müşterilik bir rassal örneklem seçilse, bu karar kuralıyla I. Tip hata işleme olasılığı kaçtır? Yanıtınızın (a)'dakinden neden farklı olduğunu hem sözle hem çizinle açıklayın.

(c) İki ürün arasındaki tad farkını anlayamayanların gerçek oranı 0.20 olsun. 100 müşterilik bir rassal örneklem seçilse, bu karar kuralıyla II. Tip hata işleme olasılığı kaçtır?

(d) Verilen karar kuralını kullanmak yerine, iki ürünün tad farkını anlayamayanların oranı 0.16'yı geçerse sıfır önsavını reddedilmesine karar verilmiş olsun. 100 müşterilik bir rassal örneklem seçilmiştir.

(i) Hiç hesaplama yapmadan, I. Tür hata olasılığının (a)'dakinden büyük mü, küçük mü yoksa onunla aynı mı olacağını söyleyin.

(ii) Gerçek oran 0.20 ise, II. Tür hata olasılığı (c)'dekinden büyük mü, küçük mü yoksa onunla aynı mı olacaktır?

56. Aşağıdaki terim çiftleri arasındaki farkları özenle açıklayın:
- **(a)** Sıfır önsavı ve karşı önsav
- **(b)** Basit ve bileşik önsav
- **(c)** Tek-yanlı ve iki-yanlı karşı önsav
- **(d)** I. ve II. Tür hata
- **(e)** Anlamlılık düzeyi ve sınamanın gücü

57. Bir istatistikçi, bir vergi reformu tasarısından yana olan erkeklerle kadınların oranının aynı olduğu sıfır önsavını sınamaktadır. Sıfır önsavı örneklem verilerine dayanılarak %5 anlamlılık düzeyinde reddedilmiştir. Bu, sıfır önsavının yanlış çıkma olasılığının en az 0.95 olduğu anlamına gelir mi? Gelmezse, geçerli bir olasılık söylemini dile getirin.

58. Bir sınamanın p değerinin ne demek olduğunu özenle açıklayın, bu kavramın önsav sınamasındaki kullanımını tartışın.

59. On öğrencilik rassal bir örneklemde, dönem sonu sınavından önceki haftada ders çalışma süreleri aşağıdaki gibi olmuştur:

28 57 42 35 61 39 55 46 49 38

Anakütlenin normal dağıldığını varsayın.
- **(a)** Örneklem ortalamasıyla örneklem standart sapmasını bulun.
- **(b)** Anakütle ortalamasının 40 saat olduğu sıfır önsavını, ortalama daha yüksektir diyen karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.
- **(c)** Anakütle standart sapmasının 10 saat olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

60. Aşağıdakilerden her birinin doğru mu, yanlış mı olduğunu belirtin:
- **(a)** Bir sınamanın anlamlılık düzeyi, sıfır önsavının yanlış olma olasılığıdır.
- **(b)** Doğru bir sıfır önsavı reddedildiğinde I. Tür hata işlenir.
- **(c)** Bir sıfır önsavı 0.025 düzeyinde reddedilmekte, 0.01 düzeyinde kabul edilmektedir. Bunun anlamı, sınamanın p değerinin 0.01 ile 0.025 arasında olduğudur.
- **(d)** Bir sınamanın gücü, doğru bir sıfır önsavını kabul etme olasılığıdır.
- **(e)** Bir sıfır önsavı bir karşı önsav lehine %5 düzeyinde reddedilmişse, aynı veriler kullanılarak %1 düzeyinde de aynı karşı önsav lehine reddedilmek zorundadır.
- **(f)** Bir sıfır önsavı bir karşı önsav lehine %1 düzeyinde reddedilmişse, aynı veriler kullanılarak %5 düzeyinde de aynı karşı önsav lehine reddedilmek zorundadır.
- **(g)** Bir sınamanın p değeri, sıfır önsavının doğru olma olasılığıdır.

61. Yerel telefon şirketine kablo üreten bir süreç düzgün işlediği zaman, kablonun çapı 1.6 inç ortalama, 0.05 inç standart sapmayla normal dağılıma uymaktadır. Rassal bir örnekleme seçilen onaltı parça kablonun çap ortalaması 1.615, örneklem standart sapması 0.086 inçtir.
- **(a)** Anakütle standart sapmasının 0.05 inç olduğu varsayımıyla, anakütle ortalamasının 1.6 inç olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %10 düzeyinde

sınayın. Ayrıca, bu sıfır önsavının, iki-yanlı karşı önsav lehine reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini de bulun.

(b) Anakütle standart sapmasının 0.05 inç olduğu önsavını, bunun daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla %10 düzeyinde sınayın.

62. Tablet üreten bir süreç düzgün işlerken, tabletlerdeki etkin maddenin ortalama ağırlığı 5 gram, standart sapması 0.025 gramdır. Oniki tabletlik rassal bir örneklemde etkin madde ağırlıkları (gram cinsinden) aşağıdaki gibi bulunmuştur:

5.01	4.96	5.03	4.98	4.98	4.95
5.00	5.00	5.03	5.01	5.04	4.95

(a) Anakütle varyansının bilindiği varsayımını yapmadan, tablet başına etkin madde ağırlığı ortalamasının 5 gram olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın. İki-yanlı bir karşı önsav ile %5 anlamlılık düzeyi kullanın. Yaptığınız bir varsayım varsa belirtin.

(b) Yaptığınız bir varsayım varsa belirterek, anakütle standart sapmasının 0.025 gram olduğunu söyleyen sıfır önsavını, anakütle standart sapmasının 0.025 gramdan çok olduğu karşı önsavıyla sınayın. %5 anlamlılık düzeyi kullanın.

63. Bir sigorta şirketi komisyon ödeyerek acentelerle çalışmaktadır. Şirketin ileri sürdüğüne göre acenteler ilk yılda ortalama en az 40,000 $ kazanacaklar, bu kazançların anakütle standart sapması 6,000 $'ı geçmeyecektir. Rassal bir örnekleme seçilen dokuz acentenin ilk yıl komisyonları için

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 333 \qquad \sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 312$$

bulunmuştur. Burada x_i, bin dolar cinsinden ölçülmüştür. Anakütle dağılımının normal olduğu varsayılabilir.

(a) Anakütle ortalamasının en az 40,000 $ olduğu sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.

(b) Anakütle standart sapmasının en çok 6,000 $ olduğu sıfır önsavını %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

64. Yeni bir rüzgâr jeneratörünü destekleyenler, bunun günde en az 800 kilovat enerji üreteceğini ileri sürmektedir. Jeneratörün günlük enerji üretiminin 120 kilovat standart sapmayla normal dağıldığı varsayılmaktadır. Bu sıfır önsavını, gerçek ortalamanın 800 kilovattan az olacağı karşı önsavıyla sınamak üzere rassal olarak 100 gün seçilmiştir. Örneklem ortalaması 776 kilovat ya da daha çoksa sıfır önsavı kabul edilecek, tersi durumda reddedilecektir.

(a) Anakütle ortalaması aslında günde 800 kilovatken, bu karar kuralıyla I. Tür hata işleme olasılığı α kaçtır?

(b) Anakütle ortalaması aslında günde 740 kilovatken, bu karar kuralıyla II. Tür hata işleme olasılığı β kaçtır?

(c) 100 gün yerine 200 günlük bir örneklemle aynı karar kuralı kullanılsın:

(i) α değeri (a)'da bulunandan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa onunla aynı mı olurdu?

(ii) β değeri (b)'de bulunandan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa onunla aynı mı olurdu?

(d) Yine 100 günlük bir örneklem çekilmiş olsun ama karar kuralı, örneklem ortalaması en az 765 kilovat ise savın kabul edileceği biçiminde değiştirilsin.
   (i) α değeri (a)'da bulunandan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa onunla aynı mı olurdu?
   (ii) β değeri (b)'de bulunandan daha mı yüksek, daha mı düşük yoksa onunla aynı mı olurdu?

65. Kent planlama ve kontrolu için çalışma bütçesini hazırlayan 545 muhasebeciden oluşan rassal bir örneklemde 117 kişi, nakit akışı tahminlerinin bütçenin en zor hesaplanan kalemi olduğunu belirtmiştir.[41]

(a) Bütün muhasebecilerin en az %25'inin, nakit akışı tahminlerini bütçenin en zor hesaplanan kalemi olarak gördüğünü söyleyen sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.

(b) (a)'da kullanılan sürece dayanarak, nakit akışı tahminlerini en zor iş bulanların gerçek oranı aşağıdakilerden her biri olduğunda sıfır önsavını reddetmenin olasılığı kaçtır?
   (i) %20
   (ii) %25
   (iii) %30

66. Büyük ABD şirketlerinin yöneticilerinden 104 kişilik rassal bir örnekleme, iş yaşamının gelecekteki gelişmeleri sorulmuştur.[42] Bu örnekleme girenlerden ellisi, şu söyleme az ya da çok katıldığını söylemiştir: "Firmalar çabalarını kârdan çok nakit akışı üzerinde yoğunlaştırılacaktır." Bütün yöneticiler içinden bu söyleme katılanların gerçek oranının yarı yarıya olduğunu söyleyen sıfır önsavının, iki-yanlı bir karşı önsav lehine reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyi kaçtır?

67. Rassal bir örnekleme giren doksandokuz Ulusal Futbol Ligi maçından elliyedisini ev sahibi takım kazanmıştır.[43] Ev sahibi takımın bütün maçların yarısını kazandığı sıfır önsavını, yarıdan çoğunu kazandığı karşı önsavıyla sınayın.

68. İşletmecilik mezunu 150 kişilik rassal bir örneklemde elli kişi, çalışanların sık sık dürüst olmayan iş davranışlarından dolayı ödüllendirildikleri görüşüne katıldıklarını ya da kesinlikle katıldıklarını belirtmiştir.[44] Bütün işletmecilik mezunlarından en çok %20'sinin bu görüşe katıldıkları sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.

69. Üniversite yerleşkelerinde işe alma görüşmeleri yapan 142 görevliden oluşan rassal bir örneklemde otuzdokuz kişi, her özgeçmişi incelerken ortalama altmış saniye ya da daha az süre harcadıklarını söylemiştir.[45] Bütün işe alma görevlilerinden en çok

---

[41] C. T. Cox, H. M. Nix, H. Wichmann, "Responsibility accounting and operational control for government units," *Accounting Horizons, 3*, no. 2 (1989), 38-48.

[42] S. H. Akhter, G. R. Laczniak, "The future US business environment with strategic marketing implications for European exporters," *European Journal of Marketing, 23*, no. 5 (1989), 58-74.

[43] H. Cooper, K. M. DeNeve, F. Mosteller, "Predicting professional sports game outcomes from intermediate game scores," *Chance, 5*, no.3 (1992), 18-22.

[44] F. R. David, L. M. Anderson, K. W. Lawrimore, "Perspectives on business ethics in management education," *S.A.M. Advanced Management Journal, 55*, no. 4 (1990), 26-32.

[45] R. M. Schramm, R. M. Dortch, "An analysis of effective resumé content, format, and appearance based on college recruiter perceptions," *Bulletin of the Association of Business Communication, 54*, no. 3 (1991), 18-23.

%20'sinin özgeçmiş incelemeye bu kadar kısa süre ayırdıkları sıfır önsavını sınayın.

70. Tarımsal bir denemede, iki pahalı, yüksek verimli mısır türü denenerek verimlerindeki gelişmeler ölçülmüştür. Bu deneme, her bir tür on çift toprak parçasından birine ekilecek biçimde tasarlanmıştır. Aşağıdaki çizelgede gösterilen veriler, bu iki türden elde edilen verim artış yüzdeleridir. Yaptığınız bir varsayım varsa belirterek, iki anakütlenin ortalama verim artışının aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını %10 anlamlılık düzeyinde sınayın. İki-yanlı karşı önsav kullanın.

TOPRAK	TÜR A	TÜR B	TOPRAK	TÜR A	TÜR B
1	12.6	10.5	6	16.1	14.0
2	9.2	8.1	7	12.3	10.1
3	6.4	6.2	8	11.3	13.6
4	9.8	10.1	9	12.2	9.8
5	15.3	12.2	10	14.1	13.4

71. İki mali analistten, rassal bir örnekleme seçilmiş oniki şirketin gelecek yıldaki pay senedi başına kazanç oranlarını kestirmeleri istenmiştir. Bu kestirimlerin niteliği,

$$100 \cdot \frac{|\text{Gerçekleşen} - \text{Kestirim}|}{\text{Gerçekleşen}}$$

biçiminde tanımlanan mutlak kestirim hata yüzdesiyle ölçülmektedir. Yapılan mutlak kestirim hata yüzdeleri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Yaptığınız bir varsayım varsa belirterek, bu iki mali analistin mutlak kestirim hata yüzdelerinin anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen önsavı, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

ŞİRKET	ANALİST A	ANALİST B	ŞİRKET	ANALİST A	ANALİST B
1	12.3	7.3	7	5.2	3.1
2	15.4	12.1	8	4.1	0.6
3	5.3	7.4	9	5.3	5.5
4	9.2	8.1	10	4.1	2.8
5	8.6	11.3	11	3.6	4.3
6	14.2	12.3	12	5.6	1.7

72. Sigarayı bırakmış kimselerin kısa süreli iş devamsızlıklarını inceleyen bir araştırmada,[46] sigarayı yeni bırakmış kırkdört kişilik bir rassal örneklemde ortalama devamsızlık ayda 2.21 gün, örneklem standart sapması ayda 2.21 gün çıkmıştır. Sigarayı çok önceden bırakmış seksenaltı kişilik bağımsız bir rassal örneklemde ise, ortalama devamsızlık ayda 1.47 gün, örneklem standart sapması ayda 1.69 gün bulunmuştur. İki anakütle ortalamasının eşitliği önsavının, iki-yanlı karşı önsav lehine reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini bulun.

[46] M. R. Manning, J. S. Osland, A. Osland, "Week-related consequences of smoking cessation," *Academy of Management Journal, 32* (1989), 606-21.

73. Yeminli muhasebeciler ve muhasebe öğretim üyelerinden oluşan iki bağımsız rassal örneklemden, aşağıdaki söyleme tepkilerini bir (kesinlikle karşıyım) ile yedi (kesinlikle katılıyorum) arasındaki bir ölçekte göstermeleri istenmiştir: "İleri düzeyde muhasebe derslerinde alınan notlar, öğrencilerin çözümleme yetilerinin iyi bir göstergesidir."[47] Yetmiş yeminli muhasebeciden oluşan rassal bir örneklemde ortalama tepki 4.4, örneklem standart sapması 1.3'tür. 106 muhasebe öğretim üyesinden oluşan bir örneklemde ortalama tepki 5.3, örneklem standart sapması 1.4'tür.

(a) Yeminli muhasebeciler için anakütle ortalamasının en çok 4.0 olduğu sıfır önsavını %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(b) Anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını, anakütlede muhasebe öğretim üyelerinin ortalama tepkisinin yeminli muhasebecilerden yüksek olduğu karşı önsavıyla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

74. Muhasebe lisans ve yüksek lisans derecesi almış, ilk işlerine en büyük sekiz denetleme şirketinden birinde başlayıp daha sonra sanayiye geçmiş kimselerden oluşan bağımsız rassal örneklemlere sorular sorulmuştur.[48] Kırkdört lisans mezunu için ilk iş değiştirmeden önceki ortalama süre 35.02 ay, örneklem standart sapması 18.20 aydır. 68 yüksek lisans mezunu için ilk iş değiştirmeden önceki ortalama süre 36.34 ay, örneklem standart sapması 18.94 aydır. İlk iş değiştirmeden önceki ortalama sürenin her iki grupta aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla, %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

75. Bir çalışma, grup büyüklükleri ile grup özelliklerinin düşünce üretme üzerindeki etkilerini değerlendirmeyi amaçlamaktadır.[49] Grup büyüklüğü etkisini değerlendirmek için dört ve sekiz kişilik gruplar karşılaştırılmıştır. Dört tane 4 kişilik gruptan oluşan bir rassal örneklemde, grup başına üretilen ortalama düşünce sayısı 78.0, örneklem standart sapması 24.4'tür. Dört tane sekiz kişilik gruptan oluşan bağımsız bir rassal örneklemde grup başına üretilen ortalama düşünce sayısı 114.7, örneklem standart sapması 14.6'dır. (Her iki durumda da gruplarda oturum başkanı vardır.) Gerek duyduğunuz bir varsayım varsa belirterek, anakütle ortalamalarının eşitliği önsavını, sekiz kişilik gruplarda ortalamanın daha yüksek olduğunu ileri süren karşı önsavla, %1 düzeyinde sınayın.

76. Yazılı bir metnin okunma güçlüğünü ölçmek için *sis endeksi* kullanılır. Bu endeks şu adımlarla hesaplanır:

(i) Tümce başına ortalama sözcük sayısını bulun.

(ii) Üç ya da dört heceli sözcüklerin yüzdesini hesaplayın.

(iii) Sis endeksi, (i) ile (ii)'nin toplamının %40'ıdır.

---

[47] J. L. Armitage, "Academicians' and practitioners' views on the context and importance of the advanced financial accounting course," *Journal of Accounting Education, 9* (1991), 327-39.

[48] L. A. Deppe, J. M. Smith, J. D. Stice, "The debate over post-baccalaurate education: one university's experience," *Issues in Accounting Education, 7* (1992), 18-36.

[49] E. F. Fern, "The use of focus groups for idea generation: The effects of group size, acquantanceship, and moderator on response quantity and quality," *Journal of Marketing Research, 19* (1982), 1-13.

Scientific American dergisinden rassal seçilmiş altı reklamdan oluşan bir örneklemde şu sis endeksi sayıları bulunmuştur:[50]

15.75 11.55 11.16 9.92 9.23 8.20

Sports Illustrated dergisinden rassal seçilmiş altı reklamdan oluşan bağımsız bir örneklemde de şu sis endeksi sayıları bulunmuştur:

9.17 8.44 6.10 5.78 5.58 5.36

Gerek duyduğunuz bir varsayım varsa belirterek, sis endeksinin anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını, *Scientific American*'da ortalamanın *Sports Illustrated* dergisinden daha yüksek olduğunu söyleyen karşı önsavla, %5 düzeyinde sınayın.

77. Alıştırma 76'da belirtilen raporda, *People Weekly** dergisinden rassal seçilmiş altı reklamlık bir örneklemde sis endeksleri şöyle bulunmuştur:

9.50 8.60 8.59 6.50 4.79 4.29

*Newsweek** dergisinden seçilmiş altı reklamlık bağımsız bir rassal örneklemde bulunan sis endeksi sayıları da aşağıdadır:

10.21 9.66 7.67 5.12 4.86 3.12

Gerek duyduğunuz bir varsayım varsa belirterek, sis endeksinin iki anakütle ortalamasının eşit olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

78. İçerden ve dışardan atanmış şirket müdürlerinin bağımsız rassal örneklemlerinden, aşağıdaki görüşü bir (kesinlikle karşıyım) ve dört (kesinlikle katılıyorum) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir: "Halka açık şirketlerin satın alınma tehdidi ve gerçeği, yönetim kurullarıyla yöneticileri üzerinde, şirketin ortaklar için değerini en yükseğe çıkarma yönünde bir baskı yaratır."[51] 202 içerden atanmış müdürden oluşan bir örneklemde ortalama yanıt 2.83, örneklem standart sapması 0.89'dur. 291 dışarıdan atanan müdür örnekleminde ortalama yanıt 3.00, örneklem standart sapması 0.67'dir. Anakütle ortalamalarının eşit olduğu sıfır önsavını, dışardan atananlarda ortalamanın daha yüksek olduğunu söyleyen karşı önsavla sınayın.

79. Güzel görünmek ve yüzünün yara izlerini düzelttirmek isteyen plastik cerrahi hastalarından oluşan bağımsız örneklemlerden, yapılan ameliyatın kalitesini bir (düşük) ile yedi (yüksek) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[52] Güzelleşmek isteyen seksenüç kişilik bir örneklemde ortalama puan 6.543, örneklem

---

[50] F. K. Shuptrine, D. D. McVicker, "Readability levels of magazine advertisements," *Journal of Advertising Research, 21*, no. 5 (1981), 45-50'de belirtilmiştir. (*Scientific American* popüler bir bilim dergisi, *Sports Illustrated* resimli bir spor dergisidir. Ç.N.)

* *People Weekly* bir magazin dergisi, *Newsweek* ciddi bir haber dergisidir. (Ç.N.)

[51] H. D. Dewhirst, J. Wang, "Boards of directors and hostile takeovers," *Journal of Managerial Issues, 4* (1992), 269-87.

[52] E. Babakus, S. J. Remington, G. H. Lucas, C. G. Carnell, "Issues in the practice of cosmetic surgery: consumers' use of information and perceptions of service quality," *Journal of Health Care Marketing, 11*, no. 3 (1991), 12-18.

standart sapması 0.649'dur. Yara izlerini düzelttirmek isteyen ellidört hastalık bir örneklemde ise ortalama puan 6.733, örneklem standart sapması 0.425'tir. Bu iki tür hasta için anakütle ortalama puanlarının eşit olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

80. 148 pazarlama öğrencisinden oluşan rassal bir örneklemde yetmişbeş kişi, mizah duygusu taşımanın kariyerdeki başarımlarında çok önemli bir yeri olduğu kanısındadır.[53] 178 muhasebe öğrencisinden oluşan bağımsız bir rassal örneklemde seksenbir kişi aynı görüşü paylaşmıştır.

(a) Bütün muhasebe öğrencilerinden en az yarısının mizah duygusunu çok önemli bulduklarını söyleyen sıfır önsavını %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(b) Pazarlama ve muhasebe öğrencilerinden mizah duygusunu çok önemli bulanların anakütle oranlarının aynı olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

81. İşletme iflasları için erken uyarı göstergeleri bulmayı amaçlayan bir çalışmada, iflas etmiş yirmiüç perakendeci işletmede 3 yıl önceki varlıklara göre getiri oranı ortalamasının 0.058, örneklem standart sapmasının 0.055 olduğu görülmüştür. Başarılı olmuş yirmiüç perakendeci işletmede bu getiri oranı ortalaması 0.146, örneklem standart sapması 0.058 çıkmıştır.[54] İki anakütle ortalamasının aynı standart sapmayla normal dağıldığını varsayın. Varlıklara göre getiri oranının her iki anakütle ortalamasının aynı olduğu sıfır önsavını, gerçek ortalamanın başarılı işletmelerde daha yüksek olduğu karşı önsavıyla %0.5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

82. İşverenin eğitim programı uyguladığı orta büyüklükteki işyerlerinde çalışanlardan rassal örneklemler çekilmiştir.[55] Liseyi bitirmemiş altmışyedi çalışandan oluşan bir örneklemde onbir kişi, şimdiki işverenlerinin düzenlediği bir eğitim programına katılmıştır. Liseyi bitirmiş ama üniversiteye girmemiş 113 çalışandan oluşan bağımsız bir rassal örneklemde böyle bir programa katılan sayısı yirmiyedidir. Her iki grupta da programa katılan oranlarının aynı olduğu sıfır önsavını, liseyi bitirmeyenlerde bu oranın daha düşük olduğunu ileri süren karşı önsavla, %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

83. Altmışdokuz sanayi işletmesinden oluşan rassal bir örneklemde, kırkyedi işletme halkla ilişkiler işini kendisi yürütmekteyken, altmışdokuz tüketim malı satan işletme arasında bu sayı kırktır.[56] İki-yanlı karşı önsavla, anakütle oranlarının eşitliği sınamasının p değerini bulup yorumlayın.

84. Küçük İşletme Geliştirme Merkezi'ne başvuran kadın ve erkekler arasından bağımsız örneklemler alınmıştır.[57] Bu kimseler yeni bir iş kurmayı düşünmektedir.

---

[53] H. P. Rogers, C. M. Kochuny, A. Ogbuehi, "Ethical inclinations of tomorrow's marketers," *Journal of Marketing Education, 15* (1993), 11-19.

[54] S. Sharma, V. Mahajan, "Early warning indicators of business failure," *Journal of Marketing, 44*, no. 4 (1980), 80-89.

[55] A. G. Holtmann, T. L. Idson, "Employer size and on-the-job training decisions," *Southern Economic Journal, 58* (1991), 339-55.

[56] M. L. Ripley, "Why industrial advertising is often done in-house," *Industrial Marketing Management, 21* (1992), 331-34.

[57] J. J. Chrisman, A. L. Carsrud, J. DeCastro, L. Herron, "A comparison of assistance needs of male and female pre-venture enterpreneurs," *Journal of Business Venturing, 5* (1990), 235-48.

Doksandört erkekten elliüçü gerçekten bir işi başlatmışken, altmışsekiz kadın arasında bu sayı kırkyedidir. Merkeze başvuran kadınlar arasında gerçekten iş başlatanların oranının erkeklerden yüksek olduğu karşı önsavıyla, anakütle oranlarının eşit olduğu sınamasının p değerini bulup yorumlayın.

85. Alıştırma 76'nın verilerini kullanarak, *Scientific American* dergisindeki reklamların sis endeksinin anakütle standart sapmasının, *Sports Illustrated* dergisindeki reklamların sis endeksinin anakütle standart sapmasıyla aynı olduğu sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

86. Altbölüm 9.8'deki bilgileri temel alarak, iki analistin kestirim hatalarının mutlak yüzdesi konusunda anakütle varyanslarının eşitliği önsavını sınamak için Alıştırma 71'deki verileri kullanabilir misiniz?

BÖLÜM 10

Katsayısal Olmayan Bazı Sınamalar

10.1 GİRİŞ

Bölüm 9'da, anakütle dağılımlarının normal olduğu varsayımına dayanan çeşitli önsav sınamaları açıklandı. Normallik varsayımı çoğunlukla akla uygundur. Üstelik, bu sınama süreçlerinin çoğu büyük örneklemlere uygulandığında, merkezî limit teoremi sayesinde, anakütle normal dağılmasa bile geçerlidir. Ama, uygulamalı çalışmalarda sık sık, normallik varsayımı pek akla yatkın olmaz. Böyle durumlarda çıkarsamayı, anakütlenin çok değişik dağılımları için geçerliliğini koruyan sınamalara dayandırmak istenir. Bu tür sınamalara **katsayısal olmayan** (nonparametrik) ya da **dağılımdan bağımsız** sınamalar denir.

Bu bölümde, daha önce karşılaştığımız sorunları çözümlemeye yarayan katsayısal olmayan sınamaları açıklayacağız. Katsayısal olmayan başka sınamalar daha sonraki bölümlerde ele alınacaktır. Katsayısal olmayan sınamalar, örneklem gözlemlerinin bağımsızlığı gibi bazı varsayımlar gerektirseler de, anakütle dağılımı *ne olursa olsun* genellikle geçerlidir. Yani, anakütle üyelerinin nasıl dağıldığına bakılmaksızın, istenen anlamlılık düzeylerinde sınamalar geliştirilebilir. Amacımız, varolan bütün katsayısal olmayan sınamaları burada açıklamak değildir. Tersine, kullanılan yöntemlere ilişkin biraz fikir vermek gibi daha alçakgönüllü bir hedefimiz var. Bu bölümde, iki anakütle dağılımının orta noktalarının eşitliğini sınayan katsayısal olmayan sınamaları açıklayacağız. Bu sınamalar Altbölüm 9.6'da tartışılan sınamaların almaşığıdır.

10.2 İŞARET SINAMASI

Uygulanabilecek katsayısal olmayan en basit sınama **işaret sınamasıdır**. Bir anakütlenin merkezî konumuna ilişkin önsavları sınamada, en çok da eşlenik çift verilerini çözümlemede kullanılır.

Çizelge 10.1 bir tat karşılaştırma deneyinin bulgularını göstermektedir. Bir fasulye konservecisi, kullandığı sos için yeni bir tarif denemeyi tasarlamaktadır. Rassal olarak seçilen sekiz kişiden, eski ve yeni ürünlerin tadını 1 ile 10 arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Puanlar çizelgede gösterilmiştir. Ayrıca her tadımcının puanları arasındaki fark ile bunun işareti de verilmiştir. Böylece, eski ürün beğenilmişse + işareti, yeni ürün beğenilmişse – işareti konmuş, iki ürün eşdeğer bulunmuşsa 0 konmuştur. Bu deneyde iki kişi eski, beş kişi yeni ürünü daha çok beğenmiş, bir kişi ise her ikisini de eşit değerlendirmiştir.

İlgilenilen sıfır önsavı, genel olarak anakütlede, bir ürünün ötekinden daha çok beğenilme eğilimi bulunmadığı biçimindedir. Bu önsavı değerlendirirken, her ürünün beğenilme düzeyini gösteren sayıları karşılaştırıyor, iki ürünü eşdeğer bulanları gözardı ediyoruz. Öyleyse önümüzdeki örnekte etkin örneklem büyüklüğü 7'ye indirilmiş olup, sınamamızın temel aldığı tek örneklem bilgisi, yedi kişiden ikisinin eski ürünü beğenmiş olduğudur.

Farkların anakütle ortancasının 0 olduğu önsavı sıfır önsavı olarak düşünülebilir. (Sözgelimi, farklar, ortalaması 0 olan, bakışık (simetrik) dağılmış bir anakütleden geliyorsa bu önsav doğru olur.) Bu önsav doğruysa, + ve – farkların dizilimine, + ve – gelme olasılığı 0.5 olan bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem olarak bakılabilir. Bu durumda gözlemler, + gelme olasılığı 0.5 olan bir binom dağılımından çekilmiş rassal bir örneklem oluşturur. Öyleyse, anakütledeki +'ların gerçek oranı p ile gösterilirse, sıfır önsavı aşağıdakinden başka bir şey değildir:

$$H_0: p = 0.5$$

ÇİZELGE 10.1 Fasulye konservesini tadanların verdiği puanlar

TADAN	DEĞERLENDİRME		FARK	FARKIN İŞARETİ
	ESKİ ÜRÜN	YENİ ÜRÜN		
A	6	8	–2	–
B	4	9	–5	–
C	5	4	1	+
D	8	7	1	+
E	3	9	–6	–
F	6	9	–3	–
G	7	7	0	0
H	5	9	–4	–

Bu önsavı ya tek ya da iki-yanlı karşı önsavla sınamak isteyebiliriz. Tat deneyi örneğinde karşı önsav, yeni ürünün anakütlede çoğunluk tarafından daha çok beğenildiği biçiminde olsun. Bu karşı önsav şöyle yazılır:

$$H_1: p < 0.5$$

Sıfır önsavını bu karşı önsavla sınarken, "Sıfır önsavı aslında doğruyken, bu kadar ya da daha aşırı uçta bir örneklem bulgusuyla karşılaşma olasılığı kaçtır?" sorusunu sorarız. Her birinde "başarı" olasılığı 0.5 olan $n = 7$ binom denemesinde, x tane başarı (+) ile karşılaşmanın olasılığını $P(x)$ ile gösterirsek, iki ya da daha az + gözleme olasılığı, Ek Çizelge 1'den

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0.0078 + 0.0547 + 0.1641$$
$$= 0.2266$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, "Örneklemde iki ya da daha az + çıkarsa H_0'ı reddedin" biçiminde bir karar kuralını benimsersek, sıfır önsavını doğruyken reddetme olasılığı 0.2266'dır. Demek ki, böyle bir sınamanın anlamlılık düzeyi %22.66 olup, bu örnekte sıfır önsavı bu düzeyde reddedilebilir. Sıfır önsavını reddedemeyeceğimiz düzeyi sormak da önemlidir. Eğer karar kuralı reddetme için hiç + olmamasını ya da bir tane + olmasını gerektirseydi, H_0 reddedilemezdi. Bu sınamanın anlamlılık düzeyi de

$$P(0) + P(1) = 0.0625$$

olur. Öyleyse sıfır önsavı %6.25 düzeyindeki bir sınamada reddedilemez.

Şimdi bu verilere ilişkin bulgularımızı özetleyelim. Genel olarak anakütlede eski ürünü beğenenler kadar yeni ürünü beğenenlerin bulunduğunu söyleyen sıfır önsavı, %22.66 anlamlılık düzeyinde bir sınama kullanılarak, anakütlede çoğunluğun yeni ürünü beğendiğini ileri süren karşı önsav lehine reddedilir. Ama bu sıfır önsavı, %6.25 anlamlılık düzeyli bir sınama kullanılarak reddedilemez. Öyleyse bu veriler, anakütledeki tercihlerin eşitliği önsavına karşı, karşı konulamaz denemeyecek kadar az kanıt içermektedir. Bu, örneklemimizin çok az gözlem içermesinden kaynaklanmış olabilir.

Son olarak, karşı önsavın iki-yanlı, yani

$$H_1: p \neq 0.5$$

olduğu durumu ele almamız gerekmektedir. Örneğimizde bu, iki üründen herhangi birinin genel olarak daha çok beğenildiğini söyleyen önsavıdır. Eğer sıfır önsavındaki değerin her iki yanındaki karşı önsavlar bakışık ele alınırsa, sıfır önsavının bu veriler için reddedilmesine yol açan karar kuralı, "Örneklemde iki ya da daha az yahut beş ya da daha çok + çıkarsa H_0'ı reddedin" biçimindedir. Bu sınamanın anlamlılık düzeyi

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(5) + P(6) + P(7) = 2[P(0) + P(1) + P(2)] = 0.4532$$

olur, çünkü binom dağılımının olasılık dağılımı $p = 0.5$ için bakışıktır. Sıfır önsavı, "Örneklemde bir ya da daha az yahut altı ya da daha çok + çıkarsa H_0'ı reddedin" biçimindeki bir kuralla reddedilemeyecektir. Bu sınamanın anlamlılık düzeyi de

$$P(0) + P(1) + P(6) + P(7) = 2[P(0) + P(1)] = 0.1250$$

olur. Demek ki, %12.5 düzeyinde bir sınamada, görüş belirten anakütle üyelerinin yarısı yeni ürünü daha çok beğenir diyen sıfır önsavı, iki-yanlı karşı önsav lehine reddedilmez.

İşaret Sınaması

İşaret sınaması, anakütle ortancasının 0 olduğu sıfır önsavını sınamada kullanılabilir. Anakütleden rassal bir örneklem çekildiğini, 0'a eşit gözlemlerin gözardı edildiğini, geriye n tane gözlem kaldığını düşünelim. Sınanacak sıfır önsavı, "anakütledeki sıfırdan farklı gözlemlerin artı olması olasılığı 0.5'tir" biçimindedir, yani

$$H_0: p = 0.5$$

yazılır. Bu durumda sınama, örneklemdeki artı değerli gözlem sayısının (sıfır önsavı doğruyken $p = 0.5$ ile) binom dağılımına uyduğu olgusuna dayanır.

Örneklemdeki gözlem sayısı büyükse, sınamayı uygulamak için binom dağılımının normale yakınsaması kullanılabilir. Bu da yine merkezî limit teoreminin bir uzantısıdır.

İşaret Smaması: Büyük Örneklemde

Örneklemdeki sıfırdan farklı gözlem sayısı büyükse,[1] işaret sınaması binom dağılımının normale yakınsamasına dayanır. Bu durumda

$$H_0: p = 0.5$$

önsavının sınanması, Altbölüm 9.5'te anlatılanın tıpkısıdır.

[1] Bu yakınsama, yirmiden çok gözlemli örneklemler için yeterlidir. (Binom olasılığının 0.5 olduğu biçimindeki sıfır önsavını sınarken normale yakınsamanın kullanılması için bu örneklem büyüklüğü genellikle yeterlidir; ancak, Bölüm 9'da belirttiğimiz gibi, bu katsayının daha uç değerleri için daha büyük örneklemler gereklidir.

ÖRNEK 10.1

Rassal bir örnekleme seçilen 100 çocuktan iki yeni dondurma çeşidini —fıstıklı kaymak köpüğü ile sakızlı sürpriz— karşılaştırması istenmiştir. Elli altı çocuk fıstıklı kaymak köpüğünü, kırk çocuk sakızlı sürprizi beğenmiş, dört çocuk ise ikisini de eşit beğenmiştir. Bu anakütlede bir çeşidi öbürüne yeğleme gibi bir genel eğilim olmadığını söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

Bütün çocuklardan fıstıklı kaymak köpüğünü beğenenlerin anakütle oranı p ise,

$$H_0: p = 0.5$$

sıfır önsavım

$$H_1: p \neq 0.5$$

karşı önsavıyla sınamak istiyoruz.

Dört çocuk tercih belirtmediğine göre $n = 96$ örneklem üyemiz kalmıştır. Fıstıklı kaymak köpüğünü beğenenlerin örneklem oranı

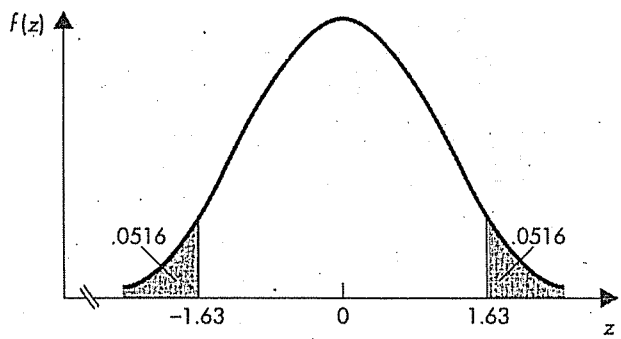
$$\hat{p}_x = \frac{56}{96} = 0.583$$

olur. Anlamlılık düzeyi α olan bir sınamada karar kuralı şudur (bkz. Altbölüm 9.5):

$$\frac{\hat{p}_x - 0.5}{\sqrt{(0.5)(0.5)/n}} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{\hat{p}_x - 0.5}{\sqrt{(0.5)(0.5)/n}} > z_{\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

Burada şunu elde ederiz:

ÇİZİM 10.1 Sıfır önsavı $H_0: p = 0.5$ doğruyken $Z = \dfrac{\hat{p}_x - 0.5}{\sqrt{(0.5)(0.5)/96}}$ dağılımı ve $H_1: p \neq 0.5$ karşı önsavıyla 0.1032 anlamlılık düzeyinde (örneklem büyüklüğü $n = 96$) H_0'ı sınamanın karar kuralı



$$\frac{\hat{p}_x - 0.5}{\sqrt{(0.5)(0.5)/n}} = \frac{0.583 - 0.5}{\sqrt{(0.5)(0.5)/96}} = 1.63$$

Ek Çizelge 3'ten, $z_{\alpha/2} = 1.63$ ise, $\alpha/2 = 0.0516$, dolayısıyla $\alpha = 0.1032$ bulunur. Demek ki sıfır önsavı, %10.32'den büyük bütün anlamlılık düzeylerinde reddedilebilir. Fıstıklı kaymak köpüğünü beğenen çocukların sayısı, sakızlı sürprizi beğenenler kadardır diyen sıfır önsavı doğruysa, bu kadar ya da daha uçta bir örneklem sonucuyla karşılaşma şansı 10'da bir'den biraz yüksektir. Öyleyse bu verilerde, sıfır önsavına karşı biraz kanıt vardır.

Bu sınama Çizim 10.1'de verilmiştir. Bu çizim standart normal dağılımın, olasılık yoğunluk fonksiyonu altındaki toplam alanın %5.16'sına karşılık gelen alt ve üst kuyruk alanı olasılıklarını gösterir.

ALIŞTIRMALAR

1. Rassal bir örnekleme giren oniki mali analistten, iki pay senedi fiyatının gelecek yıldaki artış yüzdelerini kestirmeleri istenmiştir. Elde edilen bulgular aşağıdaki çizelgededir. Analistler anakütlesinde bir pay senedini öbüründen üstün tutma gibi bir genel eğilim bulunmadığı yolundaki sıfır önsavını işaret sınamasıyla sınayın.

ANALİST	A SENEDİ	B SENEDİ	ANALİST	A SENEDİ	B SENEDİ
A	6.8	7.1	G	9.3	10.1
B	9.8	12.3	H	1.0	2.7
C	2.1	5.3	I	–0.2	1.3
D	6.2	6.8	J	9.6	9.8
E	7.1	7.2	K	12.0	12.0
F	6.5	6.2	L	6.3	8.9

2. Bir kurum öğrencilere, teknik yazıları hızla okurken anlama düzeyini yükseltmek üzere tasarlanmış bir kurs açmıştır. On öğrencilik rassal bir örneklemin her üyesine bir yazıyı okuması için 30 dakika süre tanınmakta, daha sonra anlama düzeyini ölçecek bir sınav yapılmaktadır. Bu süreç öğrenciler kursu bitirdikten sonra yinelenmektedir. Aşağıdaki çizelge, kurstan önce ve sonraki anlama düzeyi puanlarını göstermektedir. Anakütlede kursu bitirdikten sonra anlama düzeyinde genel bir gelişme yoktur biçimindeki sıfır önsavını işaret sınamasıyla sınayın.

ÖĞRENCİ	ÖNCE	SONRA	ÖĞRENCİ	ÖNCE	SONRA
A	62	69	F	53	61
B	63	72	G	49	63
C	84	80	H	58	59
D	70	70	I	83	87
E	60	69	J	92	98

3. Marketlerinde elektronik kupon programı bulunan bir örneklemdeki onbir market yöneticisine, müşterilerinin elektronik kuponlara bakışı olumlu mu diye sorulmuştur.[2] Yedi yönetici "evet", dört yönetici "hayır" demiştir. Yönetici anakütlesinde "evet" ve "hayır" yanıtlarının eşit bölündüğü sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınaym.
4. İşletme haklarını geri alan altmış şirketten oluşan bir örneklem incelenmiştir.[3] Bunlardan, geri alma duyurusunun yapıldığı sırada getirisi artı olanların sayısı otuz dokuz, eksi olanların sayısı onsekiz, sıfır olanların sayısı da üçtür. Artı ve eksi getirilerin şansının eşit olduğu sıfır önsavını, artı getirilerin şansının daha yüksek olduğunu söyleyen karşı önsavla sınayın.
5. Rassal bir örneklemdeki 130 seçmenden kırkdördü, eğitime daha fazla para ayırmak amacıyla eyalette vergi artışından yana, altmışsekizi buna karşı olup onsekizi görüş belirtmemiştir. Eyaletteki seçmenlerin bu vergi artışı konusunda eşit bölündükleri önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.
6. Mesleği iktisatçılık olan altmış kişilik bir rassal örneklemden, gelecek yıl enflasyon oranının bu yıldan yüksek mi, düşük mü yoksa onunla aynı mı olacağını kestirmeleri istenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. İktisatçıların bu konuda eşit bölündükleri sıfır önsavını sınayın.

KESTİRİM	SAYI
Daha yüksek	20
Daha düşük	29
Aşağı yukarı aynı	11

10.3 WILCOXON SINAMASI

Altbölüm 10.2'de, işaret sınamasının, eşlenik çiftlerden oluşan bir örneklem varken anakütleleri karşılaştırmak için kolay bir sınama süreci sağladığını gördük. Bu sınamaya ilişkin bir güçlük, çok sınırlı bir bilgiyi —yalnızca farkların işaretini— gözönüne almasıdır. Sözgelimi, Çizelge 10.1'de işaret sınaması, hangi ürünün daha çok tercih edildiğini dikkate alırken tercihin derecesini gözardı eder. Örneklem küçükken sınamanın pek de güçlü olmayacağından kuşku duyulabilir. Aslında, yalnızca işaretler değil, eşlenik çiftlerin kendi arasındaki farkın büyüklüğü de hesaba katılabilir ve yine de dağılımdan bağımsız bir sınamaya ulaşılabilir. **Wilcoxon sınaması** bize, farkların göreli büyüklüklerine ilişkin bilgiyi de kullanan bir yöntem sunar. Katsayısal olmayan pek çok sınama gibi bu da *sıra numaralarına* dayanır.

[2] Bkz. D. R. Hoffman, A. F Ketcham, F. A. Taylor, "Electronic coupons: A double-barreled sales promotion technique," *Mid-American Journal of Business, 7*, no. 1 (1992), 42-48.
[3] Bulgular J. A. Brickley, F. H. Dark, M. S. Weisbach, "An agency perspective on franchising," *Financial Management, 20*, no. 1 (1991), 27-35'ten alınmıştır.

ÇİZELGE 10.2 Wilcoxon sınama istatistiğinin tat beğenme verileriyle hesaplanması

TADAN	FARK	SIRA NO. (+)	SIRA NO. (−)
A	−2		3
B	−5		6
C	1	1.5	
D	1	1.5	
E	−6		7
F	−3		4
G	0		
H	−4		5
	Toplamlar	3	25

Bir örnek olmak üzere, Çizelge 10.2, iki fasulye konservesinin beğenilme derecelerine ilişkin veriler için Çizelge 10.1'deki hesaplamaları genişletmektedir.

Wilcoxon sınamasının sınama istatistiği şöyle hesaplanır:

1. İşaret sınamasında olduğu gibi burada da 0 farklar atılır, dolayısıyla bu örnekte etkin örneklem gözlemi sayısı yedidir.
2. Sıfır olmayan farkların mutlak değerleri küçükten büyüğe doğru sıraya dizilir. İki ya da daha çok değer eşitse, bunlara hemen sonra gelen sıra numaralarının ortalaması verilir. Örneğimizde en küçük iki mutlak fark eşittir. Öyleyse bunlara verilecek sıra numarası, 1 ile 2'nin ortalaması olan 1.5'tur. Bir sonraki değere 3 verilir ve bu böyle gider. Bu yolu izleyip bütün farklara sıra numarası veririz.
3. Artı ve eksi farkların sıra numaraları ayrı ayrı toplanır. Bu toplamlardan küçük olanı Wilcoxon istatistiği T'dir. Çizelge 10.2'de bu iki toplam 3 ile 25'tir, öyleyse $T = 3$ olur.

Şimdi de, çift farklarının anakütlede bakışık dağıldığını düşünelim. Çoğu zaman bu akla uygundur. Sınanacak sıfır önsavı, bu dağılımın orta noktasının 0 olduğudur. Öyleyse örneğimizde, iki ürünün beğenilme derecelerinin bakışık dağıldığını varsayıyor, bu dağılımın orta noktasının 0 olduğunu —yani beğenilme dereceleri arasında fark olmadığını— sınamak istiyoruz. Artı farkların sıra numaraları toplamı, eksi farklarınkinden çok farklı çıkarsa, sıfır önsavının doğrululuğundan kuşku duyarız. Bu durumda T istatistiğinin küçük değerleri için sıfır önsavı reddedilir. Bu rassal değişkenin dağılımının eşik değerleri, çift farklarının anakütle dağılımının orta noktası 0'dan büyük bir sayıdır yahut da 0'dan küçük bir sayıdır diyen tek-yanlı karşı önsav için, Ek Çizelge 8'de verilmiştir. Örneğimizde, yeni ürünün eskisinden daha çok beğenildiği biçiminde bir karşı önsav kullanmak isteyebiliriz. Bu, beğenilme derecesi çiftlerinin fark dağılımının orta noktası 0'dan küçük bir sayıdır anlamına gelir. Ek Çizelge 8'den $n = 7$ örneklem büyüklüğünde eşik değerleri %2.5 düzeyinde sınama için 3, %5 düzeyinde sınama için 4'tür. Demek ki sıfır önsavı, tek-yanlı karşı önsav lehine %5

düzeyinde reddedilmekte, %2.5 düzeyinde ise kıl payı reddedilmektedir. Bu ürünlerin beğenilme derecelerinin analütledeki farklarının 0'ı orta nokta aldıkları biçimindeki sıfır önsavına karşı kanıtlar güçlüdür. Yeni ürünün beğenilme derecesinin genelde daha yüksek olabileceği görülmektedir.

Karşı önsav iki-yanlı ise —yani anakütlede farkların orta noktası 0'dan farklı bir sayı ise— uygun anlamlılık düzeyleri, tek-yanlı karşı önsavdakinin iki katıdır. Öyleyse bu verilerle sıfır önsavı, iki-yanlı karşı önsav lehine %10 anlamlılık düzeyinde reddedilmekte, %5 anlamlılık düzeyinde ise kıl payı reddedilmektedir.

Dikkat ederseniz, sıra numaralarının verdiği ek bilgi kullanıldığında sıfır önsavını, işaret sınamasındakinden çok daha düşük anlamlılık düzeylerinde reddetmek olanaklı olabilmektedir.

Wilcoxon Sınaması

Wilcoxon sınaması, gözlemleri eşlenik çiftler olan rassal bir örneklem varken kullanılabilir. Eşlenik çiftlerdeki farkların anakütle dağılımını bakışık varsayıp, bu dağılımın orta noktasının 0 olduğunu sınamak isteriz. Farkın 0 olduğu çiftleri atarak, kalan n tane mutlak farkı artan bir büyüklük sırasına dizeriz. Artı ve eksi farkların sıra numaralarının toplamları hesaplanır, bunlardan küçük olanı Wilcoxon sınama istatistiği T'dir. Bu T, Ek Çizelge 8'deki değerden küçük ya da ona eşitse sıfır önsavı reddedilir.

Örneklemde sıfır olmayan farkların sayısı n büyükse,[4] sıfır önsavı doğruyken, Wilcoxon T istatistiği dağılımı, normal dağılıma iyice yakınsar. Anakütlede farkların orta noktasının 0 olduğu sıfır önsavı doğruyken, bu dağılımın ortalamasıyla varyansının aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir:

$$E(T) = \mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$

ve

$$\text{Var}\,(T) = \sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

n büyükse,

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

[4] Yirmi ya da daha çok gözlemde yaklaşıklık yeterlidir.

rassal değişkeni yaklaşık standart normal dağılır ve sınamalar, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, bu bulguya dayandırılabilir.

Wilcoxon Sınaması: Büyük Örneklemlerde

Sıfır olmayan farkların sayısı n büyükse ve Wilcoxon istatistiğinin gözlenen değeri T ise, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) Karşı önsav tek-yanlı ise, şu durumda sıfır önsavı reddedilir:

$$\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} < -z_\alpha$$

(ii) Karşı önsav iki-yanlı ise, şu durumda sıfır önsavı reddedilir:

$$\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} < z_{\alpha/2}$$

ÖRNEK 10.2

Bir çalışma, denetim sonrası karmaşık süreçler kullanan ve kullanmayan işletmeleri karşılaştırmıştır.[5] Otuzbir eşlenik çift işletmeden oluşan bir örneklem incelenmiştir. Her işletmenin başarımını ölçmek için, varlıklarının pazar değerinin yerine koyma maliyetine oranı hesaplanmıştır. Bu otuzbir çiftin her birinde bir işletme denetim sonrası karmaşık süreçler kullanırken öbürü kullanmamıştır. Otuzbir oran farkı hesaplanmış, mutlak farklar sıraya konmuştur. Sıra numaraları toplamlarından küçük olanı, 189, sözkonusu oranın denetim sonrası karmaşık süreçler kullanmayan işletmede daha büyük olduğu çiftlere ilişkindir. Oran farkları dağılımının orta noktası 0'dır diyen sıfır önsavını, varlıklarının pazar değerinin yerine koyma maliyetine oranı, denetim sonrası karmaşık süreçler kullanmayan işletmelerde daha düşüktür diyen karşı önsavla sınayın.

$n = 31$ çift verilmiş ve sıfır önsavı doğruyken Wilcoxon istatistiğinin ortalaması

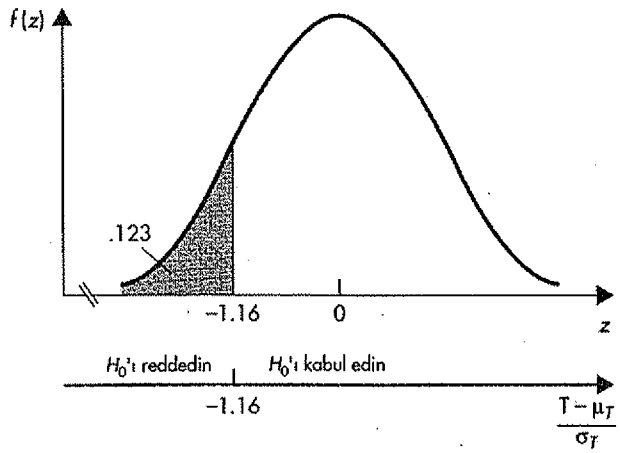
$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{(31)(32)}{4} = 248$$

ve varyansı

$$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{(31)(32)(63)}{24} = 2{,}604$$

olur, böylece standart sapma

[5] Bu örnek, M. D. Myers, L. A. Gordon, M. M. Hamer, "Postauditing capital assets and firm performance: an empirical investigation," *Managerial and Decision Economics, 12* (1991), 317-27'deki bulgulardan yararlanılarak düzenlenmiştir.



ÇİZİM 10.2 Çift farklarının orta noktasının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavı doğruyken $Z = \dfrac{T-\mu_T}{\sigma_T}$ dağılımı ve 0.123 anlamlılık düzeyinde tek-yanlı karşı önsavla sınamanın karar kuralı

$$\sigma_T = 51.03$$

olur.

Wilcoxon istatistiğinin gözlenen değeri T,

$$\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} < -z_\alpha$$

olduğunda sıfır önsavı, tek-yanlı karşı önsav lehine reddedilir. Burada $T = 189$'dur.

$$\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} = \frac{189-248}{51.03} = -1.16$$

bulunur. Bu $z_\alpha = 1.16$ değerine karşılık gelen α değeri, Ek Çizelge 3'ten $(1 - 0.8770) = 0.123$ okunur. Öyleyse, %12.3'ten büyük bütün anlamlılık düzeyleri için sıfır önsavı reddedilebilir. Veriler, denetim sonrası karmaşık süreçler kullanan işletmelerin daha başarılı olduğu izlenimini veren bir miktar kanıt içermektedir ama bu kanıt karşı konulamayacak kadar güçlü değildir. Bu sınama Çizim 10.2'de gösterilmiştir.

10.4 MANN-WHITNEY SINAMASI

Altbölüm 10.3'te, eşlenik çiftlerden oluşan rassal bir örneklem varken iki anakütle dağılımının merkezî konumunun nasıl karşılaştırılabileceğini gördük. Bu altbölümde ise, aynı soru için, iki anakütleden çekilmiş bağımsız rassal örneklemler varken kullanılabilecek bir sınama göstereceğiz.

Çizelge 10.3'te, öğrencilerin giriş düzeyindeki finansman ve muhasebe derslerini çalışmak için bir haftada harcadıklarını söyledikleri süreler saat cinsinden verilmiştir. Veriler on finansman ve oniki muhasebe öğrencisinden oluşan bağımsız rassal örneklemlerden elde edilmiştir.

Sıfır önsavımız, iki anakütle dağılımının merkezî konumu aynıdır biçimindedir. Bu önsavı sınamanın birinci aşaması olarak iki örneklem bir araya getirilip gözlemler küçükten büyüğe doğru dizilir, aynı sıra numarasına rastlayanlar için daha önceki işlem uygulanır. Bu sıra numaraları Çizelge 10.3'te verilmiştir. Şimdi, sıfır önsavı doğruysa, iki örneklemin sıra numaraları ortalamasının birbirine yakın olmasını bekleriz. Bu örnekte, finansman öğrencilerinin sıra numaralarının ortalaması 9.35 iken muhasebe öğrencilerininki 13.29'dur. Önsav sınaması yaparken her zaman olduğu gibi, sıfır önsavı doğruyken, bu büyüklükte bir farkın gerçleşebilirliğinin ne kadar olduğunu sormak isteriz.

Dikkat ederseniz her iki sıra numarası toplamını hesaplamak gerekmez, çünkü biri bilinirse öbürü bulunabilir. Örneğimizde, sıra numaralarının toplamı 1'den 22'ye kadar tamsayılar toplamına —yani 253'e— eşit çıkmalıdır. Öyleyse, önsavımızın herhangi bir sınaması, bu sıra numarası toplamlarından yalnız birini temel alabilir.

ÇİZELGE 10.3 Öğrencilerin giriş düzeyindeki finansman ve muhasebe derslerini çalışmak için bir haftada harcadıkları saat sayısı

FİNANSMAN	(SIRA NO.)	MUHASEBE	(SIRA NO.)
10	(10)	13	(17.5)
6	(2)	17	(22)
8	(4.5)	14	(19)
10	(10)	12	(15.5)
12	(15.5)	10	(10)
13	(17.5)	9	(7)
11	(13)	15	(20)
9	(7)	16	(21)
5	(1)	11	(13)
11	(13)	8	(4.5)
		9	(7)
		7	(3)
Sıra no. toplamı	93.5	Sıra no. toplamı	159.5

Genel olarak, ilk anakütleden n_1, ikinciden n_2 gözlemimiz varken, ilk anakütledeki gözlemlerin sıra numaraları toplamına R_1 diyelim. Bu durumda Mann-Whitney istatistiği şöyle tanımlanır:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

İki anakütle dağılımının merkezî konumlarının aynı olduğu sıfır önsavını sınarken, merkezî konumlarında görülebilecek fark dışında, iki anakütle dağılımının birbirinin aynı olduğunu varsayıyoruz. Bu durumda, sıfır önsavı doğruyken, U rassal değişkeninin ortalamasının

$$E(U) = \mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$$

varyansının

$$\text{Var}\,(U) = \sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

olduğu gösterilebilir. Üstelik, sıfır önsavı doğruyken, örneklem gözlemlerinin sayısı arttıkça, U'nun dağılımı hayli hızlı bir biçimde normale yaklaşır.[6] Öyleyse, orta boy örneklemler için

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

rassal değişkeninin dağılımı standart normale iyice yakındır. Bu da sınamaların, aşağıdaki çerçevede gösterildiği gibi, kolayca uygulanmasını sağlar.

Mann-Whitney Sınaması

İki anakütleden çekilmiş n_1 ve n_2 gözlemli bağımsız rassal örneklemlerimiz olsun. Örneklem gözlemleri bir araya getirilip sıraya dizilirse, ilk anakütle için sıra numaraları toplamı R_1 ile gösterildiğinde, Mann-Whitney sınama istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

İki anakütle dağılımının, merkezî konumlarında görülebilecek fark dışında, bütünüyle aynı olduğu varsayılmaktadır. İki anakütle dağılımının aynı merkezi konumda olduğu sıfır önsavının aşağıdaki sınamalarında anlamlılık düzeyi α olur:

[6] Her örneklem on ya da daha çok gözlem içerdiğinde yaklaşıklık yeterlidir.

(i) Karşı önsav, anakütle 1'in konumu anakütle 2'ninkinden yüksektir diyen tek-yanlı bir önsavsa, karar kuralı şudur:

$$\frac{U-\mu_U}{\sigma_U} < -z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) Karşı önsav, anakütle 1'in konumu anakütle 2'ninkinden düşüktür diyen tek-yanlı bir önsavsa, karar kuralı şudur:

$$\frac{U-\mu_U}{\sigma_U} > z_\alpha \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) Karşı önsav, iki anakütle dağılımının konumları farklıdır diyen iki-yanlı bir önsavsa, karar kuralı şudur:

$$\frac{U-\mu_U}{\sigma_U} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{U-\mu_U}{\sigma_U} > z_{\alpha/2} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Şimdi bu altbölümde açıklanan örneğimize dönelim. Çalışma sürelerinin dağılımları aynı merkezî konumdadır diyen sıfır önsavım, iki-yanlı karşı önsavla sınamak istediğimizi düşünelim. Bu verilerle şunları biliyoruz:

$$n_1 = 10 \qquad n_2 = 12 \qquad R_1 = 93.5$$

Öyleyse Mann-Whitney istatistiğinin gözlenen değeri de şöyle olur:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$= (10)(12) + \frac{(10)(11)}{2} - 93.5 = 81.5$$

Sıfır önsavı doğruyken, bu istatistiğin ortalaması

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{(10)(12)}{2} = 60$$

ve varyansı

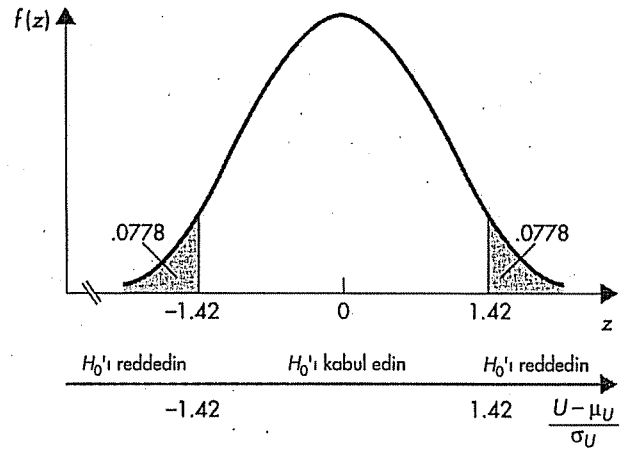
$$\sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{(10)(12)(23)}{12} = 230$$

olur. Karar kuralı ise

$$\frac{U-\mu_U}{\sigma_U} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{U-\mu_U}{\sigma_U} > z_{\alpha/2}$$

ise H_0'ı reddedin biçimindedir. Burada

$$\frac{U-\mu_U}{\sigma_U} = \frac{81.5-60}{\sqrt{230}} = 1.42$$



ÇİZİM 10.3 İki anakütle dağılımının merkezi konumları aynıdır diyen sıfır önsavı doğru iken $Z = \dfrac{U-\mu_U}{\sigma_U}$ dağılımı ve bu önsavın iki-yanlı karşı önsavla 0.1556 anlamlılık düzeyinde sınanması için karar kuralı

bulunur. Şimdi, Ek Çizelge 3'ten, $z_{\alpha/2}$'nin 1.42 değerine karşılık gelen $\alpha/2$ değeri 0.0778'dir, öyleyse bunun karşılığı olan α değeri 0.1556 olur. Demek ki sıfır önsavı, %15.56'dan büyük bütün düzeylerde, Çizim 10.3'te gösterildiği gibi, iki-yanlı karşı önsav lehine reddedilebilir. Öyleyse bu veriler, muhasebe ve finansman çalışma süresi dağılımlarının merkezî konumları aynıdır diyen sıfır önsavını reddetmek için pek öyle güçlü kanıt içermemektedir. Öğrencilerin bu derslerden birini ötekilerden daha çok çalıştıkları yargısına fazla bir destek yoktur.

ÖRNEK 10.3

Yönetimin kazanç kestirimlerini açıklayan şirketlerin başarımı ile açıklamayanlarınkini karşılaştırmak üzere tasarlanan bir çalışmada, her iki anakütleden seksener şirketten oluşan bağımsız rassal örneklemler alınmıştır.[7] 160 şirketten her biri için, önceki on dönemin kazanç artış oranlarının değişkenliği ölçülmüş, bu değişkenlikler sıraya konmuştur. Yönetimin kazanç kestirimini açıklamayan şirketlerin sıra numaraları toplamı 7,287'dir. Bu iki tür şirket için, kazanç değişkenliği anakütle dağılımlarının merkezi konumları aynıdır diyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

[7] Bu örnek, B. Jaggi, P. Grier, "A comparative analysis of forecast disclosing and nondisclosing firms," *Financial Management, 9*, no. 2 (1980), 38-43'teki bulgulardan yararlanılarak düzenlenmiştir.

$n_1 = 80, n_2 = 80, R_1 = 7{,}287$ olduğuna göre, Mann-Whitney istatistiğinin hesaplanan değeri

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = (80)(80) + \frac{(80)(81)}{2} - 7{,}287 = 2{,}353$$

olur. Sıfır önsavı doğruyken, Mann-Whitney istatistiğinin ortalaması

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{(80)(80)}{2} = 3{,}200$$

ve varyansı

$$\sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{(80)(80)(161)}{12} = 85{,}867$$

olup, karar kuralı

$$\frac{U - \mu_U}{\sigma_U} < -z_{\alpha/2} \qquad \text{ya da} \qquad \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} > z_{\alpha/2}$$

ise H_0'ı, iki-yanlı karşı önsav lehine reddedin biçimindedir. Burada

$$\frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{2{,}353 - 3{,}200}{\sqrt{85{,}867}} = -2.89$$

bulunur. Ek Çizelge 3'ten, $z_{\alpha/2}$'nin 2.89 değerine karşılık gelen $\alpha/2$'nin değeri 0.0019 bulunur, öyleyse α, 0.0038'dir. Demek ki, %0.38'den büyük her düzeyde bu sıfır önsavı reddedilebilir. Öyleyse bu veriler, yönetimin kazanç kestirimlerini açıklayan şirketlerle açıklamayan şirketlerin kazanç artış oranlarının anakütledeki değişkenlik dağılımlarının merkezî konumlarının aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavına karşı çok güçlü kanıtlar içermektedir. Sıfır önsavının tersine, genelde, bir grup şirketin kazanç değişkenliği öbür gruptakinden daha yüksek görünmektedir.

Bize yalnızca sıra numaraları değil de gerçekleşen veriler verilseydi, sıfır önsavını, Altbölüm 9.6'nın yöntemleriyle sınayabilirdik. Ama Mann-Whitney sınamasını kullanarak, *anakütlenin normalliği varsayımını yapmadan*, sıfır önsavının reddedilebileceğini bulduk.

10.5 TARTIŞMA

Bu bölümde ele alınan katsayısal olmayan sınamalar, halen kullanımda olan katsayısal olmayan süreçlerin çok küçük bir altkümesidir. Katsayısal olmayan öteki sınamalardan kimilerini daha sonraki bölümlerde göreceğiz.

Bu bölümün sınamalarını, iki anakütle ortalamasının eşitliğini, *anakütle dağılımlarının normal olduğunu varsayarak* sınadığımız, Altbölüm 9.6'dakilerle karşılaştırmak öğretici olabilir. Bu bölümde geliştirilen sınamalar, bu sıfır önsavının, iki anakütle dağılımının yalnızca aynı biçimde olduğunu varsayarak yapılan sınamaları gibi de düşünülebilir. Bu da katsayısal olmayan sınamaların şu önemli üstünlüğünü ortaya çıkarmaktadır: Katsayısal olmayan sınamalar, arkadaki anakütle dağılımlarına ilişkin çok değişik varsayımlar altında da geçerlidir.

Katsayısal olmayan yöntemlerin şu üstünlükleri de vardır:

1. Çoğu zaman kolayca hesaplanabilirler, dolayısıyla sınamalar çabucak yapılabilir. Bu özellik özellikle işaret sınaması için doğrudur.
2. Araştırmacının elindeki veriler, bu sınamalara doğal olarak uyan biçimde olabilir. Sözgelimi, bir ürün karşılaştırma çalışmasında bütün bilinen hangi ürünün daha çok beğenildiği ise, işaret sınaması hemen uygulanabilir. Çoğu uygulamada veriler, yalnızca sıralama biçimindedir, dolayısıyla doğal olarak Wilcoxon sınaması ya da Mann-Whitney sınaması gibi süreçlerin uygulanmasına yol açarlar.
3. Nasıl aritmetik ortalama aşırı uçtaki gözlemlerin etkisine büyük ölçüde açıksa, Altbölüm 9.6'daki t sınamasına dayanan çıkarsamalar da öyledir. Sıra numaralarına dayanan sınamalar ise, tersine, alışılmadık ölçüde dışadüşen örneklem değerlerine fazla ağırlık tanımaz.

Anakütlenin normalliği varsayımı yaklaşık doğruyken, bu varsayıma dayanan sınamaların, sıralamalara dayanan sınamalara göre, daha güçlü olması elbette beklenir, çünkü ikinci tür sınamalar verilerdeki bilginin bir bölümünü kullanmaz. Ancak, aslında, en azından orta boy örneklemlerde, Wilcoxon ve Mann-Whitney gibi sınamalar, anakütle dağılımı normalken, rakipleri t sınamasından birazcık daha az güçlüdür. Bu nedenle, daha geniş kullanılma olanaklarıyla birlikte, katsayısal olmayan bu sınamalar çok tutulurlar. Dahası, anakütle dağılımı normalden önemli ölçüde sapmışken, katsayısal olmayan sınamalar, normal-kuramı sınamalarına göre çok daha güçlü olabilirler.

Ne var ki, katsayısal olmayan sınamaların, karmaşık model kurma içeren sorunlara genişletilmesi bir hayli zordur. Bu nedenle de, Bölüm 9'un geliştirilmeleri çok daha basit olan geleneksel süreçleri, temel istatistik çözümlemeleri arasında yerlerini korur.

ALIŞTIRMALAR

7. Alıştırma 1'in verilerini çözümlemek için Wilcoxon sınamasını kullanın. Bulgularınızı tartışın.
8. Göz bağlanarak yapılan bir tat denemesinde, on öğrencilik rassal bir örneklemden, biri yerli biri ithal iki marka biranın niteliğini değerlendirmesi istenmiştir. Değerlemeler bir (kötü) ile on (kusursuz) arasında bir ölçekte yapılmıştır. Aşağıdaki çi-

zelge bulguları göstermektedir. Çift farkları dağılımının orta noktasının 0 olduğu önsavını, ithal biranın, bira içen bütün öğrenciler anakütlesinde daha çok beğenildiği biçimindeki karşı önsavla sınamak için Wilcoxon sınamasını kullanın.

ÖĞRENCİ	YERLİ	İTHAL	ÖĞRENCİ	YERLİ	İTHAL
A	2	6	F	4	8
B	3	5	G	3	9
C	7	6	H	4	6
D	8	8	I	5	4
E	7	5	J	6	9

9. Bir üniversite yerleşkesinde onaltı birinci sınıf öğrencisi, eğitim geçmişleri —lisedeki sınıf sıralamaları ve giriş puanlarıyla ölçülmüştür— ve toplumsal konumları birbirine elden geldiğince benzeyen sekiz çift olacak biçimde eşleştirilmiştir. Bir çiftin kendi arasındaki başlıca fark, birinin o eyaletten, ötekinin başka eyaletten gelmiş olmasıdır. Üniversitedeki ilk yılın sonunda bu öğrencilerin not ortalamaları, aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibidir. Bu verileri çözümlemek için Wilcoxon sınamasını kullanın. Sınama bulgularının ne anlama geldiğini tartışın.

ÇİFT	EYALET İÇİ	EYALET DIŞI	ÇİFT	EYALET İÇİ	EYALET DIŞI
A	3.4	2.8	E	3.9	3.7
B	3.0	3.1	F	2.3	2.8
C	2.4	2.7	G	2.6	2.6
D	3.8	3.3	H	3.7	3.3

10. Giriş düzeyindeki istatistik ve muhasebe derslerini yeni tamamlayan işletmecilik öğrencilerinden rassal seçilmiş kırk kişilik bir örneklemden, bu derslerin ilgi çekiciliğini bir (çok sıkıcı) ve on (çok ilginç) arasındaki bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Puan çiftleri arasındaki kırk fark, mutlak değerlerine göre sıraya dizilmiştir. İki sıra numaraları toplamından küçük olanı, 281, muhasebeyi daha ilginç bulanlara ilişkindir. İşletmecilik öğrencileri anakütlesinde bu derslerin eşit ilginçlikte değerlendirildiğini söyleyen sıfır önsavını, istatistik dersinin daha ilginç bulunduğu karşı önsavla sınayın.

11. Bir danışman, toplam kalite yönetimi programı uygulamasının çalışanların iş tatmini üzerindeki etkileriyle ilgilenmektedir. Programın başlamasından üç ay önce, otuz çalışandan oluşan rassal bir örneklemden tatmin düzeylerini bir (hiç tatmin edici değil) ile on (çok tatmin edici) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Aynı örneklem üyelerinden aynı değerlemeyi bir de program başladıktan üç ay sonra yapmaları istenmiştir. Değerleme çiftlerinin otuz farkı alınmış, mutlak değerlerine göre sıralanmıştır. Sıra numaraları toplamından küçük olanı, 169, programın başlamasından önce daha çok tatmin olanlara ilişkindir. Bu bulgulardan nasıl bir sonuca varılabilir?

12. Videosu olan seksen kişi rassal bir örnekleme seçilmiştir. Her örneklem üyesinden, televizyondan kendi kaydettiği yayınlardan ve satın aldığı ya da kiraladığı kasetlerden bir ay içinde ne kadar seyrettiğini değerlendirmesi istenmiştir. Seyir sürelerinin seksen farkı hesaplanıp mutlak değerlerine göre sıralanmıştır. Sıra numaraları top-

lamından küçük olanı, 1,502, televizyondan yapılan kayıtlara ilişkindir. Bu örneklem bulgularının ne anlama geldiğini tartışın.

13. Bir şirket genel müdürlükteki kadrolar için hem pazarlama, hem finansman mezunlarıyla görüşme yapmaktadır. On pazarlamacıdan oluşan bir rassal örneklem ile ondört finansmancıdan oluşan bağımsız bir örneklem, şirketin üst yöneticilerince yoğun bir görüşmeden ve sınamadan geçirilmiştir. Daha sonra adaylar, aşağıdaki çizelgedeki gibi, 1'den (işe en uygun) 24'e kadar numaralanmıştır. Şirketin üst yöneticilerinin işe almada pazarlama ve finansman mezunları arasında bir ayırım yapmadığı sıfır önsavını, finansmancıların üstün tutulduğu biçimindeki karşı önsavla sınayın.

1. finansman	9. pazarlama	17. pazarlama
2. finansman	10. pazarlama	18. pazarlama
3. pazarlama	11. finansman	19. finansman
4. finansman	12. finansman	20. finansman
5. finansman	13. pazarlama	21. finansman
6. pazarlama	14. finansman	22. pazarlama
7. finansman	15. finansman	23. pazarlama
8. pazarlama	16. finansman	24. finansman

14. Rassal bir örnekleme giren onbeş erkek öğrenci ile bağımsız bir rassal örneklemdeki onbeş kız öğrenciden, bir güzel yazı dersinin sonunda birer deneme yazmaları istenmiştir. Bu denemeler bir profesör tarafından 1'den (en iyi) 30'a (en kötü) kadar sıralanmıştır. Sıra numaraları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

ERKEKLER:	26	24	15	16	8	29	12	6	18
	11	13	19	10	28	7			
KIZLAR:	22	2	17	25	14	21	5	30	3
	9	4	1	27	23	20			

Genelde iki cinsin eşit değerlendirildiği sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

15. Bir bülten yatırım fonlarını değerlendirmektedir. En yüksek getirili on ve en düşük getirili on fon bağımsız örneklemlere seçilmiştir. Aşağıdaki sayılar, bu fonların bir yıl sonraki getiri yüzdeleridir.

EN YÜKSEK:	8.1	12.7	13.9	2.3	16.1	5.4	7.3
	9.8	14.3	4.1				
EN DÜŞÜK:	3.5	14.0	11.1	4.7	6.2	13.3	7.0
	7.3	4.6	10.0				

Getiri oranlarının anakütle dağılımlarının merkezî konumları aynıdır diyen sıfır önsavını, en yüksek getirili fonların ötekilere göre gelecekte de daha yüksek getiri sağlama eğilimi olduğu yolundaki karşı önsavla sınayın.

16. Rassal bir örnekleme giren elli öğrenciye, yönetimin, futbol takımını çalıştıracak doğru kişiyi üniversiteye çekebilmek için kaç para ödemeyi göze alması gerektiği sorulmuştur. Elli öğretim üyesinden oluşan bağımsız bir rassal örnekleme de aynı

soru sorulmuştur. 100 tane ödeme tutarı bir araya getirilip (en düşük ödemeye 1 diyerek) sıraya konmuştur. Öğretim üyelerinin sıra numaraları toplamı 2,024'tür. Ödeme önerileri konusunda öğrencilerle öğretim üyelerinin dağılımlarının merkezî konumları bakımından bir fark yoktur diyen sıfır önsavını, bir futbol çalıştırıcısını üniversiteye çekmek için daha yüksek ödemeden yana oldukları karşı önsavıyla sınayın.

17. Avustralya şirketlerinden denetim raporları temiz çıkan 120 tanesinin rassal bir örnekleminin ön kârlılık raporunu yayımlamaları için yıl sonundan bu yana geçen süre, denetim raporlarında düzeltme istenen bağımsız bir rassal örneklemdeki seksenaltı şirketin benzer süresiyle karşılaştırılmıştır.[8] 206 şirketin kullandığı süreler bir araya getirilip, en kısa süreye 1 verilerek sıralanmıştır. Düzeltme istenen şirketlerin sıra numaraları toplamı 9,686'dır. İki anakütle dağılımının merkezî konumlarının aynı olduğu sıfır önsavını, düzeltme istenen şirketlerin ön kârlılık raporunu yayımlamada daha uzun süre kullandıklarını söyleyen karşı önsavla sınayın.

18. Önde gelen iki işletmecilik fakültesinin MBA mezunlarının ilk işe giriş ücretleri karşılaştırılmıştır. Her iki fakülteden otuzar öğrencilik bağımsız rassal örneklemler alınmış, işe başlama ücretleri bir araya getirilip sıralanmıştır. Bu fakültelerden birinin öğrencileri için sıra numaraları toplamı 1,243 çıkmıştır. Anakütle dağılımlarının merkezî konumları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

19. Bir sınamanın katsayısal olmadığını söylemek ne anlama gelir?

20. Katsayısal bir sınama yerine katsayısal olmayan bir sınamayı kullanmak isteyeceğiniz bir işletmecilik sorusu için gerçekçi bir örnek düzenleyin.

21. Rassal bir örneklemdeki oniki analistten yedisi ABD'deki araba satışlarının gelecek yıl bu yıldakinden önemli ölçüde daha çok, ikisi önemli ölçüde daha az olacağı, ötekiler de aşağı yukarı aynı kalacağı kanısındadır. Bu verilerle nasıl bir sonuca varabilirsiniz?

22. Rassal bir örneklemdeki onaltı döviz kuru analistinden sekizi Japon Yeni'nin bu yıl çok iyi, beşi kötü bir yatırım aracı olacağını, üçü de bu konuda kesin bir şey söylenemeyeceğini belirtmiştir. Bu verilerden nasıl bir sonuç çıkarabilirsiniz?

23. Rassal bir örneklemdeki 100 üniversite öğrencisinden otuzbeşi kendi anne-babasından daha yüksek, kırküçü daha düşük, yirmi ikisi de onlar kadar bir yaşam düzeyine ulaşabileceğini beklemektedir. Bu veriler, öğrenci anakütlesinin çoğunluğunun, ana-babalarınınkinden daha yüksek değil de daha düşük bir yaşam düzeyi beklediklerinin güçlü bir kanıtı olabilir mi?

24. Rassal bir örneklemdeki 120 işletmecilik profesöründen kırksekizi öğrencilerin çözümsel becerilerinin son on yılda arttığı, otuzbeşi azaldığı, otuzyedisi ise pek değişmediği kanısındadır. Örneklem verilerinin bütün işletmecilik profesörlerinden

---

[8] Bulgular, G. P. Whittred, "Audit qualification and the timeliness of corporate annnual reports," *Accounting Review, 55* (1980), 563-77'den alınmıştır.

çoğunun, öğrencilerin çözümsel becerilerinin azalmak yerine arttığına inandığı konusunda güçlü bir kanıt oluşturup oluşturmadığını değerlendirin.

25. Rassal bir örnekleme seçilen on şirket analistinden, kendi şirketlerinin geleceği ile genel olarak ekonominin geleceğini, bu yıl içinde, 1 (çok kötü) ile 10 (çok iyi) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Elde edilen bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Wilcoxon sınamasını kullanarak, şirket analistlerinin genel olarak kendi şirketlerinin geleceğini, ekonominikinden daha iyimser değerlendirdikleri görüşünü tartışın.

ANALİST	KENDİ ŞİRKETİ	GENEL EKONOMİ	ANALİST	KENDİ ŞİRKETİ	GENEL EKONOMİ
1	8	8	6	6	9
2	7	5	7	7	7
3	6	7	8	5	2
4	5	4	9	4	6
5	8	4	10	9	6

26. Genel yönetici kadrolarına başvuran işletmecilik fakültesi mezunları için dokuz çift varsayımsal profil oluşturulmuştur. Her çiftte, bir adayın erkek, öbürünün kız olması dışında bu profiller aynıdır. Bu mezunların işe girme görüşmeleri sırasında işe uygunlukları, 1 (düşük) ile 10 (yüksek) arasında bir ölçekte değerlendirilmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bu verileri Wilcoxon sınamasını kullanarak çözümleyin.

GÖRÜŞME	ERKEK	KIZ	GÖRÜŞME	ERKEK	KIZ
1	8	8	6	9	9
2	9	10	7	5	3
3	7	5	8	4	5
4	4	7	9	6	2
5	8	8			

27. Bir çalışmada denetleme kurulu olan ve olmayan şirketler karşılaştırılmıştır.[9] Her iki tür şirket için yöneticilerin ortaklık derecesi, yönetim kurulundakilerin pay senedi sayısının toplam pay senedi sayısına oranıyla ölçülmüştür. Örneklemde, yöneticilerin ortaklık derecesi, denetim kurulu olmayan şirketlerde genelde daha yüksektir. Bunun istatistik anlamlılığını sınamak için Mann-Whitney U istatistiği hesaplanmıştır. Daha sonra $(U - \mu_U)/\sigma_U$, 2.01 bulunmuştur. Bu bulgudan nasıl bir sonuç çıkarırsınız?

28. Bir borsa analisti yılbaşında alınacak ve satılacak pay senetlerinin adlarını yazmıştır. Alınacaklar arasında rassal seçilen bir örneklemdeki on pay senedinin o yılki getiri yüzdeleri şöyle olmuştur:

[9] M. E. Bradbury, "The incentives for voluntary audit committee formation," *Journal of Accounting and Public Policy, 9* (1990), 19-36.

9.6	5.8	13.8	17.2	11.6
4.2	3.1	11.7	13.9	12.3

Satılacaklar arasından rassal seçilen bağımsız bir örneklemdeki on pay senedinin o yılki getiri yüzdeleri şöyle olmuştur:

–2.7	6.2	8.9	11.3	2.1
3.9	–2.4	1.3	7.9	10.2

Bu verileri yorumlamak için Mann-Whitney sınamasını kullanın.

29. İş yaşamındaki oniki teknik üniversite mezunundan oluşan rassal bir örneklemde ilk işe giriş ücretleri (bin dolar cinsinden) aşağıdaki gibidir:

26.2	29.3	31.3	28.7	27.4	25.1
26.0	27.2	27.5	29.8	32.6	34.6

30. Bağımsız bir rassal örneklemdeki oniki vakıf üniversitesi mezununun benzer değerleri şöyledir:

25.3	28.2	29.2	27.1	26.8
26.5	30.7	31.3	26.3	24.9

Mann-Whitney sınamasını kullanarak bu verielri çözümleyin, bulgularınızı yorumlayın.

31. Alıştırma 29'daki veriler, Bölüm 9'da tartışılan bir sınama kullanılarak da çözümlenebilir. Hangi sınamayla? Bu özel durumda hangi sınamayı kullanırdınız? Neden?

BÖLÜM 11

Uyumun İyiliği Sınamaları ve Çapraz Çizelgeler

11.1 UYUMUN İYİLİĞİ SINAMASI

Bu bölümde sınama istatistiklerinin, ki-kare dağılımının çizelgelenmiş değerleriyle karşılaştırılmasını gerektiren kimi sınamalar göreceğiz. Bu türün en yalın sınamasını sayısal bir örnekle göstererek işe başlayacağız. Bir çalışmada rassal bir örnekleme giren otuzüç denek, üç içeceği satın alırken gözlenmiştir.[1] Bu deneklerden onbeşi üç çeşitten birer tane, onu bir çeşitten iki, başka bir çeşitten bir tane, sekizi de aynı çeşitten üç tane seçmiştir. Bu bilgi, örneklem üyelerinin üç olanaklı öbekteki sayılarını belirten Çizelge 11.1'de sergilenmiştir.

Daha genel olarak, K tane öbeğe ayrılabilecek n gözlemli bir rassal örneklemimiz olabilir. Her bir öbeğe düşen gözlem sayıları $O_1, O_2, \ldots, O_K$ ise, durum Çizelge 11.2'de gösterilmiştir.

Örneklem verileri, bir gözlemin her bir öbeğe düşme olasılığını belirten sıfır önsavını sınamada kullanılacaktır. Örneğimizdeki sıfır önsavı (H_0), rassal bir deneğin bir, iki ya da üç çeşit seçme şansını eşit görebilir. Öyleyse bu sıfır önsavı, bir gözlemin üç öbekten birine düşme olasılığını üçtebir olarak belirtmektedir. Bu önsavı sınamanın doğal yolu, *gözlenen* örneklem sayılarını, sıfır önsavı doğruyken *beklenen* sayılarla karşılaştırmaktır. Örneğimizde toplam otuzüç örneklem gözlemi olduğuna göre, bu sıfır önsavı doğruyken her öbeğin beklenen denek sayısı $(33)(1/3) = 11$ olur. Bu bilgi de Çizelge 11.3'te özetlenmiştir.

---

[1] I. Simonson, "The effect of purchase quantity and timing on variety-seeking behavior," *Journal of Marketing Research, 27* (1990), 150-62.

ÇİZELGE 11.1 Üç içecek alınırken seçilen çeşit sayısı

ÖBEK (ÇEŞİT SAYISI)	1	2	3	Toplam
DENEK SAYISI	8	10	15	33

ÇİZELGE 11.2 n gözlemin K öbeğe ayrılması

ÖBEK	1	2	...	K	Toplam
DENEK SAYISI	O_1	O_2	...	O_K	n

ÇİZELGE 11.3 Üç içecek alınırken seçilen çeşitlerin gözlenen ve beklenen sayıları

ÖBEK (ÇEŞİT SAYISI)	1	2	3	Toplam
GÖZLENEN DENEK SAYISI	8	10	15	33
OLASILIK (H_0 DOĞRUYKEN)	1/3	1/3	1/3	1
BEKLENEN DENEK SAYISI (H_0 DOĞRUYKEN)	11	11	11	33

Daha genel olarak, K tane öbek varken, sıfır önsavı bir gözlemin öbeklere düşme olasılıklarını $p_1, p_2, \ldots, p_K$ olarak belirlesin. Bu olasılıkların bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olduklarını varsayıyoruz, yani her örneklem gözlemi öbeklerden birine girmeli, birden çok öbeğe de girmemelidir. Bu durumda önsavdaki olasılıklarım toplamı 1'e eşit olmalıdır:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_K = 1$$

Demek ki örneklemde n gözlem varsa, sıfır önsavı doğruyken, her bir öbekte beklenen sayı

$$E_i = np_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, K)$$

olacaktır. Bu da Çizelge 11.4'te gösterilmiştir.

Her bir örneklem gözleminin olanak içindeki her öbeğe düşme olasılıklarını belirleyen bir sıfır önsavımız var. Örneklem gözlemleri bu önsavı sınamak için kullanılacaktır. Eğer her bir öbekte gözlenen örneklem değerlerinin sayısı, sıfır

ÇİZELGE 11.4 n gözlem ve K öbek varken gözlenen ve beklenen sayılar

ÖBEK	1	2	...	K	Toplam
GÖZLENEN SAYI	O_1	O_2	...	O_K	n
OLASILIK (H_0 DOĞRUYKEN)	p_1	p_2	...	p_K	1
BEKLENEN SAYI (H_0 DOĞRUYKEN)	$E_i = np_i$	$E_i = np_i$	...	$E_i = np_i$	n

önsavı doğruyken beklenenlere çok yakınsa, bu olgu o önsavı destekler. Böyle durumlarda verilerin, olasılıkların varsayılan anakütle dağılımına yakın bir *uyum* gösterdiğini söyleyebiliriz. Sıfır önsavı sınamalarımız, bu uyumun ne kadar yakın olduğunun değerlendirilmesine dayanır ve genellikle **uyumun iyiliği** diye adlandırılır.

Şimdi, sıfır önsavını sınamak için, gözlenen ile beklenen arasındaki farkların büyüklüğüne bakmamız doğaldır. Bu farkların mutlak değeri ne kadar büyükse, sıfır önsavından o kadar kuşkuya düşeriz. Sıfır önsavı doğruyken ve örneklem orta büyüklükteyken,[2]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (11.1.1)$$

ile ilişkili rassal değişkenin, iyi bir yaklaşıklıkla $(K-1)$ serbestlik dereceli kikare dağılımına uyduğu gösterilebilir. Sezgisel olarak, serbestlik derecesi sayısı, O_i'ler toplamının n etmesi gereğinden kaynaklanır. Demek ki örneklem üyelerinin sayısı n'yi ve öbeklerden herhangi $(K-1)$ tanesine düşen gözlem sayılarını biliyorsak, kaçınılmaz olarak K'inci öbekteki sayıyı da biliriz. Gözlenen sayılar, beklenen sayılardan önemli ölçüde farklıysa —yani (11.1.1) istatistiği alışılmadık biçimde büyükse— sıfır önsavını reddetmek isteriz. Uygun sınama çerçevede gösterilmiştir.

Uyumun İyiliği Sınaması

Her biri K tane öbekten yalnızca birine düşen n gözlemli bir rassal örneklem verilmiş olsun. Her öbekte gözlenen sayıları $O_1, O_2, \ldots, O_K$ ile gösterelim. Bir sıfır önsavı (H_0), bir gözlemin bu öbeklerden her birine düşme olasılıklarını $p_1, p_2, \ldots, p_K$ olarak belirlemişse, H_0 doğruyken, bu öbeklerdeki beklenen sayılar şöyle bulunur:

$$E_i = np_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, K)$$

H_0'ın, α anlamlılık düzeyinde, belirlenen olasılıkların doğru olmadığını söyleyen karşı önsavla sınanması şu karar kuralını temel alır:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} > \chi^2_{K-1,\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

[2] Beklenen değerlerin (E_i) her biri en az 5 ise yaklaşıklık iyidir.

Burada $\chi^2_{K-1,\alpha}$,

$$P(\chi^2_{K-1} > \chi^2_{K-1,\alpha}) = \alpha$$

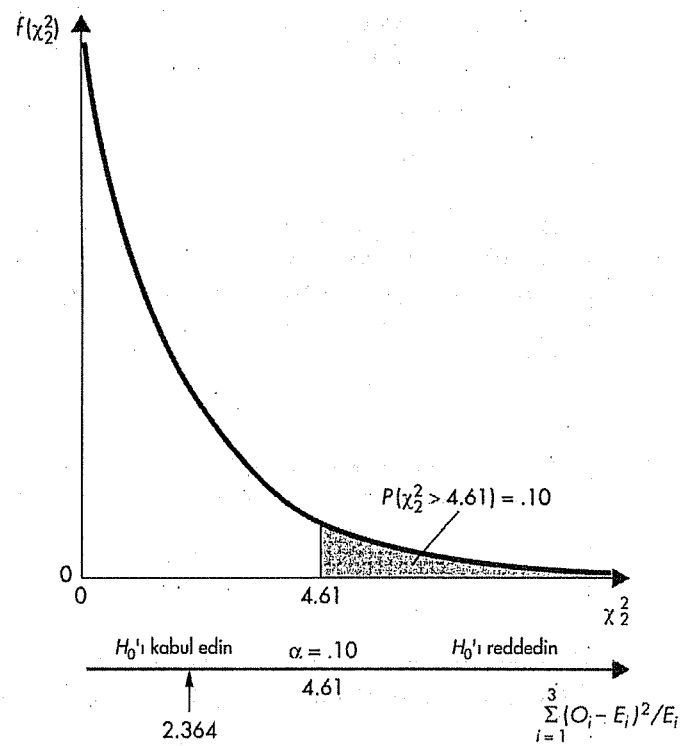
eşitliğini sağlayan sayıdır, χ^2_{K-1} rassal değişkeni ise $(K-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyar.

Bu sınamayı açıklayabilmek için, Çizelge 11.3'teki, seçilmiş içeceklerin çeşit sayısına ilişkin verilere dönelim. Sıfır önsavımıza göre üç öbeğin olasılıkları aynıdır. Bu sıfır önsavının sınanması şuna dayanır:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(8-11)^2}{11} + \frac{(10-11)^2}{11} + \frac{(15-11)^2}{11} = 2.364$$

ÇİZİM 11.1 H_0 doğruyken, $\chi^2_2 = \sum_{i=1}^{3}(O_i - E_i)^2/E_i$ 'nin dağılımı



Öbek sayısı $K = 3$'tür, öyleyse ki-kare dağılımının serbestlik derecesi $K - 1 = 2$'dir. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{2,0.10} = 4.61$$

Dolayısıyla, Çizim 11.1'de gösterilen karar kuralımıza göre, %10 anlamlılık düzeyinde sıfır önsavı reddedilemez. Bu veriler, rassal seçilmiş bir deneğin bir, iki ya da üç çeşit seçmesi şansının aynı olduğunu söyleyen önsava karşı güçlü kanıtlar içermemektedir.

ÖRNEK 11.1

Bir doğal gaz dağıtım şirketinin eski kayıtlarından, kış sonunda müşterilerin %80'inin hiç borcunun olmadığı, %10'unun bir aylık, %6'sının 2 aylık, %4'ünün de 2 aylıktan çok borcu olduğu saptanmıştır. Bu kış sonunda alınan 400 hesaplık bir rassal örneklemden 287 hesabın borçsuz, 49'unun bir aylık, 30'unun 2 aylık, 34'ünün de 2 aylıktan çok borcu olduğu bulunmuştur. Bu veriler, geçen yıllardaki borç yapısının bu yıl da sürdüğünü gösterir mi?

Bu kışın oranları eski yıllardakilerle uyumludur diyen sıfır önsavı doğruyken, dört öbeğin olasılıkları sırasıyla 0.8, 0.1, 0.06, 0.04 olur. Bu önsav ile, 400 hesaplık bir örneklem için, her öbekte bulunması beklenen sayılar şöyle bulunur:

$$400(0.8) = 320 \qquad 400(0.1) = 40 \qquad 400(0.06) = 24 \qquad 400(0.04) = 16$$

Böylelikle aşağıdaki çizelgede gösterilen gözlenen ve beklenen sayıları elde ederiz.

BORÇLU AY SAYISI	0	1	2	2'den çok	Toplam
GÖZLENEN SAYI	287	49	30	34	400
OLASILIK (H_0 DOĞRUYKEN)	0.80	0.10	0.06	0.04	1
BEKLENEN SAYI (H_0 DOĞRUYKEN)	320	40	24	16	400

Sıfır önsavının (H_0) sınanması şuna dayanır:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(287-320)^2}{320} + \frac{(49-40)^2}{40} + \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(34-16)^2}{16} = 27.178$$

Öbek sayısı $K = 4$'tür, öyleyse serbestlik derecesi $K - 1 = 3$'tür. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{3,0.005} = 12.84$$

27.178, 12.84'ten çok büyük olduğundan sıfır önsavımn, %0.5 anlamlılık düzeyinde bile reddedileceği çok açıktır. Bu verilerin, bu yılki doğal gaz ödemelerinin gecikme yapısının geçmiş yıllardan farklı olduğuna ilişkin güçlü bir

kanıt içerdiği kesindir. Çizelgedeki sayıların incelenmesiyle, gecikme süresi daha uzun hesapların sayısı geçmişe oranla bu yıl daha çoktur.

Bu altbölümü bir uyarıyla bitirelim: (11.1.1) sınama istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan sayılar, her öbekteki *gözlenen ve beklenen sayılar*dır. Bunlar yerine, sözgelimi her öbekteki örneklem üyelerinin yüzdelerini kullanmak doğru olmaz.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir öğretim üyesi, finansal muhasebe dersinde yeni bir kitap kullanmak istemekte ve bunun için şu üç seçenek üzerinde düşünmektedir: *Kolay Finansal Muhasebe, Eziyetsiz Finansal Muhasebe, Kâr ve Zevk İçin Finansal Muhasebe.* Daha önce kendi dersini almış altmış öğrencilik rassal bir örneklemle görüşerek, bunlardan bu üç kitabı inceleyip en beğendiklerini belirtmelerini istemiştir. Elde edilen bulgular aşağıdadır. Bu anakütlede üç kitabın aynı ölçüde beğenildiğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

KİTAP	Kolay	Eziyetsiz	Kâr ve Zevk İçin
EN ÇOK BEĞENİLME SAYISI	17	25	18

2. 1979-83 döneminde başarımıyla, bütün fonların en tepedeki %25'i arasına giren altmış beş yatırım fonundan oluşan rassal bir örneklem seçilmiştir.[3] Bunların daha sonraki beş yılda gösterdikleri başarım izlenmiştir. Bu son dönemde, örneklemdeki onbir fonun en üstteki %25'lik, onyedisinin ikinci %25'lik, onsekizinin üçüncü %25'lik, ondokuzunun da son %25'lik dilimde yer aldıkları gözlenmiştir. 1979-83 döneminde en üst %25 diliminde rassal seçilmiş fonların, sonraki beş yılda olanaklı dört öbeğe eşit dağıldığını söyleyen sıfır önsavını sınayın.

3. Rassal bir örneklemdeki 502 tüketiciye, bir hastane seçerken fiyatın ne kadar önemli bir etken olduğu sorulmuştur.[4] Örneklem üyelerinden "önemli değil", "önemli", "çok önemli" yanıtlarından birini seçmeleri istenmiştir. Bu yanıtları seçenlerin sayısı sırasıyla 169, 136, 197 olmuştur. Rassal seçilen bir müşterinin bu yanıtların her birini seçme şansının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

4. Belli bir elektronik parçanın üretim kayıtlarına göre, işlem düzgün yürürken %93 kusursuz, %5 bir kusurlu, %2 birden çok kusurlu parça üretilmektedir. Bir haftalık üretimden rassal bir örnekleme seçilen 500 parçadan 458'i kusursuz, otuzu bir, onikisi birden çok kusurlu çıkmıştır. Bu haftaki üretimin niteliğinin alışıldık dağılıma uygun olduğunu söyleyen sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.

5. Bir hayır kurumu telefonla bağış toplamaktadır. Bütün telefon görüşmelerinin %60'ında bağış reddedilmekte, %30'unda postayla ek bilgi gönderilirse bağışın dü-

[3] M. L. Troutman, "The Steinbrenner syndrome and the challenge of manager selection," *Financial Analysts Journal, 47*, no. 2 (1991), 37-44.

[4] C. M. Fisher, C. J. Anderson, "Hospital advertising: Does it influence consumers?" *Journal of Health Care Marketing, 10*, no. 4 (1990), 40-46.

şünüleceği söylenmekte, %10'unda ise kredi kartıyla hemen bir bağış alınmaktadır. Bu hafta yapılan 100 görüşmelik bir rassal örneklemde, altmışbeş red, otuzbir ek bilgi gönderilmesi, dört derhal bağış yanıtı alınmıştır. Her zamanki bağış yanıtı dağılımının bu hafta da geçerli olduğunu söyleyen sıfır önsavını %10 düzeyinde sınayın.

6. Bir üniversite yöneticisi, bütün öğrencilerin %60'ının dersleri çok yararlı, %20'sinin biraz yararlı, %20'sinin de yararsız bulduğunu saptamıştır. İşletmecilik dersleri alan 100 öğrencilik bir örneklemde altmış sekiz kişi sözkonusu dersi çok yararlı, onsekiz kişi biraz yararlı, ondört kişi de yararsız bulmuştur. İşletmecilik dersleri anakütlesinin, bütün derslerle aynı dağılımı gösterdiği sıfır önsavını sınayın.

11.2 UYUMUN İYİLİĞİ SINAMASI: ANAKÜTLE KATSAYILARI BİLİNMİYOR

Altbölüm 11.1'de, verilerin *bütünüyle belirlenmiş* bir olasılık dağılımından türetilmiş olduğunu söyleyen önsavı sınadık. Bu sınamadaki sıfır önsavı, bir örneklem gözleminin her bir öbeğe düşme olasılığını belirler. Ancak zaman zaman verilerin, binom, Poisson ya da normal bir dağılım gibi bir dağılımdan türetildiği önsavını —o dağılımın anakütle katsayılarının bilindiğini varsaymadan— sınamak isteriz. Böyle durumlarda eldeki veriler bilinmeyen anakütle katsayılarını tahmin etmekte kullanılabilir. Altbölüm 11.1'in sınama süreçleri o zaman da kullam-labilir, ama ki-kare sınamasının serbestlik derecesi sayısı, tahmin edilen her ana-kütle katsayısı için bir azaltılır.

Bu yaklaşımı, bir veri kümesinin Poisson dağılımıyla türetilip türetilmediğini sınayarak örnekleyeceğiz. Bir metnin yazarının kuşkulu olduğu durumlara çözüm bulmanın bir yolu, metin parçalarında belli sözcüklerin kaçar kez kullanıldığını saymaktır. Bu sayılar, yazarı bilinen parçalardaki bulgularla karşılaştırılabilir; bu karşılaştırma çoğu zaman, sözcüklerin kullanılma sayılarının Poisson dağılımına uyduğu varsayımıyla yapılabilir. Bu tür araştırmaya bir örnek, *The Federalist Papers*'ın incelendiği çalışmadır.[5] Bu kaynaktan (her biri yaklaşık 200 sözcükten oluşan) 262 parçalık bir örneklemde, *may* sözcüğünün ortalama kullanılma sayısı 0.66 bulunmuştur. Çizelge 11.5, bu sözcüğün, örnekleme alınan 262 metin parçasında rastlanma sıklıklarını göstermektedir. Amacımız, yinelenmelerin anakütle dağılımının Poisson'a uyduğunu, bu dağılımın ortalamasının önceden bilindiği varsayımını yapmadan sınamaktır.

---

[5] Veriler, F. Mosteller, D. L. Wallace, *Inference and Disputed Autorship: The Federalist*,© 1964, Addison-Wesley, Reading, Mass., Çizelge 2.3 ve 2.4'ten izinle alınmıştır. [*The Federalist*, ABD'de anayasayı desteklemek üzere A. Hamilton, J. Madison, J. Jay tarafından yazılmış 85 yazıdan oluşan bir dizidir. (Ç.N.)]

ÇİZELGE 11.5 *The Federalist Papers*'ta 262 metin parçası içinde *may* sözcüğünün kullanılma sayıları

YİNELENME SAYISI	0	1	2	3 ya da daha çok
GÖZLENEN SIKLIK	156	63	29	14

Altbölüm 4.7'den anımsanacağı gibi, Poisson dağılımında x kez yinelenme olasılığı şöyle bulunur:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad (11.2.1)$$

Burada λ, yinelenme sayısı ortalamasıdır. Bu anakütle ortalaması bilinmemekle birlikte, örneklem ortalaması 0.66 ile tahmin edilebilir. O zaman, (11.2)'deki λ yerine 0.66 konularak, anakütle dağılımının Poisson dağılımına uyduğu önsavı doğruyken, herhangi bir yinelenme sayısının olasılığı tahmin edilebilir. Sözgelimi, iki kez yinelenmenin olasılığı şöyle bulunur:

$$P(2) = \frac{e^{-0.66}(0.66)^2}{2!}$$

$$= \frac{(0.5169)(0.66)^2}{2} = 0.1126$$

Sıfır ve bir kez yinelenme olasılıkları da benzer biçimde bulunabilir, böylece üç ya da daha çok yinelenme olasılığı da şöyle elde edilir:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

Bu olasılıklar Çizelge 11.6'nın ikinci satırında gösterilmiştir.

Beklenen değerler, sıfır önsavı altında, daha önceki gibi, şöyle bulunur:

$$E_i = np_i$$

Böylece, sözgelimi, *may* sözcüğüne 262 parçalık metinde iki kez rastlamanın beklenen sıklığı (262)(0.1126) = 30'dur. Çizelge 11.6'nın en alt satırı bu beklenen sıklıkları gösterir.

ÇİZELGE 11.6 *The Federalist Papers* verilerinde gözlenen ve beklenen sıklıklar

YİNELENME SAYISI	0	1	2	3 ya da daha çok	Toplam
GÖZLENEN SIKLIKLAR (O_i)	156	63	29	14	262
OLASILIKLAR (p_i)	0.5169	0.3412	0.1126	0.0293	1
H_0 DOĞRUYKEN BEKLENEN SIKLIKLAR (E_i)	135	89	30	8	262

Bu durumda sınama istatistiği şöyle olur:

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=\frac{(156-135)^2}{135}+\frac{(63-89)^2}{89}+\frac{(29-30)^2}{30}+\frac{(14-8)^2}{8}$$

$$=15.396$$

Dört öbeğimiz olduğu, bir anakütle katsayısı da tahmin edildiği için, bu sınama için uygun serbestlik derecesi sayısı 2'dir. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{2,0.005}=10.60$$

Demek ki, anakütlenin Poisson dağılımına uyduğunu söyleyen sıfır önsavı, %0.5 anlamlılık düzeyinde reddedilebilir. Verilerdeki bu önsava karşı olan kanıt gerçekten de çok güçlüdür.

Anakütle Katsayıları Tahmin Edildiğinde Uyumun İyiliği Sınamaları

Sıfır önsavı öbek olasılıklarını, (verilerden) tahmin edilmiş bilinmeyen m tane anakütle katsayısına dayanarak belirlesin. Bu sıfır önsavının uygun bir sınaması, ki-kare dağılımının serbestlik derecesi sayısının $(K-m-1)$ olması dışında, Altbölüm 11.1'dekinin aynıdır. Burada K öbek sayısıdır.

BİR NORMALLİK SINAMASI

Normal dağılım istatistikte önemli bir rol oynar, çoğu uygulama sürecinin geçerliliği ya da belli en uygun olma özellikleri de, örneklem verilerinin bir normal dağılımdan geldiği varsayımına dayanır. Normallik varsayımı, az önce açıklanan sürecin uyarlanmasıyla sınanabilir. Ama biz burada hem uygulanması kolay, hem de daha güçlü olan bir sınama göstereceğiz.

Bir anakütleden alınmış $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi n tane gözlemden oluşan bir örneklemimiz olsun. Yaklaşımımız bu verilerin, normal dağılımın iki özelliğini yansıtıp yansıtmadığını araştırmaya dayanır. Birincisi, dağılım kendi ortalamasına göre bakışıktır (simetriktir); Altbölüm 2.5'in terimleriyle söylersek, ne sağa ne sola çarpıktır. Bir anakütlenin *çarpıklık katsayısı*, örneklem bilgisi kullanılarak şöyle tahmin edilir:

$$\text{Çarpıklık katsayısı}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3/n}{s^3}$$

Burada $\bar{x}$ ile s, sırasıyla örneklem ortalaması ve örneklem standart sapmasıdır. Bu ifadenin önemli parçası paydır; payda ölçme birimini geçersiz kılmaya yönelik standartlaştırma amacını taşır. Bir dağılım sağa çarpıksa, ortalamadan

sapmaların küplü ortalaması artı olduğundan, çarpıklık katsayısı artı çıkar. Sola çarpık dağılımların çarpıklık katsayısı eksi, normal dağılım gibi, ortalamasına göre bakışık olan dağılımların çarpıklık katsayısı da 0 olur.

Bakışık dağılımların sayısı çok fazla olduğundan, normal dağılımı bunlardan ayırmak için bir özellik daha gerekir. Örneklem varyansı hesaplanırken ortalamadan sapmaların kareleri kullanıldı, çarpıklık ise bu farkların küplerine dayanıyordu. Bir sonraki akla uygun adım, bu farkların dördüncü kuvvetlerine bakmaktır, bu da bizi şu basıklık tanımına götürür:

$$\text{Basıklık katsayısı} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4/n}{s^4}$$

Basıklık katsayısı, bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun kuyruklarının kalınlığını ölçer: Normal dağılımda anakütle basıklık katsayısının 3 olduğu bilinmektedir.

Örneklemin çarpıklık ve basıklık katsayıları verilerden kolayca hesaplanabilir: aslında, bu istatistikler çoğu istatistik bilgisayar programının sıradan çıktılarıdır. *Bowman-Shelton* normallik sınaması, örneklem çarpıklık katsayısının 0'a, örneklem basıklık katsayısının da 3'e yakınlığına dayanır. Bu sınama istatistiği şöyledir:

$$B = n\left[\frac{(\text{Çarpıklık katsayısı})^2}{6} + \frac{(\text{Basıklık katsayısı} - 3)^2}{24}\right] \qquad (11.2.2)$$

Örneklem gözlemlerinin sayısı çok büyüdükçe, anakütle dağılımının normal olduğu sıfır önsavı doğruyken, bu istatistik, serbestlik derecesi 2 olan bir ki-kare dağılımına yakınsar. Bu sınama istatistiğinin büyük değerleri için, bu önsav kuşkusuz reddedilir.

Ne yazık ki, (11.2.2)'nin dağılımının ki-kareye iyi yakınsaması ancak çok büyük örneklemler içindir. Çizelge 11.7, %5 ve %10 düzeylerinde kimi örneklem büyüklükleri için eşik değerlerini göstermektedir.[6] Öyleyse önerilen süreç, (11.2.2) istatistiğini hesaplayıp, bu sınama istatistiği Çizelge 11.7'de verilen uygun değerden büyükse, normallik sıfır önsavını reddetmektir.

---

[6] Bu sayılar, A. K. Bera, C. M. Jarque, "An efficient large-sample test for normality of observations and regression residuals," *Working Paper in Economics and Econometrics, 40*, Australian National University (1981)'den alınmıştır. Öteki örneklem büyüklükleri için eşik değerleri çizelgeden ara değerler hesaplanarak bulunabilir.

ÇİZELGE 11.7 Bowman-Shelton istatistiğinin eşik değerleri

ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜ n	%10 EŞİĞİ	%5 EŞİĞİ	ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜ n	%10 EŞİĞİ	%5 EŞİĞİ
20	2.13	3.26	200	3.48	4.43
30	2.49	3.71	250	3.54	4.51
40	2.70	3.99	300	3.68	4.60
50	2.90	4.26	400	3.76	4.74
75	3.09	4.27	500	3.91	4.82
100	3.14	4.29	800	4.32	5.46
125	3.31	4.34	∞	4.61	5.99
150	3.43	4.39			

Bu sınamaya bir örnek verelim. 278 tane vadeli sözleşmenin günlük getiri oranından oluşan bir örneklemin[7] çarpıklık katsayısı 0.04033, basıklık katsayısı 3.15553'tür. Bu getiri oranlarının gerçek dağılımının normal olduğu sıfır önsavını sınamak için (11.2.2) istatistiğini bulalım.

$$B = 278\left[\frac{(0.04033)^2}{6} + \frac{(0.15553)^2}{24}\right] = 0.36$$

Bu bulgunun, Çizelge 11.7'deki eşik değerleriyle karşılaştırılması, anakütle dağılımının normal olduğunu söyleyen önsavı sorgulamak için ortada pek bir neden bırakmaz.

ALIŞTIRMALAR

7. Bir makinenin bir haftada kaç kez bozulduğu 100 hafta boyunca gözlenmiş, aşağıdaki çizelgede gösterilen bulgular elde edilmiştir. Bu süre boyunca haftalık ortalama bozulma sayısı 2.1'dir. Bozulma sayısı anakütlenin Poisson dağılımına uyduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

BOZULMA SAYISI	0	1	2	3	4	5 ya da daha çok
HAFTA SAYISI	10	24	32	23	6	5

[7] Veriler C. F. Lee, R. M. Leuthold, "Investment horizon, risk, and return in commodity futures markets: An empirical analysis with daily data," *Quarterly Review of Economics and Business, 23*, no. 3 (1983), 6-18'den alınmıştır.

8. Bir otoyoldaki gişelerden 100 dakikalık bir sürede 190 araç geçmiştir. Aşağıdaki çizelge bu sürede dakika başına geçiş sıklıklarını göstermektedir. Anakütlenin Poisson dağılımına uyduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

DAKİKADA GEÇİŞ SAYISI	0	1	2	3	4 ya da daha çok
GÖZLENEN SIKLIK	10	26	35	24	5

9. Rassal bir örneklemdeki elli öğrenciye bir yılda ders kitaplarına harcadıkları para sorulmuştur. Bu tutarların örneklem çarpıklık katsayısı 0.83, örneklem basıklık katsayısı 3.98 bulunmuştur. Anakütle dağılımının normal olduğunu söyleyen sıfır önsavını %10 düzeyinde sınayın.
10. Bir haftalık bir sürede üretilen elektronik parçalardan rassal seçilen yüz tanesinin direnç ölçümleri yapılmıştır. Örneklem çarpıklık katsayısı 0.63, örneklem basıklık katsayısı 3.85 bulunmuştur. Anakütle dağılımının normal olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.
11. Anakütlenin normalliğini sınamak için örneklemin çarpıklık ve basıklık katsayıları kullanılır. Örneklem ortalaması ile varyansının burada neden yetersiz kaldığını açıklayın.

11.3 ÇAPRAZ ÇİZELGELER

Bu altbölümde, Altbölüm 3.7'de kısaca sözü edilen bir sorunu çözmek için, Altbölüm 11.1'deki sınamanın nasıl genişletilebileceğini göstereceğiz. Her üyesi iki özelliğine göre çapraz çizelgelenebilecek bir anakütleden bir örneklem alınmış olsun. Burada sınanacak olan sıfır önsavı, anakütlede bu iki özelliği taşıyanlar arasında bir ilişki ya da bağlantı bulunmadığı yolundadır.

Bir örnek olarak Çizelge 11.8, havayolu şirketlerinin yıllık faaliyet raporlarında yer alan 513 resimle ilgili bilgileri içermektedir.[8] Resimler yer çalışanlarına ait olup, resmi olan herkes ya erkek ya kadındır. Resimler cinsiyete ve bu kimselere biçilen rollere göre sınıflanmıştır. Bu çizelge, olanaklı altı çapraz sınıflamanın her birindeki gözlemlerin sayısını göstermektedir. Sözgelimi resimlerin 256'sı fiilen çalışan erkeklerin resimleridir. Kolaylık olsun diye satır ve sütun toplamları da verilmiştir.

Sınanacak sıfır önsavı, özellikler arasında ilişki yoktur —bu özel durumda, kişinin cinsiyetiyle ona biçilen rol arasında bir ilişki yoktur— biçimindedir. Bu sıfır önsavı, anakütlede, resimlerdeki deneklerin fiilen çalışanları arasında kadın ve erkek oranlarının aynı olduğu anlamına gelir.

[8] Veriler C. F. Anderson, G. Imperia, "The corporate annual report: photo analysis of male and female portrayals," *Journal of Business Communication, 29* (1992), 113-28'den alınmıştır.

ÇİZELGE 11.8 Yıllık faaliyet raporu resimlerinin cinsiyete ve biçilen role göre çapraz sınıflaması

BİÇİLEN ROL	RESİMDEKİ KİŞİ		
	ERKEK	KADIN	TOPLAM
Fiilen çalışan	256	74	330
Belirlenemeyen	41	42	83
Belirli bir işte çalışmayan	66	34	100
Toplamlar	363	150	513

Daha genel olarak, A ile B gibi iki özellikle ilgilenelim. A için r tane, B için c tane olmak üzere toplam rc tane çapraz sınıflama yapılabildiğini varsayalım. A'nın i'inci, B'nin j'inci öbeğindeki örneklem gözlemlerinin sayısını, Çizelge 11.9'daki gibi, O_{ij} ile göstereceğiz.

Bu gösterime $r \times c$ gözlü **çapraz çizelge** denir. Bu terimle Çizelge 11.8, 3×2 gözlü çapraz çizelgedir. Kolaylık olsun diye, Çizelge 11.9'a, sırasıyla $R_1, R_2, \ldots, R_r$ ve $C_1, C_2, \ldots, C_c$ ile gösterilen satır ve sütun toplamlarını da ekledik.

Özellikler arasında bir ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavını sınamak için, bu önsav doğru olsaydı, her gözde bulmayı beklediğimiz gözlem sayısı kaç olurdu sorusunu sorarız. Bu soru, satır ve sütun toplamları *sabit*se anlamlı olur. Bu durumda çizelgenin i'inci satır, j'inci sütunundaki gözü ele alalım. j'inci sütunda toplam olarak C_j gözlem var. Arada bir ilişki yoksa, bunların her satıra, satırların toplam gözlem sayısıyla orantılı olarak dağılmasını bekleriz. Demek ki, bu C_j tane gözlemin R_i/n oranı kadarının i'inci satıra düşmesini bekleriz. Öyleyse çapraz çizelgede, tahmin edilen beklenen gözlem sayıları şöyle bulunur:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{R_i C_j}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, c)$$

ÇİZELGE 11.9 n tane gözlemin $r \times c$ gözlü çapraz çizelgede sınıflanması

ÖZELLİK A	ÖZELLİK B				
	1	2	...	c	TOPLAM
1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}	R_1
2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}	R_2
...	...	...	...	...	...
R	O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rc}	R_r
Toplam	C_1	C_2	...	C_c	N

ÇİZELGE 11.10 Havayolları yıllık faaliyet raporlarındaki resimlerin her bir çapraz çizelge gözündeki gözlenen (ve tahmin edilmiş beklenen) sayılar

BİÇİLEN ROL	RESİMDEKİ KİŞİ	
	ERKEK	KADIN
Fiilen çalışan	256 (233.5)	74 (96.5)
Belirlenemeyen	41 (58.7)	42 (24.3)
Belirli bir işte çalışmayan	66 (70.8)	34 (29.2)

Sözgelimi, Çizelge 11.8'deki resimlerde cinsiyet ile biçilen rol arasında bir ilişki yoksa, 513 resimden 363'ü erkek olduğundan, 330 fiilen çalışan denek resminin 363/513'ünün, yani

$$\hat{E}_{11} = \frac{(330)(363)}{513} = 233.5$$

kadarının erkek olmasını beklerdik. Öteki beklenen değerler de aynı yolla hesaplanır. Bunlar Çizelge 11.10'da, kendilerine karşılık gelen gözlenen sayılarla birlikte verilmiştir.

İlişki yoktur diyen sıfır önsavını sınamamız, gözlenen sayılarla, sıfır önsavı doğruyken beklenen sayılar arasındaki farkların büyüklüğüne bağlıdır. Bu sınama, Altbölüm 11.1'dekine benzer. Sıfır önsavı doğruyken, orta büyüklükteki örneklemlerde,[9]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} \qquad (11.3.1)$$

rassal değişkeni, serbestlik derecesi $(r-1)(c-1)$ olan ki-kare dağılımına iyi bir yakınsama gösterir. (11.3.1)'deki çifte toplama işareti, toplamanın rc tane olan bütün gözleri kapsadığını gösterir. Serbestlik derecesi sayısı, satır ve sütun toplamlarının sabit alınmasından kaynaklanır. Bu sabit toplamlar biliniyor ve ilk $(r-1)$ satır ile $(c-1)$ sütunun çapraz gözlerindeki sayılar da biliniyorsa, geri kalan gözlerdeki sayılar da bunlardan çıkarılabilir. Gözlenen ve beklenen sayılar arasındaki mutlak farklar —yani (11.3.1) değerleri— büyükse, ilişki yoktur diyen sıfır önsavının reddedileceği açıktır. Sınama süreci aşağıdaki çerçeve içinde gösterilmiştir.

[9] Tahmin edilmiş beklenen değerlerden her biri ($\hat{E}_{ij}$) en az 5 iken yaklaşıklık iyidir.

Çapraz Çizelgelerde İlişki Sınaması

Bir örneklemdeki n gözlem, iki özelliğe göre, $r \times c$ gözlü bir çapraz çizelgede çapraz sınıflanmış olsun. i'inci satırla j'inci sütunun kesiştiği gözdeki gözlem sayısını O_{ij} ile gösterelim. Eğer sıfır önsavı

H_0: Anakütlede iki özellik arasında bir ilişki yoktur

biçimindeyse, H_0 doğruyken bu gözdeki tahmin edilmiş beklenen gözlem sayısı

$$\hat{E}_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$$

olur. Burada R_i ile C_j ilgili satır ve sütun toplamlarıdır. α anlamlılık düzeyinde bir sınama, aşağıdaki karar kuralına dayanır:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-\hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} > \chi^2_{(r-1)(c-1),\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin}$$

Örneğimize dönersek şunu buluruz:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-\hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} = \frac{(256-233.5)^2}{233.5} + \frac{(74-96.5)^2}{96.5} + \frac{(41-58.7)^2}{58.7} + \frac{(42-24.3)^2}{24.3} + \frac{(66-70.8)^2}{70.8} + \frac{(34-29.2)^2}{29.2} = 26.8$$

Çizelgede $r = 3$ satır, $c = 2$ sütun vardır, öyleyse uygun serbestlik derecesi sayısı

$$(r-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2$$

olur. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{2,0.005} = 10.60$$

Dolayısıyla ilişki yoktur sıfır önsavı %0.5 anlamlılık düzeyinde bile kolayca reddedilir. Bu önsavın tersine kanıt, karşı konulamaz boyuttadır. Reddetme nedeni Çizelge 11.10'dan görülebilir. Kadınlara, erkeklere göre çok daha az, fiilen çalışan rolü biçilmektedir.

ÖRNEK 11.2

Küçük işletmelerden oluşan bir örneklemde, işletmeler yaşlarına ve sermaye yapılarındaki borç yüzdesine göre sınıflanmıştır.[10] Sekiz öbekten her birindeki işletme sayısı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. İşletmenin yaşıyla, sermaye yapısındaki borç yüzdesi arasında bir ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavını sınayın.

BORÇ YÜZDESİ	ESKİ İŞLETMELER	YENİ İŞLETMELER
0-25	19	29
26-50	13	10
51-75	7	11
76-100	4	32

Ön hesaplamalar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Beklenen sayılar, gözlenen sayılardan sonra ayraç içinde verilmiştir.

BORÇ YÜZDESİ	ESKİ İŞLETMELER	YENİ İŞLETMELER	TOPLAMLAR
0-25	19 (16.5)	29 (31.5)	48
26-50	13 (7.9)	10 (15.1)	23
51-75	7 (6.2)	11 (11.8)	18
76-100	4 (12.4)	32 (23.6)	36
Toplamlar	43	82	125

Satır ve sütun toplamları verilmişken, ilişki yoktur sıfır önsavı altında beklenen değerler

$$\hat{E}_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$$

yoluyla bulunur. Sözgelimi, borç oram %26-50 olan eski işletmelerin beklenen sayısı

$$\hat{E}_{21} = \frac{R_2 C_1}{n} = \frac{(23)(43)}{125} = 7.9$$

olur. İlişki yoktur sıfır önsavımn sınaması şunu temel alır:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-\hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} = \frac{(19-16.5)^2}{16.5} + \cdots + \frac{(32-23.6)^2}{23.6} = 14.43$$

Çapraz çizelgede $r = 4$ satır, $c = 2$ sütun olduğundan, bu sınamanın serbestlik derecesi sayısı

[10] H. E. Van Auken, B. M. Doran, "Small business capitalization patterns," *Journal of Applied Business Research, 5*, no. 2 (1989), 15-22.

$$(r-1)(c-1) = (4-1)(2-1) = 3$$

olur. Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{3,0.005} = 12.84$$

Demek ki, işletmelerin yaşı ile sermaye yapısındaki borç yüzdesi arasında ilişki yoktur sıfır önsavı, %0.5 düzeyinde bile reddedilebilir. Verilerde bu önsavın tersine hayli güçlü bir kanıt bulunmaktadır.

Daha önceki altbölümlerde geçen uyumun iyiliği sınamalarında olduğu gibi, 11.3.1 istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan sayıların gözlenen *gerçek sayılar* olması, sözgelimi toplam içindeki yüzdeler olmaması gerektiğine dikkat edilmelidir.

ALIŞTIRMALAR

12. Bir örneklemdeki, "seni düşünüyorum" kartı gönderme niyetinde olan yirmi kadın ile yine bir örneklemdeki, evlilik kutlaması kartı gönderme niyetinde olan yirmi kadına, kartları seçerken ne gibi özelliklere önem verdikleri sorulmuştur.[11] Resimleri önemli bir özellik olarak görenlerin sayısı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Kutlama kartının türüyle kartın seçiminde resme verilen önem arasında bir ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavını %10 düzeyinde sınayın.

KART TÜRÜ	RESİM ÖNEMLİ Mİ?	
	EVET	HAYIR
Seni düşünüyorum	12	8
Evlenme kutlaması	14	6

13. 2×2 gözlü bir çapraz çizelgede gözlenen sayılar aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi a, b, c, d olsun.

			TOPLAMLAR
	a	b	$a+b$
	c	d	$c+d$
TOPLAMLAR	$a+c$	$b+d$	n

11.3.1 eşitliğindeki istatistiğin şöyle yazılabileceğini gösterin:

[11] Bkz. B. A. Walker, J. C. Olson, "Mean-end chains: Connecting product with self," *Journal of Business Research, 22* (1991), 111-18. Elsevier Science Publishing Co., Inc. copyright 1991'den izinle kullanılmıştır.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

14. İflâs isteminde bulunan 165 şirketlik bir örneklem, mali denetimden geçme ya da geçmemeye ve yıl sonundan iflâs istemine kadar geçen süreye göre sınıflanmıştır.[12] Bulgular aşağıdaki çizelgededir. Denetim sonucu ve iflâs istemi süresi arasında bir ilişki yoktur önsavını sınayın.

İFLÂS İSTEMİ SÜRESİ	DENETİM SONUCU	
	GEÇER	GEÇMEZ
12 ay ya da daha kısa	61	28
12 aydan uzun	32	44

15. Bir örnekleme giren 3,262 şirketin kâr dağıtımındaki değişmeler incelenmiştir.[13] Bunlar kâr paylarındaki azalma ya da artışa ve kâr payı açıklamasının kazanç açıklamasından önce mi sonra mı yapılmasına göre sınıflanmıştır. Aşağıdaki çizelgede gösterilen verileri kullanarak, kâr payındaki değişmenin yönü ile açıklama zamanı arasında ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

AÇIKLAMA ÖNCELİĞİ	KÂR PAYI DEĞİŞİMİ	
	ARTIŞ	AZALIŞ
Kâr payı	1,210	32
Kazanç	1,960	61

16. Çok bölümlü büyük mağazalardan oluşan bir örneklem, (çalışan sayısıyla ölçülen) büyüklüğüne ve biçimsel bir pazarlama planı bulunup bulunmamasına göre sınıflanmıştır. Aşağıdaki çizelge her öbekteki sayıları göstermektedir.[14] Bu çizelgedeki verilere dayanarak, büyüklük ile pazarlama planı arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavım %1 düzeyinde sınayın.

ÇALIŞANLAR	BİÇİMSEL PLAN VAR	BİÇİMSEL PLAN YOK
100 'den az	13	10
100-500	18	12
500 'den çok	32	6

[12] D. B. Kennedy, W. H. Shaw, "Evaluating financial distress resolution using prior audit opinions," *Contemporary Accounting Research, 8* (1991), 97-114.

[13] J. W. Wansley, C. F. Sirmans, J. D. Shilling, Y. J. Lee, "Dividend change announcement effects and earnings volatility and timing," *Journal of Financial Research, 14* (1991), 37-49.

[14] Bkz. J. B. Mason, M. L. Mayer, A. Koh, "Functional marketing plan development in department store retailing," *Journal of the Academy of Marketing Science, 13*, no. 3 (1985), 161-182.

17. Varlıkları azalmış şirketlerden oluşan bir örneklem, bu varlıkların seçmeli olarak hesaplardan düşülüp düşülmediğine ve daha sonra bir birleşme ya da satın alınma konusunda bir kanıt olup olmamasına göre sınıflanmıştır.[15] Aşağıdaki çizelgede verilen verileri kullanarak, bu özellikler arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

HESAPTAN DÜŞME	BİRLEŞME YA DA SATIN ALINMA	
	EVET	HAYIR
Evet	28	39
Hayır	20	47

18. Bir örnekleme seçilen şirket üst düzey yöneticilerinden, şirket düzeyindeki mali başarımı ve şirket düzeyindeki stratejiyi değerlendirmeleri istenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgededir.[16] İki değerlendirme arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını %1 düzeyinde sınayın.

STRATEJİ	MALİ BAŞARIM		
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK
Düşük	15	25	18
Orta	30	52	23
Yüksek	23	49	61

19. Aşağıdaki çizelge, enflasyon oranının ellibeş tahminini göstermektedir.[17] Tahminler, enflasyonun hızlanacağını söyleyip söylemediklerine göre sınıflanmıştır. Ayrıca gerçekleşen enflasyonun hızlanıp hızlanmadığına da bakılmıştır. Tahminlerle sonuçlar arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

SONUÇ	TAHMİN	
	HIZLANMA	HIZLANMAMA
Hızlanma	18	11
Hızlanmama	6	20

20. Bir örneklemdeki 201 bilgisayar satış elemanı, iş değiştirmelerindeki etmenleri değerlendirmek amacıyla bir yıl boyunca izlenmiştir.[18] İlişikteki çizelge bu insanları, evli ya da bekâr olmalarına ve işte bir yıl kalıp kalmadıklarına göre sınıfla-

---

[15] L. J. Zucca, D. R. Campbell, "A close look at discretionary writedowns of impaired assets," *Accounting Horizons, 6,* no. 3 (1992), 30-41.

[16] Veriler M. Leontiades, A. Tezel, "CEO's perceptions of strategy consultants," *Business Forum, 14,* no. 1 (1989), 51-53'ten alınmıştır.

[17] Bkz. H. O. Stekler, M. H. Schnader, "Evaluating predictions of change: an application to inflation forecasts," *Applied Financial Economics, 1* (1991), 135-137. Chapman & Hall Ltd, UK'nin izniyle kullanılmıştır.

[18] E. F. Fern, R. A. Avila, D. Grewal, "Salesforce turnover: Those who left and those who stayed," *Industrial Marketing Management, 18* (1989), 1-9.

maktadır. Bilgisayar satıcılarının medeni durumu ile işten ayrılma arasında bir ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavını %5 düzeyinde sınayın.

MEDENİ DURUM	AYRILMADI	AYRILDI
Evli	128	27
Bekâr	34	12

21. Avukatlık hizmetinden yararlanan ve yararlanmayanlara "avukatlar sundukları hizmetlerin tarifesini bürolarına asmalı" görüşüne katılıp katılmadıkları sorulmuştur. Bulgular ilişikteki çizelgede sergilenmiştir.[19] Anakütlede avukatlık hizmetinden yararlanan ve yararlanmayanların yukarıdaki görüşe olan tepkileri farklı değildir diyen sıfır önsavını sınayın.

	TEPKİ		
	KATILIYORUM	FİKRİM YOK	KATILMIYORUM
Hizmetten yararlananlar	76	16	25
Hizmetten yararlanmayanlar	242	36	33

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

22. Rassal bir örneklemdeki otuz spor yazarına, üniversiteyi bitirmek üzere olan üç basketbol savunma oyuncusundan hangisinin profesyonel basketbolcu olarak geleceğinin en parlak olduğu sorulmuştur. Bu üç oyuncu, "çok güçlü" üniversitelerden birinin, küçük bir devlet üniversitesinin, küçük bir özel üniversitenin öğrencisidir. Aşağıdaki çizelge seçim sonuçlarını göstermektedir. Spor yazarları anakütlesinde bu üç oyuncunun seçilme şansı aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

	ÇOK GÜÇLÜ ÜNİVERSİTE	DEVLET ÜNİVERSİTESİ	ÖZEL ÜNİVERSİTE
Aldığı oy sayısı	12	11	7

23. Bir yerleşkedeki bütün öğrencilerin %62'sinin lisans, %23'ünün meslek yüksek okulu, %15'inin de lisansüstü öğrencisi olduğu bilinmektedir. Bir konsere katılan seksen kişilik bir örneklem seçilmiştir. Bunlardan ellidördü lisans, onyedisi meslek okulu, dokuzu lisansüstü öğrencisidir. Konsere katılan öğrencilerin dağılımının, yerleşkedeki dağılımla aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

[19] Bkz. R. E. Hite, E. Kiser, "Consumers' attitudes toward lawyers with regard to advertising professional services," *Journal of Academy of Marketing Science, 13* (1985), 321-39.

24. Bir öğrenci işleri yöneticisi, geçmiş kayıtlara göre, üniversiteye başvuran adaylardan %75'nin aynı eyaletten, %15'nin komşu eyaletlerden, %10'unun da başka eyaletlerden geldiğini saptamıştır. Bu yılki adaylardan 100 kişilik bir rassal örneklemde, yetmiş kişi aynı eyaletten, yirmibir kişi komşu, dokuz kişi öteki eyaletlerden gelmiştir. Bu yılki adayların da her zamanki dağılımı gösterdiğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

25. Bir süpermarkette 200 dakikalık bir sürede kasalara gelen müşteri sayısı kaydedilmiş, aşağıdaki çizelgede gösterilen bulgular elde edilmiştir. Dakika başına ortalama müşteri sayısı 2.3'tür. Anakütlenin Poisson dağılımına uyduğu sıfır önsavını sınayın.

DAKİKA BAŞINA MÜŞTERİ SAYISI	0	1	2	3	4	5 ya da daha çok
GÖZLENEN SIKLIK	16	50	51	44	28	11

26. Bir pay senedinin pay başına günlük getiri oranlarından 300'ü bir örneklem olarak seçilmiştir. Örneklemin çarpıklık katsayısı 0.47, basıklık katsayısı 3.86'dır. Bu pay senedinin günlük getiri oranlarının anakütlede normal dağıldığı sıfır önsavını sınayın.

27. Bir çalışma, şirketlerin mali denetim raporlarına tepkisini değerlendirmiştir.[20] İlişikteki çizelge, mali denetimden başarıyla geçmiş ve geçememiş işletme örneklemlerinde, ertesi yıl denetim şirketini değiştirenleri göstermektedir. Denetim şirketini değiştirmek ile mali denetimden başarıyla geçmek arasında bir ilişki olmadığı sıfır önsavını %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

	DENETİM RAPORU GÖRÜŞÜ	
	BAŞARILI	BAŞARISIZ
Denetim şirketini değiştiren	141	227
Denetim şirketini değiştirmeyen	991	8,051

28. Alıştırma 27'deki çalışmada, denetimde başarılı olan 273 şirketlik rassal bir örneklem alınmıştır. İlişikteki çizelge, bu şirketlerin ertesi yılki denetim sonuçlarıyla denetim şirketini değiştiren ve değiştirmeyenler gösterilmiştir. Bu verilerden ne öğrenilebilir?

	ERTESİ YILKİ DENETİM RAPORU GÖRÜŞÜ	
	BAŞARILI	BAŞARISIZ
Denetim şirketini değiştiren	103	29
Denetim şirketini değiştirmeyen	100	41

[20] C. W. Chow, S. J. Rice, "Qualified audit opinions and auditor switching," *Accounting Review, 57* (1982), 326-35.

29. Denetimi başardıktan sonra denetim şirketini değiştiren yetmişaltı şirketlik bir örneklem için, değiştirme sonrasındaki denetim şirketinin, "Büyük Sekiz Denetim Şirketi"nden biri olup olmadığı ve değiştirme sonrası denetimden başarıyla geçilip geçilmediği kaydedilmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgededir.[21] İlişki yoktur sıfır önsavını sınayın.

	DENETİM ŞİRKETİNİN TÜRÜ	
RAPOR GÖRÜŞÜ	EN BÜYÜK SEKİZ	ÖTEKİLER
Başarılı	7	24
Başarılı değil	14	31

30. Aşağıdaki çizelge, kadın ve erkekler için bağımsız rassal örneklemlerde, günde 2½ saatten daha az ya da daha çok televizyon izleyenlerin sayısını göstermektedir.[22] Bir kimsenin cinsiyetiyle televizyon izleme süresi arasında ilişki yoktur diyen sıfır önsavını %10 düzeyinde sınayın.

	GÜNLÜK TV SEYRETME SÜRESİ (SAAT)	
	2½ SAATTEN AZ	2½ SAATTEN ÇOK
Erkek	18	10
Kadın	17	13

31. Aşağıdaki çizelge, "Şirketler uyuşturucu kullanan kimseleri işten çıkarmamalıdır" görüşüne tepkileri göstermektedir. Denekler ayrıca siyasi partilere olan yakınlıklarına göre de sınıflanmıştır.[23] Bu görüşe tepki ile parti yakınlığı arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

PARTİ	TEPKİ	
	KATILAN	KATILMAYAN
Demokrat	37	23
Cumhuriyetçi	39	49

32. Şirketlerin gerçekleşen kazançlarından farklı çıkan tahminler incelenmiştir.[24] Bu örneklerde şirket içinden yetişenlerin yönetim kurulundaki yüzdesine bakılmıştır.

---

[21] Veriler A. T. Craswell, "The association between qualified opinions and auditor switches," *Accounting and Business Research, 19* (1988), 23-31'den alınmıştır.

[22] Veriler B. W. Becker, P. E. Connor, "Personal values of the heavy user of mass media," *Journal of Advertising Research, 21, no. 5* (1981), 37-43'ten alınmıştır.

[23] Veriler S. Chawla, D. Elmuti, Y. Kathawala, Z. Kahn, "The relationship of an individual's classification with their opinion on drug testing," *American Business Review, 10*, no. 1, (1992), 1-7'den alınmıştır.

[24] Bkz. T. G. Calderon, S. A. Fisher, "Impact of Management and insider control on the accuracy of management forecasts," *American Business Review, 10*, no. 1 (1992), 41-45.

Tahmin hatalarının yönü ile içeriden yetişenlerin yönetime egemen olma derecesi arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

TAHMİN HATASI	İÇERDEN YÖNETİCİLERİN KURULDAKİ YÜZDESİ	
	%22'DEN DÜŞÜK	EN AZ %22
Gerçekleşen > Tahmin	8	6
Tahmin > Gerçekleşen	14	23

33. ABD'nin güneybatısında aynı bölgelerde yaşayan 16-24 yaşları arasındaki İngilizce ve İspanyolca konuşanlardan alınan örneklemlere haftalık alkol tüketimleri sorulmuştur.[25] Aşağıdaki çizelge, iki öbeğin haftada kaç kez içki içtiğini gösteren sayıları vermektedir. Etnik kökenle alkol tüketimi arasında bir ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

ETNİK KÖKEN	İÇKİ İÇME SAYISI			
	0-1	2-4	5-10	10'DAN ÇOK
İngilizce konuşan	19	45	27	28
İspanyolca konuşan	25	47	29	13

34. Limonlu ve sirkeli sıvı bulaşık deterjanlarından iki marka —Sunlight ve Palmolive— elli iki hafta boyunca izlenmiştir.[26] Her hafta bu markaların indirimli satış yapıp yapmadığı kaydedilmiştir. Aşağıdaki çizelge, olanaklı dört öbekteki hafta sayılarını göstermektedir. Bu verilerden ne gibi sonuçlar çıkarılabilir?

SUNLIGHT	PALMOLIVE	
	İNDİRİM VAR	İNDİRİM YOK
İndirim var	16	21
İndirim yok	12	3

35. İlk ipotekli tahvilleri Moody's şirketinin değerlemesinde değişiklik doğurmuş elektrik şirketlerinden oluşan bir örneklem incelenmiştir.[27] Bu şirketler, değerleme değişikliğinin yükselme mi, yoksa düşme mi olduğuna ve yeni bir tahvil çıkarılıp çıkarılmadığına göre sınıflanmıştır. Bulgular aşağıdaki çizelgededir. Değerleme

---

[25] L. T. Patterson, G. G. Hunnicutt, M. A. Stutts, "Young adults' perceptions of warnings and risks associated with alcohol consumption," *Journal of Public Policy and Marketing, 11*, no. 1 (1992), 96-103.

[26] Bkz. R. Lal, "Manufacturer trade deals and retail price promotions," *Journal of Marketing Research, 27* (1990), 428-444.

[27] Bkz. S. B. Bhandari, J. J. Chrisman, A. R. Rubash, "Rating changes and new bond issues: Some new insights," *American Business Review, 3* (1985), 35-43. [Moody's, şirketlerin ve ülkelerin itibarını değerlendiren bir şirkettir. (Ç.N.)]

değişikliğinin yönü ve yeni bir tahvil ihracı arasında değişiklik yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

DEĞERLEME DEĞİŞİKLİĞİ	YENİ TAHVİL ÇIKARILMASI	
	HAYIR	EVET
Düşüş	18	37
Yükseliş	12	6

36. Genel müdürlerini değiştiren şirketler, 3 yıl içinde iflâsa gitmişlerse başarısız, gitmemişlerse başarılı olarak sınıflanmış,[28] yeni genel müdürün şirket içinden gelip gelmediği durumlar karşılaştırılmıştır. Bulgular aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Bu sınıflamalar arasında bir ilişki yoktur sıfır önsavını sınayın.

YENİ GENEL MÜDÜR	BAŞARILI	
	EVET	HAYIR
İçerden	21	14
Dışardan	39	11

[28] Bkz. K. B. Schwarz, K. Menon, "Executive succession in failing firms," *Academy of Management Journal, 28* (1985), 680-86.

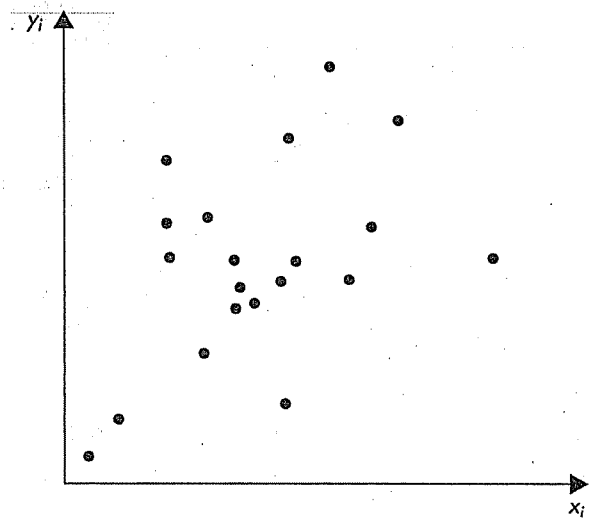
BÖLÜM 12

Doğrusal Korelasyon ve Regresyon

12.1 KORELASYON (İLİŞKİ)

Buraya kadar, neredeyse hep tek ya da bağımsız bir rassal değişkene ilişkin çıkarsama sorunlarıyla ilgilendik. Ama işletmecilik ve iktisat uygulamalarında çoğu zaman ilgi, iki ya da daha çok değişken arasındaki *ilişkiler*de yoğunlaşır. Bu bölümde, bir çift rassal değişkenin incelendiği durumu ele alacak, bulgularımızı daha genel durumlara Bölüm 13'te genişleteceğiz.

İlke olarak, bir çift rassal değişken birbiriyle çok değişik biçimlerde ilişkili olabilir. Daha fazla ilerlemeden, bunlar arasındaki ilişkinin fonksiyonel biçimlerini belirtmek yararlıdır. Çoğu zaman ilişkinin doğrusal olduğunu ileri sürmek, iyi bir yakınsamayla, akla uygun bir sav olabilir. Böylece, X ile Y gibi bir rassal değişken çifti ele alınmışsa, bu çiftin birlikte gözlemleri, Çizim 12.1'deki gibi, bir doğru etrafında serpilecektir. Bir çift rassal değişkenin gözlemleri bir doğruya çok yakın olarak serpilirse ilişki güçlü olur, ama bizim burada söylemek istediğimiz, incelenen ilişkinin ille de çok güçlü olması gerektiği değildir. Uygulamada, çözümlemek istediğimiz çoğu ilişki, Çizim 12.1'de gösterilen gibi, oldukça zayıf olabilir. Öyleyse, bu tür ilişkileri anlayabilmek için, çizimi inceleme dışında, daha karmaşık tekniklere gerek duyarız. Yine de çizimi yapmak, onu izleyen daha ayrıntılı çözümlemelerden önce gerekli bir ön çalışmadır. Rassal değişkenler arasında kurulabilecek bir ilişkinin doğrusal olduğu varsayımı, büyük kolaylık sağlamasına ve çoğu zaman gerçekçi de olmasına karşın yalnızca bir varsayımdır. Çizim yapmanın bir yararı, rassal değişkenler arasındaki ilişkide doğrusallıktan ciddi bir sapma varsa, çizimlerin bunu gösterebilmeleridir. Bu açıdan bakıldığında Çizim 12.1, bu iki rassal değişken



ÇİZİM 12.1 İlişkileri doğrusal olan bir çift rassal değişken

gözlemleri arasındaki ilişkinin doğrusaldan başka bir şey olabileceği izlenimini vermemektedir.

Bu altbölümde, bir çift rassal değişkenin arasındaki ilişkinin *güc*ünü ölçmekle ilgileneceğiz. X ile Y, ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları σ_X^2 ile σ_Y^2 olan bir çift rassal değişken olsun. Bu büyüklüklerin arasındaki ilişkinin bir ölçüsü olarak, Altbölüm 4.4 ile 5.4'te,

$$\text{Orv}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

biçiminde tanımlanan **ortak varyansı** tanıtmıştık. Rassal değişkenler arasında aynı yönlü bir ilişki varsa, böylece X'in büyük değerleri (Çizim 12.1'deki gibi) Y'nin büyük değerleriyle, küçük X'ler de küçük Y'lerle eşleşiyorsa, ortak varyans artıdır. Ters yönlü bir ilişki varsa, yani X'in büyük değerleri Y'nin düşük değerleriyle, düşük X'ler de yüksek Y'lerle eşleşiyorsa, ortak varyans eksi olur. X ile Y arasında doğrusal bir ilişki yoksa, ortak varyans 0'dır.

Ancak ortak varyans bu durumuyla, bir çift rassal değişken arasındaki ilişkinin gücünü ölçmekte pek yararlı olmaz, çünkü değeri, değişkenlerin ölçüldüğü ölçü birimine bağlıdır. En iyisi saf, ölçekten bağımsız bir ölçüdür. Neyse ki böyle bir ölçü, ortak varyansı, değişkenlerin tekil standart sapmaları çarpımına bölerek kolayca elde edilir. Ortaya çıkan büyüklüğe **korelasyon katsayısı** denir.

Korelasyon Katsayısı

X ile Y, ortalamaları μ_X ile μ_Y, varyansları σ_X^2 ile σ_Y^2 olan bir çift rassal değişken olsun. Bunların arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü gösteren bir ölçüyü, aşağıdaki gibi tanımlanan **korelasyon katsayısı** ρ verir.

$$\rho = \text{Kor}(X, Y) = \frac{\text{Orv}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2]E[(Y - \mu_Y)^2]}} \qquad (12.1.1)$$

Korelasyonun –1 ile 1 arasında kalması gerektiği, yani

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

olduğu aşağıdaki yorumlarla gösterilebilir:

(i) –1'lik bir korelasyon, ters yönlü tam doğrusal bir ilişki anlamına gelir.

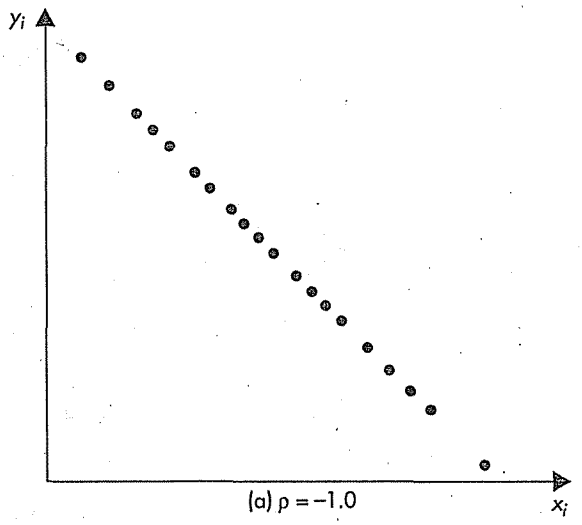
(ii) 1'lik bir korelasyon, aynı yönlü tam doğrusal bir ilişki anlamına gelir.

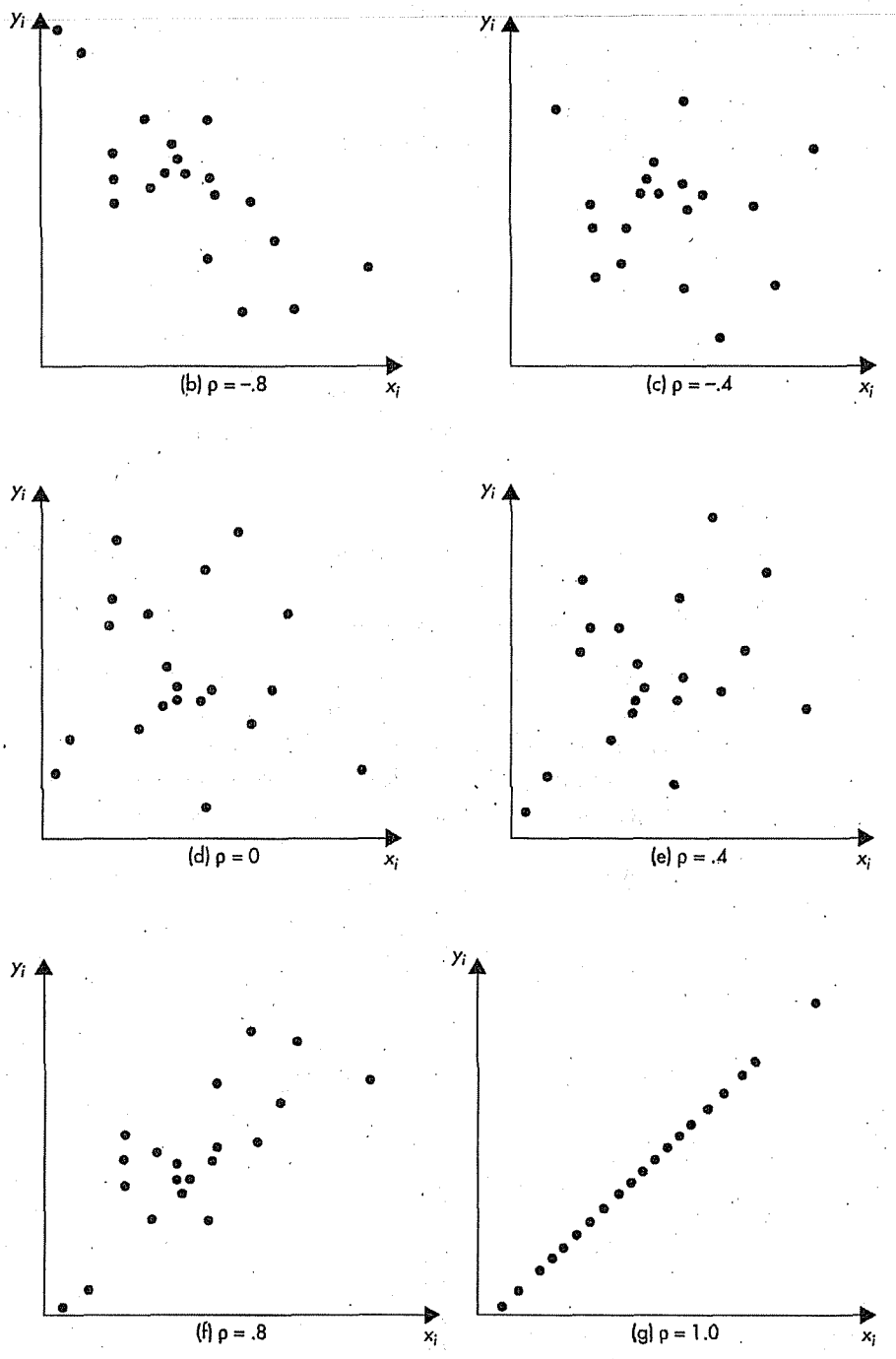
(iii) 0'lık bir korelasyon doğrusal bir ilişki olmadığı anlamına gelir.

(iv) Korelasyonun mutlak değeri ne kadar büyükse, rassal değişkenler arasındaki ilişki de o kadar güçlüdür.

Korelasyon katsayısının değerinin ne anlama geldiği, korelasyonları –1.0, –0.8, –0.4, 0, 0.4, 0.8, 1.0 olan ortak dağılımlardan çekilmiş rassal örnekleme gözlemlerinin serpilmelerinin sergilendiği Çizim 12.2'de gösterilmiştir. İki uç durum tam doğrusal ilişkileri gösterirken, öteki durumlarda, korelasyonun mutlak değeri ne kadar büyükse gözlemler de doğruya o kadar yakın serpilir.

ÇİZİM 12.2 Çeşitli korelasyonları olan ortak dağılımlardan çekilmiş gözlem örneklemleri





ÇİZİM 12.2 (devam) Çeşitli korelasyonları olan ortak dağılımlardan çekilmiş gözlem örneklemleri

Çizelge 12.1 Reklam ve dağıtım giderleri (x) ile bilgi isteyenlerden elde edilen getiri (y) verileri

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
4.07	17.41	9.87	35.95	1.61	21.93
2.51	22.25	1.27	61.81	1.52	31.29
1.25	106.84	1.80	48.36	3.10	88.31
14.67	14.41	1.50	78.74	3.32	92.70
16.02	24.18	1.68	66.42	3.07	59.06
3.81	29.73	2.72	121.95		

Kaynak: A.G. Woodside and D.M. Reid, "Is CPM related to the advertising effectiveness of magazines?" *Journal of Busines Research*, 3 (1975), 323-34. Copyright 1975 by Elsevier Science Publishing Co., Inc. Veriler yayımcının izniyle aktarılmıştır.

Korelasyon katsayısı ρ, uygulamada bilinmeyen ve verilerden tahmin edilmesi gereken bir anakütle büyüklüğüdür. Bir örnek olarak, Çizelge 12.1, onyedi dergide başlatılan bir reklâm kampanyasına ilişkin verileri göstermektedir. Bu reklâmlar Güney Carolina turizmini özendirmekte ve okuyucular, daha çok bilgi istemeye çağrılmaktadır. İlişkilendirilecek iki değişken şunlardır:

X: Reklâm ve dağıtım giderleri (bin dolar cinsinden)
Y: Bilgi isteyenlerden elde edilen getirinin maliyete oranı

Bunlardan ikincisi şöyle tanımlanmıştır:

$$Y = \frac{\text{Bilgi isteyenlerden beklenen gelir} - \text{Reklâm giderleri}}{\text{Reklâm giderleri}}$$

Verilerin serpilimi Çizim 12.3'te gösterilmiştir. Buradan anlaşıldığı gibi gider ile getiri arasındaki ilişki ters yönlüdür, birinin yüksek değerleri öbürünün düşük değerleriyle eşleşmiştir.

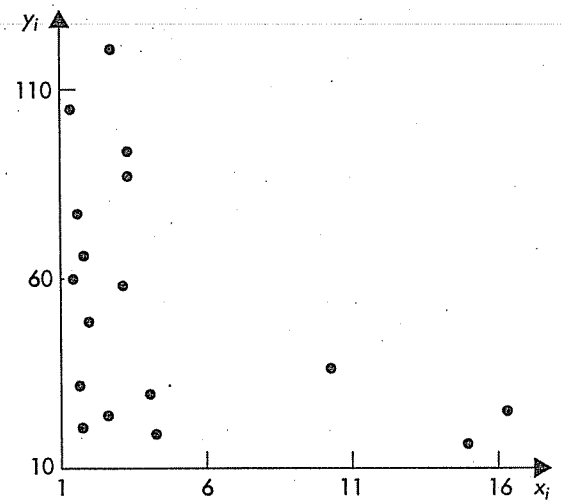
Genel olarak, bir örneklem, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ile gösterilen n çift gözlem içersin ve bu veriler anakütle korelasyon katsayısını (ρ) tahmin etmekte kullanılsın. Bildiğimiz gibi, anakütle standart sapmaları, ilgili örneklem standart sapmaları olan

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{ve} \qquad s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}$$

ile tahmin edilir. Benzer biçimde, ortak varyans da

$$\text{Tahmin edilmiş Orv}(X, Y) = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ile tahmin edilir. Bu durumda anakütle korelasyonu da, (12.1.1) formülünde ilgili anakütle değerleri yerine örneklem tahminleri konularak tahmin edilebilir.



ÇİZİM 12.3 Reklâm geliri-gideri verilerinin serpilme çizimi

Örneklem Korelasyon Katsayısı

X ile Y rassal değişkenlerinin n tane gözlem çiftinden oluşan bir rassal örneklem, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ile gösterilsin. X ile Y arasındaki anakütle korelasyon katsayısı, aşağıdaki

$$r = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

örneklem korelasyon katsayısıyla tahmin edilir. Hesaplanması çoğu zaman daha kolay olan eşdeğer bir gösterim de şudur:

$$r = \frac{\sum_1^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

Reklâm verileriyle örneklem korelasyonunun hesaplanması Çizelge 12.2'de sergilenmiştir. Örneklem ortalamaları aşağıdadır:

$$\bar{x} = \frac{73.79}{17} = 4.3406 \qquad \text{ve} \qquad \bar{y} = \frac{921.34}{17} = 54.1965$$

Öyleyse, örneklem korelasyonu da şöyle bulunur:

ÇİZELGE 12.2 Çizelge 12.1'deki verilerle örneklem korelasyonunun hesaplanması

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
4.07	17.41	16.5649	303.1081	70.8587
2.51	22.25	6.3001	495.0625	55.8475
1.25	106.84	1.5625	11,414.7856	133.5500
14.67	14.41	215.2089	207.6481	211.3947
16.02	24.18	256.6404	584.6724	387.3636
3.81	29.73	14.5161	883.8729	113.2713
9.87	35.95	97.4169	1,292.4025	354.8265
1.27	61.81	1.6129	3,820.4761	78.4987
1.80	48.36	3.2400	2,338.6896	87.0480
1.50	78.74	2.2500	6,199.9876	118.1100
1.68	66.42	2.8224	4,411.6164	111.5856
2.72	121.95	7.3984	14,871.8025	331.7040
1.61	21.93	2.5921	480.9249	35.3073
1.52	31.29	2.3104	979.0641	47.5608
3.10	88.31	9.6100	7,798.6561	273.7610
3.32	92.70	11.0224	8,593.2900	307.7640
3.07	59.06	9.4249	3,488.0836	181.3142
73.79	921.34	660.4933	68,164.1430	2,899.7659

$$r = \frac{\sum_1^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{2{,}899.7659 - (17)(4.3406)(54.1965)}{\sqrt{[660.4933 - (17)(4.3406)^2][68{,}164.1430 - (17)(54.1695)^2]}}$$

$$= -0.441$$

Örneklem korelasyonu –0.441, dergi reklâmları giderleriyle getiri arasında zayıf bir ters yönlü ilişkiyi göstermektedir. Tahmin edilen korelasyon katsayısının eksi olması, yüksek giderlerle düşük getirilerin eşleşme eğiliminin işaretidir. Ama, 0 korelasyon doğrusal ilişki yoktur, –1 korelasyon da ters yönlü tam bir doğrusal ilişki vardır anlamına geldiğinden, örneklem korelasyonunun burada bulunan değeri, gider ile getiri arasında müthiş yüksek bir ilişki anlamına gelmez.

Örneklem korelasyon katsayısı, bir örneklemdeki doğrusal ilişkinin gücünü ölçmekte betimleyici bir işlev görür. Aynı zamanda bir çift rassal değişken arasında anakütlede doğrusal ilişki olmadığını söyleyen, yani

$$H_0: \rho = 0$$

sıfır önsavını sınamada da kullanılır.

Bir çift rassal değişken arasında (doğrusal) bir ilişki olmadığını ileri süren bu sıfır önsavı, bir araştırmacı için çoğu zaman çok ilgi çekicidir. Kuşkusuz, korelasyonu tahmin ettiğimizde, ilişki olsun olmasın, 0'dan farklı bir değer bulacağımız neredeyse kesindir. Bizim sorduğumuz soru şudur: İncelenen rassal değişkenler arasında aslında hiçbir ilişki yokken, 0'dan belli uzaklıkta örneklem korelasyonları bulma şansı ne kadardır?

Bu sıfır önsavı doğruyken, rassal değişkenler de ortak bir normal dağılıma uyarken,[1]

$$t = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$$

rassal değişkeninin, $(n-2)$ serbestlik dereceli bir Student t dağılımına uyduğu gösterilebilir. Buna uygun bir sınama, aşağıdaki çerçeve içinde gösterildiği gibi türetilebilir.

Sıfır Anakütle Korelasyonu Sınaması

Ortak bir normal dağılımdan gelen n çift gözlemin oluşturduğu rassal bir örneklemden hesaplanmış örneklem korelasyon katsayısı r olsun.

$$H_0: \rho = 0$$

sıfır önsavının aşağıdaki sınamaları için anlamlılık düzeyi α olur:

(i) H_0'ı

$$H_1: \rho > 0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} > t_{n-2,\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) H_0'ı

$$H_1: \rho < 0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} < -t_{n-2,\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

[1] Bu, X ile Y rassal değişkenlerinin her bir doğrusal bileşiminin normal dağılması koşuluyla eşdeğerdir.

(iii) H_0'ı

$$H_1: \rho \neq 0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} < -t_{n-2,\alpha/2} \text{ ya da}$$

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} > t_{n-2,\alpha/2} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Burada $t_{n-2,\alpha}$

$$P(t_{n-2} > t_{n-2,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır, t_{n-2} ise $(n-2)$ serbestlik dereceli bir Student t dağılımına uyar.

Reklâm gideri-getirisi örneğine dönersek, anakütlede korelasyon yoktur sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayalım. Bu sınama şu hesaba dayanır:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} = \frac{-0.441}{\sqrt{[1-(-0.441)^2]/(17-2)}} = -1.903$$

$n = 17$ olduğuna göre, $(n-2)$ serbestlik derecesi var demektir, öyleyse Ek Çizelge 6'dan, iki-yanlı karşı önsavlı, %10 ve %5 düzeyindeki sınamalar için uygun karşılaştırma değerleri olarak sırasıyla şunları okuruz:

$$t_{15,0.05} = 1.753 \qquad \text{ve} \qquad t_{15,0.025} = 2.131$$

Demek ki bu veriler, karar kuralımıza göre, anakütlede korelasyon yoktur sıfır önsavının, iki-yanlı karşı önsavla, %10 anlamlılık düzeyinde reddedilmesine izin verir ama %5 düzeyinde vermez. Veriler her ne kadar giderlerle getiriler arasında bir ilişki olduğunu söyleyen bir miktar kanıt içerse de, bu kanıt, bu değişkenler arasında hiçbir (doğrusal) ilişki yoktur önsavına karşi ancak orta derecede güçlüdür.

ÖRNEK 12.1

Siyasal risk analistleriyle yapılan bir anket, kırkdokuz ülke için ortalama siyasal risk notunu ortaya çıkarmıştır; bu not yükseldikçe, sözkonusu ülke siyasal bakımdan o kadar risklidir.[2] Bu ülkelerde siyasal risk notuyla enflasyon arasındaki örneklem korelasyonu 0.43 bulunmuştur. Siyasal risk ile enflasyon arasında anakütlede ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavını, aynı yönlü ilişki karşı önsavıyla sınayın.

[2] Veriler J. L. Mumpower, S. Livingston, T. J. Lee, "Expert Judgements of political riskiness," *Journal of Forecasting, 6* (1987), 51-65 'ten alınmıştır.

Anakütle korelasyonunu ρ ile göstererek,

$$H_0: \rho = 0$$

önsavını,

$$H_1: \rho > 0$$

karşı önsavıyla,

$$n = 49 \qquad r = 0.43$$

örneklem bilgilerini kullanarak sınayın. Sınama şuna dayanır:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} = \frac{0.43}{\sqrt{[1-(0.43)^2]/(49-2)}} = 3.265$$

$(n-2) = 47$ serbestlik derecesi olduğuna göre, Ek Çizelge 6'dan aradeğer bularak

$$t_{47,0.005} = 2.689$$

elde ederiz. Dolayısıyla, anakütlede korelasyon olmadığı yolundaki sıfır önsavı, gerçek korelasyonun %5 anlamlılık düzeyinde artı olduğu karşı önsavı lehine reddedilebilir. Öyleyse bu veriler, bu ülkelerde enflasyon ile uzmanların siyasal risk yargıları arasında aynı yönlü (doğrusal) bir ilişki olduğu konusunda çok güçlü kanıtlar içermektedir.

VARYANSLARIN EŞİTLİĞİNİN SINANMASI: EŞLENİK ÇİFTLER

İlk bakışta bu başlık yanlış gibi görülebilir. Altbölüm 9.8'de iki anakütle varyansının eşitliğinin sınanmasını inceledik. O sınama, *iki anakütleden çekilmiş bağımsız rassal örneklemler varken* geçerlidir. Ama Altbölüm 9.6'da da gördüğümüz gibi, bazı uygulamalarda örneklem verileri, iki anakütleden çekilmiş *eşlenik çiftleri* içerir. Bu altbölümün bulguları, anakütle dağılımlarının normal olması koşuluyla, eşlenik çiftlerden oluşan bir örnekleme dayanarak, anakütle varyanslarının eşitliği için bir sınama geliştirmede kullanılabilir.

X ile Y, varyansları σ_X^2 ile σ_Y^2 olan bir çift rassal değişken olsun. Sınamamız $(X-Y)$ ile $(X+Y)$ arasındaki korelasyonun, ancak ve ancak σ_X^2 ile σ_Y^2 birbirine eşitse sıfır olabileceği olgusuna dayanır. Öyleyse sınama süreci, ilgili örneklem korelasyonunun hesaplanmasını gerektirir. Tek-yanlı karşı önsavla sınama, $(X-Y)$ ile $(X+Y)$ arasındaki korelasyonun, $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ ise aynı yönlü, $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ ise ters yönlü olmasına dayamr.

Bu sınamayı örneklemek için, on çift televizyon reklâmı izleyen deneklerin beyin çalışmasına ilişkin verileri yeniden ele alalım. Çok anımsanan reklâmların gözlemleri (x_i) ile az anımsanan reklâmların gözlemleri (y_i) Çizelge 9.2'de verilmişti, burada Çizelge 12.3'ün ilk üç sütununda yeniden gösterilmiştir.

ÇİZELGE 12.3 Beyin çalışması varyanslarının eşitliğini sınamak için hesaplamalar

x_i	y_i	$x_i - y_i$	$x_i + y_i$
137	53	84	190
135	114	21	249
83	81	2	164
125	86	39	211
47	34	13	81
46	66	–20	112
114	89	25	203
157	113	44	270
57	88	–31	145
144	111	33	255

Çizelge 12.3'ün üçüncü ve dördüncü sütunlarında $(x_i - y_i)$ ile $(x_i + y_i)$ hesaplanmıştır. Sınamamız bu iki değerler kümesinin örneklem korelasyonuna dayanır. Aslında örneklem korelasyonu

$$r = 0.535$$

biçimindedir. $n = 10$ çift gözlem olduğuna göre, sınama istatistiği

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} = \frac{0.535}{\sqrt{[1-(0.535)^2]/(10-2)}} = 1.791$$

olur.

Anakütle varyanslarının eşitliği sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayacağız. Ek Çizelge 6'dan şunları okuruz:

$$t_{8,0.10} = 1.397 \qquad t_{8,0.05} = 1.860$$

Buradan, sıfır önsavının çift-yanlı karşı önsav lehine %20 düzeyinde reddedilebileceği, ama %10 düzeyinde reddedilemeyeceği anlamı çıkar. Dolayısıyla veriler, sıfır önsavına karşı ancak orta güçte bir kanıt içermektedir.

12.2 SIRA KORELASYONU

Altbölüm 12.1'in örneklem korelasyon katsayısı aşırı uç değerlerden ciddi biçimde etkilenir. Ayrıca onu temel alan sınamalar da normallik varsayımının geçerliliğine dayanır. Aşırı değerlerin fazla etkisinde kalmayan ve çok genel anakütle dağılımları için geçerli sınamalara temel olabilecek bir ilişki ölçüsü, Bölüm 10'daki gibi, *sıra sayılarının* kullanılmasıyla elde edilir. Böylece ortaya, kaysayısal olmayan bir sınama çıkar. Bu katsayının, Altbölüm 12.1'in gider-getiri verileriyle hesaplanması Çizelge 12.4'te gösterilmiştir.

ÇİZELGE 12.4 Çizelge 12.1'in verileriyle sıra korelasyonu hesaplanması

x_i	(x_i) SIRA NO.	y_i	(y_i) SIRA NO.	d_i = (x_i) SIRA NO. – (y_i) SIRA NO.	d_i^2
4.07	14	17.41	2	12	144
2.51	8	22.25	4	4	16
1.25	1	106.84	16	–15	225
14.67	16	14.41	1	15	225
16.02	17	24.18	5	12	144
3.81	13	29.73	6	7	49
9.87	15	35.95	8	7	49
1.27	2	61.81	11	–9	81
1.80	7	48.36	9	–2	4
1.50	3	78.74	13	–10	100
1.68	6	66.42	12	–6	36
2.72	9	121.95	17	–8	64
1.61	5	21.93	3	2	4
1.52	4	31.29	7	–3	9
3.10	11	88.31	14	–3	9
3.32	12	92.70	15	–3	9
3.07	10	59.06	10	0	0
				Toplam	1,168

x_i ve y_i gözlemleri önce artan bir sıraya konur. Daha sonra **Spearman sıra korelasyonu katsayısı**, x_i ve y_i'lerin sıra sayıları arasındaki örneklem korelasyonu olarak Altbölüm 12.1'deki formül yardımıyla hesaplanır. Ancak, hiçbir çiftteki x_i ile y_i'nin sıra sayıları arasında beraberlik yoksa, hesaplanması daha kolay olan

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

ifadesi buna eşdeğerdir. Burada d_i, sıra sayıları arasındaki farktır. Öyleyse, bizim reklâm verilerinde beraberlik olmadığından, Çizelge 12.4'ten şunu bulabiliriz:

$$r_s = 1 - \frac{(6)(1{,}168)}{(17)[(17)^2-1]} = -0.431$$

Dikkat ederseniz, bu örnekte sıra korelasyonu katsayısı, Altbölüm 12.1'deki verilerle bulunan sıradan örneklem korelasyon katsayısına dikkati çekecek kadar yakın çıkmıştır.

Spearman sıra korelasyonu, bir çift rassal değişken arasında ilişki yoktur diyen sıfır önsavını sınamakta kullanılabilir. Bu önsav altındaki dağılımı bilinmekte olup, eşik değerleri Ek Çizelge 9'da verilmiştir. Özellikle, çeşitli örnek-

lem büyüklükleri n için çizelgede verilen değerler, sıfır önsavı doğruyken sıra korelasyonunun α olasılığıyla aştığı $r_{s,\alpha}$ değerleridir.

Spearman Sıra Korelasyonu Sınaması

Rassal bir örnekleme seçilmiş n çift $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i)$ gözlemlerimiz olsun. Bu x_i ve y_i'ler kendi içlerinde artan büyüklük sırasına konsa ve bu sıra sayılarının örneklem korelasyonu hesaplansa, bulunan katsayıya **Spearman sıra korelasyonu katsayısı** denir. Berabere kalan sıra sayıları yoksa, bu katsayının hesaplanması için eşdeğer bir formül aşağıdadır:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

Burada d_i, çiftlerin sıra sayıları arasındaki farktır.

Anakütlede ilişki olmadığını söyleyen H_0 sıfır önsavının aşağıdaki sınanmasının anlamlılık düzeyi α olur:

(i) İlişki aynı yönlüdür karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$r_s > r_{s,\alpha}$ ise H_0'ı reddedin.

(ii) İlişki ters yönlüdür karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$r_s < -r_{s,\alpha}$ ise H_0'ı reddedin.

(iii) İki-yanlı karşı önsavla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$r_s < -r_{s,\alpha/2}$ ya da $r_s > r_{s,\alpha/2}$ ise H_0'ı reddedin.

Burada $r_{s,\alpha}$, Spearman sıra korelasyonu dağılımının eşik değeri olup Ek Çizelge 9'da verilmiştir.

Reklâm gider-getirisi örneği için, anakütlede ilişki yoktur diyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayalım. Onyedi çift gözlem olduğuna göre, Ek Çizelge 9'dan %10 ve %5 düzeyinde sınamalar için eşik değerleri sırasıyla

$$r_{s,0.05} = 0.412 \qquad r_{s,0.025} = 0.490$$

bulunur. Spearman katsayısının hesaplanan değeri –0.431 olduğundan, karar kuralına göre, hiçbir ilişki yoktur sıfır önsavı, iki-yanlı karşı önsav lehine %10 anlamlılık düzeyinde reddedilebilir, ancak %5 düzeyinde reddedilemez. Bu veriler için aynı sonuca Altbölüm 12.1'de de varmıştık. Ancak, burada bunu

anakütlenin normal olduğunu varsaymadan yapabildik. Öyleyse, vardığımız sonuç artık anakütle dağılımının normalliği koşuluna bağlı olmadığı için, sıra korelasyonunu kullanmakla bir kazanç sağlamış olduk.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir istatistik dersinin öğretim üyesi, dönem sonu sınavının yanısıra öğrencilerinin bir de veri çözümlemesi ödevi yapmasını istemektedir. On öğrencilik bir rassal örneklemde alınan notlar aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Sınav notlarıyla ödev notları arasındaki örneklem korelasyonunu bulun.

SINAV	81	62	74	78	93	69	72	83	90	84
ÖDEV	76	71	69	76	87	62	80	75	92	79

2. Aşağıdaki çizelge, onüç yılın ilk beş alışveriş gününde Dow-Jones endeksindeki değişme yüzdelerini (x_i) ve bu endeksin ilgili yıllardaki değişme yüzdelerini (y_i) göstermektedir.

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1.5	14.9	–1.6	27.7	1.4	27.0
0.2	–9.2	–1.3	22.6	1.5	–4.3
–0.1	19.6	5.6	2.3	–4.7	20.3
2.8	20.3	–1.4	11.9	1.1	4.2
2.2	–3.7				

(a) Örneklem korelasyonunu hesaplayın.

(b) Anakütle korelasyonu 0'dır diyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

3. Bir üniversite, bütün derslerde öğrencilerin öğretim üyelerini değerlendirdikleri bir anket uygulamaktadır. Aşağıdaki çizelge, rassal bir örnekleme giren oniki ders için, hem öğrencilerin öğretim üyesine (1'den 5'e kadar bir ölçekte) verdikleri notu, hem de öğrencilerin ($A = 4$'ten $F = 0$'a kadar bir ölçekte) bekledikleri notu göstermektedir.

ÖĞRETİM ÜYESİ NOTU	2.8	3.7	4.4	3.6	4.7	3.5
BEKLENEN NOT	2.6	2.9	3.3	3.2	3.1	2.8
ÖĞRETİM ÜYESİ NOTU	4.1	3.2	4.9	4.2	3.8	3.3
BEKLENEN NOT	2.7	2.4	3.5	3.0	3.4	2.5

(a) Öğretim üyesi notu ile beklenen not arasındaki örneklem korelasyonunu bulun.
(b) Anakütle korelasyonu sıfırdır diyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

4. Altbölüm 12.1'deki reklâm çalışmasında aşağıdaki bulgular da elde edilmiştir:

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
7.70	141.77	1.57	98.61	4.18	95.83
4.17	96.97	3.63	179.18	6.09	196.67
1.52	163.92	1.57	125.19	3.09	275.97
10.04	154.70	4.65	171.81	3.08	289.59
6.02	151.61	2.97	200.23	1.76	105.71
4.81	147.82	0.98	120.49		

x_i = Reklâm gideri ÷ Bilgi isteyen sayısı

y_i = Bilgi isteyenlerden sağlanan getiri ÷ Bilgi isteyen sayısı

Örneklem korelasyonunu bulun, anakütle korelasyonu 0'dır sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

5. Örnek 12.1'de ele alınan kırkdokuz ülke çalışmasında, uzmanların bu ülkelerin siyasal risk notu ile bebek ölüm oranı arasındaki örneklem korelasyonu 0.75 çıkmıştır. Bu değişkenler arasında ilişki yoktur diyen sıfır önsavını, aynı yönlü ilişki öngören karşı önsavla sınayın.

6. Rassal bir örneklemdeki 353 üniversite öğretim üyesi için, yıllık ücret artışlarıyla öğretimlerinin değerlendirilme puanları arasındaki örneklem korelasyonu 0.11 çıkmıştır.[3] Bu değişkenlerin anakütlede ilişkisiz oldukları sıfır önsavını, anakütle korelasyonunun artı olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

7. ABD ve Almanya'da altmışsekiz çift pay senedinin üçer aylık getirileri arasındaki örneklem korelasyonu 0.51 bulunmuştur.[4] Anakütle korelasyonunun 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, artı olduğunu söyleyen karşı önsavla sınayın.

8. Bölüm 9'daki Alıştırma 28'e dönelim. İki-yanlı karşı önsavla, kızlara ve erkeklere önerilen ücretlerin anakütle varyanslarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

9. Alıştırma 2'nin verilerine dönelim. Spearman sıra korelasyonunu bulup bunu, Dow-Jones endeksinin yılın ilk beş günündeki ve bütün yıldaki başarısı arasında ilişki yoktur sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınamakta kullanın.

10. Alıştırma 4'ün verilerine dönelim. Spearman sıra korelasyonunu bulup, anakütlede bu rassal değişkenler arasında ilişki yoktur sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınamakta kullanın.

---

[3] L. R. Gomez-Mejia, D. R. Balkin, "Determinants of faculty pay: an agency theory perspective," *Academy of Management Journal, 35* (1992), 921-55.

[4] J. E. Hunter, T. D. Coggin, "An analysis of diversification benefit from international equity investment," *Journal of Portfolio Management, 17*, no. 1 (1990), 33-36.

11. Kimi ürünler ya da hizmetlerin alımı ötekilere göre daha zordur. Aşağıda verilen çizelge, yirmidört ürün ve hizmetin alım güçlüklerinin erkekler ve kadınlar tarafından algılanış sıralanmalarını göstermektedir.[5] Spearman sıra korelasyonunu bulun, sıfır önsavını, aynı yönlü ilişki öngören karşı önsavla sınayın.

ÜRÜN YA DA HİZMET	ALIM GÜÇLÜĞÜ SIRASI	
	ERKEKLER	KADINLAR
Araba onarımı	2	1
Araba	4	2
Ev onarımı	1	3
Giysi ve ayakkabı	13	4
Mobilya	5	5
Ev aygıtları	7	6
Ev ve emlâk	6	7
Ev eğlence aygıtları	8	8
Yaşam sigortası	3	9
Ev taşıma	9	10
Spor malzemesi	17	11
Bakkaliye	19	12
Fotoğraf malzemesi	12	13
Araba sigortası	10	14
Çocuk oyuncakları	15	15
Bahçe malzemesi	18	16
Avukatlık hizmeti	11	17
Kuru temizleme	23	18
Kırtasiye	20	19
Seyahat acentası hizmeti	16	20
İlâç ve ecza	21	21
Mücevher	14	22
Mali hizmet	22	23
Kişisel bakım	24	24

12. Çokuluslu şirketler sık sık uluslararası sınırları aşıp bir bölümden öbürüne mal ve hizmet aktarırırlar. Aktardıkları kalemlerin fiyatlarını saptamada esneklikleri çok yüksektir. Büyük ABD ve Japon çokuluslu şirketlerine ilişkin bir çalışma, uluslararası aktarım fiyatı politikasının belirlenmesinde gözönüne alınabilecek görece önemli yirmi değişkeni saptamayı amaçlamaktadır.[6] Bu değişkenlerin sıra sayıları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

[5] J. D. Claxton, J. R. B. Ritchie, "Consumer prepurchase shopping problems: A focus on the retailing component," *Journal of Retailing, 55*, no. 3 (1979), 24-43.

[6] R. Y. W. Tang, K. H. Chan, "Environmental variables of international transfer pricing: A Japan-United States comparison," *Abacus, 15* (1979), 3-12.

DEĞİŞKEN	SIRALAMA	
	ABD	JAPON
Şirketin genel kârı	1	1
Yabancı ülkelerin kâr ve kâr payı aktarımına koyduğu sınırlamalar	2	4
Yabancı ülkelerdeki yan şirketlerin rekabet konumu	3	2
Vergi oranları ve vergi yasalarının ülkelerarası farklılığı	4	14
Yabancı yan şirketlerin başarımlarının değerlenmesi	5	5
Gümrük vergileri ve gümrük yasaları	6	9.5
Yabancı ülkelerin ithalata koyduğu sınırlamalar	7	12
Yabancı yan şirketlerde yeterli nakit bulundurma gereği	8.5	7
Ev sahibi hükümetlerle iyi ilişkilerin korunması	8.5	9.5
Yabancı yan şirketlerden istenebilecek marka hakkına ya da yönetici ücretlerine konan sınırlamalar	10	11
Yabancı yan şirketlerin uyması gereken muhasebe kuralları	11	15
Şirketin iş yaptığı ülkelerde devalüasyon ve yeniden değerleme	12	3
Yabancı ülkelerdeki enflasyon oranları	13	8
Aktarılan sınai ürünün miktarı	14	18
Yabancı yan şirketlerin yabancı ülkelerde gerek duyduğu yerel fonlar	15	16
Yabancı ülkelrdeki damping karşıtı yasalar	16	13
Yabancı yan şirketlerin yerel ortaklarının çıkarları	17	6
İç hükümetlerin yabancı ülkelere yatırımlardan istekleri	18	20
Yabancı ülkelerde mülkiyete el konması riski	19	17
Yabancı ülkelerin tekelleşme karşıtı yasaları	20	19

12.3 DOĞRUSAL REGRESYON (BAĞLANIM) MODELİ

Korelasyonu, bir çift rassal değişkenin arasında varolabilecek doğrusal ilişkinin gücünü ölçmekte kullanıyoruz. Rassal değişkenlerin birbiri yerine kullanılması bütünüyle serbesttir, "X ile Y arasındaki korelasyon" yerine "Y ile X arasındaki korelasyon" demek arasında bir fark yoktur. Bu bölümün geri kalanında, bir değişken çifti arasındaki doğrusal ilişkiyi incelemeyi sürdüreceğiz ama burada biri ötekine *bağımlı* olacaktır. Daha önce gördüğümüz değişkenler arası bakışım (simetri) burada artık yoktur. Burada onun yerine kullanılan kavram şudur: Rassal değişken X belli bir değer almışken, rassal değişken Y'nin buna bir tepkisini bekleriz. Yani X'in aldığı değer, Y'nin değerini etkiler. Bu da Y'nin X'e bağımlılığı olarak düşünülebilir.

Bir örnek olmak üzere, Çizelge 12.5 ile Çizim 12.4, hane başına perakende satışlar ile hane başına harcanabilir gelirin (sabit fiyatlarla dolar cinsinden) yirmiiki yıllık değerlerini göstermektedir.[7] Perakende satışlara giden harcamaların eldeki gelire bağlı olmasını bekleriz. Özellikle, gelirin görece yüksek olduğu

[7] Bu veriler N. K. Dhalla, "Short-term forecasts of advertising expenditures," *Journal of Advertising Research, 19*, no. 1 (1979), 7-14 'ten alınmıştır.

ÇİZELGE 12.5 Hane başına harcanabilir gelir (x_i) ile hane başına perakende satış (y_i) verileri (sabit fiyatlarla dolar cinsinden)

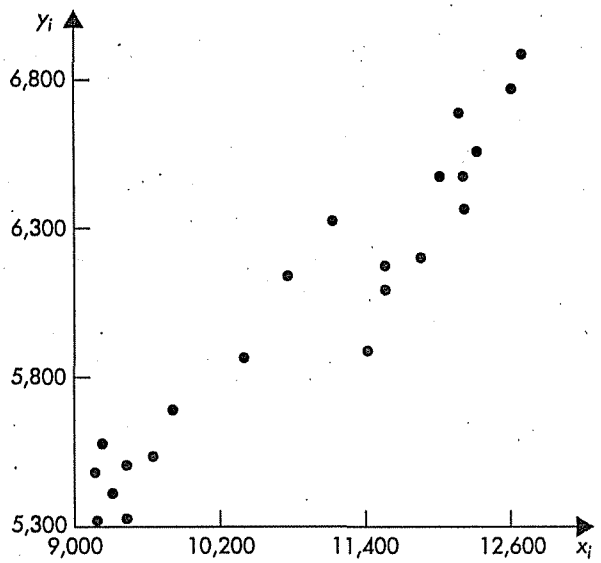
YIL	x_i	y_i	YIL	x_i	y_i
1	9,098	5,492	12	11,307	5,907
2	9,138	5,540	13	11,432	6,124
3	9,094	5,305	14	11,449	6,186
4	9,282	5,507	15	11,697	6,224
5	9,229	5,418	16	11,871	6,496
6	9,347	5,320	17	12,018	6,718
7	9,525	5,538	18	12,523	6,921
8	9,756	5,692	19	12,053	6,471
9	10,282	5,871	20	12,088	6,394
10	10,662	6,157	21	12,215	6,555
11	11,019	6,342	22	12,494	6,755

yıllarda perakende satışların da yüksek olması beklenir. Bu beklenti örüntüsünün genellikle gerçekleştiği, Çizim 12.4'teki serpilmede açıkça görülmektedir.

Regresyon çözümlemesinin amacı, bu ilişkiyi *model*lemektir. Başlangıçta iki sorunla karşılaşırız. Birincisi, sık rastlanan işletmecilik ve iktisat uygulamalarında, geri planda varolabilecek ilişkinin fonksiyonel biçimi tam olarak bilinmez. Örneğimiz bağlamında konuşursak, yüksek gelirin yüksek satışlara yol açacağını bekleriz ama bundan fazla bir şey pek bilmeyiz. Böyle durumlarda, olabildiğince akla uygun basit bir yapı önermeyle işe başlamak uygun olur. Çok sayıda sorun için, en azından bizim ilgilendiğimiz konularda, **doğrusal** bir model varsaymak mantıklı olur.[8]

Burada asıl ilgimiz, X rassal değişkeni belli bir değer alınca, Y rassal değişkeninin aldığı değer üzerindedir. Sözgelimi, hane başına harcanabilir gelirin 12,000 $ olduğu bir yılda, hane başına perakende satış tutarıyla ilgileniyor olabiliriz. Şimdi, harcanabilir gelirin 12,000 $ olduğu belli bir durumda, satış değerinin ne olacağını *tam olarak* bilmeyiz, hiçbir zaman da bilemeyeceğiz. Gerçek yaşamda büyüklükler arasındaki ilişkiler kesin değildir, dolayısıyla harcanabilir gelirin belli bir değerinden doğmuş, olanaklı tek bir satış düzeyi düşünmek mantıklı olmaz. Bunun yerine, harcanabilir gelirin her bir düzeyinden kaynaklanan olanaklı satış düzeylerinin bir *dağılımı* olduğunu benimsemek daha akıllıca olur. Bölüm 4 ile 5'in terimleriyle söylersek, harcanabilir gelir 12,000 $ gibi belli bir değer aldığında, satışların *koşullu dağılımı*ndan akla uygun olarak söz edebiliriz. Bu dağılımın, bu bağlamda, canalıcı bir özelliği ortalaması ya da beklenen değeridir. Dolayısıyla, hane başına harcanabilir gelirin 12,000 $ olduğu yıllarda hane başına perakende sayışların **beklenen değer**inin ya da ortalama düzeyinin ne olacağı pekâlâ sorulabilir. Genel olarak, X rassal değişkeni

[8] Eğer veriler güçlü bir biçimde bunun tersini gösteriyorsa, araştırmacı bu varsayımı terketmeye hazır olmalıdır.



ÇİZİM 12.4 Harcanabilir gelir–perakende satış verilerinin serpilme çizimi

belli bir x değeri aldığında, Y rassal değişkeninin beklenen değerini $E(Y \mid X = x)$ ile göstereceğiz. Doğrusallık varsayımımız, bu koşullu beklentinin x'e doğrusal bağlı olduğunu varsayar.

X, belli bir x değeri aldığı zaman Y rassal değişkeninin beklenen değeriyle ilgileniyoruz. Bu durumda doğrusallık varsayımı, bu beklentiyi

$$E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta x \tag{12.3.1}$$

biçiminde yazmamızı gerektirir. Burada α ile β sabit sayıları, belli bir doğruyu belirler. Bu sayıların her birinin —biri son derece önemli, öteki o kadar önemli olmayan— basit birer yorumu vardır. Perakende satışlar, harcanabilir gelire şu denklemle bağlanıyor olsun:

$$E(Y \mid X = x) = 2{,}000 + 0.4x \tag{12.3.2}$$

Burada Eş. 12.3.1'deki $\alpha = 2{,}000$, $\beta = 0.4$'tür. Şimdi, (12.3.1)'de $x = 0$ konursa,

$$E(Y \mid X = 0) = \alpha$$

elde edilir. Öyleyse α, **bağımsız değişken** $X = 0$ değerini aldığında, **bağımlı değişken** Y'nin beklenen değeri olarak karşımız çıkar. Bu yorumlama kuramsal olarak doğru olmasına karşın uygulamada her zaman pek ciddiye alınmaz. Bu-

nun örneğimizdeki anlamı, harcanabilir gelir 0 $ ise, hane başına perakende satışların 2,000 $ olması beklenir biçimindedir. Ama, 0 $'lık bir harcanabilir gelirle ilgilenmeyiz, çünkü hiçbir zaman gerçekleşmez. Doğrusallık varsayımının bu kadar uzatılmaması gerektiğini unutmamak önemlidir. Harcanabilir gelir konusundaki gözlemlerimiz hane başına 9,000 $ ile 12,500 $ aralığındadır ve doğrusallık bu aralıkta hiç de akla aykırı değilken, vardığımız sonuçları bu aralığın çok dışına taşımak tehlikelidir. Öyleyse, hane başına harcanabilir gelirin 0 $ olduğu bir yılda, hane başına beklenen perakende satışların 2,000 $ olacağı öngörüsü, doğrusallık varsayımının 9,000 $ ile 12,000 $ sınırlarının çok ötesinde de geçerli olduğu inancını yansıtır. Bu aralığın dışında gözleme dayanan bir deneyimimiz olmadığından, böyle bir inanç verilerimizden destek bulamaz.

Şimdi de Eş. (12.3.1)'e dönelim. X, x'ten $(x+1)$'e 1 birim artsın. O zaman

$$E(Y \mid X = x+1) = \alpha + \beta(x+1)$$

böylece,

$$E(Y \mid X = x+1) - E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta(x+1) - (\alpha + \beta x) = \beta$$

bulunur. Öyleyse, doğrunun **eğimi** olan β, X'teki 1 birim artışa karşılık Y'de beklenen artıştır. Eğer (12.3.2) ilişkisi, bu harcanabilir gelir-perakende satış verileri için geçerliyse, bunun anlamı, hane başına harcanabilir gelirde 1 $ artış olursa, hane başına perakende satışlarda 0.4 $ artış beklenmesidir. Böylece, regresyonun amacının, bir değişkenin öbürüne bağımlılığını betimlemek ya da modellemek olduğunu gördük. Bu bağımlığı ele almanın bir yolu, bağımsız değişken X'teki bir değişmeye karşılık, bağımlı değişken Y'de ortaya çıkacak değişme cinsinden olabilir. Az önce gördüğümüz gibi, X'teki her birim artış, Y'de β kadar olması beklenen bir artış yaratmaktadır. Demek ki β artıysa, X'teki bir artışın Y'de de artışa yol açması; β eksiyse, X'teki bir artışın Y'de azalmaya neden olması beklenir. Her iki durumda da bağımlı değişkendeki beklenen değişmenin boyutu, bağımsız değişkendeki değişmenin β katı kadardır.

Bir başka sorun da şudur: Savlanan hiçbir kuramsal ilişki, az önce açıkladığımız gibi, gerçek yaşama *tam tamına* uymaz. Çizim 12.4'teki serpilme noktaları tek bir doğru (ya da kolayca çizebileceğimiz başka herhangi bir basit eğri) üzerinde yer almaz. Bağımsız değişken, x_i değerini alsın. Buna karşılık olan bağımlı değişkeni Y_i ile gösterelim. Bunun beklenen değeri de

$$E(Y_i \mid X = x_i) = \alpha + \beta x_i \qquad (12.3.3)$$

olur. Uygulamada, Y_i'nin gözlenen değeri hemen her zaman bu beklentiden farklı çıkar. Bu sapma, ε_i rassal değişkeni ile gösterilse —bunun ortalaması (12.3.3) gereği 0'dır—

$$\varepsilon_i = Y_i - E(Y_i \mid X = x_i) = Y_i - (\alpha + \beta x_i)$$

ya da

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad (12.3.4)$$

yazılabilir. Eş. (12.3.4), Y'nin X'e göre **anakütle (ya da gerçek) regresyon doğrusu** adını alır.

Anakütle Regresyon Doğrusu

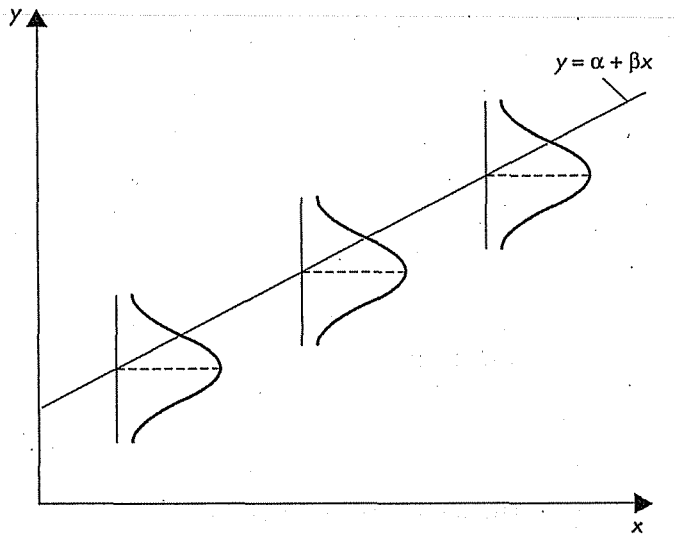
Bağımlı değişken Y ile bağımsız değişken X arasındaki ilişkiyle ilgileniyor olalım. X rassal değişkeni belli x_i değerlerini alırsa anakütle regresyon doğrusu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

buna karşılık gelen Y_i değerlerini verir. Burada α ile β sabit sayılar, ε_i ise ortalaması 0 olan bir rassal değişkendir.

Böylelikle, harcanabilir gelirin x_i gibi belli bir değerine karşılık perakende satışların tepkisi iki parçanın toplamıdır: düzenli ilişkiyi temsil eden $(\alpha + \beta x_i)$ beklentisi ve bu beklentiden bir sapma (ε_i). Bu sapma ya da **hata terimi** ε_i'nin, *harcanabilir gelir dışında*ki çok sayıda etmeni içerdiği düşünülebilir.

Az önce betimlediğimiz regresyon modeli, bağımsız değişkenin aldığı değerlerle bağımlı değişkenin beklenen değerleri arasındaki ilişkiyi görüntüleyen Çizim 12.5'te gösterilmiştir. Bağımsız değişkenin olanak içindeki çeşitli değerlerinden her biri için, bağımlı değişkenin değeri, ortalaması regresyon doğrusu üzerinde yer alan rassal bir değişkenle temsil edilebilir. Biz bunları çizimde, bağımsız değişkenin değerleri verilmişken, bağımlı değişkenin bir dizi olasılık yoğunluk fonksiyonuyla görüntülüyoruz. Regresyon doğrusu bu dağılımların ortalamalarını birleştirmektedir. Verilmiş herhangi bir x_i değeri için, Y_i bağımlı değişkeninin regresyon doğrusundan sapması ya da hata terimi ε_i'dir. Çizim 12.5'te çizilmiş yoğunluk fonksiyonları, orta noktaları 0 iken, ε_i rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak algılanabilir.



ÇİZİM 12.5 Anakütle regresyon modelinin görüntülenmesi; bağımsız değişkenin verilmiş x değerleri için bağımlı değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonları da gösterilmiştir

12.4 EN KÜÇÜK KARELERLE TAHMİN

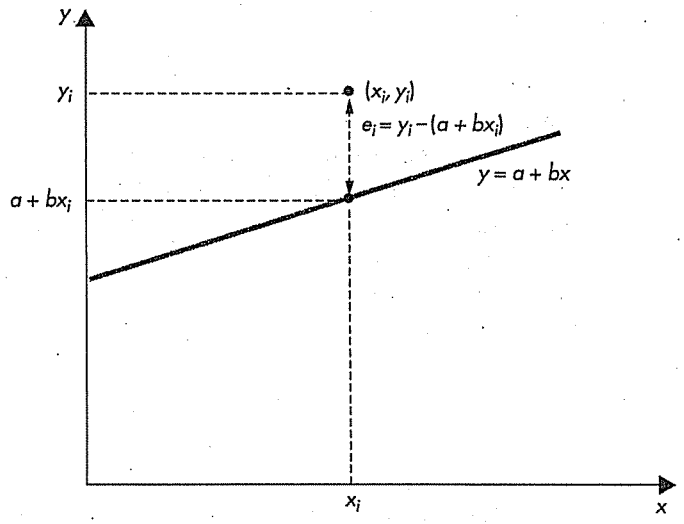
Altbölüm 12.3'te ele alınan anakütle regresyon doğrusu değerli bir kuramsal yapıdır. Ama, uygulamalı çalışmalarda bu, hiçbir zaman *tam tamına* belirlenemez. Bunun yerine, elde ne veri varsa onları kullanıp bir tahmininin yapılması gerekir.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i)$ gibi n çift verimiz olduğunu düşünelim. Bu noktalara bir anlamda en iyi uyum gösteren doğruyu, başka bir deyişle, anakütle regresyon doğrusunun bilinmeyen katsayıları α ile β'nın tahminlerini bulmak isteyelim. Hemen uygulanabilecek bir yaklaşım, serpilme noktalarının gözle incelenmesidir. Biraz deneme-yanılmadan sonra, her noktaya akla uygun yakınlıkta bir doğru çizebiliriz. Ama ilgi çekici özellikler taşıyan daha biçimsel bir yaklaşım bulunmaktadır.

a ile b sayılarını, α ile β'nın olanaklı tahminleri olarak alalım, böylece tahmin edilen doğru

$$y = a + bx$$

olur. Bunun ne kadar iyi bir tahmin olduğunu anlayabilmek için, (x_i, y_i) noktalarının bu doğrudan uzaklıklarını ölçecek bir ölçüye gerek vardır. Çizim 12.6, tek bir nokta için bu uzaklığın nasıl ölçüldüğünü gösterir. x_i değerine karşılık gelen doğru üzerindeki y değeri $(a + bx)$ iken, bağımlı değişkenin gerçekte gözlenen değeri y_i'dir. Öyleyse ikisi arasındaki fark aşağıdaki kadar olur:



ÇİZİM 12.6 (x_i, y_i) noktasının $y = a + bx$ doğrusundan uzaklığı: $e_i = y_i - (a + bx_i)$

$$e_i = y_i - (a + bx_i) \qquad (12.4.1)$$

Bir noktadan doğruya olan en kısa uzaklığı almayışımız ilk bakışta şaşırtıcı görünebilir. Amacımızın, bağımsız değişkeni bağımlı değişkenin davranışını açıklamada kullanmak olduğunu anımsayalım. Dolayısıyla e_i farkı, bağımlı değişkenin önerilen doğru üzerindeki $a + bx_i$ değerinden sapmasını yansıtır. Bunu göstermek için, Çizelge 12.5'teki ilk harcanabilir gelir ve perakende satış gözlemlerine dönelim. Bunlar şöyledir:

$$x_i = 9{,}098 \qquad y_i = 5{,}492$$

Önerilen

$$y = 2000 + 0.4x$$

doğrusunu, yani sabit terimi ve eğimi

$$a = 2{,}000 \qquad b = 0.4$$

olan doğruyu da alalım. Bu doğrunun, harcanabilir gelir 9,098 $ iken, perakende satışlar için tahmin ettiği değer şudur:

$$a + bx_1 = 2{,}000 + (0.4)(9{,}098) = 5{,}639.2$$

Gerçekleşmiş y_i değeriyle, bu doğrunun tahmin ettiği değer arasındaki fark

$$e_1 = y_1 - (a + bx_1)$$

$$= 5{,}492 - 5{,}639.2 = -147.2$$

olur.

Şimdi, gerçek regresyon doğrusunun tahmini olabilecek her akla yakın adayı için, veri noktalarından kimisi tahmin edilen doğrunun altında, kimisi üstünde kalacaktır. Öyleyse, (12.4.1)'deki e_i'lerin de kimisi artı, kimisi eksi olacaktır. Bu eksi ve artı değerlere eşit ceza vermek istersek, bunu sağlamanın bir yolu e_i'lerin *kare*sini almaktır. Noktaların doğruya olan uzaklıklarının kareleri toplamı şöyle yazılabilir:

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

En küçük kareler yöntemi, anakütle regresyon doğrusunun bir tahmini olarak, bu kareler toplamı en küçük olan doğruyu seçer.

En Küçük Kareler Tahmini ve Örneklem Regresyon Doğrusu

Anakütle regresyon doğrusu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

olan bir süreçte, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i)$ gibi n tane gözlem çiftinden oluşan bir örneklem olsun. Anakütle katsayıları α ile β'nın **en küçük kareler tahminleri** a ile b,

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

sapma kareleri toplamını en küçükleyen değerlerdir. Bu yolla bulunan tahminlerin

$$b = \frac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

ve

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

olduğu gösterilebilir.[9] Burada $\bar{x}$ ile $\bar{y}$, ilgili örneklem ortalamalarıdır.

$$y = a + bx$$

doğrusuna Y'nin X'e göre **örneklem regresyon doğrusu** denir.

[9] Bu bulgu türev cebiri kullanılarak çok kolay elde edilebilir. Bu bölümün sonundaki EkA12'ye bakınız.

ÇİZELGE 12.6 Hane başına perakende satışların, hane başına harcanabilir gelire göre örneklem regresyonunun hesaplanması ($x_i y_i$ ile x_i^2 en yakın bine yuvarlatılmıştır)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	9,098	5,492	49,966,000	82,774,000
	9,138	5,540	50,625,000	85,503,000
	9,094	5,305	48,244,000	82,701,000
	9,282	5,507	51,116,000	86,156,000
	9,229	5,418	50,003,000	85,174,000
	9,347	5,320	49,726,000	87,366,000
	9,525	5,538	52,749,000	90,726,000
	9,756	5,692	55,531,000	95,180,000
	10,282	5,871	60,366,000	105,720,000
	10,662	6,157	65,646,000	113,678,000
	11,019	6,342	60,882,000	121,418,000
	11,307	5,907	66,790,000	127,848,000
	11,432	6,124	70,010,000	130,691,000
	11,449	6,186	70,824,000	131,080,000
	11,697	6,224	72,802,000	136,820,000
	11,871	6,496	77,114,000	140,921,000
	12,018	6,718	80,737,000	144,432,000
	12,523	6,921	86,672,000	156,826,000
	12,053	6,471	77,995,000	145,275,000
	12,088	6,394	77,291,000	146,120,000
	12,215	6,555	80,069,000	149,206,000
	12,494	6,755	84,397,000	156,100,000
Toplamlar	237,579	132,933	1,448,555,000	2,599,715,000

Perakende satışlar-harcanabilir gelir verileriyle örneklem regresyon doğrusunun hesaplanması, Çizelge 12.6'daki hesaplamalardan çıkarılır. Buna göre

$$\sum x_i = 237{,}579 \qquad \sum y_i = 132{,}933$$

$$\sum x_i y_i = 1{,}448{,}555{,}000 \qquad \sum x_i^2 = 2{,}599{,}715{,}000$$

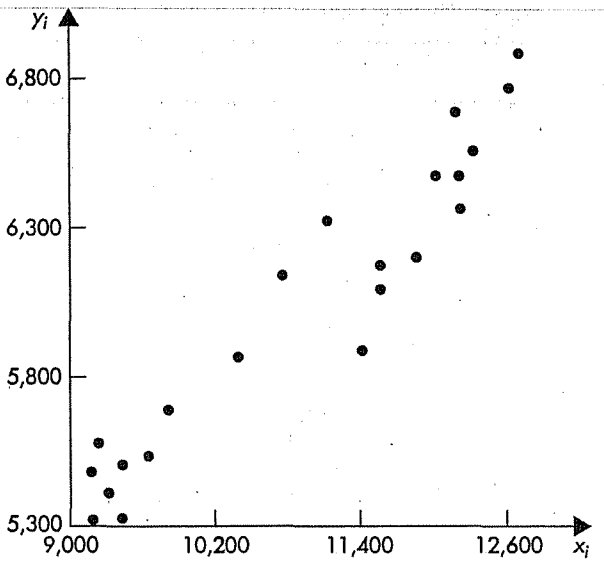
bulunur. Öyleyse örneklem ortalamaları aşağıdaki gibidir:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{237{,}579}{22} = 10{,}799.0 \qquad \text{ve} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{132{,}933}{22} = 6{,}042.4$$

Dolayısıyla, anakütle regresyon doğrusunun katsayılarının en küçük kareler tahminleri

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{1{,}448{,}555{,}000 - (22)(10{,}799.0)(6{,}042.4)}{2{,}599{,}715{,}000 - (22)(10{,}799.0)^2} = 0.3815$$



Çizim 12.7 Harcanabilir gelir-perakende satış verileri ve en küçük karelerle tahmin edilmiş regresyon doğrusu, $y = 1{,}923 + 0.3815x$

ve

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 6{,}042.4 - (0.3815)(10{,}799.0) = 1.923$$

elde edilir. Demek ki tahmin edilen ya da örneklem regresyon doğrusu da şöyledir:

$$y = 1.923 - 0.3815x$$

Regresyon doğrusu eğiminin yorumunu anımsarsak, hane başına harcanabilir gelirde her 1 $ artışın, hane başına perakende satışlarda ortalama 0.3815 $'lık bir artışa yol açtığını tahmin ediyoruz. Çizim 12.7, en küçük karelerle tahmin edilmiş regresyon doğrusunu, yirmiiki veri noktasıyla birlikte göstermektedir. Tahmin edilmiş regresyon doğrusunun bu veri noktalarına iyi bir görsel uyum gösterdiği anlaşılmaktadır.

Bu tahminleri elde etmede kullanılan aritmetik işlemler şimdi bile yorucudur. Ancak, daha karmaşık regresyon sorunları için, hesaplama yükü çok daha ağır olur. Uygulamada bu fazla sorun çıkarmaz, çünkü regresyon hesaplamalarını yapmak üzere bilgisayar paketleri geliştirilmiştir. (Bu tür paketleri Bölüm 13'te ele alacağız.) Ayrıca, bazı cep hesap makinelerine de doğrusal regresyon hesaplamaları için programlar yerleştirilmiştir.

12.5 DOĞRUSAL REGRESYON MODELİNİN STANDART VARSAYIMLARI

En küçük kareler yöntemi, Altbölüm 12.4'te, bir anakütle regresyon doğrusunu tahmin etmede kullanılabilecek akla yakın bir süreç olarak tanıtıldı. En küçük kareler tahminleri her zaman en uygun tahminler değildir. Ama belli varsayımlar altında, en küçük kareler tahminlerinin istenen özellikleri taşıdığı gösterilebilir. Eldeki veriler ya da kuramsal nedenler tersini söylemedikçe bu standart varsayımlar genellikle geçerli olur. Bu altbölümde, bu varsayımları tanıtacağız; bunların yarattığı önemli bir sonuca Altbölüm 12.6'da değineceğiz.

Doğrusal Regresyon Modelinin Standart Varsayımları

Anakütle regresyon doğrusunu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

ile gösterelim, elimizde n çift veri olsun. Çoğu zaman aşağıdaki standart varsayımlar yapılır:

1. x_i değerleri ya sabittir (sözgelimi deneyi yapan tarafından belirlenmiştir) ya da ε_i hata terimlerinden bağımsız X_i rassal değişkenlerinin gerçekleşmiş değerleridir. İkinci durumda çıkarsama, gözlenen x_i değerleri koşul alınarak yürütülür.

2. Hata terimleri ε_i'ler, ortalaması sıfır olan rassal değişkenlerdir, yani

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

3. Bütün ε_i rassal değişkenlerinin varyansı aynıdır, diyelim σ_ε^2'dur, böylece

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

olur.

4. ε_i rassal değişkenleri birbiriyle ilişkili değildir, böylece

$$i \neq j \text{ için} \qquad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$$

olur.

Bu varsayımlardan ilki genellikle, haklı nedenlerle, doğru sayılır, ama kimi ileri ekonometri çalışmalarında savunulamaz. (Bu varsayım, sözgelimi, x_i'ler tam ölçülemediği ya da regresyon denklemi karşılıklı bağımlı olan bir denklem takımının bir parçası olduğu zaman geçerliliğini yitirir.) Ancak bundan böyle bu varsayımı aynen kabul edeceğiz.

2-4. varsayımlar, regresyon denklemindeki ε_i hata terimleriyle —yani Y_i'lerle onların koşullu beklentisi olan $(\alpha + \beta x_i)$'ler arasındaki farklarla— ilgili-

dir. Beklenen farkın 0, bütün farkların varyansının da aynı olduğu varsayılmaktadır. Böylelikle hata terimlerinin bazı gözlemlerde büyük, bazılarında küçük olmasını beklemiyoruz. Son olarak, bu farkların birbirleriyle ilişkisiz oldukları varsayılmaktadır. Böylece, sözgelimi, bir gözlem noktasındaki farkın büyük bir artı değer çıkması, başka hata terimlerinden herhangi birini tahmin etmemize yardımcı olmaz. Eğer ε_i hata terimleri ortalaması sıfır olan normal bir dağılımdan çekilmiş rassal bir örneklem olarak düşünülürse, 2-4. varsayımlar sağlanmış olur.

12.6 GAUSS-MARKOV TEOREMİ

Bu altbölümde, bir anakütle regresyon doğrusunun tahmininde en küçük karelerin kullanılmasının gerekçelerini açıklayacağız. Elimizde (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots,$ (x_n, y_n) gibi n çift örneklem gözlemi olsun. Anakütle katsayıları α ile β'nın çok sayıda olanaklı tahmini yapılabilir. Bir olanak, dikkatimizi y_i'nin doğrusal fonksiyonlarıyla, yani

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

genel biçimindeki tahminlerle sınırlamaktır. Burada c_i'ler, y_i'den bağımsız sayılardır. Geniş bir yelpazedeki olanaklı tahminler içinde en küçük kareler tahminleri, aşağıdaki çerçevede açıklandığı gibi, en çekici olanlardır.

Gauss-Markov Teoremi

Anakütle regresyon doğrusunu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

ile gösterelim, elimizde n çift veri olsun. Ayrıca, Altbölüm 12.5'teki 1-4. varsayımların da geçerli olduğunu düşünelim.

Bu durumda en küçük kareler tahmin edicileri (yani Altbölüm 12.4'ün en küçük kareler tahminleri olan a ile b'ye karşılık gelen rassal değişkenler), α ile β'nın sapmasız, Y_i'ye göre doğrusal bütün olanaklı tahmin edicileri içinde varyansı en küçük olanlardır.

Üstelik, d_0 ile d_1 herhangi iki sabit sayı ise ve biz

$$d_0 \alpha + d_1 \beta$$

toplamını tahmin etmek istiyorsak,

$$d_0 a + d_1 b$$

toplamına karşılık gelen tahmin edici, sapmasız ve Y_i'ye göre doğrusal bütün olanaklı tahmin ediciler kümesi içinde varyansı en küçük olanıdır. (Regresyon doğrusunu bağımlı değişkenin kestirimlerini elde etmede kullanırken bu bulgu işe yarar.)

Bu teorem sayesinde en küçük kareler tahmin edicilerinin, **doğrusal, en iyi, sapmasız tahmin edici (DESTE)** oldukları söylenir.

Gauss-Markov teoremi, bir regresyon modelinin anakütle katsayılarının tahmininin en küçük karelerle yapılması için güçlü bir dürtü verir. Bölüm 7'den bir nokta tahmin edicisinin etkinliği tanımını anımsarsak, kalabalık bir sapmasız tahmin ediciler kümesi içinde en etkin tahmin edicileri, en küçük kareler yönteminin verdiğini görürüz. Ancak bu bulgunun Altbölüm 12.5'teki varsayımlara dayandığını, bu varsayımlar çiğnendiğinde geçerliliğini yitireceğini vurgulamamız gerekir. Bu bölümün geri kalanında, en küçük kareler tahmin yönteminin özelliğini bu varsayımlar doğruyken incelemeyi sürdüreceğiz.

Regresyon çözümlemesi tekniği, işletmecilik ve iktisat alanlarında belki de en yaygın kullanılan istatistik aracıdır. Dolayısıyla bu altbölümün bulguları, burada kısaca ele alınmış olsa da, uygulamada büyük önem taşır. Uygulamada regresyon modelleri genellikle en küçük kareler yöntemiyle tahmin edilir. Altbölüm 12.4'te bu tekniği, bir veri noktaları kümesine bir doğru uydurmada kullanılabilecek akla yakın bir süreç olarak tanıttık. Ama aynı amaca ulaşmada kullanılabilecek başka yollar da olabileceğini düşünmek zor değildir. En küçük kareler yöntemini ötekilerden ayıran olgu, Gauss-Markov teoremine göre, bu yolla bulunan tahmin edicilerin istenilen istatistik özelliklerini taşımalarıdır.

12.7 DOĞRUSAL REGRESYON MODELİNİN AÇIKLAMA GÜCÜ

Bir regresyon denklemi, bağımlı bir Y değişkenini *açıklamak* için, bağımsız bir X değişkenindeki bilgileri kullanma çabası olarak görülebilir. Bu altbölümde, bu çabanın, örneklem verileriyle ne kadar başarılı olunduğunu gösteren bir ölçü geliştireceğiz. Bağımlı değişken gözlemleri, örneklem içinde belli bir *değişkenlik* sergiler. Burada, özünde, Y'nin X'e doğrusal bağımlılığının, bu değişkenliğin *kaçta kaçını* açıkladığını soruyoruz.

Örneklem değerleri için regresyon tahmini

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

ya da

$$y_i = \hat{y}_i + e_i \tag{12.7.1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

kullanılmıştır. $\hat{y}_i$ büyüklüğü, bağımlı değişkenin regresyon doğrusuyla tahmin edilen değeri, kalıntı e_i ise, gözlenen ve beklenen değerlerin farkıdır. Dolayısıyla

kalıntı, örneklemdeki bağımlı değişkenin davranışının, bağımsız değişkenle kurulan doğrusal ilişkiyle açıklanamayan parçasıdır. Eş. (12.7.1)'deki bu üç büyüklük, harcanabilir gelir-perakende satışlar verileri için, Çizelge 12.7'nin ilk üç sütununda gösterilmiştir.

Şimdiki amacımız için Eş. (12.7.1)'de küçük bir değişiklik yararlı olur. Bağımlı değişkenin örneklem değişkenliğini, örneklem ortalamasından sapmalar cinsinden düşünebiliriz. Eş. (12.7.1)'in her iki yanından $\bar{y}$'yi çıkarırsak,

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i \qquad (12.7.2)$$

ya da

Örneklem ortalamasından sapmamn gözlenen değeri

= Örneklem ortalamasından sapmanın kestirilen değeri + Kalıntı

yazılabilir. Eş. (12.7.2)'deki ilk iki büyüklük, bizim verilerimizle, Çizelge 12.7'nin en sağdaki iki sütununda yer almaktadır.

ÇİZELGE 12.7 Hane başına perakende satışların gözlenen ve hane başına harcanabilir gelirle doğrusal regresyondan kestirilen değerleri ile kalıntıları

y_i	$\hat{y}_i = a + bx_i$ $= 1{,}923 + 0.3815x_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$y_i - \bar{y}$ $= y_i - 6{,}042.4$	$\hat{y}_i - \bar{y}$ $= \hat{y}_i - 6{,}042.4$
5,492	5,394	98	–550.4	–648.4
5,540	5,409	131	–502.4	–633.4
5,305	5,392	–87	–737.4	–650.4
5,507	5,464	43	–535.4	–578.4
5,418	5,444	–26	–624.4	–598.4
5,320	5,489	–169	–722.4	–553.4
5,538	5,557	–19	–504.4	–485.4
5,692	5,645	47	–350.4	–397.4
5,871	5,846	25	–171.4	–196.4
6,157	5,991	166	114.6	–51.4
6,342	6,127	215	299.6	84.6
5,907	6,237	–330	–135.4	194.6
6,124	6,284	–160	81.6	241.6
6,186	6,291	–105	143.6	248.6
6,224	6,385	–161	181.6	342.6
6,496	6,452	44	453.6	409.6
6,718	6,508	210	675.6	465.6
6,921	6,701	220	878.6	658.6
6,471	6,521	–50	428.6	478.6
6,394	6,535	–141	351.6	492.6
6,555	6,583	–28	512.6	540.6
6,755	6,689	66	712.6	646.6

Şimdi, Eş. (12.7.2)'nin her iki yanının karesini alır da örneklem endeksi i'ye göre toplarsak, sonucun aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i}^{n}e_i^2 \qquad (12.7.3)$$

Eş. (12.7.3)'ün değerli bir yorumu vardır. Sol yanındaki büyüklük, bağımlı değişkenin kendi ortalaması etrafındaki örneklem değişkenliğini temsil eder. Bu iki parçaya ayrılmıştır. (12.7.3)'ün sağ yanındaki ilk terim bu değişkenliğin regresyon tarafından açıklanan parçasını, ikinci terim de açıklanamayan değişkenliği temsil eder. Öyleyse bu eşitlik şöyle yazılabilir:

Toplam örneklem değişkenliği = Açıklanan değişkenlik
+ Açıklanamayan değişkenlik

Bir anlamda, örneklem değişkenliğinin açıklanan oranı ne kadar büyükse, regresyonun açıklama gücü de o kadar yüksektir.

Kareler Toplamının Ayrıştırılması ve Belirlilik Katsayısı

n çift gözleme en küçük karelerle şöyle bir doğrusal regresyon denklemi uydurulmuş olsun:

$$y_i=a+bx_i+e_i=\hat{y}_i+e_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Burada a ile b, anakütle regresyonunun sabit terimi ile eğiminin en küçük kareler tahmin edicileri, e_i'ler de uydurulan regresyon doğrusunun kalıntılarıdır.

Aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım (burada $\bar{y}$ bağımlı değişkenin örneklem ortalamasıdır):

BÜTÜN KARELER TOPLAMI: $\text{BKT}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

REGRESYON KARELERİ TOPLAMI: $\text{RKT}=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$

HATA KARELERİ TOPLAMI: $\text{HKT}=\sum_{i=1}^{n}e_i^2$

Bu durumda şu eşitlik yazılabilir:

$$\text{BKT}=\text{RKT}+\text{HKT}$$

Uydurulan regresyonun belirlilik katsayısı R^2 şöyle tanımlanır:

$$R^2=\frac{\text{RKT}}{\text{BKT}}=1-\frac{\text{HKT}}{\text{BKT}}$$

Bu da, bağımlı değişkendeki örneklem değikenliğinin, bağımsız değişkenle kurulan doğrusal ilişki tarafından açıklanan oranıdır. Ayrıca, R^2'nin, Altbölüm 12.1'de tanımlanan örneklem korelasyon katsayısının karesi olduğu da gösterilebilir.[10]

Örneklem değişkenliğinin açıklanan oranı tanımından

$$0 \le R^2 \le 1$$

yazılabilir. R^2 ne kadar büyükse, regresyonun açıklama gücü de o kadar yüksektir.

Örneğimizde, Çizelge 12.7'nin 3. ve 4. sütunlarındaki terimlerin kareleri toplamı sırasıyla şöyledir:

$$\text{HKT} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 435{,}799 \qquad \text{BKT} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 5{,}397{,}560$$

Dolayısıyla belirlilik katsayısı aşağıdaki gibi bulunur:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{HKT}}{\text{BKT}} = 1 - \frac{435{,}799}{5{,}397{,}560} = 0.92$$

Bu bulgunun anlamı şudur: Hane başına perakende satışların örneklem değişkenliğinin %92'si, bu satışların hane başına harcanabilir gelire doğrusal bağımlılığıyla açıklanmaktadır. Öyleyse, bağımsız değişken olarak hane başına harcanabilir geliri kullanmakla, hane başına perakende satışlardaki değişkenliği açıklamada bir hayli başarılı olduğumuz sonucuna varabiliriz.

ALIŞTIRMALAR

13. Bir şirket belli bir stereo sistemi ülkenin sekiz değişik bölgesinde farklı fiyatlandırmıştır. Aşağıdaki çizelge, bu fiyatları (bin dolar olarak) ve bu fiyatlara satılan birim sayılarını göstermektedir.

SATIŞLAR	420	380	350	400	440	380	450	420
FİYAT	5.5	6.0	6.5	6.0	5.0	6.5	4.5	5.0

(a) Bu verilerin serpilme çizimini yapın, satışların fiyata göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Fiyatta 100 $'lık bir artışın satışlar üzerinde ne kadar etki yapmasını beklersiniz?

---

[10] Burada r^2 yerine onun eşdeğeri olan R^2 kullanmamızın nedeni, belirlilik katsayısının, bir sonraki bölümde ele alınan çoklu regresyon durumuna doğal olarak genişletilebilmesidir.

14. Dow-Jones endeksinin yılın ilk beş günündeki değişim yüzdesi (x) ve bütün yıl boyunca değişim yüzdesi (y) verilerini gösteren Alıştırma 2'ye dönelim.

(a) y'nin x'e göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Örneklem regresyon doğrusunun sabit terimi ile eğimini yorumlayın.

15. 13 Kasım 1989 Cuma günü New York Borsası'nda fiyatlar hızla düştü; Standard and Poors 500 pay senedi endeksi o gün %6.1 düşüş gösterdi. Aşağıdaki çizelge, en büyük yirmibeş yatırım fonunun 13 Kasım 1989'daki *kayıp* yüzdelerini (y) vermektedir. Ayrıca, kâr paylarının ve sermaye kazançlarının yeniden yatırıldığı varsayımıyla, bu fonların 1 Ocak'tan 12 Kasım 1989'a kadarki *kazanç* yüzdeleri (x) de verilmiştir.

y	x	y	x	y	x
4.7	38.0	6.4	39.5	4.2	24.7
4.7	24.5	3.3	23.3	3.3	18.7
4.0	21.5	3.6	28.0	4.1	36.8
4.7	30.8	4.7	30.8	6.0	31.2
3.0	20.3	4.4	32.9	5.8	50.9
4.4	24.0	5.4	30.3	4.9	30.7
5.0	29.6	3.0	19.9	3.8	20.3
3.3	19.4	4.9	24.6		
3.8	25.6	5.2	32.3		

(a) 13 Kasım kayıplarının, 12 Kasım 1989 öncesi kazançlarına göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Örneklem regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.

16. Aşağıdaki çizelgede yer alan sayılar, onbir yıl için işsizlik oranının yıllık değişmeleri ile çalışanların kendi hastalığı nedeniyle ortalama işe gelememe oranındaki yıllık değişmeleri göstermektedir.[11]

YIL	İŞSİZLİK ORANINDAKİ DEĞİŞME	ÇALIŞANIN KENDİ HASTALIĞI NEDENİYLE ORTALAMA İŞE GELEMEME ORANINDAKİ DEĞİŞME
1	–0.2	+0.2
2	–0.1	+0.2
3	+1.4	+0.2
4	+1.0	–0.4
5	–0.3	–0.1
6	–0.7	+0.2
7	+0.7	–0.1
8	+2.9	–0.8
9	–0.8	+0.2
10	–0.7	+0.2
11	–1.0	+0.2

[11] Yayınevinin izniyle J. P. Leigh, "The effects of unemployment and the business cycle on absenteesim," *Journal of Economics and Business, 37* (1985), 159-70'ten buraya alınmıştır. Copyright 1985, Elsevier Science Publishing Co. Inc.

(a) Çalışanların hastalık nedeniyle ortalama işe gelememe oranınındaki yıllık değişmenin, işsizlik oranının yıllık değişimine göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Regresyon doğrusunun tahmin edilen eğimini yorumlayın.

17. Bir mali analist, bir örneklemdeki yirmi aylık gözlemlerden, bir şirketin pay senedinin getiri yüzdesini (Y), Standard and Poors 500 endeksinin getiri yüzdesi (X) ile açıklamak istemektedir. Elinde şu bilgiler vardır:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 22.6 \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i = 25.4 \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 145.7 \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 150.5$$

(a) Y'nin X'e göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Örneklem regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.

(c) Örneklem regresyon doğrusunun sabit terimini yorumlayın.

18. Bir şirket yeni satış temsilcilerinin hepsini bir yetenek sınavına sokmaktadır. Yönetim bu sınavın, ilerideki başarıyı ne derece ölçebildiğiyle ilgilenmektedir. Aşağıdaki çizelge, rassal bir örneklemdeki sekiz temsilcinin haftalık ortalama satışaları (bin dolar olarak) ile sınav notlarını göstermektedir.

HAFTALIK SATIŞLAR	10	12	28	24	18	16	15	12
SINAV NOTU	55	60	85	75	80	85	65	60

(a) Haftalık satışların yetenek sınavı sonuçlarına göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Regresyon doğrusunun tahmin edilen eğimini yorumlayın.

19. İyi bir ithal biranın bir kentin lokantalarında bir gecede satılan şişe sayısının, o lokantalardaki ortalama yemek fiyatıyla doğrusal bağlantılı olduğu ileri sürülmüştür. Aşağıdaki bulgular yaklaşık aynı büyüklükteki $n = 17$ lokantalık bir örneklemden elde edilmiştir.

y = Bir gecede satılan şişe sayısı
x = Bir yemeğin dolar olarak ortalama fiyatı

$$\bar{x} = 25.5 \qquad \bar{y} = 16.0 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 350 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = 180$$

(a) Örneklem regresyon doğrusunu bulun.

(b) Örneklem regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.

(c) Örneklem regresyon doğrusunun sabit terimi anlamlı bir biçimde yorumlanabilir mi? Açıklayın.

20. Örneklem regresyon doğrusu

$$y_i = a + bx_i + e_i = \hat{y}_i + e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

olsun, $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ ise, sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenlerin örneklem ortalamalarını göstersin.

(a) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterin:

$$e_i = y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})$$

(b) (a)'daki bulgunuzu kullanarak aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterin:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

(c) (a)'daki bulgunuzu kullanarak aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterin:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = b^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

(d) Aşağıdaki eşitliği doğrulayın:

$$\hat{y}_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x})$$

(e) (c) ile (d)'deki bulgularınızla şunu gösterin:

$$\text{BKT} = \text{RKT} + \text{HKT}$$

(f) (a)'daki bulgunuzu kullanarak aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterin:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

21. Örneklem regresyon doğrusu için

$$R^2 = \frac{\text{RKT}}{\text{BKT}}$$

belirlilik katsayısını göstersin.

(a) Alıştırma 20(d)'yi kullanarak aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterin:

$$R^2 = b^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

(b) (a)'daki bulgunuzu kullanarak, belirlilik katsayısının, X ile Y arasındaki örneklem korelasyonunun karesine eşit olduğunu gösterin.

(c) Y'nin X'e göre en küçük kareler regresyonunun eğimi b, X'in Y'ye göre en küçük kareler regresyonunun eğimi b^*, X ile Y arasındaki örneklem korelasyonu r olsun.

$$b \cdot b^* = r^2$$

olduğunu gösterin.

22. Alıştırma 13'ün verilerini kullanarak, stereo sistem satışının fiyata göre regresyonunun belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.

23. Alıştırma 14'ü sürdürerek, Dow-Jones endeksindeki yıllık değişme yüzdesinin, aynı endeksin yılın ilk beş günündeki yüzde değişimine göre regresyonu için belir-

lilik katsayısını bulup yorumlayın. Yanıtınızı, Alıştırma 2'de bu verilerle bulduğunuz örneklem korelasyonuyla karşılaştırın.

24. Alıştırma 15'in verilerine dayanarak, yatırım fonlarının 13 Kasım 1989'daki kayıp yüzdelerindeki örneklem değişkenliğinin, 1 Ocak-12 Kasım 1989 kazanç yüzdeleriyle olan doğrusal bağımlılıkla açıklanabilecek oranını bulun.

25. Alıştırma 16'daki işsizlik oranı ve işe gitmeme oranı verilerine dönelim.

(a) Çalışanların kendi hastalığı nedeniyle ortalama işe gitmeme oranındaki değişmenin, işsizlik oranındaki değişmeye göre en küçük kareler regresyonu için kestirilen $\hat{y}_i$ değerleri ile e_i kalıntılarını bulun.

(b) BKT, RKT ve HKT kareli toplamlarını bulup aşağıdaki eşitliği doğrulayın:

$$\text{BKT} = \text{RKT} + \text{HKT}$$

(c) (b)'deki bulgunuzu kullanarak, belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.

26. Alıştırma 17'deki soruda şirketin pay senedi getiri oranının, Standard and Poors 500 endeksinin getiri oranına göre regresyonunun belirlilik katsayısını bulmak için şunu kullanın [*İpucu*: Alıştırma 21 (a)'daki bulgudan yararlanın]:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 196.2$$

27. Alıştırma 16'da verilen satış temsilcilerinin haftalık satışlarıyla yetenek sınavı sonuçları verilerine dönelim.

(a) Haftalık satışların, yetenek sınavı sonuçlarına göre en küçük kareler regresyonundan $\hat{y}_i$ kestirim değerleri ile e_i kalıntılarını bulun.

(b) BKT, RKT ve HKT kareli toplamlarını bulup aşağıdaki eşitliği doğrulayın:

$$\text{BKT} = \text{RKT} + \text{HKT}$$

(c) (b)'deki bulgunuzu kullanarak, belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.

(d) Satışlarla yetenek sınavı sonuçlarının örneklem korelasyonunu doğrudan bulun, bunun karesinin belirlilik katsayısı olduğunu gösterin.

28. Alıştırma 6'da ele aldığımız çalışmada, 353 öğretim üyesi için yıllık ücret artışı ile öğretim değerlendirmeleri arasındaki korelasyonun 0.11 olduğunu gördük. Bu örneklemde yıllık ücret artışlarının öğretim değerlendirmelerine göre regresyonunun belirlilik katsayısı kaç olur? Bulgunuzu yorumlayın.

12.8 GÜVEN ARALIKLARI VE ÖNSAV SINAMALARI

Anakütle regresyon doğrusu olan

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

denklemini incelerken, en küçük kareler yöntemiyle, bilinmeyen anakütle katsayıları α ile β'nın nokta tahminlerini bulduk. Buna ek olarak, belli varsayımlar

altında, en küçük kareler tahmin edicilerinin, Gauss-Markov teoremi sayesinde, istenen özellikleri taşıdığını gördük. Ama nokta tahmininin tek başına, verilerin baştan sona çözümlenmesi için yeterli olması pek enderdir. Şimdiki bağlam içinde, sözgelimi, yapılan tahminlerin ne kadar güvenilir olduğunun sorulması doğaldır. Bu altbölümde, anakütle regresyon katsayılarının güven aralıklarını bulma, önsav sınamalarını yapma gibi sorunları ele alacağız.

Başlangıçta, Altbölüm 12.7'de gördüğümüz BKT büyüklüğünün önemli bir kullanımını çerçeve içinde veriyoruz.

Hata Varyansının Tahmini

Anakütle regresyon doğrusu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

olsun. Altbölüm 12.5'teki 1-4. varsayımlar da geçerli olsun. Hata terimleri ε_i'lerin ortak olan varyanslarını σ_ε^2 ile gösterelim. σ_ε^2'nin sapmasız bir tahmin edicisi[12] şöyle bulunur:

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{\text{HKT}}{n-2}$$

Bir sonraki çerçevede, anakütle regresyon doğrusunun eğiminin en küçük kareler tahmin edicisinin örnekleme dağılımını ele alıyoruz.

En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Örnekleme Dağılımı

Anakütle regresyon doğrusunun eğimi olan β'nın en küçük kareler tahminini b ile gösterelim. Altbölüm 12.5'teki 1-4. varsayımlar geçerliyse, b'ye karşılık gelen tahmin edici β için sapmasızdır ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

σ_b^2'nin sapmasız bir tahmin edicisi de şöyle bulunur:

[12] Bilinmeyen ε_i yerine onların yaklaşığı olan e_i en küçük kareler kalıntılarını kullanmak doğaldır. Sezgisel olarak, $(n-2)$ ile bölmenin nedeni ise, bilinmeyen α ve β anakütle katsayılarını tahmin ederken 2 serbestlik derecesi "kaybetmiş" olmamızdır.

$$s_b^2 = \frac{s_e^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_e^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Harcanabilir gelir-perakende satışlar örneğimizde şunu bulabiliriz:

$$s_e^2 = \frac{\text{HKT}}{n-2} = \frac{435{,}799}{22-2} = 21{,}789.95$$

Ayrıca Altbölüm 12.4'te şunları da bulmuştuk:

$$\bar{x} = 10{,}799 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2{,}599{,}715{,}000$$

Böylelikle

$$s_b^2 = \frac{21{,}789.95}{[2{,}599{,}715{,}000 - (22)(10{,}799)^2]} = 0.0006388$$

bulunur, öyleyse anakütle regresyon doğrusunun eğiminin en küçük kareler tahmin edicisinin tahmin edilen standart sapması

$$s_b = \sqrt{s_b^2} = 0.0253$$

olur. Uygulamalı çalışmaların son derece büyük bir çoğunluğunda asıl ilgi odağı regresyon doğrusunun sabit terimi değil eğimidir. Biz de buna uyarak bundan böyle bu büyüklük üzerinde yoğunlaşacağız, ama sabit terimle ilgili çıkarsamanın, β, b, s_b^2 yerine α, a ve s_a^2 geçirerek benzer biçimde yapılacağını söyleyebiliriz. Burada s_a^2 şöyle bulunur:

$$s_a^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\right)$$

Buraya kadar anakütle hata terimleri ε_i'lere ilişkin belli dağılım varsayımlarına başvurmadık. Ama, çıkarsamayı ilerletebilmek için, daha belirgin bir varsayım yapılması gerekir. Tersine güçlü kanıt olmadıkça hemen her zaman bu hataların normal dağılıma uyduğu varsayılır. Bu ek varsayım veriyken, güven aralıklarını ve önsav sınamalarını geliştirebiliriz. Üstelik, merkezî limit teoreminin bir sonucu olarak bu süreçler, hataların geniş bir yelpazedeki normal olmayan dağılımları için de yaklaşık geçerliliklerini korur. Uygun güven aralıklarının ve önsav sınamalarının doğrudan elde edilebildiği temel bulgu aşağıdaki çerçevede sergilenmiştir.

Anakütle Regresyon Eğimine İlişkin Çıkarsamanın Temeli

Anakütle regresyon eğimine β, bunun n çift örneklem gözlemine dayanan en küçük kareler tahminine b diyelim. Altbölüm 12.5'teki 1-4. varsayımlar geçerliyse ve ε_i hatalarının normal dağıldığı varsayılabilirse, o zaman

$$t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

rassal değişkeni, $(n-2)$ serbestlik dereceli bir Student t dağılımına uyar.

Anakütle regresyon doğrusunun eğimi olan β'mn güven aralıkları, Bölüm 8'de yinelenerek kullanılan akıl yürütmeye benzer biçimde, aşağıdaki çerçevede özetlendiği gibi çıkarsanabilir.

Anakütle Regresyon Eğiminin Güven Aralıkları

Regresyon hataları ε_i'ler normal dağılıyorsa ve Altbölüm 12.5'in 1-4. varsayımları geçerliyse, anakütle regresyon eğimi β'nın $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı

$$b - t_{n-2,\,\alpha/2} s_b < \beta < b + t_{n-2,\,\alpha/2} s_b$$

olur. Burada $t_{n-2,\,\alpha/2}$,

$$P(t_{n-2} > t_{n-2,\,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayıdır. t_{n-2} rassal değişkeni de $(n-2)$ serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.

Perakende satışların harcanabilir gelire göre regresyonunda şunları zaten bulduk:

$$n = 22 \qquad b = 0.3815 \qquad s_b = 0.0253$$

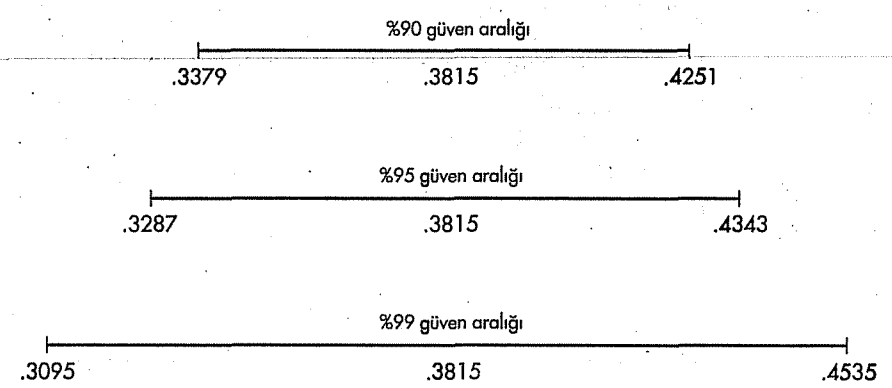
Eğer β'nın %99 güven aralığı isteniyorsa, $1-\alpha = 0.99$ demektir, böylece Ek Çizelge 6'dan şunu okuruz:

$$t_{n-2,\,\alpha/2} = t_{20,\,0.005} = 2.845$$

Öyleyse %99 güven aralığı şöyle yazılabilir:

$$0.3815 - (2.845)(0.0253) < \beta < 0.3815 + (2.845)(0.0253)$$

ya da



ÇİZİM 12.8 Perakende satışların harcanabilir gelire göre anakütle regresyon eğiminin %90, %95, %99 güven aralıkları

$$0.3095 < \beta < 0.4535$$

Demek ki örneğimizde, hane başına harcanabilir gelirde 1 $'lık bir artıştan kaynaklanan hane başma perakende satışların beklenen artışının %99 güven aralığı 0.3095 $ ile 4535 $ arasındadır. Çizim 12.8, anakütle regresyon eğiminin bu verilerden hesaplanan %90 ve %95 güven aralıklarını da göstermektedir.

Bölüm 9'da sık sık kullanılan bir akıl yürütmeyle, anakütle regresyon eğimi β'nın belli bir β_0 değerine eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayacak süreci hemen geliştirebiliriz. Bu süreç aşağıdaki çerçevede belirtilmiştir.

Anakütle Regresyon Eğiminin Sınanması

Regresyon hataları ε_i'ler normal dağılıyorsa ve Altbölüm 12.5'in 1-4. varsayımları geçerliyse, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyleri α olur:

(i) $H_0: \beta = \beta_0$ ya da $H_0: \beta \leq \beta_0$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \beta > \beta_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{b - \beta_0}{s_b} > t_{n-2,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) $H_0: \beta = \beta_0$ ya da $H_0: \beta \geq \beta_0$

sıfır önsavlarmdan birini

$$H_1: \beta < \beta_0$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{b-\beta_0}{s_b} < -t_{n-2,\alpha} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

(iii) $$H_0: \beta = \beta_0$$

sıfır önsavını

$$H_1: \beta \neq \beta_0$$

iki-yanlı karşı önsavla sınamanın karar kuralı şudur:

$$\frac{b-\beta_0}{s_b} > t_{n-2,\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{b-\beta_0}{s_b} < -t_{n-2,\alpha/2} \text{ ise} \qquad H_0\text{'ı reddedin.}$$

Regresyon eğiminin önsavdaki değerinin 0 olduğu durum, uygulamada özel bir ilgi uyandırır. Anakütle regresyon doğrusu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

iken β yerine 0 koyarsak

$$Y_i = \alpha + \varepsilon_i$$

olur. Bunun anlamı, *bağımsız değişken hangi değeri alırsa alsın,* bağımlı değişkenin ortalaması α, varyansı σ_ε^2 olan rassal bir değişken olduğudur. Demek ki bağımlı değişkenin beklenen değeri, bağımsız değişkenin değerinden (doğrusal olarak) etkilenmeyecektir. Başka bir deyişle, bağımlı değişkenin değişkenliği, bağımsız değişkenle olan doğrusal ilişkiyle hiç açıklanamaz.

Bunu örneklemek için, perakende satışlar-harcanabilir gelir verileriyle

$$H_0: \beta = 0$$

sıfır önsavını sınayalım. Bu önsava göre gelir satışları (doğrusal olarak) etkilemez. İlgilenilen almaşık, gelirdeki bir artışın satışları artıracağı beklentisidir, yani:

$$H_1: \beta > 0$$

Şunları biliyoruz:

$$n = 22 \qquad b = 0.3815 \qquad s_b = 0.0253 \qquad \beta_0 = 0$$

Öyleyse

$$\frac{b-\beta_0}{s_b} = \frac{0.3815-0}{0.0253} = 15.08$$

Ek Çizelge 6'dan, $n-2 = 20$ serbestlik derecesi için şunu okuruz:

$$t_{20,0.005} = 2.845$$

Demek ki, anakütle regresyon eğiminin 0 olduğu sıfır önsavı, eğimin artı olduğu karşı önsavla %0.5 anlamlılık düzeyinde çok açık olarak reddedilir. Öyleyse, bu verilerde, hane başına harcanabilir gelirdeki bir değişmenin hane başına perakende satışlarda bir değişmeye yol açmayacağı önsavına karşı dayanılmaz güçte bir kanıt vardır. Veriler, sağduyuya uygun biçimde, harcanabilir gelirdeki bir artışın perakende satışlarda beklenen bir artış yaratacağı sonucunu çok güçlü olarak işaret etmektedir.

Şimdi, bir çift rassal değişken arasında doğrusal ilişki olmadığım söyleyen önsavın iki sınamasını, normallik varsayımı altında, geliştirmiş bulunuyoruz. Altbölüm 12.1'de böyle bir sınama örneklem katsayısına dayanmaktayken, az önce gösterilen sınama regresyon doğrusu eğiminin en küçük kareler tahminini temel almaktadır. Aslında bu iki sınama çelişik sonuçlar vermez. Hangi yol kullanılırsa kullanılsın, bu iki sınamayı eşdeğer kıldığı ve tam tamına aynı sınama istatistiğinin ortaya çıktığı gösterilebilir. Doğrusal regresyon ve korelasyon çözümlemelerinin arasındaki ayırım, ilişkinin olup olmadığının biçimsel sınanma süreçlerinde değil, varolabilecek ilişkinin yorumundadır. Korelasyon modeli, rassal değişkenler arasındaki bağımlılığın *yönü* konusunda bir önermede bulunmaz. Ama regresyon modelini bu bölümdeki verilerimizle tahmin ederken, hane başına harcanabilir gelirdeki değişmenin, hane başına perakende satışları değiştirebileceğini kapalı olarak varsaydık, bunun tersini değil.

12.9 KESTİRİM

Regresyonun önemli bir kullanımı, bağımsız değişkenin varsayılan değerlerine bağlı olarak bağımsız değişken için *kestirimler* —ya da öndeyiler— hesaplamaktır. Bağımsız değişkenin belli bir x_{n+1} değerine eşit olduğunu, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin de sürdüğünü düşünelim. Bu durumda buna kar-şılık gelen bağımlı değişken değeri

$$Y_{n+1} = \alpha + \beta x_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \qquad (12.9.1)$$

olur, x_{n+1} verilmişken bunun beklenen değeri de şöyledir:

$$E(Y_{n+1} \mid X_{n+1}) = \alpha + \beta x_{n+1} \qquad (12.9.2)$$

Burada ilgi çeken iki farklı kestirim sorunu vardır:

1. Y_{n+1}'in, Eş. (12.9.1)'in sonucu olan *gerçek değer*ini kestirmek isteyebiliriz.
2. (12.9.2)'nin koşullu beklenti değeri $E(Y_{n+1} \mid X_{n+1})$'i —yani, bağımsız değişken x_{n+1}'de sabit tutulurken bağımlı değişkenin *ortalama değer*ini— kestirmek isteyebiliriz.

Altbölüm 12.5'in varsayımları geçerliliklerini sürdürmek koşuluyla, her iki sorunda da aynı nokta kestirimleri yapılır. Bilinmeyen α ile β yerine, bunların en küçük kareler tahminleri olan a ile b'yi koymak doğaldır. Böylece $(\alpha + \beta x_{n+1})$, $(a + bx_{n+1})$ ile tahmin edilir. Gauss-Markov teoremine göre bunun karşılığı olan tahmin edicinin doğrusal, en iyi, sapmasız olduğunu biliyoruz. Öyleyse her iki sorunda da, sözü geçen varsayımlar altında,

$$\hat{Y}_{n+1} = a + bx_{n+1}$$

uygun bir nokta tahminidir. (12.9.1)'deki rassal değişken ε_{n+1}'e ilişkin, ortalamasının 0 olduğundan başka, bu bağlamda işe yarar bir şey bilmediğimizden, bu sonuca varırız. Başka bir ilgili bilgi yokluğunda bu değerin nokta tahmini olarak 0'ı kullanmaktan daha iyi bir şey yapamayız.

Ancak, nokta tahminlerinin yanısıra güven aralıkları da genellikle istenir. İşte bu noktada iki sorun birbirinden ayrılır. Bunun nedeni de, (12.9.1)'de yer alan ama (12.9.2)'de görülmeyen ε_{n+1} rassal değişkeninin alacağı değerin belirsizliğidir. Uygun süreçler aşağıdaki çerçevede özetlenmiştir.

Kestirimlerin Güven Aralıkları

Anakütle regresyon modeli aşağıdaki gibi olsun:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Altbölüm 12.5'teki varsayımlar geçerli ve ε_i normal dağılıyor olsun. α ile β'nın, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ gözlemlerine dayanan en küçük kareler tahminlerini a ve b ile gösterelim. Bu durumda aşağıdakilerin $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları olduğu gösterilebilir:

(i) Y_{n+1} ile gösterilen gerçek değerin kestirimi için güven aralığı şudur:

$$\hat{Y}_{n+1} \pm t_{n-2,\alpha/2} \sqrt{\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\right] s_e^2} \qquad (12.9.3)$$

(ii) Koşullu beklenti $E(Y_{n+1} \mid x_{n+1})$'in kestirimi için güven aralığı da şudur:

$$\hat{Y}_{n+1} \pm t_{n-2,\alpha/2} \sqrt{\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\right] s_e^2} \qquad (12.9.4)$$

Burada

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{ve} \qquad \hat{Y}_{n+1} = a + b\, x_{n+1}$$

biçimindedir.

Bu süreçleri örnekleyebilmek için, perakende satışlar-harcanabilir gelir örneğine dönelim. Hane başına harcanabilir gelir 12,000 $ iken hane başına perakende satışların kestirimiyle ilgilendiğimizi düşünelim. Bu durumda

$$x_{n+1} = 12{,}000$$

olur. Nokta tahminini şöyle bulabiliriz:

$$\hat{Y}_{n+1} = a + bx_{n+1}$$
$$= 1{,}923 + (0.3815)(12{,}000) = 6{,}501$$

Demek ki gelir 12,000 $ iken satışları 6,501 $ olarak kestiririz. Daha önce

$$n = 22 \qquad \bar{x} = 10{,}799 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2{,}599{,}715{,}000 \qquad s_e^2 = 21{,}789.95$$

bulmuştuk. Böylece şunu hesaplayabiliriz:

$$\sqrt{\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\right] s_e^2}$$

$$= \sqrt{\left[1 + \frac{1}{22} + \frac{(12{,}000 - 10{,}799)^2}{2{,}599{,}715{,}000 - (22)(10{,}799)^2}\right] (21{,}789.95)}$$
$$= 153.954$$

Benzer biçimde şunu da bulabiliriz:

$$\sqrt{\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\right]s_e^2}=43.725$$

Kestirimin %95 güven aralığının istendiğini düşünelim, böylece $\alpha = 0.05$ olur ve şu bulunur:

$$t_{n-2,\alpha/2} = t_{20,0.025} = 2.086$$

Bu durumda, harcanabilir gelir 12,000 iken, bir yıllık perakende satışların gerçek değerinin kestirimi için %95 güven aralığı şöyle olur:

$$6{,}501 \pm (2.086)(153.954)$$

ya da

$$6{,}501 \pm 321$$

Demek ki harcanabilir gelir 12,000 $ iken, bir yıllık satışların %95 güven aralığı 6,180 $ ile 6,822 $ arasıdır.

Harcanabilir gelir 12,000 $ iken, perakende satışların beklenen değeri için güven aralığı da şöyle bulunur:

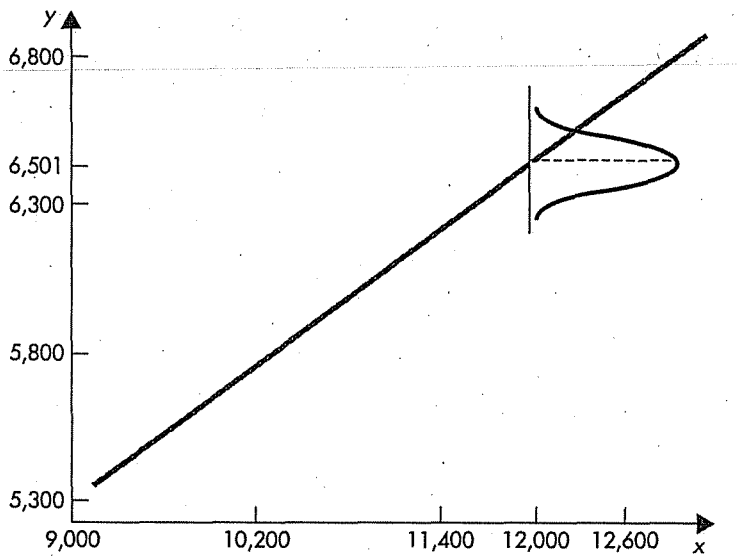
$$6{,}501 \pm (2.086)(43.725)$$

ya da

$$6{,}501 \pm 91$$

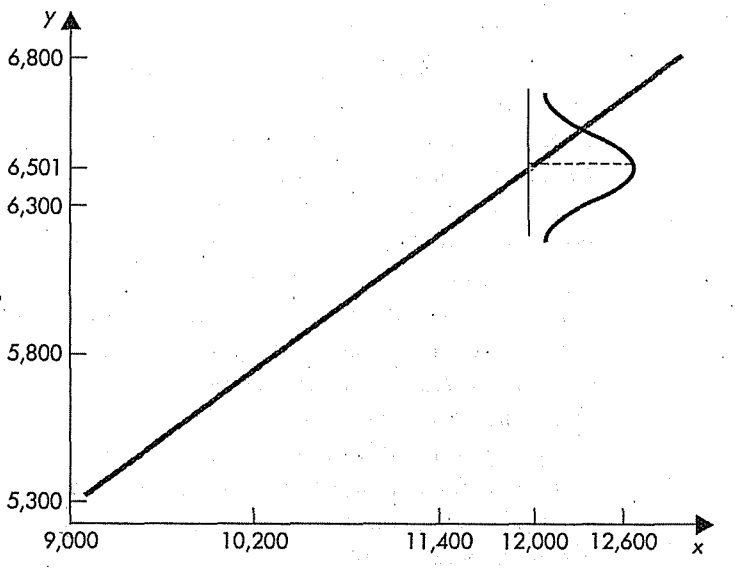
Demek ki %95 güven aralığı 6,410 $'dan 6,592 $'a kadardır.

Bu iki aralık tahmini sorunu arasındaki fark, Çizim 12.9 ile Çizim 12.10'da gösterilmiştir. Her iki çizim de perakende satışlar-harcanabilir gelir verileriyle tahmin edilen regresyon doğrusunu göstermektedir. Ayrıca Çizim 12.9'da, harcanabilir gelirin 12,000 $ olduğu herhangi bir yılda perakende satışların alabileceği değere ilişkin belirsizliği temsil eden bir olasılık yoğunluk fonksiyonu da gösterilmiştir. Çizim 12.10'daki olasılık yoğunluk fonksiyonu ise, harcanabilir gelirin 12,000 $ olduğu herhangi bir yılda perakende satışların alabileceği *beklenen* ya da ortalama değere ilişkin belirsizliği temsil eder. Şimdi, tek bir yılda gerçekleşecek satışlar konusunda, bu satışların ortalamasında olduğumuzdan çok daha fazla belirsizlik içinde oluruz, bu da iki yoğunluk fonksiyonunun biçimlerinde yansımıştır. Her ikisi de 6,501 $'lık perakende satışı orta nokta olarak almış olmakla birlikte, Çizim 12.9'daki yoğunluk fonksiyonu bu değerin iki yanında çok daha yayvandır. Bu ek belirsizlik, perakende satışların tek bir değerinin güven aralıklarının, ortalaması için bulunan güven aralıklarından daha geniş olmasında yansır.



ÇİZİM 12.9 Perakende satışların harcanabilir gelire göre en küçük karelerle tahmin edilen regresyon doğrusu; olasılık yoğunluk fonksiyonu, harcanabilir gelir 12,000 $ iken gerçekleşen perakende satışlara ilişkin belirsizliğimizi temsil eder

ÇİZİM 12.10 Perakende satışların harcanabilir gelire göre en küçük karelerle tahmin edilen regresyon doğrusu; olasılık yoğunluk fonksiyonu, harcanabilir gelir 12,000 $ iken, beklenen ya da ortalama perakende satışlara ilişkin belirsizliğimizi temsil eder



(12.9.3) ile (12.9.4)'teki güven aralıklarının genel biçimlerinin incelenmesi bazı şeyleri anlamamıza yardım eder. Güven aralığı ne kadar genişse, nokta tahminini kuşatan belirsizliğin de o kadar büyük olacağını aklımızda tutarak, bu formüllerden dört gözlem yapabiliriz:

1. Öbür herşey aynıyken, örneklem büyüklüğü n ne kadar büyükse, güven aralığı da o kadar dar olur. Bu da, eldeki örneklem bilgisi arttıkça, çıkarsamamızın da o kadar belirginleşeceği olgusunu yansıtır.
2. Öbür herşey aynıyken, s_e^2 ne kadar büyükse, güven aralığı da o kadar geniş olur. Bu da beklenen bir durumdur, çünkü s_e^2, ε_i regresyon hatalarının varyansı olan σ_e^2'nin bir tahminidir. Bu

$$\varepsilon_i = Y_i - \alpha - \beta x_i$$

hataları, bağımlı değişkenin gözlenen değerleri ile bağımsız değişken verilmişken beklenen değerleri arasındaki farkı temsil ettiklerinden, büyüklükleri ne kadar fazlaysa çıkarsamamız da kesinlikten o kadar uzak olur.
3. Şimdi de $(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)$ büyüklüğünü alalım. Bu, bağımsız değişken gözlemlerinin örneklem varyansının bir katından başka bir şey değildir. Büyük bir varyans, bu değişkenin çok değişik değerlerine ilişkin bilgimiz olduğu anlamına gelir, bu da anakütle regresyon doğrusu tahminlerini daha belirgin yapmamızı, böylece daha dar güven aralıkları bulmamızı sağlar.
4. Son olarak $(x_{n+1} - \bar{x})^2$ ne kadar büyükse, kestirimlerin güven aralıklarının o kadar geniş olduğunu görürüz. Yani x_{n+1}, bağımsız değişkenin örneklem ortalamasından ne kadar uzaklaşırsa, çıkarsamamız da o kadar belirsizleşir. Bu da akla uygun bir sonuçtur. Örneklem verilerimiz $\bar{x}$ değerini orta nokta almışsa, bağımsız değişken bu orta değere görece daha yakınsa çıkarsamalarımızın, görece uzak olduğu duruma göre daha belirgin olmasını bekleriz.

Çizelge 12.5'teki verilere ilişkin olarak sizden, hane başına harcanabilir gelir 30,000 $ olduğu bir yılda hane başına perakende satışları kestirmeniz istendiğini düşünelim. İlke olarak, bu altbölümdeki süreçleri izleyip nokta tahmini ile güven aralıklarını bulabilirsiniz. Ancak, böyle bir şey yapmak fazla tezcanlılık olur. Eldeki veriler, gelirle beklenen satış arasındaki doğrusal ilişkiyi *gözlenen gelir aralığı içinde* önermektedir. Ama, gelir 30,000 $ gibi yüksek bir düzeye çıkınca ne olduğunu gözlemiş değiliz. Bu kadar yüksek gelir düzeylerinde doğrusal ilişkimizin süreceğine varsaymak, saf bir inançtan başka bir şey olamaz. Sözkonusu ilişki sürüyor olabilir, ama bu kesinlikle verilerden çıkarsanamaz. Eğer gerçekte ilişki artık sürmüyorsa, bu ilişkinin sürdüğü varsayımına dayanan kestirimler çok büyük yanlışlar içerebilir. Söylemek istediğimiz şudur: Tahmin edilen regresyon doğrusunu, bağımsız değişken için örneklem verilerinin bulunduğu aralığın dışına doğru çok uzatmak akıllıca olmaz.

29. Alıştırma 13'ün verilerine dayanan stereo sistem satışının fiyata göre regresyonunu alalım.

(a) Anakütle regresyonundaki hata terimlerinin varyansının bir tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin en küçük kareler tahmin edicisinin varyansının bir tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(c) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %90 güven aralığını bulun.

30. Alıştırma 14'teki Dow-Jones endeksindeki yıllık yüzde değişmenin, aynı endeksin yılın ilk beş günündeki yüzde değişmesine göre regresyon çözümlemesini alalım.

(a) Anakütle regresyonundaki hata terimlerinin varyansının bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin en küçük kareler nokta tahmin edicisinin varyansının bir tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(c) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %95 güven aralığını bulup yorumlayın.

(d) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.

31. Alıştırma 15'in verilerine dayanan, 13 Kasım 1989 günündeki yatırım fonlarının kayıpları modelini alalım.

(a) Anakütle regresyonundaki hata terimlerinin varyansının bir nokta tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin en küçük kareler nokta tahmin edicisinin varyansının bir tahminini bulmak için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(c) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %90, %95, %99 güven aralıklarını bulun.

32. Bir ayaküstü lokantalar zinciri, reklâm harcamalarının satışlar üzerindeki etkisini değerlendirmek amacıyla bir deneme yapmaya karar vermiştir. Ülkenin sekiz ayrı bölgesinde, reklâm harcamalarında bir önceki yıla göre çeşitli görece değişiklikler yapılmış, satış düzeylerinde ortaya çıkan değişiklikler gözlenmiştir. Aşağıdaki çizelge bulguları göstermektedir.

REKLÂM HARCAMASINDA ARTIŞ (%)	0	4	14	10	9	8	6	1
SATIŞLARDA ARTIŞ (%)	2.4	7.2	10.3	9.1	10.2	4.1	7.6	3.5

(a) Satış artışının reklâm harcamalarındaki artışa göre doğrusal regresyonunu en küçük karelerle tahmin edin.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %90 güven aralığını bulun.

33. Bir içki toptancısı, iyi kalite İskoç viskisi fiyatının satış miktarı üzerindeki etkilerini değerlendirmek istemektedir. 8 haftalık bir örneklemdeki satış kayıtlarından alınan fiyat ve satış (kasa cinsinden) bulguları aşağıdaki çizelgededir.

FİYAT	19.2	20.5	19.7	21.3	20.8	19.9	17.8	17.2
MİKTAR	25.4	14.7	18.6	12.4	11.1	15.7	29.2	35.2

Fiyattaki 1 $ artış nedeniyle satışta beklenen değişmenin %95 güven aralığını bulun.

34. Alıştırma 16'daki verileri kullanıp, çalışanların kendi hastalığı nedeniyle işe gelememe oranındaki ortalama değişmenin, işsizlik oranındaki değişmeye doğrusal bağlı olmadığını söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

35. Bir fabrikada yirmibeş mavi yakalı çalışan bir örnekleme seçilmiştir. Her birinden, iş memnuniyetini (x) 1 ile 10 arasındaki bir ölçekte değerlendirmesi istenmiştir. Ayrıca, bu çalışanların son bir yılda işe gelmedikleri gün sayısı (y) da saptanmıştır. Aşağıdaki örneklem regresyon doğrusu bu verilerden tahmin edilmiştir:

$$y = 13.6 - 1.2x$$

Ayrıca şunlar da bulunmuştur:

$$\bar{x} = 6.0 \qquad \sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2 = 130.0 \qquad \text{HKT} = 80.6$$

(a) İş memnuniyetinin işe gelmeme üzerinde doğrusal bir etkisi olmadığını söyleyen sıfır önsavını, uygun bir karşı önsavla %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(b) Belli bir çalışanın iş memnuniyet düzeyi 4'tür. Bu çalışanaın bir yıl içinde işe gelmediği gün sayısının %90 güven aralığını bulun.

36. Doktorlar, bir ilâcın dozuyla hastanın iyileşmesi için gerekli süre arasındaki ilişkiyle ilgilenirler. Aşağıdaki çizelge beş hastalık bir örneklem için (gram cinsinden) dozlar ile (saat cinsinden) iyileşme sürelerini göstermektedir. Bu hastalar ilâç dozu dışında benzer özellikler göstermektedir.

İLÂÇ DOZU	1.2	1.0	1.5	1.2	1.4
İYİLEŞME SÜRESİ	25	40	10	27	16

(a) İyileşme süresinin doza göre doğrusal regresyonunu tahmin edin.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %90 güven aralığını bulup yorumlayın.

(c) (a)'da bulunan örneklem regresyonu, bu ilâçtan 2.5 gram verilen bir hastanın iyileşme süresini kestirmekte kullanılabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

37. Alıştırma 17 ile 26'daki pay senedi getiri oranı sorusu için aşağıdaki değer bulunmuştur:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 196.2$$

(a) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, bunun artı olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 1 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

38. Alıştırma 18'in verilerini kullanarak, temsilcilerin haftalık satışlarının yetenek sınavı sonuçlarıyla doğrusal ilişkili olmadığı sıfır önsavını, aynı yönlü ilişki öngören karşı önsavla sınayın.

39. Alıştırma 15'in verilerini kullanarak, yatırım fonlarının 13 Kasım 1989'daki kayıplarının, 1989 içinde daha önceki kazançlarla doğrusal bağımlı olmadığı sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

40. Bir çift rassal değişken arasındaki örneklem korelasyonunu r ile gösterelim.

(a) $\dfrac{1-r^2}{n-2}=\dfrac{s_e^2}{\text{KKT}}$ olduğunu gösterin.

(b) (a)'daki bulguyu kullanarak aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösterin:

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}=\frac{b}{s_e/\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}$$

(c) (b)'deki bulguyu kullanarak, Altbölüm 12.1'de verilen, anakütle korelasyonunun 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavı sınamasının, Altbölüm 12.8'de verilen anakütle regresyonunun eğiminin 0 olduğunu söyleyen önsav sınamasıyla aynı şey olduğunu gösterin.

41. Alıştırma 19'daki, lokantalarda bira satışıyla ilgili soru için şu değer bulunmuştur:

$$\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}=250$$

Anakütle regresyon doğrususun eğiminin 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

42. 74 aylık gözlemden oluşan bir örneklemde, altının getiri yüzdesinin (y), tüketici fiyat endeksine (x) göre regresyonu tahmin edilmiştir.[13] En küçük karelerle elde edilen örneklem regresyon doğrusu şöyledir:

$$y=-0.003+1.11x$$

Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin tahmin edilen standart sapması 2.31'dir. Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğu sıfır önsavını, eğimin artı olduğu karşı önsavla sınayın.

43. Alıştırma 33'ün verilerine dönelim. Bu kaliteli İskoç viskisi için satışların fiyata doğrusal bağlanımlı olmadığını söyleyen sıfır önsavını, uygun bir karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

44. Alıştırma 13'ün verilerine dönelim.

(a) Stereo sistem fiyatının 480 $ olduğu belli bir bölgedeki satış hacminin nokta tahminin bulun.

(b) Sistemin fiyatı 480 $ olarak belirlenirse, belli bir bölgede *gerçekleşen* satış hacminin ve o bölgedeki *beklenen* satışların %95 güven aralıklarını bulun.

45. Alıştırma 14'ün çözümlemesini sürdürelim. Dow-Jones endeksi bir yılın ilk beş gününde %1.0 yükselirse, bu endeksin bütün bir yıllık yüzde değişmesinin hem

---

[13] M. Ratner, "Inflation, currency devaluation and the price of gold," *American Business Review, 10*, no. 1 (1992), 93-97.

gerçekleşen, hem *beklenen* değerleri için %90 güven aralıklarını bulun. Bu aralıklar arasındaki farkı tartışın.

46. Alıştırma 16'nın verilerine dönelim. İşsizlik oranının hiç değişmediği bir yılda, çalışanların ortalama işe gelememe oranındaki değişmenin hem *gerçekleşen*, hem *beklenen* değerleri için %90 güven aralıklarını bulun.

47. Alıştırma 17 ile 26'nın verilerini kullanarak, Standard and Poors 500 endeksinin getiri oranı %1 iken, şirketin pay senedi getiri oranının beklenen değerinin %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

48. Alıştırma 18'deki şirketin yeni bir satış temsilcisi yetenek sınavından 70 almıştır. Bu temsilcinin yapacağı haftalık satış değerinin %80 ve %90 güven aralıklarını bulun.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

49. Bir rassal değişken çiftinin aynı yönde ilişkili olduklarını söylemek ne anlama gelir? Aşağıdaki durumlara uygun rassal değişken çifti örnekleri verin:

(a) Artı korelasyon

(b) Eksi korelasyon

(c) Sıfır korelasyon

50. Bu bölümde iki korelasyon ölçüsünü —örneklem korelasyon katsayısı r ile Spearman sıra korelasyonu katsayısını— inceledik. Her bir ölçünün kullanımının uygun olduğu durumları tartışın.

51. Bir çift rassal değişkenin beş çift gözleminden oluşan rassal bir örneklem aşağıdaki çizelgede verilen bulgulara ulaşmıştır:

y_i	4	1	0	1	4
x_i	–2	–1	0	1	2

(a) Örneklem korelasyon katsayısnı bulun.

(b) Her bir y_i değerinin ilgili x_i değerinin karesi olmasından yola çıkarak, (a)'daki yanıtınızı yorumlayın.

52. Bir mağazalar zincirindeki elli üç mağazadan oluşan bir örneklem için, satış alanının ayak karesi başına yıllık (dolar) satışlar ile satış alanının ayak karesi başına yıllık (dolar) kira arasındaki korelasyon 0.37 bulunmuştur.[14] Bu iki büyüklüğün anakütlede ilişkisiz olduğu sıfır önsavını, anakütle korelasyonunun artı olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

53. Rassal bir örneklemdeki 526 işletme için, dışardan atanan yöneticilerin oranı ile işletmenin pay senetlerinin riske uyarlanmış bir getiri ölçüsü arasındaki örneklem

[14] P. M. Anderson, "Association of shopping center anchors with performance of a nonanchor specialty chain 's store," *Journal of Retailing, 61*, no. 2 (1985), 61-74.

korelasyonu 0.1398 bulunmuştur.[15] Anakütle korelasyonunun sıfır olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

54. Altmışaltı aylık bir örneklemde, 5 yıllık ABD ve Japon tahvillerinin getirileri arasındaki korelasyon 0.293 bulunmuştur.[16] Anakütle korelasyonunun 0 olduğu sıfır önsavını, bu korelasyonun artı olduğu karşı önsavla sınayın.

55. Bölüm 9'daki Alıştırma 71'e dönelim. İki mali analistin mutlak tahmin hata yüzdeleri varyanslarının eşit olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

56. Aşağıdaki çizelge, bir örnekleme giren yirmi tane uzun vadeli büyüme yatırım fonunun 12 aylık getiri yüzdeleriyle toplam varlıklarını (milyon dolar olarak) göstermektedir.

GETİRİ	VARLIK	GETİRİ	VARLIK	GETİRİ	VARLIK
29.3	300	16.0	421	12.9	75
27.6	70	15.5	99	11.3	610
23.7	3,004	15.2	756	9.9	264
22.3	161	15.0	730	7.9	27
22.0	827	14.4	436	6.7	71
19.6	295	14.0	143	3.3	719
17.6	29	13.7	117		

(a) Spearman sıra korelasyonu katsayısını hesaplayın.

(b) Anakütlede ilişki yoktur sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla katsayısal olmayan bir biçimde sınayın.

(c) Bu veriler için katsayısal olmayan bir sınamanın üstünlüklerini tartışın.

57. İkinci el mal alma güdülerini araştıran bir çalışmada, seyrek ve sık alışveriş yapan müşteriler için güdülerin sıra sayıları aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi bulunmuştur.[17] Spearman sıra korelasyonu katsayısını hesaplayın, seyrek ve sık alışveriş yapan müşterilerin güdüleri arasında ilişki yoktur sıfır önsavını, aynı yönlü ilişki vardır diyen karşı önsavla sınayın.

	SEYREK ALIŞVERİŞÇİLER	SIK ALIŞVERİŞÇİLER
Fiyat	1	1
Macera, define avcılığı	2	4
Kalite	3	2
Coğrafi konum	4	3
Satış görevlileri	5	5
Temizlik	6	6

[15] M. H. Schellenberger, D. D. Wood, A. Tashakori, "Board of director composition, shareholder wealth and dividend policy," *Journal of Management, 15* (1989), 457-67.

[16] S. Hauser, A. Levy, "Optional forward coverage of international fixed income portfolios," *Journal of Portfolio Management, 17*, no. 4 (1991), 54-59.

[17] U. Yavas, G. Riecken, "Heavy, medium, light shoppers, and nonshoppers of a used merchandise outlet," *Journal of Business Research, 9* (1981), 243-53. Copyright 1981 Elsevier Publishing Co., Inc. Yayınevinin izniyle alınmıştır.

58. Reklâm ajanslarıyla müşterileri arasında çıkan sorunların algılanması konusunda bir çalışma yapılmıştır.[18] Ajanslara çeşitli ajans özelliklerinin ne ölçüde sorun yarattığı sorulmuştur. Burada verilen çizelge, 10 yıldan kısa ve uzun süren ajans-müşteri ilişkiileri için 1 (ender sorun) ile 4 arasındaki bir ölçekte verilen ortalama yanıtları göstermektedir.

	İLİŞKİNİN UZUNLUĞU	
	10 YILDAN KISA	10 YILDAN UZUN
Hızlı personel devri	2.21	1.80
İşi zamanında bitirememe	2.14	2.04
Kötü iletişim	2.14	2.05
İşi gereğince izlememe	2.07	1.81
Anlayış	2.00	1.81
Maliyet bilincinden yoksunluk	2.00	2.10
Dinlememe alışkanlığı	1.95	1.86
Deneyimsiz müşteri temsilcisi	1.93	1.76
Savunmaya geçme eğilimi	1.79	1.62
Kurgusu sağlam olmayan süreçler	1.50	2.00
Katı süreçler	1.43	1.57
Fazla politiklik	1.20	1.80

(a) Spearman sıra korelasyonu katsayısını hesaplayın.

(b) İlişki yoktur diyen sıfır önsavına, iki-yanlı karşı önsavla, katsayısal olmayan bir sınama uygulayın.

59. Rassal bir örneklemdeki 192 erkek çalışan için, yaş ile iş değiştirmeye isteklilik ölçüsü arasında –0.18'lik bir örneklem korelasyonu bulunmuştur.[19] Yalnız bu bilgi verilmişken, iş değiştirmeye istekliliğin yaşa göre regresyonuna ilişkin çıkarabildiğiniz bütün sonuçları çıkarın.

60. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ gibi n gözlemden oluşan bir örnekleme dayanarak, y'nin x'e göre regresyonu tahmin edilmiştir. Örneklem regresyonunun, $(x = \bar{x}, y = \bar{y})$ noktasından geçtiğni gösterin. Burada $\bar{x}$ ile $\bar{y}$ örneklem ortalamalarıdır.

61. Bir şirket yeni yönetici adaylarını düzenli olarak yetenek sınavına sokmaktadır. Bu adaylara şirketteki ilk yıllarının sonunda en yakın amirlerince not verilmektedir. Bir rassal örneklemdeki oniki adayın durumları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

YETENEK SINAVI	84	79	92	53	65	82
AMİR NOTU	76	75	81	72	68	88
YETENEK SINAVI	87	75	77	76	69	88
AMİR NOTU	79	81	70	83	62	86

[18] M. R. Hotz, J. K. Ryans, W. L. Shanklin, "Agency-client relationships as seen by influentials on both sides," *Journal of Advertising, 11*, no. 1 (1982), 37-44.

[19] S. Gould, E. Penley, "A study of the correlates of willingness to relocate," *Academy of Management Journal, 28* (1985), 472-78.

(a) Amirin notunun yetenek notuna göre regresyonunu tahmin edin.
(b) Örneklem regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.
(c) Örneklem regresyon doğrusunun sabit teriminin anlamlı bir yorumu yapılabilir mi? Açıklayın.
(d) Bu regresyonun belirlik katsayısını bulup yorumlayın.
(e) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğu sıfır önsavını, uygun tek yanlı karşı önsavla sınayın.
(f) Yetenek sınavı sonucu 70 olan bir adayın amirinden alacağı notun %95 güven aralığını bulun.

62. Kanada hazine bonosu piyasasında, vadeli fiyatın anlık fiyatın bir tahmin edicisi olarak değerlendirilmesi girişiminde bulunulmuştur.[20] Yetmişdokuz tane üçer aylık gözlemden oluşan bir örneklemden şu regresyon doğrusu tahmin edilmiştir:

$$y = 0.00027 + 0.7916x$$

Burada

y = Gerçekleşen anlık fiyat değişmesi
x = Vadeli fiyattan kestirilen anlık fiyat değişmesi

olup belirlilik katsayısı 0.097, anakütle regresyon doğrusunun eğiminin tahmin edicisinin tahmin edilen standart sapması 0.2759'dur.

(a) Tahmin edilen regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.
(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(c) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğu sıfır önsavını, eğimin artı olduğu karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.
(d) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 1 olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.

63. Aşağıdaki çizelge sekiz marka hazır kahvenin yılda alıcı başına kaç kez alındığını (y) ve satın alınma yüzdesini (x) göstermektedir.[21]

y	3.6	3.3	2.8	2.6	2.7	2.9	2.0	2.6
x	24	21	22	22	18	13	9	6

(a) Alıcı başına alım sayısının alım yüzdesine göre regresyonunu tahmin edin.
(b) Tahmin edilen regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.
(c) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(d) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin %90 güven aralığını bulup yorumlayın.
(e) Satın alınma yüzdesi 20 olan bir markanın alıcı başına beklenen alım sayısının %90 güven aralığını bulun.

---

[20] S. B. Park, "Spot and forward rates in the Canadian treasury bill market," *Journal of Financial Economics, 10* (1982), 107-14.
[21] A. S. C. Ehrenberg, G. J. Goodhardt, T. P. Bariuse, "Double jeopardy revisited," *Journal of Marketing, 54*, no. 3 (1990), 82-91..

64. Temel işletmecilik iletişimi dersini alan 306 öğrencilik bir örneklemde şu regresyon doğrusu tahmin edilmiştir:[22]

$$y = 58.813 + 0.2875x$$

Burada

y = Dönem sonu notu
x = Dönem başında yapılan, yazma bozukluklarını saptamaya yönelik sınav notu

olup belirlilik katsayısı 0.1158, anakütle regresyon doğrusunun eğiminin tahmin edicisinin tahmin edilen standart sapması 0.04566'dur.

(a) Tahmin edilen regresyon doğrusunun eğimini yorumlayın.
(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(c) Verilen bilgiler, anakütle regresyon eğiminin 0 olduğu sıfır önsavım, eğimin artı olduğu karşı önsavla iki değişik biçimde sınamaya elverişlidir. Bu sınamaları yaparak her ikisinin de aynı sonucu verdiğini gösterin.

65. Otuz gözlemli bir örnekleme dayanılarak

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

anakütle regresyon doğrusu tahmin edilmiştir. Bulunan en küçük kareler tahminleri

$$a = 10.1 \qquad b = 8.4$$

olmuştur. Regresyon ve hata kareleri toplamı şöyledir:

$$\text{RKT} = 128 \qquad \text{HKT} = 286$$

(a) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(b) β'nın 0 olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınayın.
(c) Aşağıdaki değeri bulun:

$$\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2$$

66. Yirmibeş gözlemli bir örnekleme dayanılarak

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

anakütle regresyon doğrusu tahmin edilmiştir. Bulunan en küçük kareler tahminleri

$$a = 15.6 \qquad b = 1.3$$

olmuştur. Açıklanan ve hata kareleri toplamı şöyledir:

$$\text{RKT} = 268 \qquad \text{HKT} = 204$$

---

[22] V. Richerson, K. Sutrick, "The relationship between scores on a diagnostic writing skills-test and success in a basic business communication course," *Bulletin of the Association of Business Communication, 55*, no. 3 (1992), 102-7.

(a) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(b) Anakütle regresyon doğrusunun eğiminin 0 olduğu sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.
(c) β için %95 güven aralığını bulun.

67. Bir mali analistin kanısına göre, bankaların varlıklar üzerinden getirilerini (y) belirleyen en önemli etken kredilerin mevduata oranıdır (x). Yirmi bankalık bir örneklemden örneklem regresyon doğrusu

$$y = 0.97 + 0.47x$$

biçiminde, belirlilik katsayısı da 0.720 bulunmuştur.
(a) Varlıklar üzerinden getiri ile kredilerin mevduata oranı arasındaki örneklem korelasyonunu bulun.
(b) Varlıklar üzerinden getiri ile kredilerin mevduata oranı arasında ilişki yoktur sıfır önsavını, iki-yanlı karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.
(c) Aşağıdaki değeri bulun:

$$\frac{s_e}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

68. Aşağıdaki söyleme ilişkin düşüncelerinizi belirtin:
Dönüm başına tahıl veriminin, kullanılan gübre miktarına göre (gübre miktarları çoğu çiftçinin kullandığı miktarlar olmak üzere) bir regresyonu tahmin edilse, tahmin edilen regresyon doğrusunun eğimi kesinlikle artı olur. Ancak, olağandışı fazla miktarda gübre kullanılırsa verimin çok düşeceği de pek iyi bilinmektedir. Dolayısıyla, regresyon denklemleri kestirim yaparken pek işe yaramaz.

EK A12.1

Bu ekte, anakütle regresyon katsayılarının en küçük kareler tahminlerini türeteceğiz. Aşağıdaki kareli sapmalar toplamını olabildiğince en küçük yapan a ve b değerlerini bulmak istiyoruz:

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} (y - a - bx_i)^2 \qquad \text{(A12.1.1)}$$

İlk adım olarak, Eş. (A12.1.1)'deki b'yi sabit tutup a'ya göre türev alalım:[23]

$$\frac{\partial \text{KT}}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)$$

$$= -2(\sum y_i - na - b\sum x_i)$$

En küçük değer için bu türevin 0 olması gerektiğinden,

$$\sum y_i - na - b\sum x_i = 0$$

olur. Bunun her iki yanı n'ye bölersek,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

buluruz. Bunu Eş. (A12.1.1)'de a yerine koyarsak,

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})]^2$$

sonucunu verir. Bu ifadenin b'ye göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial \text{KT}}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})[(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})]$$

$$= -2[\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - b\sum (x_i - \bar{x})^2]$$

buluruz. En küçük değer için bu türev de 0 olmalıdır, öyleyse,

[23] Burada kullandığımız kavram kısmi türevdir. KT'nin a'ya göre kısmi türevi $\partial \text{KT}/\partial a$ ile gösterilir, öbür değişkenler sabit tutularak KT'nin a'ya göre türevi alınır. Her iki kısmi türevin ($\partial \text{KT}/\partial a$ ve $\partial \text{KT}/\partial b$) ikisi de 0'ken KT toplamı en düşük değerini alır.

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = b\sum(x_i - \bar{x})^2$$

buradan da

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

elde ederiz.

BÖLÜM 13

Çoklu Regresyon

13.1 ÇOKLU REGRESYON MODELİ

Bölüm 12'deki doğrusal regresyon modelinde, bir bağımlı değişkenin davranışını açıklamak için *tek* bir bağımsız değişkenin davranışından yararlanmıştık. Bu bölümde amacımız, ilgilendiğimiz bir bağımlı değişkenin değişiminin elden geldiğince büyük bir bölümünü açıklayacak bir model kurmaktır. Ama artık birden çok ilgili değişkenin ya da *çoklu etkiler*in varlığım kabul ediyoruz. Örnek olarak, tasarruf sandıklarının kâr marjının yıllar boyunca gösterdiği değişkenliği açıklamak istediğimizi düşünelim. Öbür her şey aynıyken, kâr marjının, net gelirlerin mevduata oranıyla aynı yönde ilişkili olduğunu, yani net gelirler yüksekken kârın da yükseleceğini ileri sürmek akla uygun olabilir. Öbür her şey aynıyken, tasarruf sandığı şubelerinin çoğalmasıyla rekabetin artıp kâr marjınm düşebileceği de bir başka olanaktır. Öyleyse, aradığımız modelde kâr marjı (Y) iki bağımsız değişkenle, net gelirler (X_1) ve tasarruf sandığı şubelerinin sayısı (X_2) ile ilişkili olacaktır. Bu ilişkinin modelini kurabilmek için bu üç büyüklüğün verileri gereklidir. Çizelge 13.1, yirmibeş yıllık veri kümelerini göstermektedir.[1]

[1] Veriler L. J. Spellman, "Entry and probability in a rate-free savings and loan market," *Quarterly Review of Economics and Business, 18*, no.2 (1978), 87-95.

ÇİZELGE 13.1 Tasarruf sandıkları için mevduata oranla net gelir yüzdesi (x_1), şube sayısı (x_2), kâr marjı yüzdesi (y) verileri

YIL	x_{1i}	x_{2i}	y_i	YIL	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	3.92	7,298	0.75	14	3.78	6,672	0.84
2	3.61	6,855	0.71	15	3.82	6,890	0.79
3	3.32	6,636	0.66	16	3.97	7,115	0.70
4	3.07	6,506	0.61	17	4.07	7,327	0.68
5	3.06	6,450	0.70	18	4.25	7,546	0.72
6	3.11	6,402	0.72	19	4.41	7,931	0.55
7	3.21	6,368	0.77	20	4.49	8,097	0.63
8	3.26	6,340	0.74	21	4.70	8,468	0.56
9	3.42	6,349	0.90	22	4.58	8,717	0.41
10	3.42	6,352	0.82	23	4.69	8,991	0.51
11	3.45	6,361	0.75	24	4.71	9,179	0.47
12	3.58	6,369	0.77	25	4.78	9,318	0.32
13	3.66	6,546	0.78				

Başlangıçta yine, ilgilenilen ilişkiyi betimleyecek sonsuz sayıda değişik fonksiyon kalıbı arasından seçim yapma güçlüğüyle karşı karşıya kalırız. Bu kez de doğrusal kalıbın uygunluğunu gözden geçirmek uygun olur. Bağımlı değişkeni tek bir bağımsız değişkenle ilişkilendirdiğimiz Bölüm 12'de, bağımlı değişkenin beklenen değerinin, bağımsız değişkenin değerine doğrusal olarak bağlı olduğu bir model kurmuştuk. Burada da bağımlı değişkenin beklenen değeriyle ilgileniyoruz ama şimdi bu, bütün bağımsız değişkenlerin alacağı değerlere bağlıdır. Sözgelimi, tasarruf sandıkları örneğimiz bağlamında, mevduata oranla net gelir yüzdesinin 4.0, şube sayısının 8,000 olduğu bir yılda kâr marjı yüzdesinin beklenen değerinin ne olabileceğini sorabiliriz. Burada da, böyle bir kavram için uygun bir gösterim gerekir. Bağımlı bir Y değişkeninin, X_1 ve X_2 gibi bir çift bağımsız değişkenle ilişkili olduğu durumda, bağımsız değişkenler x_1 ve x_2 değerlerini alınca bağımlı değişkenin beklenen değerini göstermek için $E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ gösterimini kullanacağız. Bu bağlamdaki doğrusallık varsayımımız, bu koşullu beklenen değerin aşağıdaki biçimde olduğudur.

$$E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad (13.1.1)$$

Buradaki α, β_1, β_2 sayılarının verilerden tahmin edilmesi gerekir.

Daha genel olarak, Y bağımlı değişkenini K tane $X_1, X_2, \ldots, X_K$ bağımsız değişkeniyle ilişkilendirmek isteyebiliriz. Bu durumda X_1, x_1 değerini, X_2, x_2 değerini, vb. alırsa Eş. (13.1.1)'in aşağıdaki gibi genelleştirilmesi, bağımlı değişkenin beklenen değerini verir:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K)$$

$$= \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K \qquad (13.1.2)$$

Buradaki $E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K)$, bağımsız değişkenler belli $x_1, x_2, \ldots, x_K$ değerlerini aldığında ve $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ sabit sayıları da ilişkinin doğasını belirlediğinde, bağımlı değişkenin beklenen değerini gösterir. Bu sayıların yorumları açıktır. İlk olarak, bağımsız değişkenlerin her biri 0'a eşitlense, (13.1.2)'ye göre

$$E(Y \mid X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_K = 0) = \alpha$$

olur. Öyleyse, bütün bağımsız değişkenler 0 değerini alınca bağımlı değişkenin beklenen değeri α'dır. Bu yorum uygulamada çoğunlukla işe yaramaz, çünkü bütün bağımsız değişkenlerin 0 olduğu nokta ilgi çekmez, gerçekten anlamsız olabilir. (Sözgelimi tasarruf sandığı şube sayısının 0 olduğu durumla ilgilenmeyiz bile.) Üstelik, varsayılan model kalıbı, bağımsız değişkenlerin gözlenen değerler aralığında akla uygun olabilecekken bu aralığın çok dışında modelin geçerli olduğunu varsaymaya gereksiz bir iyimserlik olarak bakılabilir.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarının yorumu ise son derece önemlidir. Eş. (13.1.2)'ye dönelim. *Bütün öbür bağımsız değişkenlerin değerleri aynı kalırken*, bağımsız değişkenlerden birinin, diyelim X_1'in değeri x_1'den $(x_1 + 1)$'e 1 birim artsın. Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$E(Y \mid X_1 = x_1 + 1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K) = \alpha + \beta_1(x_1 + 1) + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K$$

Öyleyse Eş. (13.1.2)'yi kullanarak şu sonuca varırız:

$$E(Y \mid X_1 = x_1 + 1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K) - E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K)$$

$$= \alpha + \beta_1(x_1 + 1) + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K - (\alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K) = \beta_1$$

Dolayısıyla β_1, bütün öbür bağımsız değişkenlerin değerleri aynı kalırken, X_1'in 1 birim artması sonucu Y'de beklenen artıştır. Genel olarak β_j katsayısı, bütün öbür bağımsız değişkenlerin değerleri aynı kalırken, X_j'nin 1 birim artması sonucu Y'de beklenen artıştır. **Kısmi regresyon katsayısı** adı verilen β_j katsayıları, bütün öbür bağımsız değişkenler aynı kalırken, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkilerinin ayrı ayrı birer ölçüsünü verir.

Tasarruf sandıkları örneğimize dönerek gerçek ilişkinin şöyle olduğunu düşünelim:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1.5 + 0.2x_1 - 0.00025x_2$$

Burada x_1'in önündeki katsayı, tasarruf sandıkları şube sayısı sabit kalırken, net gelirlerde 1 birim artışın tasarruf sandıklarının kâr marjı yüzdesinde 0.2'lik bir

artış beklenmesine yol açtığını gösterir. Benzer biçimde x_2'nin önündeki katsayı, net gelirler sabit tutulurken, tasarruf sandıkları şube sayısının 1 artması, tasarruf sandıklarının kâr marjı yüzdesinde –0.00025 artış —yani 0.00025 azalış— beklenmesine yol açtığım gösterir. Daha gerçekçi sayılar kullanılırsa, tasarruf sandıklarının şube sayısı 1,000 artsa, net gelirler sabitken, kâr marjı yüzdesinde 0.25 bir azalma beklenmesine yol açar. Bu kısmi regresyon katsayıları, Çizim 13.1'de gösterilmiştir.

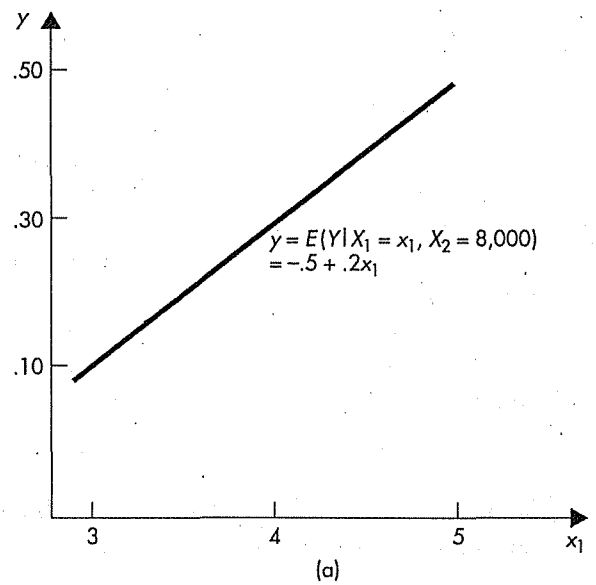
Çizim 13.1(a), tasarruf sandıklarının şube sayısı 8,000'de tutulmuşken, beklenen kâr marjı ile net gelirler arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu ilişki yukarı doğru eğimli olup, şube sayısı sabitken net gelirlerdeki bir artışın kâr marjında beklenen bir artışa yol açtığını gösterir. Çizimin (b) bölümü ise, mevduta oranla net gelir yüzdesi 4'te sabitken beklenen kâr marjı ile şube sayısı arasındaki ilişkiyi gösterir. Aşağıya doğru olan eğim, mevduta oranla net gelir yüzdesi sabitken, şube sayısındaki bir artışın kâr marjında bir gerileme beklenmesine yol açtığını gösterir.

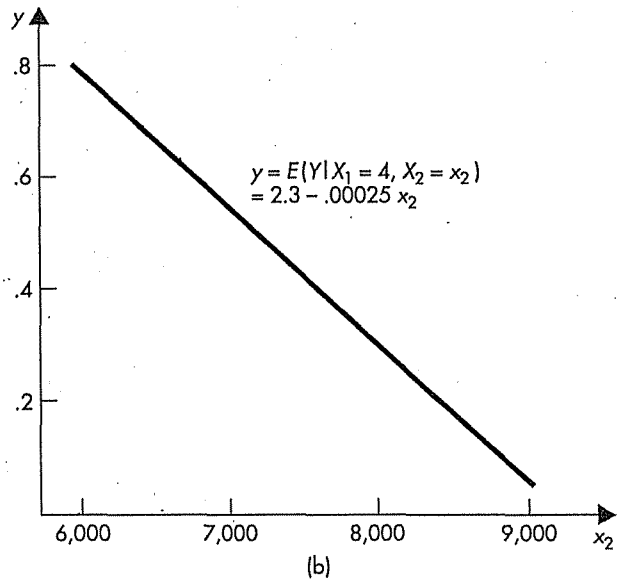
ÇİZİM 13.1 İleri sürülen model $E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1.5 + 0.2x_1 - 0.00025x_2$, burada

Y = Tasarruf sandıklarının kâr marjı yüzdesi
X_1 = Mevduata oranla net gelir yüzdesi
X_2 = Tasarruf sandıklarının şube sayısıdır.

(a) Şube 8,000 iken, $x_2 = 8{,}000$ koyarak şunu buluruz:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = 8{,}000) = -0.5 + 0.2x_1$$





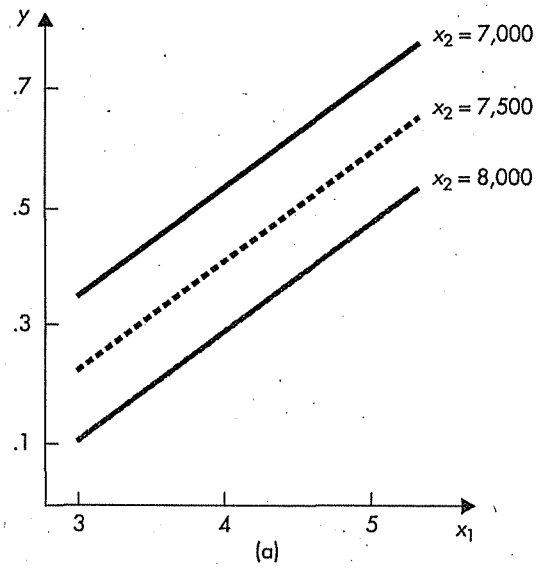
ÇİZİM 13.1 **(devam)** (b) Mevduata oranla net gelirler %4'te sabitken, $x_1 = 4$ koyarak şunu elde ederiz:

$$E(Y \mid X_1 = 4, X_2 = x_2) = 2.3 - 0.00025x_2$$

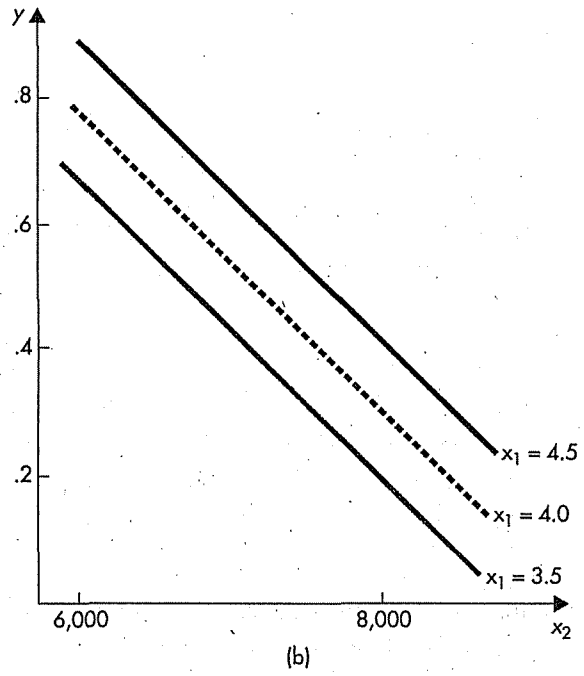
Bu anakütle regresyonunun çizimle gösterimini Çizim 13.2 ile genişletelim. Bölüm (a) beklenen kâr marjının net gelirlere bağımlılığını, tasarruf sandıkları şube sayısının üç değişik düzeyi —7,000, 7,500, 8,000— için göstermektedir. Dikkat ederseniz bu ilişkileri yansıtan doğrular birbirine koşuttur (paraleldir). Bu da modelimize göre, şube sayısı sabit tutulurken net gelirdeki bir artışın, şube sayısı hangi düzeyde sabit tutuluyor olursa olsun, hep aynı artışa yol açtığını gösterir. Ayrıca dikkat ederseniz şube sayısı ne kadar yüksekse, beklenen kâr marjının net gelirle ilişkisini kuran doğru o kadar aşağıdadır. Bunun anlamı da, net gelirlerin verilmiş herhangi bir düzeyinde, şube sayısı ne kadar yüksekse, beklenen kâr marjının o kadar düşük olacağıdır. Bu da, daha önce gördüğümüz, şube sayısına ilişkin kısmi regresyon katsayısı yorumunun tam tamına aynısıdır.

Çizim 13.2'nin (b) bölümü, beklenen kâr marjının tasarruf sandıklarının şube sayısıyla ilişkisini, mevduata oranla net gelirlerin üç değişik yüzdesi —3.5, 4.0, 4.5— için göstermektedir. Burada da üç doğru koşuttur. Ayrıca net gelir ne kadar yüksekse, beklenen kâr marjı ile şube sayısı arasındaki ilişkiyi kuran doğrunun da o kadar yüksekte olduğunu görüyoruz. Bu da beklenen bir durumdur, çünkü, daha önce de gördüğümüz gibi, herhangi bir sabit şube sayısında, net gelirlerde bir artış, kâr marjında da bir artış beklenmesine yol açar.

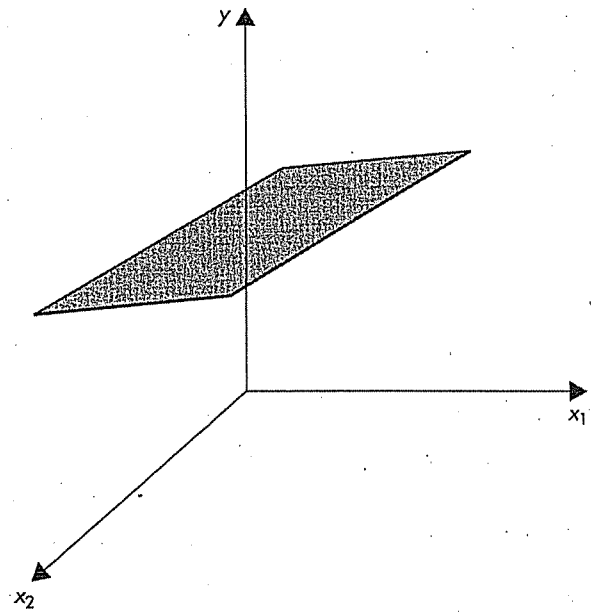
ÇİZİM 13.2 İleri sürülen model $E(Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1.5 + 0.2x_1 - 0.00025x_2$



(a) x_2, 7,000, 7,500, 8,000 düzeylerinde sabitken Y ile x_1 arasındaki ilişki



(b) x_1, 3.5, 4.0, 4.5 düzeylerinde sabitken Y ile x_2 arasındaki ilişki



ÇİZİM 13.3 Bağımlı bir değişkenin bir çift bağımsız değişkenle olan ilişkisinin üç boyutlu uzayda bir düzlemle gösterilmesi

Çoklu regresyon, bu örnekteki gibi, yalnızca iki bağımsız değişken içeriyorsa modelin bir tane daha çizimi yapılabilir. Bu ilişki, Çizim 13.3'teki gibi, üç boyutlu olarak görülebilir. Bu çizim, regresyon fonksiyonunu üç boyutlu uzayda bir düzlem olarak göstermekte olup, bir bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkenle olan ilişkisini iki boyutlu uzayda yansıtan doğrunun çizimine benzer. Bağımsız değişken değerlerinin olanaklı her çifti için bağımlı değişkenin beklenen değeri bu düzlem üzerinde bir noktadır. Çizim 13.3, bizim onu çizdiğimiz biçimiyle, tasarruf sandıkları örneğimizdeki durumu gösterir. X_1'deki bir artış, öbür her şey aynıyken, bağımlı değişkende bir artış beklenmesine yol açarken, X_2'deki bir artış, öbür her şey aynıyken, bağımlı değişkende bir azalış beklenmesine neden olur.

Modelimizi tamamlamak için, gerçek yaşamda ortaya atılan hiçbir modelin tam tamına geçerli olamayacağı olgusunu kabul ederek bir hata terimi eklemek gerekir. K tane bağımsız değişkenin belli $x_1, x_2, \ldots, x_K$ değerlerini aldığını düşünelim. Bu durumda, bağımlı değişkenin bunlara karşılık gelen değerini Y_i ile gösterirsek, bunun beklenen değeri şöyle yazılabilir:

$$E(Y_i \mid X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2i}, \ldots, X_K = x_{Ki})$$
$$= \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}$$

Şimdi, bağımsız değişkenler verilmişken, Y_i ile beklenen değeri arasındaki farkı ε_i ile gösterelim.

$$\varepsilon_i = Y_i - E(Y_i \mid X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2i}, \ldots, X_K = x_{Ki})$$
$$= Y_i - (\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki})$$

Öyleyse şunu yazabiliriz:

$$Y_i = (\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Çoklu Anakütle Regresyonu

Bağımlı bir Y değişkeninin, $X_1, X_2, \ldots, X_K$ gibi K tane bağımsız değişkenle olan ilişkisiyle ilgilendiğimizi düşünelim. Bu bağımsız değişkenler belli $x_1, x_2, \ldots, x_K$ değerleri alırsa, **çoklu anakütle regresyonu**, bağımlı değişkenin bunlara karşılık olan değeri Y_i'yi aşağıdaki gibi gösterir:

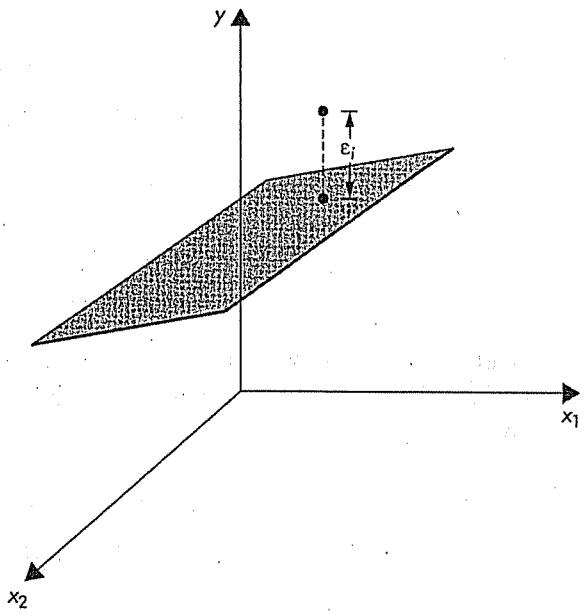
$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Burada α, β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_K$ sabit değerler, ε_i de ortalaması 0 olan bir rassal değişkendir.

İki bağımsız değişkeni olan tasarruf sandıkları örneğimiz için çoklu anakütle regresyonumuz şöyledir:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Bu durumda, net gelirlerle tasarruf sandıkları şube sayısının belli x_{1i} ve x_{2i} değerlerine karşılık gelen kâr marjı iki parçanın toplamıdır: $(\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i})$ beklentisi ile hata terimi ε_i. Hata terimi, kâr marjını etkileyen (net gelirlerle şube sayısı dışındaki) bir sürü etmenin karışık etkileri olarak düşünülebilir. İki bağımsız değişkenli anakütle regresyon modeli Çizim 13.4'te verilmiştir. Bu çizim, tıpkı Çizim 13.3 gibi, bağımlı değişkenin beklenen değerini bağımsız değişkenlerin değerleriyle ilişkilendiren regresyon düzlemini gösterir. Ayrıca, bağımsız değişkenlerin verilmiş değerleri için bağımlı değişkenin gerçekleşmiş değerini de irice bir noktayla göstermektedir. Bu tür noktaların tam regresyon düzlemi üstünde olmaları gerekmez. Bağımlı değişkenin gözlenen ve beklenen değerleri arasındaki fark, hata terimi ε_i ile gösterilmiştir. Çizim 13.4'te çizildiği gibi, gözlem noktası regresyon düzleminden yukarıdaysa, bu hata terimi artı değer alır. Regresyon düzleminden aşağıda olan gözlemler içinse hata terimi eksidir. Ortalama olarak hata terimleri 0'dır.



ÇİZİM 13.4 Bağımlı değişkenin beklenen değeriyle bir çift bağımsız değişkenin aldığı değerler arasındaki ilişkiyi gösteren regresyon düzleminden uzaklığı, y ekseni boyunca ε_i kadar olan bir gözlem noktası

Dikkat ederseniz Bölüm 12'de geliştirdiğimiz basit doğrusal regresyon modeli, çoklu regresyon modelinin tek açıklayıcı değişkenli özel bir durumudur. Dolayısıyla çoklu regresyon modeli çözümlememiz de, bir önceki bölümün izlediği yola benzer bir çizgiden gidecektir.

13.2 EN KÜÇÜK KARELER TAHMİNİ

Çoklu anakütle regresyon katsayılarının en küçük kareler ilkesiyle tahmini, basit doğrusal regresyon durumundakinin aynısıdır. Burada da, gözlenen verilere, fark karelerinin en küçüğe indirilmesi anlamında, olabildiğince yakın bir denklem tahmini ararız.

K tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkene ilişkin n tane ortak gözlem kümemiz olsun. Bu gözlem noktaları aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{K1}, y_1)$$
$$(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{K2}, y_2)$$
$$\vdots$$
$$(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{Kn}, y_n)$$

Çizelge 13.1'e dönersek, tasarruf sandıkları örneğinde iki bağımsız değişken ile $n = 25$ gözlem noktası olduğunu görürüz, bunlar da yukarıda belirtilen biçimde şöyle gösterilir:

$$(x_{11}, x_{21}, y_1) = (3.92, 7{,}298, 0.75)$$
$$(x_{12}, x_{22}, y_2) = (3.61, 6{,}855, 0.71)$$
$$\vdots$$
$$(x_{1n}, x_{2n}, y_n) = (4.78, 9{,}318, 0.32)$$

Bu veriler verilmişken sorunumuz, çoklu anakütle regresyon modelinin bilinmeyen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarının tahminlerini bulmaktır.

Bilinmeyen bu katsayıların tahminleri olabilecek $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ sayılarını alalım, böylelikle tahmin edilen model

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_Kx_K$$

olur. Bu durumda, bağımsız değişkenlerin gözlenen değerleri için, bağımlı değişkenin tahmin edilmiş bu modelle kestirilen değerleri

$$(a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \cdots + b_Kx_{Ki})$$

iken, gerçekte gözlenen değerler y_i'dir. Öyleyse bağımlı değişkenin gözlenen ve kestirilen değerleri arasındaki farklar da şunlar olur:

$$e_i = y_i - (a + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \cdots + b_Kx_{Ki}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tıpkı doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi, burada da en küçük kareler tahminleri,

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b_1x_{1i} - b_2x_{2i} - \cdots - b_Kx_{Ki})^2$$

fark kareleri toplamını olabildiğince küçük kılan $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ sayılarıdır.

En Küçük Karelerle Tahmin ve Çoklu Örneklem Regresyonu

$(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{K1}, y_1), (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{K2}, y_2), \ldots, (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{Kn}, y_n)$ noktaları,

$$Y_i = a + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K + \varepsilon_i$$

çoklu anakütle regresyonu sürecindeki n gözlem kümesinden oluşan bir örneklem olsun.

$\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarının **en küçük kareler tahminleri** olan $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ değerleri

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \cdots - b_K x_{Ki})^2 \qquad (13.2.1)$$

fark kareleri toplamını en küçüğe indirir.

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_K x_{Ki}$$

denklemi, Y'nin $X_1, X_2, \ldots, X_K$'ye göre **çoklu örneklem regresyonu**nu gösterir.

Bağımsız değişkenlerin sayısı K çok küçük olmadıkça, en küçük kareler tahminlerinin hesaplanması son derece bezdiricidir.[2] İlgilenen okuyucu için, bazı cebirsel ayrıntılar bu bölümün sonundaki Ek A13.1'de verilmiştir. Neyse ki, uygulama açısından bakıldığında, bu sorun bizi yolumuzdan alıkoyamaz. Regresyon modellerini verilere uydurmak, uygulamalı istatistiğin birçok dalında o kadar yaygındır ki, gerekli aritmetik işlemlerini yapan bilgisayar paketleri uzun zamandır el altında bulunmaktadır. Bu tür paketlerin ayrıntılı bir tartışması, ek kavramlar geliştirilinceye kadar ertelenecektir. Şimdilik şunu söylemek yeterlidir: En küçük kareler tahminlerinin hesaplanma işlemi, Eş. (13.2.1)'deki fark kareleri toplamının en küçüğe indirilmesidir.

Çizelge 13.1'deki verilere dayanarak, tasarruf sandıklarının kâr marjının net gelirlere ve şube sayılarına göre regresyonunun anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminleri şöyle bulunur:

$$a = 1.565 \qquad b_1 = 0.237 \qquad b_2 = -0.000249$$

Dolayısıyla çoklu örneklem regresyonu şöyledir:

$$y = 1.565 + 0.237x_1 - 0.000249x_2$$

Öyleyse, sabit şube sayısıyla, net gelirlerdeki yüzde 1 puanlık artışın, kâr marjı yüzdesinde 0.237 puanlık artış beklenmesine yol açacağını tahmin ederiz. Ben-

[2] Aslında bu cebirsel ifadelere matris cebiri kullanılarak ulaşılır. Ancak bu yaklaşım bu kitabın kapsamı dışındadır.

zer biçimde, net gelirler sabitken, şube sayısının 1,000 artması, kâr marjı yüzdesinde 0.249 puanlık azalış beklenmesine yol açar.

Bu örnekte olduğu gibi, regresyon modeli iki bağımsız değişken içerdiğinde, en küçük kareler tahminleri, bilgisayar programına başvurmadan, biraz aritmetik çabayla hesaplanabilir. Ayrıntılar Ek A13.1'de gösterilmiştir.

13.3 ÇOKLU REGRESYON MODELİNİN STANDART VARSAYIMLARI

Regresyon çözümlemesinin uygulanması tartışmalarına geçmeden önce, aşağıdaki çerçevede, çoğu uygulamalar için akla yatkın olan bazı varsayımlardan söz edeceğiz. Bu varsayımlar geçerli olduğunda, en küçük kareler tahmini için güçlü nedenler var demektir.

Standart Varsayımlar

Çoklu anakütle regresyonunu şöyle gösterelim:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Elimizde n tane gözlem kümesi olsun. Aşağıdaki standart varsayımlar sık sık yapılır:

1. $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ki}$ ya sabit sayılardır ya da ε_i hata terimlerinden bağımsız $X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{Ki}$ rassal değişkenlerinin gerçekleşmiş değerleridir. İkinci durumda çıkarsama, gözlenen $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ki}$ değerlerine koşullu olarak yapılır.

2. ε_i hata terimleri, ortalaması sıfır olan rassal değişkenlerdir:

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

3. ε_i rassal değişkenlerinin hepsinin varyansı aynıdır, diyelim σ_ε^2'dir:

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

4. ε_i rassal değişkenleri birbirleriyle ilişkili değildir:

$$\text{bütün } i \neq j\text{'ler için} \qquad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$$

5. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$c_0 + c_1 x_{1i} + c_2 x_{2i} + \cdots + c_K x_{Ki} = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $c_0, c_2, \ldots, c_K$ sayılar kümesinin bulunması olanaksızdır.

İlk dört varsayım, özünde Altbölüm 12.5'te doğrusal regresyon modeli için yapılanların aynıdır. 5. varsayımın amacı, en küçük kareler tahmin edicilerinin biricik olmadığı bazı hastalıklı durumları devredışı bırakmaktır. Bunu örneklemek için, tahıl taşıma fiyatlarındaki değişkenliği açıklamakla ilgilendiğimizi düşünelim. Çok ilgili olan bir açıklayıcı değişken taşıma mesafesinin uzunluğudur. Yolun uzunluğunu uygun herhangi bir birimle ölçebiliriz. Ama regresyona, mil (x_1) ve kilometre (x_2) gibi iki farklı uzunluk ölçüsünü koymanın bir anlamının olmadığı açıktır. Bu iki bağımsız değişken aslında aynı uzunluğun almaşık ölçülerinden başka bir şey değildir. Bunların etkilerini ayrı ayrı ölçmeye çalışmak aptallık olur. İşte bu türden durumlar beşinci varsayımla dışlanmaktadır. Uygulamada (regresyon modelinin akla uygun belirlenmiş olması koşuluyla) 5. varsayımın çiğnenmediğini düşünmek hiç de yanlış olmaz.

Bu bölümün geri kalanında bütün bu standart varsayımlar geçerliymiş gibi davranacak, bunların çiğnenmesi durumunda neler olabileceğini bir sonraki bölümde göreceğiz.

13.4 GAUSS-MARKOV TEOREMİ

Bu altbölümde, Altbölüm 12.6'daki bulguları genişleteceğiz. Çoklu regresyon modelinin katsayılarını tahmin etmek için $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{K1}, y_1)$, $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{K2}, y_2)$, $(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{Kn}, y_n)$ gözlemlerini kullanmak istiyor olalım. Altbölüm 12.6'da olduğu gibi, dikkatimizi y_i'nin doğrusal fonksiyonları olan tahminlerle, yani

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

biçimindeki tahminlerle sınırlayalım. Burada c_i'ler, y_i'ye bağlı olmayan sayılardır. Gauss-Markov teoremine göre, bu tür bütün tahminler arasında, çerçeve içinde açıklandığı anlamda, en iyileri en küçük karelerle bulunanlardır.

Gauss-Markov Teoremi

Çoklu anakütle regresyonunu şöyle gösterelim:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Elimizde n tane gözlem kümesi bulunsun. Ayrıca, Altbölüm 13.3'ün 1-5. varsayımları geçerli olsun.

Bu durumda, $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$'nin olanaklı, Y_i'ye göre doğrusal, sapmasız bütün tahmin edicileri (yani, Altbölüm 13.2'deki en küçük kareler tahmin edicilerine karşılık gelen $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ rassal değişkenleri) arasında en küçük kareler tahmin edicileri varyansları en küçük olanlardır.

Üstelik, $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_K$ herhangi bir sabit sayılar kümesi ise ve biz de

$$d_0\alpha + d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \cdots + d_K\beta_K$$

ifadesini tahmin etmek istesek,

$$d_0a + d_1b_1 + d_2b_2 + \cdots + d_Kb_K$$

ifadesine karşılık gelen tahmin edici, Y_i'ye göre doğrusal, sapmasız bütün tahmin ediciler sınıfı içinde en küçük varyanslı olanıdır.

Bu teorem sayesinde, en küçük kareler tahmin edicilerine **doğrusal, en iyi, sapmasız tahmin ediciler (DESTE)** denir.

Şimdi, belli durumlarda sapmalı bir tahmin ediciyi, eldeki sapmasız bir tahmin ediciye tercih etmek pekâlâ akla uygun olabilir. Yine de Gauss-Markov teoremi, en küçük karelerle tahmin yönteminin kullanılmasını haklı çıkarır ve uygulamalı çalışmalarda bu sürecin büyük ölçüde tutulmasının kuramsal desteğini sağlar. Gauss-Markov teoremine göre, çok geniş bir sapmasız tahmin-ediciler sınıfı içinde en küçük kareler tahmin edicileri en etkin olanlardır. Tıpkı Bölüm 12'deki basit doğrusal regresyon tartışmamızda olduğu gibi, burada da Gauss-Markov teoremi en küçük kareler yöntemini, nokta tahminleri bulmada akla yakın görünen bir yöntem olma konumundan çıkarıp, nokta tahminlerini türetmede en uygun istatistik özellikleri taşıyan bir sürece çevirmektedir.

Hemen ekleyelim ki, en küçük kareler yöntemi, bir regresyon modelinin katsayılarının tahmini sorununda her zaman en iyi yaklaşım olmayabilir. Altbölüm 13.3'teki standart varsayımlar geçerliyken bu yaklaşımı kullanmanın çok haklı olduğunu gördük. Ama, bu varsayımlardan biri ya da öteki geçersizse, başka tahmin ediciler yeğlenebilir. (Bunu gelecek bölümde ele alacağız.) Gerçekten de bir varsayım ciddi biçimde çiğnenirse, en küçük kareler tahmin edicileri çok güç kaybedebilir ve bunlara dayanan çıkarsamalar bir hayli yanıltıcı olabilir.

13.5 BİR ÇOKLU REGRESYON MODELİNİN AÇIKLAMA GÜCÜ

Regresyon çözümlemesinin amacı, bağımlı değişkenin davranışını açıklamak için bağımsız değişkenleri kullanmaktır. Bağımlı değişkendeki değişkenlik, kısmen bağımsız değişkenle olan doğrusal ilişkiyle açıklanabilir. Bu altbölümde, bağımlı değişkenin örneklemdeki değişkenliğinin, tahmin edilen çoklu regresyon tarafından açıklanabilen oranının bir ölçüsünü ele alacağız.

Örneklemde, tahmin edilen regresyon şöyle yazılır:

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_K x_{Ki} + e_i$$

Yahut şöyle de yazabiliriz:

$$y_i = \hat{y}_i + e_i \qquad (13.1.5)$$

Burada

$$\hat{y}_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_K x_{Ki}$$

bağımlı değişkenin regresyonca kestirilen değeri, **kalıntı** e_i ise gözlenen ve kestirilen değerler arasındaki farktır. Tasarruf sandıkları verileri için, Eş. (13.5.1)' deki üç büyüklük, Çizelge 13.2'nin ilk üç sütununda verilmiştir.

Altbölüm 12.7'de olduğu gibi, Eş. (13.5.1)'in her iki yamndan bağımlı değişkenin ortalamasını çıkarırsak şunu buluruz:

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i \qquad (13.5.2)$$

Bu da şöyle yorumlanabilir:

Örneklem ortalamasından gözlenen sapma

= Örneklem ortalamasından kestirilen sapma + Kalıntı

Örneğimizde bağımlı değişkenin örneklem ortalaması şudur:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{16.86}{25} = 0.674\ *$$

Bu değeri kullanarak, tasarruf sandıkları verileriyle, Eş. (15.3.2)'nin ilk iki terimini hesaplayıp Çizelge 13.2'nin son iki sütununda gösterdik.

Eş. (15.3.2)'nin her iki yanımn karesi alınıp i endeksine göre toplanırsa aşağıdaki eşitlik bulunabilir:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Bu da, Altbölüm 12.7'de bulunan kareler toplamı ayrıştırmasından başka bir şey değildir ve çerçeve içinde gösterildiği gibi, benzer biçimde yorumlanır.

ÇİZELGE 13.2 Tasarruf sandıkları regresyonunda gözlenen değerler, kestirilen değerler ve kalıntılar

y_i	$\hat{y}_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}$ $= 10.565 + 0.273x_{1i}$ $-0.000249x_{2i}$	e_i $= y_i - \hat{y}_i$	$y_i - \bar{y}$ $= y_i - 0.674$	$\hat{y}_i - \bar{y}$ $= \hat{y}_i - 0.674$
0.75	0.677	0.073	0.076	0.003
0.71	0.714	–0.004	0.036	0.040
0.66	0.699	–0.039	–0.014	0.025
0.61	0.673	–0.063	–0.064	–0.001
0.70	0.684	0.016	0.026	0.010
0.72	0.708	0.012	0.046	0.034
0.77	0.740	0.030	0.096	0.066
0.74	0.759	–0.019	0.066	0.085
0.90	0.795	0.105	0.226	0.121
0.82	0.794	0.026	0.146	0.120
0.75	0.799	–0.049	0.076	0.125
0.77	0.828	–0.058	0.096	0.154
0.78	0.802	–0.022	0.106	0.128
0.84	0.800	0.040	0.166	0.126
0.79	0.755	0.035	0.116	0.081
0.70	0.734	–0.034	0.026	0.060
0.68	0.705	–0.025	0.006	0.031
0.72	0.693	0.027	0.046	0.019
0.55	0.635	–0.085	–0.124	–0.039
0.63	0.613	0.017	–0.044	–0.061
0.56	0.570	–0.010	–0.114	–0.104
0.41	0.480	–0.070	–0.264	–0.194
0.51	0.438	0.072	–0.164	–0.236
0.47	0.396	0.074	–0.204	–0.278
0.32	0.378	–0.058	–0.354	–0.296
Toplam 16.86				

Kareler Toplamının Ayrıştırılması ve Belirlilik Katsayısı

n tane gözlem kümesine en küçük karelerle şöyle bir çoklu regresyon denklemi uydurulmuş olsun:

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_K x_{Ki} + e_i = \hat{y}_i + e_i$$

Burada $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ anakütle regresyon modelinin katsayılarının küçük kareler tahmin edicileri, e_i'ler de tahmin edilen regresyon doğrusunun **kalıntılarıdır**.

Aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım (burada $\bar{y}$ bağımlı değişkenin örneklem ortalamasıdır):

BÜTÜN KARELER TOPLAMI: $\text{BKT} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

REGRESYON KARELERİ TOPLAMI: $\text{RKT} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$

KALINTI KARELERİ TOPLAMI: $\text{HKT} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

Bu durumda şu eşitlik yazılabilir: $\text{BKT} = \text{RKT} + \text{HKT}$

Bu ayrıştırma, bağımlı değişkenin gözlenen değerleri cinsinden şöyle yorumlanabilir:

Örneklemin toplam değişkenliği =

Açıklanan değişkenlik + Açıklanamayan değişkenlik

Uydurulan regresyonun **belirlilik katsayısı** R^2, örneklemin toplam değişkenliği içinde açıklanabilen bölümün oranı olarak tanımlanır, yani:

$$R^2 = \frac{\text{RKT}}{\text{BKT}} = 1 - \frac{\text{HKT}}{\text{BKT}}$$

Bu tanımın kaçınılmaz sonucu olarak şu da yazılabilir:

$$0 \le R^2 \le 1$$

Çizelge 13.2'den (üçüncü ve dördüncü sütundaki değerlerin kareleri toplamını alarak) tasarruf sandıkları örneğimizde şunları buluruz:

$$\text{HKT} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0.0623 \qquad \text{BKT} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 0.4640$$

Dolayısıyla belirlilik katsayısı

$$R^2 = 1 - \frac{\text{HKT}}{\text{BKT}} = 1 - \frac{0.0623}{0.4640} = 0.87$$

olur. Öyleyse örneğimizde, tasarruf sandıklarının kâr marjlarındaki değişkenliğin %87'si, net gelirler ve şube sayılarıyla olan doğrusal ilişkileriyle açıklanabilmektedir.

Regresyon kareleri toplamını bulmak için, Çizelge 13.2'nin son sütunundaki terimlerin kareleri toplamını alma zahmetine girmek gerekmez. Onun yerine, bu büyüklüğü aşağıdaki eşitlikle elde ederiz:

$$\text{RKT} = \text{BKT} - \text{HKT}$$

Öyleyse örneğimizde bu sayı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\text{RKT} = 0.4640 - 0.0623 = 0.4017$$

Hata kareleri toplamı, aşağıdaki çerçevede açıklandığı gibi, anakütle regresyon modelindeki hata terimleri varyansımn tahmininde de işe yarar.

Hata Varyansının Tahmini

Anakütle regresyon modeli şöyle olsun:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Ayrıca Altbölüm 13.3'teki 1-5. varsayımlar da geçerli olsun. ε_i hata terimlerinin sabit varyansını σ_ε^2 ile gösterelim. Bu durumda σ_ε^2'nin sapmasız bir tahmini şöyle bulunur:[3]

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-K-1} = \frac{\text{HKT}}{n-K-1}$$

Belirlilik katsayısı daha çok, bağımsız değişkenin, bağımlı değişkenin davranışını açıklamadaki başarı ölçüsünü veren betimleyici bir istatistik olarak kullanılır. Bu bağlamda kesinlikle yararlı olabilmesine karşın, bağımsız değişken sayısı K, gözlem noktaları sayısı n içinde büyükçe bir orana çıktığı durumlarda kullanımı eleştirilebilir. Bu durumda, aslında bağımlı değişken, bağımsız değişkenlere güçlü bir biçimde bağlanmasa bile, model verilere bir hayli iyi uyum gösterir. Önemsiz bir örnek olarak bir doğruyu, yalmzca iki noktaya tam olarak uydurabiliriz. Bu sorunu biraz olsun hafifletmek için, bazen regresyon ilişkisinin gücünün düzeltilmiş bir ölçüsü hesaplanır. Bu düşüncenin temelinde, regresyon denklemine (ilgili olsun olmasın) daha çok açıklayıcı değişken eklemenin kaçınılmaz olarak hata kareleri toplamım azaltmasını biraz olsun dengelemek için,

$$R^2 = 1 - \frac{\text{HKT}}{\text{BKT}}$$

ifadesindeki her iki kareler toplamını uygun birer serbestlik derecesine bölmek yatar. Hata varyansımn sapmasız bir tahmin edicisini elde etmek için HKT'yi $(n-K-1)$'e bölmemiz gerektiğini daha önce görmüştük. Dahası, gözlemler rassal bir örneklem oluşturduklarında, BKT'yi $(n-1)$'e bölmek, bağımlı değişken varyansının sapmasız bir tahmin edicisini verir. Bu değişikliklerin yapılmasıyla **düzeltilmiş belirlilik katsayısı** bulunur.

---

[3] Sezgisel olarak, $(n-K-1)$ ile bölmenin nedeni, anakütlenin bilinmeyen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarını tahmin ederken $(K+1)$ serbestlik derecesini "kaybetmemiz"dir.

Tanım

Bir çoklu regresyon bağımlı bir değişkeni K bağımsız değişkenle ilişkilendiriyor olsun. **Düzeltilmiş belirlilik katsayısı** $\overline{R}^2$ şöyle tanımlanır:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\text{HKT}/(n-K-1)}{\text{BKT}/(n-1)}$$

Örneğimizde

$$n = 25 \qquad K = 2 \qquad \text{HKT} = 0.0623 \qquad \text{BKT} = 0.4640$$

olduğuna göre, düzeltilmiş belirlilik katsayısı

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{0.0623/22}{0.4640/24} = 0.85$$

olarak bulunur. Bu örnekte düzeltme çok küçüktür. Bağımsız değişken sayısının örneklem noktaları sayısına oranı daha büyük olduğunda, düzeltmeler daha ciddi olur.

KISMİ KORELASYON

Kısmi regresyon katsayıları β_i, *öbür bütün bağımsız değişkenler aynı kalırken,* bir bağımsız değişkendeki bir birimlik değişmenin bağımlı değişkende yol açtığı beklenen değişmeyi ölçer. Kısmi regresyon katsayıları, bu anlamda, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkilerini ayrı ayrı betimler. Ama bu ilişkilerin *gücü*nün doğrudan bir ölçüsü değildirler, çünkü sayısal değerleri değişkenlerin ölçüldükleri birimlere bağlıdır. Altbölüm 12.1'de korelasyon katsayısının, bir çift rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü nasıl ölçtüğünü gördük. Burada da bu kavramın, öbür bağımsız değişkenler $X_2, X_3, \ldots, X_K$ aynı kalırken, bir bağımlı değişken Y ile bir bağımsız değişken X_1 arasındaki doğrusal ilişkinin gücünün bir ölçüsünü vermek üzere nasıl genişletileceğini göstereceğiz.

Anakütlede $X_2, X_3, \ldots, X_K$ aynı kalırken, Y ile X_1 arasındaki **kısmi korelasyon**, $X_2, X_3, \ldots, X_K$'nin sabit değerleri verilmişken Y ile X_1 arasındaki korelasyondur. Bu büyüklük örneklem verilerinden şöyle tahmin edilir:

1. Bağımlı değişken Y ve bağımsız değişkenler $X_2, X_3, \ldots, X_K$'ye en küçük kareler regresyonunu uydurun.

2. Bağımlı değişken X_1 ve bağımsız değişkenler $X_2, X_3, \ldots, X_K$'ye en küçük kareler regresyonunu uydurun.

3. Adım 1 ve 2'deki regresyon kalıntıları arasındaki örneklem korelasyonunu hesaplayın. Adım 1 ve 2'nin amacı, Y ile X_1 arasındaki örneklem korelasyonunu hesaplamadan önce, $X_2, X_3, \ldots, X_K$'nin bunlar üzerindeki etkilerini ortadan kaldırmaktır.

Örneklemin kısmi korelasyon katsayılarını bulmak sıkıcı bir iş olabilir ama çoğu bilgisayar paket programı bu büyüklükleri zaten hesaplamaktadır. Çizelge 13.1'deki verilerle, şube sayısı sabitken kâr marjı yüzdesiyle mevduat başına net gelir yüzdesi arasındaki kısmi örneklem korelasyonu 0.67'dir. Mevduat başına net gelir yüzdesi sabit tutulmuşken, kâr marjı yüzdesi ile şube sayısı arasındaki kısmi örneklem korelasyonu –0.86'dır.

Kısmi örneklem korelasyonu çoğunlukla, ilişkinin gücünü tahmin eden betimleyici bir istatistik olarak kullanılır. Yorumu basit örneklem korelasyonu gibidir. Öyleyse, tasarruf sandıklarına ilişkin bulgularımız, biri kâr marjıyla net gelirler arasında aynı yönlü, öbürü kâr marjıyla şube sayısı arasında ters yönlü olmak üzere epeyce güçlü iki ilişkiyi ortaya koymaktadır; kâr marjıyla şube sayısı arasındaki bağımlılık özellikle güçlü görünmektedir. Kısmi korelasyonun karesine kimi zaman *kısmi* R^2 denir. Bu durumda, şube sayısı sabitken kâr marjı yüzdesi ile mevduat başına net gelir yüzdesi arasındaki kısmi R^2, $(0.67)^2 = 0.45$' tir. Bunun anlamı, şube sayısı sabitken, kâr marjında kalan değişkenliğin %45 kadarının net gelirlerle olan doğrusal bağımlılık aracılığıyla açıklanacağının tahmin edildiğidir.

Bağımlı bir değişken üzerindeki çoklu etkilerin basit bir doğrusal regresyon yerine çoklu bir regresyon kullanılmasını gerektirdiği ölçüde, sözkonusu ilişkilerin gücünü ölçmeye uygun bir ölçü, Altbölüm 12.1'deki basit korelasyon yerine kısmi korelasyondur. Sözgelimi, kâr marjıyla net gelirler arasındaki örneklem korelasyonu *eksi* işaretli (gerçekte –0.70) olmasına karşın, örneklem dönemindeki şube sayılarının değişimini dışlayınca, az önce gördüğümüz gibi, orta güçte *artı* işaretli bir ilişki ortaya çıkmıştır.

Burada bir uyarı gereklidir. Örneklem verileri zaman zaman, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki *ayrı ayrı* etkileri konusunda pek bilgi vermez. Bu durumda, kısmi örneklem korelasyonları da küçük çıkar. Öyleyse 0'a yakın bir kısmi örneklem korelasyonu, gerçekten zayıf bir ilişkinin sonucu olabileceği gibi, bilgi vermeyen verilerden de kaynaklanmış olabilir. Bu konuya Altbölüm 14.6'da yeniden döneceğiz.

ÇOKLU KORELASYON

Bir çoklu regresyon bağlamında gördük ki, bağımlı değişkenle bağımsız değişkenlerin her biri arasındaki basit örneklem korelasyonları elverişsiz ve pekâlâ

yanıltıcı olabilir. Öbür bağımsız değişkenler sabit tutulurken, bağımlı değişkenle bağımsız bir değişken arasındaki ilişkinin gücünün değerlendirilmesinde kısmi örneklem korelasyonu daha uygundur.

Bazen de örneklem korelasyonunun başka bir genelleştirilmiş biçimi hesaplanır. Eğer sorunu açıklayıcı değişkeni açıklamak ya da kestirmek olarak alırsak, örneklemden y_i $(i = 1, \ldots, n)$ gözlemlerini ve bunların karşılığı olan $\hat{y}_i$ kestirimlerini biliriz.Bu iki büyüklük arasındaki örneklem korelasyonuna *çoklu korelasyon katsayısı* denir. Bu da bize bağımlı değişkenle örneklem regresyon modelinin kestirimleri arasındaki ilişkinin örneklemdeki gücünün bir ölçüsünü verir.

Aslında çoklu korelasyon katsayısı, belirlilik katsayısının artı kökünden başka bir şey değildir. Öyleyse tasarruf sandıkları örneğimizde, çoklu korelasyon katsayısı

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.87} = 0.93$$

olur.

Basit örneklem korelasyon katsayısı nasıl bir çift rassal değişken arasındaki ilişkinin gücünün bir ölçüsüyse, çoklu korelasyon katsayısı da, bir regresyon ilişkisinin bütünün gücünün bir ölçüsüdür. Gerçekten de, basit doğrusal regresyonda, çoklu korelasyon katsayısı, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki örneklem korelasyon katsayısının mutlak değeridir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir uçak yapım şirketi, yeni bir uçak tasarımının bitirilmesi için gerekli işçi-saati sayısını kestirmek istemektedir. Uçağın en yüksek hızı, ağırlığı, bu şirketin ürettiği öteki uçaklarla ortak olan parça sayısı, ilgili açıklayıcı değişkenler olarak düşünülmüştür. Şirketin uçaklarından yirmiyedi tanesi bir örnekleme seçilmiş, aşağıdaki model tahmin edilmiştir:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = Tasarım çabası, milyon işçi-saati
x_{1i} = Uçağın en yüksek hızı, Mach sayısı (uçak hızının ses hızına oranı, Ç.N.)
x_{2i} = Uçağın ağırlığı, ton
x_{3i} = Öteki modellerle ortak parça sayısının yüzdesi

Tahmin edilen kısmi regresyon katsayıları şöyledir:

$$b_1 = 0.661 \qquad b_2 = 0.065 \qquad b_3 = -0.018$$

Bu tahminleri yorumlayın.

2. İngiltere'deki mali kurumların pay senedi fiyatları üzerindeki etkisini araştıran bir çalışmada 12 yıllık üçer aylık veriler incelenmiştir.[4] Öne sürülen model şöyledir:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = *Financial Times* pay senedi fiyat endeksindeki üç aylık değişme
x_{1i} = Mali kuruluşların pay senedi alışlarındaki üç aylık değişme
x_{2i} = Mali kuruluşların pay senedi satışlarındaki üç aylık değişme

Tahmin edilen kısmi regresyon katsayıları şöyledir:

$$b_1 = 0.057 \qquad b_2 = -0.065$$

Bu tahminleri yorumlayın.

3. Ailelerin süt tüketimini tahmin etmek için aşağıdaki model otuz ailelik bir örnekleme uygulanmıştır:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = Süt tüketimi, kuart/hafta (1 kuart = 1.14 litre, Ç.N.)
x_{1i} = Haftalık gelir, yüz dolar
x_{2i} = Aile büyüklüğü

Anakütle regresyon katsayılarının en küçük kareler tahminleri şöyledir:

$$a = -0.025 \qquad b_1 = 0.052 \qquad b_2 = 1.14$$

(a) b_1 ve b_2 tahminlerini yorumlayın.
(b) a tahmininin anlamlı bir yorumu yapılabilir mi?

4. Aşağıdaki model, bir örneklemdeki yirmibeş öğrencinin üniversitedeki ilk yıllarının sonunda elde edilen verilere uygulanmıştır. Amaç, öğrencilerin aldığı kiloları açıklamaktır.

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = İlk yılda alınan kilo, libre (1 libre = 454 gr. Ç.N.)

---

[4] R. Dobbins, S. F. Witt, "Stock market prices and sector activity," *Journal of Business, Finance and Accounting, 7* (1980), 261-76.

x_{1i} = Bir haftada yenen ortalama yemek sayısı
x_{2i} = Bir haftada jimnastiğe ayrılan ortalama süre, saat
x_{3i} = Bir haftada içilen ortalama bira sayısı

Anakütle regresyon katsayılarının en küçük kareler tahminleri şöyledir:

$$a = 7.35 \qquad b_1 = 0.653 \qquad b_2 = -1.345 \qquad b_3 = 0.613$$

(a) b_1, b_2 ve b_3 tahminlerini yorumlayın.
(b) a tahmininin anlamlı bir yorumu yapılabilir mi?

5. Alıştırma 1'de, en küçük kareler tahminlerinin yirmiyedi gözlem kümelik bir örnekleme dayandığı çalışmada bütün kareler toplamı ile regresyon kareleri toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\text{BKT} = 3.881 \qquad \text{RKT} = 3.549$$

(a) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(b) Hata kareleri toplamını bulun.
(c) Düzeltilmiş belirlilik katsayısını bulun.
(d) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.

6. Alıştırma 3'te, en küçük kareler tahminlerinin otuz gözlem kümelik bir örnekleme dayandığı çalışmada bütün kareler toplamı ile regresyon kareleri toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\text{BKT} = 162.1 \qquad \text{RKT} = 88.2$$

(a) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(b) Düzeltilmiş belirlilik katsayısını bulun.
(c) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.

7. Alıştırma 4'te, en küçük kareler tahminlerini hesaplamak için yirmibeş gözlemli bir örneklem kullanılmıştır. Regresyon kareleri toplamı ile hata kareleri toplamı aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\text{RKT} = 79.2 \qquad \text{HKT} = 45.9$$

(a) Belirlilik katsayısını bulup yorumlayın.
(b) Düzeltilmiş belirlilik katsayısını bulun.
(c) Çoklu belirlilik katsayısını bulun.

8. Çizelge 13.1'de verilen tasarruf sandıkları verilerine dönelim.
(a) Kâr marjının şube sayısına göre regresyonunu en küçük karelerle tahmin edin.
(b) Net gelirlerin şube sayısına göre regresyonunu en küçük karelerle tahmin edin.
(c) Kâr marjının net gelirlere göre regresyonunu en küçük karelerle tahmin edin.
(d) Şube sayısının net gelirlere göre regresyonunu en küçük karelerle tahmin edin.
(e) (a) ile (b)'deki bulgulara dayanarak, kâr marjıyla net gelirler arasındaki kısmi örneklem korelasyonunun 0.67 olduğunu gösterin.
(f) (c) ile (d)'deki bulgulara dayanarak, kâr marjıyla şube sayısı arasındaki kısmi örneklem korelasyonunun –0.86 olduğunu gösterin.

13.6 TEKİL ANAKÜTLE REGRESYON KATSAYILARININ GÜVEN ARALIKLARI VE ÖNSAV SINAMALARI

Buraya kadar, aşağıdaki çoklu regresyon modelinin katsayılarının nokta tahminlerini ele aldık:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Bu altbölümde, bulgularımızı, güven aralıklarını ve önsav sınamalarını geliştirecek biçimde genişleteceğiz.

En küçük kareler tahmin edicileri, ilgili anakütle katsayıları için sapmasızdır. Bu tahmin edicilerin varyanslarını gösteren ifadeler türetilebilir ama bunların cebirsel gösterimleri epeyce karmaşıktır. Ancak, çoklu regresyon için yazılmış bilgisayar programları, anakütle katsayılarının en küçük kareler tahmin edicilerinin varyansları için $s_a^2, s_{b_1}^2, s_{b_2}^2, \ldots, s_{b_K}^2$ sapmasız tahmin edicilerini zaten hesaplamaktadır. Aslında bu büyüklüklerin daha çok karekökleri, yani tahmin edilen standart sapmaları ya da **standart hataları** yazılır. Tasarruf sandıkları örneğinde,

$$s_a = 0.079 \qquad s_{b_1} = 0.0555 \qquad s_{b_2} = 0.0000320$$

değerleri elde edilmiştir. Öyleyse, sözgelimi β_1'in en küçük kareler tahmin edicisinin örnekleme dağılımının standart sapması 0.0555'tir.

Tahmin edilen regresyonlar yazılırken bu standart hataları ilgili katsayı tahminlerinin altında ayraç içinde göstermek, ayrıca ya belirlilik katsyısını ya da düzeltilmiş katsayıyı belirtmek yaygın bir uygulamadır. Böylelikle, tasarruf sandıkları örneğinin bulguları şöyle yazılır:

$$Y = 1.565 + 0.237x_1 - 0.000249x_2 \qquad R^2 = 0.87$$

$$(0.079)\ \ (0.0555)\ \ (0.0000320)$$

Yine de okuyucu bu uygulamanın evrensel olmadığı konusunda uyarılmalıdır. Kimi yazarlar, tahmin edilen standart hatalar yerine, tahmin edilen katsayıların tahmin edilen kendi standart hatalarına oranını gösterirler. Ayrıca, sabit terimin tahmin edilen standart hatası s_a, çoğu zaman bildirilmez.

Daha fazla ilerleyebilmek için bu noktada anakütledeki ε_i hata terimlerinin dağılımına ilişkin bir varsayım daha gerekmektedir. Bu dağılımların normal olduğunu varsayıp çıkarsamaları bu varsayıma dayandırmak yaygın bir uygulamadır. Aslında, bulunan güven aralıkları ve yapılan önsav sınamaları, hata terimleri dağılımının normallikten biraz uzaklaşmasından, merkezî limit teoremi sayesinde, çok ciddi ölçüde etkilenmez. Dahası, merkezî limit teoremi, pek çok durumda, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımını haklı çıkarır. Anakütle regresyon modelindeki hata terimini, bağımsız değişkenler arasında açıkça yer

almayan bir sürü etmenin bağımlı değişken üzerindeki etkilerinin toplamı olarak düşünebiliriz. Asıl etkili olan etmenler açıklayıcı değişkenler arasında yer aldığından, bu etmenlerin hiçbiri güçlü bir etki yaratmaz. Ama birlikte etkileri önemsiz olmayabilir. Böylelikle, hata terimi, bu türden çok sayıda bileşenin toplamından oluştuğuna göre, merkezî limit teoremine dayanarak, hata teriminin dağılımı çoğu zaman normale yakın olur. Çoklu anakütle regresyon modelinin katsayılarına ilişkin çıkarsamamn dayandığı temel bulgu aşağıdaki çerçeve içinde belirtilmiştir.

Anakütle Regresyon Katsayılarına İlişkin Çıkarsamanın Temelleri

Anakütle regresyon modeli aşağıdaki gibi olsun:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminlerini $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ ile, bu en küçük kareler tahmin edicilerinin tahmin edilen standart sapmalarını da $s_a, s_{b_1}, s_{b_2}, \ldots, s_{b_K}$ ile gösterelim. Eğer Altbölüm 13.3'teki 1-5. varsayımlar geçerliyse ve ε_i hata terimleri normal dağılıyorsa,

$$t_a = \frac{a - \alpha}{s_a}$$

ve

$$t_{b_1} = \frac{b_i - \beta_i}{s_{b_i}}$$

rassal değişkenleri, $(n - K - 1)$ serbestlik derecesi ile Student t dağılımına uyar.

İlgi çoğu zaman sabit terim α yerine kısmi regresyon katsayısı β_i üzerindedir. Buna uyarak biz de ilkine ilişkin çıkarsamaların benzer yolla yapılacağını bilerek, ikincisi üzerinde yoğunlaşacağız.

β_i'nin güven aralıkları, bildik akıl yürütmelerle türetilebilir. Bu süreç aşağıdaki çerçeve içinde özetlenmiştir.

Kısmi Regresyon Katsayılarının Güven Aralıkları

Anakütle regresyon hataları ε_i normal dağılıyorsa ve Altbölüm 13.3'teki 1-5. varsayımlar geçerliyse, kısmi regresyon katsayısı β_i'nin $\%100(1 - \alpha)$ güven aralıkları şöyle bulunur:

$$b_i - t_{n-K-1,\,\alpha/2}\, s_{b_i} < \beta_i < b_i + t_{n-K-1,\,\alpha/2}\, s_{b_i}$$

Burada $t_{n-K-1;\,\alpha/2}$,

$$P(t_{n-K-1} > t_{n-K-1,\,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayı, t_{n-K-1} rassal değişkeni ise $(n-K-1)$ serbestlik derecesi ile Student t dağılımına uyan bir rassal değişkendir.

Tasarruf sandıkları regresyonunda şunları bulmuştuk:

$$n = 25 \qquad b_1 = 0.237 \qquad s_{b_1} = 0.0555 \qquad b_2 = -0.000249$$

β_1 ile β_2'nin %99 güven aralıklarını bulabilmek için Ek Çizelge 6'dan şunu okuruz:

$$t_{n-K-1,\,\alpha/2} = t_{22,\,0.005} = 2.819$$

Demek ki β_1'in %99 güven aralığı

$$237 - (2.819)(0.0555) < \beta_1 < 237 + (2.819)(0.0555)$$

ya da

$$0.081 < \beta_1 < 0.393$$

olur. Öyleyse tasarruf sandıklarının kâr marjında, net gelirlerdeki 1 birim artışın yol açtığı beklenen artışın %99 güven aralığı, şube sayısı sabitken, 0.081 ile 0.393 arasıdır. β_2'nin %99 güven aralığı ise

$$-0.000249 - (2.819)(0.0000320) < \beta_1 < -0.000249 + (2.819)(0.0000320)$$

ya da

$$-0.000339 < \beta_1 < -0.000159$$

olur. Dolayısıyla, tasarruf sandıklarının kâr marjında, 1,000 şubelik bir artışın yol açtığı beklenen *düşüş*ün %99 güven aralığı, net gelirler sabitken, 0.159 ile 0.339 arasıdır.

Anakütle regresyonunun tekil katsayılarının önsav sınamaları da yapılabilir. Aşağıdaki çerçeve içinde, β_i katsayısının önceden belirlenmiş bir $\beta_{i,0}$ değerine eşit olduğu önsav ele alınmaktadır.

Kısmi Regresyon Katsayılarının Önsav Sınamaları

Anakütle regresyon hataları ε_i normal dağılıyorsa ve Altbölüm 13.3'teki 1-5. varsayımlar geçerliyse, aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) $H_0: \beta_i = \beta_{i,0}$ ya da $H_0: \beta_i \leq \beta_{i,0}$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \beta_i > \beta_{i,0}$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{b_i - \beta_{i,0}}{s_{b_i}} > t_{n-K-1,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

(ii) $H_0: \beta_i = \beta_{i,0}$ ya da $H_0: \beta_i \geq \beta_{i,0}$

sıfır önsavlarından birini

$$H_1: \beta_i < \beta_{i,0}$$

karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{b_i - \beta_{i,0}}{s_{b_i}} < -t_{n-K-1,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

(iii) $H_0: \beta_i = \beta_{i,0}$

sıfır önsavını

$$H_1: \beta_i \neq \beta_{i,0}$$

iki yanlı karşı önsavıyla sınamanın karar kuralı şöyledir:

$$\frac{b_i - \beta_{i,0}}{s_{b_i}} > t_{n-K-1,\alpha/2} \text{ ya da } \frac{b_i - \beta_{i,0}}{s_{b_i}} < -t_{n-K-1,\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

Tekil bir anakütle katsayısının değerinin 0 olduğu ileri sürülürse, ortaya önemli bir özel durum çıkar. Bu durumda, öbür her şey aynıyken, bağımlı değişkenin beklenen değeri, ilgili bağımsız değişkendeki bir değişmeden etkilenmeyecektir. Sözgelimi,

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

regresyonunda, β_1 katsayısının gerçek değeri 0 olsun. Bunun anlamı şudur: $X_2, \ldots, X_K$ verili değişkenleri de kullanıldığında, X_1 bilgisi, bağımlı değişkenin davranışını açıklamada, en azından doğrusal bir bağlamda bir katkıda bulunmaz.

Tasarruf sandıkları verileriyle

$$H_0: \beta_1 = 0$$

önsavını sınayalım. Daha önce belirtildiği gibi, akla uygun bir önerme, öbür her şey aynıyken, net gelirlerdeki bir artışın kâr marjında bir artışa yol açmasının beklendiğidir. Öyleyse uygun karşı önsav şöyle olur:

$$H_1: \beta_1 > 0$$

Sınama şuna dayanır:

$$\frac{b_1 - \beta_{1,0}}{s_{b_1}} = \frac{0.237 - 0}{0.0555} = 4.27$$

Ek Çizelge 6'dan, $(n - K - 1) = 22$ serbestlik derecesi için şunu okuruz:

$$t_{22,0.005} = 2.819$$

Demek ki, şube sayısı da bir açıklayıcı değişken olarak kullanıldığında, net gelirlerin, kâr marjının davranışım açıklama yönünde bir katkısı olmadığını söyleyen sıfır önsavı %0.5 anlamlılık düzeyinde bile açıkça reddedilmektedir.

Şimdi de aynı verileri kullanıp

$$H_0: \beta_2 = 0$$

önsavını sınayalım. Aslında, öbür her şey aynıyken, şube sayısında bir artışın, ortalama olarak, tasarruf sandıklarının kâr marjında bir düşüşe yol açmasından kuşkulanılır. Öyleyse karşı önsav şöyle yazılır:

$$H_1: \beta_2 < 0$$

Sınama şuna dayanır:

$$\frac{b_2 - \beta_{2i,0}}{s_{b_2}} = \frac{-0.000249 - 0}{0.0000320} = -7.78$$

22 serbestlik dereceli Student t dağılımının çizelge değerini bununla karşılaştırısak, net gelirler de bir açıklayıcı değişken olarak kullanıldığında, şube sayısının kâr marjı davranışını açıklamaya yönelik bir katkısı olmadığını söyleyen sıfır önsavının %0.5 anlamlılık düzeyinde açıkça reddedildiğini görürüz.

ÖRNEK 13.1

Belediye emlâk vergisi oranlarını etkileyen etmenleri belirlemek amacıyla bir çalışma yapılmıştır. Nüfusu 100,000 ile 200,000 arasında olan yirmi ABD kentinden oluşan bir örneklem için aşağıdaki regresyon tahmin edilmiştir[5]:

$$y = 1.79 + 0.000567x_1 + 0.00183x_2 - 0.000191x_3 \qquad R^2 = 0.71$$
$$(0.000139) \quad (0.0082) \quad (0.000446)$$

Burada

[5] C. J. Stokes, "Do urban tax rates converge?" *American Journal of Economics and Sociology, 44* (1985), 29-38.

y = Etkin emlâk vergisi oranı (gerçek değerler bölü vergi tabanının pazar değeri)
x_1 = Milkareye düşen ev sayısı
x_2 = Eyalet ve federal devletten gelen gelirin toplam belediye geliri içindeki yüzdesi
x_3 = Kişi başına kişsel gelirin ortancası, dolar

Anakütle katsayılarının en küçük karelerle tahminlerinin altında ayraç içindeki sayılar, tahmin edilmiş ilgili standart hatalardır.

Bu tahminler şu sonuçları doğurur:

(i) Öbür her şey aynıyken, milkare başına ev sayısında 1'lik bir artış, etkin emlâk vergisi oranında 0.000567 kadar beklenen bir artışa yol açar.

(ii) Öbür her şey aynıyken, eyalet ve federal devletten gelen gelirin toplam belediye geliri içindeki yüzdesinde 1'lik bir artış, etkin emlâk vergisi oranında 0.0183 kadar bir artış beklentisine yol açar.

(iii) Öbür her şey aynıyken, kişi başına kişisel gelirin ortancasında 1 $'lık bir artış, etkin emlâk vergisi oranında 0.000191 kadar bir artış beklentisine yol açar.

(iv) Bu üç bağımsız değişken birlikte ele alınırsa, bu örnekte etkin emlâk vergisi oranındaki değişkenliğin %71'ini açıklar.

Şimdi de devlet gelirinin payı yüzde 1 puan artarken öbür iki bağımsız değişken aynı kalırsa etkin emlâk vergisi oranındaki beklenen artışı gösteren β_2'nin güven aralığını bulalım. Bildik varsayımlara dayanan uygun aralıklar şu biçimdedir:

$$b_2 - t_{n-K-1,\alpha/2}\, s_{b_2} < \beta_2 < b_2 + t_{n-K-1,\alpha/2}\, s_{b_2}$$

Burada

$$n = 20 \qquad K = 3 \qquad b_2 = 0.0183 \qquad s_{b_2} = 0.0082$$

olup %95 güven aralığı için $\alpha/2 = 0.025$'tir, Ek Çizelge 6'dan şu okunur:

$$t_{n-K-1,\alpha/2} = t_{16,0.025} = 2.120$$

Dolayısıyla güven aralığı şöyle olur:

$$0.0183 - (2.120)(0.0082) < \beta_2 < 0.0183 - (2.120)(0.0082)$$

ya da

$$0.0009 < \beta_2 < 0.0357$$

Demek ki, öbür her şey aynıyken, devletten gelen gelir payının yüzde 1 puan artmasından kaynaklanan, etkin emlâk vergisi oranında beklenen artışın %95

güven aralığı, 0.0009 ile 0.0357 arasıdır. Çizim 13.5, ayrıca %80, %90, %99 güven aralıklarını da göstermektedir.

ÖRNEK 13.2

Aşağıdaki regresyon modeli,[6] büyük şirketlerin piyasadaki kendi pay senetlerini büyük miktarlarda geri alma önerilerinden otuzbirine ilişkin verilerden hesaplanmıştır:

$$y = 0.69 + 4.70x_1 + 0.0004x_2 - 0.72x_3 + 0.023x_4 \qquad R^2 = 0.72$$

$$(0.651) \quad (0.00128) \quad (0.353) \quad (0.0185)$$

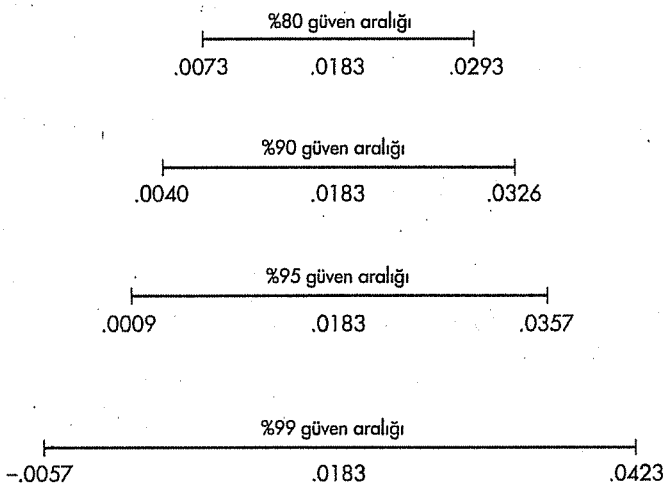
Burada

y = Fiyat primi, alımın başlama tarihinden bir hafta önceki borsa kapanış fiyatının yüzdesi cinsinden

x_1 = Pay senedi başına aracı ücreti, alımın başlama tarihinden bir hafta önceki borsa kapanış fiyatının yüzdesi cinsinden (pay senetlerini almada karşılaşılan güçlüğün derecesini ölçer)

x_2 = Alınmak istenen pay senedi yüzdesi

ÇİZİM 13.5 Örnek 13.1'in verileriyle, etkin emlâk vergisi oranının, devletten gelen gelir payına göre kısmi regresyon eğimi olan β_2'nin %80, %90, %95, %99 güven aralıkları



[6] K. R. Ferris, A. Melnik, A. Rappaport, "Factors influencing the pricing of stock repurchase tenders," *Quarterly Review of Economics and Business, 18,* no.1 (1978), 31-39'da belirtilmiştir.

x_3 = Dow-Jones sanayi ortalamasında aylık göreli değişme
x_4 = Pay senetleri işlem hacminin ortakların elindekilere göre yüzdesi

Anakütle katsayılarının en küçük karelerle tahminlerinin altında ayraç içindeki sayılar, tahmin edilmiş ilgili standart sapmalardır.
Verilen bu tahminler şu anlamları taşır:

(i) Öbür her şey aynıyken, pay senedi başına aracı ücretinde 1 birim artış, fiyat priminde 4.70 kadar artış beklentisine yol açar.

(ii) Öbür her şey aynıyken, alınmak istenen pay senedi yüzdesinde 1 birim artış, fiyat priminde 0.00041 kadar artış beklentisine yol açar.

(iii) Öbür her şey aynıyken, Dow-Jones sanayi ortalamasında bir aylık göreli değişmede 1 birim artış, fiyat priminde 0.72 kadar azalış beklentisine yol açar.

(iv) Öbür her şey aynıyken, işlem hacminde 1 birim artış, fiyat priminde 0.023 kadar beklenen artışa yol açar. Makale yazarları bu bulgunun şaşırtıcı olduğuna dikkat çekmektedir, çünkü işlem hacmi yüksek olunca, şirket açık piyasadan istediği kadar pay senedi alabilir, böylece bu denli yüksek bir fiyat primi önermemesi gerekir. Bu da öbür her şey aynıyken, yukarıdaki bulguların tersine, işlem hacmi ne kadar yüksekse, fiyat priminin de o kadar düşük olacağı anlamına gelir.

(v) Bu dört bağımsız değişken birlikte ele alındıklarında, bu örneklemde fiyat primindeki değişkenliğin %72'sini açıklamaktadır.

Aşağıdaki sıfır önsavını sınamak istiyoruz:

$$H_0: \beta_3 = 0$$

Bu önsav, öbür bağımsız değişkenler regresyona katılmışken, Dow-Jones sanayi ortalamasındaki aylık göreli değişimin, fiyat primini açıklamaya yönelik bir katkı sağlamadığını ileri süren önsavdır. Yazarlar bu değişkenin fiyat primiyle ilişkisinin artı da eksi de olabileceğini belirtmektedir. Öyleyse bu sıfır önsavını iki yanlı karşı önsavla sınayacağız demektir:

$$H_1: \beta_3 \neq 0$$

Sınama şuna dayandırılır:

$$\frac{b_3 - \beta_{3,0}}{s_{b_3}} = \frac{-0.72 - 0}{0.353} = -2.040$$

Burada $(n - K - 1) = (31 - 4 - 1) = 26$ serbestlik derecemiz vardır. Ek Çizelge 6'dan

$$t_{26,0.05} = 1.706 \qquad t_{26,0.025} = 2.056.$$

olduğu görülür. Demek ki bu sıfır önsavı %10 anlamlılık düzeyinde iki yanlı karşı önsav lehine reddedilir ama %5'te reddedilemez. Öyleyse bu veriler, öbür

her şey aynıyken, Dow-Jones sanayi ortalamasındaki aylık göreli değişimin fiyat primini etkilemediğini söyleyen sıfır önsavına karşı orta derecede güçlü bir kanıt içermektedir.

Şimdi de, bağımsız değişkenler de kullanılmışken, pay senetlerinin işlem hacmini regresyona katmanın, fiyat primindeki değişkenliği açıklama yönünde bir katkısı yoktur diyen

$$H_0: \beta_4 = 0$$

sıfır önsavını sınayalım. Burada da iki yanlı karşı önsav kullanacağız:

$$H_1: \beta_4 \neq 0$$

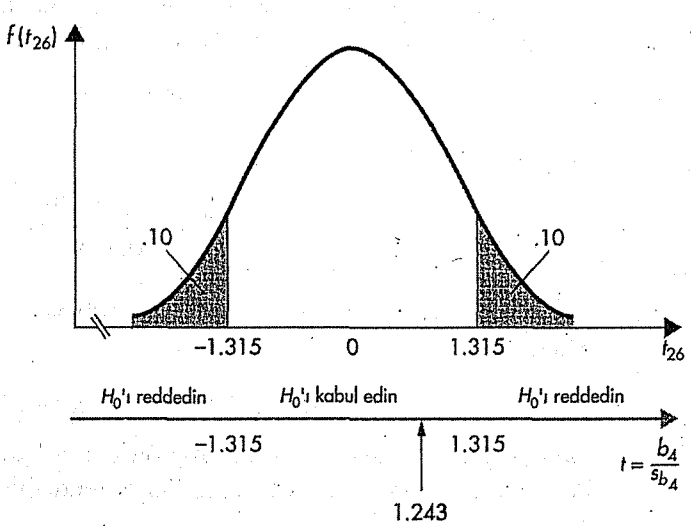
Sınama şuna dayanmaktadır:

$$\frac{b_4 - \beta_{4,0}}{s_{b_4}} = \frac{0.023 - 0}{0.0185} = 1.243$$

$(n - K - 1) = 26$ serbestlik derecesinde Ek Çizelge 6'dan şunu buluruz:

$$t_{26,0.10} = 1.315$$

ÇİZİM 13.6 $H_0: \beta_4 = 0$ sıfır önsavı doğruyken, $t = b_4/s_{b_4}$'ün olasılık yoğunluk fonksiyonu. (Bu durumda dağılım 26 serbestlik dereceli Student t dağılımına uyar.) Fiyat farkının işlem hacmine göre kısmi regresyon eğimi olan β_4'ün 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavının Örnek 13.2 verileriyle sınanması gösterilmektedir. Karşı önsav $H_1: \beta_4 \neq 0$ biçiminde, anlamlılık düzeyi 0.20'dir.



Demek ki sıfır önsavı, %20 anlamlılık düzeyinde iki yanlı karşı önsav lehine reddedilemez. Bu sınama Çizim 13.6'da gösterilmiştir. Daha önce en küçük kareler tahmini b_4'ün işaretinin bu konudaki kurama göre beklenenin tersi olduğunu görmüştük. Ama şimdi anlaşılmaktadır ki veriler, anakütle katsayısı β_4'ün 0 olduğu sıfır önsavının tersine pek az kanıt içermektedir. Böyle durumlarda yaygın uygulama, x_4 gibi değişkenleri dışlayıp regresyon modelini kalan katsayılar için yeniden tahmin etmektir.

Bu altbölümde görülen önsav sınamaları, *tekil* anakütle regresyon katsayılarının sınanmasıyla ilgilidir. Bu katsayılardan iki ya da daha çoğunu *aynı anda* sınamak isteyebiliriz. Bu tür sınamalar bir sonraki altbölümde ele alınacaktır.

13.7 ANAKÜTLE REGRESYON KATSAYI KÜMELERİNE İLİŞKİN SINAMALAR

Altbölüm 13.6'da anakütle regresyon katsayılarının tekil olarak nasıl sınanacaklarını gördük. Bu katsayılardan kimilerine ya da hepsine belli değerler veren önsavların sınanması gerektiği durumlar sık sık ortaya çıkar. Bir kez daha şu modele dönelim:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad (13.7.1)$$

Bütün anakütle regresyon katsayılarının 0 olduğunu söyleyen epeyce karamsar şu sıfır önsavıyla işe başlayalım:

$$H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_K = 0 \qquad (13.7.2)$$

Bu sıfır önsavı doğru olsaydı (13.7.1) regresyon modeli şu biçimi alırdı:

$$Y_i = \alpha + \varepsilon_i$$

Bu da, *bağımsız* değişkenler hangi değerleri alırsa alsın bağımlı değişkenin beklenen değeri α sabit sayısına eşit olur anlamına gelir. Öyleyse bu sıfır önsavı, bağımsız değişkenler bir öbek olarak alınırlarsa, bağımlı değişkeni (doğrusal olarak) etkilemezler demektir. Eğer durum böyleyse, bağımlı değişkenin davranışını regresyon modeliyle açıklama girişimi başarısızlığa uğramış sayılır.

Bu sıfır önsavının sınanmasının temeli, Altbölüm 13.5'te gördüğümüz kareler toplamlarının ayrıştırılmasında yatar:

$$\text{BKT} = \text{RKT} + \text{HKT} \qquad (13.7.3)$$

Eş. (13.7.3)'ün, bağımlı değişkenin toplam örneklem değişkenliğinin, iki parçanın toplamını gösterdiğini anımsayalım. Toplam değişkenliğin birinci parçası RKT bağımsız değişkenlere göre regresyondan kaynaklanırken, ikinci parça HKT, bu regresyonun açıklayamadığı değişkenliktir. Öyleyse, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkeni (doğrusal olarak) etkilemediği sıfır önsavı doğruysa, RKT'nin HKT'ye oranla görece küçük olmasını bekleriz. Dolayısıyla RKT'nin HKT'ye oranı ne kadar büyükse sıfır önsavına inanmaya da o kadar az eğilimli oluruz. Aslında, uygun bir sınama istatistiği oluştururken, bu kare toplamlarının her birini kendi serbestlik derecelerine bölmek gerekir. HKT'nin serbestlik derecesinin $(n-K-1)$ olduğunu daha önce görmüştük. Ayrıca, K tane kısmi regresyon katsayısı $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ bulunduğundan, RKT'nin serbestlik derecesi de K olur.

(13.7.2) sıfır önsavı doğruyken,

$$F = \frac{\text{RKT}/K}{\text{HKT}/(n-K-1)} \qquad (13.7.4)$$

rassal değişkeninin, pay serbestlik derecesi K, payda serbestlik derecesi $(n-K-1)$ ile F dağılımına[7] uyduğu gösterilebilir. Regresyon kareleri toplamı hata kareleri toplamına oranla büyükse, sıfır önsavından kuşkulanılır. Demek ki (13.7.4) sınama istatistiğinin büyük değerlerinde sıfır önsavı reddedilir.

Bir Regresyon Modelindeki Bütün Anakütle Katsayılarının Sınanması

Aşağıdaki regresyon modelini ele alalım:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Sıfır önsavı da şöyle olsun:

$$H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_K = 0$$

Bu H_0'ın

$$H_1: \text{ En az bir } \beta_i \neq 0$$

[7] F dağılımı Altbölüm 9.8'de gösterilmişti. Bu dağılımın eşik değerleri Ek Çizelge 7'de verilmiştir.

karşı önsavıyla α anlamlılık düzeyinde sınanması şu karar kuralına dayanır:

$$\frac{\text{RKT}/K}{\text{HKT}/(n-K-1)} > F_{K,n-K-1,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

Burada $F_{K,n-K-1,\alpha}$

$$P(F_{K,n-K-1} > F_{K,n-K-1,\alpha}) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir sayı olup, $F_{K,n-K-1}$, pay serbestlik derecesi K, payda serbestlik derecesi $(n-K-1)$ olan bir F dağılımına uyar.

Bu sınama doğrudan belirlilik katsayısı R^2'ye de dayandırılabilir, çünkü,[8]

$$\frac{\text{RKT}/K}{\text{HKT}/(n-K-1)} = \frac{n-K-1}{K} \cdot \frac{R^2}{1-R^2}$$

Bu sınamayı göstermek için, tasarruf sandıkları örneğinde şu sıfır önsavını alalım:

$$H_0\colon\ \beta_1 = \beta_2 = 0$$

Bu, net gelirlerle şube sayısı, birlikte düşünüldüğünde kâr marjını (doğrusal olarak) etkilemez diyen sıfır önsavıdır. Bu verilerle şunlar bulunmuştu:

$$n = 25 \qquad K = 2 \qquad \text{HKT} = 0.0623 \qquad \text{BKT} = 0.4640$$

Çıkarma işlemiyle şunu buluruz:

$$\text{RKT} = \text{BKT} - \text{HKT} = 0.4640 - 0.0623 = 0.4017$$

Bu durumda sınama istatistiği şuna dayanır:

$$\frac{\text{RKT}/K}{\text{HKT}/(n-K-1)} = \frac{0.4017/2}{0.0623/22} = 70.92$$

Ek Çizelge 7'den %1 düzeyinde sınama için şunu buluruz:

$$F_{K,n-K-1,\alpha} = F_{2,22,0.01} = 5.72$$

---

[8] Bu şöyle elde edilir:

$$R^2 = \frac{\text{RKT}}{\text{BKT}} = 1 - \frac{\text{HKT}}{\text{BKT}}$$

Buradan da şu bulunur:

$$\frac{R^2}{1-R^2} = \frac{\text{RKT}/\text{BKT}}{\text{HKT}/\text{BKT}}$$

ÇİZELGE 13.3 Tasarruf sandıkları regresyonu için varyans çözümlemesi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMLARI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMALARI	F ORANI
Regresyon	0.4017	2	0.20085	70.92
Hata	0.0623	22	0.0028318	
Toplam	0.4640	24		

Demek ki bu sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde çok açıkça reddedilir. Mevduat başına net gelirlerle şube sayısı birlikte alındığında tasarruf sandıklarının kâr marjını etkilemez diyen sıfır önsavın tersine kanıtlar karşı konulamaz boyuttadır.

Bu özel sınamanın hesaplamaları bazen **varyans çözümleme** çizelgesi[9] denen bir çizelgeyle gösterilir. Çizelge 15.3, tasarruf sandıkları verileri için varyans çözümlemesini göstermektedir. Çizelge, üç tane kareler toplamı ile bunların serbestlik derecelerini sıralamaktadır. Kareler ortalaması, ilgili serbestlik derecesine bölünmüş kareler toplamı olup, bu kareler ortalamalarının son sütunda verilen birbirine oram ise, sınamanın temelini oluşturan F oranıdır.

Varyans çözümlemesinin gerisindeki mantık aşağıdaki gibidir. Ortalama hata karesi şöyle bulunur:

$$s_e^2 = \frac{\text{HKT}}{n-K-1}$$

Altbölüm 13.5'te gördüğümüz gibi bu, anakütle regresyon modelindeki hataların varyansı olan σ_ε^2'nin sapmasız bir tahminini verir. Ayrıca regresyon kareleri ortalamasının da aşağıdaki büyüklüğün sapmasız bir tahmini olduğu gösterilebilir:

$$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n}[\beta_1(x_{1i}-\bar{x}_1)+\beta_2(x_{2i}-\bar{x}_2)+\cdots+\beta_K(x_{Ki}-\bar{x}_K)]^2}{K}$$

Burada $\bar{x}_j$, j'inci bağımsız değişken gözlemlerinin örneklem ortalamasını gösterir. Dolayısıyla, bütün β_j'ler 0'dır diyen sıfır önsavı doğruyken, regresyon ve hata kareleri ortalaması aynı beklenen değere sahiptir. Ancak, bu önsav doğru olmadığında regresyon kareleri ortalamasının beklenen değeri, hata kareleri ortalamasınınkinden büyük çıkar.

ÖRNEK 13.3

Örnek 13.2'deki verilerle dört bağımsız değişkenin birlikte fiyat primini doğrusal olarak etkilemediği sıfır önsavını sınayalım.

Bu durumda sıfır önsavı şöyledir:

[9] Varyans çözümlemesini Bölüm 15'te ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

Bu verilerden

$$n = 31 \qquad K = 4 \qquad R^2 = 0.72$$

olduğunu biliyoruz. H_0'ın sınanması şuna dayanır:

$$\frac{n-K-1}{K} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} = \frac{26}{4} \cdot \frac{0.72}{0.28} = 16.7$$

%1 düzeyinde bir sınama için Ek Çizelge 7'den şu okunur:

$$F_{K,n-K-1,\alpha} = F_{2,26,0.01} = 4.14$$

Dolayısıyla bu sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde çok açıkça reddedilir. Dört bağımsız değişkenin birlikte fiyat farkını doğrusal olarak etkilemediği sıfır önsavının tersine kanıtlar karşı konulamaz boyuttadır.

ANAKÜTLE REGRESYON KATSAYILARININ BİR ALTKÜMESİNİN SINANMASI

Buraya kadar, anakütle regresyon katsayılarının tekil ve bütün katsayıların bir arada ele alındığı sınamaları gördük. Son olarak, bu katsayıların bir altkümesi için de sınama yapılabileceğini belirtelim. K tane bağımsız değişken olduğunu ve bunlardan ilk K_1 tanesinin katsayılarının 0 olup olamayacağıyla ilgilendiğimizi düşünelim. Bağımsız değişkenleri $X_1, X_2, \ldots, X_{K_1}, X_{K_1+1}, \ldots, X_K$ ile gösterirsek regresyon modeli

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_{K_1} x_{K_1 i} + \beta_{K_1+1} x_{K_1+1,i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad (13.7.5)$$

biçiminde yazılabilir ve sınanacak sıfır önsavı da şöyle olur:

$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{K_1} = 0$$

Bu varsayım, eğer doğruysa, $X_{K_1+1}, \ldots, X_K$ değişkenleri de kullanıldığında, $X_1, X_2, \ldots, X_{K_1}$ bağımsız değişkenlerinin, bağımlı değişkenin davranışını açıklamada hiçbir katkısının olmadığı anlamını taşır. Bu önsavın sınanması, Y'nin yalnızca $X_{K_1+1}, \ldots, X_K$ değişkenlerine göre

$$Y_i = \alpha^* + \beta^*_{K_1+1} x_{K_1+1,i} + \cdots + \beta^*_K x_{Ki} + \varepsilon^*_i \qquad (13.7.6)$$

regresyonunun tahminiyle de yapılır. Burada * simgesi, (13.7.6)'daki büyüklüklerle, sıfır önsavının yanlış olduğu (13.7.5)'te bunlara karşılık gelen büyüklüklerin farklı olduklarını göstermek için kullanılmıştır. Şimdi eğer sıfır önsavı gerçekten doğruysa, bütün değişkenleri içeren (13.7.5) regresyon modelinin hata kareleri toplamı HKT'nin, (13.7.6) regresyon modelinin hata kareleri toplamı HKT* 'dan fazla farklı çıkmasını beklemeyiz. Sınama bu iki büyüklüğün farkını temel alır ve sıfır önsavı doğruyken

$$F = \frac{(\text{HKT}^* - \text{HKT})/K_1}{\text{HKT}/(n-K-1)}$$

istatistiğinin, pay serbestlik derecesi K_1, payda serbestlik derecesi $(n-K-1)$ olan F dağılımına uyduğu olgusu üzerine kurulmuştur. Bu sınama istatistiğinin büyük değerlerinde sıfır önsavı reddedilir.

Anakütle Regresyon Katsayılarının Bir Altkümesinin Sınanması

$$H_0\colon\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{K_1} = 0$$

sıfır önsavını sınamak için, bağımlı değişkenin bütün bağımsız değişkenlere göre regresyonunun hata kareleri toplamını HKT ile, bağımlı değişkenin yalnızca $X_{K_1+1}, \ldots, X_K$ değişkenlerine göre regresyonunun hata kareleri toplamını da HKT* ile gösterelim. H_0'ın

$$H_1\colon \text{ en az bir } \beta_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, K_1)$$

karşı önsavıyla α anlamlılık düzeyinde sınanması şu karar kuralına dayanır:

$$\frac{(\text{HKT}^* - \text{HKT})/K_1}{\text{HKT}/(n-K-1)} > F_{K_1, n-K-1, \alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

ÖRNEK 13.4

Bir ayaküstü lokantalar zinciri ülkenin yirmi bölgesinde iş yapmaktadır. Bu bölgelerdeki satışların, satışları teşvik eden harcamalardan etkilenebileceğine inanılmaktadır. Bu düşünceyle, yirmi çift veriye doğrusal bir regresyon modeli uygulanmıştır. Bağımlı değişken bir önceki yılda satış yeri başına satış artış yüzdesi, bağımsız değişken de teşvik harcamalarındaki yüzde değişmedir. Verilere uydurulan bu regresyonun hata kareleri toplamı 78.21 bulunmuştur. Şirketin danıştığı bir iktisatçı, başka iki etmenin daha satışları etkileyebileceğini öne sürmüştür. İktisatçının önerisiyle şirket bir çoklu regresyon denklemi tahmin etmiştir. Bağımlı değişken önceki gibidir. Daha önce kullanılan bağımsız değişkene iki yeni değişken —bölgesel işsizlik oramnda değişme ile bölgedeki satış yeri

sayısında yüzde değişme— eklenmiştir. Bu çoklu regresyon modelinden elde edilen hata kareleri toplamı da 66.73 olmuştur.

Satışları teşvik eden harcamalar modelde iken, işsizlikle satış yeri sayısının satışlardaki değişkenliği açıklamaya hiçbir katkısı yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

Buradaki regresyon modeli şudur:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = Satışlardaki yüzde artış
x_1 = İşsizlikteki yüzde değişme
x_2 = Satış yeri sayısındaki yüzde değişme
x_3 = Satışları teşvik eden harcamalardaki yüzde değişme

olup sınanacak sıfır önsavı aşağıdadır:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

Daha önce kullandığımız simgelerle şunları yazabiliriz:

$$n = 20 \qquad K_1 = 2 \qquad K = 3 \qquad \text{HKT}^* = 78.21 \qquad \text{HKT} = 66.73$$

Sınamamız şuna dayanmaktadır:

$$\frac{(\text{HKT}^* - \text{HKT})/K_1}{\text{HKT}/(n-K-1)} = \frac{(78.21-66.73)/2}{66.73/16} = 1.38$$

Ek Çizelge 7'den %5 düzeyinde bir sınama için şunu okuruz:

$$F_{K_1, n-K-1, \alpha} = F_{2,16,0.05} = 3.63$$

Demek ki, işsizlik ile satış yeri sayısının, satışları açıklama yönünde bir katkısı yoktur diyen sıfır önsavı %5 düzeyinde bir sınamada reddedilememiştir. Bu değişken çiftini regresyona eklemek için güçlü bir gerekçe yoktur.

13.8 KESTİRİM

Doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi, çoklu regresyon modelinin de önemli bir kullanım alanı, bağımsız değişkenler kümesinin önceden belirlenmiş değerleri için bağımlı değişkenin değerlerini kestirmektir. K tane bağımsız değişkenin $x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, \ldots, x_{K,n+1}$ belli değerlerine eşit olduğunu düşünelim. Ayrıca

regresyon modeli de hâlâ geçerli olsun. Bu durumda bağımlı değişkenin buna karşılık gelen değeri şu olur:

$$Y_{n+1} = \alpha + \beta_1 x_{1,n+1} + \beta_2 x_{2,n+1} + \ldots + \beta_K x_{K,n+1} + \varepsilon_{n+1} \qquad (13.8.1)$$

Burada ε_{n+1}, ortalaması 0 olan bir rassal değişkendir. Y_{n+1}'in gerçekte alabileceği değeri kestirmek istiyoruz. Bunun açıkça görülen bir yolu, bilinmeyen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ anakütle katsayılarının yerine onların tahminleri olan $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ değerlerini, ε_{n+1} yerine de ortalaması olan 0'ı koymaktır.

Çoklu Regresyonla Kestirim

Anakütle regresyon modeli şöyle olsun:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Altbölüm 13.3'teki 1-5. varsayımlar da geçerli olsun. $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ değerleri, $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$'nin, $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{K1}, y_1), (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{K2}, y_2), \ldots, (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{Kn}, y_n)$ noktalarına dayanan en küçük kareler tahminlerini göstersin. Bu durumda, $(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, \ldots, x_{K,n+1}, y_{n+1})$ verilmişken, Y_{n+1}'in doğrusal, en iyi, sapmasız tahmin edicisi, Gauss-Markov teoremi gereği şudur:

$$\hat{Y}_{n+1} = a + b_1 x_{1,n+1} + b_2 x_{2,n+1} + \cdots + b_K x_{K,n+1}$$

Tasarruf sandıkları örneğine bir kez daha dönelim. Net gelirlerin 4.50, şube sayısının 9,000 olduğu bir yılda kâr marjını kestirmek istediğimizi düşünelim. Kullandığımız simgelerle şunları biliyoruz:

$$x_{1,n+1} = 4.50 \qquad x_{2,n+1} = 9{,}000$$

Dolayısıyla kâr marjının en uygun nokta tahmin edicisi şudur:

$$\hat{Y}_{n+1} = a + b_1 x_{1,n+1} + b_2 x_{2,n+1}$$

$$= 1.565 + (0.237)(4.50) = (0.000249)(9{,}000) = 0.39$$

Öyleyse, mevduata göre net gelirlerin 4.50, şube sayısının 9,000 olduğu bir yılda tasarruf sandıkları kâr marjı yüzdesini 0.39 olarak kestiririz.

ε_i hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı da verilmişken, regresyon modelleriyle yapılan kestirimler için de güven aralıkları hesaplama formülleri geliştirilebilir. Bu formüller genellikle bir hayli karmaşıktır. Ancak, çoklu regresyon tahmin eden çoğu bilgisayar paket programı, kestirimlerin güven aralıklarını veren kolaylıklar gösterir.

ALIŞTIRMALAR

9. Alıştırma 1'deki çalışmada tahmin edilen standart hatalar şöyledir:

$$s_{b_1} = 0.099 \qquad s_{b_2} = 0.032 \qquad s_{b_3} = 0.0023$$

(a) β_1'in %90, %95 güven aralıklarını bulun.

(b) β_2'nin %95, %99 güven aralıklarını bulun.

(c) Öbür herşey aynıyken uçak ağırlığının tasarım çabası üzerinde doğrusal bir etkisi olmadığını söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın.

(d) Bu regresyonun hata kareleri toplamı 0.332'dir. Aynı veriler kullanılarak, tasarım çabasının ortak parça yüzdesine göre basit doğrusal regresyonu, hata kareleri toplamını 3.311 bulmuştur. Ortak parça yüzdesi bir açıklayıcı değişken olarak kullanılırken, en yüksek hız ve ağırlık değişkenlerinin birlikte tasarım çabası üzerinde doğrusal bir etkisi yoktur diyen sıfır önsavını %1 düzeyinde sınayın.

10. Alıştırma 3'te, örneklem regresyonunun otuz gözleme dayandığı çalışmada tahmin edilen standart hatalar şöyledir:

$$s_{b_1} = 0.023 \qquad s_{b_2} = 0.35$$

(a) Aile büyüklüğü sabitken süt tüketiminin gelire doğrusal olarak bağımlı olmadığını söyleyen sıfır önsavını, uygun bir tek yanlı karşı önsavla sınayın.

(b) β_2'nin %90, %95, %99 güven aralıklarını bulun.

11. Alıştırma 4'te, örneklem regresyonunun yirmibeş gözleme dayandığı çalışmada tahmin edilen standart hatalar şöyledir:

$$s_{b_1} = 0.189 \qquad s_{b_2} = 0.565 \qquad s_{b_3} = 0.243$$

(a) Öbür her şey aynıyken, jimnastiğe ayrılan sürenin kilo almayı doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, uygun bir tek yanlı karşı önsavla sınayın.

(b) Öbür her şey aynıyken, bira tüketiminin kilo almayı doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, uygun bir tek yanlı karşı önsavla sınayın.

(c) β_1'in %90, %95, %99 güven aralıklarını bulun.

12. Alıştırma 13.1'in verilerine dönelim.

(a) Öbür her şey aynıyken, kişi başına ortanca gelirin etkin emlâk vergisi oranını doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın.

(b) Üç bağımsız değişkenin birlikte etkin emlâk vergisi oranını doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

13. Alıştırma 13.2'nin verilerine dönelim.

(a) Öbür bütün bağımsız değişkenlerin değerleri sabit kalırken, borsa kapanış fiyatının bir yüzdesi olarak, pay senedi başına aracı ücretindeki 1 birim artıştan dolayı fiyat primindeki beklenen değişmenin %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

(b) Öbür her şey aynıyken, alınmak istenen pay senedi yüzdesinin fiyat primini etkilemediği sıfır önsavını, alınacak pay senedi yüzdesi ne kadar büyükse fiyat primi de o kadar yüksek olur diyen karşı önsavla sınayın.

14. Milli piyango gelirlerine ilişkin bir çalışmada[10] piyango düzenleyen yirmidokuz ABD eyaletinden sağlanan verilerle aşağıdaki regresyon denklemi bulunmuştur:

$$y = -31.323 + 0.04045x_1 + 0.8772x_2 - 365.01x_3 - 9.928x_4 \qquad R^2 = 0.51$$

$$(0.00755) \quad (0.3107) \quad (263.88) \quad (3.4520)$$

Burada

y = Piyangodan sağlanan kişi başına yıllık net gelir, dolar
x_1 = Eyaletin kişi başına ortalama kişisel geliri
x_2 = Bin kişi başına otel, motel, pansiyon odası sayısı
x_3 = Eyaletin müşterek bahis, at yarışı, vb. yasal kumardan sağladığı ve harcayabildiği kişi başına yıllık gelir
x_4 = Eyalet sınırı içinde, piyangosu olan komşu eyalet ya da eyaletlerle olan sınırın yüzdesi

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart sapmalardır.

(a) x_1'in tahmin edilen katsayısının yorumlayın.
(b) x_2'nin anakütle regresyonundaki katsayısının %95 güven aralığını bulup yorumlayın.
(c) x_3'ün anakütle regresyonundaki katsayısı 0'dır diyen sıfır önsavını, bu katsayının eksi olduğunu söyleyen karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.

15. Kimi özelliklerin klima fiyatlarının değişkenliğini açıklamada kullanılıp kullanılamayacağını belirlemek üzere bir çalışma yapılmıştır.[11] Ondokuz klimalık bir örneklem için aşağıdaki regresyon tahmin edilmiştir:

$$y = -68.236 + 0.0023x_1 + 19.729x_2 + 7.653x_3 \qquad R^2 = 0.84$$

$$(0.005) \qquad (8.992) \quad (3.082)$$

Burada

y = Fiyat, dolar
x_1 = Klimanın sınıfı, saat başına BTU [British Thermal Unit = Bir libre (454 gram) suyun sıcaklığını bir Fahrenhayt derece artırmak için gerekli ısı miktarı Ç.N.]
x_2 = Enerji etkinlik oram
x_3 = Ayarlanabildiği konum sayısı

---

[10] J. R. Davis, J. E. Filer, D. L. Moak, "The lottery as an alternative source of state revenue," *Atlantic Economic Journal, 20*, no. 2 (1992), 1-10.

[11] B. T. Ratchford, "The value of information for selected appliances," *Journal of Marketing Research, 17* (1980), 14-25.

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart sapmalardır.

(a) Klimanın sınıfıyla enerji etkinlik oranı aynı kalırken, ek bir konum sayısından kaynaklanan beklenen fiyat artışının %95 güven aralığını bulun.

(b) Öbür her şey aynıyken, klimanın enerji etkinlik oranı fiyatı etkilemez diyen sıfır önsavını, enerji etkinlik oranı arttıkça fiyat da yükselir diyen sıfır önsavıyla sınayın.

16. Jamayka'nın dışalım talebini inceleyen bir çalışmada,[12] 19 yıllık veriye aşağıdaki model uydurulmuştur:

$$y = -58.9 + 0.20x_1 - 0.10\,x_2 \qquad R^2 = 0.96$$

$$(0.0092)\ (0.084)$$

Burada

y = Dışalım miktarı
x_1 = Kişisel tüketim harcamaları
x_2 = Dışalım fiyatları ÷ İç fiyatlar

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart sapmalardır.

(a) β_1'in %95 güven aralığını bulun.

(b) $\beta_2 = 0$ diyen sıfır önsavını uygun bir tek yanlı karşı önsavla sınayın.

ABD bankalarındaki yabancı paylarını inceleyen bir çalışmada,[13] ondört yıllık gözleme dayanarak aşağıdaki örneklem regresyonu elde edilmiştir:

$$y = -3.248 + 0.101x_1 - 0.244x_2 + 0.057x_3 \qquad R^2 = 0.93$$

$$(0.023)\quad (0.080)\quad (0.00925)$$

$$y = -3.248 + 0.101x_1 - 0.244x_2 + 0.057x_3 \qquad R^2 = 0.93$$

$$(0.023)\quad (0.080)\quad (0.00925)$$

Burada

y = ABD bankalarının yavru şirketlerinin toplam varlıkları içinde yabancıların pay yüzdesi
x_1 = ABD'ye yapılan (finansal, sigorta, emlâk dışında) doğrudan yatırımlardaki yıllık değişme, milyon dolar
x_2 = Banka fiyat-kazanç oranı
x_3 = Dolar kuru endeksi

---

[12] J. Gafar, "Devaluation and balance of payments adjustments in a developing economy: An analysis relating to Jamaica," *Applied Economics, 13* (1981), 151-65.

[13] C. W. Hultman, L. R. McGee, "Factors affecting the foreign banking presence in the US," *Journal of Banking and Finance, 12* (1989), 383-96.

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş standart hatalardır.

(a) β_1'in %90 güven aralığını bulup bulgunuzu yorumlayın.

(b) β_2 sıfırdır diyen sıfır önsavını, eksidir diyen karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.

(c) β_2 sıfırdır diyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.

Kentlerin polis memuru talebindeki farklılıkları inceleyen bir çalışmada,[14] Delaware County, Pennsylvania'daki otuzdokuz kentin verilerine dayanarak, aşağıdaki örneklem regresyonu elde edilmiştir:

$$y = -0.00232 - 0.00024x_1 - 0.00002x_2 + 0.00034x_3 + 0.4812x_4 + 0.04950x_5$$
$$(0.00010) \quad (0.000018) \quad (0.00012) \quad (0.77954) \quad (0.01172)$$
$$- 0.00010x_6 \quad + 0.00645x_7 \quad \overline{R}^2 = 0.3572$$
$$(0.00005) \quad (0.00306)$$

Burada

$y =$ Kişi başına tam gün görevli polis memuru sayısı
$x_1 =$ Polis memurlarının en yüksek temel ücreti, bin dolar
$x_2 =$ Zenci nüfusun oranı, yüzde
$x_3 =$ Tahmin edilen kişi başına gelir, bin dolar
$x_4 =$ Nüfus yoğunluğu
$x_5 =$ Kişi başına bütçe ödenekleri, bin dolar
$x_6 =$ Merkez kent Philadelphia'dan uzaklık, mil
$x_7 =$ 12-21 yaş arasındaki erkek nüfusun oranı, yüzde

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş standart hatalardır.

(a) β_5'in %99 güven aralığını bulup bulgunuzu yorumlayın.

(b) β_4 sıfırdır diyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.

(c) β_7 sıfırdır diyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın, bulgunuzu yorumlayın.

19. Bir bağımlı değişken, K tane bağımsız değişkene bir çoklu regresyon aracılığıyla bağlanmış olsun. Belirlilik katsayısına R^2, düzeltilmiş katsayıya da $\overline{R}^2$ diyelim. Regresyonu uygulamak için n tane gözlem kümesi kullanılmış olsun.

(a) Aşağıdaki ifadenin doğruluğunu gösterin:

---

[14] E. J. Mathias, C. E. Zech, "The community demand for police officers," *American Journal of Economics and Sociology, 44* (1985), 401-10.

$$\overline{R}^2 = \frac{(n-1)/R^2 - K}{n-K-1}$$

(b) Aşağıdaki ifadenin doğruluğunu gösterin:

$$R^2 = \frac{(n-K-1)\overline{R}^2 + K}{n-1}$$

(c) Bütün kısmi regresyon katsayıları 0'dır diyen sıfır önsavını sınama istatistiğinin aşağıdaki gibi yazılabileceğini gösterin:

$$\frac{\text{RKT}/K}{\text{HKT}/(n-K-1)} = \frac{n-K-1}{K} \cdot \frac{\overline{R}^2 + A}{1-\overline{R}^2}$$

Burada A şöyledir:

$$A = \frac{K}{n-K-1}$$

20. Alıştırma 1 ile 5'teki uçak tasarımı çalışmasına dönelim.

(a) Aşağıdaki sıfır önsavını sınayın:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

(b) Uygulanan regresyon için varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.

21. Alıştırma 2'deki pay senedi fiyatları üzerinde mali kurumların etkilerini inceleyen çalışmada kırksekiz tane üçer aylık gözlem kullanılmış, düzeltilmiş belirlilik katsayısı $\overline{R}^2 = 0.463$ bulunmuştur. Aşağıdaki sıfır önsavını sınayın:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

22. Alıştırma 3 ile 6'da açıklanan süt tüketimi çalışmasına dönelim:

(a) Aşağıdaki sıfır önsavını sınayın:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

(b) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.

23. Alıştırma 4 ile 7'de açıklanan kilo alma çalışmasına dönelim:

(a) Aşağıdaki sıfır önsavını sınayın:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

(b) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.

24. Alıştırma 14'e dönelim. Dört bağımsız değişkenin hep birlikte, milli piyango gelirlerini doğrusal olarak etkimediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

25. Alıştırma 15'e dönelim. Üç bağımsız değişkenin hep birlikte, klima fiyatlarını doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavım sınayın.

26. Alıştırma 16'daki çalışmaya dönelim. Tüketim harcamaları ile dışalımın göreli fiyatının hep birlikte Jamayka'nın dışalım talebini doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

27. Alıştırma 18'de ele alınan kentlerin polis memuru talebinin belirleyicilerine ilişkin çalışmaya dönelim. Aşağıdaki sıfır önsavını sınayıp bulgularınızı yorumlayın:

$$H_0:\ \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_6=\beta_7=0$$

28. Bir bağımlı değişkenin K tane bağımsız değişkene göre, n tane örneklem gözlemi kümesi kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin edilen bu regresyonun hata kareleri toplamını HKT ile, belirlilik katsayısını da R^2 ile gösterelim. Bu bağımsız değişkenlerden K_1 tanesinin hep birlikte, öbür $(K-K_1)$ bağımsız değişkenin de kullanılması koşuluyla, bağımlı değişkeni doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınamak istiyoruz. İlgilenilen K_1 bağımsız değişken dışlanarak regresyonun yeniden tahmin edildiğini düşünelim. Bu regresyonun hata kareleri toplamını HKT* ile, belirlilik katsayısını da R_*^2 ile gösterelim. Sıfır önsavımızı sınamak için, Altbölüm 13.7'de ele alınan, sınama istatistiğinin aşağıdaki gibi yazılabileceğini gösterin:

$$\frac{(\text{HKT}^* - \text{HKT})/K_1}{\text{HKT}/(n-K-1)} = \frac{R^2 - R_*^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-K-1}{K_1}$$

29. Alıştırma 3 ile 6'daki süt tüketimi çalışmasında regresyon modeline üçüncü bir değişken —aile içindeki okulöncesi çocuk sayısı— eklenmiştir. Bu genişletilmiş model en küçük karelerle tahmin edildiğinde hata kareleri toplamı 83.7 bulunmuştur. Öbür her şey aynıyken, aile içindeki okulöncesi çocuk sayısının süt tüketimini doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

30. Alıştırma 4'teki bilgileri kullanarak, haftada ortalama yirmi kez yemek yiyen, haftada ortalama on saat jimnastik yapan, haftada ortalama altı bira içen bir birinci sınıf öğrencisinin alacağı kiloyu kestirin.

31. Alıştırma 3'teki bilgileri kullanarak, haftada 600 $ geliri olan dört kişilik bir ailenin haftalık süt tüketimini kestirin.

32. Alıştırma 1'deki uçak tasarımı regresyonunda tahmin edilen sabit terim şöyleydi:

$$a = 0.578$$

En yüksek hızı 1.0 Mach, ağırlığı 7 ton ve başka modellerle ortak parça oranı %50 olan bir uçak için tasarım çabasını kestirin.

33. Bir emlâkçı kendi kentindeki bir evin dolar cinsinden satış fiyatının (y), ayakkare olarak yüzölçümüne (x_1), arsasının ayak kare olarak yüzölçümüne (x_2), yatak odası sayısına (x_3) ve banyo sayısına (x_4) bağlı olduğunu ileri sürmektedir. Bir örneklemdeki yirmi ev satışı için aşağıdaki en küçük kareler regresyon modeli tahmini elde edilmiştir:

$$y = 1998.5 + 22.352x_1 + 1.4686x_2 + 6767.3x_3 + 2701.1x_4 \qquad R^2 = 0.9843$$

$$(2.5543)\quad (1.4492)\quad (1820.8)\quad (1996.2)$$

Ayraç içindeki sayılar tahmin edilen standart hatalardır.

(a) Bu modelin bağlamı içinde x_2'nin tahmin edilen katsayısını yorumlayın.

(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.

(c) Modelin doğru kurulduğunu varsayarak, öbür her şey aynıyken, satış fiyatının banyo sayısına bağlı olmadığını söyleyen sıfır önsavını, uygun bir tek yanlı karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.

(d) 1,250 ayakkare yüzölçümlü, arsasının yüzölçümü 4,700 ayakkare olan üç yatak odalı, 1½ banyolu bir evin satış fiyatını kestirin.

13.9 REGRESYON HESAPLAMALARI İÇİN BİLGİSAYAR YAZILIMLARI

Daha önce de belirttiğimiz gibi, çoklu regresyon çözümlemelerinin hesapları hemen her zaman bilgisayarla yapılmaktadır. Gerçekten de, birkaç taneden fazla bağımsız değişken içeren modellerde bu aracın yardımı olmaksızın aritmetik işlemlerin yapılması çok güç olurdu.

Bugün regresyon çözümlemelerini yapmak üzere geliştirilmiş hazır paket programlar bulunmakta olup bunlar kişisel bilgisayarlarla uyumludur. Kullanıcının yalnızca verileri bilgisayara yükleyip bu verilere uydurulmasını istediği modeli belirtmesi yeterlidir. Bu paketlerin hepsi bizim bu bölümde incelediğimiz temel bilgileri vermekte ve genellikle çok daha fazla sayısal ve görsel çıktı seçeneği sunmaktadır.

Çizelge 13.4, tasarruf sandıkları verilerimizin çözümlenmesinde kullanılmış standart bir regresyon paket programının, Statistical Analysis System (SAS) programının çıktılarından bir bölümü göstermektedir. Çizelgenin üst yarısı, verilere uydurulmuş regresyonun varyans çözümlemesini vermektedir. Bu yarıdaki bilgiler, Çizelge 13.3'tekilerle, "Regresyon" kaynaklı değişimin MODEL adıyla belirtilmesi dışında, aynıdır. Bu yarının son satırı, serbestlik derecesi toplamı ile model ve hata karelerinin toplamını içermektedir. Belirlilik katsayısı da çıktının üst tarafında R-SQUARE, adıyla gösterilmiştir.

ÇİZELGE 13.4 Tasarruf sandıkları regresyonuna ilişkin SAS çıktısının bir bölümü

DEPENDENT VARIABLE Y KÂR MARJI

SOURCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F VALUE	R-SQUARE
MODEL	2	.4017	.20085	70.92	.866
ERROR	22	.0623	.0028318		
CORRECTED TOTAL	24	.4640			

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	1.565		
X1	.237	4.27	.0555
X2	−.000249	−7.78	.0000320

Çizelgenin alt yarısı anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminleri ile bunların tahmin edilmiş standart hatalarını gösterir. Bu tahminlerin kendi standart hatalarına oranlar T FOR H0: PARAMETER = 0 başlığı altında yer almakta olup, Altbölüm 13.6'da gördüğümüz, anakütle regresyon katsayılarının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavım sınama istatistikleridir.

Çizelge 13.5 de, tasarruf sandıkları regresyonunu tahmin için kullanılan MINITAB adlı ikinci bir paket programın çıktılarından bir bölümdür. MINITAB çıktısı, en küçük karelerle tahmin edilmiş regresyon modelinin özetiyle başlamakta, daha sonra katsayı tahminleri kendi standart hataları ve t oranlarıyla gösterilmektedir. ST. DEV. OF Y ABOUT REGRESSION LINE, anakütle regresyonundaki ε_i hata terimlerinin standart sapmasının bir tahminidir. Böylece, bağımlı değişkenin açıklanamayan bölümünün standart sapmasının bir tahminini verir. Burada aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\text{ST. DEV. OF Y ABOUT REGRESSION LINE}$$

$$= s_e$$

$$= \sqrt{\frac{\text{HKT}}{n-K-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0623}{22}} = 0.0532$$

ÇİZELGE 13.5 Tasarruf sandıkları regresyonuna ilişkin MINITAB çıktısının bir bölümü

THE REGRESSION EQUATION IS

Y = 1.565 + .237 X1 – .000249 X2

	COEFFICIENT	ST. DEV OF COEF.	T-RATIO = COEF/S.D.
	1.565		
X1	.237	.0555	4.27
X2	–.000249	.000032	–7.78

THE ST. DEV. OF Y ABOUT REGRESSION LINE IS S = .0532
WITH (25-3) = 22 DEGREES OF FREEDOM

R-SQUARED = 86.6 PERCENT
R-SQUARED = 85.4 ADJUSTED FOR DF.

ANALYSIS OF VARIANCE

DUE TO	DF	SS	MS = SS/DF
REGRESSION	2	.4017	.20085
RESIDUAL	22	.0623	.0028318
TOTAL	24	.4640	

Çizelge 13.6 Tasarruf sandıklarına ilişkin SPSS çıktısının bir bölümü

DEPENDENT VARIABLE.. Y KÂR MARJI

				SUM OF	
MULTIPLER	0.930	ANALYSIS OF VARIANCE	DF	SQUARES	MEAN SQUARE	F
R SQUARE	0.866	REGRESSION	2	0.4017	0.20085	70.92
ADJUSTED R SQUARE	0.854	RESIDUAL	22	0.0623	0.0028318	
STANDARD ERROR	0.0532					

VARIABLE	B	STD.ERROR B	F
X1	0.237	0.0555	18.23
X2	–0.000249	0.0000320	60.53
(COSTANT)	1.565		

Daha sonra belirlilik katsayısı R^2 gösterilmekte, onu da düzeltilmiş katsayı $\overline{R}^2$ izlemektedir.

Çizelge 13.6, son bir örnek olmak üzere, tasarruf sandıkları verisi için Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) program çıktısının bir bölümünü göstermektedir. SPSS programının verdiği büyüklüklerin çoğu öteki programların verdikleriyle açıkça aynıdır. STANDARD ERROR, s_e anakütle regresyon modelinin hata terimlerinin tahmin edilmiş standart sapmasıdır. SPSS programı t oranları yerine F değerlerini verir, bunlar da aslında t oranlarının kareleridir.

Çoklu regresyon için bilgisayar paket programlarının gelişmesiyle regresyon hesaplamalarındaki aritmetik işlem yükünün çok azaldığı açıktır. Sözkonusu teknik büyük ölçüde bu etmen sayesinde artık son derecede yaygın kullanılmaktadır. Ancak bunun hiçbir sakınca taşımadığı da söylenemez. Belki de işlemlerin yapılmasının çok kolay olması nedeniyle, üzerinde fazlaca düşünülmemiş regresyon çözümlemeleriyle sık sık karşılaşılmaktadır. Aslında verilerin bu teknikle çözümlenmesi kimi tuzakları da içinde barındırmaktadır. Bunlardan bazıları Bölüm 14'te ele alınacaktır.

ALIŞTIRMALAR

34. Bir eyaletteki bankaların iktisadi gücünün siyasi gücü üzerindeki etkisini değerlendiren bir çalışmada,[15] aşağıdaki model ortaya atılarak elli eyaletten derlenen verilere uygulanmıştır:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \varepsilon$$

Burada

Y = Eyaletin ve yerel yönetimlerin toplam vergi gelirleri (milyon dolar) içinde bankaların ödediği eyalet ve yerel yönetim vergilerinin (bin dolar) payı
x_1 = Eyaletteki 3-banka yoğunlaşma oranı (banka kaynaklarının yoğunlaşmasının bir ölçüsü)
x_2 = Eyaletteki kişi başına gelir (bin dolar)
x_3 = Tarımdışı gelirin tarım ve tarımdışı toplam gelire oranı
x_4 = Bankaların vergiden sonraki net kârlarının bankaların toplam varlıklarına oranı (1,000 ile çarpılmıştır)
x_5 = Banka varlıklarının ortalamasıdır (10,000'e bölünmüştür)

Tahmin edilmiş regresyonun bilgisayar çıktısının bir bölümü aşağıda verilmiştir. Bu çalışmanın bulgularını özetleyen bir rapor yazın.

[15] C. A. Glassman, "The impact of banks' statewide economic power on their political power: An empirical analysis," *Atlantic Economic Journal, 19*, no. 2 (1981), 53-56'dan uyarlanmıştır.

R-SQUARE .515			
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	10.60	2.41	4.40
X1	–.90	–.69	1.31
X2	.14	.50	.28
X3	–11.85	–2.83	4.18
X4	.080	.50	.160
X5	.100	5.00	.020

35. Illinois Üniversitesi'nde doksanüç birinci sınıf öğrencisinden oluşan rassal bir örnekleme giren deneklerden, yurt yaşamına ilişkin genel görüşlerini 1 (kötü) ile 10 (iyi) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Deneklere ayrıca oda arkadaşları, kaldıkları kat, yurt binası, yurt yöneticisiyle ilgili memnuniyet düzeyleri de sorulmuştur. (Kaldıkları odayla ilgili memnuniyet düzeyleri de öğrenilmiş, ama genel görüşü etkilemede yararlı ek güç sağlamadığı anlaşılınca modele katılmamıştır.) Aşağıdaki model tahmin edilmiştir:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$$

Burada

Y = Yurda ilişkin genel görüş
x_1 = Oda arkadaşıyla ilgili memnuniyet
x_2 = Katla ilgili memnuniyet
x_3 = Bina ilgili memnuniyet
x_4 = Yurt yöneticisiyle ilgili memnuniyet

Bu çalışmanın bulgularını özetleyen bir rapor yazmak için, tahmin edilmiş regresyonun bilgisayar çıktısının aşağıdaki bölümünden yararlanın:

DEPENDENT VARIABLE: Y GENEL GÖRÜŞ					
SOURCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F VALUE	R-SQUARE
MODEL	4	37.016	9.2540	9.958	.312
ERROR	88	81.780	.9293		
CORRECTED TOTAL	92	118.79			

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	3.950	5.84	.676
X1	.106	1.69	.063
X2	.122	1.70	.072
X3	.092	1.75	.053
X4	.169	2.64	.064

36. İkinci el mevduat sertifikası faiziyle hazine bonosu faizi arasındaki farkı açıklamaya yönelik bir çalışmada kırkyedi aylık gözlemlere aşağıdaki model[16] uygulanmıştır:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Burada

Y = İkinci el mevduat sertifikası faiziyle hazine bonosu faizi arasındaki fark
x_1 = Hazine bonosu faizi
x_2 = Kredi ve yatırımların sermayeye oranı

Bu çalışmanın bulgularını özetleyen bir rapor yazmak için, tahmin edilmiş regresyonun bilgisayar çıktısının aşağıdaki bölümünden yararlanın:

		R-SQUARE .730	
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	–5.559	– 4.14	1.343
X1	.186	5.64	.033
X2	.450	2.08	.216

37. [Bu soru, çoklu regresyon hesaplamaları için ya Ek A13.1'deki bilgileri ya da bir bilgisayar programını gerektirmektedir.] Aşağıdaki çizelge, on yıl üzerinden 100 milyon araç mil başına trafik kazalarındaki ölü sayısını (y), milyar araç mil cinsinden toplam yolu (x_1), bütün araçların saat başına mil cinsinden ortalama hızını (x_2) vermektedir. y'nin x_1 ve x_2'ye göre çoklu regresyonunu hesaplayın, bulgularınızı tartışan bir rapor yazın.

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
5.2	738	52.6	5.7	930	57.3
5.3	767	53.8	5.5	962	58.0
5.4	805	55.8	5.4	1,016	59.0
5.6	847	55.9	5.2	1,071	60.0
5.5	889	56.4	4.9	1,121	59.2

38. [*Bu soru, çoklu regresyon hesaplamaları için ya Ek A13.1'deki bilgileri ya da bir bilgisayar programını gerektirmektedir.*] Aşağıdaki çizelge ABD'nin elli eyaleti için, kadın işgücü oranını (y), ortanca aile gelirini (x_1), kadınların eğitimde geçirdikleri ortalama yıl sayını (x_2) ve kadın işsizlik oranını (x_3) göstermektedir. y'nin

[16] I. H. Giddy, "Moral hazard and Central Bank rescues in an international context," *Financial Review, 15*, no. 2 (1980), 50-56'dan uyarlanmıştır.

x_1, x_2 ve x_3'e göre çoklu regresyonunu hesaplayın, bulgularınızı tartışan bir rapor yazın.

y	x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3
61.0	17,306	12.5	6.3	65.3	20,951	12.6	6.5
63.8	17,740	12.6	4.7	59.9	22,897	12.6	7.7
68.5	18,840	12.3	7.6	63.9	25,881	12.6	6.2
52.6	22,456	12.5	6.4	57.4	25,372	12.5	5.8
54.1	19,128	12.4	6.1	56.8	17,916	12.4	5.8
57.4	17,217	12.4	5.5	58.3	20,824	12.5	6.5
55.7	18,679	12.5	8.5	65.1	18,046	12.5	4.8
66.6	19,107	12.6	4.0	62.2	17,505	12.5	4.1
60.2	17,842	12.4	6.2	59.9	16,088	12.5	3.8
62.7	16,392	12.5	3.6	63.4	17,852	12.6	2.6
60.4	18,511	12.6	4.4	60.7	29,349	12.5	5.0
62.8	22,080	12.5	5.9	64.0	19,976	12.4	6.0
44.2	14,174	12.2	9.1	60.5	16,642	12.2	5.7
59.5	15,420	12.1	6.0	57.4	17,364	12.2	5.2
54.6	18,880	12.5	7.6	52.9	15,359	12.1	7.3
53.9	16,352	12.2	6.6	51.8	15,567	12.2	7.6
54.1	13,343	12.2	8.9	53.6	14,753	12.2	7.5
52.7	15,143	12.2	7.8	54.3	15,827	12.5	6.2
58.7	17,305	12.4	6.7	60.8	16,043	12.6	6.4
57.8	15,401	12.6	5.8	61.8	17,118	12.7	5.0
63.3	19,440	12.8	4.8	54.8	14,844	12.6	6.5
55.6	16,401	12.7	5.0	61.2	14,529	12.8	5.0
61.6	19,175	12.6	4.7	59.3	19,442	12.7	5.4
58.4	17,592	12.7	6.5	56.0	20,952	12.7	7.1
64.9	21,932	12.8	6.9	61.7	21,306	12.7	2.8

39. [*Bu soru, çoklu regresyon hesaplamaları için bir bilgisayar programını gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Almanya'da oniki yıllık, kişi başına reel para (y), kişi başına reel gelir (x_1) ve faiz oranları (x_2) verilerini göstermektedir. y'nin x_1 ve x_2'ye göre çoklu regresyonunu hesaplayın, bulgularınızı tartışan bir rapor yazın.

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
1,762	13,091	9.6	2,408	14,968	7.9
1,856	12,391	10.3	1,373	14,481	8.6
2,010	12,905	8.4	2,190	14,034	10.0
2,025	13,207	7.5	2,272	14,022	8.1
2,186	13,881	5.7	2,390	14,554	8.1
2,453	14,702	6.7	2,485	14,852	7.2

40. [*Bu soru, çoklu regresyon hesaplamaları için bir bilgisayar programını gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, kırksekiz gelişmekte olan ülkede imalat sanayiinin büyüme hızını (y), tarımın büyüme hızını (x_1), dışsatımın büyüme hızını (x_2) ve enflasyon hızını (x_3) göstermektedir. y'nin x_1, x_2 ve x_3'e göre çoklu regresyonunu hesaplayın, bulgularınızı tartışan bir rapor yazın.

y	x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3
1.3	3.4	–2.7	13.0	4.1	2.3	8.7	9.5
1.0	1.4	–6.0	10.5	–5.0	1.2	–2.0	1.1
0.4	0.1	–3.6	15.9	2.1	2.7	5.6	11.2
4.9	1.8	13.6	3.2	7.7	3.0	2.0	8.9
9.8	5.6	27.3	5.4	9.3	3.3	6.2	7.5
–2.1	2.2	2.6	5.2	–1.7	2.0	–1.7	18.2
2.0	2.3	–9.5	8.7	5.8	4.7	–0.2	2.1
5.8	3.0	4.4	1.4	3.9	–3.9	–2.5	3.4
5.2	2.9	9.2	3.0	5.6	3.9	6.4	13.9
–1.1	–2.3	–6.3	14.9	6.9	1.3	11.6	6.4
0.2	0.3	12.0	20.3	–4.6	0.8	–9.8	21.5
1.1	1.4	–7.2	19.8	–2.6	1.7	–6.6	6.7
–12.0	4.8	–5.5	8.6	1.1	3.9	3.8	7.7
–1.6	–0.4	–2.5	11.3	4.6	3.0	–3.5	8.6
2.9	–0.6	5.4	7.5	–3.4	7.9	–7.9	45.4
0.5	1.9	1.6	19.0	–0.6	2.5	2.0	11.5
2.2	–3.5	4.7	1.9	8.2	1.9	3.8	7.8
8.0	3.1	19.9	37.3	4.1	0.9	1.3	5.6
6.5	3.3	–0.6	8.9	12.6	7.9	11.7	3.8
0.2	0.1	8.4	29.5	4.1	2.8	–0.9	9.9
7.8	5.3	10.4	8.1	0.6	2.8	–2.1	23.3
2.5	2.3	4.9	22.6	2.0	0.5	–3.1	33.5
–0.2	3.1	7.9	20.2	0.0	0.4	6.9	32.6
6.1	10.3	–19.0	–1.3	–2.6	–1.3	3.4	7.7

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

41. Bir çoklu regresyon modelinin anakütle katsayılarını tahmin etmek için en küçük kareler yöntemi, başka her almaşık süreçten daha sık kullanılır. Bu tahmin yönteminin dayandığı temelleri açıklayın, neden bu kadar yaygın kullanıldığını tartışın.

42. Tahmin edilen bir çoklu regresyonla birlikte bir varyans çözümlemesi çizelgesi hesaplamak geleneksel bir uygulamadır. Böyle bir çizelgeden ne öğrenilebileceğini özenle açıklayın.

43. Aşağıdaki söylemlerin doğru mu, yanlış mı olduklarını belirtin:

(a) Hata kareleri toplamı, regresyon kareleri toplamından küçük olmalıdır.

(b) Çoklu bir regresyondan elde edebileceğimiz bilgileri, bu işe girişmeden, bağımlı değişkenin her bir bağımsız değişkene göre basit doğrusal regresyonlarından da bulabiliriz.

(c) Belirlilik katsayısı eksi olamaz.

(d) Düzeltilmiş belirlilik katsayısı eksi olamaz.

(e) Çoklu korelasyon katsayısı, belirlilik katsayısının karekökü dür.

44. Ne kadar ilgisiz olursa olsun ek bir bağımsız değişkenin modele katılması, hata kareleri toplamının küçülmesine yol açar. Bunun neden böyle olduğunu açıklayın, belirlilik katsayısının yorumlarına ilişkin sonuçları tartışın.

45. Bağımlı bir değişkenin iki bağımsız değişkene göre regresyonu tahmin edilmiştir. $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ önsavları düşük anlamlılık düzeylerinde reddedilemezken, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ önsavı çok düşük bir anlamlılık düzeyinde reddedilebilir. Bu bulgu ne gibi durumlarda ortaya çıkar?

46. [*Bu alıştırma Ek A13.1'deki bilgileri gerektirir.*] Aşağıdaki regresyon modeli en küçük karelerle tahmin edilmiş olsun:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Verilere uydurulan modelden bulunan e_i kalıntılarının toplamının 0 olduğunu gösterin.

47. Kentsel alanlarda elektronik parça sanayiinde yeni bir iş kurmayı etkileyen etmenleri değerlendiren bir çalışma yapılmıştır.[17] Büyük kentlerdeki yetmiş standart istatistiksel bölgeden oluşan bir örneklemden aşağıdaki model tahmin edilmiştir:

$$y = -59.31 + 4.983x_1 + 2.198x_2 + 3.816x_3 - 0.310x_4$$
$$\qquad\qquad (1.156) \quad (0.210) \quad (2.063) \quad (0.330)$$
$$-0.886x_5 + 3.215x_6 + 0.085x_7 \qquad R^2 = 0.766$$
$$(3.055) \quad (1.568) \quad (0.354)$$

Burada

$y =$ Sanayide yeni kurulan işyerleri sayısı
$x_1 =$ Nüfus, milyon
$x_2 =$ Sanayi büyüklüğü
$x_3 =$ Yaşamın iktisadi kalitesinin ölçüsü
$x_4 =$ Yaşamın siyasi kalitesinin ölçüsü
$x_5 =$ Yaşamın çevre kalitesinin ölçüsü
$x_6 =$ Yaşamın eğitim ve sağlık kalitesinin ölçüsü
$x_7 =$ Yaşamın toplumsal kalitesinin ölçüsü

Katsayıların altında ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş standart hatalardır.

(a) Tahmin edilmiş kısmi regresyon katsayılarını yorumlayın.

(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.

(c) Öbür bütün değişkenler aynı kalırken, yaşamın iktisadi kalitesinde 1 birimlik bir artışın yol açtığı yeni işyerleri sayısındaki artışın %90 güven aralığını bulun.

---

[17] J. M. Pennings, "The urban quality of life and entrepreneurship," *Academy of Management Journal, 25* (1982), 63-79.

(d) Öbür her şey aynıyken, yaşamın çevre kalitesinin yeni işyerleri sayısını etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(e) Öbür her şey aynıyken, yaşamın eğitim ve sağlık kalitesinin yeni işyerleri sayısını etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(f) Bu yedi bağımsız değişkenin hep birlikte yeni işyerleri sayısını etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.

48. Bir araştırma şirketi, düzenli olarak hanehalklarına posta yoluyla anket uygulamakta ve bunların yanıtlanma oranını etkileyen etmenlerle ilgilenmektedir. Bir deneme yapılarak otuz soru kâğıdı deneklere gönderilmiştir. Bulunan verilere uyarlanan regresyon modeli şöyledir:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Burada

Y = Yanıt alma yüzdesi
x_1 = Sorulan soru sayısı
x_2 = Soru kâğıdının uzunluğu, sözcük sayısı

Tahmin edilmiş regresyonun SAS bilgisayar çıktısının bir bölümü aşağıdadır:

		R-SQUARE .637	
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	74.3652		
X1	–1.8345	–2.89	.6349
X2	–.0162	–1.78	.0091

(a) Tahmin edilmiş kısmi regresyon katsayılarını yorumlayın.

(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.

(c) İki bağımsız değişkenin birlikte yanıt alma oranını doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

(d) β_1'in %90 güven aralığını bulup yorumlayın.

(e) $H_0: \beta_2 = 0$

sıfır önsavını

$$H_1: \beta_2 < 0$$

karşı önsavıyla sınayıp bulgunuzu yorumlayın.

49. Bir danışmanlık şirketi, yöneticilere finansal yönetim kursları vermektedir. Bu kursların sonunda katılanlardan kursu bir bütün olarak değerlendirmeleri istenmektedir. Değerlendirmeyi etkileyen çeşitli etmenlerin etkisini ölçmek için böyle yirmibeş kursa

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

modeli uyarlanmıştır. Burada

Y = Kursa katılanların ortalama değerlendirmesi
x_1 = Grup tartışmasıyla geçen oturumların kurs süresi içindeki yüzdesi
x_2 = Katılımcı başına kursta ders malzemesine harcanan para miktarı (dolar)
x_3 = Katılımcı başına kursta ders dışı (yiyecek, içecek, vb.) harcanan para miktarı (dolar)

Tahmin edilmiş regresyonun SAS bilgisayar çıktısının bir bölümü aşağıdadır:

		R-SQUARE .579	
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	42.9712		
X1	.3817	1.89	.2018
X2	.5172	2.64	.1957
X3	.0753	1.09	.0693

(a) Tahmin edilmiş kısmi regresyon katsayılarını yorumlayın.
(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(c) Üç bağımsız değişkenin birlikte kurs değerlemesini doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını, %5 anlamlılık düzeyinde sınayın.
(d) β_1'in %90 güven aralığını bulup yorumlayın.

(e) $H_0: \beta_2 = 0$

sıfır önsavını

$H_1: \beta_2 > 0$

karşı önsavıyla sınayıp bulgunuzu yorumlayın.

(f) $H_0: \beta_3 = 0$

sıfır önsavını %10 anlamlılık düzeyinde

$H_1: \beta_3 \neq 0$

karşı önsavıyla sınayıp bulgunuzu yorumlayın.

50. [*Bu alıştırma, çoklu regresyon hesaplamalarını yapmak için bilgisayar programı gerektirir.*] Ders dönemi sonunda öğretim üyeleri öğrenciler tarafından 1 (zayıf) ile 5 (kusursuz) arasında bir ölçekte değerlendirilirler. Öğrencilere ayrıca dersten almayı beklediği not da, A = 4, B = 3, vb. biçimde kodlanmış olarak sorulmaktadır. Aşağıdaki çizelgede, yirmi derslik rassal bir örneklem için, öğretim üyelerine verilen notlar, beklenen ders notları ve sınıftaki öğrenci sayıları gösterilmiştir. Öğre-

tim üyelerine verilen notların, beklenen notlara ve öğrenci sayısına göre çoklu regresyonunu tahmin edip bulgularınızı rapor biçiminde yazın.

ÖĞR. ÜYESI NOTU	BEKLENEN NOT	ÖĞRENCİ SAYISI	ÖĞR. ÜYESI NOTU	BEKLENEN NOT	ÖĞRENCİ SAYISI
4.1	3.4	45	3.5	3.0	40
3.4	3.1	52	4.0	3.3	29
3.3	3.0	47	3.6	3.5	38
3.0	2.8	63	3.1	3.1	67
4.7	3.7	20	3.3	3.3	61
4.6	3.5	32	4.5	3.9	50
3.0	2.9	51	2.8	2.9	63
4.6	3.7	32	3.7	3.2	47
4.6	3.5	21	3.8	3.4	51
3.6	3.2	33	3.9	3.4	31

51. Altmışdört gözlemlik bir örnekleme dayanan aşağıdaki model[18] en küçük karelerle tahmin edilmiştir:

$$y = -16.528 + 28.729x_1 + 0.022x_2 - 0.023x_3 - 0.054x_4$$
$$- 0.077x_5 + 0.411x_6 + 0.349x_7 + 0.028x_8 \qquad R^2 = 0.467$$

Burada

y = Fabrikadaki doğrudan emek verimliliği endeksi
x_1 = Fazla mesai saatlerinin bütün işçilerin çalıştığı normal mesai saatlerine oranı
x_2 = Fabrikadaki saat ücretli işçilerin ortalama sayısı
x_3 = Şu ya da bu yaşam kalitesi programına katılmış çalışan sayısı
x_4 = 100 işçi başına iş huzursuzluğu sayısı
x_5 = Disiplin işlemi sayısı
x_6 = Saat ücretli işçilerin devamsızlık saoranı
x_7 = Maaşlı işçilerin memnuniyeti, düşük (memnun değil) ile yüksek arası, anketle ölçülmüş
x_8 = Fabrikanın öneri programına yılda en az bir kez öneri getiren saat ücretli işçi yüzdesi

En küçük karelerle bu verilere bir de aşağıdaki model uydurulmuştur:

$$y = 9.062 - 10.944x_1 - 0.320x_2 + 0.019x_3 \qquad R^2 = 0.242$$

x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 değişkenleri bir fabrikanın işçi-işveren ilişkileri sisteminin başarı ölçüleridir. x_1, x_2, x_3 değişkenleri de kullanılmak koşuluyla, bu değişkenlerin doğ-

[18] H. C. Katz, T. A. Kochan, M. R. Weber, "Assessing the effects of industrial relations systems and efforts to improve the quality of working life on organizational effectiveness," *Academy of Management Journal, 28* (1985), 509-26.

rudan emek verimliliğini açıklamada hiçbir katkı yapmadıklarını söyleyen sıfır önsavını %1 düzeyinde sınayın.

52. Yöneticiler için maliyet muhasebesi dersinin ilk sınavından 107 öğrencinin aldığı notlara dayanılarak aşağıdaki model[19] en küçük karelerle elde edilmiştir:

$$y = 2.178 + 0.469x_1 + 3.369x_2 + 3.054x_3 \qquad R^2 = 0.686$$

$$(0.090) \quad (0.456) \quad (1.457)$$

Burada

y = Öğrencinin sınavdan aldığı not
x_1 = Öğrencinin sınavdan beklediği not
x_2 = Haftalık ders çalışma süresi, saat
x_3 = Öğrencinin not ortalaması

(a) β_1'in tahminini yorumlayın.
(b) β_2'nin %95 güven aralığını bulup yorumlayın.
(c) β_3 sıfırdır diyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.
(d) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(e) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ sıfır önsavını sınayın.
(f) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.
(g) Sınavdan 80 almayı bekleyen, haftada 8 saat bu dersi çalışan, ortalama notu 3.0 olan bir öğrencinin aldığı notu tahmin edin.

53. 25 yıllık verilere dayanılarak Hindistan'da tasarrufları açıklamaya yönelik bir çalışma yapılmıştır.[20] Uygulanan model şudur:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y = Reel mevduat faizinde değişme
x_1 = Kişi başına reel gelirde değişme
x_2 = Reel faiz oranında değişme

Anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminleri (ayraç içindeki standart hatalarıyla) şöyledir:

$$b_1 = 0.0974 \ (0.0215) \qquad b_2 = 0.374 \ (0.209)$$

Düzeltilmiş belirlilik katsayısı da şöyle bulunmuştur:

$$\overline{R}^2 = 0.91$$

---

[19] M. E. Ibrahim, "Effort-expectation and academic performance in managerial cost accounting," *Journal of Accounting Education, 7* (1989), 57-68.

[20] S. Ghatak, D. Deadman, "Money, prices and stabilization policies in some developing countries," *Applied Economics, 21* (1989), 853-65.

(a) β_1'in %99 güven aralığını bulup yorumlayın.
(b) β_2'nin 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla sınayın.
(c) Belirlilik katsayısını bulun.
(d) $\beta_1 = \beta_2 = 0$ sıfır önsavım sınayın.
(e) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.

54. 2,679 üniversite basketbol oyuncusuna ilişkin verilere aşağıdaki model uygulanmıştır.[21]

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_9 x_{9i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y = Sezonda oynadığı süre, dakika
x_1 = Sayı yüzdesi
x_2 = Serbest atış yüzdesi
x_3 = Dakika başına rebound sayısı
x_4 = Dakika başına kaydettiği sayı
x_5 = Dakika başına faul sayısı
x_6 = Dakika başına top çalma sayısı
x_7 = Dakika başına blok sayısı
x_8 = Dakika başına oyuncu değiştirme sayısı
x_9 = Dakika başına asist sayısı

Anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminleri (ayraç içindeki standart hatalarıyla) şöyledir:

$a = 358.848$ (44.695) $\quad b_1 = 0.6742$ (0.0639) $\quad b_2 = 0.2855$ (0.0388)

$b_3 = 303.81$ (77.73) $\quad b_4 = 504.95$ (43.26) $\quad b_5 = -3923.5$ (120.6)

$b_6 = 480.04$ (224.9) $\quad b_7 = 1350.3$ (212.3) $\quad b_8 = -891.67$ (180.87)

$b_9 = 722.95$ (110.98)

Belirlilik katsayısı da şöyledir:

$$R^2 = 0.5239$$

(a) β_6'nın %90 güven aralığını bulup yorumlayın.
(b) β_7'nin %99 güven aralığını bulup yorumlayın.
(c) β_8'in 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavım, eksidir diyen karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.
(d) β_9'un 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.
(e) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(f) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.

---

[21] R. C. Clement, R. E. McCormick, "Coaching team production," *Economic Inquiry, 27* (1989), 287-304.

55. Altmışüç ülke verileriyle aşağıdaki model,[22] en küçük karelerle tahmin edilmiştir:

$$y = 0.058 - 0.052x_1 - 0.005x_2 \qquad R^2 = 0.17$$

$$(0.019) \quad (0.042)$$

Burada

$y =$ Reel gayrisafi ulusal ürünün büyüme hızı
$x_1 =$ Kişi başına reel gelir
$x_2 =$ Ortalama vergi oranı, gayrisafi ürünün yüzdesi

(a) β_1'in 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.
(b) β_2'nin 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın. Bulgunuzu yorumlayın.
(c) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(d) Çoklu korelasyon katsayısını bulup yorumlayın.

56. ABD'li altmış erkek profesyonel golf oyuncusuna ilişkin verilere aşağıdaki regresyon modeli uydurulmuştur:[23]

$$y = 164{,}683 + 341.10x_1 + 170.02\,x_2 + 495.19\,x_3 - 4.23\,x_4$$

$$(100.59) \quad (167.18) \quad (305.48) \quad (90.0)$$

$$- 136{,}040\,x_5 - 35{,}549\,x_6 + 202.52\,x_7 \qquad \overline{R}^2 = 0.516$$

$$(25{,}634) \quad (16{,}240) \quad (106.20)$$

Burada ayraç içindeki sayılar standart hatalardır ve

$y =$ Turnuva başına kazanç, dolar
$x_1 =$ Ortalama vuruş uzunluğu, yarda
$x_2 =$ Vuruşların çimenli yola düşme yüzdesi
$x_3 =$ Hedef yeşilliğe kurala uygun ulaşma yüzdesi
$x_4 =$ Kum tuzağına düşüp kurtulma yüzdesi
$x_5 =$ Hedef yeşilliğe kurala uygun ulaştıktan sonra ortalama vuruş sayısı
$x_6 =$ Hedef yeşilliğe kurala aykırı ulaştıktan sonra ortalama vuruş sayısı
$x_7 =$ Oyuncunun profesyonellik deneyimi, yıl

Bu bulgulardan neler öğrenilebileceğini bir raporla özetleyin.

---

[22] R. B. Koester, R. C. Kormendi, "Taxation, agregate activity, and economic growth: Cross-country evidence on some supply-side hypothesis," *Economic Inquiry, 27* (1989), 367-86.
[23] S. Shmanske, "Human capital formation in professional sports: evidence from the P.G.A. tour," *Atlantic Economic Journal, 20*, no.3 (1992), 66-80.

EK A13.1

Altbölüm 13.2'de çoklu regresyon modelinin anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminlerini,

$$\text{KT} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \Lambda - b_K x_{Ki})^2$$

sapma kareleri toplamım en küçük kılan $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ değerleri olarak tanımlamıştık. Ayrıca şu da gösterilebilir ki,[24] bu en küçükleme problemi, aşağıdaki K tane denklemin çözümü olan $b_1, b_2, \ldots, b_K$ değerlerini verir:

$$\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) = b_1 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + \Lambda + b_K \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{Ki} - \bar{x}_K)$$

$$\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) = b_1 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + \Lambda + b_K \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(x_{Ki} - \bar{x}_K)$$

$$\vdots$$

$$\sum (x_{Ki} - \bar{x}_K)(y_i - \bar{y}) = b_1 \sum (x_{Ki} - \bar{x}_K)(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2 \sum (x_{Ki} - \bar{x}_K)(x_{2i} - \bar{x}_2) + \Lambda + b_K \sum (x_{Ki} - \bar{x}_K)^2$$

ve sabit terim tahmini olan a da şöyle bulunur:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \Lambda - b_K \bar{x}_K$$

Burada $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \text{K}, \bar{x}_K$ bağımsız değişkenlerin örneklem ortalamalarıdır.

Yukarıdaki denklemlere **normal denklemler** denir. Çözülebilmeleri için cansıkıcı aritmetik işlemler gerekir. Ancak, yalnızca iki tane bağımsız değişken varsa elle hesaplanmaları o kadar zor değildir. Bu durumda şunları yazarız:

$$\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) = b_1 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$$

$$\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) = b_1 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

[24] KT'nin $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$'ye göre kısmi türevlerinin 0'a eşit kılınmasıyla bu bulguya ulaşılır.

Bu iki denklemin çözümü şunu verir:

$$b_1 = \frac{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y}) - \sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 - \left[\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)\right]^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y}) - \sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 - \left[\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)\right]^2}$$

Son olarak, sabit terimin tahmini de şudur:

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

Bu formülleri, tasarruf sandıkları modelimizin anakütle katsayılarının en küçük karelerle tahminlerinde kullanalım. Çizelge 13.1'deki verilerle şunları hesaplarız:

$$\sum x_{1i} = 96.34 \qquad \sum x_{2i} = 181{,}083 \qquad \sum y_i = 16.86$$

$$\sum x_{1i}^2 = 379.2928 \qquad \sum x_{2i}^2 = 1{,}335{,}795{,}900 \qquad \sum x_{1i}x_{2i} = 710{,}932.32$$

$$\sum x_{1i}y_i = 63.6124 \qquad \sum x_{2i}y_i = 119{,}215.94$$

Dolayısıyla örneklem ortalamaları da şöyle bulunur:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1i}}{n} = \frac{96.34}{25} = 3.8536$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{2i}}{n} = \frac{181{,}083}{25} = 7{,}243.32$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{16.86}{25} = 0.6744$$

Öyleyse en küçük kareler tahminlerinin hesaplanması için gerekli büyüklükler aşağıdaki gibidir:

$$\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 = \sum x_{1i}^2 - n\bar{x}_1^2 = 379.2928 - (25)(3.8536)^2 = 8.03698$$

$$\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 = \sum x_{2i}^2 - n\bar{x}_2^2 = 1{,}335{,}795{,}900 - (25)(7{,}243.32)^2 = 24{,}153{,}800$$

$$\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2) = \sum x_{1i}x_{2i} - n\bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$= 710{,}932.32 - (25)(3.8536)(7{,}243.32) = 13{,}110.88$$

$$\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y}) = \sum x_{1i}y_i - n\bar{x}_1\bar{y} = 63.6124 - (25)(3.8536)(0.6744)$$

$$= -1.359296$$

$$\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) = \sum x_{2i} y_i - n\bar{x}_2 \bar{y} = 119{,}215.94 - (25)(7{,}243.32)(0.6744)$$

$$= -2{,}966.43$$

Artık en küçük kareler tahminlerini hesaplamak için formülleri kullanabiliriz:

$$b_1 = \frac{(24{,}153{,}800)(-1.359296) - (13{,}110.88)(-2{,}906.43)}{(8.03698)(24{,}153{,}800) - (13{,}110.88)^2} = 2.37$$

$$b_2 = \frac{(8.03698)(-2{,}906.43) - (13{,}110.88)(-1.359296)}{(8.03698)(24{,}153{,}800) - (13{,}110.88)^2} = -0.000249$$

Son olarak sabit terim de şöyle tahmin edilir:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = 0.6744 - (0.237)(3.8536) - (-0.000249)(7{,}243.32)$$

$$= 1.565$$

Regresyon modeli yalnızca iki bağımsız değişken içeriyorsa, en küçük kareler tahmin edicilerinin, Altbölüm 13.6'da ele alınan tahmin edilmiş standart hataları için de başa çıkılabilir ifadeler elde edilebilir. Tahmin edilen varyanslar için aşağıdakilerin geçerliliği gösterilebilir:

$$s_{b_1}^2 = \frac{s_e^2 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - \left[\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)\right]^2}$$

$$s_{b_2}^2 = \frac{s_e^2 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - \left[\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)\right]^2}$$

Burada

$$s_e^2 = \frac{\text{HKT}}{n - K - 1}$$

anakütle regresyonundaki ε_i hata terimlerinin varyansımn tahminidir.

Tasarruf sandıkları verileri için şunları buluruz:

$$s_e^2 = \frac{0.0623}{22} = 0.0028318$$

Öyleyse

$$s_{b_1}^2 = \frac{(0.0028318)(24{,}153{,}800)}{(8.03698)(24{,}153{,}800) - (13{,}110.88)^2} = 0.003077$$

olur. Bunun karekökünü alırsak,

$$s_{b_1} = 0.0555$$

buluruz. Benzer biçimde

$$s_{b_2}^2 = \frac{(0.0028318)(8.03698)}{(8.03698)(24{,}153{,}800) - (13{,}110.88)^2} = 0.0000000010238$$

ve

$$s_{b_2} = 0.0000320$$

buluruz.

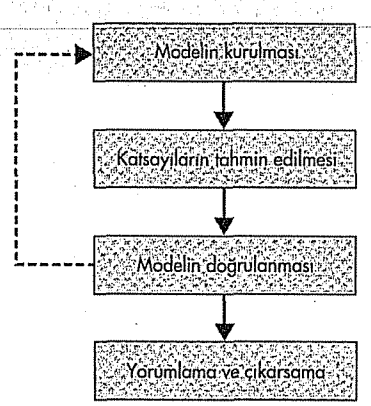
BÖLÜM 14

Regresyon Çözümlemesine Ek Konular

14.1 MODEL KURMA YÖNTEMİ

Regresyon çözümlemesi tekniği Bölüm 12 ile 13'te ele alındı. Regresyon denklemleri uydurmanın amacı, bağımsız değişkenlere ilişkin bilgileri bağımlı değişkenin davranışını açıklamak için kullanmaktır. Tahmin edilen regresyon modeli daha sonra bağımlı değişken kestirimlerini türetmek için de kullanılabilir. Bir regresyon denklemini geliştirirken çok zengin bir model kurma seçenekleri yelpazesi sözkonusu olabilir ve birkaç sorunla karşılaşılabilir. Bu bölümde, uygulamada model kurarken ortaya çıkabilecek kimi konular ele alınacaktır.

Bir giriş olmak üzere, regresyon denklemi gibi istatistik modellerini kurmanın genel bir yöntemini ana çizgileriyle belirteceğiz. Son derecede karmaşık bir dünyada yaşıyoruz. İktisat ve işletmecilik değişkenlerinin basit bir denklemle ya da denklem takımıyla *tam tamına* betimlenebileceğine kimse inanmaz. Yine de karmaşık bir gerçekliğe ışık tutabilecek, temsil niteliği yeterince yüksek görece basit bir biçimsel model bulunması olanaklı olabilir. Model kurma sanatı, ilgilenilen bir değişken üzerinde etkili olan sayısız tekil etmeni hesaba katmanın olanaksızlığını kabullenip, onun yerine, en önemli etmenleri seçmeye çalışmaktır. Daha sonra, bu etmenlerin etkileşimlerini gösteren bir modelin yapılandırılması gerekir. Amaç, işe yarar yorumlar verebilen, yeterince basit ama önemli etmenleri gözardı edecek kadar da basitleştirilmemiş bir modele ulaşmaktır.



ÇİZİM 14.1 İstatistik model kurmanın aşamaları

İstatistik model kurma süreci soruna özgüdür. Ne yapıldığı ve yapılabileceği, incelenen büyüklüklerin davranışlarına ilişkin nelerin bilindiğine ve elde hangi verilerin bulunduğuna bağlıdır. Yine de bir model kurma denemesinin çeşitli aşamalarına ilişkin kimi genellemeler yapılabilir.

Çizim 14.1, istatistik modellemenin aşamalarını görsel olarak sergilemektedir. Bunları birer birer ele alacağız.

(i) MODELİN KURULMASI

Başlangıçta sorun, incelenen sistemi uygun, yararlı ve akla yakın ölçüde doğru betimlemeyi sağlayabilen biçimsel bir cebirsel model kurmaktır. Bölüm 12 ile 13'teki regresyon denklemleri, bağımlı değişkenin beklenen değeriyle bağımsız değişkenlerin aldığı değerler arasında doğrusal bir ilişki varsaymışlardı. Bu biçimlendirme çoğu zaman arkada yatan gerçekliğin yeterli bir betimlemesini verebilir. Ama bu değişmez bir durum değildir. Altbölüm 14.2-14.4'te çoklu regresyon modelinde bazı iyileştirmeler ve düzeltmeler yapacağız.

Şunu unutmamak çok önemlidir. Bir istatistik modelde bulunan rassal değişkenlerin özelliklerine ilişkin olarak yapılan her türlü varsayım, öne sürülen modeli kurmanın bir parçasını oluşturur. Sözgelimi, buraya kadarki modellerle uğraşırken, hata terimlerinin hepsinin aynı varyansa sahip olduğunu ve birbirleriyle ilişkisiz olduklarını varsaydık. Tahmin edilen regresyondan yapılan herhangi bir çıkarsamanın geçerliliği, bu varsayımların uygun olup olmamasına bağlıdır.

(ii) KATSAYILARIN TAHMİN EDİLMESİ

Bir istatistik model bir kez kuruldu mu, çoğunlukla bilinmeyen bazı **anakütle katsayıları** içerir. Model kurma denemesinin ikinci aşaması, eldeki verileri kullanıp bu katsayıları tahmin etmektir. Hem nokta hem aralık tahminleri yapılabilir. Böylece

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad (14.1.1)$$

çoklu regresyon modelinde bağımlı ve bağımsız değişken gözlemleri, $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarını tahmin etmekte kullanılır.

Uygun tahmin yöntemi, modelin kuruluşuna bağlıdır. (14.1.1)'deki ε_i hata terimlerinin istatistik özelliklerine ilişkin kimi varsayımlar verilmişken, kısmi regresyon katsayılarını tahmin etmede en küçük kareler yönteminin kullanılması uygundur. Ancak, göreceğimiz gibi, bu varsayımlar geçersizleşirse, en küçük kareler tahmin edicileri etkinliklerini bir hayli yitirirler. Genel olarak, en küçük karelerin kullanılmasını büyük ölçüde haklı gösteren Gauss-Markov teoremi, ancak bu varsayımlar doğruysa geçerli olur.

(iii) MODELİN DOĞRULANMASI

Bir araştırmacı bir model ileri sürerken arkada yatan sistemin davranışlarına ilişkin bilgileri işe katar. Ama bunların cebirsel biçimlere sokulması sırasında, aslında savunulamayabilecek bazı basitleştirme ve varsayımlara başvurulacaktır. Öyleyse modelin yeterliliğinin gözden geçirilmesi önemlidir.

Bir araştırmacı, bir regresyon denklemini tahmin ettikten sonra, incelenen sisteme ilişkin bilinen ya da doğru olduğu düşünülen bilgilerle karşılaştırıldığında, elde ettiği tahminlerin anlamsız olduğunu görebilir. Sözgelimi, tahmin edilen bir modele göre, bütün ilgili öbür bütün etmenler sabitken, fiyat arttıkça ithal araba talebi *artıyor* olsun. Böyle bir sonucun iktisat kuramına ve sağduyuya aykırılığı açıktır. Bir en küçük kareler tahmin edicisinin işareti "yanlış" ise, sorun genellikle, tahmin edicide fazla hassaslık sağlamaya yetmeyen verilerden kaynaklanır. Örneğimizde, öbür her şey sabitken, ithal araba talebiyle fiyat arasında en azından bir miktar tersine bir ilişki varolabilir; ama katsayı tahminlerindeki örnekleme hataları bunu gizlemektedir. Daha da ciddisi, "yanlış" işaretli katsayı tahminleri bazen, alışıldık düzeylerde 0'dan anlamlı derecede farklı çıkabilir. Böyle durumlarda bu olgu pekâlâ modelin yanlış kurulmasından kaynaklanabilir. O zaman araştırmacı modelin ilk kuruluş biçimini bir kez daha düşünmelidir. Belki önemli bir değişken unutulmuştur, belki de öne sürülen

fonksiyon kalıbı uygun değildir. Tahmin edilmiş modelin inandırıcılığına bakmanın, modelin doğrulanmasının önemli bir parçası olduğu kesindir.

Modeldeki rassal değişkenlerin istatistik özelliklerine ilişkin varsayımları gözden geçirmek de önemlidir. (14.1.1) regresyon denkleminde, başlangıçta çoğunlukla, bütün ε_i hata terimlerinin eşit varyanslı ve birbirleriyle ilişkisiz oldukları varsayılır. Altbölüm 1.7 ile 14.8'de bu varsayımların, eldeki verilerin sunduğu kanıtlara dayanılarak, nasıl denetlenebileceklerini göreceğiz.

Bir modelin yeterliliğinin herhangi bir sınanması, araştırmacıyı başka bir model kurma önerisine sürükler. İşte bu nedenle Çizim 14.1'de modelin doğrulanması aşamasını kesik çizgili bir okla modelin kurulması aşamasına bağladık. Bu açıdan bakıldığında model oluşturma, modelin kurulması, tahmini ve doğrulanmasının geri dönüşlü bir süreci olarak düşünülebilir. Bu süreç, yeterli olduğu görülen bir modele ulaşılıncaya kadar sürer.

(iv) YORUMLAMA VE ÇIKARSAMA

Model bir kez kurulunca, incelenen sisteme ilişkin bir şeyler öğrenebilmede kullanılabilir. Regresyon çözümlemesinde bu, modelin anakütle katsayılarının güven aralıklarını bulmak, ilgilenilen bir önsavı sınamak ya da bağımsız değişkenlerin değerleri verilmişken bağımlı değişkenin gelecekteki değerini kestirmek olabilir. Bu türden bir çıkarsamanın uygun modelin kurulduğu varsayımına bağlı olduğunu gömek önemlidir. Model kurma hataları ne kadar ciddiyse, verilere uydurulmuş modelden yapılan çıkarsama da genellikle o kadar az güvenilir olur.

14.2 GÖLGE DEĞİŞKENLER

Doğrudan sayısallaştırılamayan etmenlerin, ilgilenilen bağımlı değişkenin davranışını önemli ölçüde etkileyebildiklerine sıkça rastlanır. Sözgelimi, çoğu ürünlerin satışı yılın belli zamanlarında dalgalanır, dışsatım liman işçilerinin grevlerinden etkilenir, ücret enflasyonunun hızı hükümetin uyguladığı politikanın etkisi altında kalır. Bu tür etmenler bir regresyon denkleminde çoğu zaman *gölge değişkenler* aracılığıyla hesaba katılır.

Bu düşünceyi açıklayabilmek için, az gelişmiş ülkelerde vergileme kapasitesine ilişkin bir çalışmayı ele alalım.[1] Gayrisafi ulusal ürünün bir yüzdesi olarak vergi gelirlerinin (Y), gayrisafi ulusal ürünün bir yüzdesi olarak dışsatıma (x_1) ve kişi başına gelire (x_2) bağlı olduğu düşünülmektedir. Ancak, (serbest

[1] T. V. Truong, D. N. Gash, "Less developed countries' taxable capacity and economic integration: A cross-sectional analysis," *Review of Economics and Statistics, 61* (1979), 312-16.

ticaret bölgesi, gümrük birliği ya da ortak pazar gibi) bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmış ülkelerde vergi gelirlerinin, öbür ülkelerden düşük olduğu da düşünülmektedir. Bu son etmenin etkisini hesaba katabilmek için bir başka bağımsız değişken (x_3) daha türetilir. Bu değişken, bir tür iktisadi bütünleşme içinde yer alan ülkeler için 1 değerini, öbür ülkeler için 0 değerini alacak biçimde oluşturulur. Bu durumda öne sürülen çoklu regresyon modeli aşağıdadır:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i \qquad (14.2.1)$$

Burada

$Y_i = i$'inci ülkede gayrisafi ulusal ürünün bir yüzdesi olarak vergi gelirleri
$x_{1i} = i$'inci ülkede gayrisafi ulusal ürünün bir yüzdesi olarak dışsatım
$x_{2i} = i$'inci ülkede kişi başına gelir (ABD doları)

$$x_{3i} = \begin{cases} 1 & i\text{'inci ülke bir iktisadi bütünleşme içindeyse} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

Eş. (14.2.1)'deki x_{3i} gibi değişkenlere **gölge değişkenler** denir. Eş. (14.2.1)'deki β_1 ve β_2'nin yorumu tıpkı gölge değişken içermeyen regresyon modellerindeki gibidir. Böylelikle β_2, kişi başına gelirdeki 1 birimlik artış sonucunda (gayrisafi ulusal ürünün bir yüzdesi olarak) vergi gelirlerinde beklenen artıştır. β_3'ü yorumlarken gölge değişken için yalnızca iki olanak bulunduğuna dikkat etmek gerekir. Bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmış ülkeler için x_{3i}, 1 değerini alır ve Eş. (14.2.1) şöyle olur:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 + \varepsilon_i$$

Benzer biçimde, öbür ülkeler için x_{3i}, 0 değerini aldığından Eş. (14.2.1) şöyle yazılabilir:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Demek ki β_3, dışsatım ve kişi başına gelir düzeyi sabitken, bir iktisadi bütünleşmeye katılan ve katılmayan ülkelerin (gayrisafi ulusal ürünün yüzdesi olarak) beklenen vergi gelirleri arasındaki farktır.

Gölge Değişkenler

Bağımlı bir değişken, A ve B gibi iki konumda olabilen bir etmence etkilenebiliyor olsun. Bu etmen, regresyona bir **gölge değişken** —bu etken A konumundayken 1, değilken 0 değeri alan bir bağımsız değişken— eklenerek hesaba katılabilir.

Bu gölge değişken kısmi regresyon katsayısı, öbür bütün değişkenler sabit tutulurken, bu etmen A ya da B konumundayken bağımlı değişkenin alması beklenen değerleri arasındaki farktır.

Gölge değişkenli regresyon denklemleri, tıpkı Bölüm 13'teki gibi, en küçük karelerle tahmin edilebilir. (14.2.1) modeli kırküç az gelişmiş ülke verilerine uygulandığında tahmin edilen denklem şöyle olmuştur:

$$y = 9.188 + 0.315x_1 + 0.00286x_2 - 3.664x_3 \qquad R^2 = 0.503$$
$$(1.646)\ (0.061)\quad (0.00272)\quad (1.412)$$

Böylece üç bağımsız değişken birlikte, bu ülkeler örnekleminde bağımlı değişkendeki değişkenliğin %50.3'ünü açıklamaktadır. Çizelge 14.1, verilere uydurulan regresyon ilişkisi için bilgisayar çıktısının bir bölümünü göstermektedir.

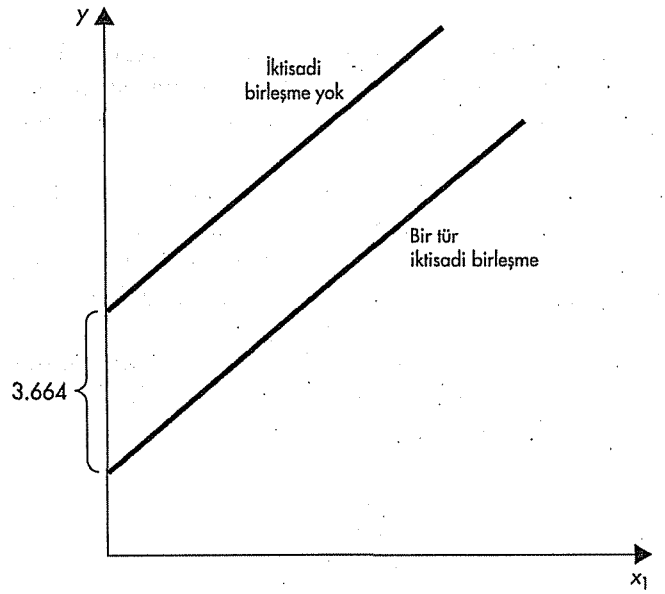
Tahmin edilmiş denkleme göre nokta tahminimiz şu anlama gelir: Dışsatımın ve kişi başına gelirin belli düzeyleri için, gayrisafi ulusal ürünün yüzdesi olarak vergi gelirleri, bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmış ülkelerde, katılmayanlara göre 3.664 birim daha düşüktür. Bu bulgu, kişi başına gelirin verilmiş bir düzeyinde vergi gelirleriyle dışsatım arasında tahmin edilen ilişkiyi gösteren Çizim 14.2'de gösterilmiştir. Biri bir tür iktisadi bütünleşmeye katılan, öbürü katılmayan ülkeler için olmak üzere iki tür ilişki olanaklıdır. Bu ilişkiler birbirine koşut iki çizgiyle belirtilmiş olup dışsatımın her düzeyinde beklenen vergi gelirlerinin ikinci öbek ülkelerde birinciye göre 3.664 daha yüksek olduğunu gösterir.

Modelin anakütle katsayılarının güven aralıkları ve önsav sınamaları, bir regresyon modeline gölge değişkenler katıldığında da bildik yolla elde edilebilir. (14.2.1) modeline dönerek, kırküç az gelişmiş ülke verisini kullanıp

$$H_0: \beta_3 = 0$$

ÇİZELGE 14.1 Vergi gelirleri örneği için SAS programı çıktısının bir bölümü

		R-SQUARE 0.503	
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	9.188	5.58	1.646
X1	0.315	5.16	0.061
X2	0.00286	1.05	0.00272
X3	–3.664	–2.60	1.412



ÇİZİM 14.2 Kişi başına gelirin sabit bir düzeyi için, gayrisafi ulusal ürünün yüzdesi olarak vergi gelirleri (y) ile gayrisafi ulusal ürünün yüzdesi olarak dışsatım (x_1) arasında tahmin edilen ilişki

sıfır önsavını

$$H_1: \beta_3 < 0$$

karşı önsavıyla sınayalım. Sıfır önsavı, öbür her şey aynıyken, bir tür iktisadi bütünleşme içine giren ülkelerde beklenen vergi gelirlerinin girmeyenlerdeki kadar olduğunu söyler. Karşı önsav da böyle bir bütünleşme içindeki ülkelerde beklenen vergi gelirlerinin daha düşük olduğunu ileri sürer.

Sınama, tahmin edilen katsayımn kendi standart hatasına oranlanmasına, yani Çizelge 14.1'den doğrudan okunabilen

$$\frac{b_3}{s_{b_3}} = \frac{-3.664}{1.412} = -2.595$$

değerine dayanır. Kırküç gözlem ve üç bağımsız değişken olduğuna göre

$$n = 43 \qquad K = 3$$

olur, uygun bir karşılaştırma, çizelgelenmiş $-t_{n-K-1,\alpha}$ Student t eşik değeriyle yapılır. Ek Çizelge 6'dan şunlar okunabilir:

$$-t_{39,0.01} \approx -2.423 \qquad -t_{39,0.005} \approx -2.704$$

Demek ki sıfır önsavı %1 düzeyinde reddedilebilir ama %.5 düzeyinde reddedilemez. Bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmayan ülkelerde vergi gelirlerinin daha yüksek olduğunu söyleyen karşı önsav lehine çok güçlü kanıtlar vardır.

Buraya kadar, sözgelimi bir iktisadi bütünleşmeye katılan ya da katılmayan ülkeler gibi, yalnızca iki konumda olabilen nitel değişkenleri inceledik. Ancak, zaman zaman, üç ya da daha çok konumda olabilen nitel değişkenler de bir bağımlı değişkenin davranışını açıklamak için uygun görülebilir. Bu sorun, konum sayısından bir eksik gölge değişken kullanılarak çözülebilir. Yine az gelişmiş bir ülkenin iktisadi başarım göstergelerinden birini açıklamak istediğimizi düşünelim. Ülkenin coğrafi konumunun önemli olduğuna inanabiliriz. Gelişmekte olan ülkeler örneklemi üç öbeğe ayrılabilir:

1. Asya ülkeleri
2. Afrika ülkeleri
3. Orta ve Güney Amerika ülkeleri

Bu üç olanaklı durumu gösterebilmek için iki gölge değişken gerekir:

x_{1i} = ülke 1. öbek içindeyse 1, değilse 0
x_{2i} = ülke 2. öbek içindeyse 1, değilse 0

Bunlar, öteki ilgili değişkenlerle birlikte regresyona katılabilir. Bu tür gölge değişkenlerin katsayıları yorumlanırken özen gerekir. Sözgelimi, bu örnekteki x_{1i}'in katsayısı, öbür her şey aynıyken, bağımlı değişkenin 1. öbekteki ülkeler için alması beklenen değeriyle 3. öbekteki ülkeler için alması beklenen değerleri arasındaki farktır. (Dikkat ederseniz karşılaştırma hep doğrudan gölge değişkeni olmayan öbekle yapılmaktadır.)

14.3 GECİKMELİ BAĞIMLI DEĞİŞKENLER

Bu altbölümün konusu, zaman serisi verileri çözümlenirken —yani ilgilenilen büyüklükle ilgili ölçümler zaman içinde yapılmışsa— geçerlidir. Gözlemlerimiz, sözgelimi, yıllık, üçer aylık ya da aylık olabilir. Durumu simgelerle de açıkça gösterebilmek amacıyla, daha önceki i altimleri yerine zamanı gösteren t altimini kullanacağız. Böylece, bağımlı değişkenin aldığı değerlerin, K bağımsız değişkenin yalmzca aynı zaman diliminde aldığı değerlerinden etkilendiği bir regresyon modeli şöyle yazılacaktır:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t$$

Zaman serisi verileri içeren pek çok uygulamada bu modelin geliştirilmesi istenir. Bağımlı değişkenin t zaman diliminde aldığı Y_t değeri, çoğu zaman bu değişkenin bir önceki dönemde aldığı değerle —yani Y_{t-1} ile— de ilişkilidir. Bir bağımlı değişkenin daha önceki bir dönemde aldığı değere **gecikmeli bağımlı değişken** denir.

Gecikmeli Bağımlı Değişken İçeren Regresyonlar

Bir bağımlı değişken Y ile K bağımsız değişken $x_1, x_2, \ldots, x_K$ arasında ilişki kuran aşağıdaki regresyon modelini alalım:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Burada $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K, \gamma$ sabit katsayılardır. Veriler bu modelle türetilmişse:

(i) Öbür bütün bağımsız değişkenler sabit kalırken, x_j bağımsız değişkeninde t döneminde 1 birim artış, bağımlı değişkende t döneminde β_j, $(t+1)$ döneminde $\beta_j \gamma$, $(t+2)$ döneminde $\beta_j \gamma^2$, $(t+3)$ döneminde $\beta_j \gamma^3$, vb. artışlara yol açar. İçinde bulunulan ve gelecekteki bütün dönemlerde ortaya çıkacak toplam artış $\beta_j/(1-\gamma)$ olur.

(ii) $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K, \gamma$ katsayıları en küçük karelerle bildik biçimde tahmin edilirler.

(iii) Regresyon katsayılarının güven aralıkları ve önsav sınamaları tıpkı sıradan çoklu regresyon modelindeki gibi elde edilir. (Aslında daha doğrusunu söylersek, regresyon denklemleri gecikmeli bağımlı değişken içeriyorsa, bu süreçler yaklaşık olarak geçerlidir. Öbür herşey aynıyken, örneklem gözlemlerinin sayısı arttıkça yaklaşıklığın düzeyi de yükselir.)

Model gecikmeli bağımlı değişken içerdiği zaman, uyarlanan regresyon denklemine dayanılarak yapılan regresyon tahmin ve çıkarsamalarının hesaplanmasını göstermek için, hane başına yerel reklâm harcamalarını açıklamaya yönelik bir model alalım.[2] Çizelge 14.2 bu büyüklüklere ilişkin yirmiüç yıllık gözlem içermektedir.

[2] N. K. Dhalla, "Short-term forecasts of advertising expenditures," *Journal of Advertising Research, 19*, no. 1 (1979), 7-14'ten alınmıştır.

ÇİZELGE 14.2 ABD'de hane başına yerel reklâm harcaması verileri (1972 fiyatlarıyla dolar)

YIL	REKLÂM	YIL	REKLÂM
0	115.80	12	132.27
1	117.66	13	134.69
2	115.62	14	138.62
3	110.79	15	136.15
4	119.22	16	144.17
5	120.78	17	154.03
6	110.20	18	161.39
7	110.86	19	157.72
8	114.06	20	145.37
9	120.87	21	152.73
10	127.03	22	155.70
11	132.08		

Hane başına yerel reklâmın, hane başına perakende satışlara dayandığına inanılmaktadır. (Bu ikinci değişkene ilişkin veriler Çizelge 12.5'te verilmiştir.) Ayrıca, perakende satış düzeyindeki ani değişmeler karşısında reklâm verenler planlarını hemen değiştiremeyebileceği ya da değiştirmek istemeyebileceği için, bir önceki yılın hane başına yerel reklâm harcamaları da modele eklenmiştir. Böylece içinde bulunulan yılın reklâm harcamaları, aynı yılın perakende satışları (x_t) ve bir önceki yılın reklâm harcamaları (Y_{t-1}) ile ilişkilendirilmiştir. Bu durumda uygulanacak model aşağıdaki gibidir:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Burada

$Y_t = t$ yılında hane başına reklâm harcaması
$x_t = t$ yılında hane başına perakende satış

Çizelge 14.3'te veriler, en küçük kareler tahminine elverişli biçime sokulmuştur. y_t'ler bağımlı değişken gözlemleridir. Regresyon hesaplamalarını yapabilme amacıyla gecikmeli y_{t-1} değişkeni ikinci bir bağımsız değişkenmiş gibi ele alınmıştır. Böylece regresyon, y_t bağımlı değişkeninin, x_t ve y_{t-1} "bağımsız değişken" çiftine göre regresyonu olarak hesaplanmıştır.

Bu örnekte tahmin edilen regresyon aşağıdaki gibi çıkmıştır:

$$y_t = -41.87 + 0.0185x_t + 0.480y_{t-1} \qquad (14.3.1)$$
$$(0.0028) \quad (0.086)$$

ÇİZELGE 14.3 Hane başına yerel reklâm harcamaları (y_t) ve hane başına perakende satış (x_t) verileri

YIL	y_t	y_{t-1}	x_t	YIL	y_t	y_{t-1}	x_t
1	117.66	115.80	5,492	12	132.27	132.08	5,907
2	115.62	117.66	5,540	13	134.69	132.27	6,124
3	110.79	115.62	5,305	14	138.62	134.69	6,186
4	119.22	110.79	5,507	15	136.15	138.62	6,224
5	120.78	119.22	5,418	16	144.17	136.15	6,496
6	110.20	120.78	5,320	17	154.03	144.17	6,718
7	110.86	110.20	5,538	18	161.39	154.03	6,921
8	114.06	110.86	5,692	19	157.72	161.39	6,471
9	120.87	114.06	5,871	20	145.37	157.72	6,394
10	127.03	120.87	6,157	21	152.73	145.37	6,555
11	132.08	127.03	6,342	22	155.70	152.73	6,755

Burada katsayıların altında ayraç içindeki sayılar her zamanki gibi katsayıların tahmin edilmiş standart hatalarıdır.

Tahmin edilen regresyonun SAS programı bilgisayar çıktısının bir bölümü Çizelge 14.4'te gösterilmiştir. Dikkat ederseniz regresyon bulgularını sunarken, R^2 belirlilik katsayısının değerini göstermedik. Uygulamada bu katsayı çoğu zaman verilmekle birlikte, yorumu sorunlu olup yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Sözgelimi, bu bağlamda yüksek değerli bir R^2, yerel reklâmlarla perakende satış arasında güçlü bir ilişki olduğu anlamına *gelmeyebilir*. Tersine, işletmecilik ve iktisada ilişkin çoğu zaman serisi çiziminin zaman içinde bayağı düzgün bir gelişme gösterdiği çok iyi bilinen görgül bir olgudur. Regresyon modeline gecikmeli bir bağımlı değişken eklendiğinde, bu olgu tek başına, belirlilik katsayısının yüksek çıkmasını sağlamak için yeterlidir. Okuyucunun uygulamada böylesi modellerde R^2'nin yüksek değerine pek aldırmaması önerilir.

Tahmin edilmiş regresyon denklemi (14.3.1) şöyle yorumlanabilir: Hane başına perakende satışlar, içinde bulunulan yılda 1 $ artsın. Bunun hane başına yerel reklâm üzerindeki beklenen etkisi, içinde bulunulan yılda 0.0185 $, ertesi yıl

$$(0.480)(0.0185) = 0.0089\ \$$$

ÇİZELGE 14.4 Yerel reklâm harcamaları örneğinin SAS programı çıktısının bir bölümü

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	–41.87		
X1	0.0185	6.61	0.0028
X2	0.480	5.58	0.086

daha, bir sonraki yıl

$$(0.480)^2(0.0185) = 0.0043\ \$$$

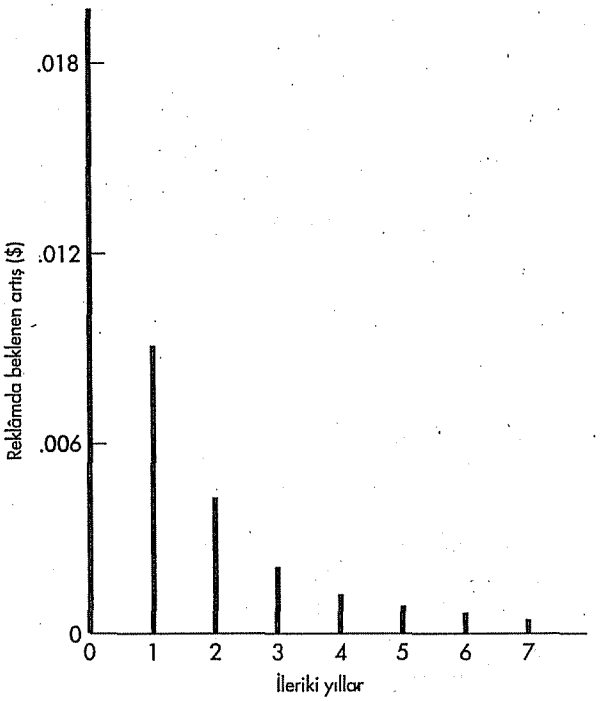
daha, vb. biçimindedir. Hane başına reklâm harcamalarının gelecek bütün dönemlerdeki toplam etkisi

$$\frac{0.0185}{1-0.480} = 0.0356\ \$$$

kadar bir beklenen artıştır. Böylece satışlardaki bir artışın beklenen etkisi, reklâm harcamalarında derhal bir artış, ertesi yıl daha küçük, bir sonraki yıl daha da küçük bir artış, vb. biçimindedir. Bu da Çizim 14.3'te gösterilmiştir. Buradan görüldüğü gibi, zaman geçtikçe içinde bulunulan yılın satışlarındaki bir artışın, uzak gelecekte reklâm üzerindeki etkisi gözardı edilebilecek kadar küçüktür.

Daha önce belirttiğimiz gibi, kısmi regresyon katsayılarının güven aralıklarının bulunması ve önsav sınamalarının yapılmasında yeni bir ilke yoktur. Bunu göstermek için, x_t'nin katsayısı β'nın —yani hane başına perakende satışlardaki 1 birimlik artışın hane başına yerel reklâm harcamalarında aynı yılda yarattığı beklenen etkinin— %95 güven aralığını bulalım. Eş. (14.3.1)'den şunları biliyoruz:

ÇİZİM 14.3 Hane başına yerel reklâmda beklenen artışlar



$$b = 0.0185 \qquad s_b = 0.0028$$

$n = 22$ gözlem ve (gecikmeli bağımlı değişken de içinde) $K = 2$ "bağımsız değişken" olduğuna göre, çizelgelenmiş Student t dağılımından %95 aralık için şunu buluruz:

$$t_{n-K-1,\alpha/2} = = t_{19,0.025} = 2.093$$

Dolayısıyla, β'mn %95 güven aralığı

$$b - t_{n-K-1,\alpha/2}s_b < \beta < b + t_{n-K-1,\alpha/2}s_b$$

yani

$$0.0185 - (2.093)(0.028) < \beta < 0.0185 + (2.093)(0.028)$$

ya da

$$0.0126 < \beta < 0.0244$$

olur. Öyleyse, hane başına perakende satışlar, içinde bulunulan yılda 1 $ artarsa, aynı yılda hane başına yerel reklâm harcamalarında beklenen artışın %95 güven aralığı 0.0126 ile 0.0244 $ arasıdır.

Son olarak, gecikmeli bağımlı değişkenin katsayısı γ'nın 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayalım.

$$H_0: \ \gamma = 0$$

sıfır önsavı, satışlardaki herhangi bir artışın, reklâm harcamalarım yalnız içinde bulunulan yılda etkilediği, ama sonraki yıllarda etkilemediği anlamına gelir. Bunu

$$H_1: \ \gamma > 0$$

karşı önsavıyla sınayalım. Sınama, γ'nın en küçük kareler tahmini olan c ile onun standart hatasına dayanır. Tahmin edilmiş (14.3.1) regresyonundan şunları biliyoruz:

$$c = 0.480 \qquad s_c = 0.086$$

Sınama istatistiği, her zamanki gibi, katsayı tahminini standart hatasına oranı olup Çizelge 14.4'ten de doğrudan okunabilecek olan

$$\frac{c}{s_c} = \frac{0.480}{0.086} = 5.581$$

değeridir. Çizelgelenmiş Student t dağılımından da şunu buluruz:

$$t_{19,0.005} = 2.861$$

Demek ki sıfır önsavı, %0.5 anlamlılık düzeyinde bile çok açık olarak reddedilmektedir. Bu da, kullanılacak öbür tek bağımsız değişken, içinde bulunulan yılın hane başına perakende satışları ise, gecikmeli bağımlı değişkenin modele sokulması gereğinin çok güçlü olduğunu belirtmektedir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki model Petrol İhraç eden Ülkeler Örgütü'nün (OPEC) davranışını açıklamak üzere 1972-79 arası sekiz yıllık gözlemler kümesine uydurulmuştur:[3]

$$y = 0.37x_1 + 5.22x_2$$
$$(0.029)\quad (0.50)$$

Burada

y = İçinde bulunulan yıl ve bir önceki yıl OPEC fiyatları arasındaki fark, varil başına dolar
x_1 = İçinde bulunulan yıl spot fiyatıyla bir önceki yıl OPEC fiyatı arasındaki fark
x_2 = 1974'te 1, öbür yıllarda 0 değerini alan, 1974'teki petrol ambargosuna özgü etkiyi yansıtacak olan gölge değişken

Gölge değişkenin katsayısını sözle ve çizimle yorumlayın.

2. Ev satış fiyatlarını açıklamak üzere, 815 satışlık bir örnekleme aşağıdaki model uydurulmuştur:[4]

$$y = -1264 + 48.18x_1 + 3382x_2 - 1859x_3 + 3219x_4 + 2005x_5 \qquad \overline{R}^2 = 0.86$$
$$(0.91)\quad (515)\quad (488)\quad (947)\quad (768)$$

Burada

y = Ev satış fiyatı, dolar
x_1 = Yaşam alanı, ayakkare
x_2 = Garaj büyüklüğü, araba sayısı
x_3 = Evin yaşı, yıl
x_4 = Evde şömine varsa 1, yoksa 0 değeri alan gölge değişken
x_5 = Dış duvar kaplaması tuğlaysa 1, vinilse 0 değerinin alan gölge değişken

(a) x_4'ün tahmin edilen katsayısını yorumlayın.
(b) x_5'in tahmin edilen katsayısını yorumlayın.

---

[3] W. D. Nordhaus, "Oil and economic performance in industrial countries," *Brooking's Papers on Economic Activitiy* (1980), 341-88.
[4] B. A. Newsome, "Adjusting comparable sales for vinyl siding," *The Appraisal Journal, 59* (1991), 92-5.

(c) Öbür herşey aynıyken şöminenin satış fiyatı üzerindeki etkisinin %95 güven aralığını bulun.

(d) Duvar kaplamasının satış fiyatı üzerinde etkisi yoktur diyen sıfır önsavını, öbür her şey aynıyken, tuğla duvarlı evlerin vinil duvarlılara göre daha yüksek bir satış fiyatı olduğunu ileri süren karşı önsavla sınayın.

3. Otuziki büyük banka holdingine ilişkin verilere aşağıdaki model uydurulmuştur:[5]

$$y = 7.62 - 0.016x_1 + 1.23x_2 \qquad R^2 = 0.37$$

$$(0.008) \quad (0.496)$$

Burada

$y =$ Fiyat-kazanç oranı
$x_1 =$ Banka varlıklarının toplam büyüklüğü, milyar dolar
$x_2 =$ Bölgesel bankalar için 1, öbür bankalar için 0 değerini alan gölge değişken

(a) Gölge değişkenin tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.

(b) Gölge değişkenin anakütle katsayısının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını iki-yanlı karşı önsavla sınayın.

(c) $\beta_1 = \beta_2 = 0$ sıfır önsavını %5 anlamlılık düzeyinde sınayıp bulgunuzu yorumlayın.

4. Bir hukuk fakültesinin dekanı, fakültedeki başarıyı kestirmede yardımcı olabilecek önemli etmenleri değerlendirmek istemektedir. Rassal seçilmiş elli öğrenciden hukuk fakültesini bitirdikten sonra elde edilen verilere aşağıdaki model uydurulmuştur:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$$

Burada

$Y_i =$ Hukuk fakültesindeki genel başarıyı yansıtan not
$x_{1i} =$ Lisans bitirme notu (ABD'de hukuk fakültesine lisans öğrenimini bitirdikten sonra girilir, Ç.N.)
$x_{2i} =$ Hukuk Fakülteleri Giriş Sınavı sonucu
$x_{3i} =$ Öğrencinin referans mektubu olağandışı güçlüyse 1, değilse 0 değerini alan gölge değişken

Tahmin edilen regresyonun bilgisayar çıktısının aşağıda gösterilen bölümünü kullanıp bu çalışmanın bulgularını özetleyen bir rapor yazın.

---

[5] W. B. Harrison, D. R. Wood, "The development of a bank classification scheme through discriminant analysis," *Atlantic Economic Journal, 17*, no. 1 (1989), 35-46.

SOURCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F VALUE	R-SQUARE
MODEL	3	641.04	213.68	8.48	0.356
ERROR	46	1159.66	25.21		
CORRECTED TOTAL	49	1800.70			

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	6.512		
X1	3.502	1.45	2.419
X2	0.491	4.59	0.107
X3	10.327	2.45	4.213

5. Elli eyaletin verilerine aşağıdaki model uydurulmuştur:[6]

$$y = 13{,}472 + 547x_1 + 5.48x_2 + 493x_3 + 32.7x_4 + 5{,}793x_5 - 3{,}100x_6 \qquad R^2 = 0.54$$

$$(124.3)\ (1.858)\ (208.9)\ (234)\ \ (2{,}897)\ \ (1{,}761)$$

Burada

y = Eyalet yüksek mahkemesi başyargıcının yıllık ücreti
x_1 = Hukukçuların ortalama yıllık ücreti, bin dolar
x_2 = Geçen adli dönemde sonlandırılan dava sayısı
x_3 = Önceki kırk yılda yasa değişiklikleri nedeniyle eyalet mahkemelerinin gözden geçirmesi gereken süreç sayısı
x_4 = Eyalet yüksek mahkemesi başyargıcının görev süresi
x_5 = Eyalet mahkemesi yargıçları, vali ya da yargıçlar kurulu tarafından yahut yüksek mahkeme çoğunluk oyuyla görevden alınabiliyorsa 1, alınamıyorsa 0 değeri alan gölge değişken
x_6 = Yüksek mahkeme yargıçları oylamayla göreve geliyorsa 1, aksi halde 0 değeri alan gölge değişken

(a) x_5 gölge değişkeninin tahmin edilen katsayısını yorumlayın.
(b) x_6 gölge değişkeninin tahmin edilen katsayısını yorumlayın.
(c) x_5 gölge değişkeninin anakütle katsayısı 0'dır diyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla sınayın.
(d) x_6 gölge değişkeninin anakütle katsayısı 0'dır diyen sıfır önsavını, eksidir diyen karşı önsavla sınayın.
(e) β_1 anakütle katsayısının %95 güven aralığını bulup yorumlayın.

[6] G. M. Anderson, W. F. Shughart, R. D. Tollison, "On the incentives of judges to enforce legislative wealth transfers," *Journal of Law and Economics, 32* (1989), 215-28.

6. [*Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için bilgisayar programı gerektirir.*] Illinois Üniversitesi'nde yirmiyedi lisans öğrencisinin denek olarak yer aldığı bir araştırmada ortalama not (y), haftalık ders çalışma saati (x_1) sınavlara hazırlanmak için harcanan saat sayısı (x_3), içkievlerinde geçen haftalık saat sayısı (x_3), öğrencilerin ders kitabını okurken not çıkararak ya da altını çizerek çalışmaları (evet ise $x_4 = 1$, değilse 0), dönem başına alınan ders kredi saati sayısı (x_5) verileri derlenmiştir. Ortalama notun beş bağımsız değişkene göre regresyonunu tahmin edip bulgularınızı yorumlayın.

y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4.8	25	5	6	1	16
4.3	22	2	1	1	15
3.8	9	3	4	0	15
3.8	15	2	8	1	17
4.2	15	3	4	0	15
4.3	30	5	3	1	13
3.8	20	6	7	1	17
4.3	10	3	5	1	19
4.0	30	2	6	1	19
3.8	20	6	6	0	15
3.1	10	4	7	0	16
3.9	18	3	5	1	15
3.2	10	3	4	0	16
4.6	18	3	4	0	17
4.4	12	2	4	1	16
4.5	12	1	4	0	17
4.6	10	10	3	1	17
4.0	28	1	4	0	15
3.7	15	4	6	1	14
3.5	12	2	7	0	17
2.8	28	4	6	1	15
4.3	10	8	5	1	15
5.0	25	4	5	1	19
3.0	25	1	4	1	16
4.1	30	3	6	1	18
4.1	25	3	7	1	17
4.6	25	4	7	1	15

7. Bir danışmanlık şirketi yöneticilere finansal yönetim kursları vermektedir. Bu kursların sonunda, katılanlardan kursları genel olarak değerlendirmeleri istenmiştir. Yirmibeş kursluk bir örneklem için en küçük karelerle aşağıdaki regresyon tahmin edilmiştir:

$$y = 42.97 + 0.38x_1 + 0.52x_2 + 0.08x_3 + 6.21x_4 \qquad R^2 = 0.569$$

$$(0.29) \quad (0.21) \quad (0.11) \quad (3.59)$$

Burada

y = Kursa katılanların ortalama değerlendirme notu

x_1 = Kurs süresinin grup tartışma oturumlarıyla geçen süresi
x_2 = Katılımcı başına kursa hazırlanma malzemelerine harcanan para, dolar
x_3 = Katılımcı başına yiyecek içeceğe harcanan para, dolar
x_4 = Konuk konuşmacı çağrılmışsa 1, çağrılmamışsa 0 değeri alan gölge değişken

(a) x_4'ün tahmin edilen katsayısını yorumlayın.
(b) x_4'ün anakütle katsayısının 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavını, artı olduğunu söyleyen karşı önsavla sınayın.
(c) Belirlilik katsayısını yorumlayın, bu katsayıyı kullanarak, dört bağımsız değişkenin birlikte bağımlı değişkeni doğrusal olarak etkilemediğini söyleyen sıfır önsavını sınayın.
(d) β_2'nin %95 güven aralığını bulup yorumlayın.

8. Mikroiktisada giriş dersine kayıtlı öğrencilerin ondört haftalık standart bir ders almaları ya da üç haftalık yoğunlaştırılmış bir ders almaları durumundaki başarılarını karşılaştırmak üzere bir regresyon modeli tahmin edilmiştir. 350 öğrenciden derlenen verilerle şu model tahmin edilmiştir:[7]

$$y = -0.7052 + 1.4170x_1 + 2.1624x_2 + 0.8680x_3 + 1.0845x_4$$
$$\qquad\qquad (0.4568) \quad (0.3287) \quad (0.4393) \quad (0.3766)$$
$$+ 0.4694x_5 + 0.0038x_6 + 0.0484x_7 \qquad R^2 = 0.344$$
$$(0.0628) \quad (0.0094) \quad (0.0776)$$

Burada

y = Dersi tamamladıktan sonra iktisadı anlama konusunda yapılan standart bir sınavda alınan not
x_1 = Üç haftalık ders alınmışsa 1, ondört haftalık ders alınmışsa 0 değeri alan gölge değişken
x_2 = Öğrencinin genel not ortalaması
x_3 = Dersi veren iki öğretim üyesini ayırdetmek için 0 ya da 1 değeri alan gölge değişken
x_4 = Öğrenci erkekse 1, kızsa 0 değeri alan gölge değişken
x_5 = Dersi almadan önce iktisadı anlama konusunda yapılan standart bir sınavda alınan not
x_6 = Öğrencinin tamamladığı kredi saati sayısı
x_7 = Öğrencinin yaşı

Tahmin edilmiş bu regresyondan neler öğrenilebileceğini tartışan bir rapor yazın.

---

[7] L. J. Van Scyoc, J. Gleason, "Traditional or intensive course lengths? A comparison of outcomes in economics learning," *Journal of Economic Education, 24* (1995), 15-22.

9. Bir pazar araştırmacısı, üniversite öğrencilerinin giyime harcadığı yıllık ortalama para miktarıyla ilgilenmektedir. 25 yılı kapsayan yıllık verilerden en küçük karelerle tahmin edilen aşağıdaki regresyon elde edilmiştir:

$$y_t = 50.72 + 0.142x_{1t} + 0.027x_{2t} + 0.432y_{t-1}$$
$$(0.047) \quad (0.021) \quad (0.136)$$

Burada

$y =$ Öğrenci başına giyim harcaması, dolar
$x_1 =$ Okul ücret, barınma, besin ödemelerinden sonra öğrenci başına harcanabilir gelir, dolar
$x_2 =$ Öğrencilere yönelik pazarda giyim reklâmı endeksi

(a) Öbür her şey aynıyken, reklâm bu pazarda giyim harcamasını etkilemez diyen sıfır önsavım, açıkça görülen karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın.
(b) Anakütle regresyonunda x_1'in katsayısının %95 güven aralığını bulun.
(c) Reklâm sabit tutulurken, öğrenci başına harcanabilir gelirde 1 $'lık artışın zaman içinde giyim harcamaları üzerindeki beklenen etkisi ne kadardır?

10. [Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için ya Ek A13.1'deki bilgileri ya da bir bilgisayar programı gerektirir.] Bölüm 12'de, Çizelge 12.5'teki verileri kullanıp şu regresyon modelini tahmin etmiştik:

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Burada

$Y_t =$ Hane başına perakende satışlar
$x_t =$ Hane başına harcanabilir gelir

Aynı verileri şu modeli tahmin etmede kullanın:

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ve $\gamma = 0$ diyen sıfır önsavını sınayın.

11. [*Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, İngiltere'de milyon sterlin olarak para miktarı (y), milyon sterlin olarak gelir (x_1) ve yerel yönetimlerin faiz oranı (x_2) konusunda yirmisekiz tane üçer aylık gözlem içermektedir.[8] Şu modeli tahmin edip bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

---

[8] T. C. Mills, "The functional form of the UK demand for money," *Applied Statistics, 27* (1978), 52-57.

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
17,602.5	14,744	0.0805	17,965.1	15,950	0.0582
17,746.9	14,516	0.0828	18,651.9	15,957	0.0482
17,769.0	14,815	0.0781	19,352.7	16,031	0.0480
17,909.1	14,900	0.0738	20,446.1	16,295	0.0513
17,855.0	14,829	0.0798	20,835.3	16,151	0.0762
17,470.8	14,900	0.0914	21,827.4	16,803	0.0791
17,352.0	14,980	0.0957	22,375.2	17,528	0.1009
17,481.6	15,085	0.0922	23,217.0	17,301	0.0919
17,240.2	14,973	0.0910	24,011.6	17,503	0.1173
17,467.2	15,359	0.0813	24,975.2	17,455	0.1411
17,619.7	15,362	0.0754	24,736.3	16,620	0.1566
17,683.8	15,540	0.0718	23,407.3	17,779	0.1333
17,954.1	15,404	0.0753	23,560.7	18,040	0.1313
17,734.9	15,649	0.0666	23,421.2	17,827	0.1263

12. [*Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Standard and Poors' 500 pay senedinin pazar getirisi (x) ile sigorta dışı özel emeklilik fonları içinde yıl sonu pazar değerinden pay senedi portföyünün yüzdesi (y) konusunda 25 yıl boyunca derlenmiş verileri göstermektedir.[9] Şu regresyon modelini tahmin edip bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

YIL	y	x	YIL	y	x	YIL	Y	x
1	30	31.6	10	52	16.5	18	73	19.0
2	32	6.6	11	55	12.5	19	68	–14.7
3	30	–10.8	12	53	–10.1	20	56	–26.5
4	38	43.4	13	59	24.0	21	60	37.2
5	43	12.0	14	63	11.1	22	62	23.8
6	43	0.5	15	63	–8.5	23	56	–7.2
7	49	26.9	16	62	4.0	24	53	6.6
8	45	–8.7	17	68	14.3	25	55	18.7
9	49	22.8						

13. [*Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Kanada'da gelir (y) ile para arzı (x) için yirmi tane üçer aylık gözlem içermektedir.[10] Şu modeli tahmin edip bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

[9] W. S. Bauman, C. M. McLaren, "An asset allocation model for active portfolios," *Journal of Portfolio Management, 8*, no. 2 (1982), 76-86'dan alınmıştır.

[10] Veriler C. Hsiao, "Autoregressive modeling of Canadian money and income data," *Journal of the American Statistical Association, 74* (1979), 553-60'tan alınmıştır.

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y	x	y	x	y	x
116,652	42,011	153,560	56,512	191,592	74,544
120,392	43,313	157,328	59,243	195,600	77,300
124,572	44,808	161,740	60,783	201,204	80,021
132,624	47,324	168,732	63,738	204,160	83,482
139,656	50,094	173,980	66,338	210,780	85,868
145,320	52,117	182,744	68,694	214,712	87,911
150,164	54,253	190,172	72,238		

14. [*Bu soru çoklu regresyon hesaplamasını yapabilmek için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Avustralya'da şimdiki evlilikte ilk doğumun canlı olması (y) ve daha önceki evlilik sayısı (x) için yirmi yıllık gözlemler içermektedir.[11] Şu modeli tahmin edip bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y	x	y	x	y	x
65,792	63,488	68,581	72,833	95,418	105,235
65,431	65,471	70,197	77,670	91,683	106,337
66,717	65,956	73,462	84,850	85,707	102,106
66,890	65,902	76,127	87,110	86,248	99,950
70,177	67,077	81,341	90,608	81,543	98,031
68,310	68,609	85,650	96,553	78,086	99,010
69,130	70,849	88,412	102,186		

14.4 DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLER

Buraya kadarki regresyon modeli tartışmamızda bağımlı bir değişkenle bağımsız değişkenler kümesi arasındaki ilişkinin *doğrusal* olduğunu varsaydık. Doğrusallık varsayımı çoğu zaman, hiç olmazsa bağımsız değişkenlerin geçerli değer aralığı içinde, çok daha karmaşık bir gerçekliğin yaklaşık olarak kolayca çözümlenmesini sağlar. Ancak sık sık bu doğrusallık varsayımından vazgeçmek hem gerekir, hem de istenir. Zaman zaman sözkonusu kuram, veriler ya da her ikisi birden *doğrusal olmayan* bir kalıbın daha uygun olacağını söyler. Güçlük

[11] Veriler J. McDonald, "Modeling demographic relationships: An analysis of forecast functions for Australian births," *Journal of American Statistical Association, 76* (1981), 782-92'den alınmıştır.

şuradadır ki bu yolla ufkumuzu bir kez açtık mı, sonsuz sayıda doğrusal olmayan kalıp olanaklı duruma geçer. Üstelik, işletmecilik ve iktisat uygulamalarında, ilgili kuram pek ender olarak güvenilir belli bir model ileri sürer. Yine de, zaman zaman doğrusal olmayan modeller kurulur ve çoğu zaman da bu, buraya kadar gördüğümüz tekniklerde çok küçük düzeltmelerle yapılabilir.

Bunu göstermek için bir bağımlı değişken Y ile tek bir bağımsız değişken X_1 durumunu ele alalım. Bölüm 12'deki doğrusal regresyon modeli şöyleydi:

$$Y_i = \alpha + \beta x_{1i} + \varepsilon_i$$

Olanak içindeki bir almaşık ikinici dereceden bir bağımlılık —yani Y'nin hem X, hem de X^2'ye bağımlılığını— ileri sürmek olabilir. Bu durumda model şöyle olur:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{1i}^2 + \varepsilon_i \qquad (14.4.1)$$

Ama bu da üç bilinmeyen katsayı (α, β_1, β_2) içeren çoklu bir regresyon denkleminden başka bir şey değildir. Bu katsayılar da Bölüm 13'te açıklanan süreçlerin tıpkısıyla en küçük kareler kullanılarak tahmin edilebilir. Bu model basitçe, bağımlı bir değişkenin, x_{1i} ve x_{1i}^2 gibi bir çift "bağımsız" değişkenle ilişkilendirildiği bir model olarak ele alınır. Bu noktayı iyice görünür kılmak için Eş. (14.4.1)'i şöyle yazabiliriz:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada:

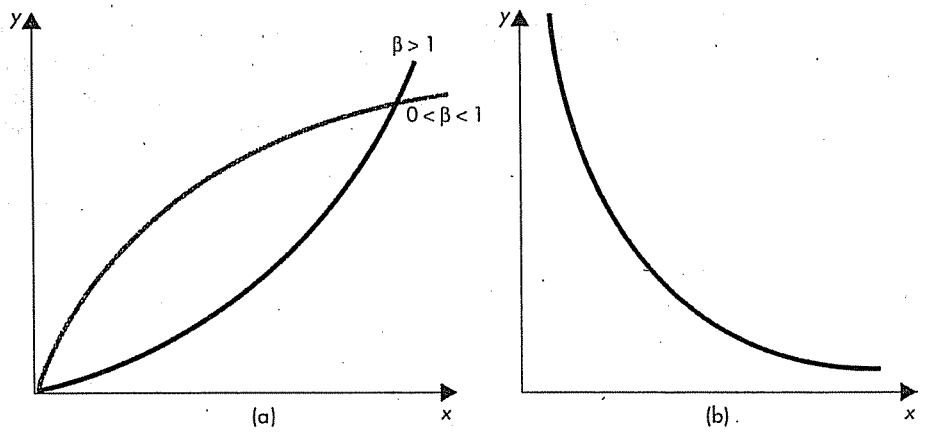
$$x_{2i} = x_{1i}^2$$

(14.4.1) modelinin anakütle katsayıları β_1 ile β_2'nin güven aralıkları ve önsav sınamaları bilinen yolla elde edilir. Özellikle, doğrusal yerine ikinci dereceden bir kalıp kullanmanın istenirliği, $\beta_2 = 0$ sıfır önsavı sınanarak anlaşılabilir. Bu önsav gerçekten doğruysa, (14.4.1) modeli doğrusal modele dönüp basitleşir.

İşletmecilik ve iktisat uygulamalarında doğrusal modelin daha sık rastlanan bir almaşığı **log doğrusal model**dir. Bu kalıpta doğrusal ilişkinin, değişkenlerin kendi aralarında değil *logaritma*ları arasında olduğu ileri sürülür. Tek bir bağımsız değişkenle bu model şöyle yazılır:

$$\log Y_i = \alpha + \beta \log x_{1i} + \varepsilon_i$$

Bu tür modeller en küçük karelerle tahmin edilip Bölüm 12'de açıklanan yöntemlerle çözümlenir. Yapılacak bütün iş önce bağımlı ve bağımsız değişkenlerin logaritmalarını almak, sonra bu büyüklüklerle çözümlemenin gerisini getirmektir.



ÇİZİM 14.4 *y* ile *x* arasında log doğrusal ilişkiler

Log doğrusal model bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değerleri arasında, Çizim 14.4'te sergilendiği gibi, eğrisel ilişkiler gösterir. Bu çizimin (a) bölümü, bağımsız değişkendeki bir artışın bağımlı değişkende bir artış beklentisine yol açtığı durumu gösterirken, (b) bölümü ilk değişkendeki bir artışın ikinci değişkende bir azalış beklentisi yarattığı durumu gösterir. Log doğrusal model kurma olanağını farketmenin bir yolu, verilerin serpilme çizimini düzenleyip Çizim 14.4'teki eğrilerin, doğrusal kalıba göre görsel açıdan daha uygun bir ilişki gösterip göstermediğine bakmaktır.

Log doğrusal model çok bağımsız değişkenli duruma genelleştirilebilir. Aşağıdaki çerçevede gösterdiğimiz gibi, bu modelin anakütle katsayılarının yorumu, Bölüm 13'teki çoklu regresyon modelinden biraz farklıdır.

Log Doğrusal Model

Bir Y bağımlı değişkeni, $X_1, X_2, \ldots, X_K$ gibi K tane bağımsız değişkenle ilişkili olsun. Bağımsız değişkenler $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ki}$ belli değerlerini alırsa, anakütle log doğrusal modeli şu biçimdedir:

$$\log Y_i = \alpha + \beta_1 \log x_{1i} + \beta_2 \log x_{2i} + \cdots + \beta_K \log x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Burada $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ sabit sayılar, ε_i ortalaması 0 olan rassal bir değişkendir.

β_j katsayısı, öbür bütün bağımsız değişkenlerin değerleri sabit tutulurken, X_j bağımsız değişkeninde %1'lik bir artışın bağımlı değişkende yol açtığı beklenen *yüzde* değişmedir.

Log doğrusal modelin katsayılarının yorumu, bu kalıbı bazı uygulamalarda çekici kılan bir özelliği öne çıkarır. Değeri hangi düzeyde olursa olsun bağımsız değişken değerinde %1 artışın, bağımlı değişkende sabit bir *yüzde* değişmeye yol açması bekleniyorsa, log doğrusal model seçilen fonksiyonel kalıp olabilir.

ÖRNEK 14.1

Mali kuruluşlarla ilgili bir çalışmada,[12] seksenyedi tane üçer aylık gözleme aşağıdaki model uydurulmuştur:

$$\log y = 0.47 + \underset{(0.13)}{0.31 \log x_1} + \underset{(0.21)}{0.47 \log x_2} \qquad \overline{R}^2 = 0.86$$

Burada

$y =$ Verilen krediler
$x_1 =$ Sermaye teçhizatına yapılan harcamalar
$x_2 =$ Çalışanlara ödenen maaş ve ücretler

olup katsayıların en küçük kareler tahminleri altında ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart hatalardır.

Kısmi regresyon katsayılarının verilen tahminleri şöyle yorumlamr:

(i) Maaş ve ücret tutarı sabitken, sermaye teçhizatı harcamalarında %1 artış, verilen kredilerde %0.31'lik bir artış beklentisine yol açar.
(ii) Sermaye harcamaları sabitken, maaş ve ücret tutarında %1 artış, verilen kredilerde %0.47'lik bir artış beklentisine yol açar.

Regresyon katsayılarının güven aralıkları bildik yolla hesaplamr. Bunu örneklemek için β_1'in %95 güven aralığını bulalım. Aralık şu biçimdedir:

$$b_1 - t_{n-K-1,\,0.025}\, s_{b_1} < \beta_1 < b_1 + t_{n-K-1,\,0.025}\, s_{b_1}$$

Burada

$$n = 87 \qquad K = 2 \qquad b = 0.31 \qquad s_{b_1} = 0.13$$

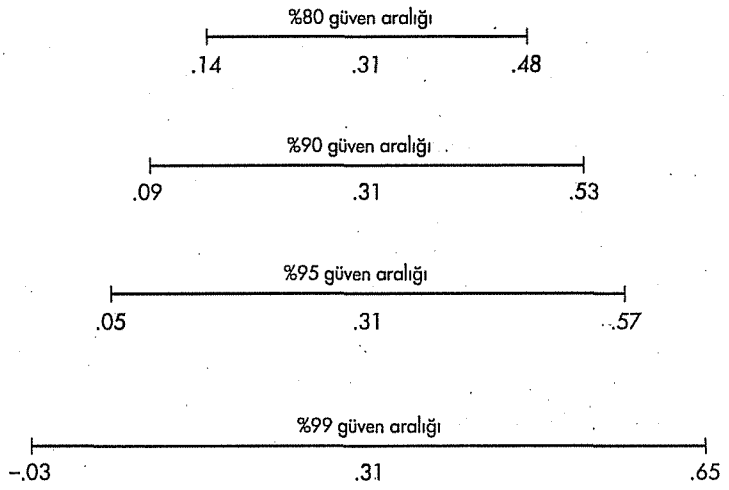
olup Ek Çizelge 6'dan ara değer çıkarsamasıyla şu bulunur:

$$t_{84,\,0.025} \approx 1.99$$

Bu durumda güven aralığımız şudur:

$$0.31 - (1.99)(0.13) < \beta_1 < 0.31 + (1.99)(0.13)$$

[12] Y. L. Mahajan, "A macroeconometric model of the credit unions," *Atlantic Economic Journal, 9*, no. 2 (1981), 40-48'den alınmıştır.



ÇİZİM 14.5 Ücret ve maaş tutarı sabitken sermaye harcamalarında %1 artış sonucunda kredilerdeki beklenen yüzde artışın %80, %90, %95, %99 güven aralıkları

ya da

$$0.05 < \beta_1 < 0.57$$

Şu halde, ücret ve maaş tutarı sabitken sermaye harcamalarında %1 artıştan kaynaklanan kredilerdeki beklenen yüzde artışın %95 güven aralığı %0.05 ile %0.57 arasıdır. Çizim 14.5, ayrıca %80, %90, %99 güven aralıklarını da göstermektedir.

14.5 MODEL KURMA SAPMASI

Gerçek yaşam davranışını yeterince yansıtan bir istatistik model kurmak ince ve güç bir iştir. Hiçbir basit modelin, ilgilenilen bir büyüklüğün gerçek belirleyicilerinin doğasını tam tamına betimleyemeyeceği açıktır. Model kurmanın amacı, arkada yatan karmaşık gerçeklikle uyuşmazlığı pek fazla olmayan yalın bir gösterim bulmaya çalışmaktır. Model kalıbının basitliği bir üstünlük olmakla birlikte modelin fiili durumdan önemli ölçüde farklı olması, incelenen sistemin davranışına ilişkin ciddi biçimde yanlış sonuçlara yol açabilir.

Model oluşturmamn, Altbölüm 14.4'te kısaca değinilen önemli bir yönü, bağımlı ve bağımsız değişkenleri birbirine bağlayan fonksiyon kalıbının uygun biçimde belirlenmesidir. İleri sürülen kalıp, gerçekteki kalıptan önemli ölçüde sapıyorsa, tahmin edilen modelden çıkarılan sonuçların değeri kuşkulu olacaktır.

Model oluşturmanın başka bir önemli bölümü, bir regresyon denklemindeki hata terimlerinin istatistik özelliklerine ilişkin olarak yapılan varsayımlardır. Buraya kadarki çözümlemelerimizde, bu hata terimlerinin hepsinin varyanslarının eşit olduğunu ve birbirlerinden bağımsız olduklarını varsaydık. Eğer bu varsayımlar gerçekten doğruysa, en küçük kareler yöntemi ve onu izleyen çıkarsama işlemleri, incelenen süreci öğrenmek için elverişlidir. Ama bu varsayımlar ciddi biçimde çiğneniyorsa, durum böyle olmaktan çıkar. Model oluşturmanın bu yönü Altbölüm 14.7 ile 14.8'de daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Bu altbölümde, modeli yanlış oluşturmanın belli bir biçiminden söz edecek, bunun yaratabileceği sonuçları özetleyeceğiz. Bir araştırmacı bir regresyon modelini belirlerken, ilgilenilen bağımlı değişkenle onun bütün *önemli* belirleyicileri arasında ilişki kurmaya çalışır. Böylelikle, eğer uygun bir kalıp olarak doğrusal model seçilmişse, ilgilenilen bağımlı değişkeni hatırı sayılır ölçüde etkileyebilecek bütün büyüklükler bağımsız değişkenler arasına katılmak istenir.

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

regresyon modeli biçimlendirilirken, $X_1, X_2, \ldots, X_K$ bağımsız değişkenler kümesinin, Y bağımlı değişkeninin davranışını belirgin biçimde etkileyen *bütün* büyüklüklerin içerildiği örtük bir biçimde varsayılır. Herhangi bir uygulama probleminde bağımlı değişkeni etkileyen başka etmenlerin bulunacağı kesindir. Bu etmenlerin ortak etkisi ε_i hata teriminde toplanacaktır. Ama önemli hiçbir açıklayıcı değişkenin bağımsız değişkenler kümesinin dışında bırakılmaması çok daha önemlidir.

Dışlanan değişkenlerin regresyon modeline katılanlarla ilişkisiz olduğu çok özel (ve ender) durum bir yana bırakılırsa, bu tür yanlış model kurma çok ciddi sonuçlar yaratabilir. Özellikle en küçük kareler tahminleri genellikle sapmalı olur ve güven aralıkları ya da önsav sınamalarından türetilen bildik çıkarsama söylemleri ciddi biçimde yanıltıcı olabilir.

Bu özel model kurma sapmasını açıklayabilmek için, Bölüm 13'te kullanılan bir örneği yeniden ele alalım. Çizelge 13.1, tasarruf sandıklarının kâr marjı yüzdesi (y), mevduata oranla net gelir yüzdesi (x_1), şube sayısı (x_2) için 25 yıllık veri içermektedir. Altbölüm 13.2 ile 13.6'da kârı gelire ve şube sayısına bağlayan regresyon denklemini şöyle tahmin etmiştik:

$$y = 1.565 + 0.237x_1 - 0.000249x_2 \quad R^2 = 0.87 \qquad (14.5.1)$$
$$(0.079)\ (0.0555)\ (0.0000320)$$

Bu çözümlemeden çıkan bir sonuç şuydu: Şube sayısı sabitken, mevduata göre net gelirde 1 birim artış, kâr marjında 0.237 birim artışa yol açar.

Şimdi diyelim ki biz asıl net gelirlerin kâr marjı üzerindeki etkisiyle ilgileniyoruz. Bu soruna bir yaklaşım yolu, yirmibeş gözlem çiftini kullanarak kâr

marjının net gelire göre regresyonunu tahmin etmek olabilir. Böyle bir çözümleme bize şu modelin verilere uyduğunu gösterir:

$$y = 1.326 - 0.169x_1 \quad R^2 = 0.50 \qquad (14.5.2)$$
$$(0.139)\ (0.036)$$

Verilere uydurulmuş (14.5.1) ve (14.5.2) modellerini karşılaştırırsak hemen görebileceğimiz gibi, şube sayısını çözümlemede gözardı etmek, bağımlı değişkenin değişkenliğinin regresyonla açıklanabilen bölümü olan R^2'yi önemli ölçüde düşürmektedir.

Ancak daha ciddi bir sonuç daha vardır. Verilere uyan (14.5.2) modeli, mevduata oranla net gelirlerde 1 birim artışın, kâr marjında 0.169 birim azalma beklenmesi gerektiğini söylemektedir. Üstelik, bu katsayı tahmini kendi standart hatasıyla karşılaştırılırsa, değişkenler arasında ilişki yoktur diyen sıfır önsavının, net gelirde bir artış kâr marjında *azalma*ya neden olur diyen karşı önsav lehine rahatlıkla reddedildiği görülmektedir. Oysa böyle bir sonuç kesinlikle sağduyuya aykırıdır! Bu durum bütünüyle olanaksız olmamakla birlikte, öbür her şey aynıyken, kuşkusuz, yüksek gelirlerin yüksek kârlarla birlikte bulunmasını bekleriz. Ama (14.5.2) modelinin tahmin edildiği 25 yıllık dönem boyunca öbür her şey aynı *kalmadı*. Özellikle de önemli olabilecek başka bir değişken —tasarruf sandıkları şube sayısı— bu dönem boyunca farkedilir biçimde değişti. Bu ilgili değişken (14.5.1)'de regresyon çözümlemesine katılınca tam tersi bir sonuca ulaşıldı. Buradan anlaşıldığı ve tahmin edilmiş olabileceği gibi, şube sayısının etkisi dikkate alınınca, kâr ile net gelir arasında aynı yönlü ilişki vardır.

Bu örnek durumu gayet iyi açıklamaktadır. Önemli bir açıklayıcı değişken regresyon modeline katılmazsa, öbür bağımsız değişkenlerin etkileri konusunda çıkarılabilecek sonuçlar ciddi biçimde yanıltıcı olabilir. Bu özel durumda, ilgili bir değişkenin işin içine katılmasıyla, ters yönlü anlamlı bir ilişki izleniminin pekâlâ aynı yönlü anlamlı bir ilişki sonucuna dönüşebildiğini gördük. Çizelge 13.1'deki verilere şöyle bir gözatmak başka açılımlar getirebilir. En azından dönemin ikinci bölümünde, kâr marjı düşerken net gelirin yükselmiş olması bu iki değişken arasında ters yönlü bir ilişki varmış gibi bir izlenim yaratmaktadır. Ama verilere biraz daha bakınca, aynı dönemde şube sayısında bir artış görülmektedir, bu da bu değişkenler araşında aynı yönlü ilişki vardır izlenimi vermektedir. Bu iki bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki tekil etkilerini ayrıştırmanın tek geçerli yolu, bunları bir regresyon modeline birlikte katmaktır. Bu örnek, birden çok geçerli bağımsız değişken olduğunda basit doğrusal regresyonlar yerine çoklu regresyon modeli kullanmanın önemini gözler önüne sermektedir.

14.6 ÇOKLU DOĞRUSALLIK

Bir regresyon modeli doğru kurulmuşsa, en küçük kareler tahminleri, Gauss-Markov teoremi bağlamında, bulunabilecek en iyi tahminlerdir. Yine de bazı durumlarda çok iyi olmayabilirler!

Bunu açıklamak için yine Bölüm 13'teki tasarruf sandıkları örneğine dönelim. Bu çalışmada mevduata oranla net gelirin, tasarruf sandıkları şube sayısının yanısıra bunlara karşılık gelen kâr marjının yirmibeşer tane yıllık değerlerini gözlemledik. Bu veriler daha sonra, çoklu bir regresyon modeli aracılığıyla, iki bağımsız değişkenin kâr marjı üzerindeki ayrı ayrı etkilerini tahmin etmekte kullanıldı. Şimdi diyelim ki bu sorunu incelemek isteyen siz, kendi *deneyini tasarlayabilen* bir laboratuvar bilimcisi konumundasımz. Yani, doğanın size verdiğiyle yetinmek yerine, bağımsız değişkenler için yirmibeş çift gözlemi serbestçe seçebilir, bu seçimlerinizin kâr marjı üzerindeki etkilerini inceleyebilirsiniz. Olanak içindeki en iyi seçim, bir yerde çözümlemenin amaçlarına bağlı olup istatistikte ilginç bir konu olan **deney tasarımı** ile ilgilidir. İşletmecilik ve iktisat uygulamalarında pek ender olarak bir tasarım seçebildiğimizden, bu soruyu daha fazla incelemeyeceğiz. Ancak, yapabileceğiniz en kötü seçimlerin neler olabileceğini sormak öğretici olabilir.

Eğer net gelir (x_1) ve şube sayısı (x_2) değer çiftlerini seçebiliyorsanız en aptalca seçimler neler olabilirdi? En açık yanıt, bağımsız değişkenler için her defasında aynı değer çiftini seçmektir. Açıktır ki yirmibeş deneyden her biri, net gelir 3.0, şube sayısı 7,000 iken yapılırsa bu etmenlerin kâr marjı üzerindeki etkilerine ilişkin bir şey öğrenemeyiz. Bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkileri konusunda bir şey öğrenmenin tek yolu bunların değerlerini oynatmaktır.

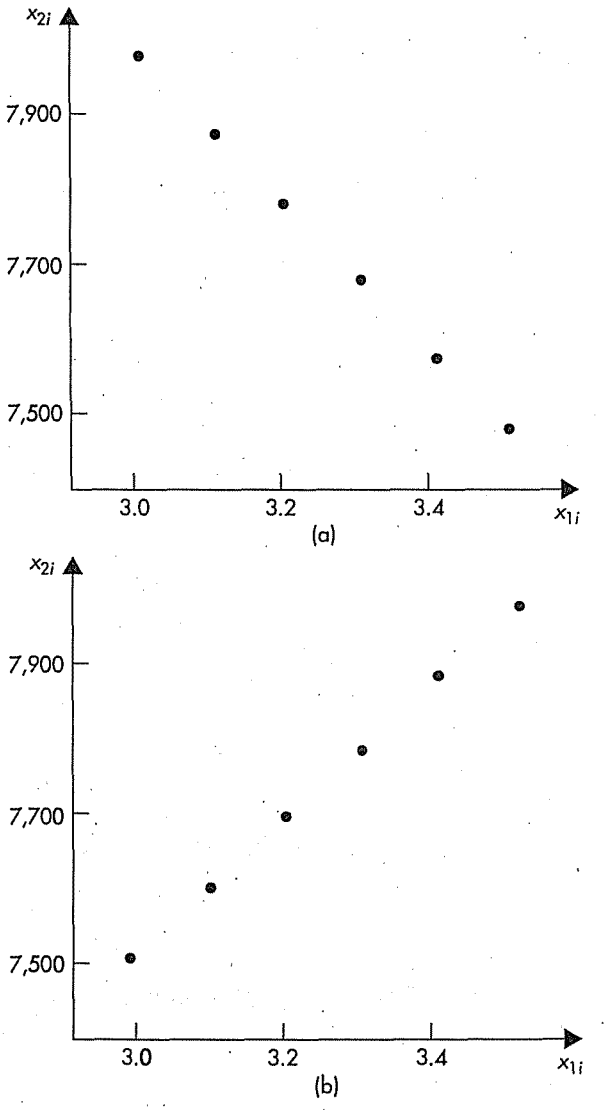
Aşağıdaki gibi süregiden bir seçim de aynı derecede saçmadır:

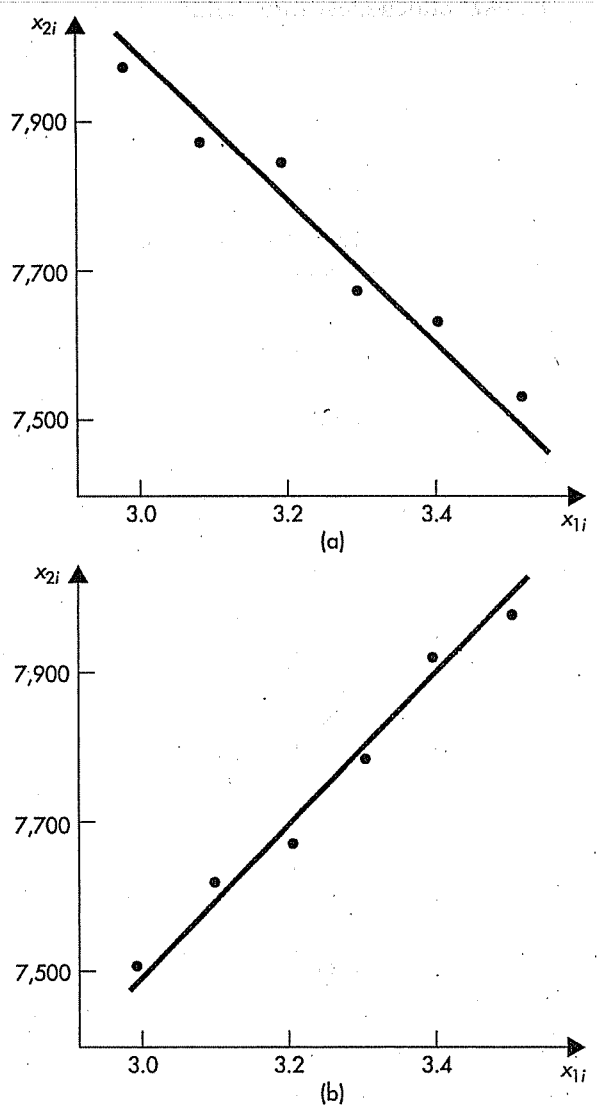
x_{1i}	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
x_{2i}	8,000	7,900	7,800	7,700	7,600	7,500

Burada bağımsız değişkenlerin değerleri bir deneyden ötekine değişmektedir ama bu uygun adım bir değişmedir. Gerçekten de bu değerler, Çizim 14.6(a)'daki gibi (aşağı doğru eğimli) bir doğrunun üzerindeki noktaları gösterirler. [Eğer veri noktaları bu çizimin (b) bölümündeki gibi yukarı doğru eğimli bir doğrunun üzerinde sıralanırsa da özünde benzer bir durum doğar.] Böylece, çizelgede verilen özel tasarımda ne zaman x_1 artarsa, x_2 de buna orantılı olarak azalır. Böyle bir seçimin kısırlığını görebilmek için diyelim ki net gelirde bir artış ve aynı zamanda şube sayısında bununla ilişkili bir azalış, kâr marjında bir artışa yol açsın. Kâr marjındaki bu artışı hangi etmene bağlardınız? Bunun nedeni gelirdeki artış mıdır, şube sayısındaki azalış mıdır, yoksa ikisinin bir bileşimi midir? Kısa yanıt bunun bilinemeyeceğidir! Bağımsız değişkenlerin etkile-

rini ayrı ayrı değerlendirmek istiyorsak bunların bütün deney boyunca birlikte hareket etmemeleri zorunludur.

Çizim 14.6 Tam çoklu doğrusallık gösteren iki tasarım





ÇİZİM 14.7 Çoklu doğrusallık gösteren tasarım örnekleri

Aslında, az önce verilen aşırı uç örnekte

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \qquad (14.6.1)$$

regresyonunun β_1 ve β_2 katsayılarını en küçük karelerle tahmin etmeye kalksak bunun olanaksız olduğunu görürüz. Çünkü β_1 ve β_2, bağımsız değişkenlerin ayrı ayrı etkilerinin ölçüleridir ve veriler bu iki büyüklüğe ilişkin işe yarar hiçbir bilgi içermezler. Çoklu regresyon çözümlemesinin Altbölüm 13.3'te açıklanan standart varsayımlarından beşincisi işte bu tür durumları dışlamak için tasarlanmıştır.

Öyleyse bu seçimin çok kötü bir seçim olduğu ortadadır. Daha az aşırı olan bir uç örnek Çizim 14.7'de gösterilmiştir. Burada tasarım noktaları doğrunun tam üstünde değil ama ona çok yakın sıralanmıştır. Bu durumda deneysel sonuçlar, bağımsız değişkenlerin ayrı ayrı etkilerine ilişkin *biraz* bilgi verebilir ama çok fazla değil. Şimdi (14.6.1)'deki β_1 ve β_2 katsayılarının en küçük karelerle tahminleri hesaplanabilir ama bunlar pek hassas olmaz. Bu hassas olmama tahmin edilen katsayıların çok büyük standart hatalarında yansır, sözkonusu ilişkiler çok güçlü bile olsa istatistik bakımından anlamlı sonuçlar vermez. Bu olguya **çoklu doğrusallık** denir.

İşletmecilik ve iktisat konularındaki uygulamaların büyük çoğunluğunda, deneyleri tasarlama olanağından yoksunuz. Tersine, kaderin bize vermiş olduğu belli bir deney tasarımıyla sınırlı olarak çalışmak zorundayız. Öyleyse çoklu doğrusallık bu çerçevede bizim kendi kötü tasarım seçimimizden değil, sınırları içinde çalışmak zorunda kaldığımız tasarımdan kaynaklanan bir sorundur. Daha genel olarak çeşitli bağımsız değişkenler içeren bir regresyon denkleminde çoklu doğrusallık sorunu, bağımsız değişkenler arasındaki karşılıklı güçlü ilişkilerden doğar. Aslında bu, Altbölüm 13.3'teki varsayım 5'in neredeyse çiğnenmiş olduğu bir durumdur. İlgilenilen anakütle parametresiyle ilgili fazla bilgi vermeyen verilerin varlığı diye özetlenebilecek bu sorunun en cansıkıcı yanı, çoğunlukla bunu düzeltecek pek bir şey yapılamamasıdır.[13] Yine de bu sorunun varlığından haberdar olmak ve ortaya çıkıp çıkmadığını gözlemek önemlidir. Çoklu doğrusallığın varolabileceğinin en açık göstergesi, bağımsız değişkenler kümesinin bir bütün olarak bağımlı değişken üzerinde hatırı sayılır bir etki göstermesine karşın, bunlara önsav sınamalarıyla tek tek bakıldığında hepsinin istatistik bakımından anlamsız çıkmasıdır. Bu gibi durumlarda hemen belli bir bağımsız değişkenin bağımlı değişkeni etkilemediği sonucuna varmak pek akıllıca olmaz. Bunun yerine kümenin bir bütün olarak açıkça etkili olduğunu, ama verilerin, değişkenlerin tek tek etkilerini belli bir hassaslıkla birbirinden ayırmaya yetecek kadar bilgi vermediğini kabul etmek daha doğru olur.

[13] Burada ayrıntılı olarak ele almayacağımız bir yaklaşım, en küçük kareleri bir yana bırakıp sapmalı ama en küçük karelere göre daha küçük varyanslı tahmin ediciler veren başka süreçler kullanmak olabilir.

ALIŞTIRMALAR

15. Ailelerin tatil gezisi harcamalarını belirleyen etmenlere ilişkin bir çalışmada bir örneklemdeki 2,246 hane halkından veri derlenmiştir.[14] Tahmin edilen model şöyledir:

$$\log y = -4.054 + 1.1556 \log x_1 - 0.4408 \log x_2 \qquad R^2 = 0.168$$
$$(0.0546) \qquad (0.0490)$$

Burada

$y =$ Tatil gezisi harcaması
$x_1 =$ Yıllık toplam tüketim harcaması
$x_2 =$ Hanedeki kişi sayısı

Katsayı tahminlerinin altında ayraç içindeki sayılar ilgili standart hatalardır.

(a) Tahmin edilmiş kısmi regresyon katsayılarını yorumlayın.
(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(c) Öbür her şey aynıyken, yıllık toplam tüketim harcamasındaki %1 artıştan kaynaklanan tatil gezisi harcamasındaki yüzde artışın %95 güven aralığını bulun.
(d) Modelin doğru kurulduğunu varsayarak, öbür her şey aynıyken, hanedeki kişi sayısı tatil gezisi harcamasını etkilemez diyen sıfır önsavını, hane kalabalıklaştıkça tatil gezisi harcamasının arttığını söyleyen karşı önsavla %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.

16. Büyükşehir alanlarındaki 322 süpermarketten oluşan bir örneklemden aşağıdaki model tahmin edilmiştir:[15]

$$\log y = 2.921 + 0.680 \log x \qquad R^2 = 0.19$$
$$(0.077)$$

Burada

$y =$ Marketin büyüklüğü
$x =$ Marketin bulunduğu posta kodu bölgesinde ortanca gelir

(a) $\log x$'*in tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.*
(b) Gelirin market büyüklüğü üzerinde hiçbir etkisi yoktur diyen sıfır önsavını, yüksek gelir büyük marketlerle ilişkilidir diyen karşı önsavla sınayın.

17. Bir tarım iktisatçısı, ABD'de bir yılda tüketilen ton cinsinden sığır eti miktarının (y), libre başına dolar cinsinden sığır eti fiyatına (x_1), libre başına dolar cinsinden domuz eti fiyatına (x_2), libre başına dolar cinsinden tavuk eti fiyatına (x_3), bin

---

[14] R. P. Hagermann, "The determinants of household vacation travel: Some emprircal evidence," *Applied Economics, 13* (1981), 225-34.
[15] J. M. MacDonald, P. E. Nelson, "Do the poor still pay more? Food price variation in large metropolitan areas," *Journal of Urban Economics, 30* (1991), 344-59.

dolar cinsinden hane başına gelire (x_4) bağlı olduğu kanısındadır. Aşağıdaki örneklem regresyonu en küçük karelerle otuz yıllık veri kullanılarak bulunmuştur:

$$\log y = -0.024 + \underset{(0.168)}{0.529 \log x_1} + \underset{(0.103)}{0.217 \log x_2} + \underset{(0.106)}{0.193 \log x_3} + \underset{(0.163)}{0.416 \log x_3} \quad R^2 = 0.683$$

(a) $\log x_1$'in katsayısını yorumlayın.
(b) $\log x_2$'nin katsayısını yorumlayın.
(c) $\log x_4$'ün anakütledeki katsayısı 0'dır diyen sıfır önsavını, artıdır diyen karşı önsavla %1 anlamlılık düzeyinde sınayın.
(d) Dört değişkenin ($\log x_1$, $\log x_2$, $\log x_3$, $\log x_4$) birlikte $\log y$ üzerinde hiçbir etkisi yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.
(e) Bu iktisatçı ayrıca yıllar boyunca kırmızı eti çok tüketmenin sağlık üzerindeki etkisinin gittikçe daha çok farkına varılmasının sığır eti talebini etkilemiş olabileceğini de düşünmektedir. Eğer durum gerçekten böyleyse, bu sizin ilk tahmin edilen denkleme ilişkin görüşünüzü nasıl etkiler?

18. [*Bu soru, regresyon hesaplamalarını yapmak için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge 31 yıllık bir dönemde Almanya'nın reel dışalımını (y), reel özel tüketimini (x_1), reel döviz kurunu (x_2) mark başına ABD doları olarak göstermektedir.

$$\log Y_t = \alpha + \beta_1 \log x_{1t} + \beta_2 \log x_{2t} + \varepsilon_t$$

modelini tahmin ederek bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

y_t	x_{1t}	x_{2t}	y_t	x_{1t}	x_{2t}
527	1,718	4.17	2,799	6,325	2.36
560	1,833	4.00	2,967	6,831	2.11
619	2,047	4.00	3,071	7,289	1.83
665	2,167	3.98	3,661	7,851	1.73
739	2,336	3.98	4,253	8,408	1.96
868	2,375	4.01	4,650	8,840	2.26
909	2,751	3.98	4,756	9,150	2.38
890	2,826	4.00	4,804	9,590	2.72
1,004	3,007	4.00	5,306	10,009	3.15
1,198	3,309	3.69	5,718	10,368	2.46
1,380	3,689	3.65	5,278	10,670	1.94
1,549	4,094	3.27	5,249	11,089	1.58
1,672	4,522	3.20	5,646	11,515	1.78
2,884	4,953	2.70	6,435	12,210	1.70
2,351	5,337	2.41	7,187	13,212	1.49
2,412	5,853	2.62			

19. [*Bu soru, regresyon hesaplamalarını yapmak için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Lydia E. Pinkham'ın satışlar (y) ve reklâm harcamaları (x) ile ilgili yirmibeş yıllık verilerini göstermektedir.[16]

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log x_t + \gamma \log Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

modelini tahmin ederek bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

y	x	y	x	y	x
1,103	339	2,637	1,145	1,896	964
1,266	562	2,177	1,012	1,684	811
1,473	745	1,920	836	1,633	789
1,423	749	1,910	941	1,657	802
1,767	862	1,984	981	1,569	770
1,161	1,034	1,787	974	1,390	639
2,336	1,054	1,689	766	1,387	644
2,602	1,164	1,866	920	1,289	564
2,518	1,102				

20. Bir iktisatçı elli gözlemli rassal bir örneklemden şu regresyon modelini tahmin etmiştir:

$$\log Y_i = \alpha + \beta_1 \log x_{1i} + \beta_2 \log x_{2i} + \beta_3 \log x_{3i} + \beta_4 \log x_{4i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y_i = Bir doktor muayenehanesinin gayrisafi geliri
x_{1i} = Muayenehanedeki doktorların ortalama çalışma saati
x_{2i} = Muayenehanedeki doktor sayısı
x_{3i} = Muayenehanede çalışan (hemşire gibi) öteki sağlık personeli sayısı
x_{4i} = Muayenehanede kullanılan oda sayısı

Aşağıdaki bilgisayar çıktı parçasını kullanarak bulguları açıklayan bir rapor yazın.

[16] Veriler G. M. Erickson, "Using ridge regression to estimate directly lagged effects in marketing," *Journal of the American Statistical Association, 76* (1981), 766-73 ile K. S. Palda, *The Measurement of Cumulative Advertising Effects*, (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1964)'ten alınmıştır.

	R-SQUARE 0.927		
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	2.347		
LOG X1	0.239	3.27	0.073
LOG X2	0.673	8.31	0.081
LOG X3	0.279	6.64	0.042
LOG X4	0.082	1.61	0.051

21. Bir iktisatçı otuzbeş işkolundan oluşan bir örneklemden şu regresyon modelini tahmin etmiştir:

$$\log Y_i = \alpha + \beta_1 \log x_{1i} + \beta_2 \log x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada

$Y_i =$ İşkolundaki en büyük dört işletmenin üretiminin toplam içindeki yüzdesiyle ölçülen işkolu yoğunlaşma oranı

$x_{1i} =$ Tek bir etkin fabrikanın büyüklüğüyle ölçülen, işkoluna giriş için gerekli sermaye miktarı,

$x_{2i} =$ (İşkolunda toplam üretimin yarısını üreten) büyük işletmelerin ortalama fabrika büyüklüğünün işkolunun toplam üretimine oranıyla ölçülen işkolu ölçek ekonomisi ölçüsü

Aşağıdaki bilgisayar çıktı parçasını kullanarak bulguları açıklayan bir rapor yazın.

	R-SQUARE 0.825		
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	3.621		
LOG X1	0.234	3.55	0.066
LOG X2	0.267	3.18	0.084

22. [*Bu soru, regresyon hesaplamalarını yapmak için bilgisayar programı gerektirir.*] Aşağıdaki çizelge, Tayland'da özel tüketim (y) ve harcanabilir gelir (x) ile ilgili yirmidokuz yıllık verileri göstermektedir.

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log x_t + \gamma \log Y_{t-1}$$

modelini tahmin ederek bulgularınızı açıklayan bir rapor yazın.

y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t
170	179	360	377	580	731
181	195	394	421	618	773
196	204	404	434	652	827
213	216	427	453	663	856
233	247	462	495	693	901
252	264	491	541	761	978
267	285	527	596	831	1,093
278	307	554	623	919	1,206
333	343	557	656	1,003	1,296
336	359	564	695		

23. Bir regresyon ilişkisinin şöyle olduğunu düşünelim:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Y_i'nin x_{1i}'ye göre basit doğrusal regresyonu, n gözlemli bir örneklemden tahmin edilirse, ortaya çıkan eğim tahmini β_1 için genellikle sapmalı olacaktır. Ancak, x_{1i} ile x_{2i} arasındaki örneklem korelasyonunun 0 olması özel durumunda bu sapma olmaz.

Gerçekten de bu durumda, x_{2i} regresyon denklemine katılsa da katılmasa da aynı tahmin bulunur.

(a) Bu söylenenin neden doğru olduğunu sözcüklerle açıklayın.

(b) Ek A13.1'deki bilgileri kullanarak bu söylenenin doğru olduğunu cebirle gösterin.

24. Bir iktisatçı, bir mala olan talebi (y), o malın fiyatı (x_1) ve gelir (x_2) ile ilişkilendiren bir regresyon denklemi tahmin etmek istemektedir. Bu tahmin 12 yıllık üçer aylık veriye dayanacaktır. Ancak, bu ürüne olan talebin mevsimlik —yani yılın bazı dönemlerinde öteki dönemlere göre daha yüksek olduğu— bilinmektedir.

(a) Mevsimselliği hesaba katmanın bir yolu şu modeli tahmin etmektir:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + \beta_5 x_{5it} + \beta_6 x_{6t} + \varepsilon_t$$

Burada x_{3t}, x_{4t}, x_{5t}, x_{6t} aşağıdaki gibi tanımlanmış gölge değişkenlerdir:

x_{3t} = her yılın ilk üç ayında 1, ötekilerde 0
x_{4t} = her yılın ikinci üç ayında 1, ötekilerde 0
x_{5t} = her yılın üçüncü üç ayında 1, ötekilerde 0
x_{6t} = her yılın dördüncü üç ayında 1, ötekilerde 0

Bu modelin en küçük karelerle neden tahmin edilemeyeceğini açıklayın.

(b) Tahmin edilebilecek bir model şöyledir:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + \beta_5 x_{5t} + \varepsilon_t$$

Bu modeldeki gölge değişkenlerin katsayılarını yorumlayın.

25. $$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

regresyon modelinde, eğer varsa, çoklu doğrusallığın boyutu, x_{1i} ile x_{2i} arasında örneklem korelasyonunun bulunmasıyla değerlendirilebilir. Bunun neden böyle olduğunu açıklayın.

26. Bir iktisatçı şu regresyon modelini tahmin etmektedir:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

β_1 ve β_2 katsayı tahminleri, kendi standart hatalarına oranla çok büyük değildir. Ama belirlilik katsayısının büyüklüğü, bağımlı değişkenle bağımsız değişken çifti arasında epeyi güçlü bir ilişki göstermektedir. Bu bulgulara ulaşan iktisatçı, çoklu doğrusallığın varlığından büyük ölçüde kuşkulanmaktadır. Asıl ilgi odağı x_1'in bağımlı değişken üzerindeki etkisi olduğundan, Y'nin x_1'e göre regresyonunu tahmin ederek çoklu doğrusallıktan kurtulmaya karar verir. Bu yol konusunda yorum yapın.

27. Bölüm 13'teki Alıştırma 55'e dönelim. Kişi başına reel gelir bağımsız değişkeni x_1 modelden çıkarılıp reel gayrisafi ürünün büyüme hızının ortalama vergi oranı x_2'ye göre regresyonu tahmin edilmiştir. Bulunan model şudur:

$$y = 0.060 - 0.074x_2 \qquad R^2 = 0.072$$
$$(0.034)$$

Bu bulguları yorumlayın.

14.7 DEĞİŞEN VARYANS

En küçük karelerle tahmin yöntemi ve ona dayanan çıkarsama süreçleri, Bölüm 13.3'te tartışılan varsayımlardan destek alır. Bu varsayımlar geçerliyken, Bölüm 13'te ele alınan yöntemler pek çok alandaki uygulamalı veri çözümlemesi için güçlü bir alet takımı oluşturur. Ama bu varsayımlardan bir ya da birkaçı çiğnendiğinde, bir regresyon modelinin katsayılarının en küçük karelerle tahmin edilmesi etkinliğini yitirir ve yapılan çıkarsamalar kötü bir biçimde yanıltıcı olabilir.

Altbölüm 14.5'te, çıkabilecek bir güçlük —model kurma sapması— ele alındı. Önemli bir açıklayıcı değişken bir regresyon modelinin dışında bırakılırsa, kalan değişkenlerin etkilerine ilişkin herhangi bir çıkarsama kuşkuludur. Bu ve bundan sonraki altbölümde

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

modelindeki ε_i hata terimlerine ilişkin standart varsayımlardan ikisinin çiğnenme olasılığını ele alacağız. Özellikle, bu hata terimlerinin hepsinin aynı varyanslı ve birbirleriyle ilişkisiz olduklarını varsaymıştık. Bir sonraki altbö-

lümde, birbirleriyle ilişkili hataların bulunma olasılığını inceleyeceğiz. Şimdilik sabit varyans varsayımını göreceğiz.

Bu varsayımın akla uygun olmayabileceğini basit bir örnek yardımıyla açıklayacağız. Belli bir işkolundaki çıktıyı etkileyen etmenlerle ilgileniyor olalım. Çeşitli işyerlerinden çıktı miktarı, kullanılan emek ve sermaye büyüklükleri gibi belirleyicilere ilişkin veriler toplanmış olsun. Bu işyerleri genellikle aynı büyüklükte değildir, dolayısıyla en yüksek çıktılı işyerlerinin öne sürülen modelden çıkan hata terimlerinin, ortalama olarak, en küçük işyerlerininkinden daha büyük olması beklenir. Öyleyse hata terimlerinin varyansı bütün işyerleri için aynı olmayacak, tersine işyeri büyüklüğünün artan bir fonksiyonu olacaktır.

Bütün hata terimlerinin varyanslarının aynı olmadığı modellerin **değişen varyans** gösterdikleri söylenir. Bu olgu geçerliyken, regresyon modelinin katsayılarını tahmin etmede en etkin yöntem en küçük kareler değildir. Üstelik, bu katsayılar için güven aralıkları bulan, önsav sınamaları yapan bildik süreçler artık geçerli olmaz. Dolayısıyla, değişen varyansın varlığını ortaya çıkaran tekniklere sahip olmak son derece önemlidir. Yaygın olarak kullanılan yaklaşımların çoğu, sabit hata varyansı varsayımını, akla uygun bir almaşıkla karşılaştırır. Sözgelimi, hata varyansının büyüklüğü, bağımsız değişkenlerden biri ya da ötekinin büyüklüğünün artan bir fonksiyonu olabilir. Başka bir olanak, hata varyansının bağımlı değişkenin beklenen değerine —yani $(\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki})$'ye — bağlı olmasıdır.

Şimdi $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ katsayılarının bildiğimiz en küçük kareler tahminleri $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ olsun. Bağımsız değişkenler verilmişken, bağımlı değişkenlerin beklenen değerlerinin doğal tahminleri şöyle bulunur:

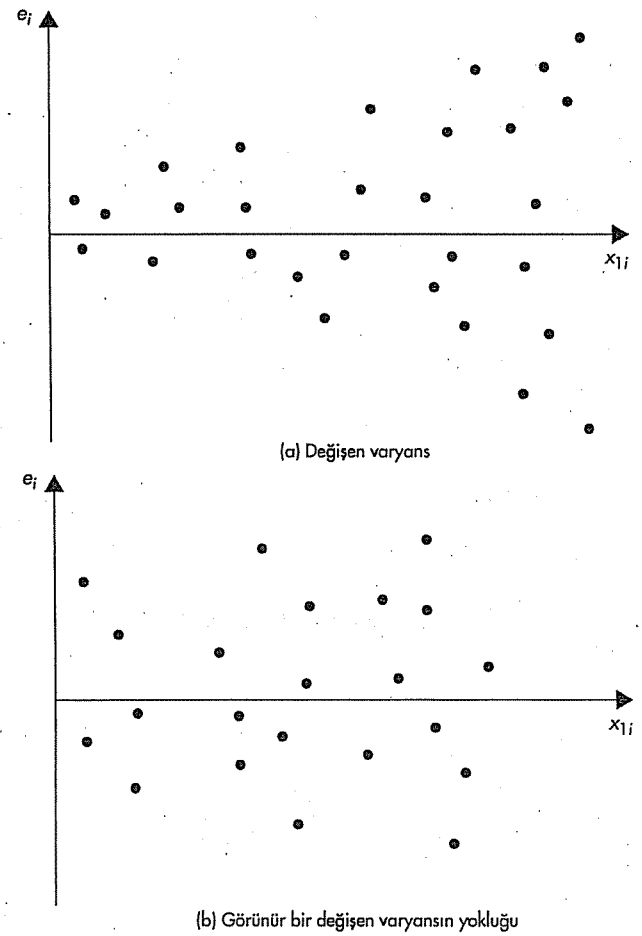
$$\hat{y}_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \Lambda + b_K x_{Ki}$$

Benzer biçimde ε_i hata terimleri de şu **kalıntı**larla tahmin edilir:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Çizimsel teknikler değişen varyansı ortaya çıkarmada çoğu zaman işe yarar. Uygulamada e_i kalıntılarının, tek tek bağımsız değişkenlere ya da $\hat{y}_i$ beklenen değerlerine göre düzenlenen bir dizi çizimi incelenebilir. Bunu göstermek için, e_i'nin bağımsız değişken x_{1i}'ye göre olanak içindeki çizimlerinin gösterildiği Çizim 14.8'e bakalım. Bu çizimin (a) bölümünde hataların büyüklüğünün, x_i'yle birlikte artma eğiliminde olduğunu görüyoruz. Bu da hata varyanslarının sabit olmadığı anlamına gelir. Çizimin (b) bölümünde ise tersine, düzenli bir ilişki görünmemektedir. Bu ikinci durumda, sabit hata varyansımn olmadığını söyleyen hiçbir kanıt yoktur.

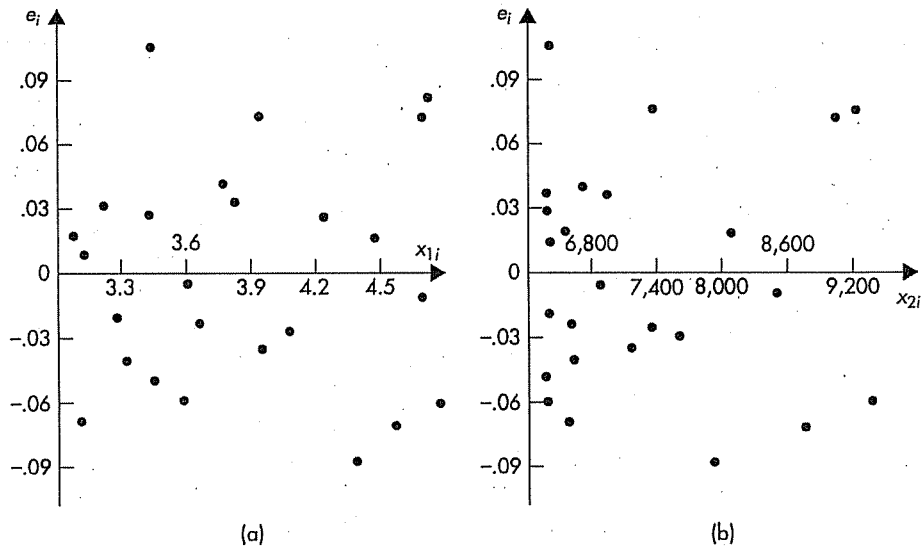
Bölüm 13'te tasarruf sandıklarının kâr marjı ile mevduata oranla net gelir (x_1) ve şube sayısı (x_2) arasında aşağıdaki model aracılığıyla ilişki kurduk:



ÇİZİM 14.8 Kalıntıların bağımsız bir değişkene göre çizimleri

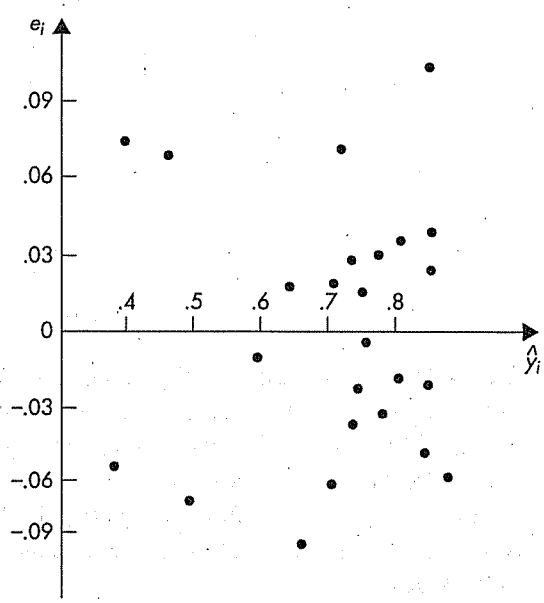
$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Bu modelin katsayıları en küçük karelerle, bütün hata terimleri varyanslarının eşit olduğu örtük varsayımı altında tahmin edildi. Şimdi bu varsayımı inceleyeceğiz. Çizim 14.9, en küçük kareler regresyon kalıntılarının iki bağımsız değişkene göre çizimlerini göstermektedir. (Bağımsız değişkenler Çizelge 13.1'de, kalıntılar Çizelge 13.2'de yer almıştır.) Bu iki çizimden, kalıntıların büyüklükleriyle her bir bağımsız değişkenin değerleri arasında düzenli bir ilişki göze çarpmamaktadır.



ÇİZİM 14.9 Tasarruf sandıkları verileri için kalıntıların bağımsız değişkenlere göre çizimleri

ÇİZİM 14.10 Tasarruf sandıkları verileri için e_i'lerin $\hat{y}_i$'lere göre çizimi



Çizim 14.10'da en küçük kareler regresyonu kalıntıları bağımlı değişkenin $\hat{y}_i$ kestirim değerlerine göre çizimidir. (Verilere uydurulmuş regresyonun $\hat{y}_i$ değerleri Çizelge 13.2'de verilmiştir.) Burada da kalıntıların büyüklükleriyle bağımlı değişkenin kestirim değerleri arasında güçlü bir ilişki görülmemektedir. Öyleyse bütün bunlara göre Çizim 14.9 ile 14.10 bu veriler için değişen varyansın varlığına işaret etmemektedir.

Bu altbölümün geri kalanında, değişen varyansı ortaya çıkarmak ve sabit hata varyansları varsayımının sağlanamayacağından kuvvetle kuşku duyulduğunda regresyon modelleri katsayılarını tahmin etmek için daha biçimsel süreçleri ele alacağız. Aslında bu varsayımdan sapmaların ortaya çıkabileceği sayısız yola göre biçimlendirilmiş çok sayıda süreç vardır. Biz burada uygulamada çok yaygın karşılaşılan tek bir olanağı ele alacağız. Daha açık söylenirse, bağımsız değişkenlerin değerleri verilmişken, ε_i regresyon hata terimleri varyansının bağımlı değişkenin beklenen değerine bağlı olduğu durumu inceleyeceğiz. Sınama süreci aşağıdaki çerçeve içindedir.

Değişen Varyans Sınaması

Bir bağımlı değişkenle K bağımsız değişken arasında ilişki kuran ve n tane gözlem kümesine dayanan şu modeli alalım:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Bu modelin katsayılarının en küçük kareler tahminleri bildik $a, b_1, b_2, \ldots, b_K$ olsun, böylece bağımlı değişkenin kestirim değerleri şöyle bulunur:

$$\hat{y}_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_K x_{Ki}$$

Verilere uydurulan modelden elde edilen kalıntılar da şunlardır:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

ε_i hata terimlerinin hepsinin varyansı aynıdır diyen sıfır önsavını, bunların varyansları

$$\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}$$

beklenen değerlerine dayanır diyen karşı önsavla sınamak için basit bir doğrusal regresyon tahmin ederiz. Bu regresyonda, bağımlı değişken kalıntının karesi —yani e_i^2— ve bağımsız değişken de $\hat{y}_i$ kestirim değeridir.

Bu *yan regresyon*un belirlilik katsayısı R^2 olsun. Bu durumda α anlamlılık düzeyinde bir sınama için, nR^2, $\chi^2_{1,\alpha}$'dan büyükse sıfır önsavı reddedilir. Burada $\chi^2_{1,\alpha}$, 1 serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkenini α olasılığıyla aşan bir sayıdır.

ÇİZELGE 14.5 Tasarruf sandıkları regresyonunda değişen varyans sınaması yapmak için gerekli büyüklükler

e_i^2	$\hat{y}_i$	e_i^2	$\hat{y}_i$	e_i^2	$\hat{y}_i$
0.005329	0.677	0.000676	0.794	0.000729	0.693
0.000016	0.714	0.002401	0.799	0.007225	0.635
0.001521	0.699	0.003364	0.828	0.000289	0.613
0.003969	0.673	0.000484	0. 802	0.000100	0.570
0.000256	0.684	0.001600	0.800	0.004900	0.480
0.000144	0.708	0.001225	0.755	0.005184	0.438
0.000900	0.740	0.001156	0.734	0.005476	0.396
0.000361	0.759	0.001625	0.705	0.003364	0.378
0.011025	0.795				

Bu sınamayı tasarruf sandıkları örneğine uygulayacağız. Yan regresyonda kullanılan büyüklükler Çizelge 14.5'te gösterilmiştir. Kestirilmiş değerleri doğrudan Çizelge 13.2'den alınmış, olan e_i^2'ler de Çizelge 13.2'de verilen e_i kalıntılarının kareleridir.

Bu kalıntı karelerinin kestirilmiş değerlere göre regresyonu en küçük karelerle tahmin edildiğinde şunlar bulunur:

$$e^2 = 0.00470 - 0.00328\,\hat{y} \qquad R^2 = 0.027$$
$$(0.00408)$$

Bu yan regresyonun SAS bilgisayar çıktısının bir bölümü Çizelge 14.6'da gösterilmiştir. $n = 25$ gözlem kümesi olduğuna göre sınama şuna dayanır:

$$nR^2 = (25)(0.027) = 0.675$$

Ek Çizelge 5'ten %10 düzeyinde sınama için şunu buluruz:

$$\chi^2_{1,0.10} = 2.71$$

Dolayısıyla, kâr marjının net gelire ve şube sayısına göre regresyonundaki hata terimlerinin hepsinin varyansı aynıdır diyen sıfır önsavı bu düzeyde reddedilemez. Bu biçimsel sınama, Çizim 14.9 ile 14.10'dan edindiğimiz izlenimi doğrulamakta olup bu verilerde değişen varyansın burada ciddi bir sorun olduğunu gösteren pek kanıt yoktur.

ÇİZELGE 14.6 Tasarruf sandıkları modelinde değişen varyans sınanmasının yan regresyonu için SAS programı çıktısından bir bölüm

R-SQUARE .027			
PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	0.00470		
YHAT	–0.00328	–0.80	0.00408

Regresyon hatalarının hepsinin aynı varyanslı olduğundan kuvvetle kuşku duyulduğunda, en küçük kareler en uygun süreç olmayabilir. Çeşitli almaşıklar kullanılabilir. Bunlardan hangisinin seçileceği hata varyanslarının nasıl davrandığı konusundaki düşünceye bağlıdır. Burada kısaca bir olanaktan söz edelim. Diyelim ki hata terimlerinin varyansı, bağımsız değişkenler verilmişken, bağımlı değişkenin beklenen değerinin karesiyle doğru orantılı, yani

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) \propto (\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_\kappa x_{\kappa i})^2$$

olsun. Ayrıca bağımlı değişkenin yalnız artı değerler aldığını varsayalım. Bu belirli kalıp varsayılınca, regresyon modelinin anakütle katsayılarını tahmin etmede basit bir iki aşamalı süreç kullanılır. İlk aşamada model en küçük karelerle bilinen yoldan tahmin edilip bağımlı değişkenin $\hat{y}_i$ kestirim değerleri bir kenara yazılır. İkinci aşamada şu regresyon denklemi tahmin edilir:

$$\frac{Y_i}{\hat{y}_i} = \alpha \frac{1}{\hat{y}_i} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\hat{y}_i} + \beta_2 \frac{x_{1i}}{\hat{y}_i} + \cdots + \beta_\kappa \frac{x_{\kappa i}}{\hat{y}_i} + u_i \qquad (14.7.1)$$

Burada u_i yaklaşık sabit varyanslı bir hata terimidir. Böylece Eş. (14.7.1), bağımlı değişkeni $Y_i / \hat{y}_i$, bağımsız değişkenleri de $1/\hat{y}_i$, $x_{1i}/\hat{y}_i$, $x_{2i}/\hat{y}_i$, ..., $x_{\kappa i}/\hat{y}_i$ olan bir regresyon denklemini gösterir. (Dikkat edersenız sabit terim yoktur.) Bu durumda (14.7.1)'in katsayıları en küçük karelerle tahmin edilir, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa$'nin ortaya çıkan katsayıları elde tutulur.

Log doğrusal modelin uygun olduğu durumlarda doğrusal bir regresyon modeli tahmin edilirse değişen varyanslı hatalar görülebilir. Değişen varyans ortaya çıkarsa bu durumda araştırmacı, modeli bir kez de logaritmalı kalıpta tahmin etmeyi düşünebilir, özellikle de konuya ilişkin kuram böyle bir model kurulmasını akla aykırı bulmuyorsa. Aslında logaritma almak büyük gözlemlerin etkisini hafifletir. Çoğu zaman böyle bir model değişen varyanstan kurtulabilir. İnceleme konusu veriler tüketim, gelir, para gibi zaman içinde üstel büyüyen iktisadi değişkenlerin zaman serileri olduğunda bu yaklaşım genellikle uygundur.

14.8 ARDIŞIK BAĞIMLI HATA TERİMLERİ

Şimdi de regresyon modelindeki hata terimlerinin birbirleriyle ilişkili olmadıkları varsayımının geçersizliği olanağını inceleyeceğiz. Çözümlenen verilerin bir anakütleden çekilmiş rassal bir örneklem olduğu durumlarda bu varsayım pekâlâ haklıdır. Ama son derece önemli başka bir öbek regresyon probleminde bu varsayıma kuşkuyla bakılmalıdır. Zaman serisi verileri çözümlendiği sırada, hata

terimleri (bağımsız değişkenler bir yana) bağımlı değişkenin davranışını etkileyen bütün etmenlerin bir karışımıdır, dolayısıyla da hatalar arasında bir ilişki olması beklenebilir. Bu etmenlerin içinde bulunulan zaman dilimindeki davranışı, daha önceki dönemlerdeki davranışla bir hayli benzerlik gösterebilir, bu da zaman içinde birbirine yakın hatalar arasında aynı yönlü bir ilişki anlamına gelir.

Bu altkesimin konusunun zaman serileriyle sınırlı olduğunu vurgulamak için, Altbölüm 14.3'te olduğu gibi burada da gözlemlere t altimi verecek ve regresyon modelini şöyle yazacağız:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t \qquad (14.8.1)$$

Bu tür modellerin ε_t hata terimlerinin birbiriyle ilişkisiz olduklarını varsaydık. Bu varsayım geçersizken bildik en küçük karelerle işi sürdürmenin sonuçları gerçekten çok ciddi olabilir. Özellikle modelin anakütle katsayılarına ilişkin güven aralıkları ve önsav sınamaları gibi alışıldık çıkarsama söylemleri çok yanıltıcı olabilir.

Dolayısıyla, zaman serisi içeren regresyonlarda hata terimlerinin birbiriyle ilişkili olmadığını söyleyen önsavı sınamak yaşamsal önem kazanır. Bunların zaman içinde ilişkili olabilmelerine **ardışık bağımlı hatalar** sorunu denir. Bu soruna yaklaşırken, akla yakın belli bir ardışık bağımlılık yapısını akılda tutmak işe yarayabilir. Çekici bir olanak t dönemindeki hata ε_t'nin bir önceki dönemin hatası ε_{t-1} ile sıkı bir ilişki içinde, iki dönem önceki hata ε_{t-2} ile daha az sıkı bir ilişki içinde, vb. olmasıdır. Böylelikle aralarında uzunca bir zaman olan hata terimleri arasındaki korelasyon göreli olarak zayıftır. Ardışık zaman dilimlerindeki hata terimleri arasındaki korelasyonu ρ ile gösterelim:

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho$$

Burada ρ bir korelasyon katsayısı olduğuna göre mutlak değeri 1'den küçük olacaktır. (Çoğu uygulamada bu katsayıyı 0 ya da artı olarak almak akla uygundur.) Özellikle basit bir tanımlama, zaman içinde araları açıldıkça hata terimleri arasındaki korelasyonun azaldığı şu yapıdır:

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = \rho^2$$

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-3}) = \rho^3$$

Bu böyle sürer gider. Öyleyse aralarında j dönem fark olan hatalar için şunu yazarız:

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = \rho^j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (14.8.2)$$

Sözgelimi, ardışık hatalar arasındaki korelasyon 0.5 ve 14.8.2'deki ardışık bağımlılık yapısı geçerli olsun. Bu durumda şunları yazabiliriz:

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0.5$$
$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = (0.5)^2 = 0.25$$
$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-3}) = (0.5)^3 = 0.125$$
$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-4}) = (0.5)^4 = 0.0625$$

.
.
.

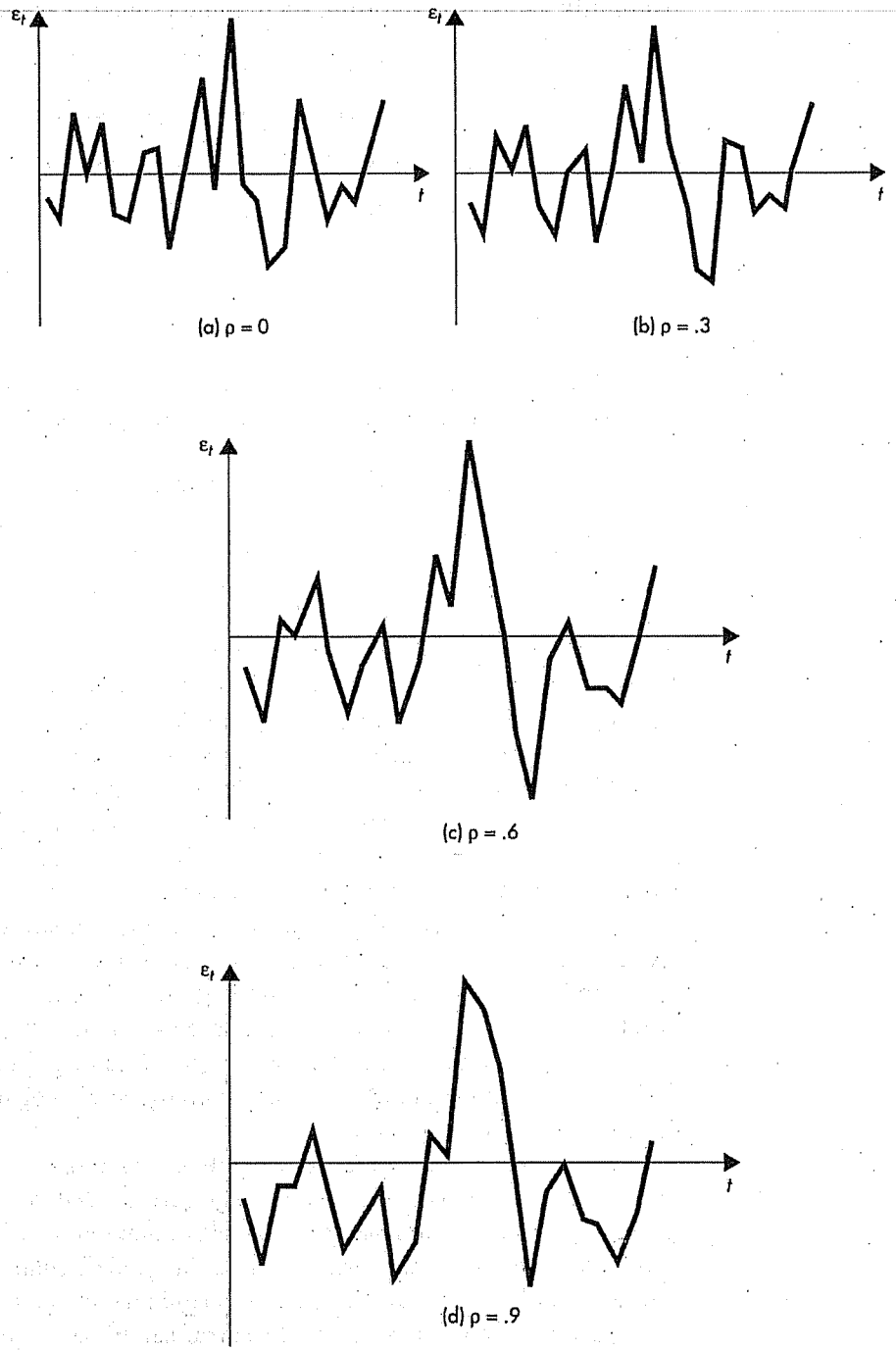
Bu durumda görüyoruz ki, zaman içinde birbirine uzak hatalar arasındaki korelasyon görece zayıfken, zaman içinde birbirine yakın hatalar arasında bir hayli güçlü olabilir.

Şimdi bütün ε_t hatalarının varyanslarının aynı olduğunu varsayarsak, (14.8.2) ardışık bağımlılık yapısı şu modeldekine karşılık gelebilir:

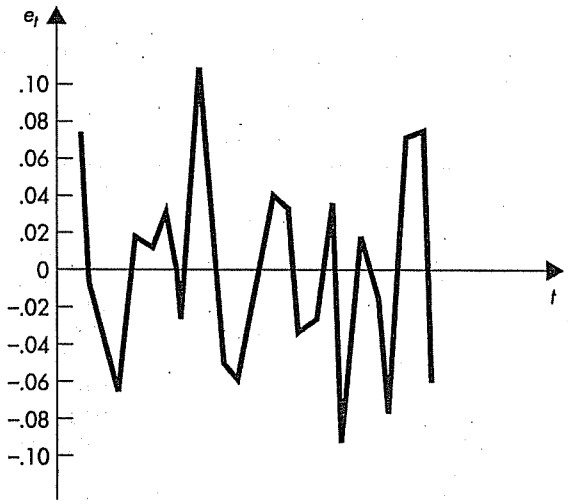
$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad (14.8.3)$$

Burada u_t rassal değişkeninin ortalaması 0, varyansı sabit olup ardışık bağımlılığı yoktur. Eş. (14.8.3), ardışık bağımlı davranışın **birinci dereceden ardışık bağımlı modelini** gösterir. Bu eşitliğe bakarsak şunu görürüz: Hata teriminin t döneminde aldığı değer ε_t, bir önceki zaman dilimindeki kendi değerine (bu bağımlılığın gücü ρ korelason katsayısınca belirlenir) ve ikinci bir rassal değişken u_t'ye bağımlıdır. Bu model Çizim 14.11'de, (14.8.3) modelinin türettiği hataların $\rho = 0, 0.3, 0.6, 0.9$ değerleri için zaman çizimiyle gösterilmiştir. $\rho = 0$, hatalarda ardışık bağımlılığın olmadığı duruma karşılıktır. Çizimin (a) bölümünde hataların zaman içindeki gelişiminde belli bir örüntü göze çarpmamaktadır. Birinin aldığı değer, ötekilerinin değerini etkilememektedir. Görece düşük korelasyondan ($\rho = 0.3$) bayağı güçlü korelasyonlara ($\rho = 0.9$) doğru gidildikçe, (b), (c), (d) bölümlerinde testere dişi biçimi örüntü gitgide azalmakta, çizimin (d) bölümünde bir hata değerinin bitişik komşusunun değerine görece yakın olabildiği açıkça görülmektedir.

Çizim 14.11 incelenirse, görsel yöntemlerin ardışık bağımlı hataların varlığını bulup çıkarmada işe yarayabileceği görülür. Aslında en iyisi (14.8.1) modelinin ε_t hatalarını zamana göre çizmektir. Ama gerçek hatalar bilinemediğinden, model en küçük karelerle tahmin edildiğinde bunların tahminleri de e_t kalıntıları olarak elde edilir. Bu nedenle, uygulama amaçlarıyla bu kalıntıların zaman çizimi incelenir. Çizim 14.12 tasarruf sandıkları regresyonumuzun kalıntılarının zaman çizimini göstermektedir. (Bu kalıntılar Çizelge 13.2'de verilmişti).



ÇİZİM 14.11 Hata terimleri birinci dereceden ardışık bağımlılık gösteren regresyon kalıntılarının zamana göre çizimi



ÇİZİM 14.12 Tasarruf sandıkları regresyonu kalıntılarının zamana göre çizimi

Çizim 14.12'deki zaman çizimine bakınca, kalıntılarda herhangi bir güçlü ardışık bağımlılığın izine rastlanmaz. Burada kalıntılar Çizim 14.11(d)'de olduğu gibi bir tür düzgün yol izlemez. Öyleyse, ardışık bağımlı hatalar konusundaki kuşkularımız yalnızca bu kanıtla fazla güçlü olmaz. Ancak sorun çok önemli olduğundan, bir regresyon modelindeki hatalarda ardışık bağımlılık yoktur diyen önsavı daha biçimsel olarak sınamak iyi olur.

En yaygın olarak kullanılan sınama **Durbin-Watson sınaması** olup en küçük karelerle tahmin edilmiş regresyonun e_t kalıntılarına dayanır. Hesaplanan sınama istatistiği şudur:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Tasarruf sandıkları regresyonunda bu sınama istatistiğini bulmak için gerekli hesaplamalar Çizelge 14.7'de gösterilmiştir. Bu çizelgeden şunları buluruz:

$$\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 = 0.121615 \qquad \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 0.062319$$

Öyleyse bu regresyon için sınama istatistiği

$$d = \frac{0.121615}{0.062319} = 1.95$$

olur.

ÇİZELGE 14.7 Tasarruf sandıkları regresyonu için Durbin-Watson istatistiği hesaplamaları

t	e_t	e_t^2	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1	0.073	0.005329		
2	–0.004	0.000016	–0.077	0.005929
3	–0.039	0.001521	–0.035	0.001225
4	–0.063	0.003969	–0.024	0.000576
5	0.016	0.000256	0.079	0.006241
6	0.012	0.000144	–0.004	0.000016
7	0.030	0.000900	0.018	0.000324
8	–0.019	0.000361	–0.049	0.002401
9	0.105	0.011025	0.124	0.015376
10	0.026	0.000676	–0.079	0.006241
11	–0.049	0.002401	–0.075	0.005625
12	–0.058	0.003364	–0.009	0.000081
13	–0.022	0.000484	0.036	0.001296
14	0.040	0.001600	0.062	0.003844
15	0.035	0.001225	–0.005	0.000025
16	–0.034	0.001156	–0.069	0.004761
17	–0.025	0.001625	0.009	0.000081
18	0.027	0.000729	0.052	0.002704
19	–0.085	0.007225	–0.112	0.002544
20	0.017	0.000289	0.102	0.010404
21	–0.010	0.000100	–0.027	0.000729
22	–0.070	0.004900	–0.060	0.003600
23	0.072	0.005184	0.142	0.020164
24	0.074	0.005476	0.002	0.000004
25	–0.058	0.003364	–0.132	0.017424
	Toplamlar	0.062319		0.121615

Zaman serisi verileri içeren regresyonlar açıklanırken özet bilgiler arasına hesaplanan Durbin-Watson istatistiğini koymak yaygın bir uygulamadır. Dolayısıyla tasarruf sandıkları regresyonumuz şöyle gösterilmelidir:

$$y = 1.565 + 0.237x_1 - 0.000249x_2 \qquad R^2 = 0.87 \qquad d = 1.95$$

$$(0.079)\ (0.0555)\ \ (0.0000320)$$

Durbin-Watson istatistiği yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$d = 2(1 - r) \tag{14.8.4}$$

Burada r, ardışık hatalar arasındaki korelasyon katsayısı ρ'nun örneklem tahminidir.[17] Dolayısıyla, hatalar ardışık bağımlı değilse, d'nin değerinin 2'ye çok yakın çıkması beklenir. Öte yandan hatalarda aynı yönlü bir ardışık bağımlılık, r örneklem korelasyonuna artı değer verir, böylece d'nin değeri de 2'nin altına düşer. Ardışık bağımlı hataların sınanmasının Durbin-Watson istatistiğine dayandırılmasımnda kuramsal bir güçlük vardır. Sorun şudur: d'nin gerçek örnekleme dağılımı, ardışık bağımlılık yoktur önsavı doğruyken bile bağımsız değişkenlerin aldığı değerlere bağlıdır. Açıktır ki bağımsız değişkenlerin gerçekleşebilecek her değer kümesi için bu dağılım çizelgelenemez. Neyse ki, bağımsız değişkenlerin değerleri ne olursa olsun, d'nin dağılımının, yüzdelik değerleri çizelgelenebilen iki başka rassal değişken arasında kaldığı bilinmektedir. Bu rassal değişkenlerin %1 ve %5 anlamlılık düzeylerindeki eşik değerleri Ek Çizelge 10'da sergilenmiştir. Bu çizelgeler çeşitli n ve K bileşimlerinde d_L ve d_U değerlerini gösterir. Hesaplanan d, d_L'den küçükse, ardışık bağımlılık yoktur sıfı önsavı, hatalar arasında aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır diyen karşı önsav lehine reddedilir. d, d_U'dan büyükse sıfır önsavı kabul edilirken, d, d_L ile d_U arasında kalıyorsa sınama sonuçsuzdur. Bu durum Çizim 14.13'te gösterilmiştir.

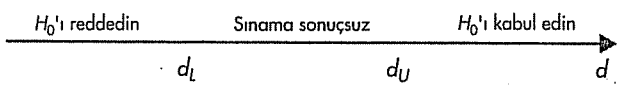
Bunu açıklamak için, tasarruf sandıkları modelinde hataların ardışık bağımlılığı yoktur diyen sıfır önsavım, aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır diyen karşı önsavla %5 anlamlılık düzeyinde sınayacağız. Bu modelde şunları biliyoruz:

$$n = 25 \qquad K = 2$$

Böylece Çizelge 10'dan şunu okuruz:

$$d_L = 1.21 \qquad d_U = 1.55$$

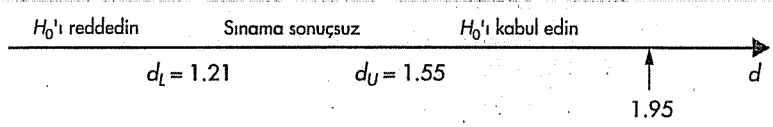
ÇİZİM 14.13 Regresyon hataları arasında ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı H_0'ın Durbin-Watson d ile sınanmasında karar kuralı



[17] Bu eşitlik şuradan çıkarılabilir:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{2} e_t^2} - 2\frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Bu gösterimin sağ yanındaki ilk iki terim 1'e çok yakındır, son terimdeki iki toplamın oranı da ε_t ile ε_{t-1} arasındaki korelasyonun r tahminini verir.



ÇİZİM 14.14 Tasarruf sandıkları regresyon modelinde hatalar arasında ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı H_0'ın sınanması

Hesaplanan 1.95'lik d, d_U'dan büyük olduğundan, hatalarda ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı kabul edilir, bu da bizim Çizim 14.12'den edindiğimiz görsel izlenimi doğrular. Bu sınama Çizim 14.14'te gösterilmiştir.

Regresyon çözümlemesinde ardışık bağımlı hataların bulunup çıkarılması o kadar önemlidir ki günümüzdeki çoğu bilgisayar paket programı, Durbin-Watson sınama istatistiğinin hesaplanmasını bir seçenek olarak sunar. Böyle bir programımız varsa Çizelge 14.7'deki hesaplamaları yapmanıza gerek kalmaz.

Durbin-Watson Sınaması

n gözlem takımına dayanan

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t$$

regresyon modelini alalım. ε_t hata terimlerinin

$$\text{Kor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = \rho^j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

biçiminde ardışık bağımlı oldukları ya da buna eşdeğer olarak ε_t'nin

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

süreciyle gösterilebilme durumunu düşünelim. Burada u_t ardışık bağımlı değildir.

Ardışık bağımlılık yoktur diyen

$$H_0\colon\ \rho = 0$$

sıfır önsavının sınanması

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Durbin-Watson istatistiğine dayanır. Burada e_t, regresyon denklemi en küçük karelelerle hesaplandığında ortaya çıkan kalıntılardır.

Karşı önsav, hatalarda aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır, yani

$$H_1: \rho > 0$$

biçimindeyse, karar kuralı aşağıdaki gibidir:

$d < d_L$ ise H_0'ı reddedin

$d > d_U$ ise H_0'ı kabul edin

$d_L < d < d_U$ ise sınama sonuçsuzdur

Burada d_L ile d_U, n ve K için %1 ve %5 anlamlılık düzeylerinde Ek Çizelge 10'da verilen değerlerdir.

Arasıra ters yönlü ardışık bağımlılık, yani

$$H_1: \rho < 0$$

karşı önsavı da sınanmak istenebilir. Bunun için uygun sınama, d yerine $(4 - d)$ istatistiğinin kullanılması dışında aynı yönlü ardışık bağımlılık sınaması gibidir. Bu büyüklük, çizelgelenmiş d_L ve d_U değerleriyle karşılaştırılır.

ÖRNEK 14.2

Bir öğrenci ABD'de doğum oranındaki değişkenliği açıklamak için bir regresyon modeli çalıştırmak istemektedir. İşgücü içinde kadın yüzdesi, işsizlik oranı ve boşanma oranının ilgili açıklayıcı değişkenler olabileceği kanısındadır. Ayrıca gölge değişkenler kullanılarak savaşların etkisi de hesaba katılmaya çalışılmıştır. Model, Çizelge 14.8'de gösterilen 30 yıllık verilere uydurulmuştur. En küçük karelerle elde edilen denklem şöyledir:

$$y = 4.30 - 0.0477x_1 - 0.0389\,x_2 - 0.0094\,x_3 - 0.321\,x_4 + 0.0205\,x_5$$

$$(0.0155) \quad (0.0233) \quad (0.0166) \quad (0.077) \quad (0.0905)$$

$$R^2 = 0.73 \qquad d = 0.55$$

Burada

y = Doğum oranı
x_1 = İşgücü içinde kadın yüzdesi
x_2 = İşgücü içinde işsizlik yüzdesi
x_3 = Boşanma oranı
x_4 = Savaş yıllarında 1, öbür yıllarda 0 değerini alan gölge değişken
x_5 = Bir savaştan sonraki ilk barış yılını izleyen 3 yılda 1, öbür yıllarda 0 değerini alan gölge değişken

Regresyon denklemindeki hatalarda ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavını, aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır diyen karşı önsavla sınamak isteyelim.

ÇİZELGE 14.8 Örnek 14.2'deki doğum oranı regresyonu verileri

y_t	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}	x_{4t}	x_{5t}
2.03	25.4	9.9	17	1	0
2.22	26.7	4.7	18	1	0
2.27	29.1	1.9	23	1	0
2.12	29.2	1.2	28	1	0
2.04	29.2	1.9	30	1	0
2.41	27.8	3.9	27	0	0
2.66	27.4	3.9	24	0	1
2.49	28.0	3.8	23	0	1
2.45	28.3	5.9	25	0	1
2.41	28.8	5.3	23	1	0
2.49	29.3	3.3	24	1	0
2.51	29.4	3.0	25	1	0
2.50	29.2	2.9	25	1	0
2.53	29.4	5.5	25	0	0
2.50	30.2	4.4	25	0	1
2.52	310	4.1	24	0	1
2.53	31.2	4.3	25	0	1
2.45	31.5	6.8	25	0	0
2.40	31.7	5.5	26	0	0
2.37	32.3	5.5	27	0	0
2.33	32.6	6.7	26	0	0
2.24	32.7	5.5	26	0	0
2.17	33.2	5.7	26	0	0
2.10	33.6	5.2	26	0	0
1.94	34.0	4.5	27	1	0
1.84	34.6	3.8	27	1	0
1.78	35.1	3.8	27	1	0
1.75	35.5	3.6	28	1	0
1.78	36.3	3.5	30	1	0
1.84	36.7	4.9	33	1	0

$$n = 30 \qquad K = 5$$

olduğunu biliyoruz. Hesaplanan Durbin-Watson istatistiğiyle karşılaştırmak üzere Ek Çizelge 10'dan %1 anlamlılık düzeyinde şu değerleri okuruz:

$$d_L = 0.88 \qquad d_U = 1.61$$

Hesaplanan sınama istatistiği $d = 0.55$, alt sınır d_L'nin altında olduğundan, hatalarda ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde reddedilemez. Öyleyse bu veriler hata terimlerinin birbiriyle ilişkisiz olduğu varsayımına hatırı sayılır bir gölge düşürmektedir.

Durbin-Watson sınamasının sonuç vermeyebilmesi, durum ne olursa olsun bundan sonra yapılması gerekenler konusunda bir karar alınması zorunlu olduğundan şaşırtıcıdır. Ardışık bağımlı hataları gözardı etmenin sonuçları o kadar

ciddidir ki, sınama sonuç vermeyince bunu ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavının reddedilmesi gibi almak yeğ tutulur. Regresyon modeli bu durumda aşağıda belirtilen süreci izleyerek yeniden tahmin edilebilir.

HATALARI ARDIŞIK BAĞIMLI OLAN REGRESYONUN TAHMİNİ

Örnek 14.2'deki gibi, regresyon hatalarının ardışık bağımlı olabileceği görülünce en küçük kareler tahminleriyle onlara dayanan çıkarsamalar güvenilmez hale gelir. Böyle durumlarda başka bir tahmin edici kullanılması yeğlenir. Kullanılacak tahmin sürecini başlatmak için şu regresyonu yazalım:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t \tag{14.8.5}$$

Böylece $(t-1)$ döneminde şunu buluruz:

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_1 x_{1,t-1} + \beta_2 x_{2,t-1} + \cdots + \beta_K x_{K,t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{14.8.6}$$

Eş. (14.8.6)'yı ardışık hatalar arasındaki korelasyon ρ ile çarparsak şunu elde ederiz:

$$\rho Y_{t-1} = \alpha\rho + \beta_1 \rho x_{1,t-1} + \beta_2 \rho x_{2,t-1} + \cdots + \beta_K \rho x_{K,t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} \tag{14.8.7}$$

Eş. (14.8.7)'yi (14.8.5)'ten çıkarırsak şunu buluruz:

$$\begin{aligned} Y_t - \rho Y_{t-1} &= \alpha(1-\rho) + \beta_1(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}) \\ &\quad + \beta_2(x_{2t} - \rho x_{2,t-1}) + \cdots + \beta_K(x_{Kt} - \rho x_{K,t-1}) + u_t \end{aligned} \tag{14.8.8}$$

Burada da (14.8.3)'te olduğu gibi

$$u_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

ve u_t rassal değişkeni sabit varyanslı, ardışık bağımsızdır. Dolayısıyla Eş. (14.8.8)'e $(Y_t - \rho Y_{t-1})$ bağımlı değişkenini, $(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}), \ldots, (x_{Kt} - \rho x_{K,t-1})$ gibi K tane bağımsız değişkenle ilişkilendiren bir regresyon modeli olarak bakılabilir. Bu modelin anakütle katsayıları, sabit terim α yerine $\alpha(1-\rho)$ konulması dışında, (14.8.5)'teki ilk modelinkiyle aynıdır. Ancak (14.8.5) ile (14.8.8) modelleri arasında çok önemli bir fark vardır. İlkinde ε_t hata terimleri ardışık ba-

ğımlı, böylece modelin anakütle katsayılarının en küçük kareler tahminleri elverişsizdir. Ancak (14.8.8)'in u_t hataları ardışık bağımlı olmadığından, alışıldık en küçük kareler çıkarsama süreçleri bu modele uygulandığında pekâlâ geçerlidir.

Yukarıdaki tartışmanın ortaya koyduğuna göre, ardışık bağımlı hatalar sorunu, bağımlı değişkeni $(Y_t - \rho Y_{t-1})$, bağımsız değişkenleri $(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}),\ldots,$ $(x_{Kt} - \rho x_{K,t-1})$ olan bir regresyon denklemini en küçük karelerle tahmin edip aşılabilir. Ne yazık ki uygulamada bu olanaksızdır, çünkü ρ'nun değeri bilinemez. Ama ρ'nun yerine örneklem tahmini r geçirilebilir. Bu da (14.8.4) sayesinde Durbin-Watson istatistiğinden aşağıdaki gibi kolayca bulunabilir.

$$r = 1 - \frac{d}{2}$$

Bu süreç çerçeve içinde açıklanmıştır.

Hataları Ardışık Bağımlı olan Regresyon Modellerinin Tahmin Edilmesi

Şu regresyon modelinin anakütle katsayılarını tahmin edilmek istediğimi düşünelim:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \varepsilon_t$$

Buradaki hata terimi ε_t ardışık bağımlıdır.

Bu iş aşağıdaki gibi iki aşamada gerçekleştirilebilir:

(i) Modeli en küçük karelerle tahmin edip Durbin-Watson d istatistiğini, dolayısıyla da

$$r = 1 - \frac{d}{2}$$

ardışık bağımlılık katsayısı tahminini bulun.

(ii) Bağımlı değişkeni $(Y_t - \rho Y_{t-1})$, bağımsız değişkenleri $(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}),\ldots,$ $(x_{Kt} - \rho x_{K,t-1})$ olan ikinci bir regresyon denklemini en küçük karelerle tahmin edin. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ anakütle katsayılarını, bu ikinci modelle tahmin edilen kısmi regresyon katsayılarıyla tahmin edin. α'nın tahmini de ikinci modelin sabit terimi $(1 - r)$'ye bölünerek bulunur. β_i'nin güven aralıkları ve önsav sınamaları, ikinci regresyonun çıktılarına bildik yöntemler uygulanarak elde edilebilir.

ÖRNEK 14.3

Örnek 14.2'de ABD'de doğum oranlarındaki değişkenliği açıklamaya çalışan bir regresyon modelini en küçük karelerle tahmin ettik. Bu modeldeki hataların ardışık bağımlı olabileceği Durbin-Watson

$$d = 0.55$$

istatistiğiyle güçlü bir biçimde gösterildi. Şimdi hatalardaki ardışık bağımlılığı hesaba katarak modelin anakütle katsayılarını bir kez daha tahmin etmek istiyoruz. Önce örneklem ardışık bağımlılık katsayısını

$$r = 1 - \frac{d}{2} = 1 - \frac{0.55}{2} = 0.725$$

olarak bulalım.

Sonra ikinci bir regresyon için yeni değişkenler oluşturmalıyız. Bu regresyon için bağımlı değişken $(Y_t - rY_{t-1})$'dir. Çizelge 14.8'e başvurarak

$$y_2 - ry_1 = 2.22 - (0.725)(2.03) = 0.748$$

$$y_3 - ry_2 = 2.27 - (0.725)(2.22) = 0.661$$

buluruz ve bu böyle sürer. Yeni bağımsız değişkenler de aynı yolla bulunur, sözgelimi,

$$x_{1,2} - rx_{1,1} = 26.7 - (0.725)(25.4) = 8.285$$

$$x_{1,3} - rx_{1,2} = 29.1 - (0.725)(26.7) = 9.743$$

Bu yolla, yeni katsayılar Çizelge 14.9'da özetlendiği gibi hesaplanabilir.

Bulunan tahmin edilmiş regresyon denklemi aşağıdadır:

$$(y_t - ry_{t-1}) = 1.383 - \underset{(0.0203)}{0.0667}(x_{1,t} - rx_{1,t-1}) - \underset{(0.0133)}{0.0083}(x_{2,t} - rx_{2,t-1})$$

$$- \underset{(0.0109)}{0.0200}(x_{3,t} - rx_{3,t-1}) - \underset{(0.0617)}{0.106}(x_{4,t} - rx_{4,t-1}) + \underset{(0.0526)}{0.0322}(x_{5,t} - rx_{5,t-1})$$

Şimdi de ilk denklemdeki sabit terim aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$\frac{1.383}{1-r} = \frac{1.383}{1-0.725} = 5.029$$

Dolayısıyla tahmin edilen regresyon denklemi şöyledir:

$$y = 5.029 - \underset{(0.0203)}{0.0667}x_1 - \underset{(0.0133)}{0.0083}x_2 - \underset{(0.0109)}{0.0200}x_3 - \underset{(0.0617)}{0.106}x_4 + \underset{(0.0526)}{0.0322}x_5$$

Tahmin edilen model verilmişken tekil regresyon katsayılarının güven aralıkları ve önsav sınamaları bildik yolla yürütülür. Bunu göstermek için, öbür her şey aynıyken, işgücü içinde kadın yüzdesi (x_1), doğum oranım etkilemez diyen sıfır önsavını sınayalım.Yani önsav şudur:

ÇİZELGE 14.9 Ardışık bağımlı hataları dikkate alarak doğum oranı regresyonunu tahmin etmede kullanılan değişkenler

$y_t - ry_{t-1}$	$x_{1t} - rx_{1,t-1}$	$x_{2t} - rx_{2,t-1}$	$x_{3t} - rx_{3,t-1}$	$x_{4t} - rx_{4,t-1}$	$x_{5t} - rx_{5,t-1}$
0.748	8.285	–2.478	5.675	0.275	0
0.661	9.743	–1.580	9.950	0.275	0
0.474	8.103	–0.178	11.325	0.275	0
0.503	8.030	1.030	9.700	0.275	0
0.931	6.630	2.523	5.250	–0.725	0
0.913	7.245	1.073	4.425	0	1
0.562	8.135	0.973	5.600	0	0.275
0.645	8.000	3.145	8.325	0	0.275
0.634	8.283	1.023	4.875	1	–0.725
0.743	8.420	–0.543	7.325	0.275	0
0.705	8.150	0.608	7.600	0.275	0
0.680	7.885	0.725	6.875	0.275	0
0.718	8.230	3.398	6.875	–0.725	0
0.666	8.885	0.413	6.875	0	1
0.708	9.105	0.910	5.875	0	0.275
0.703	8.725	1.328	7.600	0	0.275
0.616	8.880	3.683	6.875	0	–0.725
0.624	8.863	0.570	7.875	0	0
0.630	9.318	1.513	8.150	0	0
0.612	9.183	2.713	6.425	0	0
0.551	9.065	0.643	7.150	0	0
0.546	9.493	1.713	7.150	0	0
0.527	9.530	1.068	7.150	0	0
0.418	9.640	0.730	8.150	1	0
0.434	9.950	0.538	7.425	0.275	0
0.446	10.015	1.045	7.425	0.275	0
0.460	10.053	0.845	8.425	0.275	0
0.511	10.563	0.890	9.700	0.275	0
0.550	10.383	2.363	11.250	0.275	0

$$H_0: \beta_1 = 0$$

Bunu şu karşı önsavla sınayacağız:

$$H_1: \beta_1 < 0$$

Sınama şuna dayanır:

$$\frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{-0.0667}{0.0203} = -3.286$$

İkinci regresyonda $n = 29$ gözlem ve $K = 5$ bağımsız değişken vardır. Öyleyse %0.5 düzeyinde sınama için

$$-t_{n-K-1,\alpha} = -t_{23,0.005} = -2.807$$

olur. Demek ki sıfır önsavı bu düzeyde reddedilir.

ARDIŞIK BAĞIMLI HATALARIN DOĞURDUĞU SONUÇLAR

Ardışık bağımlı hataları olan bir regresyon modeline sıradan en küçük kareler çözümlemesi uygulamanın doğurduğu sonuçlar son derece ciddi olabilir. Eğer ardışık bağımlılık görmezden gelinirse şu üç sonuç ortaya çıkar:

1. Regresyon modelinin anakütle katsayılarının en küçük kareler tahmin edicileri etkin olmama eğilimindedir. Ardışık bağımlı hatalar hesaba katılırsa genellikle daha üstün tahmin ediciler elde edilir.
2. Bağımlı değişkenin standart çözümlemelerle elde edilen gelecek değer kestirimleri gereksiz yere etkinlikten uzaktır.
3. Güven aralıkları ve önsav sınamalarına dayanan bildik çıkarsama söylemleri kötü biçimde yanıltıcıdır.

GECİKMELİ BAĞIMLI DEĞİŞKENİ OLAN MODELLERDE ARDIŞIK BAĞIMLI HATALAR

Bir regresyon modeli gecikmeli bağımlı değişken içeriyorsa ardışık bağımlı hatalar varken alışıldık en küçük kareler çıkarsama süreçlerini uygulamanın doğuracağı sonuçlar öbür modellerdekinden daha da ciddidir. Bu durumda en küçük kareler katsayı tahminleri tutarsızdır.[18] Ardışık bağımlı hataların sınanması ve ardışık bağımlı hatalar varken tahmin yapılması için daha önce tartışılan süreçler, gecikmeli bağımlı değişkenli modellerde ne yazık ki geçersizdir. Burada uygun süreçlerden kısaca söz edeceğiz.

Şu modeli ele alalım:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (14.8.9)$$

Bu modelin n kümeden oluşan örneklem gözlemlerine en küçük karelerle uydurulduğunu düşünelim. Bildiğimiz Durbin-Watson istatistiği aşağıdaki eşitlikte görülen d olsun:

$$r = 1 - \frac{d}{2}$$

Gecikmeli bağımlı değişkenin tahmin edilen katsayısı γ'nın tahmin edilmiş standart hatası s_c ile gösterilsin. Sıfır önsavımız ardışık bağımlılık katsayısı ρ'nun 0 olduğunu söylemektedir. Bu önsavın büyük örneklemlerde yaklaşık geçerli olan bir sınaması **Durbin'in *h* istatistiğine** dayanır:

---

[18] Bir tahmin edicinin tutarlılık özelliği Altbölüm 7.3'te incelenmişti.

$$h = r\sqrt{n/(1-ns_c^2)} \qquad (14.8.10)$$

Sıfır önsavı doğruyken büyük örneklemlerde bu istatistik standart normal dağılıma çok yaklaşır. Bu durumda (14.8.10) istatistiği sözgelimi 1.645'i geçerse, ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı, ρ artıdır diyen karşı önsav lehine %5 düzeyinde reddedilir.

Ardışık bağımlı hata modeli

$$u_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

ise (14.8.9)'u kullanıp (14.8.8)'e karşılık şunu yazabiliriz:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta_1(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}) + \cdots$$
$$+ \beta_K(x_{Kt} - \rho x_{K,t-1}) + \gamma(Y_{t-1} - \rho Y_{t-2}) + u_t \qquad (14.8.11)$$

Anakütle katsayılarını tahmine kalkışmanın yalnızca sıradan bir en küçük kareler bilgisayar programı gerektiren bir yolu, ρ'nun —diyelim 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 gibi— olanak içindeki değerlerini sırasıyla (14.8.11)'de yerine koymaktır. Sonra en küçük kareler kullanılarak $(Y_t - \rho Y_{t-1})$'in $(x_{1t} - \rho x_{1,t-1}), \ldots,$ $(x_{Kt} - \rho x_{K,t-1})$, $(Y_{t-1} - \rho Y_{t-2})$'ye göre regresyonu olanak içindeki her ρ değeri için tahmin edilir. Ortaya çıkan hata kareleri toplamları içinden en küçüğünü veren ρ değeri seçilir. Buna karşılık gelen (14.8.11) regresyonuna dayanılarak β_i için çıkarsamalar yapılır.

14.9 ÖZET

Bu bölümde, regresyon modellemesinin Bölüm 12 ve 13'te anlatılan olağan uygulamadan çok daha fazla şeyler gerektirdiğini göstermeye çalıştık. Uygulamada başarılı model kurmada bu işin sanatını bilmek ve özen göstermek gerekir. Özellikle, önemli açıklayıcı değişkenler gözardı edilmemelidir. Bazı önemli etmenler gölge değişken kullanılmasını gerektirebilir. Model kurarken gözönüne alınması gereken başka bazı noktalar, gecikmeli bağımlı değişken kullanılması ve log doğrusal kalıp gibi doğrusal olmayan kalıpların da düşünülmesidir.

Gördüğümüz gibi, bir regresyon modelindeki hata terimlerinin davranışına ilişkin yapılan varsayımların da elden geldiğince gözden geçirilmesi de çok önemlidir. Değişen varyansın ve ardışık bağımlı hataların sınanmaları yapılabilir

ve eğer bunlardan birinin varlığı anlaşılırsa regresyon modeli yeniden tahmin edilmelidir.

Standart regresyon uygulamasından sapma gerektirecek durumlar hiçbir biçimde bu sayılanlarla sınırlı değildir. Ama bu sayılanlar en önemli işletmecilik ve iktisat uygulamaları arasında olup çok iyi yönetilmiş uygulamalı çalışmalarda bunlardan en az biri kullanılmıştır.

ALIŞTIRMALAR

28. Bölüm 12'de, hane başına perakende satışların hane başına harcanabilir gelire göre regresyonu en küçük karelerle tahmin edilmişti. Veriler Çizelge 12.5'te verilmiş, kalıntılar ile bağımlı değişkenin kestirim değerleri Çizelge 12.7'de gösterilmişti.
- **(a)** Regresyon hatalarındaki değişen varyansı görsel olarak inceleyin.
- **(b)** Biçimsel bir sınama kullanarak değişen varyansın varolup olmadığını inceleyin.

29. Alıştırma 4'e dönelim. Uygulanan regresyonun kalıntılarını e_i, bağımlı değişkenin örneklem kestirim değerlerini $\hat{y}_i$ ile gösterelim. ε_i^2 'nin $\hat{y}_i$ 'ye göre en küçük kareler regresyonunun belirlilik katsayısı 0.032'dir. Bu bulgudan nasıl bir sonuç çıkarırsınız?

30. Bölüm 13'teki Alıştırma 38'de, işgücü içinde kadın yüzdesini açıklayan bir regresyon elli eyaletin verisine uydurulmuştu.
- **(a)** Regresyon hatalarındaki değişen varyansı görsel olarak inceleyin.
- **(b)** Biçimsel bir sınama kullanarak değişen varyansın varolup olmadığını inceleyin.

31. Otuz yıllık gözlemlere dayanan bir regresyonda, ABD tarım geliri dört bağımsız değişken —tahıl dışsatımı, federal hükümet desteklemeleri, nüfus ve kötü hava yıllarını yansıtan bir gölge değişken— ile ilişkilendirilmiştir. En küçük karelerle verilere uydurulan regresyonda Durbin-Watson istatistiği 1.29 bulunmuştur. ε_i^2 'nin $\hat{y}_i$ 'ye göre regresyonunun belirlilik katsayısı 0.043'tür.
- **(a)** Değişen varyans sınamasını yapın.
- **(b)** Ardışık bağımlı hatalar sınamasını yapın.

32. Aşağıdaki regresyon modelini alalım:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

Eğer

$$\text{Var}(\varepsilon_i) = K x_i^2 \qquad (K > 0)$$

ise

$$Var\left(\frac{\varepsilon_i}{x_i}\right) = K$$

olduğunu gösterin. Bu bulgunun değişen varyans kalıbının sınanmasıyla olası bir ilgisini tartışın.

33. Alıştırma 7'ye dönelim. Uygulanan regresyonun kalıntılarını e_i, bağımlı değişkenin örneklem kestirim değerlerini $\hat{y}_i$ ile gösterelim. ε_i^2 'nin $\hat{y}_i$ 'ye göre en küçük kareler regresyonunun belirlilik katsayısı 0.087'dir. Bu bulgudan nasıl bir sonuç çıkarırsınız?

34. Bölüm 13'te Hindistan'da reel mevduat faiz oranını açıklayan Alıştırma 53'e dönelim. Verilere uydurulan regresyon modelinde Durbin-Watson istatistiği 1.71'dir. Ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavını, ardışık bağımlılık aynı yönlüdür diyen karşı önsavla sınayın.

35. Almanya'nın reel dışsatımı konusundaki Alıştırma 18'e dönelim. Verilere uydurulan regresyonun Durbin-Watson istatistiğinden ne sonuç çıkarılabilir?

36. Sığır eti tüketimi konusundaki Alıştırma 17'ye dönelim. Verilere uydurulan regresyon modelinde Durbin-Watson istatistiği 1.72'dir. Ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavını, ardışık bağımlılık aynı yönlüdür diyen karşı önsavla sınayın.

37. Bölüm 12'deki hane başına perakende satışların hane başına harcanabilir gelire göre regresyonuna dönelim.

(a) Durbin-Watson d istatistiğini hesaplayın.

(b) Regresyon hatalarında ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

(c) Gerekiyorsa ardışık bağımlılığı dikkate alarak modeli yeniden tahmin edin.

38. Bir fabrika işleticisi birim başına ürün maliyetinin (y), ücret düzeyine (x_1), öbür girdi maliyetlerine (x_2), sabit maliyetlere (x_3), reklâm harcamalarına (x_4) dayandığını ileri sürmektedir. Yirmidört aylık bir dizi gözlem elde edilmiş, modelin en küçükl kareler tahmini aşağıdaki bulguları vermiştir:

$$y = 0.75 + 0.24\,x_{1t} + 0.56\,x_{2t} - 0.32\,x_{3t} + 0.23\,x_{4t}$$

$$(0.07) \quad (0.12) \quad (0.23) \quad (0.05)$$

$$R^2 = 0.79 \qquad d = 0.85$$

Tahmin edilmiş katsayıların altında ayraç içindeki sayılar ilgili standart hatalardır. Bu bulgulardan nasıl bir sonuca varırsınız?

39. Aşağıdaki çizelge bir tüketim kooperatifinin peşpeşe 20 yıl boyunca satışları (y) ile reklâmlarını (x) göstermektedir:

y	x	y	x	y	x
102	61	109	58	220	86
92	45	109	61	251	102
93	53	115	54	273	136
98	54	133	75	318	148
93	53	198	61	335	161
105	55	222	86	344	180
118	52			292	185

Şu regresyonu tahmin edin:

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

(a) Bu modelde ardışık bağımlı hataların varlığını araştırın.

(b) Gerekiyorsa ardışık bağımlılığı hesaba katarak modeli yeniden tahmin edin.

40. Bir zaman serisi regresyon modelinde önemli bir bağımsız değişkeni dışarıda bırakmak ardışık bağımlı hataların ortaya çıkmasına yol açabilir. Altbölüm 14.5'te tasarruf sandıkları verileriyle kâr marjını net gelirle ilişkilendiren

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon_t$$

modelini tahmin etmiştik. Bu modelin kalıntılarına Durbin-Watson sınamasını uygulayın. Bu bulgulardan neler çıkarabilirsiniz?

41. Öğrencilerin giyime harcadıkları parayı ele alan Alıştırma 9'a dönelim. Veriere uydurulan regresyon modelinde Durbin-Watson istatistiği 1.82'ydi. Ardışık bağımlı hatalar yoktur diyen sıfır önsavını aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır diyen karşı önsavla sınayın.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

42. Regresyon modellerini kurarken aşağıdakilerin her birinin kullanımını açıklayan, örnekler de içeren kısa raporlar yazın.
(a) Gölge değişkenler.
(b) Gecikmeli bağımlı değişkenler.
(c) Logaritmalı dönüştürme.

43. Altbölüm 14.2'de aşağıdaki modelin verilere uydurulmasını ele almıştık:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

Burada

Y = Bir ülkedeki gayrisafi ürünün yüzdesi olarak vergi gelirleri
x_1 = Bir ülkedeki gayrisafi ürünün yüzdesi olarak dışsatım
x_2 = Ülkedeki kişi başına gelir
x_3 = Eğer ülke bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmışsa 1, katılmamışsa 0 değerini alan gölge değişken

Bu, bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmanın vergi gelirleri üstündeki etkisinin hesaba katılmasını sağlar. Başka bir olanak da aşağıdaki regresyonu, bir tür iktisadi bütünleşmeye katılmış ve katılmamış ülkeler için ayrı ayrı tahmin etmektir:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Bu iki yaklaşımın farkını açıklayın.

44. Aşağıdaki söylemi tartışın: "Pek çok uygulamalı regresyon çalışmasında çoklu doğrusallık o kadar ciddidir ki, bağımlı değişkenin her bir bağımsız değişkene göre ayrı ayrı basit regresyonunu tahmin etmek en iyisidir."

45. Aşağıdakilerden her birinin yapısını ve doğurduğu güçlükleri açıklayın:
(a) Değişen varyans
(b) Ardışık bağımlı hatalar

46. Aşağıdaki model 90 İngiliz elektronik şirketinin verilerine uydurulmuştur:[19]

$$y = 0.819 + 2.11\,x_1 + 0.96\,x_2 - 0.059\,x_3 + 5.87\,x_4 + 0.00226\,x_5 \qquad \bar{R}^2 = 0.410$$

$$(1.79) \quad (1.94) \quad (0.144) \quad (4.08) \quad (0.00115)$$

Burada ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş standart hatalardır ve

$y =$ Pay senedi fiyatı
$x_1 =$ Pay senedi başına kazanç
$x_2 =$ Pay senedi başına fon akışı
$x_3 =$ Pay senedi başına dağıtılan kâr
$x_4 =$ Pay senedi başına defter değeri
$x_5 =$ Bir büyüme ölçüsü

(a) x_1'in katsayısı anakütle regresyonunda sıfırdır diyen sıfır önsavını, gerçek katsayı artıdır diyen karşı önsavla %10 düzeyinde sınayın.

(b) x_2'nin katsayısı anakütle regresyonunda sıfırdır diyen sıfır önsavını, gerçek katsayı artıdır diyen karşı önsavla %10 düzeyinde sınayın.

(c) x_1 değişkeni modelden çıkarılıp y'nin (x_2, x_3, x_4, x_5)'e göre regresyonu tahmin edilmiştir. x_2'nin tahmin edilen katsayısı 3.10, bunun standart hatası 0.68 çımmıştır. Sonra ilk modelden x_2 çıkarılmış, y'nin (x_1, x_3, x_4, x_5)'e göre regresyonu tahmin edilmiştir. x_1'in tahmin edilen katsayısı 2.95, bunun standart hatası 0.63 çıkmıştır. Bu bulgular (a) ve (b)'dekilerle nasıl bağdaştırılabilir?

47. 1987'deki dış borçlarının tahvillerinin piyasa değerini açıklamak için, yirmisekiz az gelişmiş ülkenin o yılki verilerine aşağıdaki model uydurulmuştur:[20]

$$y = 77.2 - 9.6\,x_1 - 17.2\,x_2 - 0.15\,x_3 + 2.2x_4 \qquad R^2 = 0.84$$

$$(8.0) \quad (2.73) \quad (0.056) \quad (1.0)$$

Burada

$Y =$ 100 $'lık ülke tahvilinin 1987 fiyatlarıyla ikinci el piyasa fiyatı, dolar
$x_1 =$ ABD banka yöneticileri o ülkenin varlıklarının ABD banka hesaplarında kaydedilmesini öngörmüşlerse 1, tersi durumda 0
$x_2 =$ Ülke faiz ödemelerini 1987'de durdurmuşsa 1, 1987'den önce durdurmuşsa ve durum hâlâ askıdaysa 2, tersi durumda 0
$x_3 =$ Borcun gayrisafi ulusal ürüne oranı
$x_4 =$ Reel gayrisafi ülusal ürünün 1980-85 büyüme oranı

---

[19] J. Board, B. Rees, C. Sutcliffe, "Measuring the incremental information content of multiple accounting signals: a note on the use of the singular value decomposition," *Journal of Business, Finance and Accounting, 19* (1992), 447-54.

[20] J. Sachs, H. Huizinga, "U.S. commercial banks and the developing-country debt crisis," *Brookings Papers on Economic Activity* (1987), 555-601.

(a) x_1'in tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.
(b) Öbür her şey aynıyken, borcun gayrisafi ulusal ürüne oranı bir ülke borcunun piyasa değerini doğrusal etkilemez diyen sıfır önsavını, bu oran arttıkça borcun değeri de düşer diyen karşı önsavla sınayın.
(c) Belirlilik katsayısını yorumlayın.
(d) x_2 gölge değişkeni alışılmadık biçimde tanımlanmıştır. Başka bir yol x_2 yerine aşağıdaki gibi tanımlanan (x_5, x_6) gibi iki değişken koymak olabilirdi:

x_5 = Ülke faiz ödemelerini 1987'de durdurmuşsa 1, tersi durumda 0
x_6 = Ülke faiz ödemelerini 1987'den önce durdurmuşsa ve durum hâlâ askıdaysa 1, tersi durumda 0

Bu iki almaşık tanımlamanın yaratacağı sonuçları karşılaştırın.

48. Orta düzeyde iktisat derslerinde öğrenci başarısını açıklamaya yönelik bir regresyon modeli kurma girişiminde bulunulmuştur.[21] Düşünülen anakütle regresyon modeli şudur:

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_7 x_7 + \varepsilon$$

Burada

Y = Orta düzeyde iktisat derslerinde öğrencinin toplam notu
x_1 = Akademik beceri sınavındaki sayısal not
x_2 = Akademik beceri sınavındaki sözel not
x_3 = Üniversitede cebir notu (A = 4, B = 3, C = 2, D = 1)
x_4 = Üniversitede iktisat ilkeleri dersi notu
x_5 = Öğrenci kız ise 1, erkekse 0 değerini alan gölge değişken
x_6 = Öğretim üyesi erkekse 1, kadınsa 0 değerini alan gölge değişken
x_7 = Öğrenci ile öğretim üyesi aynı cinsiyetten ise 1, değilse 0 değerini alan gölge değişken

Bu model 262 öğrenci verisine uydurulmuştur. Aşağıda, β_i tahmininin kendi standart hatasına oranı demek olan t oranlarını gösteriyoruz. Bu oranlar şöyledir:

$$t_1 = 4.69 \qquad t_2 = 2.89 \qquad t_3 = 0.46 \qquad t_4 = 4.90$$
$$t_5 = 0.13 \qquad t_6 = -1.08 \qquad t_7 = 0.88$$

Bu çalışmanın amacı öğrencinin ve öğretim üyesinin cinsiyetinin başarı üzerindeki etkisini değerlendirmektir. Bu konuda neler öğrenildiğine ilişkin kısa bir rapor yazın.

---

[21] C. Waldauer, V. G. Duggal, M. L. Williams, "Gender differences in economic knowledge: a further extension of the analysis," *Quarterly Journal of Economics and Finance, 32*, no. 4 (1992), 138-43.

49. Aşağıdaki regresyon otuziki yıllık zaman serisi verisine en küçük karelerle uydurulmuştur:

$$\log y_t = 4.52 - 0.62 \log x_{1t} + 0.92 \log x_{2t} + 0.61 \log x_{3t} + 0.16 \log x_{4t}$$
$$(0.28) \qquad (0.38) \qquad (0.21) \qquad (0.12)$$
$$\overline{R}^2 = 0.638 \qquad d = 0.61$$

Burada

$y_t =$ İhraç edilen ABD buğdayı miktarı
$x_{1t} =$ ABD buğdayının dünya pazarlarındaki fiyatı
$x_{2t} =$ Üretilen ABD buğdayı
$x_{3t} =$ ABD buğdayı ithal eden ülkelerde gelir ölçüsü
$x_{4t} =$ Dünya pazarlarında arpa fiyatı

(a) Düşünülen modelde $\log x_{1t}$'nin tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.
(b) Öbür her şey aynıyken, ithalatçı ülkelerdeki gelir ABD'nin buğday ihracatını etkilemez diyen sıfır önsavını, gelir ne kadar yüksekse beklenen ihracat da o kadar yüksektir diyen karşı önsavla %5 düzeyinde sınayın. (Şimdilik Durbin-Watson d istatistiğini görmezden gelin.)
(c) d istatistiğiyle hangi sıfır önsavı sınanabilir? Bu soru için bu sınamayı %1 anlamlılık düzeyini kullanarak yapın.
(d) (c)'deki yanıtınızın ışığında (b)'deki yanıtınız konusunda ne söyleyebilirsiniz? (b)'deki sıfır önsavını sınamak için ne yapardınız?

50. Aşağıdaki regresyon otuz yıllık zaman serisi verisine en küçük karelerle uydurulmuştur:

$$\log y_t = 4.31 + 0.27 \log x_{1t} + 0.53 \log x_{2t} - 0.82 \log x_{3t}$$
$$(0.17) \qquad (0.21) \qquad (0.30)$$
$$\overline{R}^2 = 0.615 \qquad d = 0.49$$

Burada

$y_t =$ İflâs sayısı
$x_{1t} =$ İşsizlik oranı
$x_{2t} =$ Kısa dönem faiz oranı
$x_{3t} =$ Verilen yeni siparişlerin tutarı

(a) Düşünülen modelde $\log x_{3t}$'nin tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.
(b) d istatistiğiyle hangi sıfır önsavı sınanabilir? Bu soru için bu sınamayı %1 anlamlılık düzeyini kullanarak yapın.
(c) (b)'deki yanıtınız veriyken, verilen bilgilerle, öbür her şey aynıyken, kısa dönem faiz oranı iflâsları etkilemez diyen sıfır önsavı sınanabilir mi?

(d) Regresyon modelindeki ardışık hata terimleri arasındaki korelasyonu tahmin edin.

51. Bir borsa komisyoncusu, banka pay senetlerinin getiri oranlarını etkileyen etmenlerle ilgilenmektedir. Otuz bankalık bir örneklem için aşağıdaki regresyon en küçük karelerle tahmin edilmiştir:

$$y = 2.37 + 0.84\,x_1 + 0.15\,x_2 - 0.13\,x_3 + 1.67x_4 \qquad R^2 = 0.317$$

$$(0.39) \quad (0.12) \quad (0.09) \quad (1.97)$$

Burada

$y =$ Banka pay senetlerinin getiri yüzdesi
$x_1 =$ Banka kazançlarının büyüme yüzdesi
$x_2 =$ Banka varlıklarının büyüme yüzdesi
$x_3 =$ Batık kredilerin banka varlıklarına oranı
$x_4 =$ Banka genel merkezi New York'ta ise 1, değilse 0

(a) x_4'ün tahmin edilmiş katsayısını yorumlayın.
(b) Belirlilik katsayısını yorumlayın ve dört bağımsız değişken birlikte bağımlı değişkeni doğrusal olarak etkilemez diyen sıfır önsavını sınamada bu katsayıyı kullanın.
(c) Verilere uydurulmuş regresyon kalıntılarını e_i ile, bağımlı değişkenin örneklem içi kestirilen değerlerini $\hat{y}_i$ ile gösterelim. e_i^2'nin $\hat{y}_i$'ye göre en küçük kareler regresyonunda belirlilik katsayısı 0.082 çıkmıştır. Bu bulgudan nasıl bir sonuç çıkarılabilir?

52. Bir pazarlama araştırmacısı, öğrencilerin eğlenceye yılda ortalama kaç para harcadığıyla ilgilenmektedir. 30 yıllık verilerden en küçük karelerle aşağıdaki regresyon tahmin edilmiştir:

$$y = 40.93 + 0.253x_t + 0.546y_{t-1} \qquad d = 1.86$$

$$(0.106) \quad (0.134)$$

Burada

$y =$ Öğrenci başına eğlence harcaması, dolar
$x_t =$ Okul ücreti, beslenme ve barınma ödemelerinden sonra öğrenciye kalan harcanabilir gelir, dolar

(a) x_t değişkeninin anakütle regresyonundaki katsayısının %95 güven aralığını bulun.
(b) Öğrenci başına harcanabilir gelirde 1 $'lık artışın eğlence harcaması üzerindeki beklenen etkisi ne olur?
(c) Hatalarda ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavını, aynı yönlü ardışık bağımlılık vardır diyen karşı önsavla sınayın.

53. Yerel bir elektrik şirketi, bir konutun aylık ortalama elektrik faturasını kestirmek istemektedir. Şirketin istatistikçisi en küçük karelerle aşağıdaki regresyonu tahmin etmiştir:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

Burada

Y = Aylık ortalama elektrik faturası, dolar
x_1 = Araba için iki aylık ortalama benzin harcaması, dolar
x_2 = Konuttaki oda sayısı

İstatistikçi yirmibeş konutluk bir örneklemden aşağıda bir bölümü gösterilen SAS programı çıktısını elde etmiştir:

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	–10.8030		
X1	–0.0247	–0.956	0.0259
X2	10.9409	18.517	0.5909

(a) β_2'nin en küçük kareler tahminini bu soru bağlamında yanıtlayın.

(b) H_0: $\beta_1 = 0$

önsavını, iki yanlı karşı önsavla sınayın.

(c) İstatistikçi çoklu doğrusallıktan kuşkulanmaktadır. Bu sorunun ne kadar ciddi olabileceğini anlamak için hangi bilgi gereklidir?

(d) Hane gelirinin elektrik faturasının tutarını belirlemede önemli olduğu ileri sürülmüştür. Eğer durum böyleyse, istatistikçinin tahmin ettiği regresyon için ne söyleyebilirsiniz?

(e) Verilere uydurulmuş model verilmişken, istatistikçi $\hat{y}_i$ elektrik faturası kestirimleri ile e_i kalıntılarını elde etmiş, daha sonra e^2'lerin $\hat{y}$'lara göre regresyonunu tahmin ederek belirlilik katsayısını 0.0470 bulmuştur. Bu bulguyu yorumlayın.

54. Aşağıdaki çizelge Endonezya'da petrol dışı toplam vergi gelirleri (y), ulusal gelir (x_1) ve gayrisafi yurtiçi ürünün yüzdesi olarak petrolün katma değerini (x_2) onbeş yıllık gözlemlerle göstermektedir. En küçük karelerle

$$\log Y_t = \alpha + \beta_1 \log x_{1t} + \beta_2 \log x_{2t} + \varepsilon_t$$

regresyonunu tahmin edin. Bulgularınızı özetleyen, ardışık bağımlı hatalar sınamasını da içeren bir rapor yazın.

YIL	y	x_1	x_2	YIL	y	x_1	x_2
1	177.9	2,570	4.7	9	1,586.7	17,097	18.9
2	245.4	3,071	5.3	10	1,957.4	20,371	19.2
3	287.3	3,367	8.0	11	2,437.2	28,452	21.8
4	360.1	4,109	10.8	12	3,201.4	40,473	25.7
5	585.5	6,069	12.3	13	2,584.8	48,590	24.0
6	796.5	9,505	22.2	14	4,247.9	53,799	19.6
7	993.9	11,266	19.7	15	4,912.5	62,550	19.4
8	1270.7	11,028	18.9				

55. Aşağıdaki çizelge, yirmiiki yıllık gözlemle Federal Alman Cumhuriyeti'nde ücret ve maaşlardaki yüzde değişmeyi (y), verimlilik artışını (x_1) ve gayrisafi ulusal ürün deflatörüyle ölçülen enflasyon oranını (x_2) göstermektedir. En küçük karelerle

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

regresyonunu tahmin edin. Bulgularınızı özetleyen, değişen varyans sınamasıyla ardışık bağımlı hatalar sınamasını da içeren bir rapor yazın.

YIL	y	x_1	x_2	YIL	y	x_1	x_2
1	9.0	3.5	4.5	12	12.0	5.0	6.1
2	6.0	2.8	3.0	13	12.5	2.3	6.9
3	8.9	6.3	3.1	14	8.5	1.5	7.1
4	9.0	4.5	3.8	15	5.9	6.0	7.1
5	7.1	3.1	3.8	16	6.8	2.9	3.7
6	3.2	1.5	1.1	17	5.6	2.8	3.9
7	6.5	7.6	2.3	18	4.8	2.6	3.9
8	9.1	6.7	3.6	19	6.7	0.9	4.8
9	14.6	4.2	7.5	20	5.5	0.6	4.3
10	11.9	2.7	8.0	21	4.0	0.7	4.8
11	9.4	3.5	6.3	22	3.3	3.1	3.2

56. Aşağıdaki çizelge Japonya'da dışalım miktarı (y), dışalım fiyatlarının yurtiçi fiyatlara oranı (x_1) ve reel gayrisafi yurtiçi ürünü (x_2) otuzbeş yıllık gözlemlerle göstermektedir. En küçük karelerle

$$\log Y_t = \alpha + \beta_1 \log x_{1t} + \beta_2 \log x_{2t} + \gamma \log y_{t-1} + \varepsilon_t$$

regresyonunu tahmin edin. Bulgularınızı özetleyen, ardışık bağımlı hatalar sınamasını da içeren bir rapor yazın.

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
78.7	0.8450	77.3	94.5	0.6150	89.4	97.0	1.0010	102.1
80.4	0.8264	78.2	95.0	0.5487	90.4	93.6	1.0214	103.0
84.0	0.8391	79.7	102.1	0.5447	91.6	101.1	0.9787	103.0
80.9	0.8484	81.2	104.2	0.5970	92.9	103.3	0.9663	104.1
86.5	0.8188	82.4	106.7	0.6695	94.5	96.7	0.9895	105.6
89.7	0.7986	83.1	105.8	0.7916	95.5	92.1	1.0391	106.5
91.7	0.8060	83.8	108.2	0.9323	96.6	95.1	1.0459	106.9
89.8	0.7886	85.3	98.0	1.5067	97.9	94.1	0.9364	107.1
89.7	0.7611	86.9	104.0	1.0494	98.3	95.5	0.8975	108.3
88.5	0.7345	87.0	96.6	0.9781	99.5	94.6	0.9190	109.9
91.3	0.6854	88.4	100.8	0.9427	100.0	108.2	0.8878	110.8
90.6	0.6608	88.4	97.9	0.9449	101.5			

57. Federal Mevduat Sigortası Şirketi'nin (FDIC) bankaları denetlemedeki çalışan kişi saati başına maliyet konusunda bir çalışma yapılmıştır.[22] Veriler bu tür doksan bir denetlemeden elde edilmiştir. Bu denetlemelerden bazılarını FDIC kendi başına, bazılarını da devlet denetmenleriyle birlikte yürütmüştür. Denetmenler banka yönetimlerini iyi, doyurucu, yeterli, doyurucu değil diye değerlendirmişlerdir. Tahmin edilen model şöyledir:

$$\log y = 2.41 + 0.3674 \log x_1 + 0.2217 \log x_2 + 0.0803 \log x_3$$
$$(0.0477) \qquad (0.0628) \qquad (0.0287)$$
$$- 0.1755 x_4 + 0.2799 x_5 + 0.5634 x_6 - 0.2572 x_7 \quad R^2 = 0.766$$
$$(0.2905) \quad (0.1044) \quad (0.1657) \quad (0.0787)$$

Burada

$y =$ FDIC denetmeninin çalışan kişi saati
$x_1 =$ Bankanın toplam varlıkları
$x_2 =$ Bankanın şube sayısı
$x_3 =$ Bankanın batık kredilerinin verdiği toplam kredilere oranı
$x_4 =$ Yönetime verilen not "iyi" ise 1, değilse 0
$x_5 =$ Yönetime verilen not "yeterli" ise 1, değilse 0
$x_6 =$ Yönetime verilen not "doyurucu değil" ise 1, değilse 0
$x_7 =$ Denetim devlet denetimiyle birlikte yapıldıysa 1, değilse 0

Katsayı tahminlerinin altında, ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart hatalardır.
Bu bulgularla bir rapor yazın.

[22] R. J. Miller, "Examination of man-hour cost for independent, joint and dividend examination programs," *Journal of Bank Research, 11* (1980), 28-35.

58. Aşağıdaki çizelge, yirmi yıllık bir dönem için İngiltere'de hastalık nedeniyle kişi başına çalışılmayan günleri (y), erkek işsizlik oranını (x_1), hastalık yardımlarının kazançlara oranını (x_2) ve reel ücret düzeyini (x_3) göstermektedir.[23]

$$\log Y_t = \alpha + \beta_1 \log x_{1t} + \beta_2 \log x_{2t} + \beta_3 \log x_{3t} + \varepsilon_t$$

regresyonunu tahmin edip bulgularınızla bir rapor yazın. Çözümlemleriniz sırasında ardışık bağımlı hatalar sınamasını yapıp, gerekirse sorunu düzeltin.

YIL	y	x_1	x_2	x_3	YIL	y	x_1	x_2	x_3
1	12.2	1.5	0.367	1.190	11	13.5	2.0	0.446	1.362
2	12.2	1.2	0.394	1.216	12	13.9	1.8	0.493	1.355
3	11.7	1.3	0.371	1.250	13	14.1	2.0	0.686	1.364
4	11.9	1.7	0.355	1.267	14	15.1	3.2	0.732	1.383
5	12.1	2.4	0.440	1.273	15	15.4	3.4	0.728	1.407
6	12.3	2.5	0.419	1.299	16	15.8	3.3	0.710	1.406
7	11.9	1.9	0.395	1.318	17	15.4	3.6	0.727	1.454
8	12.1	1.9	0.443	1.329	18	15.0	4.7	0.779	1.501
9	12.8	2.5	0.430	1.321	19	15.7	5.1	0.737	1.593
10	12.9	3.1	0.474	1.342	20	16.2	3.6	0.706	1.660

[23] R. B. Thomas, "Wages, sickness benefits, and absenteeism," *Journal of Economic Studies*, 7, no. 1(1980), 51-61'den alınmıştır. © M.C.B. Publications Limited, Bradford, United Kingdom.

BÖLÜM 15



Varyans Çözümlemesi

15.1 BİRKAÇ ANAKÜTLE ORTALAMASININ KARŞILAŞTIRILMASI

Altbölüm 9.6'da iki anakütle ortalaması eşittir diyen önsavın nasıl sınanacağını gördük. Aslında deney tasarımına —yani örneklem gözlemlerinin türetilmesinde kullanılan düzeneğe— bağlı olarak iki ayrı sınama geliştirdik. Daha açık söylersek, sınamalarımız ya eşlenik gözlemleri ya da bağımsız rassal örneklemleri varsaydı. Önemli olan bu ayırımı açıkça ortaya koymak için basit örnek vermek üzere bir an duraklayalım. A ve B gibi iki marka arabanın yakıt tüketim kayıtlarını karşılaştırmak istediğimizi düşünelim. Bu arabaları belli bir mesafede kullanmak üzere on kişiyi rassal olarak seçip her sürücüye iki marka arabadan birer tane verebiliriz, böylelikle belli bir sürücü hem A, hem B arabasını sürmüş olur. Sonuçta ortaya çıkan yakıt tüketim rakamları, her çift tek bir sürücüye karşılık olmak üzere, on çiftten oluşur. İşte buna **eşlenik çiftler** tasarımı denir, bu tasarımın çekiciliği, bir yandan ilgilenilen büyüklükler (örneğimizde iki marka arabanın yakıt tüketimleri) arasında karşılaştırma yapabilmemizi, öte yandan ek bir ilgili etmenin (tek tek sürücü farklarının) olası önemini hesaba katabilmemizi sağlamasında yatar. Böylece A ve B arabalarının başarımları arasında anlamlı bir fark çıkarsa bunun sürücü davranışları farkından doğmadığını kesinlikle biliriz. Almaşık bir tasarım, yirmi sürücü alıp bunların onunu A, onunu B arabalarına atamak olabilir (aslında bu durumda iki tür arabadan eşit sayıda bulunması gerekmez). Elde edilen yirmi yakıt tüketim verisi, her biri hem A, hem B arabalarına ilişkin onar gözlemli bir çift **bağımsız rassal örneklemi** oluşturur.

Bir çift anakütle ortalamasının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınamanın bu iki tür tasarımın her biri için uygun süreçlerini Altbölüm 9.6'da ele aldık. Bu bölümdeki amacımız bu süreçleri, ikiden çok anakütle ortalamasının eşitliğini sınayacak biçimde genişletmektir. Sözgelimi, çalışmamıza üçüncü bir marka olan C arabaları katılmış olsun. Bu durumda ilgilenilen sıfır önsavı, her üç tür arabanın yakıt tüketiminin anakütledeki ortalamalarının eşit olduğunu söyler. Bağımsız rassal örneklemlerin alındığı durumla işe başlayarak bu tür önsavların nasıl sınanacağını göreceğiz. Altbölüm 15.4'te bu sınamanın eşlenik çiftlere genişletilmiş biçimini ele alacağız.

Yirmi sürücünün yedisinin A, yedisinin B, altısının da C arabalarına rassal olarak ayrıldığını düşünelim. Çizelge 15.1, bu denemelerin sonunda elde edilen verileri göstermektedir.

Amacımız anakütle ortalamalarını karşılaştırmak olduğuna göre örneklem ortalamalarının hesaplanmasıyla işe başlanabileceği açıktır. Bu verilerle Çizelge 15.1'den şunları elde ederiz:

$$\text{A arabalarının örneklem ortalaması} = \frac{146.3}{7} = 20.9$$

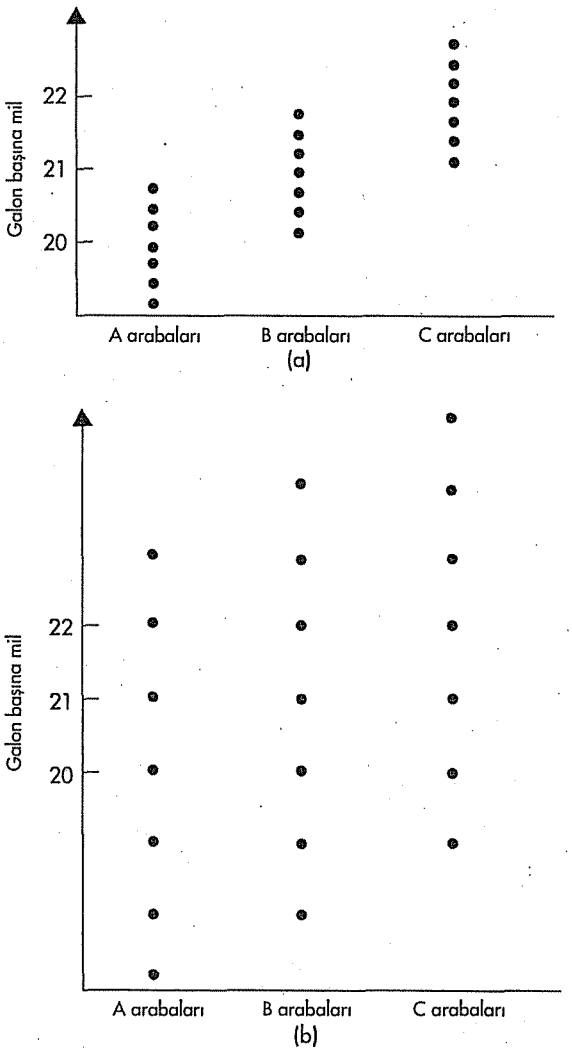
$$\text{B arabalarının örneklem ortalaması} = \frac{162.4}{7} = 23.2$$

$$\text{C arabalarının örneklem ortalaması} = \frac{137.4}{6} = 22.9$$

Doğal olarak bu örneklem ortalamaları aynı değildir. Ancak, önsav sınaması yaparken her zaman olduğu gibi, aslında sıfır önsavı doğruyken böyle farkların şans eseri ortaya çıkabilmeleriyle ilgileniyoruz. Eğer bu farklılıkların şans eseri pek ortaya çıkamayabilecekleri sonucuna varılırsa, sıfır önsavının doğruluğu konusunda hatırı sayılır kuşkular doğar.

ÇİZELGE 15.1 Üç bağımsız rassal örneklemden elde edilen yakıt tüketimi verileri, galon başına mil

	A ARABALARI	B ARABALARI	C ARABALARI
	22.2	24.6	22.7
	19.9	23.1	21.9
	20.3	22.0	23.3
	21.4	23.5	24.1
	21.2	23.6	22.1
	21.0	22.1	23.4
	20.3	23.5	
Toplam	146.3	162.4	137.4



ÇİZİM 15.1 Üç marka arabanın yakıt tüketim verilerinin iki kümesi

Bu noktaları açıklığa kavuşturabilmek için, varsayımsal iki veri kümesini gösteren Çizim 15.1'e bakalım. Çizimin (a) bölümündeki örneklem ortalamaları ile (b) bölümündekiler tıpatıp aynıdır. Önemli olan farklılık, ilkinde gözlemlerin kendi örneklem ortalamalarına yakın, ikincide uzak dağılmalarıdır. (a) bölümünün gözle incelenmesi, bu verilerin, ortalamaları farklı üç anakütleden geldiği görüşünü kuvvetle desteklediklerini gösterir. Çizimin (b) bölümüne bakınca tam tersine, bu verilerin aynı anakütleden geldiklerini öğrenmek bizi pek şaşırtmaz.

Bu gösterim, anakütle ortalamalarının eşitliğinin sınanmasının tam özünü göstermeye yarar. Önemli olan etmen, verilerdeki *değişkenlik*tir. Çizim 15.1(a)' da olduğu gibi, örneklem ortalamaları *etrafındaki* değişkenlik örneklem ortalamaları *arasındaki* değişkenliğe göre daha azsa, anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavından kuşku duyma eğilimine gireriz. Çizim 15.1(b)'deki gibi, örneklem ortalamaları etrafındaki değişkenlik örneklem ortalamaları arasındaki değişkenliğe göre daha fazlaysa, sıfır önsavına karşı kanıt bir hayli zayıftır. Durum böyleyken, uygun bir sınamanın varyansların tahminini temel alacağını beklemek akla uygun görünmektedir. Gerçekten de durum böyledir. İşte bu nedenle de kullanılan genel tekniğe **varyans çözümlemesi** denmektedir.

15.2 TEK YÖNLÜ VARYANS ÇÖZÜMLEMESİ

Altbölüm 15.1'de tanıtılan sorun daha genel olarak ele alınabilir. Diyelim ki *her birinin varyansının aynı olduğu varsayılan* K tane anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak istiyoruz. Bu anakütlelerden $n_1, n_2, \ldots, n_K$ gözlemli bağımsız rassal örneklemler alınmış olsun. Alınan örneklem değerlerini x ile gösterecek, buna iki altim vereceğiz, böylece x_{ij}, i'inci anakütleden j'inci gözlemi gösterecektir. Daha sonra örneklem verilerini Çizelge 15.1'in düzeninde Çizelge 15.2'deki gibi sergileyeceğiz.

Anakütle ortalamalarının bu düzen içinde sınanma sürecine **tek yönlü varyans çözümlemesi** denir. Bu terim, öteki varyans çözümleme modelleri tartışıldığı zaman daha iyi anlaşılacaktır.

Tek Yönlü Varyans Çözümlemenin Çerçevesi

K tane anakütleden $n_1, n_2, \ldots, n_K$ gözlemli bağımsız rassal örneklemler alınmış olsun. Bunların anakütle ortalamaları $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ ile gösterilirse,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$$

sıfır önsavını sınamak için **tek yönlü varyans çözümlemesi** çerçevesi tasarlanır.

Bu altbölümde, K tane anakütleden alınan bağımsız rassal örneklemler verilmişken bu K tane anakütlenin ortalaması eşittir diyen sıfır önsavının sınanmasını geliştireceğiz. Açıkça görülen ilk adım, K tane gözlem öbeğinin örneklem ortalamalarının hesaplanmasıdır. Bu örneklem ortalamaları $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_K$ ile gösterilecektir. Bu durumda biçimsel olarak şunu yazabiliriz:

ÇİZELGE 15.2 K anakütleden alınmış bağımsız rassal örneklemlerin gözlemleri

ANAKÜTLE			
1	2	...	K
x_{11}	x_{21}		x_{K1}
x_{12}	x_{22}		x_{K2}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
x_{1n_1}	x_{2n_2}		x_{Kn_K}

$$(i = 1, 2, \ldots, K)$$

Burada n_i, i öbeğindeki örneklem gözlemlerinin sayısıdır. Daha önce Çizelge 15.1 verilerinden bulduklarımızı bu gösterimle yazalım:

$$\bar{x}_1 = 20.9 \qquad \bar{x}_2 = 23.2 \qquad \bar{x}_3 = 22.9$$

İlgilendiğimiz sıfır önsavı K tane anakütlenin ortak bir ortalaması olduğunu söyler. Bu durumda akla yakın bir adım, örneklem verilerinden bu ortak ortalamayı tahmin etmektir. Böyle bir tahmin için uygun görülebilecek bir seçim örneklem değerlerinin *genel ortalama*sıdır. Bu da bütün örneklem değerleri toplamının örneklem gözlemlerinin toplam sayısına bölümünden başka bir şey değildir. Bütün örneklem verilerinin toplam sayısına n dersek, şunu yazabiliriz:

$$n = \sum_{i=1}^{K} n_i$$

Öyleyse örneğimizde $n = 20$'dir. Örneklem gözlemlerinin genel ortalaması da aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n}$$

Burada çifte toplama gösterimi, bütün öbekler için her bir öbekteki her gözlemi —yani eldeki bütün gözlemleri— topladığımız anlamına gelir. Eşdeğer bir gösterim şöyledir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i \bar{x}_i}{n}$$

Çizelge 15.1'deki yakıt tüketimi verilerinin genel ortalaması aşağıdadır:

$$\bar{x} = \frac{(7)(20.9) + (7)(23.2) + (6)(22.9)}{20} = 22.305$$

Demek ki, A, B, C arabalarının yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları gerçekten aynı ise, bu ortak ortalamayı galon başına 22.305 mil olarak tahmin ederiz.

Altbölüm 15.1'de belirtildiği gibi, anakütle ortalamalarının eşitliği sınaması, örneklem üyelerinin gösterdiği iki tür değişkenliğin karşılaştırılmasını temel alır. Bunlardan birincisi, K gözlem öbeği içinde tekil örneklem ortalamaları dolayındaki değişkenliktir. Buna **öbekler içi değişkenlik** demek kolaylık sağlayabilir. İlgilendiğimiz ikinci değişkenlik K öbek ortalaması arasında olanıdır. Buna da **öbekler arası değişkenlik** denir. Şimdi örneklem verilerine dayanarak bu iki tür değişkenliği ölçecek ölçüler arayacağız.

Başlangıç olarak öbekler içi değişkenliği alalım. İlk öbekteki değişkenliği ölçebilmek için örneklem gözlemlerinin kendi örneklem ortalaması $\bar{x}_1$'den sapma karelerinin toplamını hesaplayalım:

$$\text{KT}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2$$

Benzer biçimde, örneklem ortalaması $\bar{x}_2$ olan ikinci öbek için,

$$\text{KT}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_1)^2$$

diye hesaplayabiliriz ve bu böyle sürer. Öyleyse ÖİKT ile gösterilen öbekler içi toplam değişkenlik, K öbeğin hepsinin kareler toplamlarının toplamıdır:

$$\text{ÖİKT} = \text{KT}_1 + \text{KT}_2 + \cdots + \text{KT}_K$$

ya da

$$\text{ÖİKT} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

Yakıt tüketimi verileri için şu değerler bulunur:

$$\text{KT}_1 = (22.2 - 20.9)^2 + (19.9 - 20.9)^2 + \cdots + (20.3 - 20.9)^2 = 3.76$$

$$\text{KT}_2 = (24.6 - 23.2)^2 + (23.1 - 23.2)^2 + \cdots + (23.5 - 23.2)^2 = 4.96$$

$$\text{KT}_3 = (22.7 - 22.9)^2 + (21.9 - 22.9)^2 + \cdots + (23.4 - 22.9)^2 = 3.46$$

Dolayısıyla öbekler içi kareler toplamı şöyledir:

$$\text{ÖİKT} = \text{KT}_1 + \text{KT}_2 + \text{KT}_3 = 3.76 + 4.06 + 3.46 = 12.18$$

Şimdi de öbekler arası değişkenlik için bir ölçü gerekmektedir. Doğal bir ölçü, tekil öbek ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarına dayanır. Aslında bu farkların da, daha öncekiler gibi, kareleri alınır:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x})^2, (\bar{x}_2 - \bar{x})^2, \text{K}, (\bar{x}_K - \bar{x})^2$$

Öbekler arası kareler toplamı ÖAKT hesaplanırken, her fark karesine, ilgili öbekteki gözlem sayısı ağırlık olarak verilir (böylece en çok gözlemi olan öbeklerin fark karesine en büyük ağırlık verilmiş olur).

$$\text{ÖAKT} = \sum_{i=1}^{K} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

Öyleyse yakıt tüketimi verileri için şu değer bulunur:

$$\text{ÖAKT} = (7)(20.9 - 22.305)^2 + (7)(23.2 - 22.305)^2 + (6)(22.9 - 22.305)^2$$

$$= 21.5495$$

Genellikle bir başka kareler toplamı daha hesaplanır. Bu da *bütün* örneklem gözlemlerinin *genel* ortalama dolayındaki sapmalarının kareleri toplamıdır. Buna da **bütün kareler toplamı** denir ve şöyle gösterilir:

$$\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

Aslında bütün kareler toplamının, öbekler içi ve öbekler arası kareler toplamlarının toplamı olduğu gösterilebilir:

$$\text{BKT} = \text{ÖİKT} + \text{ÖAKT}$$

Böylelikle yakıt tüketimi verileri için

$$\text{BKT} = 12.18 + 21.5495 = 33.7295$$

buluruz.

Buraya kadar gördüklerimizi aşağıdaki çerçeve içinde özetliyoruz.

Tek Yönlü Varyans Çözümlemesinde Kareler Toplamlarının Ayrıştırılması

K tane anakütleden $n_1, n_2, \ldots, n_K$ gözlemli bağımsız rassal örneklemler alınmış olsun. K tane öbeğin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_K$ ile, genel örneklem ortalamasını da $\bar{x}$ ile gösterelim.

Aşağıdaki **kareler toplamlarını** tanımlayalım:

ÖBEKLER İÇİ: $\text{ÖİKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2$

ÖBEKLER ARASI: $\text{ÖAKT} = \sum_{i=1}^{K} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$

BÜTÜN: $\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2$

Burada x_{ij}, i öbeğindeki j'inci gözlemi gösterir. Öyleyse şunu yazabiliriz:

$$\text{BKT} = \text{ÖİKT} + \text{ÖAKT}$$

Bütün kareler toplamını —öbekler içi ve öbekler arası kareler toplamı diye— iki bileşene ayırmak, öbeklerin anakütle ortalamalarının eşitliğinin varyans çözümlemesiyle sınanmasının temelini oluşturur. Bu ayrıştırmaya, bütün örneklem gözlemlerinin genel ortalamaya göre toplam değişkenliğini, öbekler içi değişkenlikle öbekler arası değişkenliğin toplamı olarak ifade etmek diye bakabiliriz. Bu durum Çizim 15.2'de çizimsel olarak gösterilmiştir.

Anakütle ortalamalarının eşitliği sınamamız, K tane anakütlenin ortak bir varyansı olduğu varsayımına dayanır. Anakütle ortalamalarının hepsi aynıdır diyen sıfır önsavı doğruysa, her bir kareler toplamı, ÖİKT ile ÖAKT, ortak anakütle varyansını tahmin etmede temel oluşturabilir. Bu tahminleri elde edebilmek için, kareler toplamları uygun serbestlik derecelerine bölünmelidir.

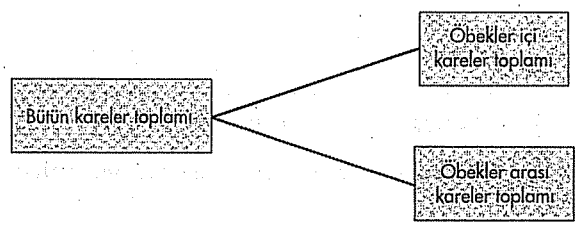
İlk olarak, ÖİKT'nin $(n-K)$'ye bölünmesiyle anakütle varyansımn sapmasız bir tahmin edicisinin elde edileceği gösterilebilir. Bulunan tahmine **öbekler içi kareler ortalaması** denir, ÖİKO ile gösterilir:

$$\text{ÖİKO} = \frac{\text{ÖİKT}}{n-K}$$

Verilerimizden şunu buluruz:

$$\text{ÖİKO} = \frac{12.18}{20-3} = 0.7165.$$

ÇİZİM 15.2 Tek yönlü varyans çözümlemesinde kareler toplamının ayrıştırılması



Anakütle ortalamaları eşitse, ÖAKT'yi $(K-1)$'e bölerek anakütle varyanslarının başka bir sapmasız tahmin edicisi bulunabilir. Elde edilen büyüklüğe **öbekler arası kareler ortalaması** denir, ÖAKO ile gösterilir:

$$\text{ÖAKO} = \frac{\text{ÖAKT}}{K-1}$$

Yakıt tüketimi verileri için şu değer hesaplanabilir:

$$\text{ÖAKO} = \frac{21.5495}{3-1} = 10.7748$$

Anakütle ortalamaları eşit *değilse*, öbekler arası kareler ortalaması, ortak anakütle varyansının sapmasız bir tahmin edicisi olmaktan çıkar. Bu tahminlerin birbirine yakın olmalarını beklemek akla uygundur. Bu iki tahmin arasındaki açıklık ne kadar büyürse, öbür her şey aynıyken, sıfır önsavının doğruluğu konusundaki kuşkularımız da o kadar artar. Sıfır önsavnın sınanması, ortalama kareler arasındaki orana dayanır:

$$F = \frac{\text{ÖAKO}}{\text{ÖİKO}} \qquad (15.2.1)$$

Bu oran 1'e çok yakınsa, anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavından pek kuşku duymayız. Ama öbekler arası değişkenlik, öbekler içi değişkenliğe göre büyükse, belirttiğimiz gibi, sıfır önsavımn yanlış olduğu kanısı doğar. Bu da, (15.2.1) oranının 1'den hatırı sayılır biçimde büyük olduğu durumdur. Bu oranın büyük değerleri için sıfır önsavı reddedilir.

Anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavı doğruysa, anakütle dağılımının normal olduğu varsayımı altında, biçimsel bir sınama, (15.2.1)'e karşılık gelen rassal değişkenin, pay serbestlik derecesi $(K-1)$, payda serbestlik derecesi $(n-K)$ olan (Altbölüm 9.8'de incelenen) F dağılımına uyduğu olgusuna dayanır.

Tek Yönlü Varyans Çözümlemesi için Önsav Sınaması

K tane anakütleden $n_1, n_2, \ldots, n_K$ gözlemli bağımsız rassal örneklemler alınmış olsun. Toplam örneklem büyüklüğünü n ile gösterelim:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_K$$

Kareler ortalamasını şöyle tanımlarız:

$$\text{ÖBEKLER İÇİ: ÖİKO} = \frac{\text{ÖİKT}}{n-K}$$

$$\text{ÖBEKLER ARASI: ÖAKO} = \frac{\text{ÖAKT}}{K-1}$$

Sınanacak sıfır önsavı, K tane anakütlenin ortalaması birbirine eşitttir der:

$$H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$$

Ayrıca şu ek varsayımları da yaparız:

(i) Anakütle varyansları eşittir.

(ii) Anakütle dağılımları normaldir.

α anlamlılık düzeyindeki bir sınama şu karar kuralıyla yapılabilir:

$$\frac{\text{ÖAKO}}{\text{ÖİKO}} > F_{K-1,n-K,\alpha} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

Burada $F_{K-1,n-K,\alpha}$,

$$P(F_{K-1,n-K} > F_{K-1,n-K,\alpha}) = \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayıdır. $F_{K-1,n-K}$ ise, pay serbestlik derecesi $(K-1)$, payda serbestlik derecesi $(n-K)$ olan bir F dağılımına uyar.

Yakıt tüketimi verileri için şunu buluruz:

$$\frac{\text{ÖAKO}}{\text{ÖİKO}} = \frac{10.7748}{0.7165} = 15.04$$

Pay ve paydanın serbestlik dereceleri sırasıyla $(K-1) = 2$ ve $(n-K) = 17$'dir. Ek Çizelge 7'den %1 anlamlılık düzeyinde şunu okuruz:

$$F_{2,17,0.01} = 6.11$$

Öyleyse bu veriler, üç tür arabamn yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını %1 anlamlılık düzeyinde reddetmemize izin verir.

Bu sınama sırasında yapılan hesaplamalar, çok işe yarar bir biçimde **tek yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi**nde özetlenir. Bu çizelgenin genel bir biçimi Çizelge 15.3'te sergilenmiştir. Yakıt tüketimi verileri için varyans çözümlemesi, Çizelge 15.4'te verilmiştir. Bazı açıklamalarda öbekler içi kareler toplamına **hata kareleri toplamı** dendiğine de dikkat edin.

ÇİZELGE 15.3 Tek yönlü varyans çözümlemesi çizelgesinin genel biçimi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMASI	*F* ORANI
Öbekler arası	ÖAKT	$K-1$	$\text{ÖAKO} = \dfrac{\text{ÖAKT}}{K-1}$	$\dfrac{\text{ÖAKO}}{\text{ÖİKO}}$
Öbekler içi	ÖİKT	$N-K$	$\text{ÖİKO} = \dfrac{\text{ÖİKT}}{n-K}$	
Toplam	BKT	$n-1$		

ÇİZELGE 15.4 Yakıt tüketimi verileri için tek yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMASI	*F* ORANI
Öbekler arası	21.5495	2	10.7748	15.04
Öbekler içi	12.1800	17	0.7165	
Toplam	33.7295	19		

ÖRNEK 15.1

Sis endeksi, yazılı bir metnin okunma güçlüğünü ölçmekte kullanılır. Endeks değeri yükseldikçe okunmanın güçlük düzeyi de artar. *Scientific American, Fortune, New Yorker* adlı dergilerden altışar reklâmlık bağımsız rassal örneklemler alınmış, onsekiz reklâmın sis endeksleri aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi ölçülmüştür:[1]

SCIENTIFIC AMERICAN	*FORTUNE*	*NEW YORKER*
15.75	12.53	9.27
11.55	11.46	8.28
11.16	10.77	8.15
9.92	9.93	6.37
9.23	9.87	6.37
8.20	9.42	5.66

Bu verilerden aşağıdaki varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyebiliriz:

[1] Veriler F. K. Shuptrine, D. D. McVicker, "Readability levels of magazine advertisements," *Journal of Advertisting Research, 21*, no. 5 (1981), 45-50'den alınmıştır. Sis endeksinin biçimlendirilmesi Bölüm 9'da Alıştırma 76'da açıklanmıştır. (*Scientific American* popüler bilim, *Fortune* iş yaşamı, *New Yorker* edebiyat ağırlıklı dergilerdir. Ç.N.)

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMASI	F ORANI
Öbekler arası	48.5288	2	24.2644	6.97
Öbekler içi	52.2173	15	3.4812	
Toplam	100.7461	17		

Anakütlede sis endeksleri ortalamalarının aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınamak için varyans çözümlemesi çizelgesinde hesaplanan F oranı, (2, 15) serbestlik dereceli F dağılımının çizelge değerleriyle karşılaştırılmalıdır. Ek Çizelge 7'den,

$$F_{2,15,0.01} = 6.36$$

olduğunu görürüz. Demek ki anakütlede sis endeksleri ortalamalarının eşitliğini ileri süren sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde reddedilir. Bu önsava karşı verilerdeki kanıtlar çok güçlüdür.

TEK YÖNLÜ VARYANS ÇÖZÜMLEMESİNİN ANAKÜTLE MODELİ

Tek yönlü varyans çözümlemesine başka bir ışık altında bakmak öğretici olabilir. X_{ij} rassal değişkeni i anakütlesinde j'inci gözlemi, μ_i de bu anakütlenin ortalamasını göstersin. Bu durumda X_{ij}, iki parçanın —kendi ortalaması ile ortalaması 0 olan ε_{ij} rassal değişkeninin— toplamı olarak görülebilir. Dolayısıyla şunu yazabiliriz:

$$X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad (15.2.2)$$

Bağımsız rassal örneklemler alındığına göre ε_{ij} rassal değişkenleri birbirleriyle ilişkisizdir. Üstelik, anakütle varyanslarının hepsinin aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavı verilmişken, ε_{ij}'lerin hepsinin varyansları aynı olacaktır. Demek ki bu rassal değişkenler, çoklu bir regresyon modelindeki hata terimlerine yüklenen bütün standart varsayımlara uyar (bkz. Altbölüm 13.3). Bu durumda Eş. (15.2.2)'ye, bilinmeyen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ anakütle katsayılarıyla böyle bir modelmiş gibi bakılabilir. İlgilenilen sıfır önsavı

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$$

Bu anakütle katsayılarının normallik varsayımıyla daha da kolaylaştırılmış bir sınamasıdır.

(15.2.2) modeli biraz değişik bir biçimde yazılabilir. μ, K tane anakütlenin genel ortalamasını, G_i de bu genel ortalama ile i öbeğinin anakütle ortalaması arasındaki farkı göstersin:

$$G_i = \mu_i - \mu \qquad \mu_i = \mu + G_i$$

Bunu Eş. (15.2.2)'de yerine koyarsak şunu görürüz:

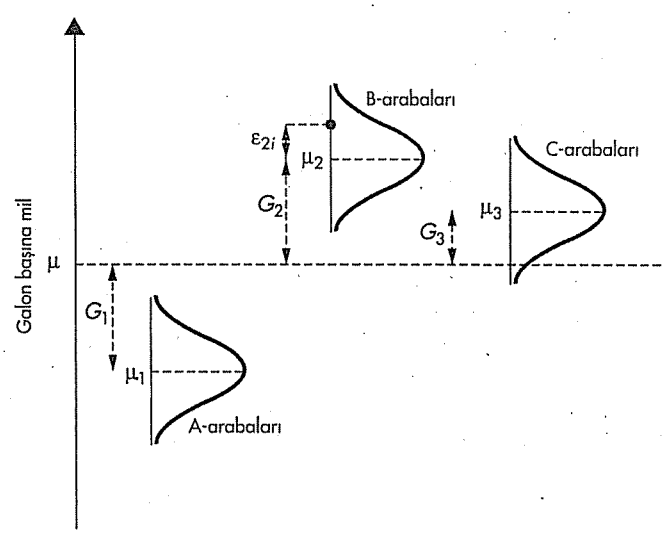
$$X_{ij} = \mu + G_i + \varepsilon_{ij}$$

Böylece bir gözlem, genel ortalama μ, öbeğe özgü bir terim G_i ve ε_{ij} rassal hata teriminden oluşur. Sıfır önsavımıza göre her anakütle ortalaması μ_i, genel ortalamayla aynıdır, ya da:

$$H_0\colon\ G_1 = G_2 = \cdots = G_K = 0$$

Bu anakütle modeli ile bazı varsayımlar Çizim 15.3'te gösterilmiştir. Her araba türü için her bir denemede gözlenen yakıt tüketimi, normal dağılmış rassal bir değişkenle temsil edilebilir. A, B, C arabalarının yakıt tüketimlerinin anakütle ortalamaları sırasıyla μ_1, μ_2, μ_3, bu dağılımların merkezlerini belirler. Varsayımımıza göre bu anakütle dağılımlarının varyansları da aynıdır. Çizim ayrıca üç anakütlenin bir arada genel ortalaması μ'yü ve tekil anakütle ortalamaları ile genel ortalama arasındaki G_i farklarını da gösterir. Son olarak, B arabaları içinde j'inci örneklem gözlemini de bir noktayla gösterdik. Bu durumda ε_{2j} rassal değişkeni, gözlenen değer ile ilgili anakütle ortalaması arasındaki farktır. Öyleyse bu gözlem değerini üç parça olarak düşünebiliriz: genel ortalama μ, B arabalarının yakıt tüketiminin anakütle ortalaması ile genel ortalama arasındaki G_2 farkı ve gözlenen değerin içinden çekildiği anakütle ortalamasından (örnekleme değişkenliğinden kaynaklanan) sapması.

Çizim 15.3 Tek yönlü varyans çözümlemesi için anakütle modelinin gösterilmesi



15.3 KRUSKAL-WALLIS SINAMASI

Daha önce belirttiğimiz gibi, Altbölüm 15.2'deki tek yönlü varyans çözümlemesi sınaması, iki anakütlenin ortalamalarını bağımsız rassal örneklemlerin varlığı durumunda karşılaştıran t sınamasını çoklu anakütlelere genelleştirmektedir. Bu sınama, arkada yatan anakütle dağılımlarının normal olduğu varsayımına dayanır. Altbölüm 10.4'te, anakütle dağılımları normal olmadığı zamanlarda bile iki anakütle ortalamasının merkezî konumlarını karşılaştırmada geçerli, katsayısal olmayan bir sınamayı, Mann-Whitney sınamasını görmüştük. Tek yönlü varyans çözümlemesine almaşık, katsayısal olmayan bir sınama da geliştirilebilir. Bir araştırmacının, anakütle dağılımlarının normalden farkedilir biçimde uzaklaştığına ilişkin güçlü kanıtları olduğunda kullandığı bu sınama, **Kruskal-Wallis sınaması** diye bilinir.

Şimdiye kadar karşılaştığımız katsayısal olmayan sınamaların çoğu gibi Kruskal-Wallis sınaması da örneklem gözlemlerinin *sıra numaralarına* dayanır. Bu sınama istatistiğinin hesaplanmasını, Çizelge 15.1'deki yakıt tüketimi verileriyle yapacağız. Örneklem verilerinin hepsi bir araya toplanarak Çizelge 15.5' teki gibi, küçükten büyüğe doğru sıralamr, beraberlik durumlarında komşu sıra numaralarının ortalaması alınır.

Bu sınama K örneklemin $R_1, R_2, \ldots, R_K$ sıra numaraları toplamlarına dayanır. Yakıt tüketimi örneğinde

$$R_1 = 32 \qquad R_2 = 101.5 \qquad R_3 = 76.5$$

olur. Sınanacak sıfır önsavı, üç anakütle ortalamasının aynı olduğunu söyler. Eğer K örneklemin sıra numaraları ortalamaları arasında önemli farklar varsa bu önsavdan kuşkulanırız. Aslında sınamamız şu istatistiği temel alır:

$$W = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \qquad (15.3.1)$$

ÇİZELGE 15.5 Üç bağımsız rassal örneklemden alınan yakıt tüketimi verileri (galon başına mil) ve bunların sıra numaraları

A ARABALARI	SIRA No.	B ARABALARI	SIRA No.	C ARABALARI	SIRA No.
22.2	11	24.6	20	22.7	12
19.9	1	23.1	13	21.9	7
20.3	2.5	22.0	8	23.2	14
21.4	6	23.5	16.5	24.1	19
21.2	5	23.6	18	22.1	9.5
21.0	4	22.1	9.5	23.4	15
20.3	2.5	23.5	16.5		
Sıra no toplamları	32		101.5		76.5

Burada n_i, K öbeğin örneklem büyüklükleri, n ise toplam gözlem sayısıdır. (15.3.1) değeri büyük çıkarsa sıfır önsavından kuşkulanılır. Bu sınama, örneklem büyüklükleri çok küçük olmadıkça, sıfır önsavı doğruyken, sınama istatistiğine karşılık olan rassal değişkenin, $(K-1)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına yaklaşık olarak çok iyi uyduğu olgusuna dayanır.

Kruskal-Wallis Sınaması

K tane anakütleden $n_1, n_2, \ldots, n_K$ gözlemli bağımsız rassal örneklemler alınmış olsun. Toplam gözlem sayısını

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_K$$

ile, örneklem gözlemleri bir araya toplanıp küçükten büyüğe doğru sıraya konduğunda K örneklemin sıra numaraları toplamlarını $R_1, R_2, \ldots, R_K$ ile gösterelim. Anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı H_0, şu istatistiği temel alır:

$$W = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

α anlamlılık düzeyindeki sınama aşağıdaki karar kuralıyla verilmiştir:

$W > \chi^2_{K-1,\alpha}$ ise H_0'ı reddedin.

Burada $\chi^2_{K-1,\alpha}$, $(K-1)$ serbestlik dereceli bir χ^2 rassal değişkeninin bu değeri aşma olasılığının α olduğu bir sayıdır.

Her bir anakütleden çekilen örneklem en az beş gözlem içerdiği sürece bu sınama süreci yaklaşık olarak geçerlidir.

Yakıt tüketimi verileri için şunu buluruz:

$$W = \frac{12}{(20)(21)}\left[\frac{(32)^2}{7} + \frac{(101.5)^2}{7} + \frac{(76.5)^2}{6}\right] - (3)(21) = 11.10$$

Burada $(K-1) = 2$ serbestlik derecemiz vardır, öyleyse %0.5 anlamlılık düzeyinde Ek Çizelge 5'ten şunu okuruz:

$$\chi^2_{2,0.005} = 10.60$$

Demek ki, üç tür arabanın yakıt tüketimlerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavı %0.5 anlamlılık düzeyinde bile reddedilir. Bu önsavı Altbölüm 15.2'deki varyans çözümlemesi sınamasıyla da kuşkusuz reddetmiştik. Ancak burada bunu, anakütle dağılımlarının normale uyması zorlamasını yapmadan reddedebildik.

ÖRNEK 15.2

Bağımsız rassal örneklemlere seçilmiş 101 alt sınıf, 112 orta sınıf, doksanaltı üst sınıf kadınından, içecek alırken markaya verdikleri önemi 1'den 7'ye kadar bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[2] Kruskal-Wallis istatistiğinin bu çalışmada bulunan değeri 25.22'dir. Bu üç anakütlede değerleme ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

Hesaplanan sınama istatistiği

$$W = 25.22$$

bulunmuştur. $K = 3$ öbek olduğuna göre %0.5 düzeyinde

$$\chi^2_{K-1,\alpha} = \chi^2_{2,0.005} = 10.60$$

olur. Öyleyse, üç anakütlede değerleme ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavı örneklemdeki kanıta dayanılarak %0.5 anlamlılık düzeyinde bile açıkça reddedilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir diyet soda üreticisi kutular için üç renk, kırmızı, sarı, mavi üzerinde durmaktadır. Bu renklerin satışlar üzerinde etkili olup olmadığını anlamak için yaklaşık aynı büyüklükte onaltı mağaza seçilmiştir. Bu mağazalardan altısına kırmızı, öbür beşine sarı, kalan beşine de mavi kutular yollanmıştır. Birkaç gün sonra her mağazadaki satış sayılarına bakılmıştır. Aşağıdaki çizelgede gösterilen (on kutu cinsinden) sonuçlar elde edilmiştir.

KIRMIZI	SARI	MAVİ
43	52	61
52	37	29
59	38	38
76	64	53
61	74	79
81		

   (a) Öbekler içi, öbekler arası ve bütün kareler toplamlarını hesaplayın.
   (b) Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayıp her üç renk için de satışların anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

2. Bir öğretim üyesinin sınıfında yirmiüç öğrenci vardır. Dönem başında her öğrenci rassal olarak Smiley, Haydon, Alleline, Bland adlı dört öğretim yardımcısından birine verilmiştir. Öğrencilere, ders malzemesinde karşılaştıkları güçlükleri tartışmak üzere öğretim yardımcılarına uğramaları söylenmiştir. Dönem sonunda ortak bir

[2] P. E. Murphy, "The effect of social class on brand and price consciousness for supermarket products," *Journal of Retailing, 55*, no. 2 (1978), 33-42.

sınav yapılmıştır. Bu öğretim yardımcılarıyla çalışan öğrencilerin aldıkları notlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

SMILEY	HAYDON	ALLELINE	BLAND
72	78	80	79
69	93	68	70
84	79	59	61
76	97	75	74
64	88	82	85
	81	68	63

(a) Öbekler içi, öbekler arası ve bütün kareler toplamlarını hesaplayın.
(b) Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayıp her dört öğretim yardımcısı için anakütle ortalama notları eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.

3. Üç parçacıdan 500'er birimlik partiler halinde parça alınmaktadır. Her üçünden gelen altışar partilik rassal örneklemler dikkatle incelenmiş, standart dışı parça sayıları saptanmıştır. Bu sayılar aşağıdaki çizelgede sıralanmıştır.

PARÇACI A	PARÇACI B	PARÇACI C
28	22	33
37	27	29
34	29	39
29	20	33
31	18	37
33	30	38

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini bu verilerle düzenleyin.
(b) Partilerdeki standart dışı parça sayılarının anakütle ortalamaları üç parçacı için de aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

4. Bir şirket araba filosuna üç tür —yerli, Japon, Avrupa— araba içinden hangisini alacağına karar vermeye çalışmaktadır. Her türden beşer araba ısmarlanmış, 10,000 mil kullanıldıktan sonra her birinin mil başına kullanım maliyeti hesaplanmıştır. Mil başına sent cinsinden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

YERLİ	JAPON	AVRUPA
18.0	20.1	19.3
17.6	15.6	17.4
15.4	16.1	15.1
19.1	15.3	18.6
16.9	15.4	16.1

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini bu verilerle düzenleyin.
(b) Mil başına kullanım maliyetlerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

5. İşletmeciler için istatistik dersini alan yedi birinci, yedi ikinci, yedi üçüncü sınıf öğrencisi rassal olarak seçilmiştir. Aşağıdaki çizelge bunların dönem sonu sınav sonuçlarını göstermektedir.

BİRİNCİ SINIF	İKİNCİ SINIF	ÜÇÜNCÜ SINIF
82	71	64
93	62	73
61	85	87
74	94	91
69	78	56
70	66	78
53	71	87

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç anakütledeki ortalama notlar aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

6. Dört bölgenin her birinden alınan örneklemlerdeki dörder satış personelinden gelecek oniki ay içinde bölgelerinin satış hacmi artış yüzdelerini kestirmeleri istenmiştir. Kestirimler aşağıdaki çizelgededir.

BATI	ORTABATI	GÜNEY	DOĞU
6.8	7.2	4.2	9.0
4.2	6.6	4.8	8.0
5.4	5.8	5.8	7.2
5.0	7.0	4.6	7.6

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Kestirimlerin dört anakütledeki ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

7. Bağımsız rassal örneklemlere seçilmiş altı yardımcı doçent, dört doçent, beş profesörden bir önceki hafta dershane dışındaki öğretim işleri için ayırdıkları zamanı tahmin etmeleri istenmiştir. Saat cinsinden sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

YARDIMCI DOÇENT	DOÇENT	PROFESÖR
7	15	11
12	12	7
11	15	6
15	8	9
9		7
14		

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç anakütledeki ortalama süreler eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.

8. İki dershane yeminli mali müşavirlik sınavına hızlandırılmış hazırlık kursları açmıştır. Bu kursların etkinliğini ölçmek için onbeş öğrenci seçilmiştir. Rassal olarak

bunlardan beşi A dershanesine, beşi B dershanesine gönderilmiş, kalan beşi ise kursa gitmemiştir. Bu öğrencilerin yüzde olarak gösterilen sınav sonuçları aşağıdaki çizelgededir.

A DERSHANESİ	B DERSHANESİ	KURSA GİTMEYEN
79	74	72
74	69	71
92	87	81
67	81	61
85	64	63

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç anakütledeki ortalama notlar eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.

9. Örnek 15.1'deki çalışmada *True Confessions*, *People Weekly*, *Newsweek* adlı dergilerden altışar reklâmdan oluşan bağımsız rassal örneklemler seçilmiştir. Bu reklâmların sis endeksleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Bu üç dergideki reklâmların sis endekslerinin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını sınayın. (Bunlar sırasıyla din, magazin ve haber ağırlıklı dergilerdir. Ç.N.)

TRUE CONFESSIONS	PEOPLE WEEKLY	NEWSWEEK
12.89	9.50	10.21
12.69	8.60	9.66
11.15	8.59	7.67
9.52	6.50	5.12
9.12	4.70	4.88
7.04	4.29	3.12

10. Tek yönlü varyans çözümlemesi modelinde, i öbeğindeki j'inci gözlemi şöyle yazalım:

$$X_{ij} = \mu + G_i + \varepsilon_{ij}$$

Burada μ genel ortalama, G_i, i öbeğine özgü etki, ε_{ij} ise i öbeğindeki j'inci gözlemin rassal hatasıdır. Örnek 15.1'deki verileri alalım.

(a) μ'yü tahmin edin.
(b) Her üç dergi için G_i'yi tahmin edin.
(c) *New Yorker* dergisinin ikinci gözlemine (8.28'e) karşılık gelen ε_{32} hata terimini tahmin edin.

11. Tek yönlü varyans çözümlemesi modelini Alıştırma 9'un verilerine uygulayın.
(a) μ'yü tahmin edin.
(b) Her üç dergi için G_i'yi tahmin edin.
(c) *True Confessions* dergisinin üçüncü gözlemine (11.15'e) karşılık gelen ε_{13} hata terimini tahmin edin.

12. Alıştırma 1'in verilerini kullanarak üç renk kutu satışlarının anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını Kruskal-Wallis sınamasıyla sınayın.

13. Alıştırma 2'nin verilerini kullanarak dört öğretim yardımcısına atanan öğrencilerin anakütle not ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını Kruskal-Wallis sınamasıyla sınayın.
14. Alıştırma 3'ün verilerini kullanarak, anakütle dağılımlarının normalliği varsayımını yapmadan, parti başına standart dışı parça sayısının üç anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.
15. Alıştırma 4'ün verilerini kullanarak, anakütle dağılımlarının normalliği varsayımını yapmadan, üç tür araba için mil başına kullanma maliyetinin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.
16. Alıştırma 5'in verilerini kullanarak, birinci, ikinci, üçüncü sınıf öğrencilerinin sınav notlarının anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını katsayısal olmayan bir sınamayla sınayın.
17. Alıştırma 6'nın verilerini kullanarak dört bölgenin satış artışı kestirimlerinin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını Kruskal-Wallis yöntemiyle sınayın.
18. Alıştırma 7'ye dönelim. Anakütle dağılımlarının normalliği varsayımını yapmadan, yardımcı doçent, doçent ve profesörler için öğretim sorumluluklarına ayrılan sürenin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.
19. Alıştırma 8'in verilerini kullanarak A ve B dershanelerine giden ve kursa gitmeyen öğrencilerin yeminli mali müşavirlik sınav sonuçlarının anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavını Kruskal-Wallis sınamasıyla sınayın.
20. Bağımsız rassal örneklemlere seçilmiş 101 alt sınıf, 112 orta sınıf, doksanaltı üst sınıf kadınından, kâğıt havlu alırken markaya verdikleri önemi 1'den 7'ye kadar uzayan bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir.[3] Kruskal-Wallis istatistiğinin değeri 0.17 bulunmuştur.
    (a) Bu bilgi kullanılarak hangi önsav sınanabilir?
    (b) Bu sınamayı yapın.

15.4 İKİ YÖNLÜ VARYANS ÇÖZÜMLEMESİ: HER GÖZDE BİR GÖZLEM, RASSAL BÖLÜNTÜLER

Asıl ilgimiz bir deneyin belli bir özelliğinin çözümlenmesi olmakla birlikte, ikinci bir etmenin sonuç üzerinde önemli bir etki yaratıyor olmasından da kuşku duyabiliriz. Bu bölümün daha önceki altbölümlerinde üç tür arabanın yakıt tüketimini karşılaştırmayı amaçlayan bir deneyi tartışmıştık. Veriler üç bağımsız rassal deneme örneklemleriyle derlenmiş, tek yönlü varyans çözümlemesiyle incelenmişti. Örneklem verilerindeki değişkenliğin iki nedenden kaynaklandığı

[3] Agy.

varsayılmıştı: üç tür arabanın başarım özelliklerindeki gerçek farklılıklar ve rassal değişkenlik. Aslında gözlenen rassal değişkenliğin bir bölümünün sürücü alışkanlıklarındaki farklılıklarla açıklanabileceği düşünülebilir. Şimdi bu son etmen bir yolla yalıtılabilirse, deneydeki rassal değişkenliğin miktarı da azalır. Bu da arabaların başarımlarındaki farklılıkların ortaya çıkarılabilmesini kolaylaştırır. Başka bir deyişle, sürücü özelliklerindeki farklılıkları da hesaba katan bir deney tasarlayarak, yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları bütün araba türleri için aynıdır diyen sıfır önsavını sınamak için daha güçlü bir sınamaya ulaşmayı umarız.

Aslında bu türden ikinci bir etmenin etkisini de hesaba katacak biçimde bir deney tasarlamak kolaydır. Yakıt tüketimindeki başarımlarım karşılaştırmak istediğimiz üç tür arabayı (diyelim α, β, γ arabalarını) bir kez daha ele alalım. Her araba türüyle altı kez deneme yapılacak bir deney düşüneceğiz. Eğer bu denemeler, her biri üç tür arabayı da sürecek altı sürücü kullanılarak yapılırsa, her araba her sürücü tarafından denenmiş olacağından, elde edilen bulgulardan araba türleri arasındaki farklılıklara ilişkin bilginin yanısıra sürücü değişkenliği konusunda da bilgi edinebiliriz. Ek değişkene —bu örnekte sürücülere— bazen **bölüntü değişkeni** denir. Deneyin de **bölüntüler**le düzenlendiği söylenir; örneğimizde her sürücü için bir tane olmak üzere altı bölüntü vardır.

Bu tür bölüntülü tasarım aynı anda iki etmene ilişkin bilgi edinmede kullanılır. Sözgelimi, yalnızca farklı araba türlerinin değil farklı sürücü türlerinin de yakıt tüketimindeki başarımlarım karşılaştırmak istiyoruz diyelim. Özellikle sürücünün yaşının yakıt tüketimi üzerindeki etkisiyle ilgileniyor olalım. Bunu yapabilmek için sürücüler yaşlarına göre gruplandırılabilir. Aşağıdaki yaş gruplarını kullanabiliriz (yıl):

1. 25 ve altı
2. 26-35
3. 36-45
4. 46-55
5. 56-65
6. 65 üstü

Bu durumda deneyimizi her türden bir arabanın her yaş grubundan bir sürücü tarafından sürülebileceği biçimde düzenleyebiliriz. Böylelikle, yakıt tüketiminin anakütle ortalaması bütün araba türleri için aynıdır diyen önsavı sınamaya ek olarak, yakıt tüketiminin anakütle ortalaması her yaş grubundaki bütün sürücüler için aynıdır diyen önsavı da sınayabiliriz.

Aslında her türden bir araba altı sürücünün her biri tarafından kullanılsa da, her türden bir araba altı yaş grubunun her birinden bir sürücü tarafından kullanılsa da, yakıt tüketiminin anakütle ortalamasının araba türleri için aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınama süreci değişmez. Biz bu altbölümde açıklama amaciyla ikinci tasarımı kullanacağız.

ÇİZELGE 15.6 Üç tür araba altı sürücü tarafından kullanıldığında ortaya çıkan yakıt tüketiminin örneklem gözlemleri

SÜRÜCÜ GRUPLARI	ARABALAR			
	α ARABALARI	β ARABALARI	γ ARABALARI	TOPLAMLAR
1	25.1	23.9	26.0	75.0
2	24.7	23.7	25.4	73.8
3	26.0	24.4	25.8	76.2
4	24.3	23.3	24.4	72.0
5	23.9	23.6	24.2	71.7
6	24.2	24.5	25.4	74.1
Toplamlar	148.2	143.4	151.2	442.8

Çizelge 15.6, üç araba türü ve altı sürücü yaş grubu içeren bir deneyin sonuçlarını verir. Araba türlerinin karşılaştırılması asıl ilgi odağı olup sürücü yaşları bir bölüntü değişkeni olarak kullanılmıştır.

Bu türden bir tasarıma **rassal bölüntülü tasarım** denir. Burada rassallık, ilk yaş grubundan bir sürücüyü α arabası kullanmak üzere, ikinci yaş grubundan bir sürücüyü α arabası kullanmak üzere, vb. rassal olarak seçmemizden kaynaklanır. Bu süreç öbür yaş grupları ve araba türlerinin her biri için yinelenir. Olabilirse denemeler de bölüntü sırasıyla değil rassal bir sırayla yapılmalıdır.

K öbeğimiz ve H bölüntümüz olsun. i'inci öbek ve j'inci bölüntüye karşılık gelen örneklem gözlemini göstermek için x_{ij} kullanacağız. Böylece örneklem verileri Çizelge 15.7'deki gibi gösterilebilecektir. Dikkat ederseniz buradaki kalıp, yalmzca iki öbeğin bulunduğu Altbölüm 9.6'daki eşlenik gözlemler sınaması için kullanılan deneysel kalıbın bir uzantısıdır. Öyleyse bu altbölüm de, ikiden çok anakütle ortalaması eşitliğinin sınanmasını sağlayacak biçimde Altbölüm 9.6'daki eşlenik t sınamasını geliştiririr.

Anakütle ortalamaları K öbeklerinin hersinde aynıdır diyen sıfır önsavını sınayacak bir yöntem geliştirmek, bu öbeklerin örneklem ortalamasını bilmeyi

ÇİZELGE 15.7 K öbekli, H bölüntülü örneklem gözlemleri

BÖLÜNTÜ	ÖBEK			
	1	2	...	K
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{K1}
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{K2}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
H	x_{1H}	x_{2H}	...	x_{KH}

gerektirir. i'inci öbeğin ortalaması için $\bar{x}_{i\bullet}$ kullanacağız, böylece şunu yazabiliriz:

$$\bar{x}_{i\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{H} x_{ij}}{H} \qquad (i = 1, 2, \ldots, K)$$

Çizelge 15.6'dan şunları elde ederiz:

$$\bar{x}_{1\bullet} = \frac{148.2}{6} = 24.7 \qquad \bar{x}_{2\bullet} = \frac{143.4}{6} = 23.9 \qquad \bar{x}_{3\bullet} = \frac{151.2}{6} = 25.2$$

Anakütle bölüntü ortalamalarıyla da ilgilenmekte olduğumuza göre H bölüntünün de örneklem ortalamalarını bilmek isteriz. j'inci bölüntünün örneklem ortalamasını göstermek için $\bar{x}_{\bullet j}$ kullanacağız.

$$\bar{x}_{\bullet j} = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_{ij}}{K} \qquad (j = 1, 2, \ldots, H)$$

Çizelge 15.6'daki yakıt tüketimi verilerinden şunları bulabiliriz:

$$\bar{x}_{\bullet 1} = \frac{75.0}{3} = 25.0 \qquad \bar{x}_{\bullet 2} = \frac{73.8}{3} = 24.6 \qquad \bar{x}_{\bullet 3} = \frac{76.2}{3} = 25.4$$

$$\bar{x}_{\bullet 4} = \frac{72.0}{3} = 24.0 \qquad \bar{x}_{\bullet 5} = \frac{71.7}{3} = 23.9 \qquad \bar{x}_{\bullet 6} = \frac{74.1}{3} = 24.7$$

Son olarak örneklem gözlemlerinin genel ortalaması gerekmektedir. Toplam gözlem sayısı n ile gösterilirse

$$N = HK$$

ve bütün gözlemlerin örneklem ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H} x_{ij}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_{i\bullet}}{K} = \frac{\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{\bullet j}}{H}$$

olur. Çizelge 15.6'daki verilerle şunu elde ederiz:

$$\bar{x} = \frac{442.8}{18} = 24.6$$

İlgilenilen önsav için uygun bir sınama biçimi düşünmeden önce, örtük olarak varsayım yaptığımız ankütle modelini incelemekte yarar vardır. Rassal değişken X_{ij}, i'inci öbek, j'inci bölüntü gözlemine karşılık olsun. Bu durumda bu değere şu dört bileşenin toplamı olarak bakılabilir:

1. Bir "genel" ortalama, μ
2. i'inci öbeğe özgü ve o öbeğin ortalamasının genel ortalamadan farkını ölçen bir katsayı, G_i
3. j'inci bölüntüye özgü ve o bölüntünün ortalamasının genel ortalamadan farkını ölçen bir katsayı, B_j
4. Gözlemin genel ortalamayla veya öbek ya da bölüntü üyeliğiyle açıklanamayan bölümünü yahut deneysel hatayı temsil eden bir rassal değişken, ε_{ij}

Dolayısıyla şunu yazabiliriz:

$$X_{ij} = \mu + G_i + B_j + \varepsilon_{ij} \qquad (15.4.1)$$

ε_{ij} hata teriminin çoklu regresyon modelinin standart varsayımlarına uyduğu kabul edilir. Bu durumda özellikle bağımsızlık ve varyans eşitliği varsayımlarını yaparız.

Şimdi (15.4.1)'i şöyle yazmak kolaylık sağlar:

$$X_{ij} - \mu = G_i + B_j + \varepsilon_{ij} \qquad (15.4.2)$$

Örneklem verileri verilmişken, genel ortalama μ, genel örneklem ortalaması $\bar{x}$ ile tahmin edilir, böylece $(x_{ij} - \bar{x})$, (15.4.2)'nin sol yanının bir tahminini verir. Genel anakütle ortalamasıyla i'inci öbek anakütle ortalaması arasındaki fark G_i, örneklem ortalamalarında buna karşılık olan $(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x})$ farkıyla tahmin edilir. Benzer biçimde B_j de $(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x})$ ile tahmin edilir. Son olarak hata terimini aşağıdaki çıkarmayla tahmin ederiz:

$$(x_{ij} - \bar{x}) - (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}) - (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}) = x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}$$

Böylelikle Eş.(15.4.2)'ye karşılık olarak örneklem üyeleri şöyle gösterilir:

$$(x_{ij} - \bar{x}) = (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x}) \qquad (15.4.3)$$

Buna örnek vermek için üçüncü öbekteki bir sürücünün bir α arabasıyla kaydettiği yakıt tüketimini düşünelim. Çizelge 15.6'dan şunu biliyoruz:

$$x_{13} = 26.0$$

Eş. (15.4.3)'ün sol yanındaki terim şudur:

$$x_{13} - \bar{x} = 26.0 - 24.6 = 1.4$$

Öbek (araba) etkisi için

$$\bar{x}_{1\bullet} - \bar{x} = 24.7 - 24.6 = 0.1$$

bulunur. (Dikkat ederseniz hangi α arabası kullanılırsa kullanılsın bu fark aynı çıkar.) Bölüntü (sürücü) etkisi için

$$\bar{x}_{\bullet 3} - \bar{x} = 25.4 - 24.6 = 0.8$$

bulunur. Son olarak hata terimi de şudur:

$$x_{13} - \bar{x}_{1\bullet} - \bar{x}_{\bullet 3} + \bar{x} = 26.0 - 24.7 - 25.4 + 24.6 = 0.5$$

Böylece, Eş. (15.4.3)'e karşılık olarak bu gözlem için şunu yazabiliriz:

$$1.4 = 0.1 + 0.8 + 0.5$$

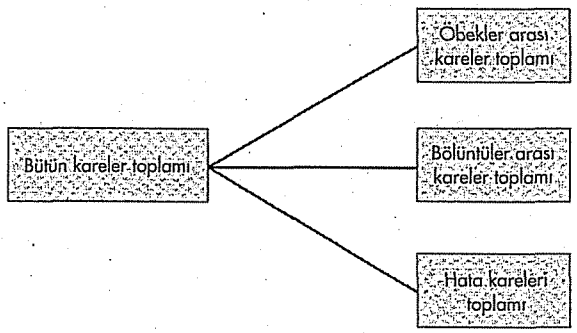
Bu eşitlik şöyle yorumlanabilir: Üçüncü yaş grubundan bir sürücü α arabasını denediğinde bütün arabaların ortalamasından galon başına 1.4 mil daha fazla yol almıştır. Bu farkın 0.1 kadarının arabadan, 0.8 kadarının sürücünün yaşından, galon başına 0.5 mil kadarının da başka etmenlerden kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Sonuncu parçayı şans değişkenliğine ya da deneysel hataya yorabiliriz.

Şimdi Eş. (15.4.3)'ün her iki yanının karesini alıp n örneklem gözlemi için toplarsak sonucun aşağıdaki gibi olacağı gösterilebilir:

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}(x_{ij} - \bar{x})^2 = H\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x})^2 + K\sum_{j=1}^{H}(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x})^2$$

Bu eşitlik, gözlemlerin genel ortalamaları dolayındaki toplam örneklem değişkenliğini, sırasıyla öbekler arası farkların, bölüntüler arası farkların ve hata değişkenliklerinin toplamı olarak dile getirir. İşte bu tür deneylerin çözümlenmesi, bu kareler toplamının ayrıştırılmasına dayanır. Veriler öbeklere ve bölüntülere göre iki yönlü sınıflandıklarından bu çözümlemeye **iki yönlü varyans çözümlemesi** denir.

ÇİZİM 15.4 Her gözde bir gözlem varken iki yönlü varyans çözümlemesi için kareler toplamının ayrıştırılması



Kareler toplamının bu önemli ayrışmasını Çizim 15.4'te gösteriyoruz. Dikkat ederseniz, tek yönlü varyans çözümlemesindeki ayrıştırmanın tersine, örneklem gözlemlerinin genel ortalamaları etrafındaki bütün kareler toplamı burada *üç* bileşene ayrılmıştır. Fazladan bileşen, verilerden bölüntüler arası farklara ilişkin bilgi çıkarabilmemizden doğmuştur.

İki Yönlü Varyans Çözümlemesi için Kareler Toplamının Ayrıştırılması

i'inci öbek ve j'inci bölüntüdeki gözlemin x_{ij} ile gösterildiği bir gözlemler örneklemimiz olsun. Ayrıca K öbeğimiz ve H bölüntümüz varken toplam

$$n = KH$$

gözlemimiz bulunsun. Öbeklerin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_{i\bullet}$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$ ile, bölüntülerin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_{\bullet j}$ $(j = 1, 2, \ldots, H)$ ile, genel örneklem ortalamasını da $\bar{x}$ ile gösterelim.

Aşağıdaki kareler toplamlarını tanımlayalım:

BÜTÜN: $$\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}(x_{ij} - \bar{x})^2$$

ÖBEKLER ARASI: $$\text{ÖAKT} = H\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x})^2$$

BÖLÜNTÜLER ARASI: $$\text{BAKT} = K\sum_{j=1}^{H}(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x})^2$$

HATA: $$\text{HKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}(x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{x})^2$$

Bu durumda

$$\text{BKT} = \text{ÖAKT} + \text{BAKT} + \text{HKT}$$

Çizelge 15.6'daki yakıt tüketimi verilerinden şunları buluruz:

$$\text{BKT} = (25.1 - 24.6)^2 + (24.7 - 24.6)^2 + \cdots + (25.4 - 24.6)^2 = 11.88$$

$$\text{ÖAKT} = 6[(24.7 - 24.6)^2 + (23.9 - 24.6)^2 + (25.2 - 24.6)^2] = 5.16$$

$$\text{BAKT} = 3[(25.0 - 24.6)^2 + (24.6 - 24.6)^2 + \cdots + (24.7 - 24.6)^2] = 4.98$$

ve çıkarma ile şunu elde ederiz:

$$\text{HKT} = \text{BKT} - \text{ÖAKT} - \text{BAKT} = 11.88 - 5.16 - 4.98 = 1.74$$

İki yönlü varyans çözümlemesine ilişkin sınamalar bu noktadan sonra Alt-bölüm 15.2'deki tek yönlü varyans çözümlemesine benzer biçimdedir. Önce, her kareler toplamı uygun bir serbestlik derecesine bölünerek ortalama kareler bulunur. Bütün kareler toplamı için serbestlik derecesi, toplam gözlem sayısının bir eksiği $(n-1)$'dir. Öbekler arası kareler toplamı için serbestlik derecesi, öbek sayısının bir eksiği $(K-1)$'dir. Benzer biçimde bölüntüler arası kareler toplamı için serbestlik derecesi $(H-1)$'dir. Öyleyse hata kareleri toplamına ilişkin serbestlik derecesi de çıkarma yoluyla şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}(n-1)-(K-1)-(H-1) &= n-K-H+1\\ &= KH-K-H+1\\ &= (K-1)(H-1)\end{aligned}$$

Bu durumda öbeklerin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı, öbekler arası kareler ortalamasının hata ortalama karesine oranıyla sınanır. Çoğu zaman çözümlemeye bir bölüntü değişkeninin katılma nedeni yalnızca deneysel hatanın değişkenliğini düşürmektir. Ancak kimi zaman bölüntülerin anakütle ortalamalarının eşitliği önsavı da ilgi çekici olabilir. Bu da bölüntüler arası ortalama karenin hata ortalama karesine oranıyla sınanabilir. Tek yönlü varyans çözümlemesinde olduğu gibi, karşılaştırma için geçerli standart, F dağılımının kuyruk olasılığından bulunur. Bu süreç aşağıdaki çerçeve içinde anlatılmaktadır.

İki Yönlü Varyans Çözümlemesi için Önsav Sınamaları

K öbek ve H bölüntü içeren bir tasarımda her öbek-bölüntü bileşiminde bir örneklem gözlemimiz olsun. Aşağıdaki ortalama kareleri tanımlayalım:

$$\text{ÖBEKLER ARASI: ÖAKO} = \frac{\text{ÖAKT}}{K-1}$$

$$\text{BÖLÜNTÜLER ARASI: BAKO} = \frac{\text{BAKT}}{H-1}$$

$$\text{HATA: HKO} = \frac{\text{HKT}}{(K-1)(H-1)}$$

(15.4.1) modelindeki ε_{ij} hata terimlerinin birbirinden bağımsız ve eşit varyanslı olduklarını varsayıyoruz. Ayrıca bu hataların normal dağıldıkları da varsayılmaktadır. Bu durumda:

(i) K öbeğin anakütle ortalamaları aynıdır diyen H_0 sıfır önsavının α anlamlılık düzeyinde sınanması aşağıdaki karar kuralıyla sağlanır:

$$\frac{\text{ÖAKO}}{\text{HKO}} > F_{K-1,(K-1)(H-1),\alpha} \text{ ise } H_0 \text{ reddedilir.}$$

(ii) H bölüntünün anakütle ortalamaları aynıdır diyen H_0 sıfır önsavının α anlamlılık düzeyinde sınanması aşağıdaki karar kuralıyla sağlanır:

$$\frac{\text{BAKO}}{\text{HKO}} > F_{H-1,(K-1)(H-1),\alpha} \text{ ise } H_0 \text{ reddedilir.}$$

Burada, $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$, pay serbestlik derecesi ν_1, payda serbestlik derecesi ν_2 olan bir F dağılıma uyan bir rassal değişkenin α olasılıkla aşabileceği bir sayıdır.

Yakıt tüketimi verileri için ortalama kareler şöyledir:

$$\text{ÖAKO} = \frac{\text{ÖAKT}}{K-1} = \frac{5.16}{2} = 2.58$$

$$\text{BAKO} = \frac{\text{BAKT}}{H-1} = \frac{4.98}{5} = 0.996$$

$$\text{HKO} = \frac{\text{HKT}}{(K-1)(H-1)} = \frac{1.74}{10} = 0.174$$

Üç tür araba için yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınamak için şunu bulmamız gerekir:

$$\frac{\text{ÖAKO}}{\text{HKO}} = \frac{2.58}{0.174} = 14.83$$

Bunu %1 düzeyinde bir sınama için Ek Çizelge 7'den okuduğumuz şu değerle karşılaştırırız:

$$F_{K-1,(K-1)(H-1),\alpha} = F_{2,10,0.01} = 7.56$$

Dolayısıyla, bu verilerin kanıtlarıyla, bu üç tür arabanın anakütledeki ortalama başarımları eşittir diyen önsav %1 anlamlılık düzeyinde reddedilir.

Bu özel örnekte, bölüntülerin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı, her sürücü yaş grubunda ortalama yakıt tüketiminin anakütle değerleri eşittir anlamına gelir. Bu sınama da şuna dayanır:

$$\frac{\text{BAKO}}{\text{HKO}} = \frac{0.996}{0.174} = 5.72$$

%1 düzeyinde bir sınama için Ek Çizelge 7'den şu okunur:

$$F_{H-1,(K-1)(H-1),\alpha} = F_{5,10,0.01} = 5.64$$

Demek ki, sürücülerin altı yaş grubu için anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavı da %1 anlamlılık düzeyinde reddedilir.

ÇİZELGE 15.8 İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesinin genel görünümü

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECESİ	KARELER ORTALAMALARI	F ORANLARI
Öbekler arası	ÖAKT	$K-1$	$\text{ÖAKO} = \dfrac{\text{ÖAKT}}{K-1}$	$\dfrac{\text{ÖAKO}}{\text{HKO}}$
Bölüntüler arası	BAKT	$H-1$	$\text{BAKO} = \dfrac{\text{BAKT}}{H-1}$	$\dfrac{\text{BAKO}}{\text{HKO}}$
Hata	HKT	$(K-1)(H-1)$	$\text{HKO} = \dfrac{\text{HKT}}{(K-1)(H-1)}$	
Toplam	BKT	$n-1$		

ÇİZELGE 15.9 Arabaların galon başına mil verileri için iki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECESİ	KARELER ORTALAMALARI	F ORANLARI
Öbekler arası	5.16	2	2.580	14.83
Bölüntüler arası	4.98	5	0.996	5.72
Hata	1.74	10	0.174	
Toplam	11.88	11		

Burada da hesaplamaları bir çizelgede toplamak yerinde olur. **İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi**nin genel görünümü Çizelge 15.8'de verilmiştir. Yakıt tüketimi verileri için varyans çözümlemesi Çizelge 15.9'da sergilenmiştir. Serbestlik derecesi sayıları öbeklerin ve bölüntülerin sayılarıyla belirlenir. Kareler ortalaması, kare toplamlarının ilgili serbestlik derecelerine bölünmesiyle bulunur. Ortalama hata karesi, sınamalarımızın temelini oluşturan iki F oranının hesaplanmasında paydada yer alır.

ALIŞTIRMALAR

21. Dört mali analistten beş petrol şirketinin gelecek yıldaki kazanç büyüme oranını kestirmesi istenmiştir. Bu kestirimler, yüzde kazanç artışları olarak aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

PETROL ŞİRKETİ	ANALİST			
	A	B	C	D
1	8	12	7	13
2	9	9	8	12
3	12	10	9	10
4	11	10	10	12
5	9	8	10	14

(a) İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Bütün petrol şirketleri için anakütlede ortalama büyüme tahminleri aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

22. Üç farklı gübre kullanılarak üretilen dört farklı mısır türünün verimleri arasındaki farkı değerlendirmek üzere tasarlanan bir tarım deneyinin sonuçları (dönüm başına çuval) aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

GÜBRE	MISIR TÜRÜ			
	A	B	C	D
1	86	88	77	84
2	92	91	81	93
3	75	80	83	79

(a) İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Dört mısır türü için anakütledeki ortalama verimler aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(c) Üç gübre türü için anakütledeki ortalama verimler aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

23. Bir şirket üç yeni çorba türü için bir yıl boyunca seçilmiş dükkânlarda pazar denemesi yapmıştır. Aşağıdaki çizelge, üç çorbanın yılın üçer aylık dönemlerinde ulaştığı (bin dolar cinsinden) satış düzeylerini göstermektedir.

ÜÇER AY	ÇORBA		
	A	B	C
1	47	57	65
2	63	63	76
3	79	67	54
4	52	50	49

(a) İki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç çorba türü için anakütledeki ortalama satışlar aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

24. Bir diyet soda üreticisi kırmızı, sarı ve mavi kutu renklerinin satışlar üzerindeki etkisini karşılaştırmak istemektedir. Deney için dört bölge ve her bölgede her biri yalnızca bir rengin satışını yapacak üçer mağaza rassal olarak seçilmiştir. Aşağıdaki çizelge deney süresi sonunda (on kutu cinsinden) satışları göstermektedir.

BÖLGE	KUTU RENGİ		
	KIRMIZI	SARI	MAVİ
Doğu	47	52	60
Güney	56	54	52
Ortabatı	49	63	55
Batı	41	44	48

(a) Uygun varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç kutu rengi için anakütledeki ortalama satışlar aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

25. Bir iktisat öğretim üyesi öğrencilerine önerebileceği üç ders kitabı üzerinde düşünmektedir. Ayrıca üç değişik sınav türü —çoktan seçmeli, anlatımlı, çoktan seçmeliyle anlatımlının karışımı— üzerinde de kafa yormaktadır. Yıl içinde dokuz şubede ders veren öğretim üyesi her şubeye rassal bir ders kitabı-sınav türü bileşimi seçmiştir. Dönem sonunda her şubeden öğrencilerin öğretim üyesini değerlendirmeleri toplanmıştır. Bu değerlendirmeler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

SINAV	DERS KİTABI		
	A	B	C
Çoktan seçmeli	4.8	5.3	4.9
Anlatımlı	4.6	5.0	4.3
Karma	4.6	5.1	4.8

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç ders kitabı için anakütledeki ortalama değerlendirmeler eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.
(c) Üç sınav türü için anakütledeki ortalama değerlendirmeler eşittir diyen sıfır önsavım sınayın.

26. Eş. (15.4.2)'de iki yönlü varyans çözümlemesi için şu anakütle modelini tanıtmıştık:

$$X_{ij} - \mu = G_i + B_j + \varepsilon_{ij}$$

Alıştırma 24'ün verileriyle Doğu bölgesi-kırmızı kutu bileşimi için bu eşitliğin sağ yanındaki her bir terimin örneklem tahminini bulun.

27. Alıştırma 25'in verileriyle C ders kitabı-çoktan seçmeli sınav bileşimi için Eş. (15.4.2)'nin sağ yanındaki her bir terimin örneklem tahminini bulun.

28. Dört emlâkçiden belli bir semtteki on eve değer biçmeleri istenmiştir. Bin dolar cinsinden biçilen değerlerle elde edilen bulgular aşağıdaki çizelgededir.

DEĞİŞİM KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI
Emlâkçılar arası	268
Evler arası	1,152
Hata	2,352

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayın.
(b) Bu dört emlâkçinin ortalama değerlendirmeleri aynıdır diyen sıfır önsavım sınayın.

29. Dört gübre türü değerlendirilmektedir. Her bir tür farklı toprak yapısı olan altı tarlaya konmuştur. Mısır verimi artışları yirmidört gübre-toprak bileşimi için ölçülmüştür. Elde edilen bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI
Gübreler arası	135.6
Topraklar arası	81.7
Hata	111.3

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayın.
(b) Bu dört gübrenin ortalama verim artışları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(c) Bu altı toprak yapısının ortalama verim artışları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

30. Televizyon için çekilen üç komedi dizisinin ön gösterimleri ülkenin dört bölgesinde —Doğu, Güney, Ortabatı, Batı Kıyısı'nda— izleyici karşısına çıkmıştır. Her gösterimde izleyicinin tepkisi (0'dan 100'e kadar uzanan) bir ölçekte ölçülmüştür. Öbekler (gösterimler) arası ve bölüntüler (bölgeler) arası kareler toplamları şöyle bulunmuştur:

$$\text{ÖAKT} = 95.2 \qquad \text{BAKT} = 69.5$$

Hata kareleri toplamı da

$$\text{HKT} = 79.3$$

çıkmıştır. Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyip her üç gösterimde de izleyici tepkisinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

31. Her gözde bir gözlemin olduğu iki yönlü varyans çözümlemesi kurgusunda yalnızca iki öbek olduğunu düşünelim. Bu durumda öbeklerin anakütle ortalamalarının eşitliğini sınarken kullanılan F oranının, eşlenik çiftlerden oluşan bir örneklem verilmişken anakütle ortalamalarının eşitliğini sınamak için Altbölüm 9.6'da anlatılan sınama istatistiğinin karesine eşit olduğunu gösterin. Bu özel durumda bu iki sınamanın eşdeğer olduğu sonucunu bulun.

15.5 İKİ YÖNLÜ VARYANS ÇÖZÜMLEMESİ: HER GÖZDE BİRDEN ÇOK GÖZLEM

İki yönlü varyans çözümlemesinin Altbölüm 15.4'teki sunumunda, ham verilerin (Çizelge 15.6 ile 15.7'de olduğu gibi) gözlere dağıtılıp çizelgelendiğini, her gözün belli bir öbek-bölüntü birleşimini gösterdiğini görebiliyorduk. Böylece, sözgelimi, dördüncü yaş grubundan bir sürücünün bir β arabası kullanmasından elde edilen bulgular tek bir gözü oluşturur. Altbölüm 15.4'te çözümlenen tasarımın bir özelliği her gözün tek bir gözlem içermesidir. Böylece dördüncü yaş grubundan bir sürücü bir β arabasını yalnızca bir kez sürer.

Bu altbölümde, deneyin **yinelenebileceğini** düşünüyoruz, böylelikle sözgelimi β arabaları, dördüncü yaş grubunda birden çok sürücü tarafından kullanılır. Böylesi bir tasarımdan çıkan veriler göz başına birden çok gözlem içerebilir.

Örneklemi bu biçimde genişletmek başlıca iki üstünlük sağlar. Birincisi, elde ne kadar çok örneklem verisi varsa bulunan tahminler de o kadar hassas olur, anakütle ortalamaları arasındaki farkları ayırdetmede o kadar daha güvenli olabiliriz. İkincisi, göz başına birden çok gözlem olan bir tasarım, yeni bir değişkenlik kaynağının —öbeklerle bölüntülerin karşılıklı **etkileşim**inin— yalıtılmasını sağlar. Bu tür etkileşimler, öbek etkilerinin bütün bölüntüler için tekdüze dağılmadığı durumlarda ortaya çıkar. Sözgelimi, yakıt tüketiminde ortalamaya göre daha başarılı olan sürücüler, α arabalarını kullanırken, β arabalarını kullanmaya göre öbür sürücülerden daha başarılı olabilirler. Böylece, ortalamanın üstünde başarım bütün araba türleri için tekdüze dağılmamakta, bazı araba türlerinde öbürlerinden daha çok kendini belli etmektedir. Sürücü-araba etkileşim olanağı, göz başına birden çok gözleme dayanan bir çözümlemede hesaba katılabilir.

Çözümlenecek veri türünü açıklayabilmek amacıyla Çizelge 15.10, beş yaş grubundan sürücüler için üç araba türü —X, Y, Z arabaları— ile bulunan yakıt tüketimi bulgularını içerir. Her gözdeki üç gözlem, belli bir yaş grubundan sürücülerin belli bir araba türü ile yaptıkları bağımsız denemeleri gösterir.

Tekil örneklem gözlemlerini göstermek için üç altime gerek vardır, böylece x_{ijl}, ij gözündeki l'inci gözlemi, ya da i öbeği j bölüntüsündeki l'inci gözlemi gösterir. Daha önce olduğu gibi K öbek sayısını, H bölüntü sayısını gösterecektir. Göz başına gözlem sayısını da L ile göstereceğiz. Böylece Çizelge 15.10'daki örnekte $K = 3$, $H = 5$, $L = 3$'tür. Bu gösterim Çizelge 15.11'de sergilenmiştir.

Bu tür bir deneyin bulgularına dayanılarak sınanabilecek üç sıfır önsavı vardır: Öbek ortalamaları arasında fark yoktur, bölüntü ortalamaları arasında fark yoktur, öbek-bölüntü etkileşimi yoktur. Bu sınamaları yerine getirebilmek için aşağıdaki gibi tanımlanıp hesaplanan çeşitli örneklem ortalamalarını yeniden hesaplayacağız.

ÇİZELGE 15.10 Beş sürücünün üç araba türüyle elde ettiği yakıt tüketimi örneklem gözlemleri; her gözde üç gözlem

SÜRÜCÜ GRUPLARI	ARABALAR								
	X ARABALARI			Y ARABALARI			Z ARABALARI		
1	25.0	25.4	25.2	24.0	24.4	23.9	25.9	25.8	25.4
2	24.8	24.8	24.5	23.5	23.8	23.8	25.2	25.0	25.4
3	26.1	26.3	26.2	24.6	24.9	24.9	25.7	25.9	25.5
4	24.1	24.4	24.4	23.9	24.0	23.8	24.0	23.6	23.5
5	24.0	23.6	24.1	24.4	24.4	24.1	25.1	25.2	25.3

ÇİZELGE 15.11 *K* öbekli, *H* bölüntülü örneklem gözlemleri; göz başına *L* gözlem

BÖLÜNTÜ	ÖBEK			
	1	2	...	*K*
1	$x_{111}\, x_{112} \cdots x_{11L}$	$x_{211}\, x_{212} \cdots x_{21L}$	...	$x_{K11}\, x_{K12} \cdots x_{K1L}$
2	$x_{121}\, x_{122} \cdots x_{12L}$	$x_{221}\, x_{222} \cdots x_{22L}$	...	$x_{K21}\, x_{K22} \cdots x_{K2L}$
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
H	$x_{1H1}\, x_{1H2} \cdots x_{1HL}$	$x_{2H1}\, x_{2H2} \cdots x_{2HL}$	...	$x_{KH1}\, x_{KH2} \cdots x_{KHL}$

(i) ÖBEK ORTALAMALARI

i'inci öbekteki *bütün* gözlemlerin örneklem ortalaması $\bar{x}_{i\bullet\bullet}$ ile gösterilir.

$$\bar{x}_{i\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{H}\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}}{HL}$$

Çizelge 15.10'dan şunları buluruz:

$$\bar{x}_{1\bullet\bullet} = \frac{25.0 + 25.4 + \Lambda + 23.6 + 24.1}{15} = 24.86$$

$$\bar{x}_{2\bullet\bullet} = \frac{24.0 + 24.4 + \Lambda + 24.4 + 24.1}{15} = 24.16$$

$$\bar{x}_{3\bullet\bullet} = \frac{25.9 + 25.8 + \Lambda + 25.2 + 25.3}{15} = 25.10$$

(ii) BÖLÜNTÜ ORTALAMALARI

j'inci bölüntüdeki *bütün* gözlemlerin örneklem ortalaması $\bar{x}_{\bullet j\bullet}$ ile gösterilir.

$$\bar{x}_{\bullet j\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}}{KL}$$

Çizelge 15.10'daki verilerden şunları buluruz.

$$\bar{x}_{\bullet 1\bullet} = \frac{25.0 + 25.4 + \Lambda + 25.8 + 25.4}{9} = 25.00$$

$$\bar{x}_{\bullet 2\bullet} = \frac{24.8 + 24.8 + \Lambda + 25.0 + 25.4}{9} = 24.53$$

$$\bar{x}_{\bullet 3\bullet} = \frac{26.1 + 26.3 + \Lambda + 25.9 + 25.5}{9} = 25.57$$

$$\bar{x}_{\bullet 4\bullet} = \frac{24.1 + 24.4 + \Lambda + 23.6 + 23.5}{9} = 23.97$$

$$\bar{x}_{\bullet 5\bullet} = \frac{24.0 + 23.6 + \Lambda + 25.2 + 25.3}{9} = 24.47$$

(iii) GÖZ ORTALAMALARI

Öbek-bölüntü etkileşimlerinin varolup olmadığını aramak için her gözün örneklem ortalamasını hesaplamak gerekir. $\bar{x}_{ij\bullet}$, (ij)'inci göz için örneklem ortalamasını göstersin.

$$\bar{x}_{ij\bullet} = \frac{\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}}{L}$$

Böylece Çizelge 15.10'dan şunları buluruz:

$$\bar{x}_{11\bullet} = \frac{25.0 + 25.4 + 25.2}{3} = 25.2$$

$$\bar{x}_{12\bullet} = \frac{24.8 + 24.8 + 24.5}{3} = 24.7$$

Benzer biçimde

$\bar{x}_{13\bullet} = 26.2$ $\bar{x}_{14\bullet} = 24.3$ $\bar{x}_{15\bullet} = 23.9$

$\bar{x}_{21\bullet} = 24.1$ $\bar{x}_{22\bullet} = 23.7$ $\bar{x}_{23\bullet} = 24.8$ $\bar{x}_{24\bullet} = 23.9$ $\bar{x}_{25\bullet} = 24.3$

$\bar{x}_{31\bullet} = 25.7$ $\bar{x}_{32\bullet} = 25.2$ $\bar{x}_{33\bullet} = 25.7$ $\bar{x}_{34\bullet} = 23.7$ $\bar{x}_{35\bullet} = 25.2$

(iv) GENEL ORTALAMA

Bütün örneklem gözlemlerinin ortalamasını da $\bar{x}$ ile gösteriyoruz.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}}{KHL}$$

Bizim verilerimizle bu büyüklük, üç öbeğin örneklem ortalamalarının ortalaması biçiminde hesaplanması en basit olandır.

$$\bar{x} = \frac{24.86 + 24.16 + 25.10}{3} = 24.71$$

Şimdi bu çözümlemeyi sezgisel olarak duyumsamak için varsayılan anakütle modeli terimleriyle düşünmek kolaylık sağlar. *ij* gözündeki *l*'inci gözleme karşılık gelen rassal değişkeni X_{ijl} ile gösterelim. Bu durumda çözümlememizde varsayılan model şudur:

$$X_{ijl} = \mu + G_i + B_j + I_{ij} + \varepsilon_{ijl} \qquad (15.5.1)$$

Eş. (15.5.1)'in sağ yanındaki ilk üç terim Eş. (15.4.1)'dekilerin tıpkısıdır. Daha önceki gibi genel ortalamayı, öbeğe özgü etmeni ve bölüntüye özgü etmeni temsil ederler. Bir sonraki terim I_{ij}, genel etki ile öbek ve bölüntü etkileri hesaba katılmışken *ij* gözünde bulunmanın etkisini gösterir. Hiçbir öbek-bölüntü etkileşimi yoksa bu terim 0'dır. Modelde bulunması etkileşimin varolup olmadığını anlamaya yarar. Son olarak ε_{ijl} hata terimi, deneysel hatayı temsil eden rassal bir değişkendir.

Eş. (15.5.1)'i yeniden şöyle yazacağız.

$$X_{ijl} - \mu = G_i + B_j + I_{ij} + \varepsilon_{ijl} \qquad (15.5.2)$$

Bütün kareler toplamının, öbeklerden, bölüntülerden, öbeklerle bölüntülerin etkileşiminden ve hatadan kaynaklanan değişkenliği temsil eden dört terimin toplamı olduğu Eş. (15.5.2)'den görülebilir.

Ayrıntlı türetmeleri vermeden sınamalara temel oluşturan bu ayrıştırmayı aşağıdaki çerçeve içinde belirtiyoruz.

İki Yönlü Varyans Çözümlemesi: Bir Gözde Birden Çok Gözlem

Her gözünde L gözlem olan K öbekli H bölüntülü bir örneklemimiz olsun. i'inci öbek j'inci bölüntü gözündeki l'inci gözlemi x_{ijl} ile gösterelim. Genel örneklem ortalamasını $\bar{x}$ ile, öbeklerin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_{i\bullet\bullet}$ ile, bölüntülerin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_{\bullet j\bullet}$ ile, gözlerin örneklem ortalamalarını $\bar{x}_{ij\bullet}$ ile gösterelim.

Daha sonra aşağıdaki kareler toplamlarıyla bunlara karşılık olan serbestlik derecelerini tanımlayalım:

KARELER TOPLAMLARI		SERBESTLİK DERECESİ
BÜTÜN:	$\text{BKT} = \sum_i \sum_j \sum_l (x_{ijl} - \bar{x})^2$	$KHL - 1$
ÖBEKLER ARASI:	$\text{ÖAKT} = HL \sum_{i=1}^{K} (\bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x})^2$	$K - 1$
BÖLÜNTÜLER ARASI:	$\text{BAKT} = KL \sum_{j=1}^{H} (\bar{x}_{\bullet j\bullet} - \bar{x})^2$	$H - 1$
ETKİLEŞİM:	$\text{EKT} = L \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{H} (\bar{x}_{ij\bullet} - \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x}_{\bullet j\bullet} + \bar{x})^2$	$(K-1)(H-1)$
HATA:	$\text{HKT} = \sum_i \sum_j \sum_l (x_{ijl} - \bar{x}_{ij\bullet})^2$	$KH(L-1)$

Bu durumda şu yazılabilir:

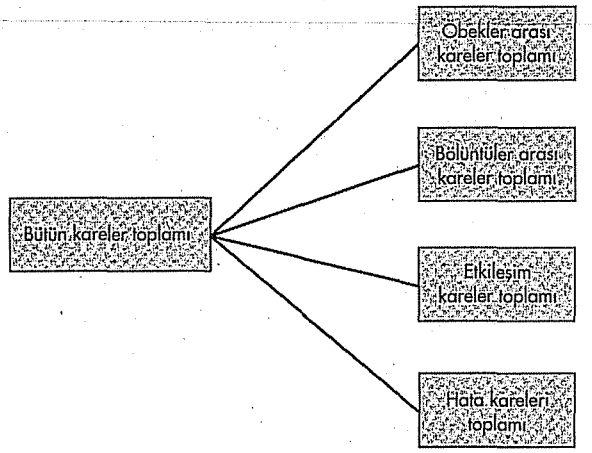
$$\text{BKT} = \text{ÖAKT} + \text{BAKT} + \text{EKT} + \text{HKT}$$

Kareler toplamlarının bileşenleri kendi serbestlik derecelerine bölünürse ÖAKO, BAKO, EKO, HKO kareler ortalamaları bulunur.

Öbeklerin, bölüntülerin ve etkileşimin hiçbir etkisi yoktur diyen önsavların sınanması sırasıyla şu F oranlarını temel alır:

$$\frac{\text{ÖAKO}}{\text{HKO}} \qquad \frac{\text{BAKO}}{\text{HKO}} \qquad \frac{\text{EKO}}{\text{HKO}}$$

Bu sınamalar ilgili pay ve payda serbestlik dereceli F dağılımlarına bakılarak yapılır. Bu sınamaların geçerliliği (15.5.1)'deki ε_{ijl}'nin normal dağılımdan gelme bir rassal örneklem gibi davrandığı varsayımına dayanır.



ÇİZİM 15.5 Göz başına birden çok gözlemli iki yönlü varyans çözümlemesi için kareler toplamlarının ayrıştırılması

Çizim 15.5, örneklem gözlemlerinin genel ortalamaya göre bütün kareler toplamını dört bileşenin toplamı olarak göstermektedir. Bunun Çizim 15.4'ten farkı, deney yinelendiğinden, burada etkileşim kareler toplamını ötekilerden ayırabilmemizdedir.

Gerekli hesaplamalar, daha önce yapıldığı gibi, bir varyans çözümlemesi çizelgesinde özetlenmiştir. Her gözde L gözlemin bulunduğu iki yönlü bir varyans çözümlemesi Çizelge 15.12'de gösterilmiştir.

Aslında çeşitli kareler toplamları için hesaplanması daha kolay formüller vardır. Yine de gerekli aritmetik işlemler hayli uzun sürer. Burada fazla ayrıntıya girmeyecek, yalnızca verilerimizle yapılan hesaplamaların bulgularını Çizelge 15.13'te göstermekle yetineceğiz. Uygulamada varyans çözümlemesi hesapları çoğunlukla bir bilgisayar paket programıyla yapılır. Böylece aritmetik karmaşıklık uygulamalı çalışmalara pek sınırlama getirmez.

Çizelge 15.13'teki serbestlik dereceleri, bu veriler için

$$K=3 \qquad H=5 \qquad L=3$$

olmasından kaynaklanır. Kareler ortalamaları, toplam karelerin kendi serbestlik derecelerine bölünmesiyle elde edilir. Son olarak F oranları, ilk üç kareler ortalamasının her birinin sırayla hata kareler ortalamasına bölünmesiyle ortaya çıkar.

Çizelge 15.13'teki bilgileri kullanarak ilgilendiğimiz üç sıfır önsavını sınayabiliriz. Başlangıç olarak X, Y, Z arabaları için yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayalım. Sınama, 92.46 olarak hesaplanmış F oranına dayanır. Ek Çizelge 7'den pay ve payda serbestlik dereceleri sırasıyla 2 ve 30 olan %1 düzeyindeki sınama için şu değeri okuruz:

$$F_{2,30,0.01} = 5.39$$

ÇİZELGE 15.12 Her gözde L gözlemin bulunduğu iki yönlü bir varyans çözümlemesinin genel gösterimi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMALARI	F ORANLARI
Öbekler arası	ÖAKT	$K-1$	$\text{ÖAKO} = \dfrac{\text{ÖAKT}}{K-1}$	$\dfrac{\text{ÖAKO}}{\text{HOK}}$
Bölüntüler arası	BAKT	$H-1$	$\text{BAKO} = \dfrac{\text{BAKT}}{H-1}$	$\dfrac{\text{BAKO}}{\text{HKO}}$
Etkileşim	EKT	$(K-1)(H-1)$	$\text{EKO} = \dfrac{\text{EKT}}{(K-1)(H-1)}$	$\dfrac{\text{EKO}}{\text{HKO}}$
Hata	HKT	$KH(L-1)$	$\text{HKO} = \dfrac{\text{HKT}}{KH(L-1)}$	
Toplamlar	BKT	$KHL-1$		

Öyleyse, araba türleri için anakütle ortalamalarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde reddedilir.

Daha sonra, beş sürücü yaş grubu için yakıt tüketiminin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayalım. Bu sınama, Çizelge 15.13'te 84.96 olarak hesaplanmış F oranına dayanır. Öyleyse, pay ve payda serbestlik dereceleri sırasıyla 4 ve 30'dur, %1 düzeyinde bir sınama için

$$F_{4,30,0.01} = 4.02$$

olduğu görülür. Sürücü yaş grupları için anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı %1 düzeyinde açıkça reddedilir.

Son olarak, sürücülerle araba türleri arasında bir etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayalım. Bu sınama 21.33 olarak hesaplanmış F oranını temel alır. Pay ve payda serbestlik derceleri sırasıyla 8 ve 30 olduğuna göre Ek Çizelge 7'den

$$F_{8,30,0.01} = 3.17$$

okunur. Sürücülerle araba türleri arasında hiçbir ilişki olmadığını söyleyen sıfır önsavı %1 anlamlılık düzeyinde çok açıkça reddedilir.

ÇİZELGE 15.13 Çizelge 15.10'daki yakıt tüketimi verileri için iki yönlü varyans çözümlemesi çizelgesi

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMALARI	F ORANLARI
Öbekler arası	7.1565	2	3.5783	92.46
Bölüntüler arası	13.1517	4	3.2879	84.96
Etkileşim	6.6045	8	0.8256	21.33
Hata	1.1600	30	0.0387	
Toplamlar	28.0727	44		

Verilerimizdeki kanıtlar çok güçlü biçimde şu üç sonucu göstermektedir:

1. X, Y, Z arabaları için ortalama yakıt tüketimi aynı değildir.
2. Ortalama yakıt tüketimi bütün sürücü yaş grupları için aynı değildir.
3. Sürücü başarımındaki farklılıklar bütün araba türlerine tekdüze dağılmamıştır. Tersine, belli bir yaş grubundaki bir sürücü, öbürleriyle karşılaştırıldığında, bir arabada öbürüne göre daha başarılı olabilir.

Varyans çözümlemesi hesaplamaları yapan bilgisayar programları bugün her yerde bulunabiliyor, dolayısıyla bu bölümdeki modelleri, hatta daha karmaşıklarını çözümlerken üstlenilen hesaplama yükü artık pek ciddi değil. Çizelge 15.14, Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) adlı bir paket programın yakıt tüketimi verilerimiz için çıktısının bir bölümünü göstermektedir. Bu çıktı, hata kaynağını RESIDUAL (kalıntı) adıyla göstererek Çizelge 15.13'teki bilgilerin hepsini içermektedir. Ayrıca, iki ana kareler toplamı toplanarak MAIN EFFECTS (ana etkiler) başlığı altında ilgili serbestlik dereceleri, ortalama kareleri ve F oranlarıyla birlikte verilmektedir. Benzer biçimde, MAIN EFFECTS ile 2-WAY INTERACTIONS (iki yönlü etkileşim-ler) toplamına da EXPLAINED (açıklanan) kareler toplamı adı verilmektedir. Bu da serbestlik derecesi, ortalama karesi ve F oranıyla gösterilmektedir.

ÖRNEK 15.3

Bu altbölümde, buraya kadar her gözdeki gözlem sayısının aynı olduğunu varsaydık. Ancak bu sınırlama gerekli olmayıp araştırmacıya bazen güçlük çıkarabilir. Aslında kareler toplamı formülleri, eşit olmayan göz içeriklerini hesaba katacak biçimde düzeltilebilir. Biz burada uygun kareler toplamları hesabının teknik ayrıntılarıyla ilgilenmeyeceğiz. Bir araştırmacı genellikle bu amaç için bir bilgisayar paketi kullanır. Bizim ilgimizse bulguların çözümlenmesinde yatar.

ÇİZELGE 15.14 Yakıt tüketimi verileri için SPSS varyans çözümleme programı çıktısının bir bölümü

SOURCE OF VARIATION	SUM OF SQUARES	DF	MEAN SQUARE	F
MAIN EFFECTS	20.3082	6	3.3847	87.46
AUTOMOBILES	7.1565	2	3.5783	92.46
DRIVERS	13.1517	4	3.2879	84.96
2-WAY INTERACTIONS	6.6045	8	0.8256	21.33
AUTOMOBILES-DRIVERS	6.6045	8	0.8256	21.33
EXPLAINED	26.9127	14	1.9223	49.67
RESIDUAL	1.1600	30	0.0387	
TOTAL	28.0727	44	0.6380	

İşi sevdiren ve sevdirmeyen görevler yapan içe dönük ve dışa dönük işçilerin iş tatmini düzeylerini karşılaştırmak üzere bir çalışma tasarlanmıştır.[4] Bu çalışmanın amacına uygun olarak iki tür işçi ve iki tür görev vardır ve bunlar dört birleşim gösterir. Bu dört birleşimdeki işçilerin bildirdikleri iş tatmini düzeylerinin örneklem ortalamaları aşağıdadır:

İçe dönük işçi, işi sevdirmeyen görev (16 gözlem):	2.78
Dışa dönük işçi, işi sevdirmeyen görev (15 gözlem):	1.85
İçe dönük işçi, işi sevdiren görev (17 gözlem):	3.87
Dışa dönük işçi, işi sevdiren görev (19 gözlem):	4.12

Aşağıdaki çizelge, hesaplanan kareler toplamlarıyla bunların serbestlik derecelerini göstermektedir. Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayıp bu deneyin bulgularını çözümleyin.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMLARI	SERBESTLİK DERECELERİ
Görev	62.04	1
İşçi türü	0.06	1
Etkileşim	1.85	1
Hata	23.31	63
Toplam	87.26	66

Burada da kareler toplamlarının ilgili serbestlik derecelerine bölünmesiyle kareler ortalamaları bulunur. *F* oranları da görev, işçi türü ve etkileşim ortalama karelerinin hata kareler ortalamasına bölünmesinden elde edilir. Varyans çözümlemesi çizelgesi şöyle tamamlanabilir:

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMLARI	SERBESTLİK DERECELERİ	KARELER ORTALAMLARI	*F* ORANLARI
Görev	62.04	1	62.04	167.68
İşçi türü	0.06	1	0.06	0.16
Etkileşim	1.85	1	1.85	5.00
Hata	23.31	63	0.37	
Toplam	87.26	66		

Bu varyans çözümlemesi çizelgesi, üç tane sıfır önsavının sınanmasında temel olarak kullanılabilir. İki tür görevde tatmin düzeylerinin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı için hesaplanan *F* oranı 167.68'dir. Pay serbestlik

[4] J. S. Kim, "Relationships of personality to perceptual and behavioral responses in stimulating and nonstimulating tasks," *Academy of Management Journal, 23* (1980), 307-19.

derecemiz 1, payda serbestlik derecemiz 63'tür, öyleyse Ek Çizelge 7'den %1 düzeyinde sınama için şunu okuruz:

$$F_{1,63,0.01} = 7.07$$

Demek ki, işi sevdiren ve sevdirmeyen görevlerin tatmin düzeylerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavı çok açıkça reddedilmektedir. Bu bulgu şaşırtıcı değildir. İşçilerin işi sevdiren bir görev yaparken işi sevdirmeyen görevlere göre daha çok tatmin duyacaklarını beklemek doğaldır.

İkinci olarak, içe dönük ve dışa dönük işçilerin tatmin düzeylerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayalım. Burada hesaplanan F oram 0.16'dır. 1 ve 63 serbestlik derecelerinde %5 düzeyinde bir sınama için

$$F_{1,63,0.05} = 4.00$$

olduğu görülür. İçe ve dışa dönük işçilerin iş tatminlerinin anakütle ortalamaları eşittir diyen sıfır önsavı %5 anlamlılık düzeyinde reddedilemez.

Çoğu araştırmada etkileşim terimi kendi başına pek önemli görülmez. Bu terimi çözümlemelere katmanın ana nedeni, verilerdeki değişkenliğin bir kısmını "emerek" anakütle ortalamaları arasında varolabilecek farkları daha kolay yakalamaktır. Ancak elimizdeki bu çalışmada etkileşim ana ilgi odağıdır. Görev ve işçi türleri arasındaki etkileşimin iş tatminini belirlemede hiçbir rolü yoktur diyen sıfır önsavı, 5.00 olarak hesaplanmış F oranıyla sınanır. Burada da pay ve payda serbestlik dereceleri sırasıyla 1 ve 63'tür. Demek ki F dağılımının çizelgelenmiş değeriyle yapılan karşılaştırmaya göre etkileşim olmadığım söyleyen sıfır önsavı, %5 anlamlılık düzeyinde reddedilebilmekle birlikte %1 düzeyinde reddedilemez.

ALIŞTIRMALAR

32. 1980 Kış Olimpiyatları'nda hakemlerin yarışmacılara verdikleri puanlar incelenmiştir.[5] Bayanlar buz pateni yarışmasında yirmiiki yarışmacıyla dokuz hakem vardır. Her yarışmacı her hakem tarafından yedişer altdalda değerlendirilmiştir. Bu yolla verilen puanlar, her gözde yedi gözlem olmak üzere 198 yarışmacı-hakem gözü olan iki yönlü bir varyans çözümlemesi çerçevesinde ele alınabilir. Kareler toplamları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

[5] G. Fenwick, S. Chatterjee, "Perception, preference, and patriotism: An exploratory analysis of 1980 Winter Olympics," *American Statistican, 35* (1981), 170-73.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMLARI
Yarışmacılar arası	364.50
Hakemler arası	0.81
Etkileşim	4.94
Hata	1,069.94

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayın.
(b) İlgili F sınamalarını yapıp bulgularınızı yorumlayın.

33. Alıştırma 32'ye dönelim. Buz dansı yarışmasına oniki çift katılmıştır. Burada da dokuz hakem vardır ve yarışmacılar yedi altdalda dğerlendirilmiştir. Öbekler (yarışmacı çiftler) arası ve bölüntüler (hakemler) arası kareler toplamları şöyle bulunmuştur:

$$\text{ÖAKT} = 60.10 \qquad \text{BAKT} = 1.65$$

Etkileşim ve hata kareleri toplamları da şöyledir:

$$\text{EKT} = 3.35 \qquad \text{HKT} = 31.61$$

Bu bulguları çözümleyin ve vardığınız sonuçları yorumlayın.

34. Bir psikolog, yönetici adaylarına uygulanan üç tür beceri sınavı üzerinde çalışmaktadır. Sınama sürecinin nasıl yapılandırılacağına karar verilirken, önemli bir nokta sınava girenlerle sınav türü arasında bir etkileşim olabileceğidir. Eğer etkileşim yoksa tek bir sınav türü gereklidir. Dört aday türü öbeğindeki her adaya üç tür sınavın her bir uygulanmıştır. Adaylar zayıf, orta, iyi ve çok iyi diye öbeklendirilmiştir. Alınan sonuçlar aşağıdaki çizelgede sıralanmıştır.

ADAY TÜRÜ	SINAV TÜRÜ								
	TANIYICI			KAFA YORUCU			BEZDİRİCİ		
Zayıf	64	68	62	69	71	67	75	75	78
Orta	74	79	76	72	69	69	70	69	65
İyi	64	72	65	68	73	75	78	82	80
Çok iyi	83	82	84	78	78	75	76	77	75

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Aday türüyle sınav türü arasında etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

35. Dört öğrenci yurdunun her birinden rassal örneklemlere seçilen iki birinci, iki ikinci, iki üçüncü, iki dördüncü sınıf öğrencisinden çalışma koşulları bakımından yurt ortamını 1 (zayıf) ile 10 (kusursuz) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Sonuçlar aşağıdaki çizelgededir.

SINIF	YURT							
	A		B		C		D	
Birinci	7	5	8	6	9	8	9	9
İkinci	6	8	5	5	7	8	8	9
Üçüncü	5	4	7	6	6	7	7	8
Dördüncü	7	4	6	8	7	5	6	7

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Dört yurdun değerlendirilmelerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(c) Dört sınıf öğrencisinin değerlendirmelerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(d) Sınıf ile yurt arasında etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

36. Gözlerinde birden çok gözlem olan kimi deneylerde araştırmacı, öbeklerle bölüntüler arasında ilişki olmadığı yolunda varsayım yapmaya hazırdır. Göze çarpan herhangi bir etkileşim rassal hataya yorulur. Böyle bir varsayım yapıldığında, önceki etkileşim ve hata kareleri toplamları bir araya getirilerek yeni bir hata kareleri toplamı oluşturulması dışında, çözümleme bildik yoldan yapılır. Benzer biçimde, ilgili serbestlik dereceleri de toplanır. Etkileşim olmadığını söyleyen varsayım doğruysa, bu yaklaşımın, serbestlik derecesini artırarak öbek ve bölüntü ortalamalarının eşitliği için daha güçlü sınamalar sağlama üstünlüğü vardır. Alıştırma 35'teki çalışma için, şimdi, yurtlarla sınıflar arasında etkileşim olmadığı varsayımını yaptığımızı düşünelim.

(a) Bu varsayımla söylenmek isteneni açıkça belirtin.
(b) Bu varsayım verilmişken varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(c) Dört yurdun aldığı ortalama notların aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.
(6) Dört sınıfın verdiği ortalama notların aynı olduğunu söyleyen sıfır önsavını sınayın.

37. Alıştırma 22'ye dönelim. Dört tür mısır ve üç tür gübre kullanarak ortalama dönüm başına verim karşılaştırması deneyi yapıldıktan sonra bir tarım araştırmacısı mısır türüyle gübre arasında bir etkileşim olabileceği düşüncesini ortaya atmıştır. Bunun olabilirliğini denemek için bir küme yeni deney yapılmış, elde edilen verimler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

GÜBRE	MISIR TÜRÜ			
	A	B	C	D
1	80	88	73	88
2	94	91	79	93
3	81	78	83	83

(a) Mısır türüyle gübre arasındaki etkileşim ile ne söylenmek istenmektedir?
(b) İki deney kümesinn verilerini bir araya getirerek bir varyans çözümlemesi çizelgesi düzenleyin.

(c) Bütün mısır türleri için ortalama verim aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(d) Bütün gübre türleri için ortalama verim aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(e) Mısır türüyle gübre türü arasında etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

38. Alıştırma 24'e dönelim. Her bölge-kutu rengi birleşimi için yeni bir mağazanın araştırmaya katıldığını, aşağıdaki çizelgede verilen sonuçların bulunduğunu düşünelim. Bu sonuçları Alıştırma 24'tekilerle birleştirerek varyans çözümlemesi hesaplarını yapıp bulgularınızı tartışın.

BÖLGE	KUTU RENGİ		
	KIRMIZI	SARI	MAVİ
Doğu	45	50	54
Güney	49	51	58
Ortabatı	43	60	50
Batı	38	49	44

39. Alıştırma 25'teki çalışmayı yapan öğretim üyesi, aynı çalışmayı ertesi yıl da yürütmüştür. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgededir. Bu sonuçları Alıştırma 25'tekilerle birleştirip varyans çözümlemesi hesaplarını yaparak bulgularınızı tartışın.

SINAV	DERS KİTABI		
	A	B	C
Çoktan seçmeli	4.7	5.1	4.8
Anlatımlı	4.4	4.6	4.0
Karma	4.5	5.3	4.9

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

40. Tek yönlü varyans çözümlemesi çerçevesiyle iki yönlü varyans çözümlemesi çerçevesi arasındaki farkı özenle belirtin. Bu kitapta verilenler dışında örnekler gösterin, bu örneklerin her birine uyan işletmecilik sorunlarıyla ilgili alıştırmalar düzenleyin.

41. Her gözde birden çok gözlem olan iki yönlü varyans çözümlemesinde etkileşimle ne söylenmek istendiğini özenle açıklayın.

42. Bölüm 8, Alıştırma 8'de mali raporların okunabilirliğini değerlendiren bir çalışmayı ele almıştık.[6] Yazılı bir iletinin etkinliğinin değerlendirilmesi tekniğine *metnin okunabilme işlemleri* adı verilir. Bağımsız rassal örneklemlere seçilmiş üç öbek insana —yeminli muhasebeciler, yeminli mali danışmanlar, ticaret bankaları kredi

[6] A. H. Adelberg, "A methodology for measuring the understandability of financial report messages," *Jornal of Accounting Research, 17* (1979), 565-92.

yöneticisi adaylarına— mali raporlar verilmiştir. Daha sonra, metnin okunabilme işlemleriyle örneklem üyelerinin puanları bulunmuştur. Bu üç grubun anakütle ortalama puanlarının eşit olduğunu söyleyen sıfır önsavıyla ilgilenilmektedir. Aşağıdaki çizelgede verilen bilgilerle bu önsavı sınayın.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ
Öbekler arası	5,156	2
Öbekler içi	120,802	1,005
Hata	125,967	1,007

43. Yöneticilerin astlarıyla yaptığı işe alma görüşmelerindeki başarıya yardımcı olabilecek öğeleri değerlendirmek üzere bir deney tasarlanmış, buna göre yöneticiler geri besleme, geri besleme ve hedef koyma, kontrol diye adlandırılan üç görüşme tarzına rassal olarak paylaştırılmışlardır. Geri besleme tarzında yöneticilere, astlarının önceki görüşmelere tepkilerini inceleyip tartışma olanağı tanınmıştır. Geri besleme ve hedef koyma tarzında yöneticiler, yapacakları görüşme için hedef koymaya özendirilmektedir. Kontrol öbeği için, görüşmeler herhangi bir geri besleme ya da hedef koyma olmaksızın alışıldık biçimde yürütülmektedir. Görüşmeler bittikten sonra astların görüşmeden duydukları tatmin düzeyleri değerlendirilmiştir.[7] Geri besleme öbeğindeki kırkbeş kişi için ortalama tatmin düzeyi 13.98'dir. Geri besleme ve hedef koyma öbeğindeki kırkdokuz kişi 15.12'lik bir ortalama tatmin düzeyi elde ederken kırkbir kontrol öbeği üyesi için bu değer 13.07 olmuştur. Verilerden hesaplanan F oranı 4.12'dir.

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesinin tamamını düzenleyin.

(b) Üç tür görüşme için de anakütle ortalama tatmin düzeyi aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

44. Bir araştırma, gözlem ve görüşmeye dayanarak 134 yöneticiyi dört öbeğe ayırmıştır.[8] Altmışiki yönetici teşvik ve destek vermede üst düzey, kamu ruhunda orta düzeyde olarak A öbeğine ayrılmıştır. B öbeğine ayrılan elliki yönetici teşvikte düşük, destekte orta, kamu ruhunda üst düzey sayılmıştır. C öbeği teşvikte orta, destekte düşük, kamu ruhunda düşük düzeyde olan yedi yöneticiden oluşmaktadır. D öbeğindeki onüç yönetici ise üç ölçüt bakımından da düşük düzeyde görülmüştür. Bu dört öbeğin aylıkları karşılaştırılmıştır. Örneklem ortalaması A öbeğinde 7.87, B öbeğinde 7.47, C'de 5.14, D'de 3.69'dur. Bu verilerden hesaplanan F oranı 25.60'tır.

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesinin tamamını düzenleyin.

(b) Bu dört öbekteki yöneticilerin aylıklarının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

---

[7] W. F. Nemeroff, J. Cosentino, "Utilizing feedback and goal setting to increase performance appraisal interviewer skills of managers," *Academy of Management Journal, 22* (1979), 516-26.

[8] D. C. Pheysey, "Managers occupational histories, organizational environments, and climates for management development," *Journal of Management Studies, 14* (1977), 58-79.

45. Sigara içmenin iş devamsızlığı üzerindeki etkilerini inceleyen bir araştırmada[9] çalışanlar sigara içenler, yeni bırakanlar, çok önce bırakanlar, hiç içmeyenler diye sınıflanmıştır. Bu öbeklerden doksanaltı, otuzdört, seksenaltı, 206 kişilik örneklemler alınmıştır. Ay başına saat sayısı olarak kısa dönem devamsızlıkların örneklem ortalamaları sırasıyla 2.15, 2.21, 1.47, 1.69 çıkmıştır. Bu verilerle hesaplanan F oranı 2.56'dır.

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesinin tamamını düzenleyin.

(b) Devamsızlık oranının dört anakütle ortalaması aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

46. Lower Michigan'da alkollü içkiler için fiyat reklâmına sınırlamalar getirilmiştir. Ama bir süre için bu sınırlamalar kaldırılmıştır. Bütün fermantasyonlu alkollü içki satışları için üç dönemde —fiyat reklâmı sınırlamaları altında, bu sınırlamalar kalktığında ve sınırlamalar yeniden konduğunda— veri toplanmıştır.[10] Aşağıdaki çizelge kareler toplamları ile serbestlik derecelerini göstermektedir. Varyans çözümlemesi için bilinen koşulların —özellikle örneklem gözlemlerinin birbirinden bağımsız olmasının— geçerli olduğunu varsayarak bu üç zaman diliminde ortalama satışlar aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ
Öbekler arası	11,438.3028	2
Öbekler içi	109,200.0000	15
Toplam	120,638.3028	17

47. Dört semtteki ev fiyatlarından bağımsız rassal örneklemler alınmıştır. Satış fiyatları (bin dolar olarak) aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Dört bölgede de ev satış fiyatlarının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

A SEMTİ	B SEMTİ	C SEMTİ	D SEMTİ
73	85	97	61
63	59	86	67
89	84	76	84
75	70	78	67
70	80	76	69

48. Alıştırma 47'nin verileriyle dört bölgede de ev satış fiyatlarının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını Kruskal-Wallis sınamasını kullanarak sınayın.

---

[9] M. R. Manning, J. S. Osland, A. Osland, "Work-related consequences of smoking cessation," *Academy of Management Journal, 32* (1989), 606-21.

[10] G. B. Wilcox, "The effect of price advertising on alcoholic beverage sales," *Journal of Advertising Research, 25*, no. 5 (1985), 33-38.

49. Bir çalışma,[11] iş paylaşıcı, tam zamanlı ve yarı zamanlı olarak görev yapan hastane çalışanlarının 1 (hiç tatmin olmayan) ile 7 (çok tatmin olan) arasında bir ölçekte ölçülen görev tatmin düzeylerini değerlendirmeye yöneliktir. Yirmibeş iş paylaşıcısından oluşan bir örneklemde ortalama tatmin düzeyi 6.60, yirmidört tam zamanlı görevlide 5.37, yirmi yarı zamanlı görevlide 5.20'dir Bu verilerden hesaplanan F oranı 6.62'dir.

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesinin tamamını düzenleyin.

(b) Tatmin düzeylerinin üç anakütle ortalaması eşittir diyen sıfır önsavını sınayın.

50. Tek yönlü varyans çözümlemesi kurgusunu düşünelim.

(a) Öbekler içi kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{ÖİKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{K} n_i \bar{x}_i^2$$

(b) Öbekler arası kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{ÖAKT} = \sum_{i=1}^{K} n_i \bar{x}_i^2 - n\bar{x}^2$$

(c) Bütün kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2$$

51. Her gözde bir gözlemin olduğu tek yönlü varyans çözümlemesi kurgusunu düşünelim.

(a) Öbekler arası kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{ÖAKT} = H\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_{i\bullet}^2 - n\bar{x}^2$$

(b) Bölüntüler arası kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{BAKY} = K\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{\bullet j}^2 - n\bar{x}^2$$

(c) Bütün kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2$$

(d) Hata kareleri toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{HKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H} x_{ij}^2 - H\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_{i\bullet}^2 - K\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{\bullet j}^2 + n\bar{x}^2$$

---

[11] J. G Pesek, C. McGee, "An analysis of job sharing, full-time and part-time work arrangements: One hospital's experience," *American Business Review, 7*, no. 2 (1989), 34-40.

52. Rassal bir örnekleme seçilen 125 tüketiciden üç tür markayı —kamu kesimi, özel kesim, markasız— tüketicinin algılaması konusunda bilgi derlenmiştir.[12] Bu algılama ölçülerinin kareler toplamları aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayın, üç marka türünde algılama düzeylerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

DEĞİŞİM KAYNAĞI	KARELER TOPLAMLARI
Tüketiciler arası	37,571.5
Markalar arası	32,987.3
Hata	55,710.7

53. Üç emlâkçının her birinden bir semtteki beş eve değer biçmeleri istenmiştir. Sonuçlar bin dolar olarak aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayın, üç emlâkçinin değerlemelerinin anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

EV	EMLÂKÇI		
	A	B	C
1	210	218	226
2	192	190	198
3	183	187	185
4	227	223	237
5	242	240	237

54. Öğrenciler bir yandan ailelerinin gelir durumuna, öbür yandan SAT bilimsel beceri sınavında alabilecekleri puana göre sınıflandırılmıştır. Dokuz çapraz sınıflama gözlerinin her birinde rassal olarak seçilen bir öğrencinin ikinci sınıfın sonundaki birikimli not ortalaması kaydedilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

SAT PUANI	GELİR GRUBU		
	YÜKSEK	ORTA	DÜŞÜK
Çok yüksek	3.7	3.6	3.6
Yüksek	3.4	3.5	3.2
Orta	2.9	2.8	3.0

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç gelir grubu için de birikimli not ortalamasının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

[12] Veriler J. A. Bellizzi, H. F. Kneckeberg, J. R. Hamilton, W. S. Martin, "Consumer perceptions ofnational, private, and generic brands," *Journal of Retailing, 57*, n0. 4 (1981),56-70'ten alınmıştır.

(c) Üç SAT puan grubu için de birikimli not ortalamasının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

55. Her gözde bir gözlem olan tek yönlü varyans çözümlemesi için i'inci öbek ve j'inci bölüntüdeki gözlemi şöyle yazalım:

$$X_{ij} = \mu + G_i + B_j + \varepsilon_{ij}$$

Alıştırma 53'e dönüp B emlâkçisi ve 1. ev gözlemini alalım ($x_{21} = 218$).

(a) μ'yü tahmin edin.

(b) G_2'yi tahmin edip yorumlayın.

(c) B_1'i tahmin edip yorumlayın.

(d) ε_{ij}'yi tahmin edin.

56. Alıştırma 54'e dönüp orta gelir grubunda yüksek SAT puanı gözlemini alalım ($x_{22} = 3.5$).

(a) μ'yü tahmin edin.

(b) G_2'yi tahmin edin.

(c) B_2'yi tahmin edin.

(d) ε_{ij}'yi tahmin edin.

57. Her gözünde L gözlemi olan iki yönlü varyans çözümlemesi kurgusunu ele alalım.

(a) Öbekler arası kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{ÖAKT} = HL\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_{i\bullet\bullet}^2 - HKL\bar{x}^2$$

(b) Bölüntüler arası kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{BAKY} = KL\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{\bullet j\bullet}^2 - HKL\bar{x}^2$$

(c) Hata kareleri toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{HKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}^2 - L\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{ij\bullet}^2$$

(d) Bütün kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{BKT} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H}\sum_{l=1}^{L} x_{ijl}^2 - HKL\bar{x}^2$$

(e) Etkileşim kareler toplamının şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\text{EKT} = L\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{ij\bullet}^2 - HL\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_{i\bullet\bullet}^2 - KL\sum_{j=1}^{H} \bar{x}_{\bullet j\bullet}^2 + HKL\bar{x}^2$$

58. Satınalma komisyoncusuna bir ses kayıt aygıtı için bilgi verilip kalitesinin değerlendirilmesi istenmiştir.[13] Verilen bilgi iki etmen —fiyat ve üretidiği ülke— dışında tamamen aynıdır. Fiyat için üç seçenek vardır: 605 $, 495 $ ve fiyatı belirtilmemiş. Üreten ülke için de üç seçenek vardır: ABD, Brezilya ve ülke adı belirtilmemiş. Satınalma komisyoncularının kalite değerlendirmelerinin varyans çözümlemesi çizelgesinin bir bölümü aşağıda gösterilmiştir. Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayıp bu verilerin tam bir çözümlemesini anlatın.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ
Fiyatlar arası	0.178	2
Ülkeler arası	4.365	2
Etkileşim	1.262	4
Hata	93.330	99

59. Alıştırma 58'deki çalışmada ses kayıt aygıtına ilişkin bilgi MBA öğrencilerine de gösterilmiştir. Onların değerlendirmelerinin varyans çözümlemesi çizelgesinin bir bölümü aşağıda gösterilmiştir. Varyans çözümlemesi çizelgesini tamamlayıp bu verilerin tam bir çözümlemesini yapın.

DEĞİŞİMİN KAYNAĞI	KARELER TOPLAMI	SERBESTLİK DERECELERİ
Fiyatlar arası	0.042	2
Ülkeler arası	15.319	2
Etkileşim	2.235	4
Hata	70.414	50

60. Alıştırma 54'teki çalışmayı yapan araştırmacı, dokuz gelir-SAT puanı sınıflarının her birinden birer öğrencilik bağımsız rassal örneklemler seçmeye karar vermiştir. Elde edilen birikimli not ortalamaları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

SAT PUANI	GELİR GRUBU		
	YÜKSEK	ORTA	DÜŞÜK
Çok yüksek	3.9	3.7	3.8
Yüksek	3.2	3.6	3.4
Orta	2.7	3.0	2.8

(a) Varyans çözümlemesi çizelgesini düzenleyin.
(b) Üç gelir grubu için de birikimli not ortalamasının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.
(c) Üç SAT puan grubu için de birikimli not ortalamasının anakütle ortalamaları aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

[13] D. R. Lambert, "Price as a quality cue in industrial buying," *Journal of Academy of Marketing Science, 9* (1981), 227-38'de anlatılmıştır.

(d) Gelir grubu ile SAT puanı arasında etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

61. [*Bu alıştırma, varyans çözümlemesi hesaplarının yapılabilmesi için bilgisayar programı gerektirmektedir.*] Beş mısır türüyle beş gübrenin verime etkisini sınamak için bir deney yapılmıştır. Her mısır türü-gübre birleşimi için altı tarla kullanılmış, verimler kaydedilmiş ve aşağıdaki çizelgede gösterilen sonuçlar elde edilmiştir.

GÜBRE	MISIR TÜRÜ									
	A		B		C		D		E	
1	75	77	74	67	93	90	79	83	72	77
	79	83	73	65	87	82	87	88	79	83
	85	78	79	80	86	88	86	90	78	86
2	80	72	71	69	84	88	77	82	70	75
	76	73	75	62	90	79	84	87	80	80
	70	74	77	83	83	80	82	83	74	81
3	85	87	76	73	88	94	81	86	77	83
	80	79	77	70	89	86	90	90	87	79
	87	80	83	80	89	93	87	88	86	88
4	80	79	74	77	86	87	80	77	79	83
	82	77	69	78	90	85	90	84	88	80
	85	80	74	76	83	88	80	88	87	82
5	75	79	75	80	92	88	82	78	80	87
	86	82	84	80	89	94	85	86	90	83
	79	83	72	77	86	90	82	89	86	83

(a) Beş mısır türünün de anakütledeki ortalama verimleri aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

(b) Beş gübre türünün de anakütledeki ortalama verimleri aynıdır diyen sıfır önsavını sınayın.

(c) Mısır türüyle gübre arasında etkileşim yoktur diyen sıfır önsavını sınayın.

BÖLÜM 16

İstatistikle Kalite Denetimi

16.1 KALİTE DENETİMİNİN ÖNEMİ

Bu bölümde, istatistik yöntemlerinin çok doğrudan ama yeni olmaktan uzak bir uygulamasını tanıtacağız. Amaç, bir üretim sürecinin çıktı kalitesini gözlemede istatistik tekniklerinden sonuna kadar yararlanmaktır. Bu hedefe yönelik olarak geliştirilen süreçlere genellikle **istatistikle kalite denetimi** yöntemleri, son zamanlarda da **istatistikle süreç denetimi yöntemleri** denmektedir. Uygulamada bu iki terim birbiri yerine kullanılmaktadır. Ancak kimi yazarlar ikinciyi vurgulayarak, amacın bitmiş ürünlerin istenen özelliklere uygunluğunun incelenmesiyle sınırlı olmadığını göstermek isterler. O aşamaya gelindiğinde, kusurlu ürünü atmak ya da yeniden işlemekten başka yapacak pek bir şey kalmaz, bu da önemli bir israfa yol açar. Öte yandan, istatistikle süreç denetimi konusundaki günümüz yayınları, bir üretim sürecini, yarı bitmiş ürünlerin ölçülebilir standartlara uymalarının gerektiği *her aşamada* gözlemenin önemini vurgular. Amaç, üretim sürecinin her aşamasında yeterli kalitenin sağlanması, böylece standartlara uymayan ürünlerle uğraşmak için para ve zaman harcanmamasıdır. Öyleyse günümüzdeki istatistikle süreç denetiminde, bir üretim sürecinin her aşamasına, kalitesinin denetlenmesi gereken çıktı üretiyor gözüyle bakılır.

ABD imalat sanayiinde, istatistikle kalite denetleme yöntemleri —bu tekniklere ilgi patlamasının gözlendiği onyıl olan— 1980'lere kadar pek yaygın değildi. Ama yine de istatistikle kalite denetimi yöntemleri, söylediğimiz gibi, kesinlikle yeni değildir. Bu yöntemlerin ne anlaşılması güçtür, ne de uygulan-

ması. Gerçekten de temel yöntemler —bugün en çok kullanılanlar— bu kitabın daha önceki bölümlerinde anlatılan istatistik tekniklerinin oldukça sıradan uygulamalarından başka bir şey değildir. ABD'de uzun yıllar görmezden gelinmelerine karşılık, istatistikle kalite denetimi yöntemlerini ilk geliştiren bir Amerikalıdır. Bu kişi, yakın zamanlarda yaygın kabul gören yöntemlerin ardında yatan yaklaşımları daha 1920'lerde savunan Walter A. Shewhart'tır. Aslında Shewhart'ın düşüncelerinin özel imalat sanayiinde geniş ölçüde uygulanması ilkin savaş sonrası Japonya'sında olmuştur. Bu gelişmeyi büyük ölçüde bir başka Amerikalı istatistikçiye, daha önce Shewhart'la çalışmış olan W. Edwards Deming'e boçluyuz. Bundan sonra Japon imalat sanayiinde kalitenin iyileştirilmesine çok özen gösterilmiş, ilk yöntemler üzerinde çeşitli düzeltmeler, geliştirmeler yapılmış ve bunlar uygulamaya konmuştur. Son zamanlardaki bu çalışmaların çoğunu Genichi Taguchi ve arkadaşları yapmıştır.

1970'lerin sonlarında ABD sanayii iç pazarlarda daha önce görülmemiş yoğunlukta bir yabancı rekabetiyle karşılaşmıştı. Mamul mal ithalatı hızla artarken Amerikan sanayileri yabancı pazarlarda benzer başarıyı gösteremiyordu. Bu gelişmenin sonuçları çok derin oldu. Makroiktisat düzeyinde, ABD bir süre dış ticaret açıkları verdi. Mikroiktisat düzeyinde, bütün sanayiler düşüşe geçti, bir bölümü rekabeti göğüslemek üzere hızlı, bazen de sancılı değişimlere zorlandı. Bu koşullar altında Amerika'nın gözlerini en başarılı rakibi Japonlara çevirmesi şaşırtıcı değildir. Kuşkusuz, Amerika ve Japonya'nın toplumsal ve iktisadi örgütlenmelerinde birçok farklılık vardır. Japon sanayinin göreli başarısının açıklamaya yönelik eksiksiz bir tartışmaya girişmek bu kitabın sınırlarını aşar. Buradaki amacımız için şu kadarını söylemek yeterlidir, Amerikan pazarındaki pek çok Japon malı kalite bakımından kıskanılır bir itibar kazandı. İşte, istatistikle kalite denetimi yöntemlerinin kullanımının ABD'de son yirmi yıldır hızla artmasının nedeni, Amerikan sanayiinin bu meydan okumaya yanıt verme gereğini duymasıyla açıklanır.

İstatistikle kalite denetimi, işletme istatistiğinin hızla büyüyen kolu olmuştur. Uygulamadaki göreli yeniliğine karşın bu yöntemlerin yararları açıkça görülmektedir.

1. *Artan verimlilik.* Standart dışı parçalar yeterince erken farkedilirse, üretim sürecindeki güçlükler önceden bilinirse, para ve zaman israfının önüne büyük ölçüde geçilmiş olur. İstatistikle süreç denetimi yönteminin başarıyla uygulanması sayesinde, işçilerin çabası ya da maliyet artmaksızın, yeterli kalitede ürünün üretim hacminde daha önceye göre artış sağlanır.

2. *Artan satışlar.* Ürünün kalitesi konusunda hakedilmiş iyi bir isim yapmanın rekabetçi pazar ortamında büyük bir üstünlük sağladığı bugün herkesçe kabul edilmektedir. Böyle bir itibar genellikle güç kazanılır ama bunun yokluğu çoğu sanayide ölümcül olur.

3. *Artan kâr.* Azalan birim üretim maliyeti ile artan satışlar, kuşkusuz, şirketin kâr-zarar satırına yansır. Kalite denetim yöntemlerinin bugün bu kadar tutulmasının nedeni kâr getirmesidir.

Ürün kalitesinin önemi konusunda söylenmesi gerektiği kadarını söyledik ama istatistik yöntemlerin nerede devreye girdiğini henüz açıklamadık. Bu yöntemler işe karışır, çünkü tipik bir kalite denetimi süreci uygulamaya konduğunda zorunlu olarak *örneklem almayı* gerektirir. Bir kalite denetimi uygulamasının amacı, bir süreci *üretim hattı üzerinde*, yani henüz işlerken izlemektir. Üretilen her birimin özelliklerinin ölçülmesi neredeyse olanaksızdır. Bunun yerine zaman zaman görece küçük örneklemler çekilip ölçümler yapılır, zaman içindeki gelişim çizimlere dökülür, herhangi bir değişim farkedilirse araştırmaya girişilir. Bize göre önemli olan şudur: Sürecin davranışına ilişkin çıkarsama örneklemdeki kanıtlara dayanır, bu ilkeyi de bu kitabın daha önceki bölümlerinden tanıyoruz. Buna ek olarak, ürün ölçümleri üretim hattında makine başında yapıldığına —ve ilkesel olarak, kararların da oldukça çabuk verilmesi gerektiğine— göre göreli olarak basit yöntemlerin kullanılması istenir. Çoğunlukla, ilkeleri kolayca anlaşılabilen ve üretimdeki işçiler tarafından hemen uygulanabilecek **denetim çizgeleri** biçimindeki çizimsel çözümlemeler kullanılır.

Daha temel bir düzeyde, istatistik kavramlarının kalite denetimindeki önemi, *değişkenlik* ve *şansın* anlaşılmasında yatar. Birbirinin tıpkısı birimler üreten bir süreç henüz icat edilmedi, asla da edilmeyecek. Öyleyse uygulamada birim özelliklerinin bir değişkenlik taşıması kaçınılmazdır. Dolayısıyla, üretim özelliklerinin zaman içinde değişmesine bakarken yalnızca şansa bağlı değişkenliklerin bizi yanıltmasına izin vermemek çok önemlidir. Bu tartışma bize Bölüm 9'daki önsav sınamaları çalışmalarımızı anımsatmalıdır; gerçekten de istatistikle süreç denetimi önsav sınaması öğelerini içerir, çünkü denetim çizgelerine işlenen örneklem istatistikleri **denetim eşikleri** ile karşılaştırılır. Önsav sınamalarının anlamlılık düzeylerine göre belirlenen bu eşikler, standarttan uzaklaşma görüntüleri şansa bağlıyken sürecin araştırma için durdurulmasının çok seyrek olmasını sağlar.

Bu bölümün geri kalanında, çağdaş istatististikle denetim yöntemlerini tanıtmaya çalışacağız.[1] İnceleyeceğimiz teknikler bir hayli kolay olup bu kitapta daha önce açıklanan istatistik ilkelerinden çıkarılabilir. Öte yandan bunlar bugün üretim yönetiminde en yaygın kullanılan tekniklerdir.

---

[1] İlgilenen okuyucu çok daha fazla ayrıntıyı şu kaynaklarda bulabilir: R. W. Berger, T. H. Hart, *Statistical Process Control: A Guide for Implementation* (New York: Marcel Dekker, Inc., 1986); G. K. Griffith, *Statistical Process Control Methods for Long and Short Runs* (Milwaukee, WI: ASQC Quality Press, 1989); E. L. Grant, R. S. Leavenworth, *Statistical Quality Control*, 6th ed. (New York: McGraw-Hill, Inc., 1988).

16.2 ORTALAMA VE STANDART SAPMALARIN DENETİM ÇİZGELERİ

Şimdi, bir üretim sürecinin, ilgilenilen özelliği sürekli ölçülebilen bir çıktı ürettiği durumu düşünelim. Bu süreç için bir kalite denetim planı yapılmak istenmektedir. Bu da zaman içinde çıktıdan bir dizi küçük örneklem almakla yapılabilir. Çoğu uygulamada dört ya da beş gözlemlik örneklemler alınır. Yeterli uzunlukta bir başarım kaydı oluşturabilmek için yirmi ya da daha çok örneklem alınması gerekir. Örneklemlerin zaman içindeki sıklığı, üretim sürecinin özelliklerine bağlıdır. Çizelge 16.1, bir örnek olmak üzere, bir elektronik parçanın verdiği zamanlama sinyalinin süresini milisaniye cinsinden ölçen beşer gözlemlik yirmi örneklemli bir diziyi göstermektedir. Bu verilerin ilgili bazı özelliklerini ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

Çoğu uygulamada yönetim, hem sürecin ortalama başarısıyla, hem de başarımın değişkenliğiyle ilgilenir. Ortalama başarım yeterli bile olsa, çok fazla değişkenlik çok sayıda standart dışı birim üretildiğini gösterir. Bu yüzden, Çizelge 16.1'de her gözlem dönemi için hem ortalamayı, hem standart sapmayı hesapladık. Sürecin uyması gereken standartlar belirlenirken, bu örneklem istatistiklerinin ortalamalarının da hesaplanmasında yarar vardır. Örneğimizde 100 örneklem gözleminin ortalamasından başka bir şey olmayan genel örneklem ortalaması

ÇİZELGE 16.1 Bir elektronik parçanın verdiği zamanlama sinyalinin süresi, milisaniye

ÖRNEKLEM NO.	ÖRNEKLEM GÖZLEMLERİ					$\bar{x}$	s
1	297	296	297	303	298	298.2	2.77
2	301	301	300	304	297	300.6	2.51
3	297	306	296	302	304	301.0	4.36
4	296	302	299	298	309	300.8	5.07
5	305	304	293	309	293	300.8	7.36
6	298	294	303	306	305	301.2	5.07
7	297	304	299	308	306	300.8	3.96
8	292	292	307	295	300	297.2	6.38
9	295	297	307	304	306	301.8	5.45
10	296	297	309	297	305	300.8	5.85
11	299	301	290	298	297	297.0	4.18
12	303	307	296	298	294	299.6	5.32
13	301	292	313	302	307	303.0	7.78
14	299	298	300	301	295	298.6	2.30
15	299	299	306	303	298	301.0	3.39
16	301	303	297	298	304	300.6	3.05
17	300	296	301	300	304	300.2	2.86
18	295	293	300	299	289	295.2	4.49
19	298	298	306	297	295	298.8	4.21
20	296	303	300	304	299	300.4	3.21

$$\bar{\bar{x}} = (298.2 + 300.6 + \cdots + 300.4)/20 = 299.9$$

olup örneklem standart sapmalarının ortalaması da şöyledir:

$$\bar{s} = (2.77 + 2.51 + \cdots + 3.21)/20 = 4.48$$

Aşağıda göreceğimiz gibi bu büyüklük, sürecin bilinmeyen standart sapmasının, yani sürecin bütün çıktısının standart sapması σ'nın tahmininde temel olarak kullanılabilir.

Bu altbölümde, örneklem ortalamaları ile standart sapmalarını sürecin başarımını izlemede kullanacağız. Bu büyüklükler denetim çizgelerine işaretlenir. Örneklem ortalaması ile standart sapmasının zaman içindeki dalgalanmalarını anlamamıza yardım edecek denetim eşiklerini nasıl belirleyeceğimizi göreceğiz. Ancak daha fazla ilerlemeden şunu belirtelim ki, ortalamanın bu işte kullanılması epeyce yaygın olmasına karşılık, değişkenlik değerlendirilirken çoğu uygulamada standart sapma yerine aralık kullanılır. Belki de bu seçimi çekici kılan, denetim işinin üretim hattı üzerinde uygulandığı yer olan makine başında, aralığın —yani en büyük ve en küçük örneklem gözlemlerinin farkının— kolayca hesaplanabilmesidir. Ancak, yalnızca örneklem gözlemlerini girdi olarak alıp örneklem ortalamasıyla standart sapmasını hemen hesaplayan elektronik hesap makinelerinin yaygınlaşmasıyla bu durum değişmiş olabilir. Biz burada, standart sapma yerine aralık kullanıldığında denetim çizgelerinin nasıl oluşturulacağının ayrıntılarına girmeyeceğiz. Denetim çizgelerinin oluşturulması ve uygulanmasının ilkeleri hangi değişkenlik ölçüsü kullanılırsa kullanılsın, ayrıntılar biraz farklı olmakla birlikte aynıdır. Aralığın değişkenlik ölçüsü olarak kullanıldığı durumlarda çözümlemenin ayrıntıları Ek A16.1'de verilmiştir.

Aşağıdaki çerçeve, kullanacağımız kimi simgeleri ve terimleri özetlemektedir.

Simgeler ve Terimler

Bir üretim sürecinin çıktısının ölçülebilir özelliklerine ilişkin olarak zaman içinde, her biri n gözlem içeren K tane örneklem çekilerek bir dizi oluşturulmuştur.

Örneklem ortalamaları $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$ ile gösterilir. Bunlar bir $\bar{X}$ **çizgesine** işaretlenebilir. Bu örneklem ortalamalarının ortalaması, bütün örneklem gözlemlerinin **genel ortalamasıdır**:

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i / K$$

Örneklem standart sapmaları da $\bar{s}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$ ile gösterilir. Bunlar da bir s **çizgesine** işaretlenebilir. **Ortalama örneklem standart sapması** şudur:

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^{K} s_i / K$$

Süreç standart sapması σ, örneklemlerin içinden çekildiği anakütlenin standart sapması olup örneklem verilerinden tahmin edilmek zorundadır.

SÜREÇ STANDART SAPMASININ BİR TAHMİNİ

Hem $\bar{X}$, hem s çizgesindeki denetim eşiklerini belirlemeye yönelik ilk adımda süreç standart sapması σ'nın tahmin edilmesi gereklidir. Bir olanak bu tahmini, bütün gözlemlerin —yani örneğimizde 100 gözlemin hepsinin— genel örneklem standart sapmasına dayandırmaktır. Ancak, kalite denetimi uygulamalarında σ'nın bir tahmininin, ortalama örneklem standart sapması $\bar{s}$ temel alınarak yapılması daha yaygındır. Hangi tahmin kullanılırsa kullanılsın, Bölüm 7'den anımsayacağınız gibi örneklem standart sapması anakütle standart sapmasının sapmalı bir tahmin edicisidir. Bu sapmadan kurtulmaya çalışmak gerekir. Gerçekten de anakütle dağılımı normalken, örneklem standart sapmasının beklenen değeri için bir ifade bulunabilir. Örneklem standart sapması s_i, n tane gözleme dayanıyorsa

$$E(s_i) = c_4\sigma$$

olduğu gösterilebilir. Burada c_4, örneklem büyüklüğü n'nin bir fonksiyonu olarak hesaplanabilir. Buradan hemen şu çıkarılabilir:

$$E(\bar{s}) = c_4\sigma$$

Öyleyse süreç standart sapmasının sapmasız bir tahmini şöyle bulunur:

$$\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4 \qquad (16.2.1)$$

Anakütle dağılımı elbette tam normal olmayabilir. Yine de bu düzeltmenin yapılmaya değer olduğu ve örneklem standart sapmasının ilgili anakütle büyüklüğünün bir tahmin edicisi olarak taşıdığı sapmayı azalttığı düşünülür.

Çizelge 16.2'de ikiden ona kadar örneklem büyüklüklerine karşılık gelen c_4 değerlerini gösterdik. Bu çizelgede ayrıca üç başka **denetim çizgesi sabiti** de yer almaktadır. Kullanılan simgeler garip görünebilir. Aslında bunlar, kalite denetiminde çeşitli amaçlarla kullanılan çok sayıdaki denetim çizgesi sabitlerinden yalnızca dördü olup bu büyüklüklerin bu biçimde gösterilmeleri kalite denetimi yazınında yerleşmiştir. Kalite denetimi uygulamalarında denetim çizgesi sabitlerini gösteren çizelgelerin elde bulundurulması ve kullanılması sıradandır. Çizelge 16.2'deki değerlerin belirlenmesindeki kimi ayrıntılar Ek A16.2'de gösterilmiştir.

ÇİZELGE 16.2 Kimi denetim çizgesi sabitleri

n	c_4	A_3	B_3	B_4
2	0.798	2.66	0	3.27
3	0.886	1.95	0	2.57
4	0.921	1.63	0	2.27
5	0.940	1.43	0	2.09
6	0.952	1.29	0.03	1.97
7	0.959	1.18	0.12	1.88
8	0.965	1.10	0.18	1.82
9	0.969	1.03	0.24	1.76
10	0.973	0.98	0.28	1.72

Örneğimize dönersek şunu buluruz:

$$\bar{s} = 4.48$$

Çizelge 16.5'ten $n = 5$ için şunu okuruz:

$$c_4 = 0.940$$

Dolayısıyla süreç standart sapmasının bir tahmini şöyle bulunur:

$$\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4 = 4.48/0.940 = 4.77$$

σ İçin Bir Tahmin

Süreç standart sapması şöyle tahmin edilebilir:

$$\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4$$

Burada $\bar{s}$ ortalama örneklem standart sapması olup örneklem büyüklüğü n'ye dayanan denetim çizgesi sabiti c_4 Çizelge 16.2'de gösterilmiştir. Anakütle dağılımı normal ise tahmin edici sapmasızdır.

ORTALAMALARIN DENETİM ÇİZGESİ

Çizelge 16.1'de zaman içinde alınmış beş gözlemli yirmi örneklem dizisi için zamanlama sinyallerinin ortalama süresini sıraladık. Kalite denetimi işinde bu bilgi, yorum kolaylığı sağlamak amacıyla hep bir zaman serisi olarak çizilir. Bu çizime bu bağlamda $\bar{X}$ çizgesi denir. Kuşkusuz, Bölüm 2'de de gördüğümüz gibi, zaman çizimleri kolayca düzenlenebilir ve herhangi bir genel eğilimin gözle yorumlanmasına olanak sağlar.

Üretim yönetiminde kalitenin bozulduğuna ilişkin işaretleri görmeye çalışmak önemlidir. Böyle bir sorunun önemli bir göstergesi, örneklem ortalamasının "alışıldık" başarım düzeyinden önemli ölçüde uzaklaşması olabilir. Sözgelimi Çizelge 16.1'de, onsekizinci örneklem ortalaması 295.2'nin kendinden öncekilere göre biraz düşük olduğunu görebiliriz. Bu değeri yorumlayabilmek için, bunun örnekleme değişkenliğinin neden olduğu türden bir sonuç olduğunu düşünmek akla uygun mudur sorusunu sormak gerekir. Kalite denetiminde bu karar, denetim çizgelerinde çizilmiş denetim eşikleriyle karşılaştırma yapılarak verilebilir. Şimdi $\overline{X}$ çizgelerinde bu eşiklerin nasıl türetildiğini görelim.

Önce bütün gözlem dönemi boyunca sürecin sabit bir başarım düzeyinde işlediğini ve örneklem gözlemlerinin hepsinin aynı normal dağılımdan çekildiğini varsayalım. Bu dağılımın ortalaması, bütün gözlem değerlerinin genel ortalaması $\overline{\overline{x}}$ ile, standart sapması da (16.2.1)'deki $\hat{\sigma}$ ile tahmin edilir.

Şimdi de ortalaması $\overline{\overline{x}}$, standart sapması $\hat{\sigma}$ olan normal bir dağılımdan çekilmiş gözüyle baktığımız beş gözlemli tek bir örneklem düşünelim. Bu durumda bu örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının $\overline{\overline{x}}$ ortalama ve $\hat{\sigma}/\sqrt{n} = \hat{\sigma}/\sqrt{5}$ standart hatayla normal dağıldığını biliyoruz. Bu sonuç denetim eşiklerinin belirlenmesinde temel olarak kullanılır.

Uygulamada kalite denetiminde bir sorun görüldüğünde bir inceleme yapılması gerekir. Bu, üretim sürecinin durdurulup bütünüyle incelemesini gerektirebilir ki epeyi pahalıya malolur. Doğal olarak, süreç aslında doyurucu biçimde çalışırken ikide bir durdurulması pek istenmez. Sık sık verilen bu türden "yanlış alarm"ları önlemek için, kalite denetiminde denetim eşiklerinin örnekleme dağılımının ortalamasının her iki yanında üç standart sapma uzaklığa konması alışılmış bir uygulamadır. (Bunlara bazen 3-σ eşikleri denir.) Bu durumda, örneklem istatistiğinin —burada örneklem ortalamasının— dağılımı normal ise 3-σ eşikleri dışında bir değere rastlamanın olasılığı

$$P(Z > 3) + P(Z < -3) = 2(0.0014) = 0.0028$$

olur. Burada Z, standart normal dağılmış rassal bir değişkendir. (Burada Ek Çizelge 3'ü kullandık.) Öyleyse, eşikler bu yolla belirlenmişse, yaptığımız varsayımlar altında, herhangi bir belli örneklemde yanlış alarm verilmesinin olasılığı binde üçten küçüktür. Kuşkusuz, bu varsayımlar çoğunlukla tam doğru değildir, böylece bu sayı da ancak bir yaklaşık değerdir. Yine de 3-σ eşikleri akla yakın bir yol göstericidir ve kullanımı çok yaygındır.

Örneklem ortalamaları için denetim çizgeleri düzenleme sorunumuza dönersek, örnekleme ortalamasının orta noktası, $\overline{\overline{x}}$ genel ortalamasıdır ve bu **orta çizgi** çizge üzerine çizilir. Sonra, eğer 3-σ eşikleri kullanılacaksa, bunlar da

$$\overline{\overline{x}} \pm 3\hat{\sigma}/\sqrt{n}$$

ya da Eş. (16.2.1)'den

$$\bar{\bar{x}} \pm 3\bar{s}/(c_4\sqrt{n})$$

olarak bulunur. Bunu da şöyle yazabiliriz:

$$\bar{\bar{x}} \pm A_3\bar{s}$$

Burada

$$A_3 = 3/(c_4\sqrt{n}) \qquad (16.2.2)$$

olup bu denetim çizgesi sabitlerinin değerleri kolaylık olsun diye Çizelge 16.2'de verilmiştir. Okuyucuya bu değerlerin Eş. (16.2.2) ile doğrudan hesaplandığını doğrulaması önerilir.

$\bar{X}$ Çizgesi

$\bar{X}$ çizgesi, örneklem ortalamaları dizisinin zaman çizimidir. Yorumu kolay olsun diye bu çizge üzerine üç çizgi çekilir. **Orta çizgi**

$$OÇ_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}$$

Buna ek olarak üç standart sapma denetim eşikleri de vardır. **Alt denetim eşiği**

$$ADE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}$$

üst denetim eşiği de

$$ÜDE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s}$$

olur. Burada A_3 değerleri Çizelge 16.2'de verilmiştir.

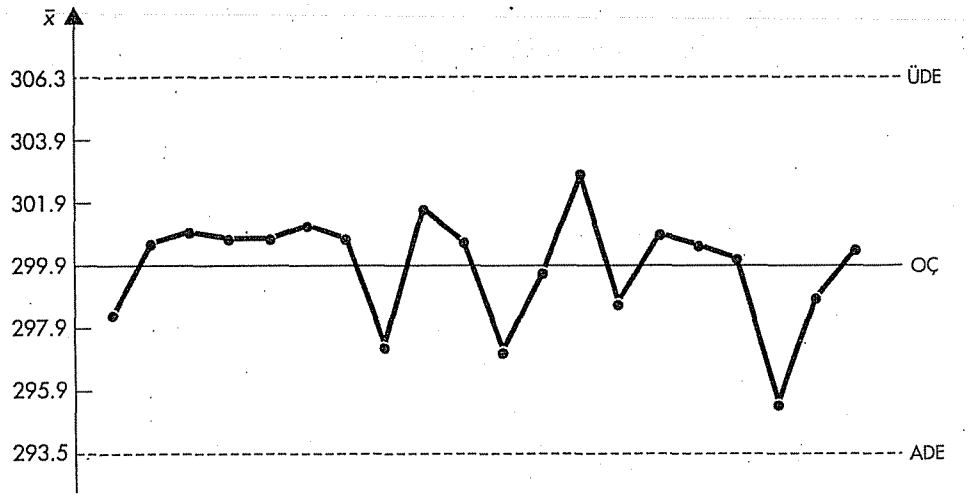
Artık Çizelge 16.1'deki zamanlama sinyali verileri için $\bar{X}$ çizgesini çizebilecek durumdayız. Çizelge 16.2'ye ve daha önceki hesaplarımıza dönersek örneklem büyüklüğü beş olduğuna göre

$$\bar{\bar{x}} = 299.9 \qquad \bar{s} = 4.48 \qquad A_3 = 1.43$$

olur. $\bar{X}$ çizgesi Çizim 16.1'de gösterilmiştir. Orta çizgi

$$OÇ_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 299.9$$

alt denetim eşiği



ÇİZİM 16.1 Çizelge 16.1'deki zamanlama sinyali verileri için $\bar{X}$ çizgesi

$$ADE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} = 299.9 - (1.43)(4.48) = 293.5$$

üst denetim eşiği de

$$\ddot{U}DE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} = 299.9 + (1.43)(4.48) = 306.3$$

olur.

Çizim 16.1'deki denetim çizgesine bakacak olursak kaygı duyulacak bir durum yokmuş gibi görünmektedir. Örneklem ortalamalarından hiçbiri denetim eşiklerini aşmamış, büyük çoğunluğu da bu eşiklerin bir hayli içine düşmüştür.

STANDART SAPMALARIN DENETİM ÇİZGELERİ

Süreç değişkenliğinin zaman içindeki gelişimini değerlendirmek amacıyla standart sapmalar da bir denetim çizgesine çizilebilir. Bu çizgedeki orta çizgi ortalama örneklem standart sapması $\bar{s}$'dir ve üç standart hatalık eşikler belirlemek yaygındır. Ayrıntılar aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.

s Çizgesi

s çizgesi, örneklem ortalamaları dizisinin zaman çizimidir. Çizgedeki orta çizgi

$$OÇ_s = \bar{s}$$

biçimindedir. Üç standart hatalık eşikler için alt denetim eşiği

$$ADE_s = B_3\bar{s}$$

üst denetim eşiği de

$$\ddot{U}DE_s = B_4\bar{s}$$

olur. Burada B_3 ve B_4 denetim çizgesi sabitleri[2] Çizelge 16.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 16.1'deki zamanlama sinyali verilerinin s çizgesi artık çizilebilir. Bu da Çizim 16.2'de gösterilmiştir. Şunları biliyoruz:

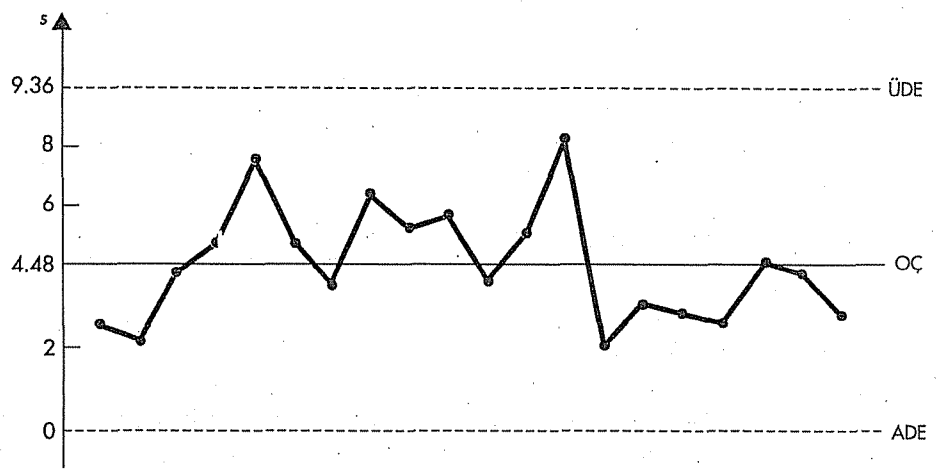
$$\bar{s} = 4.48 \qquad B_3 = 0 \qquad B_4 = 2.09$$

Dolayısıyla çizgemizdeki üç çizgi şunlardır:

$$O\ddot{C}_s = 4.48 \qquad ADE_s = 0 \qquad \ddot{U}DE_s = (2.09)(4.48) = 9.36$$

Çizim 16.2'ye bakarsak gereksiz bir kaygıya kapılmak için bir neden görünmemektedir. Gözlenen örneklem standart sapmaları genellikle üst denetim eşiğinin bir hayli altındadır. Gözlemlerin orta bölgesinde değişkenliğin arttığı izlenimi doğmaktadır, üretim sürecini daha iyi anlayabilmek için bunun açıklamasını araştırmak yerinde olabilir.

ÇİZİM 16.2 Çizelge 16.1'deki zamanlama sinyali verilerinin s çizgesi



[2] Aslında $n \leq 5$ olan örneklem büyüklükleri için $\bar{x}$'den üç standart hata çıkarılırsa eksi bir sayı bulunur. Standart sapmaların eksi olamayacağı açık olduğundan alt eşik 0 olarak çizilmiştir. Uygulamada değişkenliğin çok *küçük* olması pek ender kaygı yaratacağından alt eşikle pek ilgilenilmez. B_3 ile B_4 sabitlerinin türetilmesindeki ayrıntılar Ek A16.2'de gösterilmiştir.

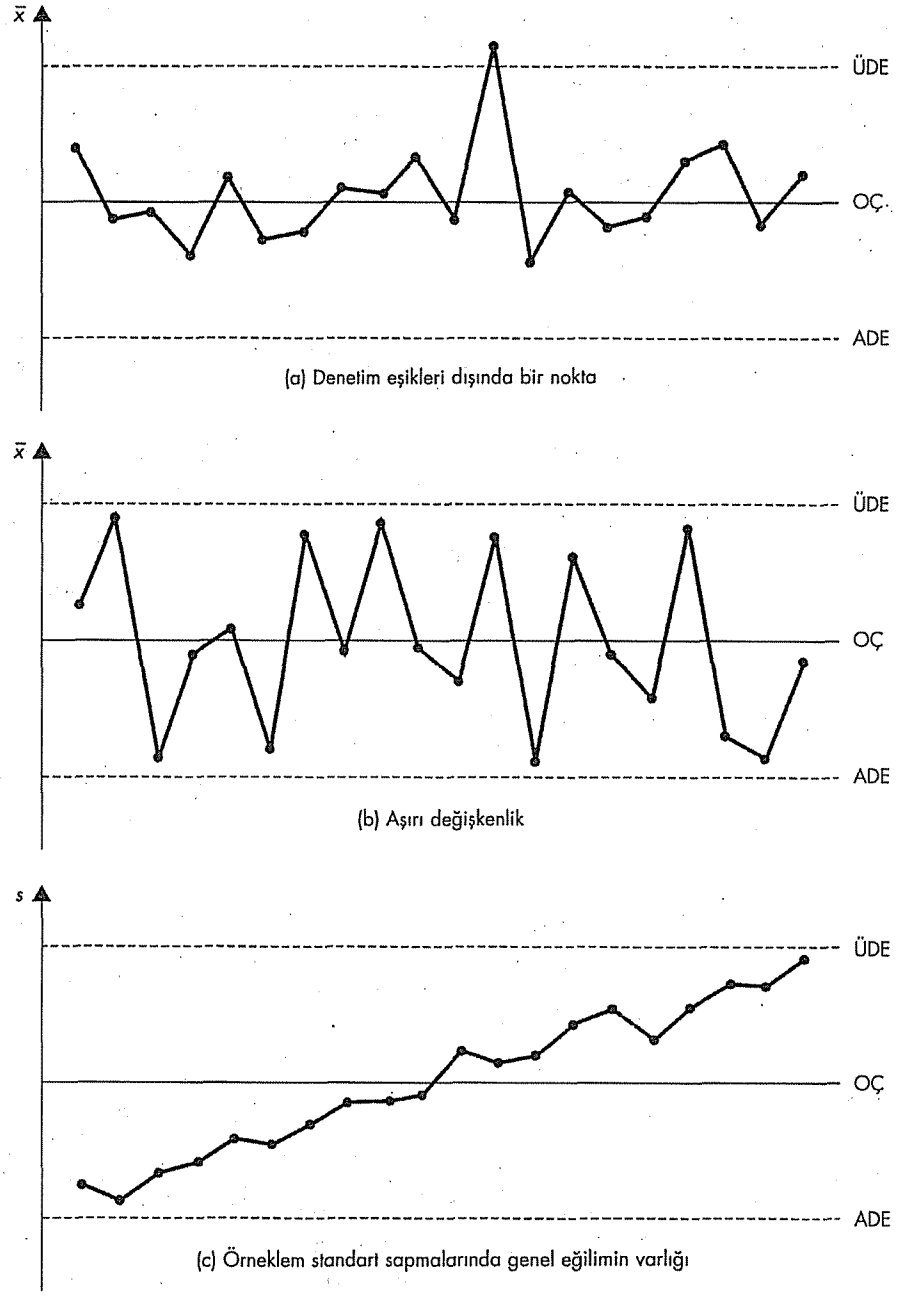
ÇİZGELERİN AYRINTILI ÇÖZÜMLENMESİ

Ortalama başarımı ve başarımın değişkenliğini izlemek için ilk denetim çizgelerini geliştirdikten sonra biraz daha ayrıntılı çözümlemeler ve yorumlar gerekmektedir. Bunların çoğu genellikle biçimsel teknik çözümleme değil de değer yargısı gerektiren, deneyimlerden yararlanan çözümlemelerdir. Asıl konunun süreç başarımının gözlenen dönem boyunca istikrarlı olup olmadığının değerlendirilmesi olduğunu gözden kaçırmadan, ortaya çıkabilecek bazı noktaları kısaca ele alalım. Eğer süreç istikrarlı değilse, ya güvenilemeyecek verilerle ya da ciddi işletme sorunları olan bir süreçten türetilmiş verilerle iş görüyoruz demektir. Böyle veriler bize, süreç düzgün çalışırken ne beklenebileceği konusunda çok güvenilir işaretler vermez. Aslında bu aşamada araştırmacı orta çizgi dolayında az çok rassal dağılmış ve genellikle denetim eşiklerinin epeyce içinde yer alan bir veri noktaları örüntüsü aramaktadır. Bu açıdan bakıldığında Çizim 16.1 ile 16.2 enikonu akıa yakın görünmektedir. Bu koşullarda incelenen sürecin, **denetim altında** olduğu söylenir, bu da başarım özelliklerinin hayli istikrarlı olduğu anlamına gelir. İstatistikle kalite denetimine, bir sürecin denetim altında olup olmadığını anlamanın bir aracı, süreci denetim altında tutmaya yarayan bir aygıt, ürün kalitesindeki değişkenliği azaltıcı bir düzenek gibi bakılabilir.

Bir veri noktaları dizisi çeşitli biçimlerde rassallıktan uzaklaşabileceğine göre, bir sürecin denetim dışına çıkmasının da çeşitli yolları vardır. Biz burada üç çeşit durumu belirtip kısaca inceleyeceğiz. Bu örnekler Çizim 16.3'te gösterilmiştir.

(i) *Denetim eşikleri dışında bir nokta.* Çizim 16.3(a)'da gösterilen durum çok açıktır. Örneklem istatistiklerinin çoğunluğu (bu özel örnekte ortalamalar) denetim eşiklerinin hayli içindedir. Ancak bir örneklem için, istatistik bu eşiklerin dışına çıkmıştır. Daha önce belirtiğimiz gibi, üç standart hatalık eşiklerde, denetim altındaki bir süreçte böyle bir durumun ortaya çıkması aşırı derecede alışılmadık bir olaydır. Öyleyse önümüzde inceleme gerektiren bir durum vardır. Bu aşırı değerin nedenini bulmaya çalışan araştırmacının biraz polis hafiyeliği yapması gerekir. Bu durum yalnızca bir şans değişkenliğinin değil, yazında **belirlenebilir nedenler** diye adlandırılan özel bazı durumların sonucu olarak ortaya çıkabilir. Böyle bir olgunun belki de en sık rastlanan açıklaması bir gözlemin yanlış yazılmış olmasıdır. Bu durumda bu yanlış düzeltilebilir. Başka bir neden, sürecin bu özel durumda deneyimsiz kimselerce çalıştırılmış olabileceğidir. Aşırı bir örneklem bulgusunun belirlenebilir nedenleri varsa ve bunlara pek ender rastlanıyorsa, bu örneklem gözardı edilip kalan örneklemlerle yeni denetim eşikleri hesaplanmalıdır.

(ii) *Aşırı değişkenlik.* Örneklem değerlerinden hiçbiri denetim eşiklerinin dışına düşmemekle birlikte çoğunun orta çizgiden uzak, eşiklere yakın olduğu durumlara rastlanabilir. Böyle bir durum Çizim 16.3(b)'de örneklenmiştir. Bir üretim süreci çıktısının özelliklerinde aşırı bir değişkenlik istenmeyen bir şeydir ve bu tür bulgular sürecin bütünüyle incelenip elden geçirilmesi gerektiği anlamına gelir. Bu noktada istatistikçi sorunu mühendise aktarır.



ÇİZİM 16.3 Denetim dışına çıkmış süreç örnekleri

(iii) *Örneklem istatistiklerinde genel eğilim bulunması.* Çizim 16.3(c)'de sergilenen görünüm rassallıktan uzaklığın açık bir örneğidir. Örneklem istatistikleri (burada standart sapmalar) orta çizgi dolayında rassal olarak dağılmamıştır. Tersine zaman içinde yükselme eğilimi göstermektedir. Açıktır ki Çizim 16.3(c)'deki kalite değişkenliğinin arttığı izlenimi, hiçbir örneklem değeri henüz denetim eşiklerini aşmamış olsa da kaygı yaratır. Bunun nedeni belki de yıpranmakta olan makinelerdir. Neden ne olursa olsun, mühendislerin incelemeye girişmesi gerekir.

Ancak üretim sürecinin denetim altında olduğuna güveniliyorsa Çizelge 16.1'de yapılan ve Çizim 16.1 ile 16.2'de gösterilen hesaplamaların temel alınıp ilerlenmesi akla uygun olur. Orada hesaplanan denetim eşikleri üretim hattından alınan başka örneklemleri değerlemede kullanılabilir ve bu yolla sorunların gelişim yapısı araştırılabilir. Ancak, süreç denetim altında kalsa bile, denetim eşiklerinin dönemsel olarak yeniden hesaplanmaları gerekir. Çünkü üretim sürecinin özellikleri zaman içinde evrilebilir. Sözgelimi, kalite denetimi programının hazırlanıp yürütülmesi, üretim hattındaki işçilerin kalitenin ve daha yüksek kaliteye yol açan etmenlerin önemini kavrayışlarının düzeyini yükseltebilir. Bu da kalite değişkenliğinin düşmesine, böylece daha sıkı kalite standartlarının geliştirilmesine yol açacaktır. Ama daha fazla ilerlemeden ürünün şu andaki tasarım özelliklerine uyup uymadığının araştırılması gerekir. Bir sonraki altbölümde bu konuyu ele alacağız.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir elektronik parçanın üretim süreci izlenmiş, çıkardığı elektrik gücü ölçülmüştür. Eldeki sonuçlar her biri yedi gözlemli otuz örneklemli bir dizi biçimindedir. Örneklem gözlemlerinin genel ortalaması 192.6, ortalama örneklem standart sapması 5.42'dir.
   (a) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.
   (b) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
   (c) Bir s çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
2. Bir elektrikli aygıt parçasının om cinsinden direnci ölçülmüştür. Her birinde altı gözlem olan yirmibeş örneklem çekilmiştir. Örneklem gözlemlerinin genel ortalaması 93.2, ortalama örneklem standart sapması 3.67'dir.
   (a) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.
   (b) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
   (c) Bir s çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
3. Konserve meyve kutusu örneklemleri tartılmıştır. Her birinde sekiz gözlem olan onaltı örneklem çekilmiştir. Örneklem gözlemlerinin genel ortalaması 19.86, ortalama örneklem standart sapması 1.23 onstur.

(a) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.

(b) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

(c) Bir s çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

4. İngiliz kalite denetimi uygulamalarında denetim eşikleri ortalamadan üç standart hata yerine geleneksel olarak 3.09 standart hata uzakta çizilmektedir. Bu kitabın sonundaki Ek Çizelge 3'e bakarak bunun sonuçlarını araştırın, bu belirleme biçiminin nedenini bulun.

5. Aşağıdaki çizelge bir ürünün bir kalite özelliğinin, her birinde sekiz gözlem olan otuz örneklemli bir dizi için örneklem ortalamaları ile standart sapmalarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s
1	148.2	2.26	11	156.0	4.79	21	148.7	6.28
2	146.4	4.37	12	150.4	3.92	22	149.7	8.92
3	149.9	7.93	13	148.7	8.31	23	151.3	6.20
4	152.8	6.79	14	151.1	7.29	24	150.8	7.39
5	148.7	5.31	15	147.2	3.80	25	147.2	6.97
6	150.6	3.17	16	152.9	4.87	26	141.9	9.68
7	151.5	6.15	17	150.7	3.88	27	152.7	4.28
8	149.2	4.71	18	147.2	4.93	28	148.6	6.51
9	153.9	5.82	19	149.4	6.85	29	150.2	7.29
10	150.6	4.98	20	154.3	7.29	30	148.6	4.73

(a) Örneklem gözlemlerinin genel ortalamasını bulun.

(b) Ortalama örneklem standart sapmasını bulun.

(c) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.

(d) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

(e) $\overline{X}$ çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

(f) Bir s çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

(g) s çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

6. Aşağıdaki çizelge sebze konservesi kutularının ons cinsinden net ağırlığının, her birinde sekiz gözlem olan otuz örneklemli bir dizi için örneklem ortalamaları ile staadart sapmalarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s
1	20.2	1.9	8	21.0	2.3	15	20.7	1.9
2	18.9	2.7	9	20.6	1.4	16	19.3	2.2
3	19.6	1.7	10	19.1	2.7	17	19.9	3.1
4	20.8	2.3	11	18.8	2.9	18	18.8	2.9
5	19.4	1.2	12	19.3	1.1	19	19.6	2.2
6	19.8	2.1	13	19.8	1.3	20	20.1	1.1
7	20.9	1.6	14	20.2	1.2			

(a) Örneklem gözlemlerinin genel ortalamasını bulun.
(b) Ortalama örneklem standart sapmasını bulun.
(c) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.
(d) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(e) $\overline{X}$ çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(f) Bir s çizgesinin orta çizgisini, alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(g) s çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

16.3 SÜRECİN YETERLİLİĞİ

Altbölüm 16.2'de bir sürecin denetim altında —yani başarımının istikrarlı— olup olmadığını anlamak için denetim eşiklerinin yardımıyla denetim çizgelerini nasıl kullanacağımızı gördük. Bu önemli bir bilgi olmakla birlikte, sürecin, tasarlandığı standartlara uygun bir başarım sağlayıp sağlamadığını değerlendirmede yetersizdir. Unutmayalım ki istikrarlı bir başarım, hep orta düzeyde bir başarı anlamına da gelebilir. Bir kalite denetimi ya da kalite geliştirilmesi programına geçmeden önce, üretim sürecinin istenen ölçülere uygun çalışıp çalışmadığını belirlemek de önem taşır. Eğer süreç şu sırada denetim altındaysa, aslında sürecin bu ölçülere uymada **yeterli** olup olmadığını sorguluyoruz demektir. Bu yargı, denetim altında görünen bir süreçten türetilen verilere dayanılarak oluşturulmaktadır. Dolayısıyla, örneklem kayıtları arasında belirlenebilir nedenlere bağlı aşırı değerler bulunuyorsa bunlar **sürecin yeterliliğini** değerlendirmeden önce dışlanmalıdır. Daha da ciddisi, örneklem dönemi boyunca, Çizim 16.3(b) ve (c)'de gösterildiği gibi, işlerin yolunda gitmediği anlaşılırsa mühendislerin önlem almaları gerekir. Ancak bir denetim altında olma konumu belirlendikten sonradır ki sürecin yeterliliğinin değerlendirilmesine gidilebilir.

Bu altbölümde hem örneklem ortalamaları, hem örneklem standart sapmaları aracılığıyla yaklaşılabilen ortak bir sorunu ele alacağız. Yönetimler çoğunlukla süreç çıktısının bir özelliğine ilişkin değerler için **alt ve üst ölçme eşikleriyle** sınırlanmış bir aralık saptarlar. Sözgelimi, bir elektronik parçanın verdiği zamanlama sinyalleri örneğinde yönetim 280 ile 320 milisaniye arasında uzanan bir hoşgörülebilir değerler aralığı belirleyebilir. Bu ölçüleri sağlamaya yeterli bir sürecin bu aralık dışında çıktı üretmesi pek beklenmez.

Denetim altındaki bir süreçte yeterlilik değerlendirmesini bütün örneklem gözlemlerine, özellikle de bu gözlemlerden bulunan süreç ortalaması ve standart sapması tahminlerine dayandırmak doğaldır. Zamanlama sinyali verilerinde bu tahminler

$$\hat{\overline{x}} = 299.9 \qquad \hat{\sigma} = 4.77$$

olarak bulunmuştu.[3] Bu durumda, süreç dağılımının normal olduğu varsayılırsa, bütün çıktının %99.72'sinin ortalamadan en çok üç standart sapma uzağa düşeceğini görmüştük. Öyleyse kalite denetimi işinde $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplamak yaygındır. Örneğimizde

$$(\bar{\bar{x}} - 3\hat{\sigma}\,,\ \bar{\bar{x}} + 3\hat{\sigma}\,) = (285.6,\ 314.2)$$

olduğu görülür. Bunu, sürecin normal olarak içinde çalışacağı eşiklerin saptanması olarak alabiliriz. Bu aralığın genişliği

$$6\hat{\sigma} = (6)(4.77) = 28.6$$

bazen sürecin **doğal hoşgörüsü** diye adlandırılır. Ürün özelliklerinin beklenen değişkenliğinin bir ölçüsüdür.

Bir üretim sürecinin gerçekten neler yapabileceğini değerlendirirken, örneklem verilerini kullandıktan sonra bu bulgunun, sürecin neler yapmak zorunda olduğunu belirten yönetim ölçüleriyle karşılaştırılması gerekir. İstenen, $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığının alt ve üst ölçme eşiklerinin içinde, belki de bir hayli içinde kalmasıdır. 285.6 ile 314.2 arasında uzanan aralık, rahatça 280 ile 320 milisaniye arasında kalır. Öyleyse sürecin bu ölçüleri sağlamaya yeterli olduğunu söyleyebiliriz. Dikkat ederseniz genel örneklem ortalaması, $\bar{\bar{x}} = 299.9$, hoşgörü aralığının orta noktası olan 300 milisaniyeye çok yakındır. Böyle durumlarda başarım aralığının, hoşgörü aralığının **merkezine düştüğü** söylenir. Bu merkeze düşme durumuyla sık sık karşılaşılır ve bu da çoğu zaman istenen bir durumdur. Ancak bir sürecin bu standartlara uyması gerekmez. Aşağıdaki çerçeve içinde gösterdiğimiz gibi, sürecin yeterliliği için daha biçimsel ölçütler hesaplanabilir.

Sürecin Yeterliliği için İki Ölçüt

Yönetimin süreç başarımı için A ve $\ddot{U}$ alt ve üst hoşgörü eşiklerini belirlediğini varsayalım. Sürecin yeterliliği, $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığının bu eşikler içinde kalma derecesiyle belirlenir. İki biçimsel yeterlilik ölçüsü şunlardır:

(i) **Yeterlilik Endeksi.** Bu ölçü, örneklem verilerinin hoşgörü eşiklerini merkez olarak aldığı yani $\bar{\bar{x}} \approx (A + \ddot{U})/2$ olduğu zamanlarda uygundur. Endeks şöyledir:

$$Cp = \frac{\ddot{U} - A}{6\hat{\sigma}}$$

[3] Bazı uygulamalarda süreç standart sapmasının tahmini olarak, burada kullanılan tahmin yerine, bütün örneklem gözlemlerinin örneklem standart sapması kullanılır.

Bu endeksin doyurucu olabilmesi için genellikle en az 1.33 değerini alması beklenir. [Bu da, doğal hoşgörü olan $6\hat{\sigma}$ değerinin, hoşgörülebilen değerler aralığının $(\ddot{U}-A)$ %75'i aşmaması anlamına gelir.]

(ii) **Cpk Endeksi.** Örneklem verileri merkezi orta nokta almayınca sürecin hoşgörü eşiklerinden birine ötekine oranla daha yakın çalıştığını hesaba katmak gerekir. Bu da

$$Cpk = \text{Min}\left[\frac{\ddot{U}-\bar{\bar{x}}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{\bar{x}}-A}{3\hat{\sigma}}\right]$$

Burada da bu değer en az 1.33 ise doyurucu sayılır.

Zamanlama sinyali verilerinde şunları biliyoruz:

$$\bar{\bar{x}} = 299.9 \qquad \hat{\sigma} = 4.77 \qquad A = 280 \qquad \ddot{U} = 320$$

Öyleyse yeterlilik endeksi

$$Cp = \frac{\ddot{U}-A}{6\hat{\sigma}} = \frac{320-280}{(6)(4.77)} = 1.398$$

olur. *Cpk* endeksi de

$$Cpk = \text{Min}\left[\frac{\ddot{U}-\bar{\bar{x}}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{\bar{x}}-A}{3\hat{\sigma}}\right] = \text{Min}(1.405, 1.391) = 1.391$$

bulunur. Bu özel durumda, bütün uygulama amaçları için veriler merkezde toplanmış sayılabileceğinden iki endeks hemen hemen aynıdır. Her ikisi de 1.33'ü rahatça aşmaktadır, öyleyse üretim süreci ölçüleri karşılamaya yeterlidir.

Sürecin yeterliliği değerlendirildiğinde ortaya iki sonuç çıkabilir. Sürecin ölçüleri karşılamaya yeterli olmadığı bulunabilir. Üretimdeki işçiler için bu bir sorun değildir. Bu sorunun varlığını gösterebilen ama nasıl çözüleceğini bilmesi pek beklenmeyen istatistikçi için de bu bir sorun değildir. Tersine sorun, daha fazla çözümleme ve düzeltme yapması için yönetime aktarılmalıdır. Belki aşınma-yıpranma nedeniyle makineler işi yapmaya yeterli değildir. Belki üretimdeki işçiler bu makineleri kullanmak için yeterince eğitilmemiştir. Hangisi doğru olursa olsun, çalışmanın sürmesi ve sürecin bu haliyle çözümlenmesinin pek yararı yoktur.

Daha sevindirici bir sonuç, üretim sürecinin belirlenmiş başarım standartlarını karşılamaya yeterli bulunmasıdır. Bu durumda kalite denetim süreci sürdürülebilir. Üretim süreci düzenli olarak izlenmeli, denetim çizgeleri işlenmelidir. Süreç evrildikçe zaman zaman bu çizgelerin denetim eşiklerinin yeniden hesaplanması gerekir. Sürecin yeterliliği de düzenli aralıklarla denetlenmelidir. Kalite denetimi edilgen bir eylem değildir. Sorunların ortaya çıkarılmasında kesinlikle

yararlı olmasına karşın yalnız bunu yapan bir düzenek de değildir. Bir kalite denetimi uygulamasının amacı, kalitenin geliştirilmesidir, buna da sürecin doğal hoşgörüsünün daraltılması olarak bakılabilir. Bu kazanımlar, kalite denetimi çalışmaları için üretimdeki işçilerin veri derleme ve yorumlamaya girişmesiyle iyi kalitenin ve kaynaklarının anlaşılması ve bu konudaki duyarlılığın artmasından doğabilir.

ALIŞTIRMALAR

7. Alıştırma 1'e dönelim. Yönetim, bu süreçte üretilen parçanın elektrik verme gücünün 170 ile 215 arasında olması gerektiğini saptamıştır.
   (a) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgunuzu yorumlayın.
   (b) Yeterlilik *Cp* endeksini bulup sonuçları tartışın.
   (c) *Cpk* endeksini bulup tartışın.

8. Alıştırma 2'ye dönelim. Yönetim, bu süreçte üretilen parçanın direncinin 85 ile 100 om arasında olması gerektiğini saptamıştır.
   (a) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgunuzu yorumlayın.
   (b) Yeterlilik *Cp* endeksini bulup sonuçları tartışın.
   (c) *Cpk* endeksini bulup tartışın.

9. Alıştırma 3'e dönelim. Yönetim, meyve konservelerinin ağırlığının 18 ile 22 ons arasında olması gerektiğini saptamıştır.
   (a) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgunuzu yorumlayın.
   (b) Yeterlilik *Cp* endeksini bulup sonuçları tartışın.
   (c) *Cpk* endeksini bulup tartışın.

10. Alıştırma 5'e dönelim. Yönetim, bu sürecin kalite özelliği değerlerinin 130 ile 170 arasında olması gerektiğini saptamıştır.
   (a) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgunuzu yorumlayın.
   (b) Yeterlilik *Cp* endeksini bulup sonuçları tartışın.
   (c) *Cpk* endeksini bulup tartışın.

11. Alıştırma 6'ya dönelim. Yönetim, net ağırlıkların 16 ile 24 ons arasında olması gerektiğini saptamıştır.
   (a) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgunuzu yorumlayın.
   (b) Yeterlilik *Cp* endeksini bulup sonuçları tartışın.
   (c) *Cpk* endeksini bulup tartışın.

16.4 ORANLARIN DENETİM ÇİZGELERİ

Şimdi, bir ürünün bir özelliğini ölçen sayısal verileri çözümlemek yerine tekil ürün birimlerinin istenen özelliklere uygun olup olmadığına karar verilecek bir durumu düşünelim. Burada da ürün kalitesindeki değişimi değerlendirmek üzere zaman içinde bir dizi örneklem alınır, sonuçlar bir denetim çizgesine işlenir.

Artık ilgilenilen büyüklük her örneklemdeki **uyumsuz** birimlerin oranıdır. Bu oranın olabildiğince küçük olmasını isteyeceğimiz açıktır, zaman içinde yükselen bir eğilim de kaygı yaratmalıdır.

Oranların denetim çizgesini geliştirmenin, Altbölüm 16.2'deki çizgelerden önemli bir farkı burada çok daha büyük örneklemlere gerek duyulmasıdır. Bunun nedeni ustaca tasarlanmış hiçbir üretim sürecinin uyumsuz birimleri büyük oranda üretmesinin beklenemeyeceğidir. Dolayısıyla, bu kalite ölçüsünün akla yakın bir değerlendirmesini yapabilmek için görece büyük örneklemler temeldir. Çoğu uygulamada elli ile ikiyüz arasında birim içeren örneklemler önerilmektedir ama sık sık daha büyük örneklemler de kullanılmaktadır. Uygulamada çoğu zaman uygulanan bir parmak hesabına göre, örneklem başına ortalama uyumsuz birim sayısı beş ya da altıdan az olmamalıdır. Öyleyse standartlara uymayan birimlerin sözgelimi %1 dolayında çıkması bekleniyorsa, en azından 500-600 birimlik örneklemler alınmalıdır. Büyük örneklem gereksinmesinin doğurduğu bir sonuç farklı büyüklükte örneklemler alma isteği olabilir. Yeterli sayıda gözlem elde edebilmek için sözgelimi bir günün ya da bir vardiyanın bütün üretimini incelemek gerekebilir. Bu sayılar çoğunlukla zaman içinde sabit kalmaz. Bu altbölümde, kolaylık olsun diye, dikkatimizi eşit büyüklükteki örneklemler durumuyla sınırlayacağız ama incelemeyi eşit olmayan örneklem büyüklüklerine genişletmek çok kolaydır.

Uyumsuz birimlerin oranı için denetim çizgeleri geliştirmede başka bir önemli konu da veri türetmede içerilmiş olan öznel yargı öğesiyle ilgilidir. Standartlara uymama yargısına incelemeciler varacak, işin içindeki öznellik öğesi veriyken, farklı incelemeciler birbiriyle tutarlı olmayan sonuçlar üretebilirler. Bunun sonunda da çizgelerde, incelemeci farkından kaynaklanan fazladan değişkenlik ya da denetim dışı kalma durumları gözlenecektir. Oranların denetim çizgelerini yorumlarken bu olasılığı unutmamak önemlidir. Genelde, veriler birden çok incelemeci tarafından türetilecekse, uyumsuzluk ölçütleri olabildiğince belirgin saptanmalıdır.

Oranların denetim çizgelerini bir örnek yardımıyla açıklayacağız. Çizelge 16.3 bir elektronik parçanın zaman içinde alınmış, her biri 200 gözlem içeren yirmi örnekleminin sonuçlarını göstermektedir. Çizelgede örneklemlerde standartlara uymayan parçaların hem sayısı hem oranı gösterilmiştir. Bu örneklem oranlarının ortalaması aşağıdadır:

$$\bar{p} = (0.090 + 0.075 + \cdots + 0.090)/20 = 0.096$$

Aşağıdaki çerçeve oranların denetim çizgesini geliştirmede kullanılacak simgeleri özetlemektedir.

ÇİZELGE 16.3 200 elektronik parçalık örneklemlerde uyumsuz birimler

ÖRNEKLEM NUMARASI	UYUMSUZ SAYISI	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NUMARASI	UYUMSUZ SAYISI	$\hat{p}$
1	18	0.090	11	19	0.095
2	15	0.075	12	26	0.130
3	23	0.115	13	11	0.055
4	9	0.045	14	28	0.140
5	17	0.085	15	22	0.110
6	29	0.145	16	14	0.070
7	11	0.055	17	25	0.125
8	21	0.105	18	17	0.085
9	25	0.125	19	23	0.115
10	14	0.070	20	18	0.090

Simgeler

Zaman içinde, her biri n gözlemden oluşan K tane örneklem alınmış, standartlarla **uyumsuz** örneklem üyelerinin oranları belirlenmiştir. **Örneklem oranlarını** $\hat{p}_i\,(i = 1, 2, \ldots, K)$ ile gösterelim. Bunlar bir p çizgesinde gösterilebilir. Örneklemler aynı büyüklükteyse **örneklem oranlarının ortalaması, uyumsuz** birimlerin genel oranıdır:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{K} \hat{p}_i / K$$

Eğer süreç bütün gözlem dönemi boyunca tutarlı çalışmışsa, örneklemlerin her birine ortak bir anakütleden çekilmiş gözüyle bakılabilir. Bu anakütledeki uyumsuz birimlerin oranı, örneklem oranlarının ortalaması $\overline{p}$ ile tahmin edilir. Örneklem oranlarının örnekleme dağılımı konusunda Bölüm 6'da gördüklerimizi anımsarsak tekil örneklem oranları $\hat{p}_i$'lerin, ortalaması $\overline{p}$, standart sapması

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

olan bir örnekleme dağılımı vardır. Daha önce ele aldığımız başka kalite denetimi uygulamalarında olduğu gibi burada da standart uygulama denetim çizgelerinde üç standart hata eşiklerini kullanmaktır. Ayrıntılar aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.

p Çizgeleri

p çizgesi, uyumsuz birimlerin örneklem oranlarının zaman çizimidir. Orta çizgi şudur:

$$OÇ_p = \bar{p}$$

Üç standart hata eşiklerinden alt denetim eşiği[4]

$$ADE_p = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

ve üst denetim eşiği

$$ÜDE_p = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

olur.

Artık Çizelge 16.3'teki veriler için p çizgesini çizebiliriz. Bu da Çizim 16.4'te gösterilmiştir. Çizimdeki orta çizgi şudur:

$$OÇ_p = \bar{p} = 0.096$$

Alt denetim eşiği şöyle bulunur:

$$ADE_p = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.096 - 3\sqrt{\frac{(0.096)(0.904)}{200}}$$

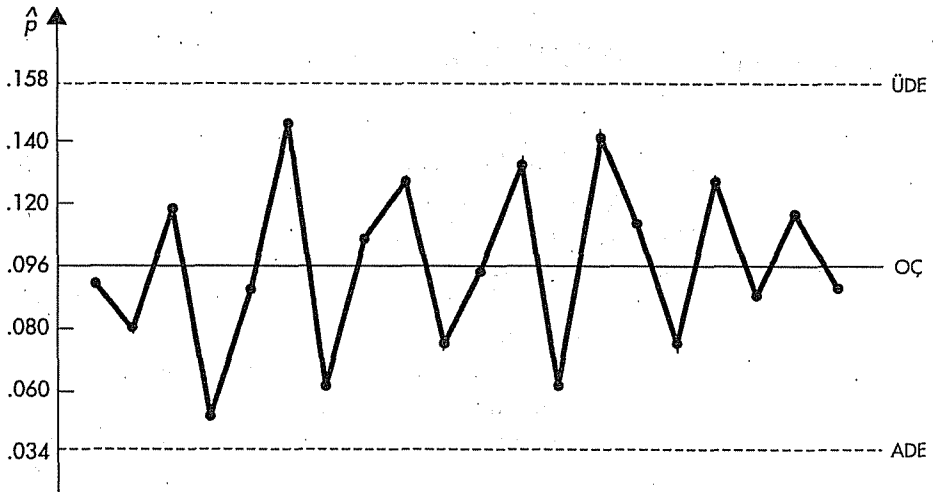
$$= 0.096 - 0.062 = 0.034$$

Üst denetim eşiği de

$$ÜDE_p = 0.096 + 0.062 = 0.158$$

olur. Çizim 16.4'e bakıldığında bütün örneklem ortalamalarının denetim eşikleri arasında yer aldığı, büyük çoğunluğunun da bu eşiklerden hayli uzak durduğu görülebilir. Kalitede orta derecede yüksek bir değişkenliğin olduğu, bunun da biraz daha inceleme gerektirdiği söylenebilir. Ama bu çizgeden sürecin denetim dışına çıktığını söylemek pek mantıklı olmaz. Bu durumda o sıradaki çalışma koşullarında, üretilen bütün birimlerin yaklaşık %9.6 kadarı ölçütlerle uyumlu değildir.

[4] Alt denetim eşiğinin formülü eksi değer verebilir, bu da bir oran değeri için elbette anlamsızdır. Bu durumda, alt denetim eşiği 0 olarak alınır. Nasıl olsa alt eşiğin aşılması genel olarak bir kaygı yaratacaktır. Bunun anlamı sürecin daha güvenilir olmasıdır. Ama bir başka olasılık, incelemecilerin uyumsuz birimleri ayırdetmede başarısız kaldıklarıdır.



ÇİZİM 16.4 Çizelge 16.3'teki elektronik parça verileri için *p* çizgesi

p çizgelerinin yorumlanması Altbölüm 16.2'deki çizgelerin yorumuna benzer. Denetim eşiklerinin dışına düşen örneklem değerleri biraz daha incelenir, bu aşırı değerler için belirlenebilir nedenler bulunursa bunlar atılıp denetim eşikleri yeniden hesaplanır. Bir *p* çizgesinde zaman içinde yükselen bir eğilim gözlenmesi özellikle kaygı vericidir. Bu, uyumsuz birimler oram artıyor —yani kalite bozuluyor— anlamına gelebilir. Sürecin denetim altında olduğu bir kez belirlendikten sonra bu eşikler başka verilerin değerlendirilmesinde kullanılabilir. Ancak öbür denetim çizgelerinde olduğu gibi, kalite denetimi işi sürdükçe başarımın gelişebileceğini hesaba katmak için denetim eşiklerinin dönemsel olarak yeniden hesaplanması iyi bir uygulama olur.

Uyumsuzlukların bu yolla çözümlenmesi kuşkusuz, standart dışı birimlerin rahatsızlık verecek kadar çok üretildiğini ortaya çıkarabilir. Bu durumda başka çözümlemeler gerekir ve bunlar **Pareto çizimleri** aracılığıyla yapılabilir. Bunlar özünde çubuk çizimleri olup uyumsuzluğun tekil nedenlerini su yüzüne çıkarır. Standart dışı birimlere ilişkin çeşitli tekil sorunlar sıralanıp her sınıftaki birim sayısı hesaplanır. Çubuk çizimleri farklı kusurları olan ürünlerin ya ham sayılarını ya da bunları düzeltmek için katlanılacak toplam maliyetleri gösterecek biçimde düzenlenir. Bu yolla yöneticiler uyumsuzluk oranında ya da uyumsuz birimlerin yeniden işlenme maliyetlerinde en fazla azaltmayı sağlamak için çabalarını nerelerde yoğunlaştırmaları gerektiği konusunda görsel bir izlenim edinirler. Böylece kalite denetimi, sorunların saptanmasında değerli bir katkıda bulunmuş olur.

16.5 GERÇEKLEŞME SAYILARININ DENETİM ÇİZGELERİ

Altbölüm 4.7'de bir olayın *gerçekleşme sayılarını* temsil etmede Poisson dağılımının çoğu zaman işe yaradığım gördük. Kalite denetiminde bunun yaygın bir uygulaması, bitmiş bir ürünün incelenip belli bir tür bozukluğu ya da kusuru olanların sayısının saptandığı durumdur. Birimler zaman içinde incelenir de birim başına bozukluklar sayılırsa bu bilgi bir denetim çizgesine yerleştirilebilir. Buna *c çizgesi* denir.

Bir dokuma sanayicisi toplarla kumaş üretmektedir. Dönemsel olarak seçilen bir top bütünüyle incelenmekte kusur sayısı saptanmaktadır. Çizelge 16.4 zaman içinde kaydedilmiş yirmi topluk bir dizinin sonuçlarını göstermektedir. Bu tür uygulamada her birimin aynı incelemecinin elinden geçmesi iyi olur. O zaman göze çarpan eğilimler, çeşitli incelemecilerin uyguladığı standartlardaki ya da deneyimlerindeki farklılıktan doğmamış olur. Örneğimizde her top kumaş başına ortalama kusur sayısı

$$\bar{c} = (8 + 8 + \cdots + 6)/20 = 6.6$$

olur. Bu da kumaş topu başına kusur sayısının anakütle ortalamasının doğal bir tahminidir.

Gerçekleşme sayılarının denetim çizgeleri düzenlenirken kullanılan simgeler aşağıdaki çerçeve içinde sergilenmiştir.

Simgeler

K birimlik bir dizi zaman içinde incelenmiştir. Her birim için kusur çıkması gibi belli bir olayın gerçekleşme sayısı saptanmıştır. Bu *gerçekleşme sayıları* c_i $(i = 1, 2, \ldots, K)$ ile gösterilmiştir. Bu durumda *gerçekleşme sayılarının örneklem ortalaması* şudur:

$$\bar{c} = \sum_{i=1}^{K} c_i / K$$

Gerçekleşme sayılarının örneklem ortalaması $\bar{c}$, anakütle ortalamasının bir tahminini verir. Dahası, gerçekleşme sayıları Poisson dağılımına uyuyorsa, bu dağılımın standart sapması ortalamanın karekköküdür. Öyleyse örneğimizde gerçekleşme sayılarının standart sapması şöyle tahmin edilir:

ÇİZELGE 16.4 Kumaş toplarındaki kusur sayıları

KUMAŞ TOPU	KUSUR SAYISI	KUMAŞ TOPU	KUSUR SAYISI	KUMAŞ TOPU	KUSUR SAYISI
1	8	8	2	15	1
2	8	9	3	16	7
3	6	10	10	17	9
4	8	11	7	18	11
5	9	12	6	19	9
6	5	13	8	20	6
7	7	14	2		

Gerçekleşme sayılarının denetim çizgesi bildik yolla düzenlenebilir. Her zamanki gibi üç standart hata eşikleri çizilerek yorum kolaylaştırılabilir. Aşağıdaki çerçeve ayrıntıları göstermektedir.

c Çizgesi

c çizgesi bir olayın gerçekleşme sayılarının zaman çizimidir. Orta çizgi şudur:

$$OÇ_c = \bar{c}$$

Üç standart hata eşiklerinden alt denetim eşiği

$$ADE_c = 0 \qquad \bar{c} \leq 9 \text{ ise}$$

$$= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \qquad \bar{c} > 9 \text{ ise}$$

biçimindedir. Üst denetim eşiği ise şöyledir:

$$ÜDE_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

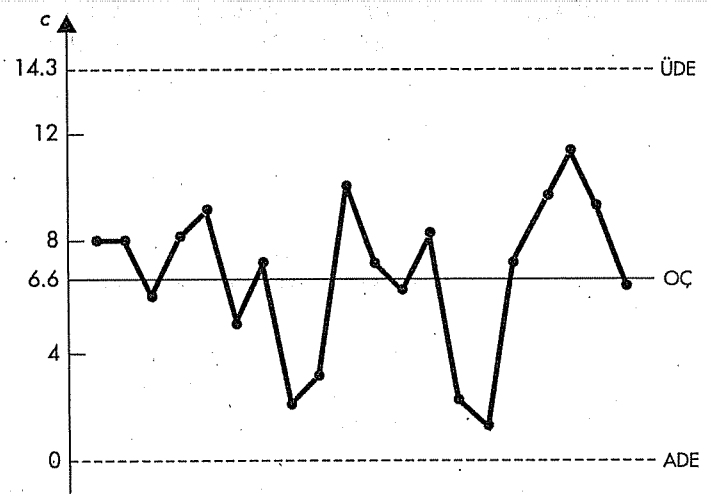
Örneğimizde $\bar{c}$ dokuzdan küçük olduğundan alt denetim eşiği

$$ADE_c = 0$$

olur. Üst denetim eşiği de şöyledir:

$$ÜDE_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 6.6 + 3\sqrt{6.6} = 14.3$$

Çizim 16.5, Çizelge 16.4'teki verilerin denetim çizgesini göstermektedir. Bu c-çizgesinin incelenmesi herhangi bir kaygıya yol açmaz. Gözlemler üst denetim eşiğinin bir hayli altında olup kusur sayılarının zamanla arttığına ilişkin bir kanıt görülmemektedir. Öyleyse üretim süreci denetim altındadır, Çizim 16.5 de süreç yeterliliğinin doğru bir resmini göstermektedir.



ÇİZİM 16.5 Kumaş verileri için c-çizgesi

16.6 ÖZET

Her kalite denetimi programının en değerli bileşeni programı başlatma kararıdır. Kullanılan çeşitli istatistik teknikleri elbette önemlidir ve üzerinde çalışılmasını gerektirir ama en büyük kazanç, yöneticiler ve işçilerin kaliteyi iyileştirme değeri konusunda gittikçe daha duyarlı olmalarından kaynaklanabilir. Çalışanları bu çabaya katmanın bir yolu **kalite takımları** —kalite ölçütlerinin, bunların geliştirilme olanaklarının tartışıldığı küçük gruplar— kurmaktır. Bu tartışmalar yararlı geliştirme önerilerine dönüşebilir. Tartışmalar yapılandırılıp takım üyeleri ilgili konularda bilgilendirilirse bunun olasılığı artar.

Burada ele aldığımız ve sıkça kullanılan başka istatistik yöntemleri, bilgilendirilmiş kimselerin önlerindeki kalite başarımını tartışmaları için gerekli bilgiyi sağlayabilir. Bu yöntemlerin anlaşılması hiç de güç değildir, çizgelerin öne çıkarılması da verilerin yorumlanmasını görece kolaylaştırır. Bunun önemi, geniş çalışan kitlelerinin karmaşıklaşmış teknik istatistik kavramlarını anlamalarına gerek kalmadan bilgiye ulaşmalarını sağlamasındadır. Gerçekten de **değişkenliği** ve nedenlerini anlamak, bir kimsenin verileri akıllıca yorumlayabilme yetilerine kavuşmasında epeyce yol almasını sağlar. Hiçbir süreç birbirinin tıpkısı olan çıktı birimleri üretmez. Şansa bağlı diye nitelenebilecek bir **doğal değişkenliğin** olması kaçınılmazdır. Kalite denetiminin önemli bir öğesi, bu doğal değişkenliği yansıtması pek olanaklı olmayan ama araştırma gerektiren bir yapısal nedeni işaret eden ölçme örüntülerini ayırdedebilmektir.

Bu bölümde ele alınanlardan başka pek çok kalite denetleme tekniği olduğu gibi, ilgili verilerin derlenip düzenlenmesi için çeşitli yollar da vardır. Uygun bir yaklaşımın seçimi, bir ölçüye kadar, tekil koşullara bağlıdır. Doğal olarak, sürece bilgisayar katılabilir. İstatistikle kalite denetimi için yazılmış bilgisayar programları yaygındır. Daha önce gördüğümüz gibi, çoğu kalite denetim yönteminde gerekli hesaplamalar ve çizge düzenlemeleri hiç de zor işler değildir. Bu amaçla bilgisayar kullanıp kullanmama kararı, başka birçok durumdaki gibi, maliyet tahminlerine ve verileri kaydeden kimselerin bilgisayar isteyip istememelerine bağlıdır.

ALIŞTIRMALAR

12. Bir araba parçasına ilişkin bir çalışmada her biri 250 gözlem içeren otuz örneklem alınmıştır. Uyumsuz birimlerin örneklem ortalaması oranları 0.056 bulunmuştur. Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

13. Bir uçak üretimi parçasına ilişkin bir çalışmada her biri 500 gözlem içeren yirmibeş örneklem alınmıştır. Uyumsuz birimlerin örneklem oranlarının ortalaması 0.016 bulunmuştur. Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.

14. Aşağıdaki çizelge, her biri 200 gözlemli otuz örneklemli bir dizide uyumsuz birimlerin oranlarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$
1	0.125	11	0.135	21	0.105
2	0.140	12	0.170	22	0.135
3	0.090	13	0.105	23	0.140
4	0.085	14	0.095	24	0.085
5	0.175	15	0.130	25	0.145
6	0.160	16	0.145	26	0.175
7	0.130	17	0.155	27	0.105
8	0.135	18	0.090	28	0.130
9	0.095	19	0.125	29	0.085
10	0.115	20	0.145	30	0.090

(a) Örneklem oranlarının ortalamasını bulun.
(b) Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu p çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

15. Aşağıdaki çizelge, her biri 500 gözlemli yirmi örneklemli bir dizide uyumsuz birimlerin oranlarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$
1	0.048	8	0.052	15	0.068
2	0.062	9	0.032	16	0.036
3	0.056	10	0.038	17	0.030
4	0.060	11	0.048	18	0.064
5	0.038	12	0.042	19	0.056
6	0.042	13	0.076	20	0.048
7	0.066	14	0.058		

(a) Örneklem oranlarının ortalamasını bulun.
(b) Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu p çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

16. Aşağıdaki çizelge, her biri 250 gözlemli yirmibeş örneklemli bir dizide uyumsuz birimlerin sayılarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM NO.	UYUMSUZ SAYISI	ÖRNEKLEM NO.	UYUMSUZ SAYISI	ÖRNEKLEM NO.	UYUMSUZ SAYISI
1	23	10	15	18	26
2	15	11	25	19	12
3	18	12	17	20	16
4	12	13	11	21	23
5	28	14	25	22	20
6	22	15	19	23	16
7	21	16	23	24	15
8	19	17	21	25	22
9	36				

(a) Örneklem oranlarını bulun.
(b) Örneklem oranlarının ortalamasını bulun.
(c) Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(d) Bu p çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

17. Bir süreçte kaplanmış kâğıt ruloları üretilmektedir. Zaman içinde yirmi ruloluk bir dizi incelenmiş, kusur sayıları saptanmıştır. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

RULO	KUSUR SAYISI	RULO	KUSUR SAYISI	RULO	KUSUR SAYISI
1	1	8	6	15	2
2	7	9	4	16	6
3	5	10	8	17	8
4	6	11	6	18	12
5	9	12	5	19	5
6	4	13	6	20	4
7	1	14	7		

(a) Rulo başına kusur sayısının örneklem ortalamasını bulun.

(b) Bir c çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu c çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

18. Bir gazete okuru yirmi hafta boyunca kendi yerel gazetesini özenle okumuştur. Her Çarşamba günü gazetesindeki baskı ve/ya da yazım yanlışlarını saymıştır. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

HAFTA	YANLIŞ	HAFTA	YANLIŞ	HAFTA	YANLIŞ
1	12	8	21	15	7
2	19	9	14	16	18
3	8	10	7	17	12
4	11	11	13	18	13
5	15	12	19	19	13
6	17	13	11	20	20
7	11	14	10		

(a) Bu yirmi Çarşamba günü için yanlış sayılarının örneklem ortalamasını bulun.
(b) Bir c çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu c çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

19. Bir sanayici üzümlü kurabiye üretmektedir. Dönemsel olarak bir kurabiye incelenmekte, kaç üzüm tanesi içerdiği sayılmaktadır. Aşağıdaki çizelge onbeş kurabiyenin sonuçlarını göstermektedir.

KURABİYE	ÜZÜM	KURABİYE	ÜZÜM	KURABİYE	ÜZÜM
1	18	6	16	11	15
2	15	7	13	12	9
3	22	8	18	13	10
4	14	9	14	14	7
5	17	10	12	15	8

(a) Kurabiye başına üzüm sayısının örneklem ortalamasını bulun.
(b) Bir c çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu c çizgesini düzenleyerek özelliklerini tartışın.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

20. Aşağıdaki terim çiftleri arasındaki anlam farklarını gösterin:
(a) Bir süreç *denetim altında*dır ve bir süreç ölçülere uygun başarım göstermeye *yeterli*dir.
(b) *Doğal değişkenlik* ve *belirlenebilir nedenler*.

21. Kalite denetiminde çizgeler düzenlenirken genellikle üç standart hata eşikleri kullanılır. Bu seçimin gerisinde yatan nedenleri ve doğurabileceği sonuçları açıklayın.

22. Aşağıdaki çizelge bir ürünün bir kalite özelliğinin beşer gözlemini içeren yirmi örneklemlik bir dizide örneklem ortalamaları ile standart sapmalarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s
1	120.3	2.6	8	120.7	1.4	15	120.9	1.9
2	119.5	1.8	9	120.9	2.2	16	119.2	3.1
3	118.4	2.2	10	118.7	2.8	17	119.9	2.2
4	120.9	1.7	11	119.2	2.4	18	118.7	2.6
5	119.3	1.2	12	118.9	1.4	19	120.6	1.4
6	119.7	2.3	13	119.9	1.2	20	119.4	1.9
7	121.1	1.9	14	120.3	1.5			

(a) Örneklem gözlemlerinin genel ortalamasını bulun.
(b) Ortalama örneklem standart sapmasını bulun.
(c) Sapmasız bir tahmin edici kullanarak süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.
(d) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(e) Bu $\overline{X}$ çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(f) Bir s çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(g) Bu s çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(h) Yönetim bu sürecin kalite özelliği değerlerinin 115 ile 125 arasında olması gerektiğini saptamıştır.
(i) $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgularınızı yorumlayın .
(ii) Yeterlilik endeksi *Cp*'yi bulup sonucu tartışın.
(iii) *Cpk* endeksini bulup sonucu tartışın.

23. Aşağıdaki çizelge bir ürünün bir kalite özelliğinin sekizer gözlemini içeren yirmibeş örneklemlik bir dizide örneklem ortalamaları ile standart sapmalarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s	ÖRNEKLEM	$\bar{x}$	s
1	347.9	2.37	10	356.1	4.82	18	349.8	6.27
2	349.8	4.26	11	348.7	3.90	19	350.7	5.92
3	346.5	7.81	12	352.1	8.61	20	352.3	9.64
4	352.7	5.62	13	353.6	7.59	21	347.1	3.68
5	350.4	3.17	14	349.1	6.28	22	342.8	6.52
6	348.6	6.09	15	347.4	3.87	23	348.7	7.13
7	351.7	5.27	16	354.3	8.21	24	354.1	4.36
8	353.8	4.31	17	350.5	4.19	25	352.3	5.19
9	349.4	4.97						

(a) Örneklem gözlemlerinin genel ortalamasını bulun.
(b) Ortalama örneklem standart sapmasını bulun.
(c) Sapmasız bir tahmin edici kullanarak süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.

(d) Bir $\overline{\overline{X}}$ çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(e) Bu $\overline{\overline{X}}$ çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(f) Bir s çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(g) Bu s çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(h) Yönetim bu sürecin kalite özelliği değerlerinin 325 ile 375 arasında olması gerektiğini saptamıştır.
  (i) $\overline{\overline{x}} \pm 3\hat{\sigma}$ aralığını hesaplayıp bulgularınızı yorumlayın.
  (ii) Yeterlilik endeksi Cp'yi bulup sonucu tartışın.
  (iii) Cpk endeksini bulup sonucu tartışın.

24. Aşağıdaki çizelge her biri 500 gözlemli yirmi örneklemlik bir dizide uyumsuz birimlerin oranlarını göstermektedir.

ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$	ÖRNEKLEM NO.	$\hat{p}$
1	0.078	8	0.080	15	0.094
2	0.062	9	0.068	16	0.066
3	0.048	10	0.076	17	0.070
4	0.086	11	0.064	18	0.088
5	0.092	12	0.068	19	0.062
6	0.074	13	0.058	20	0.054
7	0.076	14	0.082		

(a) Örneklem oranlarının ortalamasını bulun.
(b) Bir p çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu p çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

25. Büyük bir mağazanın müşteri yakınmaları bölümü, onsekiz haftalık bir dönemde gelen yakınmaların sayısını saptamıştır. Sonuçlar aşağıdaki çizelgededir.

HAFTA	YAKINMA	HAFTA	YAKINMA	HAFTA	YAKINMA
1	15	7	20	13	22
2	10	8	11	14	15
3	17	9	15	15	9
4	19	10	15	16	16
5	14	11	19	17	17
6	12	12	10	18	14

(a) Hafta başına yakınma sayısının örneklem ortalamasını bulun.
(b) Bir c çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(c) Bu c çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

26. Aşağıdaki çizelge bir ürünün bir kalite özelliğinin dörder gözlemini içeren onaltı örneklemlik bir dizide örneklem gözlemlerini göstermektedir.

ÖRNEKLEM NO.	ÖRNEKLEM GÖZLEMLERİ			
1	340	346	351	338
2	332	348	330	344
3	339	343	339	347
4	342	338	346	338
5	350	340	345	347
6	344	332	347	351
7	336	348	362	331
8	345	342	349	330
9	356	342	348	329
10	337	361	332	344
11	353	329	323	360
12	348	367	323	320
13	370	354	358	340
14	368	328	339	347
15	366	328	343	351
16	330	323	364	339

(a) Onaltı örneklem ortalaması ile örneklem standart sapmasını bulun.
(b) Örneklem gözlemlerinin genel ortalamasını bulun.
(c) Ortalama örneklem standart sapmasını bulun.
(d) Sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasının bir tahminini bulun.
(e) Bir $\overline{X}$ çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(f) Bu $\overline{X}$ çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(g) Bir s çizgesinin orta çizgisi ile alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
(h) Bu s çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(i) Ek A16.1'deki bilgileri kullanın.
  (i) Onaltı örneklem aralığı ile ortalama örneklem aralığını bulun.
  (ii) Örneklem aralıklarına dayanarak sapmasız bir tahmin edici kullanıp süreç standart sapmasını tahmin edin.
  (iii) Örneklem aralıklarına dayanarak bir $\overline{X}$ çizgesinin alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
  (iv) Bir R çizgesinin orta çizgisiyle alt ve üst denetim eşiklerini bulun.
  (v) Bu R çizgesini düzenleyip özelliklerini tartışın.

EK A16.1

Çoğu uygulamalı kalite denetimi çalışmasında, değişkenliği ölçmek için standart sapmalar yerine aralıklar kullanılır. Bu ekte, Altbölüm 16.2 ve 16.3'ün yöntemlerinin bu durum için nasıl değiştirileceği gösterilecektir.

Bir sayılar kümesinin aralığı, en büyük ve en küçük sayıların farkından başka bir şey değildir. Çizelge A16.1'de elektronik bir parçanın salgıladığı zamanlama sinyallerinin süresini gösteren her biri beş gözlemli yirmi örneklem sunulmuştur. Yirmi örneklemin aralıkları da Çizelge A16.1'de verilmiştir. Bu durumda ortalama örneklem aralığı şöyle bulunur:

$$\overline{R} = (17 + 7 + \cdots + 8)/20 = 10.9$$

Bu yaklaşımda her ne kadar örneklemlerin tekil standart sapmaları hesaplanmazsa da süreç standart sapmasının tahmini yinerde yararlıdır. Bir tahmin şu olabilir:

$$\hat{\sigma} = \overline{R}/d_2 \qquad \text{(A16.1.1)}$$

Buradaki d_2 ve başka denetim çizgesi sabitleri Çizelge A16.2'de verilmiştir. Örneğimizde örneklemler beşer gözlemliktir. Dolayısıyla süreç standart sapmasının tahmini şöyle bulunur:

$$\hat{\sigma} = \overline{R}/d_2 = 10.2/2.326 = 4.69$$

Burada örneklem aralıklarının hesaplandığını ama örneklem standart sapmalarının hesaplanmadığını varsayıyoruz. Dolayısıyla $\overline{\overline{X}}$ çizgesi, örneklem gözlemlerinin genel ortalaması orta çizgi olmak üzere, tıpkı Altbölüm 16.2'deki gibi çizilebilir:

$$OÇ_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}}$$

Ama artık denetim eşikleri örneklem standart sapmaları yerine örneklem aralıklarına dayanacaktır. Bu eşikler şöyledir:[5]

$$ADE_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} \qquad ÜDE_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R}$$

[5] Bunlar üç standart hata eşikleridir. Aslında, $A_2 = 3/(d_2\sqrt{n})$, Eş. (16.2.2)'deki ifadeye karşılık gelir.

ÇİZELGE A16.1 Zamanlama sinyali verileri için örneklem aralıkları

ÖRNEKLEM NO.	R	ÖRNEKLEM NO.	R	ÖRNEKLEM NO.	R
1	7	8	15	15	8
2	7	9	12	16	7
3	10	10	13	17	8
4	13	11	11	18	11
5	16	12	13	19	11
6	12	13	21	20	8
7	9	14	6		

ÇİZELGE A16.2 Aralıkla birlikte kullanılan bazı denetim çizgesi sabitleri

n	d_2	A_2	D_3	D_4
2	1.128	1.88	0	3.27
3	1.693	1.02	0	2.57
4	2.059	0.73	0	2.28
5	2.326	0.58	0	2.11
6	2.534	0.48	0	2.00
7	2.704	0.42	0.08	1.92
8	2.847	0.37	0.14	1.86
9	2.970	0.34	0.18	1.82
10	3.078	0.31	0.22	1.78

Denetim çizgesi sabiti A_2'nin kimi değerleri Çizelge A16.2'de verilmiştir. Örneğimizde $n = 5$ iken şunları buluruz:

$$ADE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} = 299.9 - (0.58)(10.9) = 293.6$$

$$\ddot{U}DE_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} = 299.9 + (0.58)(10.9) = 306.2$$

Öyleyse bu $\bar{X}$ çizgesi Çizim 16.1'dekiyle aynıdır, yalnız denetim eşikleri 293.6 ile 306.2'de saptanmıştır.

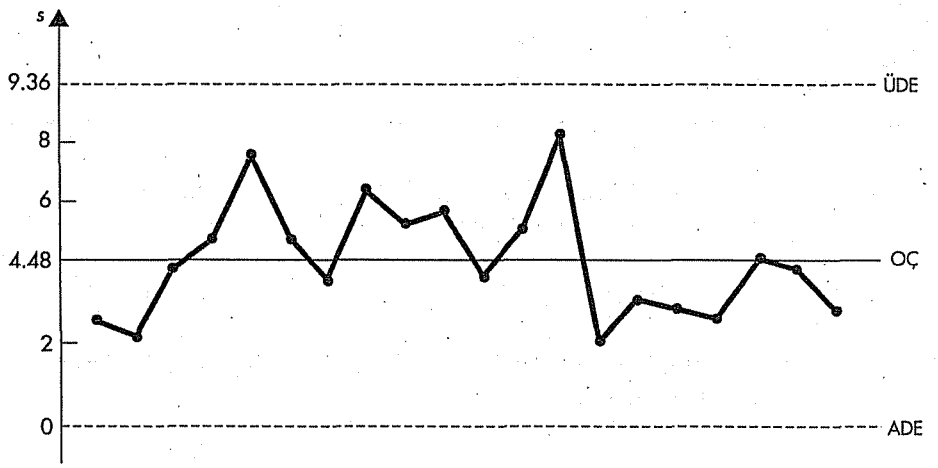
Süreç değişkenliğinin zaman içindeki gelişimi, örneklem aralıklarının zaman çizimi aracılığıyla değerlendirilebilir. Buna da R çizgesi denir. Zamanlama sinyali verilerimiz için bu R çizgesi Çizim A16.1'de gösterilmiştir. Çizgedeki orta çizgi ortalama örneklem aralığıdır, yani:

$$O\text{Ç}_R = \bar{R} = 10.9$$

Üç standart hatalık denetim eşikleri de şöyle bulunur:

$$ADE_R = D_3\bar{R} \qquad \ddot{U}DE_R = D_4\bar{R}$$

Buradaki denetim çizgesi sabitleri olan D_3 ile D_4'ün değerleri Çizelge A16.2'de verilmiştir. Örneğimizde bu değerler şöyledir:



ÇİZİM A16.1 Zamanlama sinyali verileri için *R* çizgesi

$$ADE_R = 0 \qquad \ddot{U}DE_R = (2.11)(10.9) = 23$$

Çizim A16.1'in incelenmesi pek kaygı uyandırmaz. Örneklem aralıklarından yalnız bir tanesi üst denetim eşiğine yakındır.

Son olarak, dikkat ederseniz, Altbölüm 16.3'teki sürecin yeterliliği hesaplamaları burada da yapılabilir. Bu hesaplamalar, süreç standart sapmasımn bir tahminini gerektirir. Çözümlemeler örneklem aralıklarına dayandığında bu tahmin Eş. (A16.1) ile elde edilir.

EK A16.2

Bu ekte, Altbölüm 16.2'de kullanılan ve Çizelge 16.2'de verilen denetim çizgesi sabitlerinin türetilme ayrıntıları gösterilecektir.

Standart sapması σ olan normal bir dağılımdan n gözlemli bir örneklem çekilmiş olsun. Örneklem standart sapmasını s ile gösterelim. Örneklem standart sapmasının genelde anakütle standart sapmasının sapmasız bir tahmin edicisi olmadığı bilinmektedir. Normal bir dağılım için, örneklem standart sapmasmn beklenen değerinin

$$E(s) = c_4\sigma$$

olduğu gösterilebilir. Burada

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{(n-2)}}\frac{[(n-2)/2]!}{[(n-3)/2]!}; \qquad (1/2)! = \sqrt{\pi}/2$$

Buna örnek vermek için $n = 5$ diyelim. O zaman Çizelge 16.2'deki değeri buluruz:

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{4}}\frac{(3/2)!}{(2/2)!} = \sqrt{\frac{1}{2}}(3/2)(1/2)! = \sqrt{\frac{1}{2}}(3/2)(\sqrt{\pi}/2) = 0.940$$

Benzer biçimde $n = 8$ diyelim, yine Çizelge 16.2'deki değeri buluruz:

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{7}}\frac{(3!)}{(5/2)!} = \sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\frac{6}{(5/2)(3/2)(1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\frac{6}{(5/2)(3/2)(\sqrt{\pi}/2)} = 0.965$$

Demek ki, örneklem normal bir dağılımdan çekilmişse, s/c_4 anakütle standart sapmasmn sapmasız bir tahmin edicisidir.

Altbölüm 16.2'de Eş. (16.2.2)'ye ulaşılması sırasında $\bar{X}$ çizgelerinin denetim eşiklerini belirlerken kullanılan A_3 denetim çizgesi sabitinin çıkarılışım görmüştük. Üç standart hatalı eşikler kullanıldığında bu değer şöyleydi:

$$A_3 = 3/c_4\sqrt{n}$$

Sözgelimi $n = 5$ için

$$A_3 = 3/(0.940\sqrt{5}) = 1.43$$

Çizelge 16.2 ile aynıdır.

Son olarak, örnekleme normal bir dağılımdan yapıldığında örneklem standart sapmasının örnekleme dağılımım düşünelim. Bu dağılımın varyansı şöyledir:

$$\sigma_s^2 = E(s^2) - [E(s)]^2 = \sigma^2 - c_4^2\sigma^2 = \sigma^2(1 - c_4^2)$$

Böylece standart hata da şöyle olur:

$$\sigma_s = \sigma\sqrt{1 - c_4^2}$$

Bu durumda anakütlenin bilinmeyen standart sapması yerine sapmasız bir tahmin edici koyarsak şu tahmini elde ederiz:

$$\hat{\sigma}_s = \frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Öyleyse örneklem standart sapmasının üç standart hatalık eşikleri şöyledir:

$$\bar{s} \pm 3\hat{\sigma}_s = \bar{s} \pm \frac{3\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Demek ki alt eşik şöyle bulunur:

$$\bar{s} - \frac{3\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = B_3\bar{s}$$

Burada,

$$B_3 = 1 - (3/c_4)\sqrt{1 - c_4^2}$$

olarak verilir. Benzer biçimde üst eşik de şudur:

$$\bar{s} + \frac{3\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = B_4\bar{s}$$

Burada da

$$B_4 = 1 + (3/c_4)\sqrt{1 - c_4^2}$$

biçimindedir. Örnek vermek için $n = 5$ alalım.

$$B_4 = 1 + (3/0.940)\sqrt{1 - (0.940)^2} = 2.09$$

Bu da Çizelge 16.2'de verilenle aynıdır. B_4 formülünün katı bir uygulanması bu durumda –0.09 verir, ama standart sapma eksi olamayacağına göre sıfır burada alt eşik olarak kullanılır.

Aslında denetim çizgesi eşikleri, $(n-1)s^2/\sigma^2$'nin uyduğu ki-kare dağılımına da dayandırılır. Ancak bu yaklaşım uygulamada daha seyrek kullanıldığından burada ayrıntıya girilmeyecektir.

BÖLÜM 17

Zaman Serilerinin Çözümlenmesi ve Kestirim

17.1 ZAMAN SERİSİ VERİLERİ: SORUNLAR VE FIRSATLAR

Bu bölümde, özel bir veri türünü çözümlerken karşılaşılan sorunların bazılarını ele alacağız. Özellikle, belli bir değişkenin *zaman içinde* ölçülmesiyle ilgileneceğiz. Örneklerimiz arasında aylık ürün satışları, üçer aylık şirket kazançları, adi pay senetlerinin günlük borsa kapanış fiyatları olacaktır.

Tanım

Bir **zaman serisi**, ilgilenilen bir büyüklüğün zaman içinde sıralanmış ölçümlerinin bir kümesidir.

Zaman serisi verileri, çoğunlukla çözümlenmeleri için yeni istatistik yöntemleri geliştirilmesi gereken özel nitelikler taşırlar. Buraya kadar geliştirdiğimiz veri çözümleme tekniklerinin hemen hepsi bir *rassal örnekleme* varsayımına —yani eldeki verilerin ilgilenilen olgunun *bağımsız* gözlemlerinden oluştuğu varsayımına— dayanır. Bu bağımsızlık varsayımının zaman serisi verilerine uyması pek enderdir. Sözgelimi bir sınai ürünün aylık satışları serisini alalım. Burada bağımsızlığın olmayışından en az iki nedenle kuşkulanılır. Birincisi, bir önceki ayın satışları göreli olarak yüksekse, bu ay da öyle olma şansı, olmamasına

göre daha büyüktür. Geçen ay yüksek satışlara yol açan genel iktisadi koşulların 1 ay içinde ani bir değişime uğraması pek beklenmez, öyleyse sanayicinin bu ay yüz yüze olduğu pazar özellikleri, her olasılığa karşı, önceki ayınkilerle ana çizgilerde benzer olacaktır. Demek ki peşpeşe ayların satışları arasında bir benzerlik bekleyebiliriz. Çoğu ürünün satış verilerinde görülen ikinci bir özellik *mevsimsellik*tir. Satışlar her yılın aynı döneminde doruğa çıkma eğilimindedir. Böylece, haziran ayı bu ürünün satışları için geçmiş yıllarda iyi bir ay olmuşsa, bu yıl da haziran satışlarının görece yüksek olması olmamasına göre daha çok beklenir. Bu da aylık satış rakamlarının bağımsız olmadığı anlamına gelir.

Böylece, zaman serilerinin belli bir tür bağımlılık özelliği taşıyabileceğini görmüş bulunuyoruz. Öyleyse bu kitapta buraya kadar ele alınan istatistik yöntemlerinin büyük çoğunluğunun ardında yatan önemli bir varsayımın zaman serisi verileri için geçerli olmaması çok olasıdır. Üstelik bu varsayım genellikle yaşamsal önemdedir ve bir zaman serisinin sanki bağımsız ölçümler içeriyormuş gibi çözümlenmeye kalkışılması ciddi ölçüde yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. İşte zaman serisi çözümlemelerinin temel sorunu budur, biz de bu nedenle bu konuya başlıbaşına bir bölüm ayırmış bulunuyoruz. Aslında bu sorunla Altbölüm 14.8'de regresyon çözümlemesi bağlamında karşılaşmıştık. Orada hata terimleri ardışık bağımlı —yani zaman içinde bağımlı— olan regresyon modellerini tahmin etme sorunuyla uğraşmıştık. Bu bölümde ise kendimizi tekil zaman serilerinin çözümlemesiyle sınırlayacağız.

Zaman serisi verilerinde bulunabilecek türden bağımlılık yapılarının olumsuz bir yönünü az önce ele aldık. Bu yapılar çıkardıkları sorunlarla veri çözümlemesi için özel teknikler geliştirilmesi gereğini doğururlar. Ama aynı olgu içinde bir de çıkış yolu barınır. Geçmişte rastlanan herhangi bir bağımlılıktan yararlanılarak bir zaman serisinin gelecek değerleri *kestirilebilir*. Sözgelimi, içinde bulunulan ayın satışları hemen önceki ayların ve geçen yıllardaki aynı ayın satışlarına yakınsa, bu bilgi gelecek ayların satışlarını kestirmede kullanılabilir.

17.2 ENDEKS SAYILARI

Zaman serisi verilerinin çözümlenmesinde kullanılan istatistik yöntemlerinin tanıtılmasına geçmeden önce bu altbölümde belli bir zaman serisi türünün oluşturulmasını ele alacağız. Tartışmayı başlatmak için ilk bakışta kolaymış duygusu veren aldatıcı bir soruyla işe koyulalım. Son on yılda ABD'de üretilen arabaların fiyatlarında ne gibi değişmeler oldu? Söylemeye bile gerek yok ki fiyatlar arttı ama bu fiyat artışı *nicel olarak* nasıl anlatılabilir. Yüzeysel olarak bu sorunun yanıtlanması çok zor değilmiş gibi görünebilir. Geçen on yılın her biri için bu arabaların fiyatlarına ilişkin bilgi derlenip veriler çizelgeleştirilebilir ya da bir zaman serisi çizimine dönüştürülebilir.

ÇİZELGE 17.1 Araba fiyatları ile satışlarını gösteren varsayımsal veriler

YIL	UFAK ARABALAR		LÜKS ARABALAR		BÜTÜN ARABALAR
	FİYAT (bin dolar)	SATIŞLAR (bin tane)	FİYAT (bin dolar)	SATIŞLAR (bin tane)	ORTALAMA FİYAT (bin dolar)
1	10	5	30	15	25.0
2	11	15	33	5	16.5

Ancak bu soruna biraz daha eğilince birkaç güçlük ortaya çıkar. Birincisi, belki de en yaşamsal olanı, arabalar türdeş değildir. "Bir arabanın fiyatı ne kadardır?" diye sormanın bir anlamı yoktur. Daha belirgin olmak gerekir. Büyük lüks bir araba, ufak bir arabadan çok daha pahalıdır. Bu durumda belki de son on yılda ABD'de üretilen bütün arabaların *ortalama* fiyatlarını karşılaştırmaya yönelebiliriz. Ne yazık ki böyle bir karşılaştırma yanıltıcı olur. Ufak araba satışlarının pek az olduğu, çok sayıda lüks arabanın satıldığı bir yıla göre pek az lüks araba, çok sayıda ufak araba satışının yapıldığı bir yılı düşünelim. Bu yıllardan ikincisinde ortalama araba fiyatı, birinci yılınkine göre daha düşük olacaktır, çünkü arabaların pazar payları değişmiştir. Çizelge 17.1, yalnızca iki tür arabanın satıldığı varsayımsal bir pazar örneği göstermektedir. Çizelgeden gördüğümüz gibi her iki tür arabanın da 2. yıldaki fiyatı, 1. yıldakine göre *daha yüksek*tir. Ama iki yılda satılan ürün karması farklı olduğundan, çizelgenin son sütunu 2. yılda satılan bütün arabaların ortalama fiyatının, 1. yılda satılan bütün arabaların ortalama fiyatından *daha düşük* olduğunu gösterir. Bu verilerden 2. yıldaki araba fiyatlarının 1. yıla göre daha düşük olduğu sonucunu çıkarmak istemeyeceğimiz açıktır. Öyleyse böyle bir ortalama bizim işimize yaramaz.

Başka bir olası çözüm her türdeki *tek* bir arabanın ortalama fiyatını hesaplamak olabilir. Bu yolun da güçlüklerden arınmış olmadığı, Çizelge 17.2'de gösterilen ikinci bir varsayımsal örnekte açıkça görülebilir. Burada ufak arabaların lüks arabalara göre çok daha yaygın olduğu bir pazar var. Ufak arabaların fiyatı her iki yılda da aynıyken lüks araba fiyatları 1. yıldan 2. yıla iki katma çıkmıştır. Böylece, çizelgenin son sütunundan da gördüğümüz gibi, tek bir ufak araba ile tek bir lüks arabanın ortalama fiyatı ikinci yılda birinciye göre önemli ölçüde artmıştır. Ama bu yol araba pazarındaki gelişmenin kesin doğru bir resmini göstermemektedir, çünkü, görece daha az lüks araba satılmasına karşın, her iki tür araba fiyatına eşit ağırlık verilmiştir.

Bu örneklerin de sergilediği gibi, genel fiyat örüntüsünün güvenilir bir gösterimini oluşturabilmek için her zaman diliminde satın alınan miktarların da gözönüne alınması gerekmektedir. Uygun tartılı ortalamaların nasıl oluşturulabileceğini aşağıda göreceğiz.

ÇİZELGE 17.2 Araba fiyatları ile satışlarını gösteren varsayımsal veriler

YIL	UFAK ARABALAR		LÜKS ARABALAR		
	FİYAT (bin dolar)	SATIŞLAR (bin tane)	FİYAT (bin dolar)	SATIŞLAR (bin tane)	HER TÜRDEKİ TEK BİR ARABANIN ORTALAMA FİYATI (bin dolar)
1	10	100	24	1	17
2	10	100	48	1	29

Benzer bir sorun, arabaların isteğe bağlı "ekstra"larla satılmasından, bunun da doğal olarak fiyatı etkilemesinden doğar. Böylelikle, tüketicilerin ekstralara daha çok yöneldikleri bir yılda ufak arabaların ortalama fiyatı, böyle davranmadıkları bir yıla göre, temel fiyat her iki yılda da aynı kalsa bile, daha yüksek olur. Bu güçlüğü aşmanın bir yolu, geçerli bir karşılaştırma yapabilmek için her bir yıldaki ekstraları içermeyen temel fiyata bakmak olabilir.

Başka bir güçlük teknolojik geliştirmelerden kaynaklanır. Teknolojik ilerleme nedeniyle bir ufak arabanın bu yılki modeli, on yıl önce satılana göre daha üstün bir üründür. Bu on yıldaki fiyat artışının bir bölümünün kalitedeki yükselmeye bağlı olduğu ileri sürülebilir. Bu etmen gözardı edilirse, fiyatların dönem boyunca yapılan basit bir karşılaştırması enflasyonun boyutlarını abartabilir. Fiyatların zaman içinde karşılaştırılmasında kalite değişiminin hesaba katılması sorununu daha fazla işlemeyeceğiz ama bu tür karşılaştırmalar yapılırken bu etmen unutulmamalıdır.

Son bir nokta olarak şuna işaret edelim ki arabaların dolar fiyatındaki genel eğilim, incelenmesi gereken en ilginç ya da en yararlı şey olmayabilir. Sonuçta geçen on yılda neredeyse her şeyin dolar fiyatı artmıştır. Araba fiyatlarındaki artışların başka ürün fiyatlarındaki artışlarla karşılaştırılması belki de daha uygun olur.

Burada açıklanan *endeks sayısı sorunu*, bir *öbek* malın fiyatlarındaki hareket ile ilişkin bir şeyler söyleme isteğinden doğmaktadır. Sözgelimi pay senetleri New York Borsası'na kayıtlı her bir şirketin adi pay senetlerinin fiyatı bir aylık bir sürede değişecektir. Biz fiyatlardaki bileşik değişmenin bir ölçüsünü ortaya çıkarmak istiyoruz. **Endeks sayıları** işte bu türden sorunlara karşı tasarlanmıştır.

TEK BİR KALEMİN FİYAT ENDEKSİ

Endeks sayıları incelememize tek bir kalemin fiyat hareketlerini izleyeceğimiz basit bir durumla başlayalım. Çizelge 17.3'ün ikinci sütunu Ford Motor Şirketi'nin pay senedi fiyatını 12 hafta boyunca göstermektedir. Bu fiyat rakamlarının akıldan biraz hesap yapmadan bu durumlarıyla yorumlanmaları pek kolay değildir. Bu iş, her bir fiyatın tek bir fiyatın yüzdesi olarak ifade edilmesiyle kolaylaşır.

ÇİZELGE 17.3 Ford Motor Şirketi'nin 12 hafta boyunca pay senedi fiyatları ile fiyat endeks sayıları

HAFTA	FİYAT	FİYAT ENDEKSİ	HAFTA	FİYAT	FİYAT ENDEKSİ
1	$20^{2}/_{8}$	100.0	7	$19^{3}/_{8}$	95.7
2	$19^{7}/_{8}$	98.1	8	$19^{5}/_{8}$	96.9
3	19	93.8	9	$21^{1}/_{8}$	104.3
4	$19^{6}/_{8}$	97.5	10	$22^{3}/_{8}$	110.5
5	$20^{2}/_{8}$	100.0	11	25	123.5
6	$19^{7}/_{8}$	98.1	12	23	113.6

Çizelge 17.3'ün üçüncü sütununda yaptığımız budur. İlk haftayı **temel** olarak alıp her bir fiyatı bu temel hafta fiyatının ($20^{2}/_{8}$) bir yüzdesi olarak yazdık. Sözgelimi ikinci haftanın fiyatı $19^{7}/_{8}$, temel alınan haftadaki fiyatın

$$100\left(\frac{19^{7}/_{8}}{20^{2}/_{8}}\right) = 98.1$$

biçiminde bir yüzdesidir. Bu yolla hesaplanan yüzdelere fiyatın **endeks sayıları** denir.

Temel dönemin seçimi isteğe bağlıdır. Başka herhangi bir haftayı temel larak alıp bütün fiyatları o hafta fiyatının yüzdesi olarak yazabilirdik.

Burada endeks sayıları kullanılmasının üstünlüğü, sayıların yorumunu kolaylaştırmasında yatar. Çizelge 17.3'ten Ford Motor Şirketi pay senedi fiyatının sözgelimi 12. haftada, 1. haftadan %13.6 daha yüksek olduğu hemen görülür.

Tek Bir Kalem İçin Fiyat Endekslerinin Hesaplanması

Elimizde tek bir kalemin fiyatının zaman içindeki gözlemlerinin bir dizisi olsun. Bir **fiyat endeksi** oluşturabilmek için bir zaman dilimi **temel** olarak seçilir, her dönemin fiyatı bu temel dönem fiyatının bir yüzdesi olarak belirtilir. Böylece, temel dönemin fiyatı p_0 ile, ikinci bir dönemin fiyatı p_1 ile gösterilirse ikinci dönemin fiyat endeksi şöyle olur:

$$100\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$$

ÇİZELGE 17.4 On yıl boyunca üç tür ürünün çuval başına fiyatları ile tartısız bileşik fiyat endeksleri

YIL	BUĞDAY	MISIR	SOYA FASULYESİ	ORTALAMA	ORTALAMANIN ENDEKSİ
1	1.33	1.33	2.85	1.837	100.0
2	1.34	1.08	3.03	1.817	98.9
3	1.76	1.57	4.37	2.567	139.7
4	3.95	2.55	5.68	4.060	221.0
5	4.09	3.03	6.64	4.587	249.7
6	3.56	2.54	4.92	3.673	199.9
7	2.73	2.15	6.81	3.897	212.1
8	2.33	2.02	6.42	3.590	195.4
9	2.97	2.25	6.12	3.780	205.8
10	3.78	2.52	6.28	4.193	228.3

TARTISIZ BİR BİLEŞİK FİYAT ENDEKSİ

Şimdi de birden çok kalemin bileşik fiyat hareketini nasıl belirteceğimiz sorununu ele alacağız. Çizelge 17.4, on yıl boyunca ABD çiftçilerine buğday, mısır ve soya fasulyesi için ödenen çuval (yaklaşık yirmi kiloluk bir ağırlık ölçüsü olan "bushel" karşılığı olarak kullanılmıştır, Ç.N.) başına dolar fiyatını gösterir. Bu çizelge aynı zamanda bu üç ürünün bileşik bir endeksini elde etmenin bir yolunu da gösterir. Çizelgenin son iki sütunu her yıl için bu üç ürünün çuval başına ortalama fiyatı ile bu ortalamaların ilk yılı temel alan bir endeksini verir.

Bulunan bu *tartısız bileşik fiyat endekslerinin* hesaplanması kolaydır. Bunlar her yılın ortalama fiyatını, basitçe, temel yılın ortalama fiyatının bir yüzdesi olarak belirtir. Ancak içinde Çizelge 17.2'deki örnekle gösterilen eksikliği barındırır. Bu ürünlerin üretim miktarlarının farklılıklarını hesaba katmaz.

Tartısız Bir Fiyat Endeksi

Elimizde K tane kalemden oluşan bir öbeğin fiyatlarının zaman içindeki gözlem serileri olsun. Daha önceki gibi bir dönem temel olarak seçilsin.

Bu kalemlerin her dönemdeki ortalama fiyatının hesaplanıp bu ortalama fiyatların endeksinin bulunmasıyla tartısız bileşik fiyat endeksi elde edilmiş olur. Yani her dönemin ortalama fiyatı, temel dönem ortalama fiyatının bir yüzdesi olarak belirtilir. Temel dönemde i'inci kalemin fiyatı p_{0i} ile, bu kalemin ikinci bir dönemdeki fiyatı p_{1i} ile gösterilsin. Bu ikinci dönemin tartısız bileşik fiyat endeksi şöyle olur:

$$100\left(\frac{\sum_{i=1}^{K} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{K} p_{0i}}\right)$$

TARTILI BİR BİLEŞİK FİYAT ENDEKSİ

Bir fiyat endeksi oluşturulurken tek tek fiyatların satılan miktarların bir ölçüsüyle tartılandırılması doğaldır. Bir olanak sözkonusu dönemlerin bir kısmında ya da hepsinde ortalama miktarları kullanmak olabilir. Çoğu zaman miktar bilgilerini düzenli bir biçimde bulmak zordur ya da pahalıdır, bu yüzden endeksler tek bir dönemin miktarlarına dayanır. Bunlar temel dönemin miktarlarıysa bulunan endekse *Laspeyres fiyat endeksi* denir.

Laspeyres fiyat endeksi özünde, temel dönem miktarlarını temel dönemde satın almanın toplam maliyetini, aynı miktarlar başka bir dönemde satın alınsaydı toplam maliyetin alacağı değerle karşılaştırır. Bunu açıklamak için Çizelge 17.4'teki ürün fiyatı verilerini 1. yıl temel olmak üzere ele alalım. O yılın üretimi 1,352 milyon çuval buğday, 4,152 milyon çuval mısır, 1,127 milyon çuval soya fasulyesi olmuştur. Bu durumda 1. yılın toplam çıktısının maliyeti

$$(1{,}352)(1.33) + (4{,}152)(1.33) + (1{,}127)(2.85) = 19{,}532$$

milyon dolardır. 2. yılda geçerli fiyatlarla temel yıl miktarlarının toplam satın alma maliyeti de

$$(1{,}352)(1.34) + (4{,}152)(1.08) + (1{,}127)(3.03) = 9{,}711$$

milyon dolar olur. Dolayısıyla 2. yılın Laspeyres fiyat endeksi şöyledir:

$$100\left(\frac{9{,}711}{10{,}532}\right) = 92.2$$

Çizelge 17.5 bu verilerden bu yolla hesaplanan bütün endeksleri göstermektedir.

ÇİZELGE 17.5 Üç ürün için Laspeyres fiyat endeksi

YIL	LASPEYRES ENDEKSİ	YIL	LASPEYRES ENDEKSİ	YIL	LASPEYRES ENDEKSİ
1	100.0	5	243.0	9	192.3
2	92.2	6	198.5	10	215.1
3	131.2	7	192.7		
4	212.0	8	178.2		

Laspeyres Fiyat Endeksi

Belli bir süre boyunca fiyatlarını bildiğimiz K tane maldan oluşan bir öbeğimiz olsun. Bir dönem endekse temel olarak seçilsin. Herhangi bir dönemdeki Laspeyres fiyat endeksi, temel dönemde alışverişe konu olan miktarların ilgilenilen dönem fiyatlarından satın alınmalarının toplam maliyetinin, aynı miktarların temel dönemdeki toplam satın alma maliyetinin bir yüzdesi olarak belirtilmesidir.

Temel dönemde i'inci malın fiyatı p_{0i} ile, satın alınma miktarı q_{0i} ile gösterilsin. İkinci bir dönemde i'inci malın fiyatı p_{1i} ise, bu dönemin Laspeyres fiyat endeksi aşağıdaki gibidir:

$$100\left(\frac{\sum_{i=1}^{K} q_{0i}p_{1i}}{\sum_{i=1}^{K} q_{0i}p_{0i}}\right)$$

Laspeyres fiyat endeksi formülünün, tartısız bileşik fiyat endeksininkiyle karşılaştırılması öğretici olabilir. Aradaki fark, Laspeyres endeksi oluşturulurken her kalemin fiyatının temel dönemde alışverişe konu olan miktarlarla *tartılandırılmasıdır*.

Laspeyres fiyat endeksi sayılarını oluşturmanın bir özelliği yalnız temel dönem miktarlarına ilişkin bilginin kullanılmasıdır. Bu özellik miktar bilgisinin her dönem toplanmasının olanaksız ya da engelleyici düzeyde pahalı olduğu durumlarda özellikle önem kazanır. Ama temel olarak seçilen dönemdeki satın alma miktarları şu ya da bu nedenle temsil edici değilse bu bir eksikliğe dönüşür. Sözgelimi Laspeyres endeksi uzun bir süre boyunca hesaplanırsa bu durum ortaya çıkabilir. Miktarların çeşitli kalemler arasındaki dağılımı zamanla önemli değişiklikler geçirir, böylece özgün temel miktarlar zaman aşımına uğrar. Bu sorunu aşmanın bir yolu **hareketli Laspeyres fiyat endeksi** oluşturmak olabilir. Burada temel dönem, yeni temel dönemlere ilişkin miktar bilgileri elde edilerek zaman zaman değiştirilir. Tüketici Fiyatları Endeksi gibi çoğu ülke fiyat endeksleri özünde böyle hesaplanmaktadır.

TARTILI BİR BİLEŞİK MİKTAR ENDEKSİ

Fiyat endeksleri, bir öbek malın bileşik fiyatının zaman içindeki değişmelerini temsil etmek üzere tasarlanırlar. Alışverişe konu olan genel miktarlardaki gelişmenin bir görünümünü de bulmak isteyebiliriz. Burada da bu soruna akla yakın herhangi bir yaklaşım *tartılı* bir miktar endeksiyle sonuçlanabilir, çünkü çok pahalı bir maldan satın alman miktara, ucuz bir kalemden yapılan aynı miktar satın almaya göre, daha büyük bir ağırlık vermeyi herhalde isteriz. Bunu sağlamanın

ÇİZELGE 17.6 Üç ürünün milyon çuval cinsinden on yıllık üretim miktarları

YIL	BUĞDAY	MISIR	SOYA	YIL	BUĞDAY	MISIR	SOYA
1	1,352	4,152	1,127	6	2,142	6,266	1,288
2	1,618	5,641	1,176	7	2,026	6,357	1,716
3	1,545	5,573	1,271	8	1,799	7,082	1,843
4	1,705	5,647	1,547	9	2,134	7,939	2,268
5	2,122	5,829	1,547	10	2,370	6,648	1,817

ÇİZELGE 17.7 Üç ürün için Laspeyres miktar endeksi

YIL	LASPEYRES ENDEKSİ	YIL	LASPEYRES ENDEKSİ	YIL	LASPEYRES ENDEKSİ
1	100.0	5	142.3	9	188.6
2	123.5	6	141.0	10	163.0
3	124.3	7	152.3		
4	134.7	8	162.0		

bir yolu Laspeyres miktar endeksini hesaplamaktır. Bunu da Çizelge 17.6'da verilen buğday, mısır, soya fasulyesi üretim miktarlarıyla açıklayacağız.

Laspeyres miktar endeksi, tekil miktarları temel dönem fiyatlarıyla tartılandırır. Buğday, mısır ve soya fasulyesi için bunlar sırasıyla 1.33, 1.33, 2.85'tir. Görmüş olduğumuz gibi 1. yılın çıktısı 10,532 milyon dolardır. 2. yıl için bir miktar endeksi elde etmek için bu toplam değerle, 2. yıl üretiminin 1. yılın fiyatları geçerliymiş gibi bulunan toplam değerini, yani

$$(1{,}618)(1.33) + (5{,}641)(1.33) + (1{,}176)(2.85) = 13{,}006$$

değerini karşılaştırırız. Dolayısıyla 2. yılın Laspeyres miktar endeksi aşağıdaki gibi olur:

$$100\left(\frac{13{,}006}{10{,}532}\right) = 123.5$$

Çizelge 17.7 bu yolla hesaplanmış bütün endeksleri göstermektedir.

Laspeyres Miktar Endeksi

Belli bir dönem boyunca (üretilen ya da alışverişi yapılan) miktarlarına ilişkin bilgimizin bulunduğu K tane kalemden oluşan bir öbeğimiz olsun. Bir dönem endeksin temeli olarak seçilsin. Bu durumda herhangi bir dönemin **Laspeyres miktar endeksi**, o dönemde alışverişi yapılan miktarların toplam tutarının temel dönem fiyatları geçerliymiş gibi bulunup bunun, temel dönemin toplam tutarının bir yüzdesi olarak belirtilmesidir.

i'inci kalemin temel dönemdeki miktar ve fiyatı q_{0i} ve p_{0i} ile, ilgilenilen dönemdeki miktarı da q_{1i} ile gösterilsin. Bu durumda o dönemin Laspeyres miktar endeksi şöyle olur:

$$100\left(\frac{\sum_{i=1}^{K} q_{1i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{K} q_{0i}p_{0i}}\right)$$

TEMEL DÖNEMİN DEĞİŞMESİ

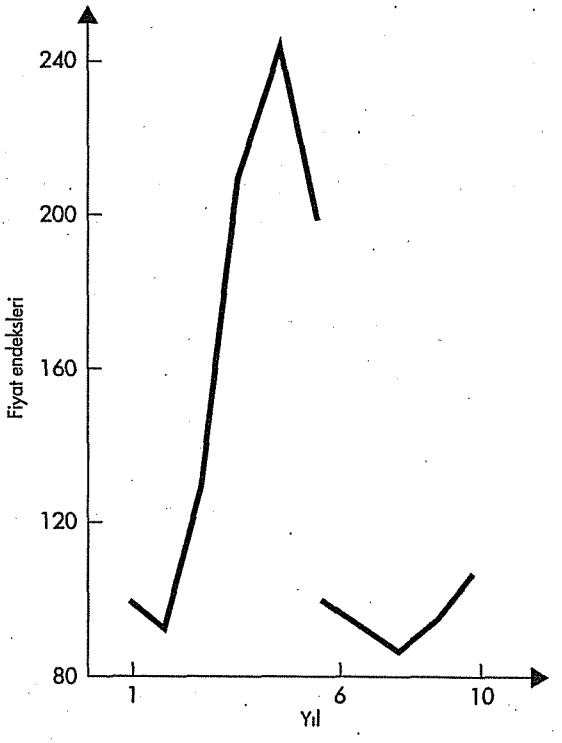
Resmi kurumlarca yayımlanan endeks sayısı serileri zaman zaman temel dönemi yakına alınarak güncelleştirilir. Böyle durumlarda çoğunlukla önceki endeksin yeni temel dönem noktasındaki değeri de verilir. Bir örnek olmak üzere Çizelge 17.8'in 2. ve 3. sütunları buğday, mısır, soya fasulyesi için Laspeyres fiyat endekslerini gösterir. İkinci sütun bu ürünlerin 1-6 yılları arasındaki fiyat endeksini 1. yılı temel alarak vermektedir. Üçüncü sütun ise aynı ürünlerin 6-10 yılları arasındaki Laspeyres fiyat endeksini 6. yılı temel alarak göstermektedir. Bu endeksler Çizim 17.1'de gösterilmiştir. Bu çizimde 6. yıldaki kopukluk çok açıktır.

Çizelge 7.8'in 2. ve 3. sütunlarındaki bilgilerle bütün dönem boyunca fiyatların genel gelişmesi konusunda açık bir fikir edinmek zordur. Bunu yapabilmek için bu iki endeksi aynı temele oturtup bir **eklemli endeks** elde etmek isteriz. Yeni endeksimizde 6. yıl temel yıl olarak saptanmış, o yılın endeksi 100 olarak alınmıştır. 1. yılı temel alan özgün endekste 6. yılın değeri 198.5'ti. Bunu 100'e dönüştürmek için 198.5'e bölüp 100'le çarparız. Benzer biçimde 1. yılı temel alan öteki endeks değerlerinin her biri 198.5'e bölünüp 100'le çarpılarak 6. yılı temel alacak biçimde dönüştürülür. Sözgelimi 5. yılın yeni rakamı aşağıdaki gibi bulunur:

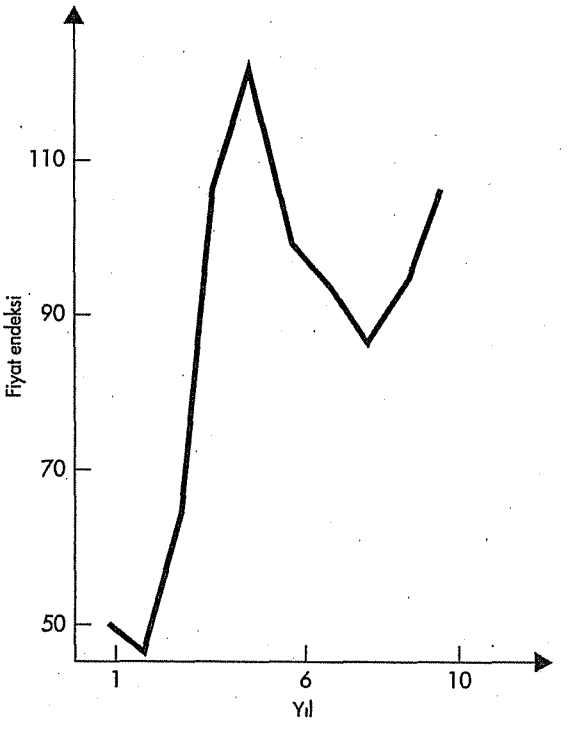
ÇİZELGE 17.8 Buğday, mısır ve soya fasulyesinin (1. ve 6. yılın temel alındığı) Laspeyres bileşik fiyat endeksleri ve (6. yılın temel alındığı) eklemli endeks

	TEMEL YIL		EKLEMLİ ENDEKS
YIL	1	6	(TEMEL YIL 6)
1	100.0		50.4
2	92.2		46.4
3	131.2		66.1
4	212.0		106.8
5	243.0		122.4
6	198.5	100.0	100.0
7		94.0	94.0
8		86.7	86.7
9		94.9	94.9
10		107.0	107.0

ÇİZİM 17.1 Buğday, mısır ve soya fasulyesinin 1-6 yılları (yıl 1 = 100) ve 6-10 yılları (yıl 6 = 100) için Laspeyres bileşik fiyat endekslerinin zaman çizimi



ÇİZİM 17.2 Buğday, mısır, soya fasulyesinin Laspeyres bileşik eklemli fiyat endeksi (yıl 6 = 100)



$$243.0\left(\frac{100}{198.5}\right) = 122.4$$

Bu yolla bulunan eklemli endeks Çizelge 17.8'in son sütununda gösterilmiş, Çizim 17.2'de yer almıştır. Bu çizim artık bu malların fiyat değişimlerinin bütün dönemdeki genel gelişmesini gösterebilmektedir.

ALIŞTIRMALAR

1. Üniversiteler, enerji, kitap, laboratuvar malzemeleri, kırtasiye, işgücü maliyetleri gibi çeşitli maliyetlere katlanırlar. Sizden üniversitenin karşı karşıya olduğu fiyat düzeyinin son on yıl boyunca nasıl değiştiğini göstermeniz istenmiş olsun. Ne gibi güçlüklerle karşılaşmayı beklersiniz, işi nasıl yürütürsünüz?
2. Aşağıdaki çizelge New York Bankası pay senedi fiyatının oniki hafta boyunca nasıl değiştiğini göstermektedir.

HAFTA	FİYAT	HAFTA	FİYAT	HAFTA	FİYAT
1	35	5	35	9	34⅝
2	35⅞	6	34⅞	10	35⅜
3	34⅝	7	35	11	38⅝
4	34⅜	8	34⅝	12	37⅛

(a) 1. haftayı temel alarak bir fiyat endeksi oluşturun.
(b) 4. haftayı temel alarak bir fiyat endeksi oluşturun.

3. Bir lokanta üç "özel yemek" sunmaktadır: biftek, deniz ürünleri ve piliç. Bunların geçen yılın oniki ayındaki ortalama fiyatları (dolar cinsinden) aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

AY	BİFTEK	DENİZ ÜRÜNLERİ	PİLİÇ
Ocak	7.12	6.45	5.39
Şubat	7.41	6.40	5.21
Mart	7.45	6.25	5.25
Nisan	7.70	6.60	5.40
Mayıs	7.72	6.70	5.45
Haziran	7.75	6.85	5.60
Temmuz	8.10	6.90	5.54
Ağustos	8.15	6.84	5.70
Eylül	8.20	6.96	5.72
Ekim	8.30	7.10	5.69
Kasım	8.45	7.10	5.85
Aralık	8.65	7.14	6.21

Aşağıdaki çizelge bu özel yemeklerden her ayda kaç sipariş verildiğini göstermektedir. Ocak ayını temel alın.

AY	BİFTEK	DENİZ ÜRÜNLERİ	PİLİÇ
Ocak	123	169	243
Şubat	110	160	251
Mart	115	181	265
Nisan	101	182	231
Mayıs	118	140	263
Haziran	100	128	237
Temmuz	92	129	221
Ağustos	87	130	204
Eylül	123	164	293
Ekim	131	169	301
Kasım	136	176	327
Aralık	149	193	351

(a) Tartısız bileşik fiyat endeksini bulun.
(b) Laspeyres fiyat endeksini bulun.
(c) Laspeyres miktar endeksini bulun.

4. Aşağıdaki çizelge küçük bir şirketteki üç tür çalışanın altı yıl boyunca saat ücretlerini göstermektedir.

YIL	İŞÇİ	MEMUR	ŞEF
1	10.60	8.40	16.40
2	11.10	8.70	17.50
3	11.80	9.10	17.90
4	11.90	9.20	1880
5	12.30	9.60	19.00
6	12.50	9.70	19.30

1. yılı temel alın. O yılda yetmişiki işçi, yirmiüç memur ve on şef görev yapmaktaydı.
   (a) Tartısız saat ücreti endeksini bulun.
   (b) Laspeyres saat ücreti endeksini bulun.

5. Aşağıdaki çizelge bir mal öbeğinin altı yıllık fiyat endeksini göstermektedir. 4. yılı temel alıp eklemli endeksi elde edin.

YIL	1	2	3	4	5	6
TEMEL YIL 1	100	108.4	114.3	120.2		
TEMEL YIL 2				100	103.5	107.8

6. Bir ürün öbeği için bir fiyat endeksi —diyelim enerji fiyatı endeksi—geliştirmenin niye yararlı olduğunu açıklayın. *Tartılı* bir fiyat endeksinin üstünlüğü nedir?

17.3 RASSALLIK İÇİN KATSAYISAL OLMAYAN BİR SINAMA

Çoğunlukla rassal olmayan bir örüntü sergileyen zaman serisi verilerine uygulanan tekniklere geçmeden önce bir zaman serisinin rassallığının sınamasını ele alacağız. Bu tür çeşitli sınamalar arasından **dizilim sınamasının** uygulanması özellikle kolaydır. Bu, katsayısal olmayan —yani gözlemlerin çekildiği dağılıma ilişkin bir varsayım yapmayan— bir sınamadır.

Bu sınamayı açıklamak için New York Borsası'nda işlem gören pay senetleri hacminin onaltı günlük gözlemleri serisine bir göz atalım. Veriler Çizelge 17.9'da verilmiş, Çizim 17.3'te de gösterilmiştir. Bu çizime ortancayı gösteren bir doğru eklenmiştir. Çift sayıda gözlem için ortanca, gözlemler küçükten büyüğe doğru sıralamnca ortadaki çiftin ortalamasıdır. Burada şöyle bulunur:

$$\text{Ortanca} = \frac{107+108}{2} = 107.5$$

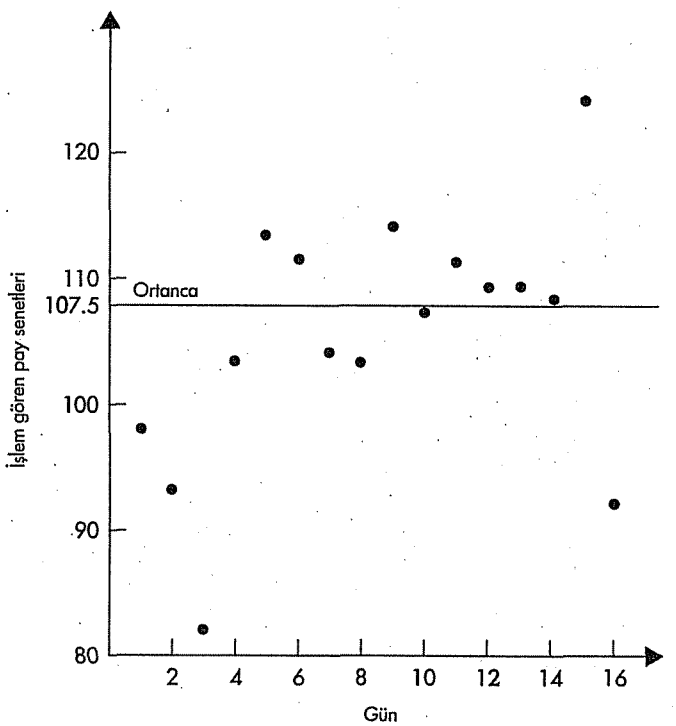
ÇİZELGE 17.9 Pay senetleri işlem hacmi endeksi

GÜN	İŞLEM HACMİ	GÜN	İŞLEM HACMİ	GÜN	İŞLEM HACMİ	GÜN	İŞLEM HACMİ
1	98	5	113	9	114	13	109
2	93	6	111	10	107	14	108
3	82	7	104	11	111	15	128
4	103	8	103	12	109	16	92

Bu gözlemler serisi rassal olsaydı, bir günlük işlem hacmi başka herhangi bir gününkinden bağımsız olurdu. Bu durumda da yüksek bir işlem hacmini yine yüksek bir işlem hacminin izlemesi olasılığı, düşük bir işlem hacminin izlemesi olasılığından daha fazla olmazdı. Rassallığın bulunmayışına kanıt aramrken, bir yol gözlemlerin ortancanın altında mı üstünde mi olduklarına bakmaktır. Ortancanın üstündeki bir değeri +, altındaki bir değeri – ile gösterirsek pay senetlerinin işlem hacmi verileri için şu sıralama ortaya çıkar:

– – – – + + – – + – + + + + + –

Çizim 17.3 Pay senetlerinin işlem hacmi



Bu sıralamada dört tane – içeren bir *dizilim*, onu izleyen iki + içeren bir dizilim, iki – içeren bir dizilim, bir + içeren bir dizilim, bir – içeren bir dizilim, beş + içeren bir dizilim ve bir – içeren bir dizilim bulunmaktadır. Dolayısıyla toplam $R = 7$ dizilim vardır.

Burada, kuşku duyulabileceği gibi, zaman içinde ardışık gözlemler arasında aynı yönlü bir ilişki varsa, göreli olarak az sayıda dizilim olmasını bekleriz. Örneğimizde, seri bütünüyle rassal ise, yedi ya da daha az dizilimle karşılaşma olasılığının ne kadar olduğu sorusunu sorarız. Bu da, rassallık vardır diyen sıfır önsavı doğruyken dizilim sayılarının dağılımını bilmeyi gerektirir. Birikimli dağılım fonksiyonu Ek Çizelge 11'de gösterilmiştir. Bu çizelgeden, sıfır önsavı doğruyken $n = 16$ gözlemli bir seride yedi ya da daha az dizilim bulunması olasılığının 0.214 olduğunu görürüz. Dolayısıyla rassallık vardır diyen sıfır önsavı, ardışık gözlemler arasında aynı yönlü ilişki vardır diyen karşı önsav lehine ancak %21.4 anlamlılık düzeyinde reddedilebilir. Bu verilerde sıfır önsavına karşı kanıt çok güçlü değildir. Şurası vurgulanmalıdır ki rassallık önsavının *lehine* güçlü bir kanıt bulamadık, ama ona karşı güçlü bir kanıt bulmayı da başaramadık. Bu kadar küçük örneklemlere dayanan rassallık sınamalarının gücü de bir hayli düşüktür.

Dizilim Sınamaları

n gözlemden oluşan bir zaman serimiz olsun. (Basit olsun diye n'nin tek olduğu varsayılacaktır.) Ortancanın üstündeki değerlere +, altındakilere – vererek bu verilerden bir işaret sıralaması oluşturulur. Bu sıralamadaki dizilim sayısı R ile gösterilsin. Sınanacak sıfır önsavı bu zaman serisinin rassal olduğunu söylemektedir. Ek Çizelge 11, bu sıfır önsavının, zaman içinde ardışık gözlemler arasında aynı yönlü ilişki vardır diyen karşı önsav lehine reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini verir.

Karşı önsav rassal olmamanın iki yanlı bir önsavıysa, anlamlılık düzeyinin —0.5'ten küçükse— iki katı alınır. Tersine, çizelgeden okunan anlamlılık düzeyi α, 0.5'ten büyükse, iki yanlı karşı önsav için sınamaya uygun anlamlılık düzeyi $2(1 - \alpha)$ olur.

Yirmiden çok gözlemli zaman serilerinde sıfır önsavı doğruyken dizilim sayısının dağılımı normal dağılıma yakınsar. Gerçekten de, sıfır önsavı doğruyken,

$$Z = \frac{R - \frac{n}{2} - 1}{\sqrt{\frac{n^2 - 2n}{4(n-1)}}}$$

rassal değişkeninin normal dağılıma uyduğu gösterilebilir. O zaman bu bulgu, eldeki gözlem sayısı büyükken rassallık sınamasına dayanak olarak kullanılabilir. İzlenecek yol aşağıdaki çerçeve içinde açıklanmıştır.

Dizilim Sınaması: Büyük Örneklemler

n gözlemden oluşan bir zaman serimiz olsun, burada n çift sayı olup epeyce büyüktür (20'den büyük). Dizilim sayısı R'yi önceki gibi tanımlayalım.

H_0: Seri rassaldır

diyen sıfır önsavını sınamak istiyoruz. Aşağıdaki sınamaların anlamlılık düzeyi α olur:

(i) Karşı önsav ardışık gözlemler arasında aynı yönlü ilişki var diyorsa karar kuralı şudur:

$$\frac{R-\frac{n}{2}-1}{\sqrt{\frac{n^2-2n}{4(n-1)}}} < -z_\alpha \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin.}$$

(ii) Rassallık olmadığını söyleyen karşı önsav iki yanlı ise karar kuralı şudur:

$$\frac{R-\frac{n}{2}-1}{\sqrt{\frac{n^2-2n}{4(n-1)}}} < -z_{\alpha/2} \quad \text{ya da} \quad \frac{R-\frac{n}{2}-1}{\sqrt{\frac{n^2-2n}{4(n-1)}}} > z_{\alpha/2} \text{ ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

ÖRNEK 17.1

Lydia E. Pinkham'ın artık klasikleşmiş, sık sık çözümlenen otuz yıllık (dolar cinsinden) satış gözleminden oluşan verileri alalım.[1]

Veriler ilgili + ve – işaretlerle birlikte çizelgede gösterilmiştir. Ortanca şöyledir:

$$\frac{1{,}767+1{,}770}{2}=1{,}768.5$$

Çizelgeden dizilim sayısının $R=8$ olduğunu görürüz. $n=30$ gözlemimiz olduğuna göre sınama istatistiğinin değeri şudur:

[1] G. M. Erickson, "Using ridge regression to estimate directly lagged effects in marketing," *Journal of the American Statistical Association*, 76 (1981), 766-73; K. S. Palda, *The Measurement of Cumulative Advertising Effects* (Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1964).

YIL	SATIŞLAR	ORTANCAYA GÖRE KONUM	YIL	SATIŞLAR	ORTANCAYA GÖRE KONUM
1931	1,806	+	1946	2,177	+
1932	1,644	–	1947	1,920	+
1933	1,814	+	1948	1,910	+
1934	1,770	+	1949	1,984	+
1935	1,518	–	1950	1,787	+
1936	1,103	–	1951	1,689	–
1937	1,266	–	1952	1,866	+
1938	1,473	–	1953	1,896	+
1939	1,423	–	1954	1,684	–
1940	1,767	–	1955	1,633	–
1941	2,161	+	1956	1,657	–
1942	2,336	+	1957	1,569	–
1943	2,602	+	1958	1,390	–
1944	2,518	+	1959	1,387	–
1945	2,637	+	1960	1,289	–

$$\frac{R-\frac{n}{2}-1}{\sqrt{\frac{n^2-2n}{4(n-1)}}}=\frac{8-15-1}{\sqrt{\frac{900-60}{116}}}=-2.97$$

Ek Çizelge 3'ten $z\alpha = 2.97$'ye karşılık gelen α değerinin 0.0015 olduğunu görürüz. Demek ki rassallık vardır diyen sıfır önsavı, ardışık gözlemler arasında aynı yönlü ilişki vardır diyen karşı önsav lehine %0.15'in üstündeki her anlamlılık düzeyinde reddedilebilir. Bu karşı önsav lehine kanıtlar karşı konulmaz boyuttadır. Bu zaman serisinin rassal olması neredeyse olanaksızmış gibi görünmektedir.

17.4 BİR ZAMAN SERİSİNİN BİLEŞENLERİ

Altbölüm 17.4'ten 17.6'ya kadar, ilgilenilen bir büyüklüğün zaman içindeki gelişmesini ölçmenin bazı betimsel yollarını ele alacağız. İlgilenilen seriyi X_1, $X_2, \ldots, X_n$ ile göstereceğiz, böylece serinin t anında gözlenen değeri X_t our.

Gerçek yaşamda gözlenen bir serinin davranışına ilişkin olarak akıl yürütmenin bir yolu o serinin çeşitli bileşenlerden oluştuğunu düşünmektir. Geleneksel olarak dört olanaklı bileşen ele alınır, bunların bazılarının ya da hepsinin belli bir seride bulunduğu varsayılır. Bu bileşenler şunlardır:

1. Genel eğilim (trend) bileşeni
2. Mevsim bileşeni
3. Çevrimsel bileşen
4. Düzensiz bileşen

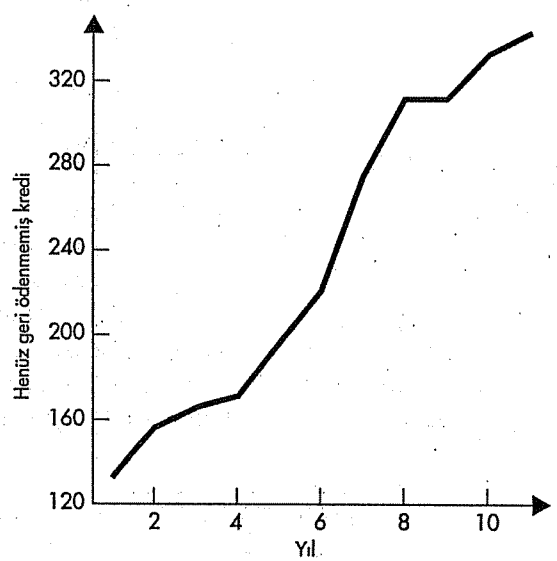
ÇİZELGE 17.10 Henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri endeksi

YIL	KREDİ	YIL	KREDİ	YIL	KREDİ	YIL	KREDİ
1	133	4	171	7	274	10	335
2	155	5	194	8	312	11	343
3	165	6	231	9	313		

Pek çok zaman serisi uzun sürede oldukça kararlı bir yükselme ya da düşme eğilimi sergiler, bu örüntüye **genel eğilim** (ya da **trend**) denir. Sözgelimi genel eğilimden kısa dönemli sapmalarına karşılık gayrisafi ulusal ürün gibi ulusal zenginlik ölçüleri yıllar boyunca kararlı bir biçimde büyümüştür. Bu tür eğilimler zaman içinde genellikle sabit kalmaz, ama tersine dönebilirler; ancak evrimsel örüntü genellikle bir hayli yavaştır.

Kararlı ama hiçbir biçimde sabit olmayan bir artma eğilimi sergileyen serilere bir örnek olarak Çizelge 17.10'daki veriler sunulmakta, bunlar Çizim 17.4'te de gösterilmektedir. Bu seri, henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri endeksidir.

Çizim 17.4 Henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri



ÇİZELGE 17.11 Bir şirketin pay senedi başına kazançları

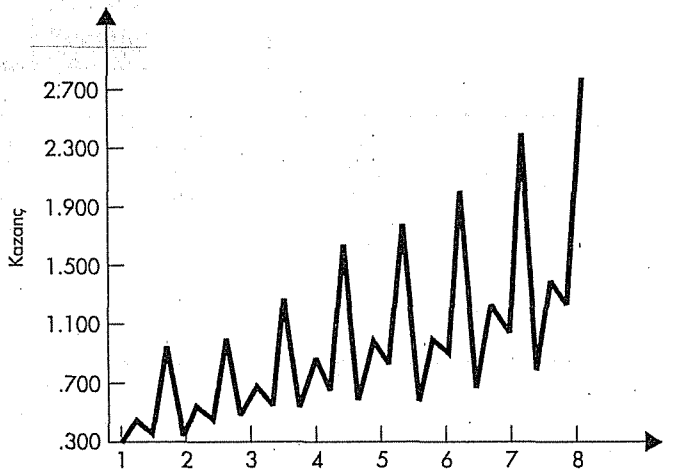
YIL	ÜÇER AY			
	1	2	3	4
1	0.300	0.460	0.345	0.910
2	0.330	0.545	0.440	1.040
3	0.495	0.680	0.545	1.285
4	0.550	0.870	0.660	1.580
5	0.590	0.990	0.830	1.730
6	0.610	1.050	0.920	2.040
7	0.700	1.230	1.060	2.320
8	0.820	1.410	1.250	2.730

Çizelgeden ve daha çok çizimden açıkça görüldüğü gibi seri yükselme eğilimi göstermektedir, bu eğilim bazı yıllarda ötekilere göre daha diktir. Böylesine basit bir çizim bir zaman serisinin başlıca özelliklerini ortaya sermede son derece yararlıdır. Daha ileri çözümlemeler için daha karmaşık teknikler gerekirse de, bir zaman çizimi bir zaman serisinin çözümlenmesinde hemen her zaman akla yakın bir ilk adımdır.

Çoğu işletmecilik ya da iktisat zaman serisi üçer aylık ya da aylık gözlemlerden oluşur. Bu tür seriler çoğu zaman mevsim olgusu —yıldan yıla yinelenen örüntü— sergiler. Epeyi açık bir örnek olarak, birçok ürünün perakende satışı Aralık ayında yılbaşı alışverişi nedeniyle yüksek olma eğilimi gösterir. İnşaat faaliyeti, Ortabatı ABD'de elverişsiz hava koşulları nedeniyle, kış mevsiminde genellikle düşük olur. Bir zaman serisi çizimi yapıldığında bu mevsimlik davranış hemen göze çarpar.

Çizelge 17.11 ile Çizim 17.5, bir şirketin sekiz yıl boyunca pay senedi başına kazancını göstermektedir. Bu kazanç rakamları üçer aylık olup mevsimlik davranış belirtileri gösterdikleri çizelgeden anlaşılmaktadır. Dördüncü üç ayın rakamları görece yüksek olma eğilimindeyken ilk üç ayınkiler bir hayli düşüktür.

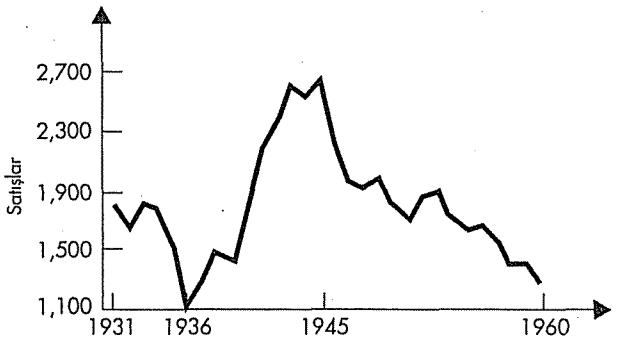
Her yıl açık bir örüntünün gözlendiği Çizim 17.5'te mevsimlik davranış hemen görülebilir. İkinci üçaydaki kazançlar bir önceki ve bir sonraki üçaylıklardan biraz yüksekken, dördüncü üçayınkiler çok daha yüksektir. Bu çizim zaman serisinin bir başka özelliğini daha açığa çıkarmaktadır. Açıkça görülen mevsimselliğin yanısıra, pay senedi başına kazançlarda verilerin yayıldığı dönem boyunca bir yükseliş de göze çarpmaktadır. Mevsimsellik olgusuna nasıl yaklaşılacağı amaca bağlıdır. Stok denetimi amacıyla yapılan düzenli satış kestirimleri gibi kimi uygulamalarda, gelecek ayların her birinde ortaya çıkabilecek sonuçların elden geldiğince iyi bir değerlendirmesinin yapılması önemlidir. Bu durumda, ortaya çıkarılmış ve gelecekte de gerçekleşeceği rahatlıkla beklenebilen bir mevsimlik örüntü kestirim yapılmasında önemli bir öğe sağlamış olacaktır.



ÇİZİM 17.5 Bir şirketin üçer aylık pay senedi başına kazançları

Başka bazı amaçlar için mevsimsellik başa bela olabilir. Çoğu uygulamada çözümlemeci, bir zaman serisinde mevsimlik etmenlerce bozulmamış uzun dönemli hareketleri değerlendirmek ister. Sözgelimi Çizelge 17.11'deki şirketin en son dördüncü üçaya ilişkin kazanç rakamını henüz öğrendiğimizi düşünelim. Bunun bir önceki üçaydan bir hayli yüksek olabileceğini biliyoruz. Şimdi bilmek istediğimiz, kazançlardaki bu artışın ne kadarının yalnızca mevsim etkisinden kaynaklandığı, ne kadarının genel büyüme eğiliminden doğduğudur. Başka bir deyişle, mevsim etkisinden arındırılmış bir zaman serisi üretmek istiyoruz. Böyle serilere **mevsime göre düzeltilmiş** seri denir. Altbölüm 17.6'da mevsime göre düzeltme konusunda biraz daha bir şeyler söyleyeceğiz.

Bir zaman serisindeki mevsimsel dalgalanma düzenli bir salınım davranışı kalıbıdır. Buna ek olarak çoğu işletmecilik ve iktisat zaman serileri mevsimlik davranışla ilgisi olmayan salınımlı ya da **çevrimsel** örüntüler sergiler. Sözgelimi bu örüntüler genel olarak ekonomideki iş yaşamı dalgalanmalarının yansıması olabilir. Bunların ille de düzenli olması gerekmez, ama yukarı ve aşağı doğru hayli düzgün örüntüler izledikleri görülür. Bunu açıklamak için Çizelge 17.11'de verilen Lydia E. Pinkham satış verilerini Çizim 17.6'da gösteriyoruz. Bu çizimden 1936'da satışların dibe vurduğunu, daha sonra 1940'ların ortalarında doruğa çıkacak biçimde arttığını, bundan sonra da epeyce kararlı bir biçimde düştüğünü görüyoruz. Bu türden çevrimsel dalgalanma işletmecilik zaman serilerinde yaygın olarak görülür ve geçmişteki davranışı böyle çevrimsel hareketlerle açıklamanın elverişli olduğu kuşkusuzdur. Ancak geçmişteki bu tür dalgalanmaların, gelecekteki doruk ve dip noktalarını güvenli olarak kestirmeye yetecek denli düzenli olduklarını söylemek istemiyoruz. Aslında eldeki kanıtlar durumun böyle olmadığını göstermektedir.



ÇİZİM 17.6 Lydia E. Pinkham'ın satış verileri

Buraya kadar bir zaman serisindeki değişkenliğin üç kaynağından söz ettik. Bir serinin bileşenleri yalnızca genel eğilim, mevsimsellik ve çevrimsellik olsaydı o serinin zaman çiziminin çok düzgün olmasını ve geleceği kestirmek üzere ileriye doğru kolayca uzatılabilmesini beklerdik. Ama bu altbölümdeki örneklerin de gösterdiği gibi gerçek veriler böyle davranmamaktadır. Şimdiye kadar gördüğümüz bileşenlere ek olarak, herhangi bir gerçek serinin davranışı üzerinde etki yapan çok çeşitli etmenlerin doğurduğu ve dalgalanmalarının geçmiş deneyimlere bakılarak kestirilmesinin güç göründüğü bir de **düzensiz** öğe vardır. Bu bileşeni, bir regresyon modelindeki hata terimi gibi düşünebiliriz. Bunun varlığı Çizim 17.6'daki satış verilerinde açıkça bellidir. Bu veri noktalarının çok yakınından geçen ve en düşük değeri 1936'da, en yüksek değeri 1940'ların ortalarında olan düzgün bir eğri çizebiliriz. Ancak gerçek değerler, açıkça görülebilen bir düzenden uzak biçimde bu eğriden sapmalar gösterir.

Bir zaman serisinin kavramsal olarak genel eğilim, mevsim, çevrim bileşenleriyle düzensiz bileşene ayrıştırılması bize bu serinin davranışını açıklamada yararlı bir sözcükler dizini verir. Çoğu zaman bu sözel betimlemenin ötesine geçip daha biçimsel bir model terimleriyle düşünmek işe yarar. Bir serinin t anındaki değerini X_t ile gösterelim. Bu durumda bu seriyi, **toplama modeli** aracılığıyla bileşenlerinin toplamı olarak ele alabiliriz.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + I_t \qquad (17.4.1)$$

Burada

T_t = Genel eğilim (trend) bileşeni
S_t = Mevsim bileşeni
C_t = Çevrim bileşeni
I_t = Düzensiz bileşendir.

Almaşık olarak, bazı durumlarda bir seriyi **çarpma modeli** aracılığıyla bileşenlerinin çarpımı olarak düşünmek daha uygun olabilir.

$$X_t = T_t S_t C_t I_t \qquad (17.4.2)$$

Aslında dikkatimizi yalnızca bu iki modelle sınırlamamız gerekmez. Bazı koşullarda bazı etmenleri toplamalı, bazılarını çarpmalı olarak ele almak daha elverişli olabilir.

Zaman serisi konusundaki ilk çalışmaların çoğu, tekil bileşenlerin seriden ayrıştırılması üzerinde yoğunlaştı, böylelikle herhangi bir anda bir gözlem genel eğilimin, mevsimin, çevrimin ve düzensiz bir kalıntı öğesinin bileşimi olarak gösterilebiliyordu. Bu ayrıştırma çoğu zaman, bundan sonraki iki altbölümde inceleyeceğimiz *hareketli ortalamalar* yoluyla gerçekleştiriliyordu. Bu yaklaşım son zamanlarda daha çağcıl yaklaşımlarla aşıldı. Ancak buna aykırı bir durum, mevsim bileşenenin seriden ayrıştırılmasını gerektiren mevsime göre düzeltme sorunudur. Altbölüm 17.8'de bir zaman serisinin bileşenlerini tahmin etme sürecini ele alacak, bunun kestirim amacıyla nasıl kullanıldığını göreceğiz.

Zaman serilerine daha çağcıl yaklaşım, bir zaman serisinin davranışını açıklayacak, çeşitli bileşenlerin açıkça ya da örtük olarak içinde yer aldıkları biçimsel bir model kurmayı gerektirir. Bu model kurulurken seri bileşenleri iki türlü ele alınabilir. Bir olanak bunların zaman içinde *sabit* tutulmaları, böylece sözgelimi genel eğilim bir doğruyla ya da uygun başka bir cebirsel gösterimle temsil edilebilir. Bu yaklaşım fiziksel verilerin çözümlenmesinde çoğu zaman yararlıdır ama, işletmecilik ve iktisat uygulamalarında elverişli olduğu durumlar çok daha azdır. Burada deneyimlere göre, yüzeysel bakıldığında sabit görünen düzenlilikler daha sıkı bir incelemede çok sık yanıltıcı olmaktadır. Bu noktayı açıklamak için Lydia E. Pinkham verilerinin 1936'dan 1943'e kadar olanlarını ele aldığımızı düşünelim. Çizim 17.6'dan bu dönemde kararlı sabit bir artış eğilimi olduğunu görürüz. Ancak bu "genel eğilim" 1943'ten sonraki birkaç yıla uzatılırsa, elde edilecek satış kestirimleri bir hayli yanlış çıkacaktır. Ancak gelecek yılların gösterdiklerine baktıktan sonradır ki sabit bir genel eğilim modelinin ne kadar uygun olduğunu görebiliriz.

İşletmecilik ve iktisat verileri için bir zaman serisinin düzenli bileşenlerinin başka bir yoldan ele alınışı yeğlenir. Bunların bütün dönemlerde sabit olduklarını varsaymak yerine, zaman içinde kararlı olarak *evrildiklerini* düşünmek genellikle daha doğru olur. Böylece sabit eğilimlere, mevsimlik dalgalanmalara kendimizi bağlamamız gerekmez, tersine bu bileşenlerin zaman içinde değişmelerine olanak tanıyabilirz. Bu türden modelleri hareketli ortalamaları incelediktan sonra ele alacağız.

17.5 HAREKETLİ ORTALAMALAR

Kimi zaman serilerinde düzensiz bileşen o denli büyük olabilir ki gerideki düzenliliklerin görülmesini engeller, böylelikle zaman çiziminin görsel bir yorumunu güçleştirir. Böyle durumlarda, düzenlenen çizim bir hayli sert büklümlü görünür, daha açık bir görünüme ulaşmak için onu *düzlemek* isteyebiliriz.

Bu düzleme, zaman içinde herhangi bir noktadaki herhangi bir büyük düzensiz bileşenin etkisinin, o noktadaki gözlemin komşu gözlemlerle ortalamasının alınmasıyla azalacağı düşüncesine dayanan **hareketli ortalamalar** yöntemiyle başarılabilir. Bu türden en basit tekniğe **(2*m* + 1) noktalı ortalanmış basit hareketli ortalama** adı verilir. Buradaki düşünce, her gerçekleşmiş X_t gözleminin yerine onun her iki yanındaki m tane komşusunun ortalamasını geçirmek, yani X_t yerine aşağıdaki terimi koymaktır:

$$X_t^* = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} x_{t+j} = \frac{X_{t-m} + X_{t-m+1} + \cdots + X_t + \cdots + X_{t+m-1} + X_{t+m}}{2m+1} \qquad (17.5.1)$$

Eş. (17.5.1)'in payındaki toplamın ortasındaki değer X_t olduğundan, X_t^* hareketli ortalamasının ortalandığı söylenir.

Sözgelimi m'ye 2 diyelim, böylece 5 noktalı bir hareketli ortalama oluşturulsun. Bu durumda şunu buluruz:

$$X_t^* = \frac{X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + X_{t+2}}{5} \qquad (17.5.2)$$

Eldeki ilk gözlem X_1 olduğuna göre bu yolla bulunabilecek ilk hareketli ortalama

$$X_3^* = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

olur. Bu da kuşkusuz ilk beş gözlemin ortalamasıdır. Demek ki Örnek 17.1'deki Lydia E. Pinkham verilerinde 1933 yılı için şunu buluruz:

$$X_3^* = \frac{1{,}806 + 1{,}644 + 1{,}814 + 1{,}770 + 1{,}518}{5} = 1{,}710.4$$

Benzer biçimde, X_4^* ikinciden altıncıya kadar olan gözlemlerin ortalamasıdır ve bu böyle sürer. Çizelge 17.12 hem ilk, hem düzlenmiş değerleri verir. Dikkat ederseniz, ortalanmış hareketli ortalamalar bu yolla hesaplandığında serinin her

iki ucundan m tane gözlem "kaybederiz". Bu nedenle özgün seri 1931'den 1960'a kadar uzanırken düzlenmiş seri 1933 ile 1958 arasında bulunmuştur.

$(2m+1)$ Noktalı Ortalanmış Basit Hareketli Ortalama

İlgilenilen bir zaman serisinin n gözlemi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. $(2m+1)$ noktalı ortalanmış basit bir hareketli ortalama kullanılarak düzlenmiş bir seri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

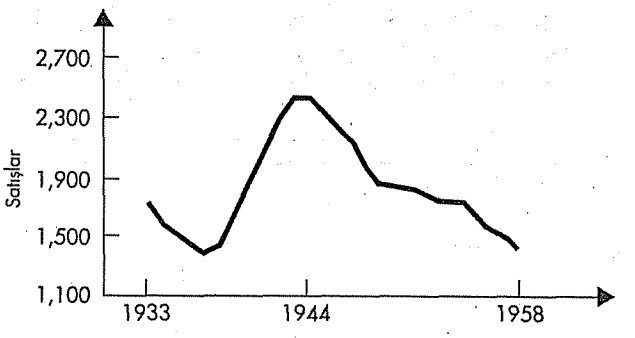
$$X_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{m} X_{t+j} \qquad (t = m+1, m+2, \ldots, n-m)$$

Düzlenmiş seri Çizim 17.7'de gösterilmiştir. Çizim 17.6 ile karşılaştırıldığında hareketli ortalamalar serisinin özgün seriye göre bir hayli düzlendiği görülür. Bu da bizim bu satış rakamlarındaki salınımlı davranışı daha da açık görmemizi sağlar.

Bu altbölümde incelenen hareketli ortalama türü, kullanılabilecek birçok türden yalnızca biridir. Çoğu zaman, asıl ağırlığın orta gözleme verildiği, öbür gözlemlerin ağırlıklarının orta gözlemden uzaklaştıkça azaldığı tartılı bir ortalama kullanılması istenebilir. Sözgelimi 5 nokta kullanılacaksa, (17.5.2)'deki basit ortalama yerine şu tartılı ortalamayı hesaplayabiliriz:

Çizelge 17.12 Lydia E. Pinkham'ın yıllık satışları (X_t) ile 5 noktalı ortalanmış basit hareketli ortalamalar (X_t^*)

t	X_t	X_t^*	t	X_t	X_t^*
1	1,806		16	2,177	2,232.4
2	1,644		17	1,920	2,125.6
3	1,814	1,710.4	18	1,910	1,955.6
4	1,770	1,569.8	19	1,984	1,858.0
5	1,518	1,494.2	20	1,787	1,847.2
6	1,103	1,426.0	21	1,689	1,844.4
7	1,266	1,356.0	22	1,866	1,784.4
8	1,473	1,406.4	23	1,896	1,753.6
9	1,423	1,618.0	24	1,684	1,747.2
10	1,767	1,832.0	25	1,633	1,687.8
11	2,161	2,057.8	26	1,657	1,586.6
12	2,336	2,276.8	27	1,569	1,527.2
13	2,602	2,450.8	28	1,390	1,458.4
14	2,518	2,454.0	29	1,387	
15	2,637	2,370.8	30	1,289	



ÇİZİM 17.7 Lydia E. Pinkham'ın satış verilerinin 5 noktalı ortalanmış basit hareketli ortalamaları

$$X_t^* = \frac{X_{t-2} + 2X_{t-1} + 4X_t + 2X_{t+1} + X_{t+2}}{10}$$

Her bir durumda, hareketli ortalama kullanmanın amacı, bir zaman serisinde geride yatan düzenlilikleri daha açıkça ortaya çıkarmak için, düzensiz bileşeni düzlemektir. Bu teknik en çok belki de Çizim 17.7 gibi gösterimlerin düzenlenmesinde betimleyici amaçlar için yararlıdır.

17.6 HAREKETLİ ORTALAMALAR KULLANILARAK MEVSİM ETKİSİNİN BULUNMASI

Şimdi hareketli ortalamaların önemli bir uygulamasına geçiyoruz. Altbölüm 17.4'te, işletmecilik ve iktisattaki pek çok zaman serisinin güçlü bir mevsim bileşeni taşıdığına dikkat çekmiştik. Bu bileşen bir baş belası olabilir, çözümlemeci de öteki bileşenleri davranışlarını daha net algılayabilmek için bundan kurtulmak isteyebilir.

Bir mevsim bileşeni içeren üçer aylık bir zaman serimiz olsun. İlk terimi özgün serinin ilk dört değerinin ortalaması, ikinci terimi özgün serinin ikinciden beşinciye kadar uzanan değerlerinin ortalaması, vb. olan bir hareketli ortalamalar serisi türetelim. Hareketli ortalamalar serisinin her terimi, her dört tane üçer aydan tek bir tane gözlemden oluşur. Bu yolla oluşturulan serinin güçlü mevsim dalgalanmasından arınmış olması gerekir.

Çizelge 17.11'deki pay senedi başına kazanç verileri için 4 noktalı hareketli ortalamalar serisinin ilk terimi şudur:

$$\frac{0.300 + 0.460 + 0.345 + 0.910}{4} = 0.50375$$

Çizelge 17.13 Bir şirketin pay senedi başına gerçekleşen kazançları (X_t) ile 4 noktalı ortalanmış hareketli ortalamalar (X_t^*)

t	KAZANÇLAR (X_t)	4 NOKTALI HAREKETLİ ORTALAMALAR	4 NOKTALI ORTALANMIŞ HAREKETLİ ORTALAMALAR
1	0.300		
2	0.460		
3	0.345	0.50375	0.5075
4	0.910	0.51125	0.5219
5	0.330	0.53250	0.5444
6	0.545	0.55625	0.5725
7	0.440	0.58875	0.6094
8	1.040	0.63000	0.6469
9	0.495	0.66375	0.6769
10	0.680	0.69000	0.7206
11	0.545	0.75125	0.7581
12	1.285	0.76500	0.7888
13	0.550	0.81250	0.8269
14	0.870	0.84125	0.8781
15	0.660	0.91500	0.9200
16	1.580	0.92500	0.9400
17	0.590	0.95500	0.9763
18	0.990	0.99750	1.0163
19	0.830	1.03500	1.0375
20	1.730	1.04000	1.0475
21	0.610	1.05500	1.0663
22	1.050	1.07750	1.1163
23	0.920	1.15500	1.1663
24	2.040	1.17750	1.2000
25	0.700	1.22250	1.2400
26	1.230	1.25750	1.2925
27	1.060	1.32750	1.3425
28	2.320	1.35750	1.3800
29	0.820	1.40250	1.4263
30	1.410	1.45000	1.5013
31	1.250	1.55250	
32	2.730		

İkinci terim de şöyle bulunur:

$$\frac{0.460 + 0.345 + 0.910 + 0.330}{4} = 0.51125$$

Bütün seri Çizelge 17.13'ün üçüncü sütununda sergilenmiştir.

Hareketli ortalamalar serisi, mevsimsellikten kurtulmasına karşın hâlâ bir güçlük barındırmaktadır. Hareketli ortalama serisi terimlerinin zaman içindeki konumu özgün seri terimlerininkine tamı tamına karşılık gelmez. Sözgelimi ilk terim özgün serideki ilk dört terimin ortalamasıdır. Öyleyse bunu ikinci ve üçüncü terimlerin arasında ortalanmış sayabilir ve şunu yazabiliriz:

$$X^*_{2.5} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

Benzer biçimde, ikinci terim de şöyle yazılabilir:

$$X^*_{3.5} = \frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{4}$$

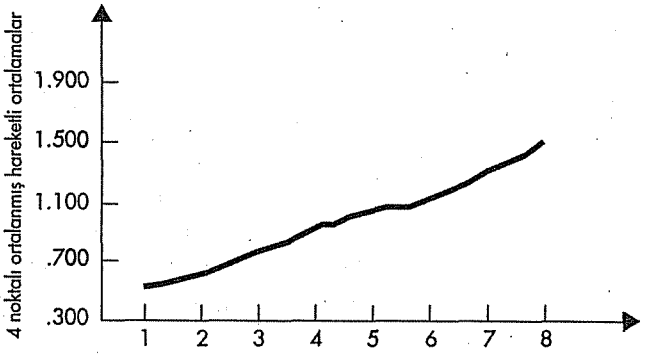
Bu güçlük kolayca aşılabilir. Ardışık çiftlerin ortalamasını hesaplayarak 4 noktalı hareketli ortalama serimizi ortalayabiliriz. Bu da ilk terimi

$$X^*_3 = \frac{X^*_{2.5} + X^*_{3.5}}{2} = \frac{0.50375 + 0.51125}{2} = 0.5075$$

özgün serinin üçüncü terimine karşılık gelen ortalanmış hareketli ortalamayı gösteren bir dizi verir. Ortalanmış hareketli ortalamalar dizisinin öteki terimleri Çizelge 17.13'ün son sütununda gösterilmiştir. Dikkat ederseniz, hareketli ortalamalar bu yolla hesaplanırsa serinin her iki ucundan da ikişer gözlem "kaybederiz".

Ortalanmış hareketli ortalamalar serisinin zaman çizimi Çizim 17.8'dedir. Özgün seriyle karşılaştırma yapılabilmesi için buradaki ölçek Çizim 17.5'tekiyle aynı alınmıştır. Mevsim etkisinin çoğunun giderildiği açıktır. Dahası, mevsimselliği gidermek için hareketli ortalama kullanmanın bir yan yararı olarak düzensiz bileşen de düzletilmiş olmaktadır. Ortaya çıkan görünüm, verilerdeki mevsimsel olmayan düzenliliği daha iyi tartmamızı sağlamaktadır. Çizim 17.8'e yükselen bir genel eğimin egemen olduğu açıktır. Daha yakından bir inceleme, serinin ilk bölümünde kararlı bir kazanç büyümesi, orta bölgede daha yavaş bir büyüme ve dönemin son parçasında ilk parçaya benzer bir örüntü olduğunu ortaya koyar.

ÇİZİM 17.8 Bir şirketin pay senedi başına kazançlarının 4 noktalı ortalanmış hareketli ortalamaları



Hareketli ortalamalar, aşağıdaki çerçeve içinde açıklandığı gibi, herhangi bir dönemlik seride mevsime göre düzeltme yapmaya yardımcı olmak üzere kullanılabilir.

Mevsime Göre Düzeltme Yapmak İçin Bir Basit Hareketli Ortalama Süreci

X_t ($t = 1, 2, \ldots, n$), s dönemli mevsimlik bir zaman serisi olsun (üçer aylık veriler için $s = 4$, aylık veriler için $s = 12$). s noktalı ortalanmış hareketli ortalama serisi X_t^*, s'nin (genellikle olduğu gibi) çift olduğu varsayımıyla şu adımlar izlenerek elde edilebilir:

(i) s noktalı hareketli ortalamaları oluşturun:

$$X_{t+0.5}^* = \frac{\sum_{j=(s/2)+1}^{s/2} X_{t+j}}{s} \qquad \left(t = \frac{s}{2}, \frac{s}{2}+1, \ldots, n-\frac{s}{2}\right)$$

(ii) s noktalı ortalanmış hareketli ortalamaları oluşturun:

$$X_t^* = \frac{X_{t-0.5}^* + X_{t+0.5}^*}{2} \qquad \left(t = \frac{s}{2}+1, \frac{s}{2}+2, \ldots, n-\frac{s}{2}\right)$$

s noktalı ortalanmış hareketli ortalamalar serisinin, bir zaman serisinin yapısının içyüzünü betimlemede yararlı bir araç olduğunu görmüş bulunuyoruz. Bu seri mevsimsellikten büyük ölçüde arınmış, düzensiz bileşenin düzlenmesi de yapılmış olduğundan genel eğilimle çevrim etkisinin belirlenmesi için çok elverişlidir. Hareketli ortalamalar serisinin bir başka yararı daha vardır. Uygulamada kullanılan mevsime göre düzeltme süreçlerinin çoğunun temelini oluşturur. Düzeltmenin nasıl yapılacağı, mevsim örüntüsündeki kararlılığın varsayılan derecesi, mevsimselliğin toplama ya da çarpma özelliği gibi çeşitli etmenlere bağlıdır. Çarpma modelinin bir yaklaşımı verilerin logaritmasını almaktır.

Burada, zaman içinde çok güçlü bir mevsim örüntüsü gösterdiği örtük olarak varsayılan bir mevsime göre düzeltme yaklaşımını inceleyeceğiz. Bu yaklaşım **mevsim endeksi yöntemi** diye bilinir. İşin özündeki varsayım şudur: Her yılda verilmiş her ay ya da her üç ay için mevsim etkisi, o gözlemi mevsim etkisinin olmadığı duruma göre sabit bir oranda yükseltir ya da düşürür.

Mevsim endeksi yöntemini açıklamak için şirketin kazanç verileri çözümlemesine dönelim. Mevsime göre düzeltilmiş seri Çizelge 17.14'te hesaplanmıştır. Önce özgün seri X_t, ile 4 noktalı ortalanmış hareketli ortalama serisi X_t^* gösterilmiştir. Bunlar Çizelge 17.13'ten alınmıştır. Mevsim etkisini değerlemenin bir yolu olarak bir sonraki adımda X_t, X_t^*'ın bir yüzdesi olarak göstermiştir. Böylece sözgelimi ilk yılın üçüncü üç ayı için

Çizelge 17.14 Bir şirketin pay senedi başına kazançlarının mevsim endeksi yöntemiyle mevsime göre düzeltilmesi

YIL	ÜÇ AY	X_t	X_t^*	$100\left(\frac{X_t}{X_t^*}\right)$	MEVSİM ENDEKSİ	DÜZELTİLMİŞ SERİ
1	1	0.300			61.06	0.4913
	2	0.460			96.15	0.4784
	3	0.345	0.5075	67.98	72.95	0.4729
	4	0.910	0.5219	174.36	169.84	0.5358
2	1	0.330	0.5444	60.62	61.06	0.5405
	2	0.545	0.5725	95.20	96.15	0.5668
	3	0.440	0.6094	72.20	72.95	0.6032
	4	1.040	0.6469	160.77	169.84	0.6123
3	1	0.495	0.6769	73.13	61.06	0.8107
	2	0.680	0.7206	94.37	96.15	0.7072
	3	0.545	0.7581	71.89	72.95	0.7471
	4	1.285	0.7888	162.91	169.84	0.7566
4	1	0.550	0.8269	66.51	61.06	0.9008
	2	0.870	0.8781	99.08	96.15	0.9048
	3	0.660	0.9200	71.74	72.95	0.9047
	4	1.580	0.9400	168.09	169.84	0.9303
5	1	0.590	0.9763	60.43	61.06	0.9663
	2	0.990	1.0163	97.41	96.15	1.0296
	3	0.830	1.0375	80.00	72.95	1.1378
	4	1.730	1.0475	165.16	169.84	1.0186
6	1	0.610	1.0663	57.21	61.06	0.9990
	2	1.050	1.1163	94.06	96.15	1.0920
	3	0.920	1.1663	78.88	72.95	1.2611
	4	2.040	1.2000	170.00	169.84	1.2011
7	1	0.700	1.2400	56.45	61.06	1.1464
	2	1.230	1.2925	95.16	96.15	1.2793
	3	1.060	1.3425	78.96	72.95	1.4531
	4	2.320	1.3800	168.12	169.84	1.3660
8	1	0.820	1.4263	57.49	61.06	1.3429
	2	1.410	1.5013	93.92	96.15	1.4665
	3	1.250			72.95	1.7135
	4	2.730			169.84	1.6074

Çizelge 17.15 Bir şirketin pay senedi başına kazançları için mevsim endeksi hesaplanması

YIL	ÜÇ AY				
	1	2	3	4	TOPLAMLAR
1			67.98	174.36	
2	60.62	95.20	72.20	160.77	
3	73.13	94.37	71.89	162.91	
4	66.51	99.08	71.74	168.09	
5	60.43	97.41	80.00	165.16	
6	57.21	94.06	78.88	170.00	
7	56.45	95.16	78.96	168.12	
8	57.49	93.92			
Ortanca	60.43	95.16	72.20	168.09	395.88
Mevsim endeksi	61.06	96.15	72.95	169.84	400

$$100\left(\frac{X_3}{X_3^*}\right)=100\left(\frac{0.345}{0.5075}\right)=67.98$$

bulunur. Bu yüzdeler de, mevsim endekslerinin hesaplandığı Çizelge 17.15'e konmuştur. İlk üç aydaki mevsim etkisini değerlendirmek için o üç aya ilişkin yedi yüzde değerin ortancasını buluruz. Bu da büyüklük sırasına dizilmiş değerlerin dördüncüsü olan 60.43'tür. Benzer yolla öbür bütün üçer aylar için X_t'nin X_t^*'ye göre yüzdelerinin ortancalarını buluruz.

Mevsim endekslerini elde etmek için küçük bir düzeltme daha gereklidir. Dört mevsim endeksi ortalamasının %100 olmasını isteriz. Ama Çizelge 17.15'de dört ortanca toplamının 395.88 olduğunu görürüz. İstenen sonuç her bir ortanca (400/395.88) ile çarpılarak bulunabilir. Böylece ilk üç ay için

$$\text{Mevsim endeksi} = 60.43\left(\frac{400}{395.88}\right)=61.06$$

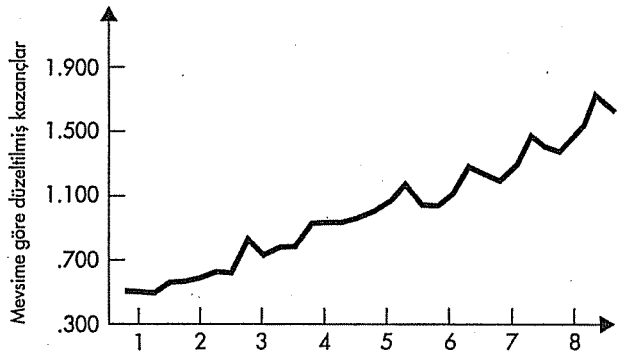
bulunur. Bu sayıyı, mevsim etkisinin, ilk üç ayın kazançlarını, mevsim etkisinin olmadığı duruma göre %61.06 düşürdüğü biçiminde yorumlarız.

Çizelge 17.15'in son satırından alınan mevsim endeksleri Çizelge 17.14'ün beşinci sütununa yerleştirilmiştir. Dikkat ederseniz, her yılın belli bir üç ayı için hep aynı endeks kullanılmaktadır. Son olarak mevsime göre düzeltilmiş serimizi şöyle buluruz:

$$\text{Düzeltilmiş değer} = \text{Özgün değer}\left(\frac{100}{\text{Mevsim endeksi}}\right)$$

Sözgelimi, ilk yılın üçüncü üç ayı için mevsime göre düzeltilmiş değer şudur:

$$0.345\left(\frac{100}{72.95}\right)=0.4729$$



ÇİZİM 17.9 Bir şirketin mevsime göre düzeltilmiş pay senedi başına kazançları

Bu yolla bulunan mevsime göre düzeltilmiş bütün seri Çizelge 17.14'ün son sütununda sergilenmiş ve Çizim 17.9'da gösterilmiştir. Dikkat ederseniz, dönemin sona doğru olan bölümünde bir miktar mevsim etkisi kalmış gibi görünmektedir. Bu da, mevsim örüntüsünün değişmesine olanak veren daha geliştirilmiş bir yaklaşımın gerekliliğini gösterir.

Burada anlatılan mevsime göre düzeltmede mevsim endeksi yöntemi, sorunu çözme yolunda basit bir çabadır. Gayrisafi ulusal ürün ve bileşenleri, istihdam ve işsizlik, fiyatlar ve ücretler gibi pek çok önemli iktisadi zaman serisi güçlü mevsim bileşenleri içerir. Bu büyüklüklere ilişkin veriler kamu kuruluşlarınca genellikle hem mevsime göre düzeltilmiş, hem düzeltilmemiş biçimde yayımlanır. Resmi düzeltme süreçleri burada açıklanan yöntemden daha karmaşık olmakla birlikte çoğunlukla hareketli ortalamalara dayanır. ABD'nin resmi yayınlarında en yaygın olarak kullanılan mevsime göre düzeltme süreci, Census X-11 yöntemidir. Bunun mevsim endeksi yönteminden farkı, mevsim örüntüsünün zaman içinde kararlı evrilmesine izin vermesidir. X-11'in toplama kalıbını kullanan türünün, aylık bir zaman serisinin mevsim bileşenini yaklaşık olarak

$$S_t = \frac{Z_{t-36} + 2Z_{t-24} + 3Z_{t-12} + 3Z_t + 3Z_{t+12} + 2Z_{t+24} + Z_{t+36}}{15}$$

biçiminde tahmin ettiği gösterilebilir. Burada

$$Z_t = X_t - X_t^*$$

olup X_t zaman serisinin t dönemindeki özgün değeri, X_t^* ise buna karşılık gelen 12 noktalı ortalanmış hareketli ortalamadır. Böyle bir süreç izlendiğinde, kuşkusuz, zaman serisinin sonuna doğru olan değerler için özel bir işlem gerekmektedir, çünkü mevsim etkisini gösteren ifadenin kullanacağı zaman serisi değerleri henüz gerçekleşmemiştir. Bunu aşmanın bir yolu, hareketli ortalama serisinin

gelecekteki bilinmeyen değerleri yerine eldeki verilerle yapılan *kestirimleri* koymak olabilir.

ALIŞTIRMALAR

7. Aşağıdaki çizelge peşpeşe 12 ay boyunca doların, ABD'nin ticaret yaptığı ülke paralarına göre değerinin bir endeksini göstermektedir. Bu serinin rassallığını sınamak için dizilim sınamasını uygulayın.

AY	DEĞER	AY	DEĞER	AY	DEĞER
1	97.5	5	103.5	9	98.4
2	98.5	6	103.0	10	99.9
3	101.4	7	99.3	11	99.8
4	102.2	8	96.8	12	101.5

8. Aşağıda verilen çizelge 12 yıllık bir süre boyunca ABD'de imalat sanayii ve ticarette stok-satış oranlarını göstermektedir. Dizilim sınamasını kullanarak bu serinin rassallığını sınayın.

AY	ORAN	AY	ORAN	AY	ORAN
1	1.41	5	1.46	9	1.43
2	1.45	6	1.44	10	1.52
3	1.57	7	1.43	11	1.37
4	1.48	8	1.45	12	1.33

9. Aşağıdaki çizelge 14 yıllık bir süre boyunca bir borsa endeksinin yıllık getirisini gösterir. Dizilim sınamasını uygulayarak rassallığı sınayın.

YIL	GETİRİ (%)	YIL	GETİRİ (%)	YIL	GETİRİ (%)
1	–7.2	6	21.4	11	5.3
2	6.6	7	22.5	12	16.6
3	18.4	8	6.3	13	31.8
4	32.4	9	32.2	14	–3.1
5	–4.9	10	18.8		

10. Aşağıdaki çizelge peşpeşe 14 yıl boyunca altının yıl sonu fiyatını (dolar cinsinden) göstermektedir. Dizilim sınamasını uygulayarak bu serinin rassallığını sınayın.

YIL	FİYAT ($)	YIL	FİYAT ($)	YIL	FİYAT ($)
1	135	6	399	11	405
2	166	7	450	12	486
3	227	8	385	13	410
4	533	9	308	14	369
5	591	10	329		

11. Aşağıdaki çizelge 24 yıllık bir süre boyunca ABD'de bin kişi başına, yapımına başlanan özel konut sayısını göstermektedir.

YIL	KONUT	YIL	KONUT	YIL	KONUT
1	8.5	9	6.5	17	5.4
2	6.9	10	7.5	18	7.1
3	7.1	11	7.2	19	9.1
4	7.8	12	7.0	20	9.1
5	8.5	13	9.9	21	7.8
6	8.0	14	11.3	22	5.7
7	7.6	15	9.7	23	4.7
8	5.9	16	6.3	24	4.6

(a) Büyük örneklemler için dizilim sınamasını kullanıp bu serinin rassallığını sınayın.

(b) Bu serinin bir zaman çizimini düzenleyip burada gördüğünüz bileşenleri yorumlayın.

12. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 28 yıl boyunca pay senedi başına kazancını göstermektedir.

YIL	KAZANÇ	YIL	KAZANÇ	YIL	KAZANÇ
1	50.2	11	20.6	20	22.4
2	33.9	12	21.6	21	12.3
3	20.6	13	27.6	22	20.9
4	25.4	14	36.5	23	42.8
5	32.9	15	49.3	24	86.3
6	31.3	16	45.4	25	73.6
7	18.8	17	35.6	26	47.7
8	14.5	18	30.1	27	56.6
9	17.5	19	25.5	28	53.1
10	23.6				

(a) Büyük örneklemler için dizilim sınamasını kullanıp bu serinin rassallığını sınayın.

(b) Bu serinin bir zaman çizimini düzenleyip burada gördüğünüz bileşenleri yorumlayın.

13. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 6 yıl boyunca üçer aylık satışlarını göstermektedir.

YIL	ÜÇ AY			
	1	2	3	4
1	272	239	158	219
2	228	198	169	238
3	270	246	203	284
4	299	267	218	293
5	307	258	323	296
6	307	271	197	266

(a) Bu serinin zaman çizimini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(b) Seriyi mevsime göre düzeltmek için mevsim endeksi yöntemini kullanın. Mevsime göre düzeltilmiş seriyi çizip özelliklerini tartışın.

14. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 6 yıl boyunca üçer aylık satışlarını göstermektedir.

YIL	ÜÇ AY			
	1	2	3	4
1	271	199	240	255
2	341	246	245	275
3	351	283	353	292
4	401	282	306	291
5	370	242	281	274
6	356	245	304	279

(a) Bu serinin zaman çizimini düzenleyip özelliklerini tartışın.
(b) Seriyi mevsime göre düzeltmek için mevsim endeksi yöntemini kullanın. Mevsime göre düzeltilmiş seriyi çizip özelliklerini tartışın.

15. Alıştırma 10'daki altın fiyatı verileri için 3 noktalı ortalanmış basit bir hareketli ortalama serisi hesaplayın. Düzlenmiş seriyi çizerek ortaya çıkan çizimi tartışın.

16. Alıştırma 11'deki konut yapımı verileri için 5 noktalı ortalanmış basit bir hareketli ortalama serisi hesaplayın. Düzlenmiş seriyi çizerek ortaya çıkan çizimi tartışın.

17. Alıştırma 12'deki şirket kazancı verileri için 7 noktalı ortalanmış basit bir hareketli ortalama serisi hesaplayın. Düzlenmiş serinin zaman çizimine dayanarak düzenli bileşenler için neler söylenebilir?

18. $(2m + 1)$ noktalı ortalanmış basit bir hareketli ortalama şöyle olsun:

$$X_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{m} X_{t+j}$$

Aşağıdaki ifadenin doğruluğunu gösterin:

$$X_{t+1}^* = X_t^* + \frac{X_{t+m+1} - X_{t-m}}{2m+1}$$

Bu bulgu ortalanmış bir hareketli ortalama serisinin etkin hesaplanmasında nasıl kullanılabilir?

19. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 7 yıl boyunca pay senedi başına kazancını göstermektedir.

YIL	ÜÇ AY			
	1	2	3	4
1	0.362	0.370	0.621	0.384
2	0.389	0.389	0.639	0.431
3	0.411	0.448	0.712	0.584
4	0.620	0.620	0.891	0.570
5	0.540	0.690	0.870	0.680
6	0.780	0.440	0.800	0.780
7	0.690	0.400	1.030	0.940

(a) Bu serinin zaman çizimini düzenleyin. Çiziminiz bu kazanç serisinde güçlü bir mevsim bileşeni olduğu izlenimini veriyor mu?

(b) Mevsim endeksi yöntemini kullanarak mevsime göre düzeltilmiş bir seri elde edin. Bu seriyi çizip davranışını yorumlayın.

20. **(a)** Altbölüm 17.6'daki s noktalı ortalanmış hareketli ortalama serisinin aşağıdaki gibi yazılabileceğini gösterin:

$$X_t^* = \frac{X_{t-(s/2)} + 2(X_{t-(s/2)+1} + \cdots + X_{t+(s/2)-1}) + X_{t+(s/2)}}{2s}$$

(b) $$X_{t+1}^* = X_t^* + \frac{X_{t+(s/2)+1} + X_{t+(s/2)} - X_{t-(s/2)+1} - X_{t-(s/2)}}{2}$$

olduğunu gösterin. Aylık zaman serilerinin mevsime göre düzeltilmesinde bu formülün hesaplama üstünlüklerini tartışın.

21. Aşağıdaki çizelge 3 yıllık bir süre boyunca aylık ürün satışlarını göstermektedir. Mevsime göre düzeltilmiş bir seri elde etmek için mevsim endeksi yöntemini kullanın.

AY	YILLAR		
	1	2	3
Ocak	538	636	588
Şubat	620	666	592
Mart	869	853	670
Nisan	849	753	541
Mayıs	947	787	499
Haziran	931	691	511
Temmuz	746	680	542
Ağustos	740	698	487
Eylül	654	593	486
Ekim	874	771	664
Kasım	759	600	530
Aralık	637	554	472

17.7 BASİT ÜSTEL DÜZLEME

Bu bölümün geri kalanında dikkatimizi, bir zaman serisinin gelecek değerlerini kestirmek için geçmişteki ve şimdiki gözlemlerini kullanma olanağına çevireceğiz. Bu sorun söylendiği kadar kolay değildir, doyurucu bir çözüme ulaşmak hüner ister. Çok geniş bir kestirim yöntemleri yelpazesi yaygın olarak kullanılmakta, bunlar arasından yapılacak seçim çözümlemecinin kaynaklarına, amacına ve eldeki verilerin doğasına göre soruna özgü olmaktadır.

Bizim amacımız her durumda gelecekteki bilinmeyen $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ değerlerini kestirmek için eldeki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gözlemlerini kullanmaktır. İşletmecilik yaşamında kestirim, karar vermenin akla dayalı bir temeli olarak yaşamsal önem taşır. Sözgelimi stok denetimi politikasının dayanağı olarak aylık ürün satışları kestirilir. Yatırım kararları alınırken şirketin gelecekteki kazançları kestirilir.

Bu altbölümde, çoğu zaman kendi başına bir değer taşıyan ve Altbölüm 17.8'de içlerinden birini göreceğimiz daha gelişkin kimi yöntemlerin temelini oluşturan basit bir kestirim yöntemini tanıtacağız. **Basit üstel düzleme** diye bilinen bu yöntem, kestirimi yapılacak seri mevsimsel değilse ve tutarlı bir artış ya da azalış eğilimi göstermiyorsa uygun olur.

Genel eğilimin ve mevsim etkisinin yokluğunda amaç zaman serisinin şimdiki *düzeyi*ni tahmin etmektir. Daha sonra bu tahmin gelecekteki bütün değerlerin kestiriminde kullanılır. Öyleyse durumumuz şöyledir: Zaman içinde n anında durup geriye doğru $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$ gözlem serisine bakıyor ve serinin şimdiki düzeyine ilişkin bir değerlendirme oluşturmaya çalışıyoruz. Bir başlangıç olmak üzere iki uç olanağı alalım. Birincisi, yalnızca en son yapılan X_n gözlemini kullanabiliriz, böylece gelecekteki bütün değerlerin kestirimleri bu en son gözlem olur. Kimi önemli iş yaşamı serilerinde, özellikle spekülatif pazar fiyatlarında, kestirimler bütünüyle zaman serisinin geçmişine dayandırılacaksa, elden gelenin en iyisi budur. Ama serinin hatırı sayılır boyutta düzensiz bileşen içerdiği pek çok uygulamada, kendimizi serinin ciddi rassal dalgalanmalara açık tek bir değeriyle sınırlamak biraz acelecilik olur. Bunu yapmak yerine, serinin daha önceki gözlemlerini de hesaba katmak isteriz.

Öbür uçta, şimdiki düzeyin bir tahmini olarak bütün gözlemlerin basit ortalamasını kullanabiliriz. Biraz düşünürsek bunun da saçma olduğunu görürüz çünkü ortalama alınırken her değer eşit işlem görmektedir. Öyleyse, sözgelimi, gelecekteki ürün satışları bu yolla kestirilirse, uzun yıllar önceki satışlara içinde bulunulan dönemin satışları kadar ağırlık verilmiş olur. Uzak geçmişteki deneyimin gelecekteki davranış üzerindeki etkisi, en son rakamların etkisinden elbette daha azdır.

Basit üstel düzleme, şimdiki ve geçmişteki değerlerin *tartılı ortalama*sına dayanan bir kestirim yaparak bu iki uç arasında bir uzlaşma sağlar. Bu ortalama oluşturulurken en büyük ağırlık en son gözleme, biraz daha az ağırlık hemen

önceki gözleme, daha azı daha önceki gözleme, vb. verilir. Bunu başarmanın bir yolu şimdiki n anındaki düzeyi $\overline{X}_n$ ile tahmin etmektir:

$$\overline{X}_n = (1-\alpha)X_n + \alpha(1-\alpha)X_{n-1} + \alpha^2(1-\alpha)X_{n-2} + \cdots \qquad (17.7.1)$$

Burada α, 0 ile 1 arasında bir sayıdır. Sözgelimi α, 0.5 olarak saptansa, serinin gelecek değerlerinin tahmini şöyle yapılır:

$$\overline{X}_n = 0.5X_n + 0.25\,X_{n-1} + 0.125\,X_{n-2} + \cdots$$

Böylece tahminler hesaplanırken şimdiki ve geçmiş gözlemlere ağırlıkları gittikçe azalan bir tartılı ortalama uygulanır.

Serinin herhangi bir t dönemindeki düzeyi de, (17.7.1)'e benzetilerek,

$$\overline{X}_t = (1-\alpha)X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha^2(1-\alpha)X_{t-2} + \cdots \qquad (17.7.2)$$

ile tahmin edilir. Benzer biçimde bir önceki $(t-1)$ dönemindeki düzey de şöyle tahmin edilir:

$$\overline{X}_{t-1} = (1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)X_{t-2} + \alpha^2(1-\alpha)X_{t-3} + \cdots \qquad (17.7.3)$$

Eş. (17.7.3)'ün iki tarafını α ile çarparak şunu buluruz:

$$\alpha\overline{X}_{t-1} = \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha^2(1-\alpha)X_{t-2} + \cdots \qquad (17.7.4)$$

(17.7.4)'ü (17.7.2)'den çıkararak şunu elde ederiz:

$$\overline{X}_t - \alpha\overline{X}_{t-1} = (1-\alpha)X_t$$

ya da

$$\overline{X}_t = \alpha\overline{X}_{t-1} + (1-\alpha)X_t \qquad (0 < \alpha < 1) \qquad (17.7.5)$$

(17.7.5) eşitliği, düzey tahminleri için uygun bir geri dönmeli hesaplama yolu sağlar. Buna göre t anındaki $\overline{X}_t$ düzeyi, bir önceki dönemin $\overline{X}_{t-1}$ ile yeni gözlem X_t'nin tartılı bir ortalamasıdır. Her birine verilecek ağırlık, kimi zaman **düzleme sabiti** denilen α'nın seçimine bağlıdır.

Hesaplamalara başlamak için

$$\overline{X}_1 = X_1$$

seçelim ve (17.7.5) formülünü sırasıyla $t = 2, 3, \ldots, n$ için hesaplayalım. Bir örnek vermek üzere bu yaklaşımı Lydia E. Pinkham'ın Örnek 17.1'deki satış verilerine uygulayalım. İşe şu eşitliği yazarak başlayalım:

$$\overline{X}_1 = X_1 = 1{,}806$$

Düzey tahminlerimizi düzleme sabitini

$$\alpha = 0.4$$

seçimimize dayandıralım. Böylece Eş. (17.75) şöyle olur:

$$\overline{X}_t = 0.4\overline{X}_{t-1} + 0.6X_t$$

Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\overline{X}_2 &= 0.4\overline{X}_1 + 0.6X_2 \\ &= (0.4)(1{,}806) + (0.6)(1{,}644) = 1{,}708.8\end{aligned}$$

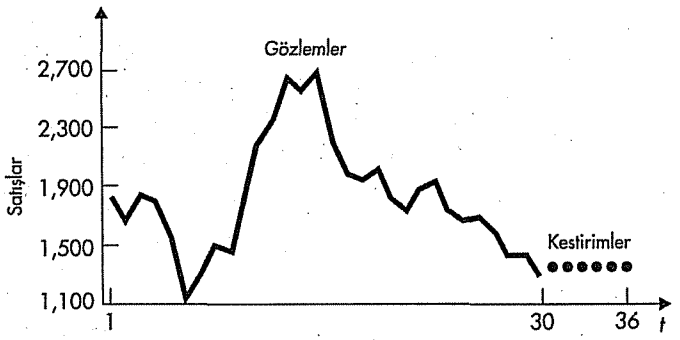
Benzer biçimde

$$\begin{aligned}\overline{X}_3 &= 0.4\overline{X}_2 + 0.6X_3 \\ &= (0.4)(1{,}708.8) + (0.6)(1{,}814) = 1{,}771.9\end{aligned}$$

Hesaplamaları bu yolla sürdürerek Çizelge 17.16'nın $\overline{X}_t$ sütununu tamamlarız.

ÇİZELGE 17.16 Lydia E. Pinkham'ın satış verilerinin basit üstel düzlenmesi ($\alpha = 0.4$)

t	X_t	$\overline{X}_t$	t	X_t	$\overline{X}_t$
1	1,806	1,806.0	16	2,177	2,336.5
2	1,644	1,708.8	17	1,920	2,086.6
3	1,814	1,771.9	18	1,910	1,980.6
4	1,770	1,770.8	19	1,984	1,982.6
5	1,518	1,619.1	20	1,787	1,865.2
6	1,103	1,309.4	21	1,689	1,759.5
7	1,266	1,283.4	22	1,866	1,823.4
8	1,473	1,397.2	23	1,896	1,867.0
9	1,423	1,412.7	24	1,684	1,757.2
10	1,767	1,625.3	25	1,633	1,682.7
11	2,161	1,946.7	26	1,657	1,667.3
12	2,336	2,180.3	27	1,569	1,608.3
13	2,602	2,433.3	28	1,390	1,477.3
14	2,518	2,484.1	29	1,387	1,423.1
15	2,637	2,575.8	30	1,289	1,342.6



ÇİZİM 17.10 Lydia E. Pinkham'ın satışları ve basit üstel düzlemeye dayanan kestirimleri

Bu çizelgeden en son düzey tahmininin

$$\overline{X}_n = \overline{X}_{30} = 1{,}342.6$$

olduğunu görüyoruz. Gelecekteki bütün yılların satış kestirimleri için artık bu değer kullanılacaktır. Gözlenen seri ile bu kestirimler Çizim 17.10'da gösterilmiştir.

Basit Üstel Düzleme ile Kestirim

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, yukarı ya da aşağı doğru tutarlı bir genel eğilimi olmayan, mevsim etkisinde kalmayan bir zaman serisinin gözlem kümesi olsun. Bu durumda **basit üstel düzleme** yöntemi şöyle uygulanır:

(i) *Düzlenmiş* $\overline{X}_t$ serisini aşağıdaki gibi bulalım:

$$\overline{X}_1 = X_1$$

$$\overline{X}_t = \alpha \overline{X}_{t-1} + (1-\alpha) X_t \qquad (0 < \alpha < 1;\ t = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Burada α, 0 ile 1 arasında saptanmış bir **düzleme sabiti**dir.

(ii) Zaman içinde n anında durarak serinin gelecekteki X_{n+h} değerlerini şöyle buluruz:

$$\hat{X}_{n+h} = \overline{X}_n \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

Buraya kadar, basit üstel düzlemenin uygulama çalışmalarında α düzleme sabitinin seçimi konusunda pek az şey söyledik. Uygulamada bu seçim öznel ya da nesnel temellere dayanabilir. Bir yol deneyime ve sezgiye güvenmektir. Sözgelimi bir ürüne yönelecek talebi kestirmek isteyen bir çözümlemeci, benzer

ürün hatlarına ilişkin verilerle çalışmada hatırı sayılır bir deneyime sahip olabilir, bunun sonucunda hangi düzleme sabitinin bu alanda doğru kestirimler vereceğini bilebilir. Eldeki verilerle düzenlenmiş bir çizimden de görsel incelemeyle düzleme sabiti için uygun bir değer çıkarılabilir. Eğer serinin büyükçe bir düzensiz bileşen içeridiği görülüyorsa, en son gözleme tek başına çok ağırlık vermek istemeyebiliriz, çünkü bu değer gelecekte bizi neler beklediğinin güçlü bir göstergesi olmayabilir. Eş. (17.7.5) uyarınca bu bize göreli olarak yüksekçe bir düzleme sabiti önerir. Öte yandan eğer seri epeyce düzgünse, α için daha küçük bir değer kullanırız.

Daha nesnel bir yaklaşım, birkaç değişik değer kullanıp bunlardan hangisinin zaman serisinin geçmişteki hareketlerini kestirmede en başarılı olduğuna bakmaktır. Sözgelimi α'ya 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 değerlerini vererek düzlenmiş seriyi hesaplayabiliriz. X_t'nin $(t-1)$ anındaki kestirimi $\overline{X}_t$ ise, bu kestirimin hatası

$$e_t = X_t - \overline{X}_{t-1}$$

olur. Bir olanak, denenen her α değeri için kestirim hatalarının kareleri toplamını hesaplamaktır:

$$SS = \sum_{t=2}^{n} e_t^2 = \sum_{t=2}^{n} (X_t - \overline{X}_{t-1})^2$$

Bu kestirim hata kareleri toplamı hangi α değeri için en küçükse, gelecekteki gözlemlerin kestirilmesinde o α kullanılır.

Düzleme sabitinin hangi değeri kullanılırsa kullanılsın, basit düzleme yönteminin (17.7.5) temel denklemine bir **güncelleştirme düzeneği** gözüyle bakılır. $(t-1)$ anında serinin düzeyi $\overline{X}_{t-1}$ ile tahmin edilir.Bir sonraki dönemde bu tahmini güncelleştirmek için X_t kullanılır, böylelikle yeni düzey tahmini, önceki tahminle yeni gözlemin tartılı bir ortalaması olur.

17.8 HOLT-WINTERS ÜSTEL DÜZLEME KESTİRİM MODELİ

Yaygın kullanılan pek çok işletmecilik kestirim süreci basit üstel düzleme yaklaşımının geliştirilmiş biçimleridir. Bu altbölümde bu modellerden **Holt-Winters** modeli adıyla bilinen birini ele alacağız. Amacımız bir zaman serisindeki genel eğilimi, olabilirse mevsimselliği de hesaba katmaktır.

Mevsimsel olmayan zaman serilerinin kestirimleriyle işe başlayalım. Burada hedef yalnızca serinin şimdiki düzeyini değil, genel eğilimini de tahmin etmektir. Bu amaç için eğilim, şimdiki düzeyle bir önceki düzeyin farkı olarak alınır.

Serinin t anında gözlenen değeri X_t ile gösterilecek, $\overline{X}_t$ ise yine düzey tahminini temsil edecektir. Genel eğilim tahmini de T_t olacaktır. Bu iki tahminin gerisinde yatan ilke basit üstel düzlemedekinin aynıdır. Bu iki tahmin denklemi şöyledir:

$$\overline{X}_t = A(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1-A)X_t \qquad (0 < A < 1) \qquad (17.8.1)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1-B)(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \qquad (0 < B < 1) \qquad (17.8.2)$$

Burada A ve B, değerleri 0 ile 1 arasında saptanmış düzleme sabitleridir.

Basit üstel düzlemede olduğu gibi, Eş. (17.8.1) ile (17.8.2), önceki tahminleri yeni gözlemin ışığında düzelten güncelleştirme formülleri olarak görülebilir. $(t-1)$ döneminde yapılan düzey tahmini, $\overline{X}_{t-1}$, genel eğilim tahmini T_{t-1} ile birlikte alındığında t dönemi için $(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1})$ düzeyini verir. Bu tahmin, Eş. (17.8.2)'deki güncelleştirilmiş $\overline{X}_t$ düzey tahminini elde etmek için yeni gözlem X_t ışığında düzeltilir.

Aynı yolla, $(t-1)$ dönemindeki genel eğilim T_{t-1} olarak tahmin edilir. Ancak yeni gözlem X_t elde edilince, eğilimin tahmini, en son iki düzey tahmini arasındaki fark olarak alınır. Bu durumda t dönemindeki eğilim tahmini Eş. (17.8.2)'de verilen tartılı ortalamadır.

Hesaplamalara başlarken

$$T_2 = X_2 - X_1 \qquad \text{ve} \qquad \overline{X}_2 = X_2$$

alınır. Daha sonra sırasıyla $t = 3, 4, \ldots, n$ için (17.8.1) ve (17.8.2) formülleri uygulanır.

Bu hesaplamalar için Çizelge 17.10'daki henüz geri ödenmemiş tüketici kredisi verileri örnek olarak kullanılacaktır. Bu serinin gözlenen değerleri Çizelge 17.17'nin X_t sütununda yeniden verilmiştir. Düzeyin ve genel eğilimin 2. yıldaki başlangıç tahminleri şöyledir:

$$\overline{X}_2 = X_2 = 155$$

ve

$$T_2 = X_2 - X_1 = 155 - 133 = 22$$

Eş. (17.8.1) ve (17.8.2)'yi $A = 0.3$ ve $B = 0.4$ ile kullanacağız. Bu durumda bu denklemler şöyle olur:

ÇİZELGE 17.17 Henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri için Holt-Winters hesaplamaları ($A = 0.3, B = 0.4$)

t	X_t	$\overline{X}_t$	T_t	t	X_t	$\overline{X}_t$	T_t
1	133			7	274	266	36
2	155	155	22	8	312	309	40
3	165	169	17	9	313	324	25
4	171	175	11	10	333	338	18
5	194	192	14	11	343	347	13
6	231	223	25				

$$\overline{X}_t = 0.3(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + 0.7X_t \qquad (17.8.3)$$

$$T_t = 0.4T_{t-1} + 0.6(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \qquad (17.8.4)$$

Eş. (17.8.3)'te $t = 3$ dersek şunu buluruz:

$$\overline{X}_3 = 0.3(\overline{X}_2 + T_2) + 0.7X_3 = (0.3)(155 + 22) + (0.7)(165)$$
$$= 168.6$$

Öyleyse Eş. (17.8.4) kullanılarak şu yazılabilir.

$$T_3 = 0.4T_2 + 0.6(\overline{X}_3 - \overline{X}_2) = (0.4 + 22) + (0.6)(168.6 - 155)$$
$$= 16.96$$

Hesaplamalar Eş. (17.8.3) ile (17.8.4)'te $t = 4$ alınarak sürdürülür. Bu durumda şunları buluruz:

$$\overline{X}_4 = 0.3(\overline{X}_3 + T_3) + 0.7X_4 = (0.3)(168.6 + 16.96) + (0.7)(171)$$
$$= 175.368$$

ve

$$T_4 = 0.4T_3 + 0.6(\overline{X}_4 - \overline{X}_3) = (0.4)(16.96) + (0.6)(175.368 - 168.6)$$
$$= 10.8448$$

Geri kalan hesaplamalar sırasıyla $t = 5, 6, \ldots, 11$ alınarak sürdürülür.

Bu hesaplamaların sonuçları en yakın tamsayıya yuvarlatılarak Çizelge 17.17'de gösterilmiştir.

Şimdi bu düzey ve eğilim tahminlerini gelecekteki gözlemleri kestirmekte kullanacağız. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ serisi verilmişken en son düzey ve eğilim tahminleri sırasıyla $\overline{X}_n$ ve T_n'dir. Kestirimler türetilirken bu en son genel eğilimin en son düzeyden devam edeceği varsayılır. Öyleyse serinin bir sonraki değeri

$$\hat{X}_{n+1} = \overline{X}_n + T_n$$

olarak, daha sonraki de

$$\hat{X}_{n+2} = \overline{X}_n + 2T_n$$

olarak kestirilir. Genel olarak n anında durup geleceğe doğru h dönem ileriye bakarak X_{n+h} değerini şöyle kestiririz:

$$\hat{X}_{n+h} = \overline{X}_n + hT_n$$

Çizelge 17.17'de en son düzey ve eğilim tahminleri şöyledir:

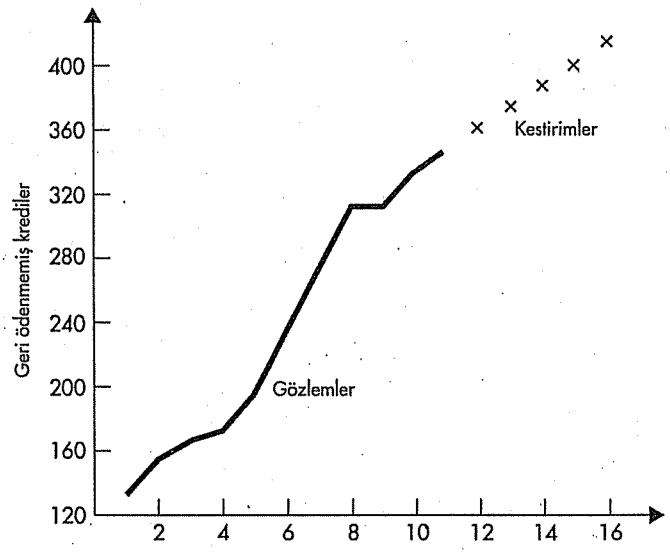
$$\overline{X}_{11} = 347 \qquad T_{11} = 13$$

Öyleyse gelecek yılın henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri aşağıdaki gibidir:

$$\hat{X}_{12} = 347 + 13 = 360$$

Benzer biçimde 2 ve 3 yıl ötesinin kestirimleri de

ÇİZİM 17.11 Henüz geri ödenmemiş tüketici kredileri, Holt-Winters yöntemine dayanan kestirimlerle



$$\hat{X}_{13} = 347 + (2)(13) = 373$$

ve

$$\hat{X}_{14} = 347 + (3)(13) = 386$$

olur.

Çizim 17.11 bu zaman serisi ile birkaç kestirimini göstermektedir. Bu yaklaşımın özelliği gereği gelecekteki değerlerin kestirimleri bir doğru üzerinde olur.

Holt-Winters Yöntemiyle Kestirim: Mevsimsel Olmayan Seriler

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, mevsim etkisi taşımayan bir zaman serisinin gözlem kümesi olsun. **Holt-Winter yöntemi**yle kestirim şöyle yapılır:

(i) $\overline{X}_t$ düzey ve T_t genel eğilim tahminlerini aşağıdaki gibi elde edin:

$$\overline{X}_2 = X_2 \qquad T_2 = X_2 - X_1$$

$$\overline{X}_t = A(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1 - A)X_t \qquad (0 < A < 1;\ t = 3, 4, \ldots, n)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1 - B)(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \qquad (0 < B < 1;\ t = 3, 4, \ldots, n)$$

Burada A ve B, değerleri 0 ile 1 arasında saptanmış düzleme sabitleridir.

(ii) n anından başlayıp serinin gelecekteki X_{n+h} değerlerinin kestirimini şöyle yaparız:

$$\hat{X}_{n+h} = \overline{X}_n + hT_n \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

MEVSİMSEL ZAMAN SERİLERİNİN KESTİRİMİ

Şimdi de Holt-Winters yönteminin mevsimselliği hesaba katan bir uzantısına geçelim. Çoğu uygulamalı çalışmada mevsim etmeni çarpım olarak alınmıştır, böylece sözgelimi aylık satış verilerinde ocak, ortalama aylık satışların bir oranı olarak düşünülür. Eğilim bileşeni ise önceden olduğu gibi toplamalı varsayılır.

Mevsim etkisinin olmadığı durumdaki gibi, X_t, $\overline{X}_t$ ve T_t'yi sırasıyla gözlenen değeri, düzeyi ve eğilimi göstermek için kullanacağız. Mevsim etmeni F_t ile gösterilecek, böylece zaman serisi bir yılda s dönem içeriyorsa bir önceki yılın buna karşılık gelen dönemi için mevsim etmeni F_{t-s} olacaktır.

Holt-Winters modelinde düzey, eğilim ve mevsim etmeninin tahminleri aşağıdaki üç denklemle güncelleştirilir:

$$\overline{X}_t = A(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1-A)\frac{X_t}{F_{t-s}} \qquad (0<A<1) \qquad (17.8.5)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1-B)(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \qquad (0<B<1) \qquad (17.8.6)$$

$$F_t = CF_{t-s} + (1-C)\frac{X_t}{\overline{X}_t} \qquad (0<C<1) \qquad (17.8.7)$$

Burada A, B, C değerleri 0 ile 1 arasında saptanan düzleme sabitleridir.

Eş. (17.8.5)'teki $(\overline{X}_{t-1} - T_{t-1})$ terimi, t dönemi düzeyinin bir dönem önce oluşmuş tahminini temsil eder. Bu tahmin daha sonra yeni X_t gözlemi belli olunca güncelleştirilir. Ancak bu gözlemi eldeki en son tahmin olan o dönemin mevsim etmeni F_{t-s} ile indirgeyerek mevsim etkisinden kurtarmamız gerekir. Eğilimin güncelleştirme denklemi (17.8.6), daha önce kullanılan (17.8.2)'nin tıpkısıdır.

Son olarak, mevsim etmeni (17.8.7) ile tahmin edilir. Bu etmenin en son tahmini geçen yıldan bilinen F_{t-s}'dir. Ama yeni X_t gözlemini düzey tahmini olan $\overline{X}_t$'ye bölersek $X_t/\overline{X}_t$ de bir mevsim etmeni verir. Mevsim etmeninin yeni tahmini bu durumda bu iki büyüklüğün tartılı ortalamasıdır.

Hesaplamaları başlatmak için burada da başlangıç değerleri gerekmektedir. Bir başlangıç noktası olarak ilk üç yılın verilerini, Altbölüm 17.6'da açıklandığı gibi, s noktalı ortalanmış hareketli ortalamaları bulmak için kullanırız.

Bu hesaplamalara bir örnek olmak üzere Çizelge 17.13'te verilen pay senedi başına kazanç serisini kullanacağız. Bu verilerin bir bölümü Çizelge 17.18'in ikinci sütununda yeniden gösterilmiştir. Bu çizelgenin son sütunu, Çizelge 17.13'ten alınmış 4 noktalı ortalanmış hareketli ortalamaları göstermektedir. Bunlar bizim ilk düzey tahminlerimizdir.

Bu çizelgeden özellikle 10. dönemin şu düzey tahminini görmek isteriz:

$$\overline{X}_{10} = 0.7206$$

10. dönemin genel eğilimi 10. ve 9. dönemlerin düzey farkı olarak şöyle tahmin edilir:

$$T_{10} = \overline{X}_{10} - \overline{X}_9 = 0.7206 - 0.6769 = 0.0437$$

Çizelge 17.18 bize dört tane üç ayın her birindeki mevsim etmeninin ikişer tahminini de vermektedir. Sözgelimi yılın üçüncü üç ayı için bu etmenin 3. dönemde 0.345/0.5075 ve 7. dönemde 0.440/0.6094 olduğunu biliyoruz. Üçüncü üç aydaki mevsim etmeninin başlangıç tahmini olarak bu iki değerin ortalamasını alabiliriz:

ÇİZELGE 17.18 Bir şirketin pay senedi başına kazançlarının Holt-Winters kestirimleri için başlangıç değerleri

t	X_t	$\overline{X}_t$
1	0.300	
2	0.460	
3	0.345	0.5075
4	0.910	0.5219
5	0.330	0.5444
6	0.545	0.5725
7	0.440	0.6094
8	1.040	0.6469
9	0.495	0.6769
10	0.680	0.7206
11	0.545	
12	1.285	

$$F_7 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.345}{0.5075} + \frac{0.440}{0.6094}\right) = 0.701$$

Benzer biçimde öteki üçer aylar için şunları buluruz:

$$F_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.910}{0.5219} + \frac{1.040}{0.6469}\right) = 1.676$$

$$F_9 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.330}{0.5444} + \frac{0.495}{0.6769}\right) = 0.669$$

$$F_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.545}{0.5725} + \frac{0.680}{0.7206}\right) = 0.948$$

Bu başlangıç tahminleri veriyken kalan değerler hesaplanabilir.

$$A = 0.5 \qquad B = 0.5 \qquad C = 0.3$$

düzleme sabitlerini kullanalım. Bu değerler verilmişken üçer aylık modelimizde (17.8.5)-(17.8.7) eşitlikleri şöyle olur:

$$\overline{X}_t = 0.5(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + 0.5\left(\frac{X_t}{F_{t-4}}\right) \tag{17.8.8}$$

$$T_t = 0.5T_{t-1} + 0.5(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \tag{17.8.9}$$

$$F_t = 0.3F_{t-4} + 0.7\left(\frac{X_t}{\overline{X}_t}\right) \tag{17.8.10}$$

Çizelge 17.19 Bir şirketin kazançlarının Holt-Winters hesaplamaları ($A = 0.5$, $B = 0.5$, $C = 0.3$)

t	X_t	$\overline{X}_t$	T_t	F_t
1	0.300			
2	0.460			
3	0.345			
4	0.910			
5	0.330			
6	0.545			
7	0.440			0.701
8	1.040			1.676
9	0.495			0.669
10	0.680	0.7206	0.0437	0.948
11	0.545	0.7709	0.0470	0.705
12	1.285	0.7923	0. 0342	1.638
13	0.550	0.8243	0.0331	0.668
14	0.870	0. 8876	0.0482	0.971
15	0.660	0.9359	0.0483	0.705
16	1.580	0.9743	0.0433	1.627
17	0.590	0.9506	0.0098	0.635
18	0.990	0.9902	0.0247	0.991
19	0.830	1.0960	0.0652	0.742
20	1.730	1.1124	0. 0408	1.577
21	0.610	1.0571	–0.0072	0.594
22	1.050	1.0547	–0.0048	0.994
23	0.920	1.1451	0.0428	0.785
24	2.040	1.2409	0.0693	1.624
25	0.700	1.2440	0.0362	0.572
26	1.230	1.2587	0. 0254	0.982
27	1.060	1.3173	0.0420	0.799
28	2.320	1.3941	0.0594	1.652
29	0.820	1.4433	0.0543	0.569
30	1.410	1.4665	0.0388	0.968
31	1.250	1.5351	0.0537	0.810
32	2.730	1.6206	0. 0696	1.675

Kazançlar serisi, X_t, Çizelge 17.19'un ikinci sütununda sergilenmiştir.

(17.8.8)'dan (17.810)'a kadar olan formüller şimdi sırasıyla $t = 11, 12, \ldots$ için uygulanabilir. Böylece 11. dönem için (17.8.8)'den şunu buluruz:

$$\overline{X}_{11} = 0.5(\overline{X}_{10} + T_{10}) + 0.5\left(\frac{X_{11}}{F_7}\right)$$

$$= 0.5(0.7206 + 0.0437) + 0.5\left(\frac{0.545}{0.701}\right) = 0.7709$$

Daha sonra (17.8.9)'u kullanarak genel eğilim etmenini buluruz:

$$T_{11} = 0.5T_{10} + 0.5(\overline{X}_{11} - \overline{X}_{10})$$

$$= (0.5)(0.0437) + 0.5(0.7709 - 0.7206) = 0.0470$$

Son olarak (17.8.10)'dan mevsim etmenini şöyle tahmin ederiz:

$$F_{11} = 0.3F_7 + 0.7\left(\frac{X_{11}}{\overline{X}_{11}}\right)$$

$$= (0.3)(0.701) + 0.7\left(\frac{0.545}{0.7709}\right) = 0.705$$

Bu yolla ilerleyerek 12. dönemin ilgili tahminlerini elde edebiliriz. Böylelikle (17.8.8)'den düzey tahminini aşağıdaki gibi buluruz:

$$\overline{X}_{12} = 0.5(\overline{X}_{11} + T_{11}) + 0.5\left(\frac{X_{12}}{F_8}\right)$$

$$= 0.5(0.7709 + 0.0470) + 0.5\left(\frac{1.285}{1.676}\right) = 0.7923$$

(17.8.9)'dan genel eğilim tahmini:

$$T_{12} = 0.5T_{11} + 0.5(\overline{X}_{12} - \overline{X}_{11})$$

$$= (0.5)(0.0470) + 0.5(0.7923 - 0.7709) = 0.0342$$

ve (17.8.10)'dan mevsim etmeni tahmini

$$F_{12} = 0.3F_8 + 0.7\left(\frac{X_{12}}{\overline{X}_{12}}\right)$$

$$= (0.3)(01.676) + 0.7\left(\frac{1.285}{0.7923}\right) = 1.638$$

olarak bulunur.

Geriye kalan düzey, eğilim ve mevsim etmenlerinin tahminleri tıpkı bu yolla elde edilir, sonuçlar Çizelge 17.19'un son üç sütununda gösterilmiştir.

Okuyucu bu hesaplamaları yapmanın aritmetik yükünün bir hayli zaman alıcı olduğu izlenimini edinmiş olabilir. Oysa her dönemde aynı üç basit cebirsel işlemi yapan (17.8.5)'ten (17.8.7)'ye kadar olan eşitliklerin yinelemeli güncelleştirme yapısı, bunların elektronik bilgisayar programlarının etkin bir algoritmasına temel oluşturmalarını sağlar. Bu yardım sayesinde aritmetik işlemler çok hızlı yapılabilir. Üstelik bunun, pek az bilgi saklanması gibi bir başka üstünlüğü de vardır. Hesaplamalar bir kez başladıktan sonra zaman serisinin bütün geçmiş gözlemlerini saklamak gerekmez. Yalnızca son yılın her dönemine ilişkin en son düzey, eğilim ve mevsim tahminlerini elde bulundurmak yeter. Böylece üçer aylık veriler için n anında, yalnızca düzey ve eğilim tahminleri olan $\overline{X}_t$ ile T_t'yi

ve tahmin edilen mevsim etmenleri olan F_t, F_{t-1}, F_{t-2} ve F_{t-3}'ü saklamamız gerekir. Daha sonra yeni gözlem X_{t+1} belli olunca bunlar güncelleştirilir. Bu ve başka üstel düzlemeyle kestirim yöntemlerinin bu hesaplama etkinliği, çok sayıda ürün için satışların düzenli olarak kestirildiği, stok denetimi amaçlı mutat satış kestirimlerinde onları özellikle yararlı kılar.

Düzey, eğilim ve mevsim etmenlerinin tahminleri hesaplandıktan sonra serinin gelecekteki kestirim değerlerini türetmede bunlardan yararlanırız. Kazançlar örneğimizde bu amaçla düzey ve eğilimin en son tahminleri

$$\overline{X}_{32} = 1.6026 \qquad T_{32} = 0.0696$$

ile mevsim etmeninin en yeni dört tahmini

$$F_{29} = 0.569 \qquad F_{30} = 0.968 \qquad F_{31} = 0.810 \qquad F_{32} = 1.675$$

gerekmektedir.

Şimdi serinin bir sonraki terimi X_{33}'ün kestirimi ele alınacaktır. Önce düzey tahminimizi alıp buna eğilim tahminini ekleriz. Sonra 33. gözlemin yılın ilk üç ayına ilişkin olduğunu hesaba katarak bulgumuzun, eldeki en son tahmini F_{29} olan ilk üç ayın mevsim etmeniyle çarpılmasını sağlarız. Bu durumda X_{33} şöyle tahmin edilir:

$$\hat{X}_{33} = (\overline{X}_{32} + T_{32})F_{29} = (1.6206 + 0.0696)(0.569) = 0.9617$$

Şimdi de bir sonraki değer X_{34}'ün tahminine geçelim. Bu dönem kestirimlerin hesaplandığı andan iki dönem ileride olduğundan düzey tahminine eğilim tahmininin iki katını ekleriz. Son olarak da bu, yılın ikinci üç ayına ilişkin mevsim etmeninin en son tahmini olan F_{30} ile çarpılmalıdır. Öyleyse kestirimimiz şudur:

$$\hat{X}_{34} = (\overline{X}_{32} + 2T_{32})F_{30} = [1.6206 + (2)(0.0696)](0.968) = 1.7035$$

Bu yolu sürdürerek istediğimiz kadar ileriye gidip kestirimleri hesaplayabiliriz. Çizim 17.12 gerçekleşen değerlerle birlikte gelecek iki yıl için kazanç kestirimlerini göstermektedir. Bu kestirimlerin seride içerilen şimdiki eğilimi ve mevsim dalgalanmasını bir hayli iyi yansıttığı görülmektedir.

Holt-Winters Yöntemiyle Kestirim: Mevsimsel Seriler

s tane dönemi olan mevsimsel bir zaman serisinin gözlem kümesi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun (üçer aylık veri için $s = 4$, aylık veri için $s = 12$'dir). Bu tür serilerin **Holt-Winters yöntemi** ile kestirimleri şöyle yapılır:

(i) Önce düzey, eğilim ve mevsimsellik için başlangıç tahminleri gerekir. Bunlar hareketli ortalamalar yöntemiyle elde edilebilir. $t = (s/2) + 1, (s/2) + 2, \ldots, (5s/2)$ için

$$\overline{X}_t = \frac{X_{t-(s/2)} + 2(X_{t-(s/2)+1} + \Lambda + X_{t+(s/2)-1}) + X_{t+(s/2)}}{2s}$$

$\overline{X}_{5s/2}$ tahmini, düzey için gerekli ilk tahmini verir. Bu dönemin eğilimi şöyle tahmin edilir:

$$T_{5s/2} = \overline{X}_{5s/2} - \overline{X}_{(5s/2)-1}$$

Daha sonra s tane mevsim etmeninin ilk tahminleri şöyle bulunur:

$$F_{(5s/2)-j} = \frac{1}{2}\left(\frac{X_{(5s/2)-j}}{\overline{X}_{(5s/2)-j}} + \frac{X_{(3s/2)-j}}{\overline{X}_{(3s/2)-j}}\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots, s-1)$$

(ii) $[(5s/2) + 1]$ döneminden başlayarak $t = (5s/2) + 1, \ldots, n$ için sırayla şu güncelleme eşitliklerini kullanırız:

$$\overline{X}_t = A(\overline{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1-A)\frac{X_t}{F_{t-s}} \qquad (0 < A < 1)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1-B)(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) \qquad (0 < B < 1)$$

$$F_t = CF_{t-s} + (1-C)\frac{X_t}{\overline{X}_t} \qquad (0 < C < 1)$$

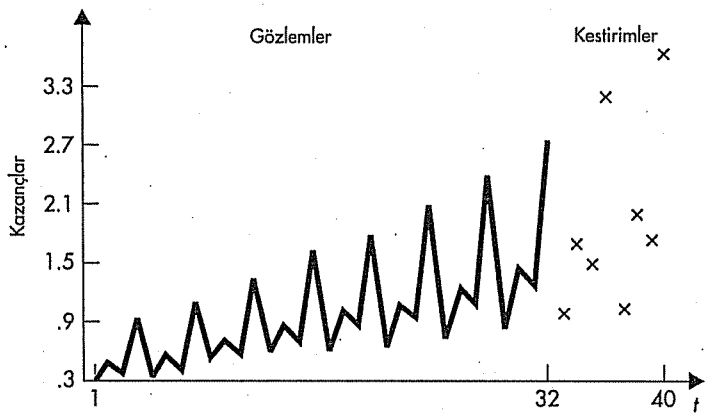
Burada A, B, C, düzleme sabitleridir.

(ii) n anında durarak serinin gelecekteki X_{n+h} kestirim değerlerini hesaplarız:

$$\hat{X}_{n+h} = (\overline{X}_n + hT_n)F_{n+h-s} \; (h = 1, 2, \ldots, s)$$

$$= (\overline{X}_n + hT_n)F_{n+h-2s}) \; (h = s+1, s+2, \ldots, 2s)$$

Holt-Winters yaklaşımıyla elde edilen fiili kestirimler düzleme sabitleri için seçilen değerlere bağlıdır. Altbölüm 17.7'deki üstel düzleme tartışmamızda olduğu gibi burada da bu seçim öznel ya da nesnel ölçütlere bağlanabilir. Çözümlemecinin benzer veri kümeleriyle olan deneyimi düzleme sabitlerine uygun değerler sağlayabilir. Yahut da, olanak içindeki çeşitli değer kümeleri eldeki verilerle denenerek en iyi kestirimleri veren küme daha sonra kullanılmak üzere saklanabilir. İkinci yaklaşım daha ağır bir hesap yükü gerektirir ama tanıdık olmayan sorunlarla boğuşurken en emin hareket tarzına yol açar. Bir bilgisayar programı kullanılabilirse bu yol hiç de pahalıya gelmez.



ÇİZİM 17.12 Bir şirketin kazançları; mevsimsel seriler için Holt-Winters yöntemine dayanan kestirimlerle birlikte

ALIŞTIRMALAR

22. Alıştırma 8'in verilerine dayanarak gelecekteki dört yılda stok-satış oranı kestirimlerini bulmak için basit üstel düzleme yöntemini kullanın. Düzleme sabiti olarak $\alpha = 0.4$ alın. Gözlenen zaman serisi ile kestirimleri çizimle gösterin.

23. Alıştırma 10'un verilerine dayanarak gelecek beş yılda altın fiyatlarının kestirimlerini bulmak için düzleme sabitini $\alpha = 0.3$ alıp basit üstel düzleme yöntemini kullanın.

24. Alıştırma 11'in verilerini kullanarak gelecek üç yılın konut yapımına başlama sayılarının kestirimlerini elde etmek için $\alpha = 0.5$ alıp basit üstel düzleme yöntemini kullanın.

25. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 18 yıllık bir süre boyunca pay senedi başına kazançlarını göstermektedir.

YIL	KAZANÇLAR	YIL	KAZANÇLAR	YIL	KAZANÇLAR
1	3.63	7	7.01	13	3.54
2	3.62	8	6.37	14	1.65
3	3.66	9	5.82	15	2.15
4	5.31	10	4.98	16	6.09
5	6.14	11	3.43	17	5.95
6	6.42	12	3.40	18	6.26

(a) $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ düzleme sabitlerini kullanarak basit üstel düzlemeye dayanan kestirimleri bulun.

(b) Hangi kestirimleri kullanmayı seçersiniz?

26. **(a)** Kestirimler basit üstel düzlemeye dayanıyorsa, $\overline{X}_t$ serinin t anındaki düzlenmiş değerini gösterirken, $(t-1)$ anında durup X_t'nin kestirimi yapıldığında ortaya çıkan hatanın şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$e_t = X_t - \overline{X}_{t-1}$$

(b) Öyleyse şunun da yazılabileceğini gösterin:

$$\overline{X}_t = X_t - \alpha e_t$$

Burada bir sonraki kestirimi bulmak için en son gözlemle en son kestirim hatasının kullanıldığını görürüz.

27. Basit üstel düzleme yönteminde düzleme sabiti α, 1 olarak alınmış olsun. Ne gibi kestirimler bulunur?

28. Aşağıdaki söyleme ilişkin görüşünüzü belirtin: "Bütün işletmecilik ve iktisat zaman serilerinin zaman içinde değişkenlik gösterdiğini biliyoruz. Ama basit üstel düzleme kullanılırsa zaman serisinin gelecekteki değerlerinin hepsi aynı kestirimle gösterilmektedir. Gelecekteki bütün değerlerin aynı olmayacağını bildiğimize göre bu yapılan saçmadır."

29. Aşağıdaki çizelge Kanada'nın 15 yıllık bir süre boyunca sınai üretim endeksini göstermektedir. Gelecek beş yılın kestirimlerini bulmak için $A = 0.3$ ve $B = 0.5$ düzleme sabitleriyle Holt-Winters yöntemini kullanın.

YIL	ENDEKS	YIL	ENDEKS	YIL	ENDEKS
1	79	6	88	11	91
2	74	7	85	12	100
3	78	8	87	13	100
4	80	9	79	14	106
5	83	10	84	15	112

30. Aşağıdaki çizelge 24 ay boyunca ABD imalat sanayiindeki saat ücretlerini göstermektedir. Gelecek üç ayın kestirimlerini bulmak için $A = 0.3$ ve $B = 0.4$ düzleme sabitleriyle Holt-Winters yöntemini kullanın.

AY	ÜCRET	AY	ÜCRET	AY	ÜCRET
1	10.58	9	10.84	17	11.05
2	10.67	10	10.87	18	11.02
3	10.48	11	10.81	19	11.06
4	10.59	12	10.93	20	11.11
5	10.67	13	10.94	21	11.15
6	10.74	14	10.96	22	11.19
7	10.74	15	11.05	23	11.22
8	10.80	16	10.83	24	11.17

31. Aşağıdaki çizelge 14 ay boyunca ABD'deki mevsime göre düzeltilmiş besin fiyatları endeksini göstermektedir. Gelecek üç ayın kestirimlerini bulmak için $A = 0.5$ ve $B = 0.5$ düzleme sabitleriyle Holt-Winters yöntemini kullanın.

AY	FİYAT	AY	FİYAT	AY	FİYAT
1	116.6	6	120.3	11	122.6
2	117.1	7	120.6	12	123.6
3	117.8	8	120.8	13	124.2
4	118.9	9	121.2	14	125.0
5	119.5	10	122.1		

32. Aşağıdaki çizelge 11 yıl boyunca bir şirketin kâr marjı yüzdesini göstermektedir. Gelecek iki yılın kestirimlerini bulmak için $A = 0.6$ ve $B = 0.6$ düzleme sabitleriyle Holt-Winters yöntemini kullanın.

YIL	KÂR MARJI	YIL	KÂR MARJI	YIL	KÂR MARJI
1	8.4	5	6.3	9	8.5
2	7.4	6	7.9	10	7.0
3	7.4	7	7.7	11	5.7
4	7.2	8	7.1		

33. Alıştırma 13'ün verilerine dayanarak ilerideki sekiz tane üç ayın satış kestirimlerini bulmak için Holt-Winters mevsimsel yöntemini kullanın. Düzleme sabitlerini $A = 0.6$, $B = 0.5$ ve $C = 0.4$ alın. Verileri ve kestirimleri çizimle gösterin.

34. Alıştırma 14'ün verilerine dayanarak ilerideki sekiz tane üç ayın satış kestirimlerini bulmak için Holt-Winters mevsimsel yöntemini kullanın. Düzleme sabitlerini $A = 0.5$, $B = 0.4$ ve $C = 0.3$ alın. Verilerle kestirimleri çizimle gösterin.

17.9 ARDIŞIK BAĞLANIM MODELLERİ

Zaman serilerinin kestirimine farklı bir yaklaşım, eldeki verileri kullanıp ilgilenilen seriyi türetebilecek bir model kurmaya yönelir. Bu altbölümde böyle modellerin çok yararlı bir türünü ele alacak, önemli ve daha geniş bir türü ise bir sonraki altbölümde kısaca inceleyeceğiz.

Bu altbölümde dikkatimizi üzerinde yoğunlaştıracağımız modellerin en basitini altbölüm 14.8'de regresyon modelleri bağlamında zaten tanıtmıştık. Bunun özündeki düşünce bir zaman serisini bir rassal değişkenler dizisi saymaktır. Uygulamadaki amaçlar için çoğu zaman bu rassal değişkenlerin ortalama ve varyansını hep aynıymış gibi kabul etmeye hazırızdır. Ama bunların birbirinden bağımsız olduklarını varsaymak en hafif deyişle acelecilik olur. Sözgelimi ürün satışlarının yıllık değerleri serisini alalım. İçinde bulunulan dönemin satış düze-

yinin hemen önceki yılların satışlarıyla ilişkili olduğundan kuşkulanabiliriz. Öyleyse serilerimiz arasında zaman içinde bir ilişki örüntüsü olmasını bekleyebiliriz. Bu türden ilişki örüntülerine bazan **ardışık bağımlılık** denir.

İlke olarak her türlü ardışık bağımlılık örüntüsü mümkündür. Ama bunlardan bazıları ötekilere göre çok daha sık ortaya çıkabilir. Zaman içinde ardarda iki gözlem arasında oldukça sıkı, iki dönem aralıklı iki gözlem arasında daha az güçlü, üç dönem aralıklı iki değer arasında daha da az ilişki olan bir durum düşündüğümüzde özellikle çekici bir olanak ortaya çıkar. Bu türden çok basit bir ardışık bağımlılık yapısı, bitişik iki değer arasında diyelim ϕ_1 gibi bir sayı, iki dönem aralıklı iki değer arasında ϕ_1^2, üç dönem aralıklı iki değer arasında ϕ_1^3 gibi bir sayı kadar korelasyon varken görülür. Öyleyse serinin t anındaki değerini X_t ile gösterirsek bu ardışık bağımlılık modelinde şunu yazabiliriz:

$$\text{Kor}(X_t, X_{t-j}) = \phi_1^j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17.9.1}$$

(17.9.1) yapısında ardışık bağımlılık yaratan zaman serisinin bir modelinin şöyle olduğu gösterilebilir:

$$X_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1} + \alpha_t \tag{17.9.2}$$

Burada γ ile ϕ_1 sabit katsayılar olup bütün t'ler için α_t rassal değişkenlerinin ortalamaları 0, varyansları sabittir ve bunlar birbiriyle ilişkisizdir. (17.9.2)'de γ katsayısının bulunma nedeni, X_t serisinin 0'dan farklı bir ortalama almasına izin vermektir. Aksi halde bu model, Altbölüm 14.8'de regresyon denkleminin hata terimlerindeki ardışık bağımlılığı göstermek için kullandığımız modele dönüşür. Buna **birinci dereceden ardışık bağlanım** modeli denir.

Birinci dereceden ardışık bağlanım modeli (17.9.2), bir serinin şimdiki X_t değerini bir önceki X_{t-1} değeri ve ardışık bağımlılığı olmayan α_t rassal değişkeni terimleriyle ifade eder. Rassal değişken α_t ardışık bağımlı olmadığından kestirilemez. Öyleyse, birinci dereceden ardışık bağlanım modeliyle türetilmiş serilerin gelecekteki değerlerinin kestirimleri yalnızca serinin en son değerine bağlıdır. Ancak çoğu uygulamada kestirim için bu tek gözlemden daha fazlasını kullanmak isteriz. (17.9.2) modelinin açık bir uzantısı, serinin şimdiki değerini ondan önceki en son *iki* gözleme bağımlı kılmaktır. Böylelikle şu modeli kullanabiliriz:

$$X_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a_t$$

Burada γ, ϕ_1 ve ϕ_2 sabit katsayılardır. Buna da **ikinci dereceden ardışık bağlanım modeli** denir.

Daha genel olarak, herhangi bir artı tamsayı p için serinin şimdiki değeri, aşağıdaki ***p*'inci dereceden ardışık bağlanım modeli** aracılığıyla kendinden önceki p tane değere (doğrusal) bağımlı kılınabilir:

$$X_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t \qquad (17.9.3)$$

Burada $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ sabit katsayılardır. (17.9.3) eşitliği genel ardışık bağlanım modelini gösterir. Bu altbölümün geri kalanında bu tür modelleri verilere uydurmayı ve gelecek değerleri kestirmede bunlardan yararlanmayı ele alacağız.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ gibi bir gözlemler dizimiz olsun. Bunları kullanarak (17.9.3) ardışık bağlanım modelinin $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ katsayılarını tahmin etmek isteyelim. Bu, *en küçük kareler* yöntemi aracılığıyla yapılabilir. Katsayı tahminleri, aşağıdaki sapma kareleri toplamını en küçük yapan $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ değerleri olarak alınır:

$$KT = \sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \gamma - \phi_1 X_{t-1} - \Lambda - \phi_p X_{t-p})^2$$

Öyleyse tahmin işlemi, Bölüm 13'te anlatılan teknikleri kullanan bir çoklu regresyon programı kullanılarak yürütülebilir.

Lydia E. Pinkham'ın Örnek 17.1'deki satış verileri için dördüncü dereceye kadar olan ardışık bağlanım modelleri en küçük karelerle tahmin edilmiştir. Verilere uydurulan birinci dereceden model şöyledir:

$$X_t = 193.27 + 0.883 X_{t-1} + a_t \qquad (17.9.4)$$
$$(188.92) \quad (0.097)$$

İkinci dereceden modeli şöyle bulduk:

$$X_t = 313.68 + 1.180 X_{t-1} - 0.358 X_{t-2} + a_t \qquad (17.9.5)$$
$$(192.56) \quad (0.187) \quad (0.191)$$

Tahmin edilen üçüncü ve dördüncü dereceden modeller de sırasıyla şöyledir:

$$X_t = 322.29 + 1.188 X_{t-1} - 0.317 X_{t-2} - 0.057 X_{t-3} + a_t \qquad (17.9.6)$$
$$(215.72) \quad (0.206) \quad (0.308) \quad (0.209)$$

ve

$$X_t = 446.22 + 1.194X_{t-1} - 0.439X_{t-2} + 0.286X_{t-3} - 0.291X_{t-4} + a_t \quad (17.9.7)$$
$$(232.77)\ (0.211)\quad (0.324)\quad (0.317)\quad (0.210)$$

Eş. (17.9.4)-(17.9.7)'de katsayı tahminlerinin altında ayraç içindeki sayılar tahmin edilmiş ilgili standart hatalardır.

Ardışık Bağlanım Modelleri ve Tahmin Edilmeleri

X_t $(t = 1, 2, \ldots, n)$ bir zaman serisi olsun. Bu seriyi temsil etmede kullanılabilecek bir model aşağıda verilen ***p*'inci dereceden ardışık bağlanım modeli** olabilir:

$$X_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t$$

Burada γ, ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_p$ sabit katsayılar olup a_t rassal değişkenlerinin ortalamaları 0, varyansları sabittir ve bunlar birbiriyle ilişkisizdir.

Ardışık bağlanım modelinin katsayıları, en küçük kareler regresyon algoritmasıyla, aşağıdaki kareler toplamını en küçük yapan γ, ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_p$ değerleri olarak tahmin edilir:

$$KT = \sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \gamma - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p})^2$$

Bir çoklu regresyon bilgisayar programı kullanılabilirse bu ardışık bağlanım modelleri çabucak ve külfetsiz olarak verilere uydurulabilir. Çizelge 17.20, ikinci dereceden ardışık bağlanım modeli (17.9.5) çıktısının bir bölümünü göstermektedir:

ÇİZELGE 17.20 Lydia E. Pinkham'ın verilerine uydurulan ikinci dereceden ardışık bağlanım modeli için SAS programı çıktısının bir bölümü

PARAMETER	ESTIMATE	T FOR H0: PARAMETER = 0	STD. ERROR OF ESTIMATE
INTERCEPT	313.68		
XT – 1	1.180	6.31	0.187
XT – 2	–0.358	–1.87	0.191

Bir ardışık bağlanım modeli bir zaman serisinin gelecek değerlerini kestirmede kullanılacaksa ardışık bağlanımın derecesi olan p değerini saptamak gerekir. Bu seçim yapılırken iki noktayı dengelemek gerekir. Serinin bütün önemli ardışık bağımlılık davranışını hesaba katmaya yetecek büyüklükte bir derece seçmek isteriz. Ama p'nin gereğinden büyük olması, ilgisiz katsayıların modele girmesine, bunun sonucunda önemli katsayıların etkin olmayan biçimde tahmin edilmesine yol açar.

Bir yol, p değerini belki benzer veri kümelerinden edinilen eski deneyimlere göre isteğe bağlı olarak saptamaktır. Almaşık bir yaklaşım K gibi yüksek bir ardışık bağlanım derecesi saptayıp modeli sırasıyla $p=K, (K-1), (K-2),\ldots$ dereceleri için verilere uydurmak olabilir. p'nin her değeri için modelin son ardışık bağlanım katsayısı ϕ_p'nin 0 olduğunu söyleyen sıfır önsavı, iki yanlı karşı önsavla sınanır. Bu sıfır önsavının reddedildiği bir p değeri bulunca bu işlemler sona erer. Öyleyse amacımız

$$H_0:\ \phi_p = 0$$

sıfır önsavını,

$$H_1:\ \phi_p \neq 0$$

karşı önsavıyla sınamaktır. Bu sınama, sıfır önsavı doğruyken katsayı tahmin edicisinin tahmin edilmiş standart hatasına oranının, iyi bir yaklaşıklılıkla, standart normal dağılıma uyduğu olgusuna dayanır. Bu durumda karar kuralı şöyledir:

$$\frac{\hat{\phi}_p}{s_p} < -z_{\alpha/2} \qquad \text{ya da} \qquad \frac{\hat{\phi}_p}{s_p} > z_{\alpha/2} \ \text{ise } H_0\text{'ı reddedin}$$

Burada α sınamanın anlamlılık düzeyi, $\hat{\phi}_p$ ile s_p katsayı tahminiyle onun standart hatası, $z_{\alpha/2}$ ise

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan sayı, Z de standart normal rassal değişkendir.

Bu yaklaşımı, sınamalarda %10 anlamlılık düzeyi kullanarak Lydia E. Pinkham'ın verilerine uygulayalım. Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

Düşünülen en yüksek ardışık bağlanım derecesini 4'te sabitleyelim. Verilere uydurulmuş dördüncü dereceden (17.9.7) modeliyle başlarsak şunu buluruz:

$$\frac{\hat{\phi}_4}{s_4} = \frac{-0.291}{0.210} = -1.386$$

Bu durumda $\phi_4 = 0$ sıfır önsavı reddedilemez. Tahmin edilmiş üçüncü dereceden (17.9.6) modeline geçersek şu değeri elde ederiz:

$$\frac{\hat{\phi}_3}{s_3} = \frac{-0.057}{0.209} = -0.273$$

Demek ki $\phi_3 = 0$ sıfır önsavı bu modelde reddedilemez. Daha sonra tahmin edilmiş ikinci dereceden (17.9.5) modeline bakalım. Burada şunu görürüz:

$$\frac{\hat{\phi}_2}{s_2} = \frac{-0.358}{0.191} = -1.874$$

Öyleyse bu modelde $\phi_2 = 0$ sıfır önsavı %10 anlamlılık düzeyinde reddedilmektedir. Buna göre ikinci dereceden modelle yola devam edeceğiz demektir.

Tahmin edilmiş uygun bir ardışık bağlanım modeli bulduktan sonra bir serinin gelecekteki değerlerini kestirmek görece kolay bir iştir. Bu süreci, tahmin edilmiş ikinci dereceden ardışık bağımlı (17.9.5) modelini kullanıp Lydia E. Pinkham'ın verilerinden gelecekteki satışları kestirerek açıklayacağız. Bu serideki son iki satış değeri şöyledir:

$$X_{29} = 1{,}387 \qquad X_{30} = 1{,}289$$

Şimdi bir sonraki X_{31} değerini tahmin edelim. (17.9.5)'te $t = 31$ dersek şunu buluruz:

$$X_{31} = 313.68 + 1.180X_{30} - 0.358X_{29} + a_{31}$$

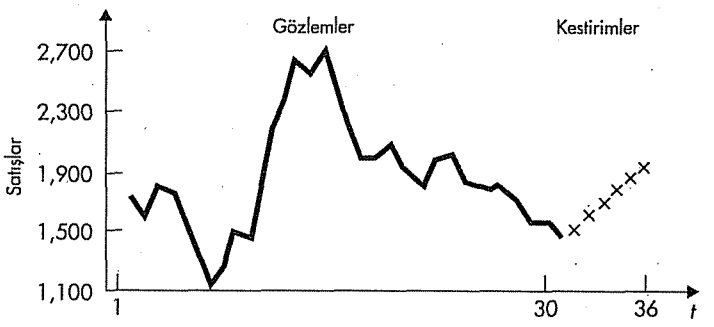
Şimdi a_{31}, ortalaması 0 olan ve bu tahmin yapıldığı sırada bilinen hiçbir şeyle ilişkisi bulunmayan bir rassal değişkendir. Dolayısıyla bu terim için yapabileceğimiz en iyi tahmin 0 olur. Böylece X_{31} kestirimimiz şu olacaktır:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{31} &= 313.68 + 1.180X_{30} - 0.358X_{29} \\ &= 313.68 + (1.180)(1{,}289) - (0.358)(1{,}387) = 1{,}338.15\end{aligned}$$

(17.9.5)'te $t = 32$ dersek şunu buluruz:

$$X_{32} = 313.68 + 1.180X_{31} - 0.358X_{30} + a_{32}$$

Bir kez daha a_{32} için en iyi tahminimiz 0'dır. Ayrıca X_{31}'i de bilmiyor, yalnızca $\hat{X}_{31}$ tahminini biliyoruz, öyleyse iki yıl sonraki satışların doğal bir kestirimi şu olur:



Çizim 17.13 Lydia E. Pinkham'ın satışları ve bunlara uydurulan ikinci dereceden ardışık bağlanım modeline dayanan kestirimler

$$\hat{X}_{32} = 313.68 + 1.180\hat{X}_{31} - 0.358X_{30}$$

$$= 313.68 + (1.180)(1{,}338.15) - (0.358)(1.289) = 1{,}431.24$$

Aynı yolu izleyerek şunu da bulabiliriz:

$$X_{33} = 313.68 + 1.180X_{32} - 0.358X_{31} + a_{33}$$

X_{32}, X_{31}, a_{33} yerine kestirimleri olan $\hat{X}_{32}$, $\hat{X}_{31}$ ve 0 koyarsak, X_{33}'ün kestirimi şu olur:

$$\hat{X}_{33} = 313.68 + 1.180\hat{X}_{32} - 0.358\hat{X}_{31}$$

$$= 313.68 + (1.180)(1{,}431.24) - (0.358)(1{,}338.15) = 1{,}523.49$$

Bu yolu izleyerek istediğimiz kadar ilerisinin kestirimlerini hesaplayabiliriz. Veri serisiyle ilk altı kestirim Çizim 17.13'te gösterilmiştir.

Tahmin edilmiş bir ardışık bağlanım modeline dayanılarak kestirim hesaplamanın genel süreci aşağıdaki çerçeve içinde özetlenmiştir.

Tahmin Edilmiş Ardışık Bağlanım Modelleriyle Kestirim

Bir zaman serisinin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gözlemlerini biliyor olalım, p'inci dereceden bir ardışık bağlanım modeli bu verilere uydurulmuş olsun. Tahmin edilen modeli şöyle yazalım:

$$X_t = \hat{\gamma} + \hat{\phi}_1 X_{t-1} + \hat{\phi}_2 X_{t-2} + \cdots + \hat{\phi}_p X_{t-p} + a_t$$

n anında durarak zaman serisinin gelecek değer kestirimlerini

$$X_{n+h} = \hat{\gamma} + \hat{\phi}_1 \hat{X}_{n+h-1} + \hat{\phi}_2 \hat{X}_{n+h-2} + \cdots + \hat{\phi}_p X_{n+h-p} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

tanımından elde ederiz. Burada $j > 0$ için $\hat{X}_{n+j}$, X_{n+j}'nin n anındaki kestirimi, $j \leq 0$ için $\hat{X}_{n+j}$, X_{n+j}'nin doğrudan gözlenen değeridir.

17.10 ARDIŞIK BAĞLANIMLI, BÜTÜNLEŞİK, HAREKETLİ ORTALAMA MODELLERİ

Bu altbölümde, son birkaç yıldır işletmecilik uygulamalarında yaygın biçimde kullanılan bir zaman serisi kestirimi yaklaşımından kısaca söz edeceğiz. Ele alınacak modeller, Altbölüm 17.9'da incelenen ardışık modelleri özel durumlar olarak içermektedir.

George Box ile Gwilym Jenkins, klâsikleşmiş kitaplarında, uygulamada karşılaşılan kestirim sorunlarının geniş bir yelpazesi için orta derecede becerikli bir kullanıcının bile iyi sonuçlar alabileceği yeterince verimli bir yöntem ortaya attılar.[2] Box-Jenkins yaklaşımının özü, kestirimlerin türetilebileceği çok geniş bir modeller kümesinin gözönüne alınmasının yanısıra, eldeki verilerin özelliklerine dayanarak herhangi bir belli kestirim sorununa uyan bir modelin seçilmesi yöntemidir.

Bu modellerin genel sınıfı, **ardışık bağlanımlı, bütünleşik, hareketli ortalama modelleri** sınıfıdır. Bunlar, Altbölüm 17.9'daki ardışık bağlanım modellerinin doğal uzantılarıdır. Ayrıca, yaygın olarak kullanılan başka bir sürü kestirim algoritmasının yanısıra, Altbölüm 17.7 ile 17.8'deki basit üstel düzleme ve Holt-Winters kestirimcileri de bu genel sınıfın özel üyelerinden türetilebilir. Bu modeller ve Box-Jenkins zaman serisi çözümlemesi teknikleri, mevsimselliği hesaba katmak ve ayrıca bir serinin gelecek değerlerini yalnızca kendi geçmişinden değil, ilgili başka serilerin geçmişinden gelen bilgilere de dayandırabilen ilgili serileri ele almak üzere de genelleştirilebilir. Bu son olanak, Bölüm 12-14'te incelenen regresyon sürecini genelleştiren bir kestirim yaklaşımı getirir.

Yer darlığı nedeniyle burada Box-Jenkins yönteminin tam bir incelemesini yapmak olanaksızdır.[3] Bu yöntem özünde şu aşamaları içerir:

1. Araştırmacı eldeki verilerden kolayca hesaplanan özet istatistiklere bakarak genel sınıf içinden uygun olabilecek belli bir modeli seçer. Bu bir kurallar kümesini izleyerek yapılan basit bir iş değildir, tersine beli bir miktar sezgi ve deneyim gerektirir. Ancak

---

[2] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting, and Control* (San Francisco: Holden-Day, 1970).

[3] Bu yönteme bir giriş olmak üzere bkz. P. Newbold, T. Bos, *Introductory Business Forecasting* (Cincinnati, OH: South-Western, 2.nd ed., 1994).

bu aşamada seçilen modele sonuna kadar bağlı kalmmayabilir, çözümlemenin daha sonraki bir aşamasında eğer uygun bulunursa bu model bırakılıp başka birine geçilebilir.

2. Seçilen belirli model hemen her zaman bazı bilinmeyen katsayılar içerir. Bunlar, en küçük kareler gibi etkin istatistik teknikleri kullanılarak tahmin edilmek zorundadır.

3. Son olarak, tahmin edilen modelin eldeki zaman serisi verilerini ne kadar iyi temsil ettiğini görmek için sınamalar yapılır. Bu aşamada görülen herhangi bir yetersizlik başka bir model kurmayı gerektirebilir. Model seçimi, katsayı tahmini, modelin sınanması süreci doyurucu bir model bulununcaya kadar yinelenir.

Box-Jenkins kestirim yaklaşımı esneklik gibi büyük bir üstünlüğe sahiptir; elde geniş bir kestirimciler yelpazesi vardır ve bunlar arasında yapılacak seçim verilerdeki ipuçlarına bağlıdır. Ayrıca, bu kestirim yaklaşımının, gerçek işletmecilik ve iktisat zaman serileri kullanan başka yöntemlerle karşılaştırıldığında genellikle çok iyi işlediği görülmüştür.[4] Demek ki bu süreç asıl can yakıcı sınamadan geçmiştir: Uygulamada iş görmektedir.

Bu kısa incelemeyi bitirken, ardışık bağlanımlı, bütünleşik, hareketli ortalama modellerini verilere uydurarak zaman serisi çözümlemesi yapan bilgisayar programlarının yaygın kullanımına dikkat çekelim. Ancak bu yöntemin, bu bölümün daha önceki altbölümlerinde açıklanan daha basit bazı yöntemlere göre bir eksiği vardır. Genel sınıf içinden uygun bir modelin seçilmesindeki esneklik nedeniyle Box-Jenkins yaklaşımı, her zaman serisine aynı modeli uygulamayı zorlayan yöntemlere göre, nitelikli işgücü bakımından daha pahalıya malolur.

ALIŞTIRMALAR

35. Çizelge 17.9'daki verileri kullanarak işlem hacmi endeksi için birinci dereceden bir ardışık bağlanım modelini tahmin edin. Gelecek dört günü kestirmek için verilere uydurulmuş bu modeli kullanın.

36. Aşağıdaki çizelge bir şirketin 12 hafta boyunca pay senetlerinin işlem hacmini (yüzbin tane olarak) göstermektedir. Bu verileri kullanıp birinci dereceden bir ardışık bağlanım modeli tahmin edin, gelecek üç haftanın işlem hacmini kestirmek için bu modeli kullanın.

HAFTA	İŞLEM HACMİ	HAFTA	İŞLEM HACMİ	HAFTA	İŞLEM HACMİ
1	27.1	5	21.9	9	17.0
2	12.9	6	17.3	10	21.4
3	12.1	7	11.7	11	25.0
4	13.6	8	23.8	12	20.5

[4] Sözgelimi bkz. P. Newbold, C. W. J. Granger, "Experience with forecasting univariate series and the combination of forecasts," *Journal of the Royal Statistical Society A*, 137 (1974), 131-46.

37. [*Bu alıştırma çoklu regresyon hesaplamaları için bilgisayar programı gerektirir.*] Alıştırma 11'deki konut yapımı verilerini kullanarak 1-4. dereceden ardışık bağlanım modellerini tahmin edin. Ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınamak için Altbölüm 17.9'daki yöntemi kullanın. Bu modellerden birini seçip gelecek beş yılın konut yapımı kestirimlerini hesaplayın. Özgün verileri bu kestirimlerle birlikte bir zaman çiziminde gösterin. Ardışık bağlanım derecesini sınamada %5 anlamlılık düzeyi kullanılsaydı sonuçlar değişir miydi?

38. [*Bu alıştırma çoklu regresyon hesaplamaları için bilgisayar programı gerektirir.*] Alıştırma 12'deki pay senedi başına şirket kazançları verilerine 1-4. dereceden ardışık bağımlı modeller uydurun. Ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınamak için Altbölüm 17.9'daki yöntemi kullanın. Bu modellerden birini seçip gelecek beş yılın pay senedi başına kazanç kestirimlerini hesaplayın. Özgün verileri bu kestirimlerle birlikte bir çizimde gösterin. Sınamada %5 anlamlılık düzeyi kullanılsaydı sonuçlar değişir miydi?

39. [*Bu alıştırma çoklu regresyon hesaplamaları için bilgisayar programı gerektirir.*] Alıştırma 25'teki şirket kazancı verilerini alın. Bu verilere 1, 2, 3. dereceden ardışık bağlanım modelleri uydurun. Ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınamak için Altbölüm 17.9'daki yöntemi kullanıp ardışık bağımlılık derecesi için bir değer seçin. Gelecek dört yılın pay senedi başına kazanç kestirimlerini türetmek için seçtiğiniz bu modeli kullanın. Gözlemler ve kestirimler için bir zaman çizimi düzenleyin. %5 anlamlılık düzeyinde sınamalarla farklı sonuçlar elde edilir mi?

40. Altbölüm 17.9'da birinciden dördüncü dereceye kadar ardışık bağlanım modelleri yıllık satış verilerine uydurulup (17.9.4)-(17.9.7) eşitlikleriyle verilmiştir. Daha sonra, ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınayıp bir model seçtik. %5 anlamlılık düzeyindeki sınamalarla bu süreci yineleyin.

(a) Şimdi hangi ardışık bağlanım modeli seçildi?

(b) Seçilen bu modele dayanarak gelecek üç yılın satış kestirimlerini bulun.

41. Belli bir ürün için yıllık satış hacmi üçüncü dereceden bir ardışık bağlanım modeliyle gayet iyi tanımlanabilmektedir. Tahmin edilen model şöyle bulunmuştur:

$$X_t = 202 + 1.10X_{t-1} - 0.48X_{t-2} + 0.17X_{t-3} + a_t$$

1993, 1994, 1995 için satışlar sırasıyla 867, 923, 951 olmuştur. 1996'dan 1998 yılına kadar satışları kestirin.

42. *Rassal yürüyüş* modeli, pek çok zaman serisi, özellikle de spekülatif pazar fiyatları için gerçek verilerin iyi bir temsil edicisi olmuştur. Bu model şöyle yazılır:

$$X_t = X_{t-1} + a_t$$

Bu uygun bir modelse aşağıdaki eşitliğin n anında X_{n+h} kestirimlerini verdiğini gösterin:

$$\hat{X}_{n+h} = X_n \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

43. Alıştırma 42'deki modeli, dönemden döneme beklenen değişmenin 0'dan farklı olabilmesine olanak tanımak için bazen genişletmek gerekir. *Sürüklenmeli rassal yürüyüş* diye bilinen bu genişletilmiş model şöyle yazılır:

$$X_t = \gamma + X_{t-1} + a_t$$

Bu uygun bir modelse aşağıdaki eşitliğin n anında X_{n+h} kestirimlerini verdiğini gösterin:

$$\hat{X}_{n+h} = X_n + h\gamma \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

44. [*Bu alıştırma çoklu regresyon hesaplamaları için bilgisayar programı gerektirir.*] Alıştırma 30'daki 24 ay boyunca ücretleri gösteren verileri alın. Gözlemleri X_t ($t = 1, 2, \ldots, 24$) ile gösterin. Şimdi de serinin ilk farklarını aşağıdaki gibi alın:

$$Z_t = X_t - X_{t-1} \qquad (t = 2, 3, \ldots, 24)$$

Z_t serisine birinciden dördüncü dereceye kadar ardışık bağlanım modelleri uydurun. Ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınamak için Altbölüm 17.9'daki yöntemi kullanıp bu modellerden birini seçin. Seçtiğiniz modeli kullanarak Z_t ($t = 25, 26, 27$) için kestirimleri bulun. Böylece gelecek üç ayın ücret kestirimlerini elde edin.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

45. İmalat sanayiindeki saat ücretlerini aylık olarak gösteren Alıştırma 30'a dönelim.
(a) 1. ayı temel alan bir endeks düzenleyin.
(b) 15. ayı temel alan bir endeks düzenleyin.

46. Bir kütüphane hem kitap hem dergi satın almaktadır. Aşağıdaki çizelge altı yıl boyunca alınan miktarları ve her yıl ödenen (dolar cinsinden) ortalama fiyatı göstermektedir. 1. yılı temel olarak alın.

YIL	KİTAPLAR		DERGİLER	
	FİYAT	MİKTAR	FİYAT	MİKTAR
1	20.4	694	30.1	155
2	22.3	723	33.4	159
3	23.3	687	36.0	160
4	24.6	731	39.8	163
5	27.0	742	45.7	160
6	29.2	748	50.7	155

(a) Bu fiyatların tartısız bileşik endeksini bulun.
(b) Laspeyres fiyat endeksini bulun.
(c) Laspeyres miktar endeksini bulun.

47. Bir zaman serisine çeşitli bileşenlerden oluşmuş olarak bakılabileceğini söyleyen ifadeyi açıklayın. Belli bileşenlerinin önemli olmasını beklediğiniz işletmecilik ve iktisat zaman serilerinden örnekler verin.

48. Pek çok işletmecilik uygulamasında satışlar ya da kazançlar gibi zaman serilerinin gelecek değerlerinin kestirimleri yalnızca sözkonusu zaman serisinin geçmiş değerlerine dayandırılır. Bu kestirimlerin türetiminde zaman serisinin davranışının hangi özelliğinden yararlanılır?

49. Stok denetiminden sorumlu bir yönetici, çeşitli ürünlerin gelecek altı ay için aylık satış kestirimlerine gerek duymaktadır. Bu yöneticide sözkonusu ürünlerin her biri için son dört yıl boyunca aylık satış verileri bulunmaktadır. Yönetici son dört yılın ortalama aylık satışlarını gelecek altı ayın her biri için kestirim olarak kullanmaya karar verir. Bunun iyi bir seçim olduğunu düşünür müsünüz? Gerekçenizi açıklayın.

50. Bir zaman serisinin mevsime göre düzeltilmesi ne anlama gelir? İktisadi zaman serilerini mevsime göre düzeltmek için kamu kuruluşlarının niçin büyük çaba harcadıklarını açıklayın.

51. Aşağıdaki çizelge 14 yıl boyunca ABD sınai üretim endeksini göstermektedir.

YIL	ENDEKS	YIL	ENDEKS	YIL	ENDEKS
1	68	6	87	11	100
2	74	7	89	12	99
3	80	8	83	13	104
4	86	9	88	14	110
5	89	10	98		

(a) Dizilim sınamasını kullanarak bu serinin rassallığını sınayın.
(b) Bu verileri bir zaman çizimine yerleştirip çizimin gösterdiklerini tartışın.
(c) 3 noktalı ortalanmış basit hareketli ortalamalar serisini hesaplayın. Bu düzlenmiş seriyi çizip davranışını tartışın.

52. Aşağıdaki çizelge bir ürünün sstışlarının 24 yıllık gözlemlerini vermektedir.

YIL	SATIŞ	YIL	SATIŞ	YIL	SATIŞ
1	853	9	650	17	538
2	693	10	751	18	708
3	715	11	723	19	907
4	785	12	702	20	912
5	851	13	991	21	777
6	797	14	1,129	22	569
7	758	15	972	23	473
8	593	16	631	24	459

(a) Büyük örneklem için dizilim sınamasını kullanarak bu serinin rassallığını sınayın.
(b) Verilerin zaman çizimini düzenleyip serinin bu çizimde gösterilen özelliklerini tartışın.

(c) 5 noktalı ortalanmış basit hareketli ortalamalar serisini hesaplayın. Bu düzlenmiş seriyi çizip davranışını tartışın.

53. Aşağıdaki çizelge bir şirketin yedi yıl boyunca pay senedi başına üçer aylık kazancını göstermektedir.

YIL	ÜÇ AY			
	1	2	3	4
1	0.786	0.668	0.863	0.807
2	0.802	0.670	0.885	0.805
3	0.579	0.423	0.904	0.851
4	0.430	0.409	1.120	0.958
5	0.680	0.460	1.190	0.830
6	0.766	0.440	1.020	0.630
7	0.690	0.600	1.130	0.680

(a) Bu verilerle bir zaman çizimi düzenleyin. Bu çizim güçlü bir mevsim bileşeni olduğu izlenimini veriyor mu?

(b) Mevsime göre düzeltilmiş bir seri elde etmek için mevsim endeksi yöntemini uygulayın.

54. Aşağıdaki çizelge bir malın onbeş ay boyunca fiyat endeksini göstermektedir.

AY	FİYAT	AY	FİYAT	AY	FİYAT
1	79	6	89	11	117
2	87	7	94	12	116
3	89	8	92	13	114
4	90	9	88	14	113
5	88	10	96	15	109

(a) 3 noktalı ortalanmış basit hareketli ortalamalar serisini hesaplayın.

(b) Bu düzlenmiş serinin zaman çizimini düzenleyip özelliklerini yorumlayın.

55. Alıştırma 52'ye dönelim. Gelecek üç yılın satış kestirimlerini bulmak için düzleme sabitini $\alpha = 0.5$ alıp basit üstel düzleme yöntemini kullanın.

56. Alıştırma 54'e dönelim. Gelecek dört ayın fiyat endeksi kestirimlerini bulmak için düzleme sabitlerini $A = 0.3$, $B = 0.4$ alıp Holt-Winters yöntemini kullanın.

57. Alıştırma 53'e dönelim. Gelecek dört tane üç ayın pay senedi başına kazanç kestirimlerini bulmak için düzleme sabitlerini $A = 0.3$, $B = 0.4$, $C = 0.2$ alıp Holt-Winters mevsimsel yöntemini kullanın.

58. [*Bu alıştırma çoklu regresyon hesaplamaları için bilgisayar programı gerektirir.*] Alıştırma 52'nin verilerini kullanıp birinciden dördüncü dereceye kadar ardışık bağlanım modelleri tahmin edin. Ardışık bağımlılık derecesinin $(p-1)$ olduğu önsavını, bu derece p'dir diyen karşı önsavla %10 anlamlılık düzeyinde sınamak için Altbölüm 17.9'daki yöntemi kullanıp bu modellerden birini seçin. Seçilmiş modelden gelecek üç yılın kestirimlerini hesaplayın.

59. ABD'de tüketici taksit borcunun kişisel gelire oranını gösteren üçer aylık verilere ikinci dereceden bir ardışık bağlanım modeli uydurulmuştur.[5] Tahmin edilen model şöyledir:

$$X_t = 0.021 + 1.74X_{t-1} - 0.74X_{t-2} + \alpha_t$$

Bu zaman serisinin son iki gözlemi aşağıdadır:

$$X_{n-1} = 13.217 \qquad X_n = 13.147$$

$X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4}$ kestirimlerini bulun.

[5] C. W. J. Granger, P. Newbold, *Forecasting Economic Time Series*, 2nd ed. (Orlando, FL: Academic Press, 1986)'da gösterilmiştir.

BÖLÜM 18

Alan Araştırması Örnekleme Yöntemleri

18.1 GİRİŞ

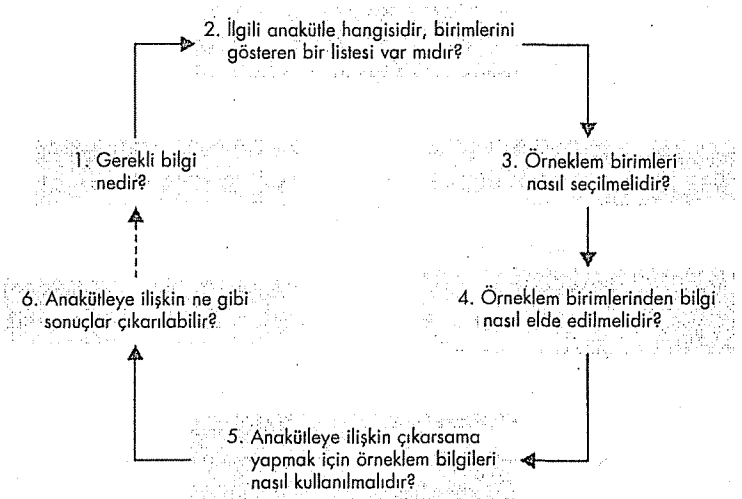
İstatistikle çıkarsama yapmanın büyük bir bölümü, bir örneklemden edinilen bilgiye dayanarak bir anakütleye ilişkin söylemler geliştirmekle ilgilidir. Buraya kadar olan tartışmalarımızda iki önemli konu biraz gelişigüzel biçimde ele alındı. Birincisi, örneklem birimlerinin gerçek yaşamda nasıl seçileceği konusunda pek az şey söylendi. İkincisi, genellikle anakütledeki birim sayısının, örneklem birim sayısına göre çok büyük olduğu varsayıldı. Bu bölümde ille de büyük olması gerekmeyen bir anakütleye ilişkin bir şeyler bulmaya çalışan bir araştırmacının sorunu üzerinde yoğunlaşacağız. Bu araştırmacı anakütle birimlerinin yalnızca bir altkümesine ilişkin bilgi derlemeye niyetli olup bunu nasıl yapacağı konusunda yol gösterilmesini beklemektedir.

Ele alınan bu genel sorunla işletmecilik uygulamalarında sık sık karşılaşılır. Pazar araştırmacıları zaman zaman ürün tercihleri konusunda bilgi derlemek amacıyla insanlardan oluşan anakütleleri tararlar. Mali denetmenler bir şirkette, anakütleye ilişkin çıkarsamalarını dayandıracakları alacak hesaplarından çoğunlukla bir örneklem seçerler. Personel yöneticileri çalışanların önerilen yeni üretim yöntemlerine karşı takınacakları tavır konusunda çoğu zaman bilgi edinmek isterler, bunun için de örnekleme yapmayı elverişli bulurlar. Kuşkusuz örnekleme yöntemlerinin kullanımı çok yaygın olup işletmecilik dışı alanları da kapsamaktadır. Belki de (ABD'de, Ç.N.) en iyi tanınan örnek bir başkanlık seçimi öncesi düzenli olarak yapılan kamuoyu yoklamalarıdır. Bu yolla derlenen

bilgi yalnız kamuoyunun değil, çabalarının en çok nerelerde yoğunlaşacağını saptamaya çalışan aday danışmanlarının da ilgisini çeker. Bu tür kamuoyu yoklamaları artık öyle bir düzeye gelmiştir ki kamu politikalarının her alanında seçmen görüşleri öğrenilmeye çalışılmaktadır. Böylece meslekten alan araştırmacıları da, siyasetçilerin çevresinde önemli kişiler durumuna yükselmiştir.

Bir anakütleden bir örneklemin nasıl alınacağı sorusuna geçmeden "Niye örneklem alalım ki?" sorusunu sormak için duralım. Bunun almaşığı anakütlenin her biriminden bilgi almaya çalışmaktır. Buna örneklem değil **sayım** denir. Bir örneklemi sayıma yeğ tutmak için üç neden vardır. Birincisi, çoğu uygulamada tam bir sayım yapmak çoğu zaman katlanılamaz ölçüde, korkunç pahalıya gelir. İkincisi, bilgi çoğunlukla acele gereklidir. Tam bir sayım, mali olanaklar içinde olsa bile, sonuçların pek bir işe yaramayacağı kadar geç bitebilir. Son olarak, çağdaş istatistik yöntemleri sayesinde, istenilen kesinlik düzeyinde sonuçlar örneklemle elde edilebilir. Görünür kesinlikleri araştırmacının gereksindiğinden fazla olan sayılar üretmek için harcanan para ve zamanın başka yerde kullanılması daha iyi olur. Üstelik, görece küçük bir örneklem alınırsa, örneklem birimlerinden daha doğru bilgiler sağlamak için harcanacak ek çabaların getirisi, daha büyük bir gruptan elde edilecek ama para ve zaman sınırları nedeniyle daha az güvenilir olabilen bilgilerin vereceği yararı aşar. Bu üç etmen —maliyet, zaman ve kesinlik— birlikte alındıklarında tercih çoğu zaman sayımdan değil örneklemden yana ağır basar.

ÇİZİM 18.1 Bir örnekleme çalışmasındaki aşamalar



Şimdi bir anakütleye ilişkin bilgi gerektiğini ve bir örneklem alınmasına karar verildiğini düşünelim. Çizim 18.1'de gösterildiği gibi her adımı tek bir soruyu yanıtlamaya yönelik altı aşamalı bir örneklem çalışması tasarlamak elverişli olur.

Bu aşamaların her birini, bir pazar araştırması sorunuyla ilişkilendirerek sırayla ele alacağız. Bir yayımcı bir işletme istatistiği ders kitabı çıkarmaya niyetli olup pazarın şimdiki durumuna ilişkin bilgi istemektedir. İşe yarar bilgiler, işletme istatistiği derslerine kayıtlı öğrenci sayısını, daha önce çıkmış kitapların pazara ne kadar girebildiğini, öğretim üyelerinin kendi dersleri için en önemli buldukları konulara ilişkin görüşlerini içerir. Yayımcının bir üniversite yerleşkeleri örnekleminden veri derlemeye karar verdiğini varsayalım.

1. GEREKLİ BİLGİ NEDİR?

Bu sorunun yanıtı, çalışmanın hem yola çıkış nedenini, hem başlangıç noktasını oluşturur. Gerekli bilgi zaten varsa ya da elde edilmesi olanaksızsa araştırmaya girişmek için bir neden yoktur. Ancak, soru kolay gibi görünmekle birlikte, bu aşamada duyarlı bir denge tutturmak gerekir. Araştırmacının kafasında tek bir gereksinme ya da çeşitli ilgi odakları bulunabilir. Ama bütün maliyetlerine katlanılarak araştırmanın yapılmasına zaten karar verilmişse, yararlı olabilecek başka bilgilerin de pek az ek giderle bu çalışmada derlenip derlenemeyeceği sorusunu sormaya değer. İşletme istatistiği kitabının yayımcısı için en işe yarar soruların pazar büyüklüğüne, rakiplerin durumuna ve öğretim üyelerinin en önemli gördükleri konulara ilişkin olduğunu görmüştük. Bu bilgileri edinmek için örneklem üyelerine başvurulacağı veriyken, bazı ek sorular sormak yararlı olabilir. Bu sorular arasında dersin bir dönem mi iki dönem mi okutulduğu, zorunlu mu seçimlik mi olduğu, öğretim üyesinin bölümü, ders kitabı seçme süreci, şimdiki ders kitabının kaç yıldır okutulduğu da bulunabilir. Bu yola bir kez girmişken soruların sayısını heyecana kapılıp artırabiliriz, çünkü bunu yapmakla çalışmanın maliyeti pek fazla yükselmez. Ama bunun bir bedeli *vardır*. Denekler, görece az sorunun sorulduğu, dolayısıyla daha az zamanlarının alındığı bir çalışmada işbirliğine daha çok yanaşabilirler. Öyleyse araştırmacının, bir yandan bütün önemli soruların sorulduğu (çünkü önemli bir soru atlanırsa bütün işlemi yeniden yapmak pahalıya patlayabilir), öbür yandan soru sayısının denek olabilecek kimselerin hoşgörü sınırlarını aşmadığı bir denge tutturması gerekir.

2. İLGİLİ ANAKÜTLE HANGİSİDİR, BİRİMLERİNİ GÖSTEREN BİR LİSTESİ VAR MIDIR?

Hangi anakütleye ilişkin çıkarsamalar yapılacaksa örneklem o anakütleden alınmalıdır demek basmakalıp bir söz gibi görünebilir. Yine de, başka bakımlardan

pekâlâ saygı duyulabilecek bir alan çalışmasının verilerinin çözümlenmesinden sık sık kuşkulu sonuçlar çıkabiliyorsa bunun nedeni tam da bu noktanın gözardı edilmesidir. Birçok yayın okurların belli sorunlara ilişkin görüşlerine başvurur. Ama bu yanıtların daha geniş anakütlelere genelleştirilmesi tehlikelidir. Burada incelenen anakütle o yayının okurlarıdır ve bu okurlar daha genel bir kamuoyunun temsil edicileri olmayabilir. Çoğu uygulamalı çalışmada, ilgilenilen *asıl* anakütle tanımlanamayabilir. Sözgelimi bir başkanlık seçiminin sonuçlarını kestirmeye çalışan bir kuruluş aslında yalnızca gerçekten oy kullanacak seçmenlerle ilgilenmektedir. Ama, asıl ilgili anakütle bu olmakla birlikte, üyelerinin kimler olduğu kolayca anlaşılamaz. Kuşkusuz, bir yol deneğe oy kullanmaya niyetli olup olmadığını sormaktır. Ancak, bu soruyu olumlu yanıtlayanların oranının gerçekten oy kullananların oranından yüksek olduğu da bilinmektedir. Başka bir yol deneğe geçen seçimde oy kullanıp kullanmadığını sormak olabilir, ama bu da yeterince doyurucu olmaktan uzaktır.

Kitabın yayımcısı, ilgili anakütleyi işletme istatistiği dersi okutan bütün öğretim üyeleri (ya da belki bütün fakülteler) olarak alabilir. Bu anakütlenin tanımlanması bir hayli kolaydır ve daha önceki pazarlama eylemlerinin bir sonucu olarak, yayımcının elinde hayli doğru bir öğretim üyeleri listesi bulunması neredeyse kesindir.

3. ÖRNEKLEM BİRİMLERİ NASIL SEÇİLMELİDİR?

Bu bölümün geri kalanının çoğunda bu soruya yanıt aranacaktır. Kısaca söylemek gerekirse "en iyi" örnekleme tasarımını bulmanın tek bir yolu yoktur. Uygun seçim genellikle eldeki soruna ve araştırmacının kaynaklarına bağlıdır. Bölüm 6'da, n üyesi olan seçilebilecek her örneklemin eşit seçilme şansı taşıdığı **basit rassal örnekleme** kavramını gördük. Gerçekten de buraya kadar ele aldığımız veri çözümlemesi araçlarının hepsi, örneklemin bu yolla seçildiği varsayımına dayanır. Ancak başka örnekleme tasarımlarının daha uygun olabileceği pek çok durum vardır. Yayımcımızın, işletme istatistiği dersinin 2 ve 4 yıllık öğretimlerde uygulanış farklarıyla ilgilendiğini düşünelim. Bu iki tür öğretime ilişkin güvenilir sonuçlara erişebilmek için örneklemde her iki tür kurumdan yeterli sayıda bulunması önemlidir. Ancak basit rassal örnekleme bu amaca ulaşmayı hiçbir biçimde kesinleyemez. Seçilen örneklemin çoğunluğunu sözgelimi 4 yıllık kurumların oluşturması pekâlâ olasıdır. Bu olasılığı önlemek için 2 ve 4 yıllık öğretim kurumlarının anakütlelerinden ayrı ayrı basit rassal örneklemler seçebiliriz. Bu, Altbölüm 18.4'te ayrıntılı olarak ele alınacak olan **katmanlı örneklemenin** bir örneğidir. Bu aşamada karar verilecek bir başka nokta örneklem birimlerinin sayısıdır. Buradaki seçim özünde gerekli kesinlik derecesine ve maliyete bağlıdır. Bu soruya da Altbölüm 18.5'te döneceğiz.

4. *ÖRNEKLEM BİRİMLERİNDEN BİLGİ NASIL ELDE EDİLMELİDİR?*

Bu son derece önemli soru pek çok araştırmanın konusudur. Genel anlamda iki önemli noktadan söz edilebilir. Birincisi, araştırmacı, örneklem birimlerinin olabildiğince yüksek bir oranından yanıt almak isteyecektir. Yanıt vermeyenlerin sayısı yüksek olursa, yanıt verenlerin genel olarak anakütleyi temsil niteliklerinden emin olmak güçtür. Sözgelimi, ders kitabı yayımcısına bilgi veremeyen profesörler belki de araştırma, danışmanlık, vb. işlerde yoğunlaşanlardır, bunların ders kitabı tercihleri de meslektaşlarından hayli farklı olabilir. Bir alan araştırmasında sorulan soru sayısının yanıtlama oranını etkileyebileceğini daha önce görmüştük. Örneklem birimleriyle ilişki kurma biçimi de bu konuda etkili olabilir. Zaman zaman soru kâğıtları örnekleme seçilenlere gönderilmekte, yanıt alma oranı da düş kırıklığı yaratacak kadar düşük olmaktadır. Pek çok araştırmacı, çalışmanın amacını açıklayıp kibarca yardım isteyen bir önyazıyı soru kâğıdına ekleyerek yanıt oranını yükseltmeye çalışır. İsim açıklanmayacağının belirtilmesi de bu konuda yardımcı olabilir. Soru kâğıdının içine konulacağı pul yapıştırılmış bir zarf da genellikle işe yarar. Küçük bir para ödemesi ya da armağan sözü verilebilir. Yine de yanıt vermeyen çıkması neredeyse kaçınılmazdır. Bu kimselere ilişkin bilgi edinebilmek için bir izleme araştırması düzenlemek uygun bir yoldur. Telefon etme ya da evlere gitme gibi daha pahalı ilişki kurma yolları daha yüksek yanıt oranı sağlayabilir. Ama bu yöntemler hem para, hem zaman açısından pahalıya gelir. Bilginin nasıl toplanacağı kararı, araştırmacının kaynaklarına ve yanıt alamamanın ne ölçüde ciddi bir sorun oluşturacağı düşüncesine bağlıdır.

Ders kitabı yayımcısı örneklem üyelerine soru kâğıdı postalamaya karar verebilir. Bu ucuz bir yoldur, dolayısıyla görece büyük bir başlangıç örneklemi seçilebilir. Yanıt vermeme oranının düşük kalması ve yanıtlayanların akla yakın bir temsil niteliği taşıması umulur. Postayla soruşturma yolu kullanılırsa yanıt vermemenin hatırı sayılır bir sapma yaratacağından korkulursa daha küçük bir başlangıç örneklemi seçilip örneklem üyeleriyle tek tek ilişki kurmak için daha büyük bir çaba harcanabilir. Uygun bir yol, üniversite yerleşkelerini düzenli olarak dolaşan şirket temsilcilerinden bir daha seferki ziyaretlerinde örneklem üyeleriyle görüşmelerini istemektir. Böyle bir süreç hayli yüksek bir yanıt oranı sağlar. Buradaki asıl güçlük, çok düşük çıkacak ek maliyetler değil, görüşmelerin tamamlanması için geçecek süredir.

İkinci nokta, olabildiğince doğru ve içten yanıtlar derlenmesi isteğidir. Özünde güvenilmez olan bilgilerin bir hayli karmaşık bir istatistik çözümlemesi bize bir şey kazandırmaz. İster posta yoluyla, ister görüşmeciler aracılığıyla sorulsun, soruların içten ve doğru yanıtlanmasını sağlayacak bir soru tasarlama sanatı vardır. Sorular, deneklerin ne sorulduğunu anlayabilecekleri biçimde elden geldiğince açık seçik düzenlenmelidir. Ayrıca, soru sözcüklerinin seçimi ya da görüşmecinin ses tonuyla deneklerin belli bir yanıtı vermeye doğru kaydırıla-

bildikleri çok iyi bilinmektedir. Görüşmeciler hiçbir zaman konuya ilişkin keskin görüşler taşıdıkları ya da belli bir yanıtı istedikleri izlenimini vermemelidir. "Tanığı yönlendirme"mek de önemlidir; sorular elden geldiğince tarafsız sorulmalıdır. Uç bir örnek olarak, aslında aynı soruyu soran aşağıdaki iki yöntemi alalım:

S. İşletme istatistiği dersinizde en önemli gördüğünüz üç konu nedir?

ya da

S. Çağdaş kalite yönetimi yöntemleri, iş dünyasındaki karşı konulamaz önemi nedeniyle, her işletme istatistiği dersinin en önemli konuları arasında artık yer almalıdır görüşüne katılıyor musunuz?

Kuşkusuz, ikinci soruyu soran kimse öğretim üyelerinden doğru bir yanıt almakla ilgileniyor olamaz. Ancak, buradakinden daha örtük bir yönlendirmeli sözcük seçiminin bile deneklerin yanıtlarında hatırı sayılır bir fark yarattığı görülmüştür.

Bu noktaya bir örnek olmak üzere, New Jersey'deki Princeton Kamuoyu Araştırmaları Şirketi her yıl hükümete yönelik kamu davranışlarını taramaktadır. Soru sözcüklerinin etkisiyle ilgilenen bu kuruluş 1981 araştırmasında aynı soruyu iki değişik biçimde sormuştur. Deneklere ciddi bir bütçe daralması durumunda hangi harcamaların azaltılmasının daha iyi olacağı sorulmaktadır. Yanıt seçenekleri arasında "Yoksullara yardım" da vardır. Bu kalemin azaltılması bütün yanıt verenlerin yalnızca %7'since seçilmiştir. İki ay sonra aynı soru sorulurken "Yoksullara yardım" yerine "Kamu refahı" sözleri konmuştur. Bu kez bu kalemin azaltılması yanıt verenlerin %39'unca seçilmiştir!

Görüşmecilerin yanıtlar üzerinde etkili olabileceği Ronald Reagan'ın başkanlığının Afrika kökenli Amerikalılar arasında benimsenme oranının saptanması çabaları sırasında görülmüştür. 1985 Aralık ayında yapılan New York Times/CBS (bir gazete ve bir TV yayın şirketi, Ç.N.) araştırması bu oranı %56 bulmuştur. Ertesi ay Afrika kökenli Amerikalı görüşmeciler kullanılarak yürütülen Washington Post/ABC (başka bir gazete ve başka bir TV yayın şirketi, Ç.N.) araştırmasında aynı oran yalnızca %23 çıkmıştır.

5. ANAKÜTLEYE İLİŞKİN ÇIKARSAMA YAPMAK İÇİN ÖRNEKLEM BİLGİLERİ NASIL KULLANILMALIDIR?

Bu kitabın büyük bölümü tam da bu soruya yanıt vermeye ayrılmıştır. Bu bölümün daha sonraki altbölümlerinde belli örnekleme tasarımları için çıkarsama yöntemlerini ele alacağız. Bu altbölümün temel amacı ise bir istatistik örnekleme çalışmasının öteki yanlarının önemini vurgulamaktır.

6. *ANAKÜTLEYE İLİŞKİN NE GİBİ SONUÇLAR ÇIKARILABİLİR?*

Sonunda çemberi tamamlayıp bir istatistik araştırmasının bulgusu olarak incelenen anakütleye ilişkin ne söylenebilir sorusuna geldik. Çalışmayı tetikleyen sorulara açık yanıtlar elde edildi mi? Çalışma sırasında başka önemli sorular belirdi mi? Araştırmacının bu aşamadaki görevi derlenen bilgileri özetleyip sunmaktır. Bunlar arasında nokta ya da aralık tahminleri, çizelgelenmiş özetler ya da bulguların çizimle sunulması bulunabilir. İşletme istatistiği dersine kayıtlı öğrencilerin sayısının en iyi tahmini kaçtır, bu tahminin iki yanına güven aralıkları eklenebilir mi? Şu anda en yaygın okutulan kitaplar hangileridir? Öğretim üyeleri hangi konulara en çok önem veriyor? 2 ve 4 yıllık öğretim kurumları pazarları arasında anlamlı farklar var mı? Bu aşamada yapılacak iş, çalışmanın bulgularını sergileyip bundan sonra ne yapılacağına karar vermektir. Çözümlemeler daha fazla bilgi toplanmasının gerekliliğini söylüyor olabilir.

Bir alan araştırması sırasında zaman zaman beklenmedik önemli konular ortaya çıkabilir ve araştırmacıyı, anakütleyi daha fazla incelemeye itebilir. İşte bu nedenle Çizim 18.1'de 6. adımı kesik çizgili bir okla 1. adıma bağladık. Yayımcımızın şöyle bir açık uçlu soru sorduğunu düşünelim:

> *S.* Yayınevimiz piyasaya yeni bir işletme istatistiği kitabı çıkarmayı planlamaktadır. Böyle bir kitapta bulunmasını özellikle istediğiniz bir nitelik var mı?

Yine diyelim ki geri gelen soru kâğıtlarının hatırı sayılır oranı gerçek iş yaşamı problemleri üzerine veriler içeren büyük bir veri bankasının kitapla birlikte pazarlanması olanağından söz ediyor olsun. Öğrenciler bu verileri çözümleyerek ders konuları üzerinde uygulama deneyimi kazanabilir. Yayımcı bu yazılımın üretim maliyeti altına girmeden önce bunun başarı şansını değerlendirebilmek için başka bir örneklem seçmeyi uygun bulabilir.

18.2 ÖRNEKLEME HATALARI VE ÖRNEKLEME DIŞI HATALAR

Bir anakütleden bir örneklem alındığında ortalama ya da oran gibi bir anakütle katsayısının değerini *tamı tamına* bilemeyiz. Her nokta tahmini kaçınılmaz olarak hatalıdır. Elde anakütlenin yalnızca bir altkümesine ilişkin bilgi olması yüzünden ortaya çıkan bir hata kaynağından daha önce söz etmiştik. Buna **örnekleme hatası** diyoruz. İstatistik kuramı, belli varsayımlar altında, örnekleme hatasının yapısını belirlememize ve anakütle katsayılarına ilişkin iyi tanımlanmış olasılık söylemleri kurmamıza olanak verir. Güven aralıkları bu tür söylemlere örnek olabilir. Bu bölümün bundan sonraki altbölümlerinde çeşitli önemli örnekleme tasarımları için istatistik çıkarsama yöntemlerini ele alacağız. Ama ön-

ce, bu kadar düzgün ve kesin çözümleyemeyeceğimiz başka bir olası hata kaynağının varlığını tanımak da önemlidir.

Uygulamalı çözümlemelerde, kullanılan örnekleme süreciyle ilişkisi olmayan bir hata daha yapılabilir. Gerçekten de bu tür hatalar bütün anakütlenin tam bir sayımı yapılsa bile ortaya çıkabilir. Bunlara da **örnekleme dışı hatalar** denir. Bunlar arasında aşağıdaki örnekler de vardır:

1. *Örneklem alınan anakütle geçerli olan değildir.* Bunun ünlü bir örneği 1936'da yaşanmıştır. O tarihte *Literary Digest* dergisi, başkanlık seçimini Franklin Roosevelt'e karşı Alfred Landon'un kazanacağını büyük bir güvenle kestirmişti. Gerçekte seçimi Roosevelt açık farkla kazandı. Bu yanlış kestirimin nedeni, Digest'in örneklemini telefon rehberi, dergi aboneleri ve araba sicil kayıtları gibi listelerden seçmesiydi. Bu kaynaklar çoğunlukla Demokrat Parti'yi destekleyen yoksulları pek temsil etmiyordu. Bu öyküden çıkarılacak ders şudur: Eğer bir anakütleye (bu örnekte ABD seçmenlerine) ilişkin bilgi edinmek istiyorsan, örneklemini o anakütleden almalısın, uygulanması ne kadar kolay görünürse görünsün onun bir altkümesinden değil.

2. *Araştırma denekleri hatalı ya da içten olmayan yanıtlar verebilir.* Bu sonuç, sorular anlaşılması güç ya da belli bir yanıtın akla daha uygun yahut daha istenir olduğu izlenimini verecek biçimde düzenlendiğinde ortaya çıkar. Ayrıca sorulması istenen kimi sorular öyle duyarlı konularda olabilir ki, herkesin bunlara içtenlikle yanıt vermesini beklemek aptallıktır. Sözgelimi bir fabrikanın yöneticisinin çalışanların hırsızlıklarından doğan yıllık şirket zararını ölçmek istediğini düşünelim. İlke olarak çalışanlardan rassal bir örneklem seçilip örneklem üyelerine "Son oniki ayda bu fabrikadan neler çaldın bakalım?" diye sorulabilir. İstenen bilgiyi elde etmenin en güvenilir yolunun bu olmadığı açıktır! Aslında bu tür sorunların üstesinden gelmede başarılı olabilecek bir olanağı daha önce görmüştük. Bu sürecin —*rassallaştırılmış yanıtlar yaklaşımı*nın— tanımı ve tanıtımı için Örnek 3.7 ile 3.19'a bakın.

3. *Deneklerden yanıt alınamayabilir.* Yanıt vermeme, önemli boyuttaysa, ek örnekleme hatası ve örnekleme dışı hatalara yol açar. Örnekleme hatası doğar çünkü örneklem büyüklüğü niyetlenilenden daha düşük olur. Örnekleme dışı hatalar doğabilir çünkü örneklem alınan anakütle aslında ilgilenilen anakütle değildir. Elde edilen bulgular, *yanıt vermeye istekli anakütleden* çekilmiş bir rassal örneklem gibi görülebilir. Bu insanlar genel anakütleden önemli bakımlardan farklı olabilir. Durum gerçekten öyleyse yapılan tahminler sapmalı olacaktır.

Yanıt vermeme oranının güçlük çıkarabileceğinden kuşku duyuluyorsa izlenebilecek üç yol vardır. Birincisi, araştırmacının görece yüksek yanıt oranına ulaştığı bilinen bir düzenekle bilgi derlemesidir. İkincisi, olabildiği kadarıyla, yanıt verenlerle vermeyenlerin yaş, cinsiyet, ırk gibi özelliklerini karşılaştırıp iki grup arasında açık farklılıklar var mı diye bakmaktır. Sonuncusu, yanıt vermeyenlerle ilişki kurmaya çalışmaktır. Bunlardan bazıları birkaç anahtar soruya yanıt vermeye razı olabilirler. Bunların yanıtları daha öncekilerden anlamlı ölçüde farklıysa o zaman yanıt vermeme sapmasının düzeltilmesine gidilebilir.

Örnekleme dışı hataları tanımak ve çözümlemek için genel bir süreç yoktur. Ama bunlar önemli olabilirler. Önerilebilecek başlıca yol, araştırmacının, ilgili anakütleyi belirleme, soru kâğıdını düzenleme, yanıt vermeyenlerin etkisini

en aza indirmeye çalışma gibi konularda özen göstermesidir. Bu bölümün geri kalanında bu özenin gösterildiği varsayılarak örneklem hatalarının ele alınışı üzerinde yoğunlaşılacaktır.

ALIŞTIRMALAR

1. Kendi yerleşkenizdeki işletmecilik öğrencilerinin istatistiğin zorunlu bir ders olup olmaması konusundaki görüşlerini belirlemek üzere bir çalışma yapmak istediğinizi düşünelim. Bu çalışmayı tasarlarken geçeceğiniz aşamaları, karşılaşmayı beklediğiniz sorunları, bu sorunları aşmak için kullanabileceğiniz teknikleri tartışın.
2. Bir yurt yöneticisi, yerleşkedeki yurtta kalan öğrencilerin verilen çeşitli hizmetler konusundaki görüşleriyle ilgilenmektedir. Sizden bir alan araştırması yapmanız istenmiştir. Altbölüm 18.1'deki altı aşamayı izleyerek nasıl bir yol tutturacağınızı açıklayın.
3. Bir yerleşkedeki giysi dükkânının yöneticisi markalı bazı ürünleri satışlarına eklemeyi düşünmekte, öğrencilerin bunlara gösterebilecekleri talebi ölçmek istemektedir. Bu bilgiyi elde etmek üzere bir alan araştırması tasarlamanız istenmektedir. Nasıl bir yol izleyeceğinizi ayrıntılı olarak tartışın.
4. Bir mali kuruluş üç yeni tasarruf fonu çıkarmayı düşünmektedir. Bunlar için en büyük desteğin, hiç olmazsa başlangıçta, şimdiki müşterilerden geleceğine inanılmaktadır. Şirket bu müşterilerin önerilen yeni fonlarla ilgilenme derecesini, olabilirse, en ilgili kimselerin bu konuya ilişkin özelliklerini de bilmek istemektedir. Sınırlı bir bütçeyle bu işi yapmak üzere görevlendirildiniz. Nasıl bir yol izlersiniz?
5. Sigorta şirketi yöneticileri, son birkaç yıldaki bazı sigorta türlerinin primlerindeki hatırı sayılır artışlar nedeniyle, işkollarının kamuoyundaki görüntüsü ve bunun doğurabileceği siyasal etkiler konusunda tedirginlik duymaya başlamışlardır. Bir halkla ilişkiler kampanyası başlatılarak kamuoyunun bu zamların nedenleri konusunda bilgilendirilmesine karar verilmiştir. Ama, hem hangi alanlardaki insanların bu konuyla en çok ilgilendiklerine, hem de sigorta poliçesi fiyat artışlarının gerisinde yatan etmenlerin anlaşılma derecesine ilişkin belirsizlikler vardır. Sözkonusu bilgileri derleyecek bir araştırmayı nasıl tasarlayabileceğinizi tartışın. Altbölüm 18.1'deki aşamaları izleyin.
6. Alıştırma 2'deki araştırmaya dönelim.
   (a) Tasarladığınız örnekleme çerçevesinde, örnekleme dışı hatalar olabileceğini öngörüyor musunuz? Yanıtınız evetse, bunların büyüklüğünü en aza indirmek için hangi adımları atmayı düşünürsünüz?
   (b) Bu çalışmada yanıt vermeme ciddi bir sorun mudur? Eğer öyleyse bu konuda ne yapılabilir?
7. Alıştırma 3'teki araştırmaya dönelim.
   (a) Örnekleme dışı hatalara yol açabilecek kaynakları tartışın, bunların nasıl en aza indirilebileceğini gösterin.
   (b) Bu araştırma sırasında yanıt vermemenin önemli bir sorun yaratacağını bekliyor musunuz? Yanıtınız evetse, bu sorun nasıl hafifletilebilir?
8. Alıştırma 5'teki araştırmada ortaya çıkabilecek örnekleme dışı hata ve yanıt vermeme sorunlarını tartışın. Bu sorunları en az indirmek için neler yapabilirsiniz?

9. Belli bir tür yanıt alamama için bir yaklaşım *yeniden arama* yöntemidir. Bir alan araştırmasında görüşmeciler bir Perşembe akşamı evlere giderler. Evde kimsenin bulunmadığı hanelere ertesi Perşembe akşamı yeniden gidilir. İlk iki uğramada ilişki kurulamayan evlere üçüncü Perşembe akşamı gidilerek bu süreç sürdürülür. Bu yolla elde edilen bilginin değeri ne olabilir?

18.3 BASİT RASSAL ÖRNEKLEME

Bu bölümün geri kalamnda, toplam N tane birimi olan bir anakütleden n kişi ya da nesneden oluşan bir örneklemin çekildiği sorunlarla ilgileneceğiz. Uygulamalı çalışmalarda böyle örneklemlerin seçilmesinde çeşitli tasarımlar kullanılmıştır. Tartışmamızın büyük bölümü **olasılıklı örnekleme** yöntemleri —örnekleme girecek birimlerin belirlenmesinde bir şans düzeneğinin sözkonusu olduğu ve belli bir örneklemin seçilme olasılığının bilindiği süreçler— üzerinde yoğunlaşacaktır.

Tanım

N nesnelik bir anakütleden n nesnelik bir örneklem çekilmesi gerektiğini düşünelim. **Basit rassal örnekleme** süreci, n nesnelik her örneklemin seçilme şansının eşit olduğu süreçtir.

Anakütle üyelerinin bir listesi varsa, basit bir rassal örneklem seçmek kolaydır. Anakütle üyelerini 1'den N'ye kadar numaraladığımızı düşünelim. Numaralanmış N tane topu bir torbaya koyup iyice karıştırarak n tanesini çekmekle basit rassal örneklem seçilebilir. Altbölüm 6.1'de belirttiğimiz gibi, aynı amaca daha etkin ulaşmak için **rassal sayılar** çizelgesi kullanılabilir. Bu çizelgeler özünde torbadan çekilen topların özelliklerini gösterir; bir koşulla, bir kez çekilen bir top torbaya geri konup yeniden çekilebilir. Ek Çizelge 4'te bazı rassal sayılar verilmiştir.

Bizim anakütlemizde 1'den 1,000'e kadar numaralanmış 1,000 kişi olsun, 100 kişilik bir rassal örneklem çekilmesi gereksin. Çizelgede gelişigüzel bir nokta, diyelim beşinci sütunun ilk satırı seçilip oradaki rassal sayının son üç basamağı okunarak süreç başlatılır. Böylece ilk beş sayı şunlar olur:

319 499 166 082 420

Bu numaraları taşıyan anakütle üyeleri örneklemin ilk beş üyesidir. Bu yol izlenerek, 000 anakütledeki 1,000 numaralı üyeye karşılık sayılıp örneklemimizin geri kalanı da elde edilir. Daha önce çıkmış bir sayı yeniden seçilirse gözardı edilir ve süreç 100 tane değişik numara çekilinceye kadar sürer. Buna **iadesiz örnekleme** denir. (Bunun almaşığı olan ve aynı kimsenin birden çok kez seçilmesine olanak veren **iadeli örnekleme** burada ele alınmayacaktır.)

Anakütleyi tam 1,000 kişi seçmenin, yukarıdaki paragrafta yapılan açıklamayı görece kolaylaştırdığını okuyucu farketmiş olabilir. Ne yazık ki gerçek yaşamda anakütlelerin 10'un üsleri biçiminde karşımıza çıkması pek seyrektir. Sözgelimi ABD'deki 1,395 fakülte arasından 100 tanesini seçmek istediğimizi düşünelim. Şimdi dört basamaklı sayılara geçmemiz gerektiği açıktır. Çizelgenin yine beşinci sütununun üstünden işe başlarsak ilk beş sayıyı şöyle okuruz:

1319 4499 3166 3082 5420

Dikkat ederseniz bu sayılardan yalnızca biri 1 ile 1,395 arasındadır. İlke olarak, bu aralıkta 100 farklı sayı çekene kadar, öbürlerini atıp işi sürdürebiliriz. Ama bu, hayli zaman kaybına yol açan sıkıntılı bir iş olur. İlk iki basamakta 13'e kadar olan sayıların kullanılabildiğini farkedersek işi hızlandırabiliriz. Bu durumda ilk basamak için şu yolu izleriz:

00, 14, 28,..., 84 yerine 00 koyun

01, 15, 29,..., 85 yerine 01 koyun

. .

. .

. .

13, 27, 41,..., 97 yerine 13 koyun

98 ya da 99 ile başlayan sayılar yine gözardı edilir. Böylece daha önce verilen beş çekim şöyle olur:

1319 0299 0366 0882 1220

Bu yolu sürdürerek örneklemimizi tamamlayabiliriz.

Eğer anakütle listesi ilgilenilen konuyla bağlantısız bir biçimde sıralanmışsa daha da çabuk başka bir süreç olabilir. O zaman, örneklemimizin anakütlenin diyelim onda birini içermesini istiyorsak listedeki her onuncu üyeyi seçmekle yetiniriz. Bu, **sıralı (sistematik) örnekleme** diye bilinir ve epey yaygın kullanılır. Sıralı bir örneklem, anakütle listesi araştırma konusuna göre rassal bir sırada olmak koşuluyla, tıpkı basit rassal bir örneklem gibi çözümlenir. Bunun tehlikesi, anakütlenin sıralanmasıyla araştırma konusu arasında farkına varılmayan örtük bir ilişki olmasıdır. Durum böyleyken sıralı örnekleme uygulanırsa bir sapma yaratılır.

BASİT RASSAL ÖRNEKLEME SONUÇLARININ ÇÖZÜMLENMESİ

Şimdi örneklem sonuçlarının çözümlenmesine geçiyoruz. Anakütle ortalaması, toplamı ve oranı üzerinde yoğunlaşacağız. Örneklemin yeterince büyük olduğunu, böylelikle merkezî limit teoremine başvurulabileceğini varsayacağız.

Anakütlede N birim bulunduğunu, n birimli bir örneklem alındığını düşünelim. Bilinmeyen anakütle ortalamasını μ ile, gerçekten gözlenen örneklem değerlerini de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile gösterelim. Anakütle ortalamasının tahmin sonucu aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.

Anakütle Ortalamasının Tahmin Edilmesi

Ortalaması μ olan N gözlemli bir anakütleden çekilmiş n birimli bir basit rassal örneklemin gözlenen değerleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun.

(i) Örneklem ortalaması, anakütle ortalaması μ'nün sapmasız bir tahmin edicisidir. Nokta tahmini şöyledir:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(ii) Örneklem ortalamasının varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç şu nokta tahminini verir:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N}$$

Burada

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

örneklem varyansıdır.

(iii) Örneklemin büyük olması koşuluyla anakütle ortalamasının $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

Burada $z_{\alpha/2}$

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir sayı, Z de standart normal dağılıma uyan rassal bir değişkendir.

Dikkat ederseniz, $(N-n)/N$ **sonlu anakütle düzeltme çarpanını** kullanıyoruz. Bu çarpan Altbölüm 6.2'de gösterilene benzer ve örneklem birim sayısının anakütle birim sayısı içindeki oranının gözardı edilemeyecek kadar büyük olduğu durumları hesaba katmamıza yarar.[1]

ÖRNEK 18.1

Belli bir kentte geçen yıl 1,118 ipotek işlemi yapılmıştır. Bunların 60'lık bir rassal örnekleminin ortalaması 87,300 $, standart sapması 19,200 $'dır. Bu kentte geçen yıl yapılan ipotek işlemlerinin ortalama değerini tahmin edip %95 güven aralığını bulun.

Anakütle ortalamasını μ ile gösterelim. Şunları biliyoruz:

$$N = 1{,}118 \qquad n = 60 \qquad \bar{x} = 87{,}300 \qquad s = 19{,}200$$

Anakütle ortalamasının bildik nokta tahmini şudur:

$$\bar{x} = 87{,}300$$

Aralık tahminlerini elde etmek için önce şunu buluruz:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N} = \frac{(19{,}200)^2}{60} \cdot \frac{1{,}058}{1{,}118} = 5{,}814.268$$

Karekök alarak standart hata tahminini buluruz:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = 2{,}411$$

%95 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Öyleyse bu kentte geçen yılki bütün ipotek işlemlerinin ortalama büyüklüğünün %95 güven aralığı aşağıdaki gibidir:

$$87{,}300 - (1.96)(2{,}411) < \mu < 87{,}300 + (1.96)(2{,}411)$$

ya da

$$82{,}574 < \mu < 92{,}026$$

Yani bu aralık 82,574 $ ile 92,026 $ arasıdır.

Zaman zaman ilgi anakütle ortalaması değil de anakütle toplamı üzerinde odaklaşır. Sözgelimi bir işletme istatistiği kitabının yayımcısı bütün ABD

[1] Altbölüm 6.2'de sonlu bir anakütleden örnekleme yaparken örneklem ortalamasının varyansının $(\sigma^2/n)[(N-n)/(N-1)]$ olduğunu gördük. Burada σ^2 anakütle varyansıdır. Ayrıca sonlu bir anakütle için örneklem varyansının $N\sigma^2/(N-1)$ olduğu da gösterilebilir. Böylece anakütle varyansını tahmin etmek için örneklem varyansı kullanıldığında uygun sonlu anakütle düzeltme çarpanı $(N-n)/N$ dir.

fakültelerinde işletme istatistiği dersine kayıtlı toplam öğrenci sayısının bir tahminini isteyebilir. Anakütle toplamına ilişkin çıkarsama kolaydır. İlgili bulgu, bizim gösterimimizle

$$\text{Anakütle toplamı} = N\mu$$

olgusundan çıkarılır.

Anakütle Toplamının Tahmin Edilmesi

N büyüklüğünde bir anakütleden n büyüklüğünde basit rassal bir örneklem aldığımızı, tahmin edilecek büyüklüğün anakütle toplamı $N\mu$ olduğunu düşünelim.

(i) Anakütle toplamı $N\mu$ için sapmasız bir tahmin süreci $N\bar{x}$ nokta tahminini verir.

(ii) Anakütle toplamı tahmin edicimizin varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç de şu nokta tahminini verir:

$$N^2\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{s^2}{n}N(N-n)$$

(iii) Örneklem büyük olmak koşuluyla anakütle toplamının $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları şöyle bulunur:

$$N\bar{x} - Z_{\alpha/2}N\hat{\sigma}_{\bar{x}} < N\mu < N\bar{x} + Z_{\alpha/2}N\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

ÖRNEK 18.2

ABD'deki 1,395 fakülte arasından seçilen 400'lük bir basit rassal örneklemden geçen yıl işletme istatistiği dersine kayıtlı öğrencilerin örneklem ortalaması 320.8, örneklem standart sapması 149.7 öğrenci olarak bulunmuştur. O yıl işletme istatistiği dersine kayıtlı toplam öğrenci sayısını tahmin edip %99 güven aralığım bulun.

Anakütle ortalaması μ ise $N\mu$'yü tahmin etmeliyiz. Şunlar verilmiştir:

$$N = 1{,}395 \qquad n = 400 \qquad \bar{x} = 320.8 \qquad s = 149.7$$

Toplam için nokta tahminimiz şöyledir:

$$N\bar{x} = (1{,}395)(320.8) = 447{,}516$$

Yani işletme istatistiği dersine kayıtlı toplam 447,516 öğrenci olduğunu tahmin ediyoruz. Güven aralıklarını elde etmek için şunu bilmemiz gerekir:

$$N^2\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{s^2}{n}N(N-n) = \frac{(149.7)^2}{400}(1{,}395)(995) = 77{,}764{,}413$$

Karekök alınırsa şu bulunur:

$$N\hat{\sigma}_{\bar{x}} = 8{,}818.4$$

%99 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$$

Öyleyse anakütle toplamı için %99 güven aralığı,

$$447{,}516 - (2.575)(8{,}818.4) < N\mu < 447{,}516 + (2.575)(8{,}818.4)$$

ya da

$$424{,}809 < N\mu < 470{,}223$$

bulunur. Demek ki güven aralığımız 424,809 ile 470,223 öğrenci arasıdır.

Son olarak anakütle içinde belli özellikler taşıyan bireylerin oranının (p) tahmin edilmesi gerektiği durumu ele alalım. Örneklem birimlerinin sayısı anakütle birimlerinin sayısına göre çok küçük değilken, bu orana ilişkin çıkarsama, Altbölüm 4.6'daki hipergeometrik dağılıma dayandırılır. Ama biz burada da örneklemin, merkezî limit teoremine başvurabileceğimiz kadar büyük olduğunu varsayacağız. Ana bulgular çerçeve içinde verilmiştir.

Anakütle Oranının Tahmin Edilmesi

Belli özellikleri taşıyan üyelerinin oranı p olan bir anakütleden çekilmiş n gözlemli bir rassal örneklemde bu özellikleri taşıyan üyelerin oranına $\hat{p}$ diyelim.

(i) Örneklem oranı anakütle oranı p'nin sapmasız bir tahmin edicisidir.

(ii) Anakütle oram tahminimizin varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç şu nokta tahminini verir:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N}$$

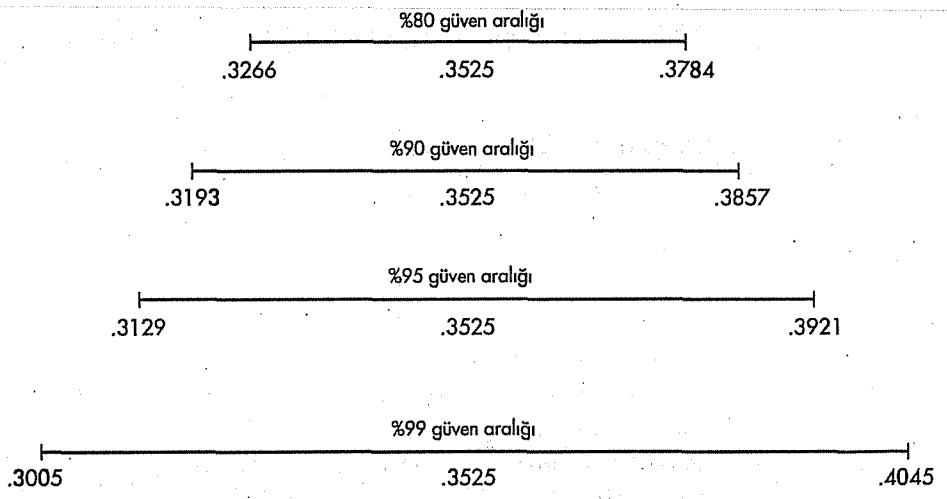
(iii) Örneklemin büyük olması koşuluyla anakütle oranının %100$(1-\alpha)$ güven aralığı şudur:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}}$$

ÖRNEK 18.3

ABD'deki 1,395 fakülte arasından seçilen 400'lük bir basit rassal örneklemden 141 tanesinde işletme istatistiği dersinin iki dönem okutulduğu anlaşılmıştır. Bu dersi iki dönem boyunca okutan bütün fakültelerin oranını tahmin edip %90 güven aralığını bulun.

Anakütle oranı p'yi tahmin etmek istiyoruz. Şunlar verilmiştir:



ÇİZİM 18.2 Örnek 18.3 verileri temel alınarak işletme istatistiği dersinin iki dönem boyunca okutulduğu fakültelerin anakütle oranı için %80, %90, %95, %99 güven aralıkları

$$N = 1{,}395 \qquad n = 400 \qquad \hat{p} = \frac{141}{400} = 0.3525$$

p'nin nokta tahmini $\hat{p} = 0.3525$'tir. Yani bütün fakültelerin %35.25'inde bu dersin iki dönem boyunca okutulduğunu tahmin ediyoruz. Güven aralığım hesaplamak için şuna gerek vardır:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N} = \frac{(0.3525)(0.6475)}{399} \cdot \frac{995}{1{,}395} = 0.0004079$$

Böylece

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = 0.0202$$

%90 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

Dolayısıyla %90 güven aralığı

$$0.325 - (1.645)(0.0202) < p < 0.325 + (1.645)(0.0202)$$

ya da

$$0.3193 < p < 0.3857$$

olur. Böylece işletme istatistiğinin iki dönem okutulduğu bütün fakültelerin yüzdesi için güven aralığı %31.93 ile %38.57 arasıdır. Çizim 18.2, bu verileri temel alarak anakütle oranı için %80, %95 ve %99 güven aralıklarını da göstermekte-

dir. Dikkat ederseniz, her zaman olduğu gibi olasılık içeriği arttıkça güven aralığı genişlemektedir.

ALIŞTIRMALAR

10. Bugünkü *Wall Street Journal* gazetesinden New York Borsası'nda işlem gören bütün pay senetlerinin listesini alın. (Herhangi bir günlük gazeteden İstanbul Menkul Kıymetler Borsası için aynı bilgiyi bulabilirsiniz. Ç.N.) Ek Çizelge 4'teki rassal sayıları kullanıp yirmi tane pay senedinden oluşan basit rassal bir örneklem çekin. Örnekleminizden geçen hafta içindeki fiyat artış yüzdelerinin örneklem ortalamasını bulun.

11. Yerel gazetenin küçük ilanlar sayfasından kentinizde satılık bütün evlerin bir listesini çıkarın. Ek Çizelge 4'teki rassal sayıları kullanıp onbeş ilandan oluşan basit rassal bir örneklem çekin. Örnekleminizden ev fiyatlarının örneklem ortalamasını bulun.

12. Bir yerleşkede 12,723 öğrenci vardır. Bu öğrencilerin tam bir listesinden 100'lük bir rassal örneklem çekmek istiyorsunuz. Bunu yapabilmek için rassal sayılar çizelgesini nasıl kullanacağınızı açıklayın.

13. Bu kitaptan elli sayfalık bir rassal örneklem çekip içinde çizim olan bütün sayfaların oranını tahmin edin.

14. Bir şirkette 189 muhasebe memuru çalışmaktadır. Bunlardan elli kişiyi içeren bir rassal örneklemde belli bir haftadaki fazla mesai süresinin ortalaması 9.7 saat, standart sapması 6.2 saattir. Bu şirkette o hafta içinde muhasebe memurlarının fazla mesai süresi ortalamasının %95 güven aralığını bulun.

15. Bir şirketin toplam 820 tane alacak hesabını inceleyecek bir mali denetmen bunlardan altmışlık bir rassal örneklem almıştır. Örneklem ortalaması 127.43 $, örneklem standart sapması 43.27 $'dır.

(a) Sapmasız bir tahmin süreci kullanıp anakütle ortalamasının bir tahminini bulun.

(b) Sapmasız bir tahmin süreci kullanıp örneklem ortalaması varyansının bir tahminini bulun.

(c) Anakütle ortalaması için %90 güven aralığını bulun.

(d) Bir istatistikçi anakütle ortalaması için bir güven aralığını 117.43 $ ile 137.43 $ arasında bulmuştur. Bu aralığın olasılık içeriği kaçtır?

16. Bir tüketici danışma bürosuna belli bir günde 125 başvuru gelmiştir. Bunlardan kırk tanelik bir rassal örneklem için, istenen bilginin verilme süresinin ortalaması 7.28 dakika, örneklem standart sapması ise 5.32 dakika olmuştur. Her başvuru için harcanan zamanın ortalaması için %99 güven aralığını bulun.

17. Aşağıdaki söylemlerden her birinin doğru mu, yanlış mı olduğunu belirtin:

(a) Anakütle üyelerinin sayısı ve rassal bir örneklemin varyansı veriyken, örneklem üyelerinin sayısı arttıkça anakütle ortalamasının %95 güven aralığı genişler.

(b) Anakütle ve örneklem üyelerinin sayıları veriyken, örneklem varyansı büyüdükçe anakütle ortalamasının %95 güven aralığı genişler.

(c) Örneklem üyelerinin sayısı ve örneklem varyansı veriyken, anakütle üyelerinin sayısı arttıkça anakütle ortalamasının %95 güven aralığı genişler. Yanıtınızın gerekçesini açıklayın.

(d) Anakütle ve örneklem üyelerinin sayıları ve örneklem varyansı veriyken, anakütle ortalamasının %95 güven aralığı, %90 güven aralığından geniştir.

18. Örneklem ortalamasının varyansı tahminimizin şöyle yazılabileceğini gösterin:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = s^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)$$

$n = N$ ise $\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = 0$ olur. Böyle bir sonucun neden beklendiğini açıklayın.

19. Alıştırma 14'ün verilerini kullanarak o işletmede ilgilenilen haftada muhasebe memurlarının fazla mesai saatleri toplamının %99 güven aralığını bulun.

20. Alıştırma 15'in verilerini kullanarak bu 820 alacak hesabının toplam tutarının %95 güven aralığını bulun.

21. Alıştırma 16'nın verilerini kullanarak bu 125 başvuruyu yanıtlamanın toplam süresinin %90 güven aralığını bulun.

22. 120 orta düzey yöneticiden sorumlu bir üst düzey yönetici, bu kimselerin bir haftada şirket içi toplantılarda geçirdikleri toplam süreyle ilgilenmektedir. Bu yöneticilerden rassal bir örnekleme seçilen ellibeşinden gelecek hafta günlük tutmaları istenmiştir. Bulgular çözümlendiğinde bu örneklem üyelerinin şirket içi toplantılarda toplam 143 saat geçirdikleri anlaşılmıştır. Örneklem standart sapması 3.1 saattir. O hafta içinde 120 orta düzey yöneticinin hepsinin şirket içi toplantılarda geçirdikleri toplam sürenin %90 güven aralığını bulun.

23. ABD'deki toplam 1,395 fakülteden alınan 400'lük bir basit rassal örneklem, J. T. Ripper (Karındeşen Jack, Ç.N.) tarafından yazılmış *Bunaltan Baş Belâsı İstatistik* kitabını kullanan 39 fakülteyi içermektedir. Ripper'ın kitabını kullanan bütün fakülteler oranının %95 güven aralığını bulun.

24. Bir işletme fakültesinin dekanı mezuniyet koşullarını değiştirmeyi düşünmektedir. Geçerli kurallara göre her işletme öğrencisinin bir listedeki fen derslerinden birini alması gerekmektedir. Bu koşulun bir çevrebilim dersi almak biçiminde değiştirilmesi önerilmektedir. İşletme fakültesinde 420 öğrenci vardır. Bunlardan seçilen 100 kişilik bir rassal örneklemden ellialtı kişi öneriye karşı çıkmıştır. Fakültenin bütün öğrencileri içinde bu öneriye karşı çıkanlar oranının %90 güven aralığını bulun.

25. Bir üniversite yurdunda kalanların 257'si birinci sınıftadır. Bunlardan seçilen 120 kişilik bir örneklemin otuzyedisi gelecek yıl da yurtta kalma konusunda kararlı olduklarını belirtmiştir. Bu yurttaki birinci sınıf öğrencilerinden gelecek yıl da yurtta kalma konusunda kararlı olanlar oranının %95 güven aralığını bulun.

26. Bir derse 420 öğrenci kayıtlıdır. Dönem sonu sınavına girmek öğrenciye bırakılmıştır, girenin notu yükselebilir ama düşmez. Seksen öğrencilik bir rassal örneklemin otuzbiri dönem sonu sınavına gireceklerini söylemiştir. Bu sınıfta dönem sonu sınavına girecek öğrenci oranının %90 güven aralığını bulun.

18.4 KATMANLI ÖRNEKLEME

Bir üniversitenin Güney Afrika'da iş yapan şirketlerin pay senetlerini elinde tutması konusunda kendi yerleşkenizdeki öğrencilerin görüşlerini araştırmaya karar verdiğinizi düşünelim. Bu duyarlı bir konu olup uygun sözcükler seçerek soru düzenlemek zor olabilir. Her örneklem üyesine çeşitli sorular sormak isteyebilir, ancak kaynaklar sınırlı olduğundan küçük bir örneklem seçmeye zorlanabilirsiniz. Yerleşkedeki bütün öğrencileri gösteren listeden diyelim 100 kişilik bir basit rassal örneklem seçeceksiniz. Ancak örneklem üyelerinin kayıtlarını daha yakından incelediğinizde yalnızca ikisinin işletme öğrencisi olduğunu gördünüz, ama anakütle içinde işletme öğrencileri oranı bundan çok daha yüksektir. Bu aşamada iki sorunla karşı karşıyasınız. Birincisi, işletme öğrencilerinin görüşlerini öteki öğrencilerinkiyle karşılaştırmak istiyor olabilirsiniz. Ama örneklemde çok düşük temsil edildikleri veriyken bu pek yapılamaz. İkincisi, işletme öğrencilerinin bu konudaki görüşlerinin öbür öğrenci arkadaşlarından farklı olmasını düşünüyor olabilirsiniz. Eğer durum böyleyse, bu grubun ciddi ölçüde yetersiz temsil edildiği bir örnekleme dayanarak yapılan çıkarsamanın güvenilirliğinden kuşku duyarsınız.

Bu aşamaya kadar hiçbir yol göstermediğimiz nokta bu ikinci durumdur. Rassal bir örneklem aldığınıza göre, bildik yolla elde edilen her tahmin edici sapmasız olacaktır ve bunu izleyen çıkarsama da istatistik bakımından kesinlikle geçerli sayılmalıdır düşüncesiyle belki kendinizi rahatlatabilirsiniz. Ama biraz düşününce bunun bir züğürt tesellisi olduğunu anlayacaksınız. Sapmasızlığın bütün söylediği şudur: Örnekleme süreci çok büyük sayıda yinelenir de her defasında tahmin edici hesaplanırsa, bunun ortalaması ilgili anakütle ortalamasına eşit olacaktır. Ama siz gerçekte örneklem sürecini çok büyük sayıda yineleme*yeceksiniz* ki. Çıkarsamanızı *yalnızca tek bir örnekleme* dayandırmak zorundasınız. Seçebileceğiniz başka örneklemlerde işletme öğrencilerinin gereğinden çok temsil edilip uzun dönemde sonuçların "ortalamaya doğru" çekildiği olgusu sizin pek işinize yaramaz.

Birçok bakımdan ilk örnekleme yeğ tutulabilecek ikinci bir çekici yol daha vardır. Şansınıza küsüp ilk örneklemi gözardı eder, yeni bir tane seçersiniz. İkinci denemedeki örneklemin yapısı anakütlenin daha iyi bir temsil edicisi gibi görünüyorsa onunla işi pekâlâ sürdürebilirsiniz. Buradaki zorluk şudur. Benimsediğiniz —görünüşünü beğendiğiniz bir örneklem buluncaya kadar anakütleden örneklem çekmek biçimindeki— örnekleme sürecini biçimsel bir kalıba sokmak çok zordur, dolayısıyla da örneklem bulgularının herhangi bir istatistik geçerlilikle çözümlenmesi pek güçtür. Bu yol artık basit rassal örnekleme değildir, dolayısıyla Altbölüm 18.3'teki süreçler de artık kesinlikle geçerli sayılamaz.

Neyse ki bu tür bir soruna karşı güvence sağlayan üçüncü bir örnekleme tasarımı bulunmaktadır. Daha başlangıçta anakütle üyelerinin belirlenebilir kimi özelliklerinin araştırma konusuyla ilgili olduğundan kuşkulanılırsa ya da anakütlenin belli altkümeleri araştırmacının özel ilgisini çekiyorsa, örneklem üye-

lerini seçerken basit rassal örneklemeyle yetinmek zorunlu (belki istenir bir şey de) değildir. Bunun yerine anakütle altkümeler ya da **katman**lara ayrılıp her katmandan ayrı bir basit rassal örneklem çekilebilir. Tek koşul, anakütledeki her bir üyenin bu katmanlardan birinde, ama yalnız birinde yer almasıdır.

Katmanlı Rassal Örnekleme

N birimden oluşan bir anakütlenin birbiriyle bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı K tane gruba ya da **katman**a ayrılabildiğini düşünelim. **Katmanlı rassal örnekleme**, anakütlenin her bir katmanından bağımsız basit rassal örneklemler çekmektir.

Anakütledeki K katman $N_1, N_2, \ldots, N_K$ üye içeriyorsa şunu yazabiliriz:

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_K = N$$

Her katmandan aynı sayıda örneklem üyesi almak zorunlu değildir. Örneklemdeki sayıları $n_1, n_2, \ldots, n_K$ ile gösterelim. Bu durumda örneklemdeki üyelerin toplam sayısı şudur:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_K = n$$

Güney Afrika'daki yatırımlar konusunda görüşleri alınacak öğrenci anakütlesi —işletme öğrencileri ve öteki öğrenciler diye— iki katmana ayrılabilir. Bu kadar basit olmayan katmanlama da yapılabilir. Başka bir konuda bir öğrencinin hem cinsiyeti hem bulunduğu (birinci, ikinci, üçüncü ya da dördüncü) sınıf konuyla ilgili olabilir. Bu durumda katmanların bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olma koşulunu sağlamak için —dördüncü sınıfta kız, dördüncü sınıfta erkek, vb— sekiz katman gerekir.

Örnekleme çabasını katmanlara nasıl dağıtacağımızı bu bölümde daha ileride ele alacağız. Burada, uygulamada sık sık uygulanan çekici bir olanağın *oranlı dağıtım* olduğunu belirtelim: Herhangi bir katmandaki örneklem üyelerinin oranı, o katmandaki anakütle üyelerinin oranıyla aynıdır.

KATMANLI RASSAL ÖRNEKLEM BULGULARININ ÇÖZÜMLENMESİ

Katmanlı bir rassal örneklemin bulgularının çözümlenmesi görece kolaydır. K katmandaki anakütle ortalamalarını $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ ile, bunların karşılığı olan örneklem ortalamalarını da $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_K$ ile göstereceğiz. Belli bir katmanı, diyelim j'inciyi ele alalım. Bu katmandan bir basit rassal örneklem alındığına göre katmanın örneklem ortalaması, anakütle ortalaması μ_j'nin sapmasız bir tahmin edicisidir. Ayrıca, katmanın örneklem ortalamasının varyansı için sapmasız bir tahmin sürecinden şu nokta tahmini bulunur:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j} = \frac{s_j^2}{n_j} \cdot \frac{N_j - n_j}{N_j}$$

Burada s_j^2, j'inci katmandaki örneklem varyansıdır. Dolayısıyla tek bir katmana ilişkin çıkarsama, Altbölüm 18.3'teki yol izlenerek yapılabilir.

Genellikle, aşağıda gösterilen bütün anakütle ortalaması μ'ye ilişkin çıkarsama da yapmak isteyebiliriz:

$$\mu = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \cdots + N_K\mu_K}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j\mu_j$$

Doğal bir nokta tahmini şöyle elde edilir:

$$\bar{x}_{kt} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j\bar{x}_j$$

μ tahmin edicisinin varyansının sapmasız bir tahmin edicisi, her katmandaki örneklemin birbirinden bağımsız olduğu olgusuna dayanır. Bu nokta tahmini de

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kt}} = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{K} N_j^2\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j}$$

ile bulunur. Genel anakütle ortalamasına ilişkin çıkarsamalar, aşağıdaki çizelgede özetlendiği gibi, bu bulgulara dayandırılır.

Katmanlı Rassal Örneklemde Anakütle Ortalamasının Tahmin Edilmesi

N_j $(j = 1, 2, \ldots, K)$ birim içeren katmanlardan n_j birimlik rassal örneklemler alınsın.

$$\sum_{j=1}^{K} N_j = N \qquad \text{ve} \qquad \sum_{j=1}^{K} n_j = n$$

olsun. Katmanlardaki örneklem ortalamaları ile varyansları $\bar{x}_j$ ve s_j^2 $(j = 1, 2, \ldots, K)$ ile, genel anakütle ortalamasını da μ gösterelim.

(i) Genel anakütle ortalaması μ'yü sapmasız tahmin eden bir süreç şunu verir:

$$\bar{x}_{kt} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j\bar{x}_j$$

(ii) Genel anakütle ortalaması varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç şunu verir:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kt}} = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{K} N_j^2\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j}$$

Burada

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j} = \frac{s_j^2}{n_j} \cdot \frac{N_j - n_j}{N_j}$$

(iii) Örneklem büyük olmak koşuluyla anakütle ortalamasının %100(1 – α) güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{x}_{kt} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}} < \mu < \bar{x}_{kt} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}}$$

ÖRNEK 18.4

Bir lokanta zincirinin Illinois'da altmış, Indiana'da elli, Ohio'da kırkbeş lokantası vardır. Yönetim menüye yeni bir yemek eklemeyi düşünmektedir. Bu yemeğe yönelebilecek talebi denemek için Illinois'da oniki, Indiana'da on, Ohio'da dokuz lokantalık rassal örneklemlerde bu yemek menüye eklenmiştir. (Bu bir oranlı dağıtım örneğidir; her katmandaki anakütle üyelerinin %20'si örnekleme alınmıştır.) Illinois, Indiana ve Ohio'yu sırasıyla 1, 2, 3 altimleriyle gösterirsek, bir hafta içinde bu üç eyalette bu yemeğin lokanta başına ısmarlanma sayılarının ortalamaları ve standart sapmaları şöyle olmuştur:

$$\bar{x}_1 = 21.2 \; s_1 = 12.8$$

$$\bar{x}_2 = 13.3 \; s_2 = 11.4$$

$$\bar{x}_3 = 26.1 \; s_3 = 9.2$$

Bu zincirdeki bütün lokantalar için lokanta başına haftalık sipariş sayısının ortalamasını tahmin edin.

Bizim gösterimimizle şunları biliyoruz:

$$N_1 = 60 \quad N_2 = 50 \quad N_3 = 45 \quad N = 155$$

$$n_1 = 12 \quad n_2 = 10 \quad n_3 = 9 \quad n = 31$$

Anakütle ortalaması tahminimiz şöyledir:

$$\bar{x}_{kt} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j \bar{x}_j = \frac{(60)(21.2) + (50)(13.3) + (45)(26.1)}{155} = 20.1$$

Öyleyse lokanta başına haftalık yemek siparişlerinin ortalama sayısı 20.1'dir.

Bir sonraki adım şu büyüklüklerin hesaplanmasıdır:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_1} = \frac{s_1^2}{n_1} \cdot \frac{N_1 - n_1}{N_1} = \frac{(12.8)^2}{12} \cdot \frac{48}{60} = 10.923$$

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_2} = \frac{s_2^2}{n_2} \cdot \frac{N_2 - n_2}{N_2} = \frac{(11.4)^2}{10} \cdot \frac{40}{50} = 10.397$$

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_3} = \frac{s_3^2}{n_3} \cdot \frac{N_3 - n_3}{N_3} = \frac{(9.2)^2}{9} \cdot \frac{36}{45} = 7.524$$

Katmanların tekil örneklem ortalamalarıyla birlikte bu büyüklükler, üç katmanın anakütle ortalamalarının güven aralıklarını hesaplamada Örnek 18.1'deki gibi kullanılabilir (yalnız burada örneklemler içimizin rahat edemeyeceği kadar küçüktür). Ama burada genel anakütle ortalaması üzerinde odaklanacağız. Bu büyüklüğün güven aralığını bulabilmek için şunu bilmemiz gerekir:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kt}} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{K} N_j^2 \hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j}$$

$$= \frac{(60)^2(10.923) + (50)^2(10.397) + (45)^2(7.524)}{(155)^2} = 3.353$$

Bunun karekökü alınırsa

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}} = 1.83$$

elde edilir. Anakütle ortalamasının %95 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Öyleyse bir haftada lokanta başına sipariş sayısı ortalamasının %95 güven aralığı

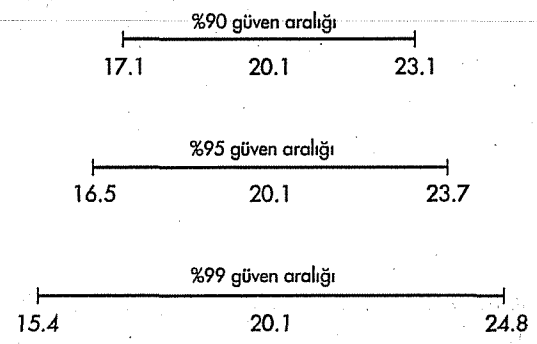
$$20.1 - (1.96)(1.83) < \mu < 20.1 + (1.96)(1.83)$$

ya da

$$16.5 < \mu < 23.7$$

bulunur. %95 güven aralığı lokanta başına 16.5 ile 23.7 sipariş arasıdır. Çizim 18.3 lokanta başına haftalık sipariş sayısının %90 ve %99 güven aralıklarını da göstermektedir.

Anakütle toplamı, anakütle ortalaması ile anakütle birim sayısının çarpımı olduğuna göre, bu süreçler bu toplamın tahmini için de aşağıdaki çerçevede görüldüğü gibi kolayca uyarlanabilir.



ÇİZİM 18.3 Örnek 18.4'teki verilere göre lokanta başına haftalık sipariş sayısının anakütle ortalaması için %90, %95 ve %99 güven aralıkları

Katmanlı Rassal Örneklemde Anakütle Toplamının Tahmin Edilmesi

N_j $(j = 1, 2, \ldots, K)$ birim içeren katmanlardan n_j birimlik rassal örneklemlerimiz olduğunu ve anakütle ortalamasını, $N\mu$, tahmin edeceğimizi düşünelim.

(i) $N\mu$'yü sapmasız tahmin eden bir süreç şu nokta tahminini verir:

$$N\bar{x}_{kt} = \sum_{j=1}^{K} N_j \bar{x}_j$$

(ii) Anakütle toplamı tahmin edicimizin varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç şu tahmini verir:

$$N^2 \hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kt}} = \sum_{j=1}^{K} N_j^2 \hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j}$$

(iii) Örneklem büyük olmak koşuluyla anakütle toplamının $\%100(1 - \alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$N\bar{x}_{kt} - z_{\alpha/2} N\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}} < N\mu < N\bar{x}_{kt} + z_{\alpha/2} N\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}}$$

ÖRNEK 18.5

ABD'deki 1,395 fakülteden 364'ü 2 yıllık, 1,031'i 4 yıllık okullardır. 2 yıllık kırk okuldan oluşan basit rassal bir örneklem ve 4 yıllık altmış okuldan oluşan bağımsız bir basit rassal örneklem alınmıştır. Geçen yıl işletme istatistiği dersine kayıtlı öğrenci sayılarının ortalamaları ile örneklem standart sapmaları çizelgede verilmiştir. İşletme istatistiği dersine kayıtlı toplam öğrenci sayısını tahmin edin.

	2 YILLIK OKULLAR	4 YILLIK OKULLAR
Ortalama	154.3	411.8
Standart sapma	87.3	219.9

Bizim gösterimimizle şunları biliyoruz:

$$N_1 = 364 \qquad n_1 = 40 \qquad \bar{x}_1 = 154.3 \qquad s_1 = 87.3$$

$$N_2 = 1{,}031 \qquad n_2 = 60 \qquad \bar{x}_2 = 411.8 \qquad s_2 = 219.9$$

Anakütle toplamı tahminimiz şudur:

$$N\bar{x}_{kt} = \sum_{j=1}^{K} N_j \bar{x}_j = (364)(154.3) + (1{,}031)(411.8) = 480{,}731$$

Öyleyse işletme istatistiği dersine kayıtlı toplam öğrenci tahmini 480,731'dir.

Daha sonra şu büyüklüklere gerek vardır:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_1} = \frac{s_1^2}{n_1} \cdot \frac{N_1 - n_1}{N_1} = \frac{(87.3)^2}{40} \cdot \frac{324}{364} = 169.59$$

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_2} = \frac{s_2^2}{n_2} \cdot \frac{N_2 - n_2}{N_2} = \frac{(219.9)^2}{60} \cdot \frac{971}{1{,}031} = 759.03$$

Son olarak

$$N^2\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kt}} = \sum_{j=1}^{K} N_j^2 \hat{\sigma}^2_{\bar{x}_j} = (364)^2(169.59) + (1{,}031)^2(759.03) = 829{,}289{,}284$$

bulup bunun karekökünü alarak şunu elde ederiz:

$$N\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kt}} = 28{,}797$$

%99 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$$

Dolayısıyla istenen güven aralığı şudur:

$$480{,}731 - (2.575)(28{,}797) < N\mu < 480{,}731 + (2.575)(28{,}797)$$

ya da

$$406{,}579 < N\mu < 554{,}883$$

Demek ki %99 güven aralığımız 406,579 ile 554,883 öğrenci arasıdır.

Şimdi de katmanlı rassal örneklemeye dayanan anakütle oranını tahmin etme sorununu ele alalım. K katmanda anakütle oranları $p_1, p_2, \ldots, p_K$ ve bunlara karşılık gelen örneklem oranları da $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_K$ ile gösterilsin. Genel anakütle oranı p ile gösterilse bunun tahmini şu olguya dayanır:

$$p = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \cdots + N_K p_K}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{K} N_j p_j$$

Bu süreçler aşağıdaki çerçevede tanımlanmıştır.

Katmanlı Rassal Örneklemde Anakütle Oranının Tahmin Edilmesi

N_j $(j = 1, 2, \ldots, K)$ birim içeren katmanlardan n_j birimlik rassal örneklemlerimiz olduğunu düşünelim. Bu katmanlardan j'incide belli bir özellik taşıyan birimlerin anakütle oranı p_j, örneklem oranı da $\hat{p}_j$ ile gösterilsin. Genel anakütle oranı p ise:

(i) p'yi sapmasız tahmin eden bir süreç şu nokta tahminini verir:

$$\hat{p}_{kt} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{K} N_j \hat{p}_j$$

(ii) Genel anakütle oranı tahminimizin varyansını sapmasız tahmin eden bir süreç şunu verir:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_{kt}} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{K} N_j^2 \hat{\sigma}^2_{\hat{p}_j}$$

Burada

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_j} = \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n_j - 1} \cdot \frac{N_j - n_j}{N_j}$$

j'inci katmandaki örneklem oranı varyansının tahminidir.

(iii) Örneklemin büyük olması koşuluyla, anakütle oranı için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\hat{p}_{kt} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}_{kt}} < p < \hat{p}_{kt} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}_{kt}}$$

ÖRNEK 18.6

Örnek 18.5'teki çalışmada örneklemdeki 2 yıllık okullardan yedisinde ve 4 yıllık okulların onüçünde işletme istatistiğinin iktisat bölümü öğretim üyelerince okutulduğu bulunmuştur. Bu dersin iktisat bölümü öğretim üyelerince okutulduğu bütün fakültelerin oranını tahmin edin.

Şunları biliyoruz:

$$N_1 = 364 \qquad n_1 = 40 \qquad \hat{p}_1 = \frac{7}{40} = 0.175$$

$$N_2 = 1{,}031 \qquad n_2 = 60 \qquad \hat{p}_2 = \frac{13}{60} = 0.217$$

Anakütle oram tahminimiz şöyledir:

$$\hat{p}_{kt} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j \hat{p}_j = \frac{(364)(0.175)+(1{,}031)(0.217)}{1{,}395} = 0.206$$

Öyleyse bütün fakültelerin %20.6'sında bu dersin iktisat bölümü öğretim üyelerince okutulduğu tahmin edilmektedir.

Daha sonra şu büyüklükler gerekmektedir:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_1} = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1 - 1} \cdot \frac{N_1 - n_1}{N_1} = \frac{(0.175)(0.825)}{39} = 0.003295$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2 - 1} \cdot \frac{N_2 - n_2}{N_2} = \frac{(0.217)(0.783)}{59} = 0.002712$$

Katmanların tekil örneklem oranlarıyla birlikte bu değerler, iki katmanın anakütle oranlarının güven aralıklarını bulmada Örnek 18.3'teki gibi kullanılabilir. Biz burada genel anakütle oranının güven aralıkları üzerinde yoğunlaşacağız. Bunun için şu gereklidir:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_{kt}} = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{K} N_j^2 \hat{\sigma}^2_{\hat{p}_j} = \frac{(364)^2(0.003295)+(1{,}031)^2(0.002712)}{(1{,}395)^2} = 0.001706$$

Bunun karekökünü alırsak şunu elde ederiz:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}_{kt}} = 0.0413$$

%90 güven aralığı için Ek Çizelge 3'ten şunu okuruz:

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

Bu durumda anakütle oranının %90 güven aralığı şöyledir:

$$0.206 - (1.645)(0.0413) < p < 0.206 + (1.645)(0.0413)$$

ya da

$$0.138 < p < 0.274$$

Demek ki güven aralığımız bütün fakültelerin %13.8'i ile %27.4'ü arasıdır.

ÖRNEKLEM ÇABASININ KATMANLARA DAĞITIMI

Örneklem çabasının çeşitli katmanlara dağıtımı sorunu tartışılmayı beklemektedir. Toplam n örneklem birimi seçileceği varsayımıyla bu örneklem gözlemlerinden her bir katmana kaç tane düşmelidir? Gerçekte sözkonusu alan araştırmasının birden çok amacı olabilir, yani bu soruya kesin yanıt bulunamayabilir. Yine de, seçim yapmak için araştırmacının unutmaması gereken bazı ölçütler geliştirilebilir:

1. Eğer başlangıçta anakütleye ilişkin bir şey bilinmiyor ya da pek az şey biliniyorsa ve anakütledeki üye sayısı düşük olan katmanlara ilişkin bilgi türetiminde güçlü zorunluluklar yoksa, doğal seçim **oranlı dağıtım**dır. Burada herhangi bir katmandaki örneklem üyelerinin oranı, o katmandaki anakütle üyelerinin oranıyla aynıdır. Öyleyse j'inci katmanda

$$\frac{n_j}{n} = \frac{N_j}{N}$$

böylece de

$$n_j = \frac{N_j}{N} n$$

olur. Sezgilere uygun bu dağıtım sık sık kullanılır ve genellikle doyurucu bir çözümleme sağlar.

2. Bazen oranlı dağıtıma körükörüne uyma, araştırmacının özellikle ilgilendiği katmanlara görece az gözlem düşmesine yol açar. Bu durumda bu katmanların anakütle katsayılarına ilişkin çıkarsama pek kesin olmaz. Bu koşullarda böyle katmanlara, oranlı dağıtımın verdiğinden daha çok gözlem ayrılmak istenebilir. Örnek 18.5 ile 18.6'da 1,395 fakülteden 364'ü 2 yıllık okuldur ve 100 gözlemli bir örneklem çekilmiştir. Oranlı dağıtım uygulansaydı örneklemdeki 2 yıllık okul sayısının

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \cdot n = \frac{364}{1{,}395} \cdot 100 = 26$$

olması gerekirdi. Yayımcı özellikle bu pazara ilişkin bilgi derlemek istediğinden yalnızca yirmialtı gözlemlik bir örneklem yetersiz kalırdı. Bu nedenle örneklemdeki 100 gözlemin kırkı bu katmana ayrılmıştır.

3. Bir alan araştırmasının biricik amacı ortalama, toplam ya da oran gibi bir anakütle katsayısını elden geldiğince kesin tahmin etmek olsa ve anakütleye ilişkin yeterli bilgi bulunsa, **en uygun dağıtım** yapılabilir. Genel anakütle ortalaması ya da toplamı tahmin edilmek istense ve tek tek katmanlardaki anakütle varyansları σ_j^2 ile gösterilse, en keskin tahmin edicilerin şöyle elde edileceği gösterilebilir:

$$n_j = \frac{N_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^{K} N_i \sigma_i} \cdot n \qquad (18.4.1)$$

Bu formül sezgisel olarak akla yakındır. Oranlı dağıtımla karşılaştırıldığında anakütle varyansı en yüksek olan katmanlara görece daha çok örneklem çabası ayırmaktadır. Bu da anakütle değişkenliğinin daha yüksek olduğu yerde daha büyük örneklem anlamına gelir. Öyleyse aslında oranlı dağıtımın kullanıldığı Örnek 18.4'te örneklem standart sapmalarında gözlenen farklılıklar gerçekte anakütle büyüklüklerindeki farklılığı yansıtıyorsa, üçüncü katmanda daha az, birinci katmanda daha çok gözlem almak daha iyi olabilirdi.

(18.4.1)'deki formüle hemen karşı çıkılabilir. Bu formül anakütle standart sapmaları σ_j'lere gerek gösterir, ama çoğu zaman örneklem çekilmeden önce bunların dişe dokunur tahminleri bile yoktur. Bu noktaya bu bölümün son altbölümünde döneceğiz.

Genel anakütle oranını tahmin için olanak içindeki en küçük varyanslı tahmin ediciler, örneklem büyüklükleri aşağıdaki gibi saptanarak elde edilir:

$$n_j = \frac{N_j \sqrt{p_j(1-p_j)}}{\sum_{i=1}^{K} N_i \sqrt{p_i(1-p_i)}} \cdot n \qquad (18.4.2)$$

Oranlı dağıtımla karşılaştırıldığında bu formül, gerçek anakütle oranı 0.5'e yakın olan katmanlara daha çok örneklem gözlemi ayırır, çünkü bu oran 0'a ya da 1'e yakınsa bu bilgi görece küçük bir örneklemle hayli güvenilir olarak elde edilebilir. (18.4.2) formülünün kullanılmasındaki zorluk, bilinmeyen anakütle oranları p_j'leri içermesidir. Bunlar ise alan araştırmasının bulmak üzere tasarlandığı büyüklüklerden başkası değildir. Yine de bazen anakütleye ilişkin ön bilgiler hangi katmanların 0.5'e en yakın oranları olduğu konusunda kabaca da olsa bir fikir vermeye yetebilir. Örnek 18.6'da örneklem oranlarına bakılırsa örneklemdeki 2 yıllık okul sayısı, oranlı dağıtımın verdiği sayıdan daha az olmalıydı. Örnek 18.5'in örneklem standart sapmalarını (18.4.1) formülüyle karşılaştırdığımızda aynı sonuçlar bu çalışma için de geçerlidir. Buna rağmen 2 yıllık okullardan örnekleme daha az değil, daha *çok* alınmasına karar verildi. Bu kararın nedeni, yayımcının hem 2 hem de 4 yıllık okul pazarları konusunda güvenilir bilgiye erişmek istemesidir.

Bu açıklama önemli bir noktaya örnek oluşturmaktadır. Her ne kadar (18.4.1) ve (18.4.2) formüllerinin önerdiği örneklem çabasını dağıtmaya çoğunlukla *en uygun dağıtım* dense de, bu en uygunluk nitelemesi, genel anakütle katsayılarının etkin tahmini ölçütünün dar alanıyla sınırlıdır. Çoğu zaman alan araştırmalarının amaçları bundan daha geniştir, bu durumda en uygun dağıtımdan uzaklaşmak akla uygun gelebilir.

ALIŞTIRMALAR

27. Küçük bir kasabada 1,800 hane vardır. Kasaba, her biri 820, 540, 440 hane içeren üç mahalleye ayrılmıştır. 300 hanelik katmanlı bir rassal örneklem bu mahallelerden sırasıyla 120, doksan ve doksan hane içermektedir. Örneklem üyelerinden kış aylarındaki toplam enerji harcamalarını tahmin etmeleri istenmiştir. Örneklem ortalamaları sırasıyla 290 $, 352 $ ve 427 $, örneklem standart sapmaları da aynı sırayla 47 $, 61 $ ve 93 $ olmuştur.

(a) Bu kasabadaki bütün haneler için kışlık enerji harcamalarının ortalamasını tahmin etmek için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(b) (a)'daki tahmin edicinin varyansını tahmin etmek için sapmasız bir tahmin süreci kullanın.

(c) Bu kasabadaki bütün haneler için kışlık enerji harcamalarının ortalaması için %95 güven aralığını bulun.

28. Bir üniversitede 152 yardımcı doçent, 127 doçent ve 208 profesör vardır. Üniversite yönetimi, bu öğretim üyelerinin bir dönemde toplantılarda geçirdiği zamanı araştırmaktadır. Kırk yardımcı doçent, kırk doçent ve elli profesörden oluşan rassal örneklemlerden dönem boyunca toplantılarda geçirdikleri süreleri kaydetmeleri istenmiştir. Örneklem ortalamaları yardımcı doçentlerde 27.6 saat, doçentlerde 39.2 saat, profesörlerde 43.3 saattir. Örneklem standart sapmaları da yardımcı doçentlerde 7.1 saat, doçentlerde 9.9 saat, profesörlerde 12.3 saattir.

(a) Bu üniversitede dönem boyunca profesörlerin toplantılarda geçirdikleri ortalama sürenin %90 güven aralığını bulun.

(b) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak, bu üniversitedeki bütün öğretim üyelerinin toplantılarda geçirdikleri ortalama süreyi tahmin edin.

(c) Bu üniversitedeki bütün öğretim üyelerinin toplantılarda geçirdikleri ortalama sürenin %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

29. Yerel bir otobüs şirketi dört yerleşim bölgesine hizmet verecek yeni bir hat planlamaktadır. Her bölgeden rassal hane örneklemleri alıp örneklem üyelerinden önerilen hizmete tepkilerini 1 (kesinlikle karşı) ile 5 (kesinlikle onaylıyor) arasında bir ölçekte göstermeleri istenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

	BÖLGELER			
	1	2	3	4
N_i	240	190	350	280
n_i	40	40	40	40
$\bar{x}_i$	2.5	3.6	309	2.8
s_i	0.8	0.9	1.2	0.7

(a) Bölge 1'deki hanelerin ortalama tepkisi için %90 güven aralığını bulun.

(b) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak, yeni hattın hizmet vereceği bütün hanelerin ortalama tepkisini tahmin edin.

(c) Yeni hattın hizmet vereceği bütün hanelerin ortalama tepkisi için %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

30. Küçük bir yerleşkedeki öğrencilerden seçilen katmanlı bir örneklemde deneklere ders dışı ilgi olanaklarını 1 (kötü) ile 5 (çok iyi) arasında bir ölçekte değerlendirmeleri istenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

	BİRİNCİ-İKİNCİ SINIFLAR	ÜÇÜNCÜ-DÖRDÜNCÜ SINIFLAR
N_i	632	529
n_i	50	50
$\bar{x}_i$	3.12	3.37
s_i	1.04	0.86

(a) Yerleşkedeki bütün birinci-ikinci sınıf öğrencilerinin değerlendirme ortalamasının %95 güven aralığını bulun.
(b) Yerleşkedeki bütün üçüncü-dördüncü sınıf öğrencilerinin değerlendirme ortalamasının %95 güven aralığını bulun.
(c) Yerleşkedeki bütün lisans öğrencilerinin değerlendirme ortalamasının %95 güven aralığını bulun.

31. Alıştırma 28'e dönelim.
(a) Bu dönemde bu fakültedeki bütün profesörlerin toplantılarda geçirdiği toplam sürenin %90 güven aralığını bulun.
(b) Bu dönemde bu fakültedeki bütün öğretim üyelerinin toplantılarda geçirdiği toplam sürenin %90 güven aralığını bulun.

32. Bir şirketin üç şubesi vardır. Denetmenler şirketin alacak hesaplarının toplam tutarını tahmin etmeye çalışmaktadır. Üç şubenin her birinde bu hesaplardan rassal örneklemler alınmış, aşağıdaki çizelgede görülen bulgular elde edilmiştir.

	ŞUBELER		
	1	2	3
N_i	120	150	180
n_i	40	45	50
$\bar{x}_i$	237$	198$	137$
s_i	93$	64$	47$

(a) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak bu şirketin bütün alacak hesaplarının toplam tutarının nokta tahminini bulun.
(b) Bu şirketin bütün alacak hesaplarının toplam tutarının %95 güven aralığını bulun.

33. ABD'deki 1,395 fakülteden 364'ü 2 yıllık, 1,031'i 4 yıllık okullardır. Kırk tane 2 yıllık okuldan oluşan bir rassal örneklemdeki on okulda A. N. Optimist'in *İstatistik Eğlenceli Olabilir* adlı kitabı okutulmaktadır. Altmış tane 4 yıllık okuldan oluşan bağımsız bir rassal örneklemde sekiz okul bu kitabı okutmaktadır.
(a) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak Optimist'in kitabını kullanan bütün okulların oranının tahminini bulun.
(b) Bu kitabı kullanan bütün okulların oranının %95 güven aralığını bulun.

34. Bir danışmanlık firması, şirket yöneticileri için işletmecilikte çağdaş kestirim yöntemleri konusunda kısa bir kurs geliştirmiştir. İlk kursa 150 yönetici katılmıştır. Bunlardan alınan bilgilere göre kursa katılanlardan 100'ünün teknik becerisinin kurs konularını izlemek için gerekli teknik beceriye fazlasıyla sahip olduğu, kalan 50 kişinin ise bu bakımdan ancak yeterli olabildiği anlaşılmıştır. Kurs bittikten sonra her iki gruptan bağımsız rassal örneklemlere seçilen yirmibeşer kişiye, daha sonraki kursları geliştirmek için geri besleme sağlamak üzere soru kâğıtları gönderilmiştir. Becerileri yüksek olanlardan altısı, becerileri düşük olanlardan ondördü kursun fazla kuramsal olduğuna inandıklarını belirtmiştir.
   (a) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak bu görüşteki bütün kurs üyelerinin oranının tahminini bulun.
   (b) Bu anakütle oranının %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

35. Bir üniversitede 152 yardımcı doçent, 127 doçent, 208 profesör vardır. Öğrenci gazetesinden bir muhabir öğretim üyelerinin duyurdukları görüşme saatlerinde odalarında olup olmadıklarıyla ilgilenmektedir. Kırk yardımcı doçent, kırk doçent ve elli profesörden oluşan örneklemleri incelemeye karar vermiştir. Öğretim üyelerinin görüşme saatlerinde kapılarını çalmak üzere gönüllü öğrenciler gönderilmiştir. Yardımcı doçentlerin otuzbiri, doçentlerin yirmidokuzu ve profesörlerin otuzdördü bu saatlerde gerçekten odalarında bulunmuştur.
   (a) Sapmasız bir tahmin süreci kullanarak duyurdukları görüşme saatlerinde odalarında bulunan bütün öğretim üyelerinin oranının nokta tahminini bulun.
   (b) Duyurdukları görüşme saatlerinde odalarında bulunan bütün öğretim üyelerinin oranının %90 ve %95 güven aralıklarını bulun.

36. Alıştırma 28'e dönelim. Toplam 130 öğretim üyesinden oluşan bir örneklem alınacak olsa, aşağıdaki tasarımlardan her birinde kaçar profesör bulunurdu?
   (a) Oranlı dağıtım.
   (b) Anakütledeki katman standart sapmalarının ilgili örneklem değerleriyle aynı olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

37. Alıştırma 29'un verilerine dönelim. Toplam 160 haneden oluşan bir örneklem alınacak olsa, aşağıdaki tasarımlardan her birinde bölge 1'den kaç hane olurdu?
   (a) Oranlı dağıtım.
   (b) Anakütledeki katman standart sapmalarının ilgili örneklem değerleriyle aynı olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

38. Alıştırma 30'un verilerine dönelim. Toplam 100 öğrenciden oluşan bir örneklem alınacak olsa, aşağıdaki tasarımlardan her birinde birinci-ikinci sınıflardan kaç öğrenci olurdu?
   (a) Oranlı dağıtım.
   (b) Anakütledeki katman standart sapmalarının ilgili örneklem değerleriyle aynı olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

39. Alıştırma 32'nin verilerine dönelim. Toplam 135 alacak hesabından oluşan bir örneklem alınacak olsa, aşağıdaki tasarımlardan her birinde şube 1'den kaç hesap olurdu?
   (a) Oranlı dağıtım.
   (b) Anakütledeki katman standart sapmalarının ilgili örneklem değerleriyle aynı olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

40. Örnek 18.5'in verilerine dönelim. Toplam 100 fakülteden oluşan bir örneklem alınacak olsa, aşağıdaki tasarımlardan her birinde 4 yıllık kaç okul olurdu?

(a) Oranlı dağıtım.
(b) Anakütledeki katman standart sapmalarının ilgili örneklem değerleriyle aynı olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

18.5 ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜNÜN BELİRLENMESİ

Herhangi bir alan araştırması planlamasının önemli bir yanı örneklem üyeleri için uygun bir sayının saptanmasıdır. Çeşitli etmenler işe karışabilir. Deneklerle ilişki kurma biçiminin yanıt alamama oranını yükseltebileceği düşünülüyorsa bu olasılık dikkate alınmalıdır. Çoğu kez araştırmacının emrindeki para ve zaman türünden kaynaklar yapılabileceklere sınır koyar. Ancak bu altbölümde kendimizi bu tür düşüncelerden soyutlayarak örneklem büyüklüğünü, anakütle katsayıları tahmin edicilerinin varyanslarıyla ve sonunda ortaya çıkacak güven aralıklarının genişliğiyle ilişkilendireceğiz.

BASİT RASSAL ÖRNEKLEMEDE ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜ

Anakütle ortalamasını n gözlemli basit rassal örneklemde tahmin etme sorunuyla işe başlayalım. Rassal değişken $\overline{X}$ örneklem ortalamasını gösterdiğinde bu rassal değişkenin varyansının

$$\text{Var}(\overline{X}) = \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \qquad (18.5.1)$$

olduğunu Altbölüm 6.2'de görmüştük. Burada σ^2 anakütle varyansıdır. Şimdi Eş. (18.5.1)'i örneklem büyüklüğü n'ye göre çözeceğiz. Her iki yanı $(N-1)n$ ile çarparsak

$$(N-1)\sigma_{\overline{x}}^2 n = N\sigma^2 - \sigma^2 n$$

yani

$$[(N-1)\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma^2]n = N\sigma^2$$

ve son olarak

$$n = \frac{N\sigma^2}{(N-1)\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma^2} \qquad (18.5.2)$$

buluruz. Anakütle varyansı σ^2 biliniyorsa, örneklem ortalaması varyansının herhangi bir belli $\sigma_{\bar{x}}^2$ değerini alabilmesi için gerekli örneklem büyüklüğü n'yi Eş. (18.5.2) yardımıyla bulabiliriz. İlgilenilen büyüklük anakütle toplamı olursa benzer süreçler kullanılabilir.

Basit Rassal Örnekleme Aracılığıyla Anakütle Ortalaması ya da Toplamı Tahmin Edilirken Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi

Varyansı σ^2 olan N gözlemli bir anakütlenin ortalamasını tahmin etmek istediğimizi düşünelim. Örneklem ortalamasının istenen varyansı $\sigma_{\bar{x}}^2$ ise, aranan örneklem büyüklüğü şudur:

$$n = \frac{N\sigma^2}{(N-1)\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma^2}$$

Çoğunlukla $\sigma_{\bar{x}}^2$ yerine doğrudan anakütle ortalamasının güven aralığını belirlemek daha elverişlidir. Bu da kolayca yapılabilir çünkü anakütle ortalamasının sözgelimi %95 güven aralığı, örneklem ortalamasının her iki yanında yaklaşık $1.96\,\sigma_{\bar{x}}$ kadar uzanır.

İlgi odağı anakütle toplamı ise, bu büyüklüğün örneklem tahmin edicisinin varyansımn $N^2\sigma_{\bar{x}}^2$ olduğuna ve bunun güven aralığının $N\bar{x}$'nin iki yanında yaklaşık $1.96N\sigma_{\bar{x}}$ kadar uzandığına dikkat etmemiz yeter.

(18.5.2) formülünün açıkça görülen uygulamadaki kullanım zorluğu, çoğunlukla bilinemeyen anakütle varyansı σ^2'yi içermesidir. Ancak araştırmacının çoğu zaman bu büyüklüğe ilişkin kaba bir fikri vardır. Bir sonraki altbölümde anakütlenin bir ön örneklemiyle bunun bazen nasıl tahmin edildiğini göreceğiz.

ÖRNEK 18.7

Alıştırma 18.1'de olduğu gibi bir kentte geçen yıl 1,118 ipotek işlemi yapıldığını ve bunların ortalama tutarını tahmin edebilmek amacıyla basit bir rassal örneklem alındığını düşünelim. Bu tür anakütlelerle olan geçmiş deneyimlerden anakütle standart sapmasının yaklaşık 20,000 $ olduğu bilinmektedir. Anakütle ortalamasının %95 güven aralığı örneklem ortalamasının her iki yanında 4,000 $ kadar olmalıdır. Bu amaca ulaşmak için örneklemde kaç gözlem olmalıdır?

Şunları biliyoruz:

$$N = 1{,}118 \qquad \sigma = 20{,}000 \qquad 1.96\,\sigma_{\bar{x}} = 4{,}000 \text{ (böylece } \sigma_{\bar{x}} = 2{,}041)$$

Bu durumda aranan örneklem büyüklüğü şudur:

$$n = \frac{N\sigma^2}{(N-1)\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma^2} = \frac{(1{,}118)(20{,}000)^2}{(1{,}117)(2{,}041)^2 + (20{,}000)^2} = 88.5$$

Demek ki seksendokuz gözlemli bir basit rassal örneklem amacımızı karşılamaya yeter.

Şimdi de anakütle oranı p'nin tahmininde basit rassal örneklemi ele alalım. $\hat{p}_x$ örneklem oranını temsil eden rassal değişken olsun. Bu durumda, Altbölüm 4.6'da gördüğümüz hipergeometrik dağılımın özelliklerinden şunu elde ederiz:

$$\text{Var}(\hat{p}_x) = \sigma^2_{\hat{p}_x} = \frac{p(1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Burada p anakütle oranıdır. Bu denklemi örneklem büyüklüğüne göre çözersek

$$n = \frac{Np(1-p)}{(N-1)\sigma^2_{\hat{p}_x} + p(1-p)} \tag{18.5.3}$$

buluruz. Ne yazık ki bu eşitlik, çalışmada tahmin etmek amacında olduğumuz bilinmeyen anakütle oranı p'yi içermektedir. Burada iki yol düşünülebilir. Ya p'nin değerini kabataslak tahmin edeceğiz ya da (18.5.3)'teki $p(1-p)$'nin yerine olanaklı en yüksek değer olan 0.25 koyarak tutucu bir yol izleyeceğiz.

Basit Rassal Örnekleme ile Anakütle Oranını Tahmin Ederken Örneklem Büyüklüğünün Saptanması

N büyüklüğünde bir anakütle içinde belli özellik taşıyan birimlerin oranı p'yi tahmin etmek istediğimizi düşünelim. Örneklem oranının istenen varyansı $\sigma^2_{\hat{p}_x}$ belirlenirse aranan örneklem büyüklüğü

$$n = \frac{Np(1-p)}{(N-1)\sigma^2_{\hat{p}_x} + p(1-p)}$$

olur. p'nin değeri ne olursa olsun bu gösterimin olanaklı en büyük değeri şudur:

$$n_{\text{maks}} = \frac{0.25N}{(N-1)\sigma^2_{\hat{p}_x} + 0.25}$$

Anakütle oranın %95 güven aralığı, örneklem oranının iki yanında yaklaşık $1.96\sigma^2_{\hat{p}_x}$ kadar uzanır.

ÖRNEK 18.8

Örnek 18.3'teki gibi işletme istatistiği dersinin iki dönem okutulduğu okulların oranını tahmin etmek için 1,395 ABD fakültesinden basit bir rassal örneklem almak istediğimizi düşünelim. Gerçek oran ne olursa olsun, bunun %95 güven aralığının, örneklem oranının iki yanında 0.04'ten daha fazla uzanmamasını sağlamak istiyoruz. Örnekleme kaç gözlem alınmalıdır?

Şunu biliyoruz:

$$1.96\sigma_{\hat{p}_x} = 0.04$$

ya da

$$\sigma_{\hat{p}_x} = 0.0204$$

Bu durumda aranan örneklem büyüklüğü şöyle bulunur:

$$n_{\text{maks}} = \frac{0.25N}{(N-1)\sigma^2_{\hat{p}_x} + 0.25} = \frac{(0.25)(1{,}395)}{(1{,}394)(0.0204)^2 + 0.25} = 420.1$$

Demek ki 421 gözlemli bir basit rassal örneklem yeterlidir.

KATMANLI RASSAL ÖRNEKLEMEDE ÖRNEKLEM BÜYÜKLÜĞÜ

Katmanlı rassal örneklem kullanıldığında da belli bir kesinlik derecesi sağlamak için gerekli örneklem büyüklüğü formülleri de çıkarılabilir. Katmanlı rassal örneklemin anakütle ortalaması tahmin edicisini $\overline{X}_{kt}$ rassal değişkeniyle, tek tek katmanların örneklem ortalamalarını da $\overline{X}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ ile gösterelim. Buradan,

$$\overline{X}_{kt} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j \overline{X}_j$$

olduğu için, $\overline{X}_{kt}$'nin varyansı şöyle bulunur:

$$\text{Var}(\overline{X}_{kt}) = \sigma^2_{\overline{X}_{kt}} = \frac{1}{N_j^2 \text{Var}(\overline{X}_j)} \qquad (18.5.4)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{K} N_j^2 \frac{\sigma_j^2}{n_j} \cdot \frac{N_j - n_j}{N_j - 1}$$

Burada σ_j^2 $(j = 1, 2, \ldots, K)$ K tane katmanın anakütle varyanslarıdır. Şimdi (18.5.4) formülü herhangi bir $n_1, n_2, \ldots, n_K$ seçimi için ilgili anakütle ortalaması tahmin edicisinin varyansının türetilmesinde kullanılabilir. Ancak bu varyansın belli bir değerine ulaşması için gerekli toplam örneklem büyüklüğü n, örneklem gözlemlerinin katmanlara dağıtılış biçimine bağlıdır. Altbölüm 18.4'te sık kullanılan iki süreçten, oranlı dağıtım ile en uıygun dağıtımdan söz ettik. Her iki

durumda da (18.5.4)'te n_j yerine eşitini koyarak çıkan denklemi çözüp örneklem büyüklüğü n'yi buluruz. Sonuçlar aşağıdaki çerçeve içinde verilmiştir.[2]

Katmanlı Rassal Örneklemede Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi

N birimden oluşan bir anakütle her biri $N_1, N_2, \ldots, N_K$ birim içeren K katmana ayrılmış olsun. σ_j^2, j'inci katmanın anakütle varyansını göstersin. Genel anakütle ortalamasını tahmin etmek istediğimizi düşünelim. Örneklem tahmin edicisinin istenen varyansı $\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2$ belirlenirse, aranan toplam örneklem büyüklüğü n şöyle bulunur:

(i) **Oranlı dağıtım:**

$$n = \frac{\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j^2}{N\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j^2}$$

(ii) **En uygun dağıtım:**

$$n = \frac{\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j\right)^2}{N\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j^2}$$

Bir anakütle oranını tahmin etmek için katmanlı rassal örneklem kullanılırsa, $\sigma_{\bar{x}}^2$ yerine ilgili tahmin edicinin varyansı $\sigma_{\bar{p}_{kt}}^2$ ve σ_j^2 yerine $p_j(1-p_j)$ konularak daha önceki formüller düzeltilir. Burada p_j, j'inci katmanın anakütle oranıdır.

ÖRNEK 18.9

Örnek 18.4'teki gibi üç eyaletteki lokanta sayıları

$$N_1 = 60 \qquad N_2 = 50 \qquad N_3 = 45$$

iken yeni bir yemeğin lokanta başına ortalama sipariş sayısını tahmin etmek üzere katmalı rassal örneklem almak istediğimizi düşünelim. Ayrıca lokanta zin-

[2] Aslında bu formülleri çıkarırken

$$\frac{N_j}{N_j - 1} \approx 1$$

yakınsamasını kullandık. Tek tek katmanlardaki anakütle üyelerinin sayısı çok az değilse bu hiçbir zorluk yaratmaz.

cirinin geçmiş deneyimlerine göre üç eyalette anakütle standart sapmaları da yaklaşık olarak

$$\sigma_1 = 13 \qquad \sigma_2 = 11 \qquad \sigma_3 = 9$$

alınabilir. Eğer %95 güven aralığını, örneklem nokta tahmininin her iki yanında lokanta başına üç sipariş olarak almak istersek, toplam kaç gözlemlik örneklem almamız gerekir?

Şunu biliyoruz:

$$1.96\,\sigma_{\bar{x}_{kt}} = 3$$

ya da

$$\sigma_{\bar{x}_{kt}} = 1.53$$

Ayrıca şunun sağlanmasını da istiyoruz:

$$\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j^2 = (60)(13)^2 + (50)(11)^2 + (45)(9)^2 = 19{,}835$$

ve

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{K} N_j \sigma_j\right)^2 = \frac{[(60)(13)+(50)(11)+(45)(9)]^2}{155} = 19{,}421$$

Oranlı dağıtım için gerekli örneklem büyüklüğü şu olur:

$$n = \frac{\sum N_j \sigma_j^2}{N\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2 + \frac{1}{N}\sum N_j \sigma_j^2}$$

$$= \frac{19{,}835}{(155)(1.53)^2 + 19{,}835/155} = 40.4$$

Demek ki istenen kesinlik düzeyini sağlamak için kırkbir gözlemli bir örneklem yeterlidir.

En uygun dağıtım kullanılırsa şunu buluruz:

$$n = \frac{\frac{1}{N}(\sum N_j \sigma_j)^2}{N\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2 + \frac{1}{N}\sum N_j \sigma_j^2}$$

$$= \frac{19{,}421}{(155)(1.53)^2 + 19{,}835/155} = 39.6$$

Öyleyse, aynı güvenilirlik düzeyine bu yöntem kullanılırsa kırk gözlemle erişilebilir. Bu özel durumda, anakütle standart sapmaları bayağı yakın olduğundan, oranlı dağıtımla karşılaştırıldığında, çok küçük bir tasarruf yapılıyor demektir.

18.6 BAŞKA ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ

Buraya kadar basit ve katmanlı rassal örnekleme yöntemlerini biraz ayrıntılı olarak inceledik. Bir örneklem seçmede yalnız bu süreçler kullanılmaz. Bu altbölümde bazı almaşık yöntemler göreceğiz.

KÜMELİ ÖRNEKLEME

Bir araştırmacının büyük bir kent ya da bir eyalet gibi geniş bir coğrafi alana dağılmış bir anakütleyi araştırmak istediğini düşünelim. Basit ya da katmanlı rassal örneklemlerden biri kullanılacak olursa, hemen iki sorun ortaya çıkar. Birincisi, araştırmacıya anakütle üyelerinin doğruya epey yakın bir listesi gerekir. Böyle bir liste bulunmayabilir ya da karşılanamayacak kadar yüksek maliyetli olabilir. İkincisi, araştırmacıda anakütle üyelerinin böyle bir listesi bulunsa bile, seçilen örneklem üyeleri neredeyse kaçınılmaz biçimde geniş bir alana dağılacaktır. Bu durumda görüşmecilerin her bir örneklem üyesine ulaşması bayağı pahalıya malolur. Eğer soruşturma postayla yapılırsa bu ikinci sorun elbette doğmaz. Ama bu iletişim aracı kabul edilemeyecek kadar yüksek bir yanıt alamama oranına yol açabilir, bu da araştırmacının kişisel görüşmeleri yeğlemesine neden olabilir.

Güvenilir bir anakütle listesi bulamama ya da bütçe olanakları sınırlıyken örneklem üyeleriyle kişisel ilişkiler kurma ikilemiyle karşı karşıya kalan araştırmacı **kümeli örnekleme** diye bilinen almaşık bir örnekleme sürecine başvurabilir. Bir anakütle **küme** adı verilen görece küçük ama coğrafi olarak yoğun altbölümlere kolayca ayrılabiliyorsa bu yaklaşım çekicidir. Sözgelimi bir kent siyasal semtlere ya da konut bölgelerine ayrılabilir. Kentte oturanların ya da hanehalklarının tam bir listesi olmasa bile bu bölme işi yapılabilir.

Kümeli örneklemede anakütleden *kümelerin* rassal bir örneklemi seçilir ve seçilen her kümedeki bütün birimlerle ilişki kurulur, yani seçilen her kümede bir tam sayım yürütülür. Aşağıdaki çerçevede böyle bir kümeli örneklemin bulgularından anakütle ortalaması ve oranına ilişkin geçerli çıkarsamalar türetme süreçleri sıralanmaktadır.

Kümeli Örneklemeden Yapılan Çıkarsamalar

Bir anakütlenin M kümeye ayrıldığını, bu kümelerden m tanesini içeren basit bir rassal örneklem çekildiğini, seçilen kümelerdeki her bir üyeden bilgi derlendiğini düşünelim. Örnekleme giren m tane kümedeki anakütle üyelerinin sayılarını $n_1, n_2, \ldots, n_m$ ile, bu kümelerin ortalamalarını $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ ile ve ilgilenilen bir özelliği taşıyan küme üyelerinin oranlarını $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ile gösterelim. Amacımız anakütlenin genel ortalaması μ ile oranı p'yi tahmin etmektir.

(i) Sapmasız tahmin süreçleri şunu verir:

$$\bar{x}_{kü} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

ve

$$\hat{p}_{kü} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i p_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

(ii) Sapmasız tahmin süreçleri izlenerek bu tahmin edicilerin varyansları şöyle tahmin edilir:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kü}} = \frac{M-m}{Mm\bar{n}^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 (\bar{x}_i - \bar{x}_{kü})^2}{m-1}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2_{p_{kü}} = \frac{M-m}{Mm\bar{n}^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 (p_i - \hat{p}_{kü})^2}{m-1}$$

Burada

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$$

seçilen kümelerdeki ortalama birim sayısıdır.

(iii) Örneklemin büyük olması koşuluyla $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şöyle bulunur:

$$\bar{x}_{kü} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kü}} < \mu < \bar{x}_{kü} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kü}}$$

ve

$$\hat{p}_{küme} - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}_{küme}} < p < \hat{p}_{küme} + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}_{küme}}$$

Dikkat ederseniz çıkarsamalar, anakütleye ilişkin pek az ön bilgiden yararlanılarak yapılabilir. İstenen tek şey tanımlanabilir kümelere ayrıştırmadır. Anakütledeki toplam üye sayısını bile bilmemize gerek yoktur. *Örnekleme giren* kümelerdeki birim sayılarını bilmek yeterlidir; bunlar da alan araştırması sırasında saptanabilir, çünkü örneklemdeki her kümede zaten bir tam sayım yapılacaktır. Üstelik örneklem üyeleri aynı küme içinde birbirlerine coğrafi bakımdan yakın olduklarından görüşmecilerin kendileriyle ilişki kurması da görece ucuz olacaktır.

ÖRNEK 18.10

1,000 blok içeren bir yerleşim bölgesinden yirmi blokluk bir basit rassal örneklem alınmıştır. Örnekleme giren her bloktaki bütün hanehalklarına başvurularak aile gelirlerine ilişkin bilgi derlenmiştir. Aşağıdaki çizelge örnekleme giren bloklardaki yıllık ortalama gelirler ile yıllık geliri 15,000 $'ın altında olan ailelerin oranını göstermektedir. Bu yerleşim bölgesindeki ortalama aile geliri ile yıllık gelir 15,000 $'ın altındaki ailelerin oranını tahmin edin.

ÖRNEKLEME GİREN BLOK	ORTALAMA GELİR ($)	15,000 $ ALTINDAKİLERİN ORANI	HANEHALKI SAYISI
i	$\bar{x}_i$	p_i	n_i
1	26,283	0.1304	23
2	19,197	0.4516	31
3	37,911	0.1250	24
4	14,527	0.6585	41
5	16,753	0.5143	35
6	28,312	0.2692	26
7	21,646	0.3548	31
8	29,312	0.1563	32
9	31,829	0.1333	30
10	18,412	0.3846	39
11	33,893	0.0769	26
12	38,409	0.0476	21
13	43,911	0.0000	20
14	14,699	0.4375	32
15	24,921	0.1111	36
16	31,827	0.0909	33
17	34,436	0.0833	24
18	37,647	0.0400	25
19	30,026	0.1081	37
20	16,493	0.3659	41

Kendi gösterimimizle şunları biliyoruz:

$$m = 20 \qquad M = 1{,}000$$

Örneklemdeki toplam hane sayısı şudur:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = (23 + 31 + \cdots + 41) = 607$$

Nokta tahminlerini bulabilmek için şunlara gerek vardır:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i \bar{x}_i = (23)(26{,}283) + (31)(19{,}197) + \cdots + (41)(6{,}493) = 15{,}848{,}158$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m} n_i p_i = (23)(0.1304) + (31)(0.4516) + \cdots + (41)(0.3659) = 153$$

Dolayısıyla nokta tahminlerimiz şöyle olur:

$$\bar{x}_{ka} = \frac{\sum n_i \bar{x}_i}{\sum n_i} = \frac{15{,}848{,}158}{607} = 26{,}109$$

ve

$$\hat{p}_{ka} = \frac{\sum n_i p_i}{\sum n_i} = \frac{153}{607} = 0.2521$$

Öyleyse, örneklem kanıtlarına göre bu yerleşim bölgesinde ortalama yıllık hanehalkı geliri 26,109 $ ve yıllık geliri 15,000 $'dan az olan hane halklarının oram da %25.21'dir.

Aralık tahminlerini bulabilmek için ortalama küme büyüklüğü gerekir:

$$\bar{n} = \frac{\sum n_i}{m} = \frac{607}{20} = 30.35$$

Ayrıca

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 (\bar{x}_i - \bar{x}_{ka})^2}{m-1} = \frac{(23)^2(26{,}283 - 26{,}109)^2 + \cdots + (41)^2(16{,}493 - 26{,}109)^2}{19}$$

$$= 69{,}270{,}551{,}000$$

böylece

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}_{kü}} = \frac{M-m}{Mm\bar{n}^2} \cdot \frac{\sum n_i^2 (\bar{x}_i - \bar{x}_{kü})^2}{m-1}$$

$$= \frac{(980)(69{,}270{,}551{,}000)}{(1{,}000)(20)(30.35)^2} = 3{,}684{,}914$$

olur, bunun karekökünü alarak şunu buluruz:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_{kü}} = 1{,}920$$

%95 güven aralığı için

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

okunur. Demek ki anakütle ortalamasının %95 güven aralığı şöyledir:

$$26{,}109 - (1.96)(1{,}920) < \mu < 26{,}109 + (1.96)(1{,}920)$$

ya da

$$22{,}346 < \mu < 29{,}872$$

Dolayısıyla bu bölgedeki bütün ailelerin ortalama gelirinin %95 güven aralığı 22,346 $ ile 26,872 $ arasıdır.

Anakütle oranının aralık tahminlerini elde edebilmek için önce şunu bulmalıyız:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 (p_i - \hat{p}_{kü})^2}{m-1} = \frac{(23)^2(0.1304-0.2521)^2 + \cdots + (41)^2(0.3659-0.3521)^2}{19}$$

$$= 38.1547$$

Bu durumda

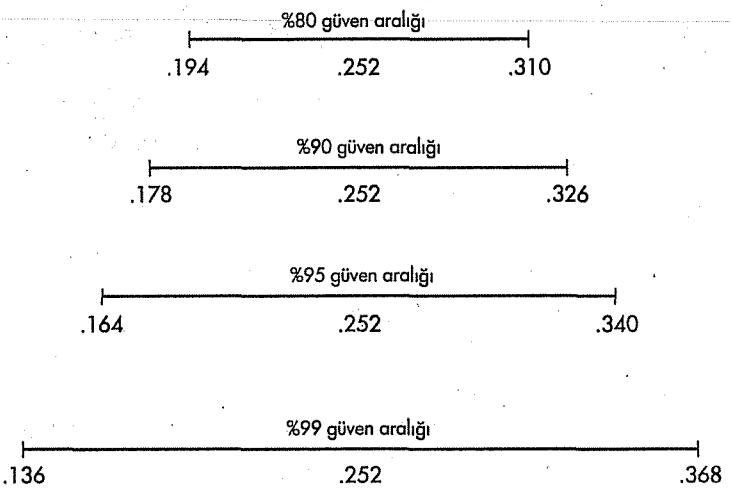
$$\hat{\sigma}^2_{\hat{p}_{kü}} = \frac{M-m}{Mm\bar{n}^2} \cdot \frac{\sum n_i^2 (p_i - \hat{p}_{kü})^2}{m-1}$$

$$= \frac{(980)(38.1547)}{(1{,}000)(20)(30.35)^2} = 0.0020297$$

bulur ve bunun karekökünü alırsak şunu elde ederiz:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}_{kü}} = 0.0451$$

Öyleyse anakütle oranının %95 güven aralığı şöyle elde edilir:



ÇİZİM 18.4 Bir yerleşim bölgesinde yıllık geliri 15,000 $'ın altında olan bütün hanehalkları oranının, Örnek 18.10'daki verilere dayanan, %80, %90, %95 ve %99 güven aralıkları

$$0.2521 - (1.96)(0.0451) < p < 0.2521 + (1.96)(0.0451)$$

ya da

$$0.164 < p < 0.340$$

Yıllık gelirleri 15,000 $'ın altında olan hanehalkları oranının %95 güven aralığı %16.4 ile %34.0 arasında uzanır. Çizim 18.4 bu yerleşim bölgesinde yıllık geliri 15,000 $'ın altında kalan bütün hanehalkları oranının %80, %90 ve %99 güven aralıklarını da göstermektedir.

Kümeli örnekleme katmanlı örneklemeyle yüzeysel bir benzerlik gösterir. Her ikisinde de anakütle altbölümlere ayrılmaktadır. Ama bu benzerlik yalnız görünüştedir. Katmanlı rassal örneklemede, anakütlenin önemli katmanlarına gereken ağırlığın verilebilmesi için anakütlenin *her katmanından* bir örneklem alınır. Buna karşılık kümeli örneklemede *kümelerin* rassal bir örneklemi seçilir, böylece örneklemde bazı kümelerden hiçbir üye bulunmaz. Aynı küme içindeki anakütle birimleri hayli türdeş olabileceğinden, anakütlenin önemli altbölümlerinin örneklemde ya hiç temsil edilmeme ya da büyük ölçüde eksik temsil edilme tehlikesi vardır. Bunun sonucu olarak, kümelemenin üstün yanı kolaylığı olmakla birlikte, bu kolaylık örneklem tahminlerinde ek bir belirsizliğe yol açabilir. Kümeli ve katmanlı örneklemeler arasındaki bir başka fark da, birincisinde küme üyelerinin *tam bir sayımı* yapılırken, ikincisinde katmanlardaki birimler arasından *rassal bir örneklem* seçilmesidir. Ancak bu, temel bir fark değildir. Aslında kimi durumlarda araştırmacı tam sayım yapacak yerde küme birimleri arasından rassal bir örneklem de seçebilir.

İKİ AŞAMALI ÖRNEKLEME

Çoğu araştırmada anakütle tek bir adımda taranmaz. Tersine görece küçük oranda örneklem birimleriyle ilişki kurulan bir ön araştırma yürütülür. Buradan elde edilen bulgular asıl alan araştırmasından önce çözümlenir. Böyle bir sürecin kötü yanı epey zaman kaybına yol açmasıdır. Ama bu etmen, çeşitli üstünlüklerle tersine çevrilebilir. Önemli bir yarar, araştırmacının, çeşitli soruların bütünüyle anlaşıldığından emin olabilmek için önerilen soru kâğıdını düşük bir maliyetle sınayabilmesidir. Ön çalışma ayrıca, önemli olabileceği daha önce farkedilmeyen kimi soruların eklenmesini gerektirebilir. Üstelik bu araştırma yanıt alınamama oranı konusunda da bir tahmin yapılmasını sağlar. Bu oran kabul edilemeyecek kadar yüksek çıkarsa, yanıt alma yönteminde bazı değişiklikler yapma gereği belirebilir.

Bir araştırmayı, bir ön araştırmayla işe girişip, iki aşamada yürütmeye **iki aşamalı örnekleme** denir. Bu yaklaşımın iki üstünlüğü daha vardır. Birincisi, katmanlı örneklem uygulanıyorsa ön araştırma, tek tek katman varyanslarının tahminlerini elde etmede kullanılabilir. Bunlar da örneklemin çeşitli katmanlar arasında en uygun dağıtımının yapılmasında işe yarar. İkincisi, ön araştırmanın bulguları, anakütle katsayılarının önceden belirlenmiş doğruluk derecesinde tahmin edilmesi için gereken gözlem sayısının tahmininde kullanılabilir. Aşağıdaki örnekler bu noktaları açıklamak üzere sunulmuştur.

ÖRNEK 18.11

Bir anakütle ortalamasını tahmin etmekte kullanılan basit rassal örnekleme gibi kolay bir durumla işe başlayalım. Başlangıçta bu anakütleyle ilgili görece az şey bildiğimizden gerekli örneklem büyüklüğüne ilişkin bir fikir edinmek için bir ön araştırma yapılacaktır.

Bir mali denetmen, toplam 1,120 alacak hesabının ortalama bakiyesini tahmin etmek istemektedir. Örneklem ortalamasının her iki yanında yaklaşık 4 $ kadar uzayan bir %95 güven aralığı hesaplamak niyetindedir. Başlangıçta 100 hesaplık bir basit rassal örneklem alıp örneklem standart sapmasını 30.27 $ olarak bulur. Kaç hesap daha örnekleme alınmalıdır?

Altbölüm 18.5'ten gerekli örneklem büyüklüğünün aşağıdaki gibi yazılabildiğini anımsayalım:

$$n = \frac{N\sigma^2}{(N-1)\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma^2}$$

Burada $N = 1{,}120$, bu özel durumdaki anakütle üyelerinin sayısıdır. %95 güven aralığının istenen genişlikte olabilmesi için

$$1.96\sigma_{\bar{x}} = 4$$

olması gerekir, böylece örneklem ortalamasının standart sapması da

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{4}{1.96} = 2.04$$

olmalıdır. Anakütle standart sapması σ bilinmemektedir. Ama 100 alacak hesabıyla yapılan ön araştırmanın bulgusu olarak bu sayıyı 30.27 olarak tahmin ediyoruz. Dolayısıyla gerekli örneklem gözlemlerinin toplam sayısı

$$n = \frac{(1{,}120)(30.27)^2}{(1{,}119)(2.04)^2 + (30.27)^2} = 184.1$$

olur. 100 gözlem daha önce alındığına göre ek seksenbeş gözlem daha denetmenin amacı için yeterli olacaktır.

ÖRNEK 18.12

Bir araştırmacı, üç bölge katmanındaki birim sayıları

$$N_1 = 1{,}150 \qquad N_2 = 2{,}120 \qquad N_3 = 930$$

olan bir kasabada ortalama aile gelirini tahmin etmek için katmanlı bir örneklem almak istemektedir. Başlangıçta her bölgeden otuzar hanehalkını örnekleme alarak bir ön araştırma yapıp örneklem standart sapmalarını 3,657 $, 6,481 $, 8,403 $ olarak bulmuştur. Amacının, anakütle ortalamasının, olabildiğince küçük bir örneklemle, örneklem ortalamasının her iki yanında 500 $ kadar uzanan %95 güven aralığını elde etmek olduğunu düşünelim. Her bölgede kaçar tane ek gözlem seçilmelidir?

Belli bir doğruluk derecesinin olabildiğince az sayıda örnekleme gözlemiyle elde edilmesi koşulu en uygun dağıtımın kullanılması gerektiği anlamına gelir. Üç katmandan seçilecek n_1, n_2, n_3 sayılarının aşağıdaki gibi olduğunu Eş. (18.4.1)'den anımsayalım:

$$n_j = \frac{N_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^{3} N_i \sigma_i} \cdot n \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Burada σ_i, katmanın anakütle standart sapmasıdır. Bu büyüklükler yerine örneklem tahminlerini kullanarak şunları buluruz:

$$n_1 = \frac{(1{,}150)(3{,}657)}{(1{,}150)(3{,}657) + (2{,}120)(6{,}481) + (930)(8{,}403)} \cdot n = 0.163n$$

$$n_2 = \frac{(2{,}120)(6{,}481)}{(1{,}150)(3{,}657) + (2{,}120)(6{,}481) + (930)(8{,}403)} \cdot n = 0.533n$$

$$n_3 = \frac{(930)(8{,}403)}{(1{,}150)(3{,}657) + (2{,}120)(6{,}481) + (930)(8{,}403)} \cdot n = 0.303n$$

Şimdi en uygun dağıtım tasarımında toplam örneklemin her bir katmana düşen payını belirlemiş oluyoruz. Sıra örneklem gözlemlerinin toplam sayısı n'yi bulmadadır. Altbölüm 18.5'ten şunu buluruz:

$$n = \frac{\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{3} N_j \sigma_j\right)^2}{N\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} N_j \sigma_j^2}$$

Burada $N = 4{,}200$ anakütle birimlerinin toplam sayısı, $\sigma_{\bar{x}_{kt}}^2$ ise anakütle ortalaması tahmininin varyansıdır. Anakütle ortalamasının %95 güven aralığının, örneklem tahmininin her iki yanında 500 $ kadar uzaması için

$$1.96\sigma_{\bar{x}_{kt}} = 500$$

böylece

$$\sigma_{\bar{x}_{kt}} = 255.1$$

olması gerekir. Daha önce yaptığımız gibi, bilinmeyen anakütle büyüklükleri yerine ön araştırmayla tahmin edilen standart sapmaları koyarız. Böylece şunu elde ederiz:

$$n = \frac{\frac{1}{4{,}200}[(1{,}150)(3{,}657) + (2{,}120)(6{,}481) + (930)(8{,}403)]^2}{(4{,}200)(255.1)^2 + \frac{1}{4{,}200}[(1{,}150)(3{,}657)^2 + (2{,}120)(6{,}481)^2 + (930)(8{,}403)^2]}$$

$$= 503.5$$

Yuvarlatarak söylersek, örneklem gözlemlerinin toplam sayısının 504 olması gerektiği sonucuna varırız. Bunlar da üç katmana şöyle dağıtılır:

$$n_1 = (0.163)(504) = 82$$

$$n_2 = (0.533)(504) = 269$$

$$n_3 = (0.303)(504) = 153$$

Her katmandan otuz hanehalkı daha önce örnekleme alındığından ikinci aşamada örnekleme katılacak sayılar 52, 239 ve 123 olmalıdır.

Anakütleden belli bir örneklemin çekilme olasılığının belirlenebildiği çeşitli örnekleme tasarımlarını inceledik. Örnekleme yöntemlerinin bu özelliği sayesinde örneklem bulgularına dayanarak geçerli istatistik çıkarsamalar yapabiliriz. Aksi halde sapmasız nokta tahminleri ve belirlenmiş olasılık içeriği taşıyan güven aralıkları türetmemiz, istatistik bakımından tam geçerli olamaz.

Yine de çoğu uygulamalı araştırmada örneklem üyelerinin seçiminde, aslında kolaylık sağladığı için, **olasılıklı olmayan yöntemler** kullanılmaktadır. Sözgelimi yerleşkenizdeki öğrencilerin, ilgi çeken belli bir konudaki tepkilerini ölçmek istediğinizi düşünelim. Bir olanak bütün arkadaşlarınıza bu konuda ne düşündüklerini sormak olabilir. Bu öbek, bütün öğrenciler anakütlesinden rassal seçilmiş bir örnek oluşturmaz. Dolayısıyla da bu verileri, rassal bir örneklemden elde edilmiş gibi çözümlemeye girişirseniz yaptığınız çıkarsamalar istatistik bakımından tam bir geçerlilik taşımaz.

Az önce anlatılan yaklaşımın biraz daha geliştirilmiş **kotalı örnekleme** denen bir biçimi kamuoyu araştırma kuruluşlarınca yaygın olarak kullanılır. Görüşmecilere belli bir yer gösterilerek belli yaş, ırk, cinsiyet özellikleri taşıyan belli sayıda kimseyle görüşmeleri söylenir. Verilen bu kotalar, genel anakütleye uygun olduğu düşünülen oranları temsil eder. Ancak kotalar bir kez saptandıktan sonra görüşmecilere istediği örneklem üyesini seçme özgürlüğü tanınır. Onların seçimleri de çoğunlukla rassal değildir. Kotalı örnekleme anakütle katsayılarının oldukça doğru tahminlerini verebilir, sık sık verir de. Yetersiz kaldığı nokta şudur. Örneklem, olasılık yöntemleri kullanarak seçilmediği için bulunan tahminlerin güvenilirliğini belirlemenin geçerli bir yolu yoktur.

ALIŞTIRMALAR

41. Bir kentte geçen yıl uygulanan 812 ipotek işleminin ortalama tutarının tahmin edilmesi gerekmektedir. Bir emlakçi eski deneyimlerine göre anakütle standart sapmasının yaklaşık 20,000 $ olduğunu bilmektedir. Eğer anakütle ortalamasının %95 güven aralığı, örneklem ortalamasının iki yanında 2,000 $ kadar uzayacaksa basit rassal örneklemede kaç örneklem gözlemi gerekir?

42. Bir büyük mağazada 1,420 çeşit ürün stoklanmaktadır. Bu stoğun toplam dolar değerini tahmin etmek için bir denetmen bu ürünlerden basit rassal örneklem almak istemektedir. Geçen yılın kayıtlarına göre anakütle standart sapması 160 $ olarak tahmin edilmiştir. Anakütle toplamının %90 güven aralığının, örneklem tahmininin iki yanında 20,000 $ kadar uzanması istenmektedir. Bu isteğin yerine getirilebilmesi için örneklem büyüklüğü ne kadar olmalıdır?

43. Bir golf kulübü mevsim açılışı toplantısına katılabileceklerin oranını tahmin etmek için 320 üyesinden rassal bir örneklemle görüş almak istemektedir. Örneklem gözlemleri sayısı, anakütle oranının %99 güven aralığının, örneklem oranının her iki yanında 0.05 kadar uzamasını sağlayacak büyüklükte olmalıdır. Ne büyüklükte bir örneklem gereklidir?

44. 417 öğrencili bir sınıfa ders veren bir öğretim üyesi dönem sonu sınavını eve ödev olarak vermeyi düşünmektedir. Bu tür bir sınavı yeğleyen öğrencilerin oranını tahmin etmek üzere de rassal bir örneklem almayı istemektedir. Eğer anakütle oranının %90 güven aralığının, örneklem oranının iki yanında 0.04 kadar uzanması istenirse, ne büyüklükte bir örneklem gerekir?

45. Bir denetmen bir şirketin alacak hesaplarının ortalama tutarını tahmin etmek istemektedir. Anakütle, her biri sırasıyla 500, 400, 300, 200 hesap içeren dört katmana ayrılmıştır. Geçmiş deneyime göre bu katmanlardaki tutarların standart sapmaları yine sırasıyla 150 $, 200 $, 300 $, 400 $ tahmin edilmiştir. Genel anakütle ortalamasının %90 güven aralığı, örneklem tahmininin iki yanında 25 $ kadar uzanacaksa toplam örneklem büyüklüğü aşağıdaki tasarımların her birinde ne kadar olmalıdır?

(a) Oranlı dağıtım.

(b) En uygun dağıtım.

46. Üç bölgeye ayrılabilen bir kasabada ortalama hanehalkı gelirinin tahmin edilmesi gerekmektedir. İlgili bilgiler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

BÖLGE	NÜFUS	TAHMİN EDİLEN STANDART SAPMA ($)
1	1,150	4,000
2	2,120	6,000
3	930	8,000

Anakütle ortalamasının %95 güven aralığının, örneklem tahmininin iki yanında 500 $ kadar uzanması istenirse, aşağıdaki tasarımların her birinde toplam kaç örneklem gözlemi olması gerektiğini belirleyin.

(a) Oranlı dağıtım.

(b) En uygun dağıtım.

47. Bir pazar araştırması kuruluşu, altmışbeş mahalleden oluşan bir kentteki evlerde televizyon alıcılarının haftada ortalama kaç saat açık olduğunu tahmin etmek niyetindedir. Basit rassal bir örneklemle on mahalle seçilmiş, seçilen her mahalledeki bütün evlerle görüşülerek aşağıdaki bulgular derlenmiştir:

SEÇİLEN MAHALLE	HANEHALKI SAYISI	ORTALAMA TELEVİZYON KULLANMA SÜRESİ (SAAT)
1	28	29.6
2	35	18.4
3	18	32.7
4	52	26.3
5	41	22.4
6	38	31.6
7	36	19.7
8	30	23.8
9	23	25.4
10	42	24.1

(a) Bu kentte televizyon kullanım süresinin anakütle ortalamasının nokta tahminini bulun.

(b) Anakütle ortalamasının %90 güven aralığını bulun.

48. Bir sendika yöneticisi, yeni bir planın uygulandığı ilk ayda bir şirketin memurlarına ödediği primlerin ortalama tutarını tahmin etmek istemektedir. Bu şirketin kırkbeş şubesi olup bunlar arasından sekizi basit rassal bir örnekleme seçilmiştir. Daha sonra seçilen her şubedeki kayıtlardan bütün memurlara yapılan ödemeler öğrenilmiştir. Elde edilen bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

SEÇİLEN ŞUBE	MEMUR SAYISI	ORTALAMA PRİM($)
1	69	83
2	75	64
3	41	42
4	36	108
5	59	136
6	82	102
7	64	95
8	71	98

(a) Bu ay yapılan memur başına prim ödemesinin anakütle ortalamasının nokta tahminini bulun.

(b) Anakütle ortalamasının %99 güven aralığını bulun.

49. Alıştırma 47'deki alan araştırmasında hanehalklarına kablolu televizyona bağlı olup olmadıkları sorulmuştur. Bağlı olanların sayısı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

MAHALLE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SAYI	12	11	10	29	15	13	20	14	9	26

(a) Bu kentte kablolu televizyona bağlı bütün evlerin oranının bir nokta tahminini bulun.

(b) Bu anakütle oranının %90 güven aralığını bulun.

50. Alıştırma 48'deki alan araştırmasında seçilen sekiz şubedeki memurlara yeni prim ödeme planının işleyişini beğenip beğenmedikleri sorulmuştur. Derlenen bulgular aşağıdaki çizelgede sıralanmıştır.

ŞUBE	1	2	3	4	5	6	7	8
BEĞENEN SAYISI	24	25	11	21	35	44	30	34

(a) Bu prim ödeme planını beğenen bütün memurların oranının bir nokta tahminini bulun.

(b) Bu anakütle oranının %95 güven aralığını bulun.

51. Bir kent elli coğrafi bölgeye ayrılmıştır. Kentteki hanehalklarından yeni bir çim bakım hizmetiyle ilgilenenlerin oranının tahmin edilmesi gerekmektedir. Rassal bir örnekleme giren üç bölge sırasıyla 611, 521, 734 hanehalkı içermektedir. Hizmetle

ilgilendiğini söyleyenlerin sayılarıysa yine sırayla 128, 131, 172'dir. Bu kentteki bütün hanehalklarından çim bakımı hizmetiyle ilgilenenlerin oranının %90 güven aralığını bulun.

52. Bir bankanın elindeki konut ipoteklerinden 720 tanesi gününde ödenmemiştir. Bu evlerin şimdiki ortalama değerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Başlangıç olarak yirmi evlik rassal bir örneklem alınıp değerlendirilmiş, örneklem standart sapması 37,600 $ çıkmıştır. Eğer bu banka, anakütle ortalaması için örneklem ortalamasının iki yanında 5,000 $ kadar uzayan %90 güven aralığı isterse, kaç ev daha değerlemeye alınmalıdır?

53. Bir fakültede 3,200 lisans, 800 lisansüstü öğrencisi vardır. Bu öğrencilerin bir yılda ders kitaplarına ödedikleri para miktarıyla ilgilenilmektedir. Başlangıç olarak otuz lisans, otuz lisansüstü öğrencisi basit rassal örneklemlere seçilmiştir. Harcanan paranın örneklem standart sapmaları sırasıyla 40 ve 58 $'dır. Genel anakütle ortalaması için örneklem nokta tahmininin iki yanında 5 $ kadar uzayan %90 güven aralığı istenmektedir. Bu amaca erişebilmek için gerekli en az ek örneklem gözlemi sayısını tahmin edin.

54. Bir şirketin 100'ü küçük, 180'i orta ve 200'ü büyük boy olmak üzere 480 arabası vardır. Bu arabaların yıllık onarım giderlerinin genel bir ortalamasını tahmin etmek için başlangıçta her boydan onar araba rassal örneklemlere seçilmiştir. Onarım giderlerinin örneklem standart sapmaları küçüklerde 105, orta boylarda 162 ve büyüklerde 183 $'dır. Araba başına yıllık giderlerin genel anakütle ortalaması için, örneklem nokta tahmininin her iki yanında 20 $ kadar uzanan %95 güven aralığı istenmektedir. Seçilmesi gereken ek örneklem gözlemlerinin en düşük sayısını tahmin edin.

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

55. Yeni bir film için yapılan bir radyo reklamı kampanyasının etkinliğini ölçmek üzere kentinizde bir alan araştırması düzenleyip uygulamanız istenmektedir.
- **(a)** Yapacaklarınızın ana çizgilerini belirtin.
- **(b)** Çıkabilecek örnekleme dışı hatalar ile bunların önemini en düşüğe indirme yollarını tartışın.
- **(c)** Bu alan araştırmasında yanıt alamamanın ne kadar sorun yaratacağını beklersiniz?

56. Sınıfınızdan seçeceğiniz on kişilik bir rassal örnekleme dayanarak sınıftaki öğrencilerin bir dönemde ders kitabına ödedikleri paranın ortalama tutarını tahmin edin.

57. Katmanlı örnekleme ile kümeli örnekleme arasındaki farkı özenle açıklayın. Bu tekniklerin kullanılabileği örnekleme sorunlarına örnekler verin.

58. Bir sınava doksan öğrenci girmiştir. On kişilik rassal bir örneklemle şu notlar derlenmiştir:

93 71 62 75 81 63 87 59 84 72

- **(a)** Anakütle not ortalamasının %90 güven aralığını bulun.

(b) Anakütle ortalamasının %95 güven aralığının (a)'da bulunandan daha mı geniş yoksa daha mı dar olduğunu hiç hesaplama yapmadan belirtin.

59. Bir şirketin belli bir türden 272 alacak hesabı vardır. Bunlardan ellisi rassal bir örnekleme seçilmiştir. Örneklem ortalaması 492.36 $, örneklem standart sapması 149.92 $'dır.

(a) Bu alacak hesapları tutarlarının anakütle ortalamasının %99 güven aralığını bulun.

(b) Bu alacak hesapları tutarlarının anakütle ortalamasının %95 güven aralığını bulun.

(c) Anakütle ortalamasının %90 güven aralığının (b)'de bulunandan daha mı geniş yoksa daha mı dar olduğunu hiç hesaplama yapmadan belirtin.

60. ABD senatosunun 100 üyesi vardır. Altmış bir senatörün yazışmalarını yürütmekten sorumlu kimselerden bilgi derlenmiştir.[3] Bunlardan otuzsekizi, belli bir konuda bir yanıt mektubu kalıbı oluşturulması için alınan mektup sayısının belli bir alt düzeye ulaşması gerektiğini belirtmiştir.

(a) Bu gözlemlerin anakütleden rassal çekilmiş bir örneklem olduğunu varsayıp bu yolu izleyen bütün senatör bürolarının oranının %90 güven aralığını bulun.

(b) Aslında bu bilgiler senatör bürolarının rassal bir örnekleminden gelmemiştir. Soru kâğıtları yüz büronun *hepsine* gönderilmiş, ancak altmışbirinden yanıt gelmiştir. Bu bilgi (a)'daki yanıtınızdaki görüşünüzü nasıl etkiler?

61. Bir şirkette 148 satış temsilcisi çalışmaktadır. Bunlardan altmışı bir rassal örnekleme seçilmiş, örneklemdeki otuzaltı kişi için bu ay alınan sipariş tutarı, geçen yılın aynı ayına göre artmıştır. Sipariş tutarı artan satış temsilcilerinin anakütledeki oranının %95 güven aralığını bulun.

62. 970 yöneticinin çalıştığı bir şirkette üç şube vardır. Her şubeden bağımsız rassal yönetici örneklemleri alınmış, her örneklem üyesinin kaç yıldır şirkette bulunduğu belirlenmiştir. Bulgular aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

	ŞUBELER		
	1	2	3
N_i	352	287	331
n_i	30	20	30
$\bar{x}_i$	9.2	12.3	13.5
S_i	4.9	6.4	7.6

(a) Şube 1'deki yöneticilerin şirkette bulundukları ortalama yıl sayısının %99 güven aralığını bulun.

(b) Bütün yöneticilerin şirkette bulundukları ortalama yıl sayısının %99 güven aralığını bulun.

[3] M. J. Culnan, "Processing unstructured organizational transactions: mail handling in the U.S. senate." *Organization Science, 3* (1992), 117-37.

63. Bir kitabın 300 sayfasının 180'i esas olarak teknik değilken, kalan sayfalar teknik-tir. Teknik ve teknik olmayan sayfalardan bağımsız rassal örneklemler alınmış, sayfa başına hata sayıları bulunmuştur. Bulgular aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

	TEKNİK	TEKNİK OLMAYAN
N_i	120	180
n_i	20	20
$\bar{x}_i$	1.60	0.74
s_i	0.98	0.56

(a) Bu kitapta sayfa başına ortalama hata sayısının %95 güven aralığını bulun.
(b) Bu kitaptaki toplam hata sayısının %99 güven aralığını bulun.

64. Alıştırma 63'ün çözümlemesinde örneklenen teknik sayfalardan dokuzunda ve örneklenen teknik olmayan sayfaların onbeşinde hiç hata çıkmamıştır. Bu kitapta hiç hata bulunmayan sayfaların oranı için %90 güven aralığını bulun.

65. Alıştırma 62'nin verilerine dönelim. Örnekleme toplam seksen yönetici alınsa, aşağıdaki her bir tasarımda örneklem üyelerinin kaçının şube 1'den geleceğini belirleyin:
(a) Oranlı dağıtım.
(b) Katmanların anakütle standart sapmalarının örneklemlerdeki gibi olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

66. Alıştırma 63'ün verilerine dönelim. Örneklem toplam kırk sayfa alınsa, aşağıdaki her bir tasarımda örneklenen sayfalardan kaçının teknik olacağını belirleyin:
(a) Oranlı dağıtım.
(b) Katmanların anakütle standart sapmalarının örneklemlerdeki gibi olduğu varsayımıyla en uygun dağıtım.

67. Üniversitenizdeki öğrencilerin kütüphane alanının yeterliliğine ilişkin görüşlerini öğrenmek için bir örneklem almaya niyetlisiniz. Yıllara göre —birinci, ikinci sınıf, vb. diye— katmanlı bir örneklem almaya karar verdiniz. Her katmandan kaçar örneklem gözlemi alacağınızı saptarken ne gibi etmenleri gözönüne alacağınızı tartışın.

68. Bir araba satıcısının elinde 328 kullanılmış araba vardır. Bu araçların yapmış olduğu ortalama yol tahmin edilecektir. Eski deneyimlere göre anakütle standart sapması yaklaşık 12,000 mil olabilir. Anakütle ortalaması için %90 güven aralığı, örneklem ortalamasının iki yanında 2,000 mil kadar uzanacaksa, basit rassal örneklemde örneklem büyüklüğü ne kadar olmalıdır?

69. Bir fakültedeki 527 işletmecilik öğrencisinden ders planında iş ahlakına daha çok önem verilmesi görüşünde olanların oranını tahmin etmek üzere basit rassal bir örneklem alınacaktır. Anakütle oranı için %95 güven aralığının, örneklem oranının iki yanında 0.06 kadar uzanmasını sağlamaya yetecek gözlem sayısı kaçtır?

70. Bir anakütle, her biri $N_1, N_2, \ldots, N_K$ birim içeren K katmana ayrılabilir. Katmanların anakütle standart sapmalarını $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_K$ ile gösterip şu tanımı yapalım:

$$\overline{\sigma} = \sum_{j=1}^{K} \frac{N_j \sigma_j}{N}$$

burada

$$N = \sum_{j=1}^{K} N_j$$

biçimindedir.

(a) Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösterin:

$$\sum_{j=1}^{K} N_j(\sigma_j - \bar{\sigma})^2 = \sum_{j=1}^{K} N_j\sigma_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{K} N_j\sigma_j\right)^2$$

(b) (a)'daki bulgudan, bütün σ_j'ler aynı değilken, aşağıdaki eşitsizliği türetin:

$$\sum_{j=1}^{K} N_j\sigma_j^2 > \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{K} N_j\sigma_j\right)^2$$

(c) (b)'deki bulgudan, bütün σ_j'ler aynı değilken, anakütle ortalamasının belli genişlikteki %95 güven aralığını elde etmek için oranlı dağıtım kullanıldığında en uygun dağıtıma göre daha çok sayıda gözlem gerektiğini gösterin.

(d) Bu durumu bütün σ_j'ler aynıyken tartışın.

71. Bir pazar araştırması kuruluşu, elli mahalleli bir kentten sekiz mahalleyi rassal olarak seçmiştir. Seçilen her mahalledeki bütün hanehalklarına evde merkezî klima sistemi olup olmadığı ve yaz aylarındaki elektrik ödemeleri sorulmuştur. Bulgular aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

SEÇİLEN MAHALLE	HANEHALKI SAYISI	ORTALAMA AYLIK ELEKTRİK ÖDEMESİ ($)	MERKEZİ KLİMASI OLAN SAYISI
1	38	84	29
2	43	64	22
3	24	49	9
4	37	68	25
5	30	59	13
6	25	77	21
7	47	42	14
8	36	63	21

(a) Yaz aylarındaki aylık elektrik ödemesinin anakütle ortalaması için %95 güven aralığını bulun.

(b) Merkezî klima sistemi olan hanehalklarının anakütledeki oranı için %95 güven aralığını bulun.

BÖLÜM 19

İstatistikle Karar Verme Kuramı

19.1 BELİRSİZLİK ORTAMINDA KARAR VERME

Bu bölümün konusu, herhangi bir ticari kuruluştaki yönetim sorunlarının özünü yakalama diye nitelendirilebilir. Gerçekten de ele alınan konunun uygulanabilirliği, günlük yaşamın pek çok yanını ilgilendirecek biçimde genişletilebilir. Burada bir bireyin, bir grubun ya da bir şirketin önünde çeşitli almaşık uygulanabilir eylem yollarının bulunduğu durumla ilgileneceğiz. Hangi yolun izleneceği kararı, yapılan eylemden doğacak sonuçları belirleyen etmenlerin gelecekteki davranışının belirsiz olduğu bir dünyada verilmek zorundadır.

Hepimiz işimizi görürken, gelecekte ne yöne döneceğini bilmekte bocaladığımız bir ortamla sınırlıyız. Sözgelimi bir beyzbol maçına gitmeyi düşünürsünüz ama yağmur yağıp yağmayacağı konusunda kuşkunuz vardır. Yağmur yağmayacağını *bilirseniz* maça gidersiniz; saatlerce yağmur boşanacağından *eminseniz* gitmezsiniz. Ama havanın kesinlikle nasıl olacağını kestiremezsiniz, kararınızı da belirsiz bir geleceği düşünerek vermek zorundasınızdır. Başka bir örnek alalım. Üniversitedeki son yılınızın bir anında mezuniyetten sonra ne yapacağınıza karar vermeniz gerekir. Çeşitli yerlerden iş teklifi alacak olabilirsiniz. Lisansüstü öğrenim de bir başka olanak olabilir. Çalışma yaşamınızın ilk yönünü seçmenin önemli bir karar olduğu açıktır. Elbette seçeneklere ilişkin bilgi derleyeceksiniz. Önerilecek başlangıç ücretlerinin ne kadar olacağını bileceksiniz, gelecekte işvereniniz olabilecek işletmelerin işleyişlerine ve kendinizin bu işleyişe nasıl uyacağına ilişkin bir şeyler öğreneceksiniz.

Ama bir kimse yine de belli bir öneriyi kabul ettikten bir ya da iki yıl sonra nerede olacağını çok açık seçik göremez. Öyleyse bu önemli karar gelecekteki belirsizlik göğüslenerek verilmelidir.

İş dünyasında, aşağıdaki örneklerin de gösterdiği gibi, bu türden durumlarla sık sık karşılaşılır:

1. Bir bunalım döneminde bir işletme işçi çıkarıp çıkarmayacağına karar vermelidir. Daralma kısa ömürlüyse, talep geliştiğinde yerlerine yenilerini bulmak güç olacağından, bu işçileri tutmak yeğlenebilir. Ama bunalım uzayacaksa, işçi çıkarmamak pahalıya gelir. Ne yazık ki iktisadi kestirim sanatı, bir bunalımın süresini büyük bir kesinlikle bilme aşamasına henüz ulaşamamıştır.
2. Bir yatırımcı şu sıralar faiz oranlarının dorukta olduğuna inanabilir. Bu durumda uzun vadeli tahviller pek çekici gelir. Ama faiz oranlarının gelecekteki yönü konusunda emin olmak olanaksızdır. Yükselmeleri sürerse, uzun vadeli tahvillere para bağlamak en uygun seçenek değildir.
3. Yüklenicilerin sık sık bir iş programı için öneri vermeleri gerekir. Verilecek karar önerinin en düşük düzeyinin ne olacağıdır. Burada iki belirsizlik alanı sözkonusudur. Birincisi, işi kazanmak için fiyatı ne kadar düşürmek gerektiğini yüklenici bilemez. İkincisi, sözleşmeyi yerine getirmenin kesin maliyetinin ne olacağından emin olamaz. Burada da belirsizliğe karşın bir karar verilmek zorundadır.
4. Açık denizde denemek için petrol kuyusu açmanın maliyeti dev boyuttadır. Kusursuz jeolojik önermelere karşın, petrol şirketleri bulunacak petrol miktarının ticari bakımdan dişe dokunur olup olmadığını kuyu açılmadan bilemez. Belli bir alanda kuyu açılıp açılmayacağı ve nerede açılacağı kararı belirsiz bir ortamda verilmek zorundadır.

Bu bölümde amacımız, az önce tartışılan karar verme problemlerine yaklaşırken kullanılacak yöntemleri incelemektir. Çözümlemelerimizi daha somutlaştırabilmek için yeni bir şekerleme çıkarmayı planlayan bir üretici düşünelim. Bu üreticinin önünde A, B, C, D ile gösterilen dört üretim süreci seçeneği vardır. Bunlar eldeki tesisin görece küçük bir değişiminden fabrikanın önemli ölçüde büyütülmesine kadar değişmektedir. Hangi yolun izleneceği kararı, ürüne olabilecek talebin bilinemediği bir sırada verilmek zorundadır. Kolaylık sağlamak amacıyla bu talebi "düşük", "orta" ve "yüksek" diye niteleyelim. Ayrıca üreticinin, her üretim sürecinde talebin her bir düzeyi için yatırımın ömrü boyunca sağlayacağı kârı hesaplayabildiği varsayılacaktır. Çizelge 19.1 her üretim süreci-talep düzeyi bileşiminde bu kâr düzeyini (dolar olarak) göstermektedir.

Bu özel problem, çözümlememizin ana çerçevesini çizmeye yarar. Bir karar vericinin önünde, $a_1, a_2, \ldots, a_K$ diye adlandırılan K sonlu sayıda olanaklı **eylem** bulunmaktadır. Örneğimizde bu eylemler dört olanaklı üretim sürecinin benimsenmesidir. Belli bir eylem seçileceği sırada karar verici, seçilen eylemin sonuçlarını belirleyecek bir etmenin gelecekte ne olacağı konusunda emin değildir. Bu etmen de H sonlu sayıda **doğa durumu** ile nitelenebilir. Bunlar da $s_1, s_2, \ldots, s_H$ ile gösterilecektir. Şekerleme örneğinde, ürüne olan üç talep düzeyine karşılık gelen üç doğa durumu vardır. Son olarak, karar vericinin her

eylem-doğa durumu birleşimi için parasal **ödüller** belirleyebildiği varsayılacaktır. Doğa durumu s_j gerçekleştiğinde a_i eyleminin ödülünü M_{ij} ile gösterelim. Bu ödüller Çizelge 19.1'e karşılık gelen ve genel kalıbı Çizelge 19.2'de verilen bir ödül çizelgesinde gösterilebilir.

Bir Karar Probleminin Çerçevesi

(i) Karar vericinin önünde K tane **eylem** yolu vardır:

$$a_1, a_2, \ldots, a_K$$

(ii) Olanaklı ama belirsiz H tane **doğa durumu** vardır:

$$s_1, s_2, \ldots, s_H$$

(iii) Olanaklı her eylem-doğa durumu birleşimi için, a_i eylemi ile s_j doğa durumuna karşılık parasal bir **ödül,** M_{ij} bulunmaktadır.

Burada ana çizgilerini belirttiğimiz biçimiyle karar verme problemi özünde **kesikli** (süreksiz) niteliktedir. Bu, sonlu sayıda eylem seçeneği ve sonlu sayıda olanaklı doğa durumu öngördüğümüz anlamına gelir. Ama çoğu uygulama sorunu **sürekli**dir. Sözgelimi doğa durumu, birkaç kesikli olanak yerine sürekli bir ölçekte daha iyi ölçülebilir. Şekerleme üreticisi örneğimizde yalnızca üç talep düzeyi belirlemek yerine bir talep düzeyi aralığı beklenebilir. Ayrıca kimi problemlerde önümüzdeki eylemler de sürekli durumda çok daha iyi temsil edilir. Sözgelimi bir yüklenici bir açık eksiltmede önereceği fiyata karar verdiği zaman durum böyledir. Bu bölümün geri kalanında kesikli durum üzerinde yoğunlaşacağız. Sürekli durumun çözümlenmesinde kullanılan *ilkeler* pek farklı değildir. Ama o çözümlemenin ayrıntıları türev hesabına dayanır ve burada ele alınmayacaktır.

ÇİZELGE 19.1 Çeşitli üretim süreci-talep düzeyi bileşimlerinde şekerleme üreticisinin tahmin edilen kârı

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ		
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK
A	70,000	120,000	200,000
B	80,000	120,000	180,000
C	100,000	125,000	160,000
D	100,000	120,000	150,000

ÇİZELGE 19.2 K tane olanaklı eylemi, H tane doğa durumu olan bir karar probleminde ödül çizelgesinin genel kalıbı: M_{ij}, a_i eylemi ve s_j doğa durumuna karşılık gelen ödüldür.

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI			
	s_1	S_2	...	S_H
a_1	M_{11}	M_{12}	...	M_{1H}
a_2	M_{21}	M_{22}	...	M_{2H}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_K	M_{K1}	M_{K2}	...	M_{KH}

Bir karar verici eylem yolu seçenekleriyle karşı karşıya kalınca uygun seçim, hatırı sayılır ölçüde amaçlara bağlıdır. İşletmecilikte karar verme problemlerinin çözümünde kullanılan çeşitli yaklaşım çizgileri tanımlanabilir. Ama her tekil problemin kendi özelliklerinin bulunduğu ve karar vericilerin amaçlarının hem farklı hem hayli karmaşık olduğu unutulmamalıdır. Büyük bir şirketteki orta düzey bir yöneticinin konumu düşünüldüğünde bu tür bir durum ortaya çıkar. Uygulamada bu yöneticinin amaçları şirketinkilerden farklı olabilir. Bu yöneticinin, karar alırken hem kendi konumunu hem şirketin genel çıkarım gözetmesi pek olasıdır.

Karar verme problemlerinin tekil olma niteliğine karşın çok kolaylıkla genel bir kural belirleyebiliriz. Kimi eylemleri hangi koşul altında olursa olsun yeniden incelemeden eleyebiliriz. Çizelge 19.1'e dönüp D üretim sürecine bakalım. Bu sürecin ödülü, düşük talep düzeyinde tam C sürecininki kadar, orta ve yüksek talep düzeylerinde ise C sürecininkinden düşüktür. Dolayısıyla D eylemini seçmek anlamsızdır çünkü elde ödülü daha aşağıya düşmeyen ama yukarı çıkabilen başka bir seçenek vardır. C eylemi en az D eylemi kadar hatta ondan daha yüksek ödüllü olabildiğine göre C eyleminin D eylemine **baskın** olduğu söylenebilir. Bir eyleme baskın olan başka bir eylem varsa birincisi **kabul edilemez** olur. Bu tür eylemlerin benimsenmesi en uygun sonucu vermeyeceğinden bunlar bir daha ele alınmamak üzere elenirler.

Tanımlar

Eylem a_j'nin ödülü, hangi doğa durumu gerçekleşirse gerçekleşsin, en az a_i'nin ödülü kadarsa ve en az bir doğa durumunda a_i'ninkinden yüksekse, a_j eylemi a_i eylemine **baskındır** denir.

Bu biçimde baskın çıkılan bir eylem **kabul edilemez** olur. Kabul edilemez eylemler karar verme probleminin sonraki çözümlemelerinden önce olanaklar listesinden çıkarılırlar.

Başka bir eylemin baskın çıkmadığı, dolayısıyla kabul edilemez olmayan bir eyleme **kabul edilir** eylem denir.

Şekerleme üreticisinin karar problemini çözümlerken D üretim sürecini seçme eyleminin kabul edilemez olduğunu gördük. Buna göre bu olanak bir daha ele alınmamak üzere elenir. Bu problemin sonraki çözümlemelerinde A, B, C süreçlerinin benimsenme olanaklarını inceleyeceğiz.

19.2 OLASILIKLARIN BELİRLENMESİNİ GEREKTİRMEYEN ÇÖZÜMLER

Şekerleme üreticimiz hangi üretim sürecini kullanacağına karar vermeden önce şunu sorabilir: "Bu talep düzeylerinden her birinin gerçekleşme şansı ne kadardır?" Bu bölümün çoğu yerinde çeşitli doğa durumlarının ortaya çıkma olasılıklarının belirlenmesini gerektiren karar verme problemini ele alacağız. Ama bu altbölümde bu olasılıklara dayanmayan, hatta hiçbir olasılık içermeyen iki karar ölçütünü kısaca inceleyeceğiz. Bu yaklaşımlar (ve aynı türden olanlar) yalnızca ödül çizelgesinin yapısına bağlıdır.

Bu altbölümde ele alınan iki sürece **maksimin (en düşüklerin en yükseği)** ölçütü ve **minimaks (en yükseklerin en düşüğü) pişmanlık** ölçütü denir. Bunların her birini, kabul edilemez olan D sürecini seçme yolunu dışlayıp, şekerleme üreticisinin ödül çizelgesiyle ilişkilendirerek tartışacağız. Öyleyse olanaklı üç doğa durumuyla karşı karşıya olan üretici eldeki üç eylem arasından seçim yapacaktır.

(i) MAKSİMİN (EN DÜŞÜKLERİN EN YÜKSEĞİ) ÖLÇÜTÜ

Burada, hangi doğa durumu gerçekleşirse gerçekleşsin her eylemin en kötü sonucunu ele alalım. Bu *en kötü sonuç* ortaya çıkabilecek en düşük ödülden başka bir şey değildir. Şekerleme üreticisi probleminde hangi üretim süreci kullanılırsa kullanılsın, en küçük ödül hep düşük talep düzeyinde gerçekleşmektedir. Maksimin ölçütü, en düşük ödülün en yüksek olduğu eylemi seçer; yani en düşük ödülü en yükseğe çıkarırız. Çizelge 19.3'te sergilendiği gibi, bu en düşük ödüllerin en yüksek değerlisi, C üretim süreci kullanıldığında ortaya çıkacak olan 100,000 $'dır. Maksimin ölçütü öyleyse bu eylemi seçer.

ÇİZELGE 19.3 Maksimin ölçütüyle C üretim sürecinin seçilişi

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ			EN DÜŞÜK ÖDÜL	
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK		
A	70,000	120,000	200,000	70,000	
B	80,000	120,000	180,000	80,000	
C	100,000	125,000	160,000	100,000	← Maksimin

ÖRNEK 19.1

Bir yatırımcı 10,000 $'ını yılda %12 kesin faizle işletmek ya da aynı tutarı bir yıllığına bir pay senetleri portföyüne yatırmak arasında seçim yapmak istemektedir. Sabit faizi seçerse ödülü kesin 1,200 $ olacaktır. Pay senetleri portföyünü seçerse, getirisi borsanın gelecek yılki başarımına bağlı olacaktır. Borsa yükselirse 2,500 $ kâr, borsa pek değişmezse 500 $ kâr, borsa düşerse 1,000 $ zarar beklenmektedir. Bu yatırımcı için ödül çizelgesini düzenleyip maksimin ölçütüyle eylem seçimini yapın.

Aşağıdaki çizelge (dolar cinsinden) ödülleri göstermektedir. Eksi ödül zarar demektir. Borsada ne olursa olsun sabit faizli yatırım için en düşük ödül 1,200 $'dır. Pay senedi portföyünün en düşük ödülü, borsanın düşmesi durumundaki –1,000 $'dır. Öyleyse en düşük ödül sabit faizli yatırımdan gelmektedir, dolayısıyla maksimin ölçütüyle seçilen eylem budur.

YATIRIM	BORSANIN DURUMU			EN DÜŞÜK ÖDÜL	
	YÜKSELEN	DEĞİŞMEYEN	DÜŞEN		
Sabit faiz	1,200	1,200	1,200	1,200	← Maksimin
Pay senedi portföyü	2,500	500	–1,000	–1,000	

Maksimin ölçütünün karar kuralı bu örneklerden açıkça anlaşılmaktadır. Bu kural aşağıdaki çerçevede belirtilmiştir.

Maksimin Ölçütüne Dayalı Karar Kuralı

Bir karar vericinin H tane olanaklı doğa durumunda $a_1, a_2, \ldots, a_K$ gibi K tane kabul edilebilir eylem arasında seçme yapmak zorunda kaldığını düşünelim. M_{ij}, i'inci eylemin j'inci doğa durumuna karşılık gelen ödülünü göstersin.

Her bir eylem için en düşük ödülü ararız. Sözgelimi a_1 için bu, $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1H}$'nin en küçüğüdür. Bu en küçük değeri M_1^* ile gösterelim.

$$M_1^* = \text{En küçük } (M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1H})$$

Daha genel olarak a_i eyleminin olanak içindeki en küçük ödülü şudur:

$$M_i^* = \text{En küçük } (M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{iH})$$

Bu durumda **maksimin ölçütü** en büyük M_i^*'ye karşılık gelen a_i eylemidir.

Maksimin ölçütünün karar vermedeki olumlu özelliği, elde edilmesi *kesin* olanaklı en büyük ödülü bulmasıdır. Şekerleme üreticisi C üretim sürecini kullanırsa, talep düzeyi ne olursa olsun, en az 100,000 $'lık bir ödülden *emin* olabilir.

Benzer biçimde Örnek 19.1'deki yatırımcı için sabit faizin seçilmesi 1,200 $'lık *kesin* bir ödül getirir. Bu örneklerin hiçbirinde, kullanılabilecek eylem seçeneklerinden başka biriyle aynı miktar ödülden *emin* olunamaz.

Ancak tam da bu güvence nedeniyle maksimin ölçütü eleştirilir, çünkü böyle bir güvencenin çoğu zaman bir bedeli olur. Buradaki bedel başka bir eylemin seçimiyle kazanılabilecek olan çok daha büyük bir ödülün, en kötü durumun gerçekleşme şansı çok az olsa bile, elden kaçırılmasıdır. Sözgelimi, şekerleme üreticisi yüksek talep gerçekleşeceğinden neredeyse emin olabilir. Bu durumda da C üretim süreci kötü bir seçim olur, çünkü bu talep düzeyinde en küçük ödülü verir.

Öyleyse maksimin ölçütünün, çeşitli eylem seçenekleri arasından çok sakınarak seçim yapan bir tutum olduğu düşünülebilir. Böyle bir tutum kimi durumlar için uygun olabilir ama aşırı bir kötümser bu tutuma her zaman başvurabilir. Bu nedenle bazen *kötümserlik ölçütü* diye de adlandırılır.

(ii) MİNİMAKS (EN YÜKSEKLERİN EN DÜŞÜĞÜ) PİŞMANLIK ÖLÇÜTÜ

Minimaks ölçütünü kullanmak isteyen bir karar verici kendini şöyle bir konumda görmelidir: Bir eylem seçimi yapılmış, doğa durumlarından biri gerçekleşmiştir ve karar verici geriye doğru baktığında seçtiği eylemden ya hoşnuttur ya da başka bir seçenek daha yeğlenebilir olduğundan düşkırıklığı içindedir. Bir kez daha şekerleme üreticimize dönelim. Yeni ürüne olan talebin düşük olduğunu düşünelim. Bu durumda seçilecek en iyi yol 100,000 $ ödüllü C üretim süreci olurdu. Bu yol seçilmişse üretici 0 **pişmanlık** duyar. A süreci seçilmiş olsaydı elde edilecek kâr yalnızca 70,000 $ olurdu. Üreticinin pişmanlığının boyutu bu durumda elde edilebilecek en iyi ödül (100,000 $) ile artık daha az yeğlenir olduğu anlaşılan kendi seçiminin kârı arasındaki farktır. Öyleyse pişmanlık 30,000 $'dır. Benzer biçimde, düşük talep veriyken, B süreci seçilmiş olsaydı pişmanlık

$$100{,}000\ \$ - 80{,}000\ \$ = 20{,}000\ \$$$

ÇİZELGE 19.4 Şekerleme üreticisinin pişmanlık çizelgesi

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ		
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK
A	30,000	5,000	0
B	20,000	5,000	20,000
C	0	0	40,000

ÇİZELGE 19.5 Minimaks pişmanlık ölçütüyle B üretim sürecinin seçimi

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ			EN YÜKSEK PİŞMANLIK	
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK		
A	30,000	5,000	0	30,000	
B	20,000	5,000	20,000	20,000	← Minimaks pişmanlık
C	0	0	40,000	40,000	

olurdu. Bu yolu izleyerek orta ve yüksek düzeyde talepler için pişmanlıkları hesaplayabiliriz. Her bir durumda en iyi seçenek olarak ortaya çıkan eylemin (orta düzey talepte C, yüksek düzey talepte A sürecini seçmenin) pişmanlığı 0 olur.

Bu yolla her eylem-doğa durumu birleşimi için bir sayı bularak pişmanlık çizelgesini düzenleyebiliriz. Çizelge 19.4 şekerleme üreticisinin karar problemi için pişmanlıkları (dolar olarak) göstermektedir.

Şimdi her olanaklı eylem seçeneğinde ortaya çıkabilecek en büyük pişmanlığı arıyoruz. Çizelge 19.4'te bu en büyük değerler A, B, C için sırasıyla 30,000 $, 20,000 $, 40,000 $'dır. Bu durumda **minimaks pişmanlık ölçütü**, en büyük pişmanlıklardan en küçüğünü veren eylemi seçer. Çizelge 19.5'te de sergilendiği gibi bu ölçütün kullanımı B üretim sürecinin seçilmesini öngörür.

ÖRNEK 19.2

Örnek 19.1'deki yatırımcının karar problemine dönelim. Eğer minimaks pişmanlık ölçütü kullanılsaydı hangi eylem seçilirdi?

Hesaplamalar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Burada da sonuçta en iyi seçenek olduğu anlaşılan eylemin pişmanlığı 0'dır. Öyleyse minimaks pişmanlık ölçütünün sabit faiz yatırımını seçtiğini görüyoruz.

YATIRIM	BORSANIN DURUMU			EN YÜKSEK PİŞMANLIK	
	YÜKSELEN	DEĞİŞMEYEN	DÜŞEN		
Sabit faiz	1,300	0	0	1,300	← Minimaks pişmanlık
Portföy	0	700	2,200	2,200	

Minimaks pişmanlık ölçütünün genel karar kuralı aşağıdaki çerçevede belirtilmiştir.

Minimaks Pişmanlık Ölçütüne Dayalı Karar Kuralı

Satırları eylemlere, sütunları doğa durumlarına karşılık gelen dikdörtgen biçiminde bir ödül çizelgesi düzenlendiğini düşünelim. Bu çizelgedeki her ödül *kendi sütunundaki* en büyük ödülden çıkarılır, bulunan değerler **pişmanlık çizelgesini** oluşturur.

Pişmanlık çizelgesi veriyken **minimaks pişmanlık ölçütü**nün seçilmesini öngördüğü eylem şöyle bulunur:

(i) Her satır (eylem) için en yüksek pişmanlığı bulun.

(ii) Bu *en yüksek* pişmanlıklar arasından *en düşüğü*nü seçin.

Minimaks pişmanlık karar verme ölçütüyle en düşük pişmanlık sağlanacağından *emin* olunabilir. Ancak iki önemli aksaklığı sözkonusudur:

1. Ölçütün gerisindeki mantık, işletmecilikteki çok geniş bir karar verme problemleri yelpazesinin çözümlenmesi için zorlayıcı bir çerçeve çizmez. Kaçırılan fırsatlar için bir sürü gözyaşı dökmeme konusunda elbette bir şeyler söylenmelidir. Ama yine de mantıklı bir dünyada kararların daha sağlam zeminlerde alınması gerekir.
2. Maksimin ölçütü gibi minimaks pişmanlık ölçütü de karar vericinin, doğa durumunun gerçekleşme şansı konusunda kendi kişisel görüşünü karar verme sürecine sokmasına izin vermez. Çoğu iş yaşamı problemi, karar vericinin hiç olmazsa orta derecede aşina olduğu bir ortamda ortaya çıktığına göre, bu, uzmanlığın boşa gitmesi anlamına gelir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir yatırımcı 20,000 $'lık bir yatırımı için üç seçeneği düşünmektedir: mevduat sertifikası, düşük riskli bir yatırım fonu ve yüksek riskli bir yatırım fonu. Yatırımcı üç doğa durumunu göz önüne almaktadır:

s_1: Sağlam borsa
s_2: Orta derecede sağlam borsa
s_3: Zayıf borsa

Ödül çizelgesi (dolar cinsinden) şöyledir:

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI		
	s_1	s_2	s_3
Mevduat sertifikası	1,200	1,200	1,200
Düşük riskli yatırım fonu	4,300	1,200	–600
Yüksek riskli yatırım fonu	6,600	800	–1,500

(a) Bu eylemlerden herhangi biri kabul edilemez olabilir mi?
(b) Maksimin ölçütüyle hangi eylem seçilir?
(c) Minimaks pişmanlık ölçütüyle hangi eylem seçilir?

2. Bir koku giderici üreticisi yeni bir ürün nedeniyle üretim kapasitesini genişletmek üzeredir. Dört üretim süreci seçeneği sözkonusudur. Aşağıdaki çizelge, ürüne olan

talebin üç olanaklı düzeyinde bu süreçler için dolar cinsinden kârları göstermektedir.

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ		
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK
A	100,000	350,000	900,000
B	150,000	400,000	700,000
C	250,000	400,000	600,000
D	250,000	400,000	550,000

(a) Bu eylemlerden herhangi biri kabul edilemez olabilir mi?
(b) Maksimin ölçütüyle hangi eylem seçilir?
(c) Minimaks pişmanlık ölçütüyle hangi eylem seçilir?

3. Bir başka karar verme ölçütü, bazen *iyimserlik ölçütü* diye adlandırılan *maksimaks ölçütü*dür. Bu ölçüt olanaklı en yüksek ödülü getiren eylemi seçer.
   (a) Çizelge 19.1'deki ödüller veriyken şekerleme üreticisi bu yönteme göre hangi eylemi seçer?
   (b) Örnek 19.1'deki yatırımcı bu ölçüte göre hangi eylemi seçer?
4. Şekerleme üreticisinin önünde kabul edilebilir üç eylem seçeneği —A, B, C süreçleri— vardır. Bunlar birlikte ele alındıklarında minimaks pişmanlık ölçütüyle B süreci seçilmektedir. Şimdi kabul edilebilir dördüncü bir seçenek daha olsun: E süreci. Bu eylemin tahmin edilen ödülleri düşük talepte 60,000 $, orta düzey talepte 115,000 $ ve yüksek talepte 220,000 $'dır. A, B, C, E süreçleri birlikte alındığında minimaks pişmanlık ölçütünün A sürecini seçeceğini gösterin. Öyleyse önümüzdeki eylem seçeneklerine E süreci eklendiğinde ölçüt bu süreci seçmemekte, bu ekleme yapılmasaydı seçilecek olandan farklı bir süreci seçmeye yönelmektedir. Bu örneğin ışığında minimaks pişmanlık ölçütünün sezgisel çekiciliği konusunu yorumlayın.
5. İki olanaklı eylemi ve iki doğa durumu olan bir karar problemi alalım.
   (a) Her iki eylemin de kabul edilebilir olduğu ve hem maksimin hem minimaks pişmanlık ölçütüyle aynı eylemin seçildiği bir ödül çizelgesi düzenleyin.
   (b) Maksimin ve minimaks pişmanlık ölçütleriyle farklı eylemlerin seçildiği bir ödül çizelgesi örneği düzenleyin.
6. İki kabul edilebilir eylemi ve iki olanaklı doğa durumu olan bir karar problemi alalım. Hem maksimin hem minimaks pişmanlık ölçütüyle aynı eylemin seçildiği bir ödül çizelgesi kalıbını betimleyin.
7. Bir ayakkabı satıcısı yerleşmiş ve başarılı bir alışveriş merkezinde bir dükkân açma fırsatı yakalamıştır. Almaşık olarak daha düşük bir maliyetle, yapımı henüz bitmiş başka bir alışveriş merkezinde de bir dükkân açabilir. Yeni merkez çok başarılı olursa oradaki dükkânın yıllık kârının 130,000 $ olması beklenmektedir. Merkez orta derecede başarılı olursa yıllık kâr 60,000 $ olacaktır. Merkez başarısız olursa yılda 10,000 $ zarar beklenmektedir. Yerleşik merkezdeki dükkânın kârı da bir ölçüde yeni merkezin başarı derecesine bağlıdır, çünkü müşteri olabilecek kimseler yeni merkeze kayabilecektir. Yeni merkez başarısız olursa yerleşik merkezdeki dükkânın beklenen yıllık kârı 90,000 $'dır. Ama yeni merkez orta derecede başarılı olursa beklenen bu kâr 70,000 $, çok başarılı olursa 30,000 $ olacaktır.

(a) Bu ayakabıcının karar verme problemi için ödül çizelgesini düzenleyin.
(b) Maksimin ölçütüyle hangi eylem seçilir?
(c) Minimaks pişmanlık ölçütüyle hangi eylem seçilir?

19.3 BEKLENEN PARASAL DEĞER

İş yaşamındaki çok fazla sayıda karar verme probleminde, sonuçta ortaya çıkacak ödülün belirlenmesiyle ilgili çeşitli doğa durumlarının gerçekleşme şansının ölçülebilmesinin çok önemli bir öğe olduğunu altını çizerek vurguladık. Altbölüm 19.2'de incelenen ölçütler bu tür bir değerlemenin karar verme sürecine katılmasına izin vermez. Ama bir yönetici, hemen her zaman kararın alınacağı ortamı tanır ve bir eylem seçeneği üzerinde karar verilmeden önce bu uzmanlığın hesaba katılmasını ister. Şekerleme üreticisinin bu ürün pazarı konusunda her halde bir deneyimi vardır ve buna dayanarak düşük, orta ya da yüksek talep düzeylerinin gerçekleşme şanslarına ilişkin bir görüş oluşturabilir. Bu altbölümde her doğa durumuna bir gerçekleşme *olasılığı* ekleyebileceğimizi varsayarak son karara ulaşılmasında bu olasılıkların nasıl kullanıldığını göreceğiz.

Şekerleme üreticisi, geçmişte bu tür yeni ürünler pazara sürüldüğünde bunların %10'unda düşük, %50'sinde orta, %40'ında da yüksek talep düzeyiyle karşılaşıldığını biliyor olsun. Başka bir bilgin yoksa, bu pazara çıkış örneğinde, doğa durumları için aşağıdaki olasılıkların öngörülmesi akla uygundur:

$$\text{Düşük talep olasılığı} = 0.1$$

$$\text{Orta düzeyde talep olasılığı} = 0.5$$

$$\text{Yüksek talep olasılığı} = 0.4$$

Dikkat ederseniz, bu doğa durumlarından yalnızca biri gerçekleşeceğinden bu olasılıkların toplamı 1 eder, yani doğa durumları birbiriyle bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcıdır.

ÇİZELGE 19.6 Şekerleme üreticisi için ödüller ve doğa durumu olasılıkları

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYİ		
	DÜŞÜK ($p = 0.1$)	ORTA ($p = 0.5$)	YÜKSEK ($p = 0.4$)
A	70,000	120,000	200,000
B	80,000	120,000	180,000
C	100,000	125,000	160,000

Karar verme problemi çözülürken, her bir eylem-doğa durumu birleşimine karşılık gelen ödüllerin yanısıra doğa durumlarının bu olasılıkları da kullanılacaktır. Öyleyse Çizelge 19.6'da yapıldığı gibi, bu olasılıkları ödül çizelgesine eklemek uygun olur.

Genel olarak söylersek, H tane doğa durumu varsa her birine bir olasılık atanmalıdır. Bu olasılıkları $p_1, p_2, \ldots, p_H$ ile göstereceğiz, böylece p_j olasılığı s_j doğa durumuna karşılık gelecektir. Burada da bu olasılıkların toplamı 1 etmelidir.

$$\sum_{j=1}^{H} p_j = 1$$

Karar verme problemimizin genel yapısı Çizelge 19.7'de gösterilmiştir.

Bir karar verici bir eylemi seçerken, her bir seçimi ilgili ödülü almak için belli bir olasılığa sahip olarak görür, böylece de her eylemden doğacak **beklenen ödülü** hesaplayabilir. Şekerleme üreticisi, A üretim sürecini seçecek olursa 0.1 olasılıkla 70,000 $, 0.5 olasılıkla 120,000 $, 0.4 olasılıkla da 200,000 $ ödül alacaktır. Bu eylemin beklenen değeri de tekil ödüllerin ilgili olasılıklarla tartılandırılmış toplamı olur. Bu beklenen ödüllere çoğu zaman eylemlerin **beklenen parasal değerleri** denir. Şekerleme üreticisi için bu üç kabul edilebilir eylemin beklenen parasal değerleri şunlardır:

Süreç A: (0.1)(70,000 $) + (0.5)(120,000 $) + (0.4)(200,000 $) = 147,000 $

Süreç B: (0.1)(80,000 $) + (0.5)(120,000 $) + (0.4)(180,000 $) = 140,000 $

Süreç C: (0.1)(100,000 $) + (0.5)(125,000 $) + (0.4)(160,000 $) = 136,500 $

Beklenen parasal değer tanımının genel biçimi aşağıdaki çerçevede belirtilmiştir.

ÇİZELGE 19.7 K tane kabul edilebilir eylemi ve H tane doğa durumu olan bir karar problemi için M_{ij} ödülleri ve p_j doğa durumu olasılıkları

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI			
	s_1 (p_1)	s_2 (p_2)	...	s_H (p_H)
a_1	M_{11}	M_{12}	...	M_{1H}
a_2	M_{21}	M_{22}	...	M_{1H}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
a_K	M_{K1}	M_{K2}	...	M_{KH}

Beklenen Parasal Değerler

Bir karar vericinin önünde K tane olanaklı eylem $a_1, a_2, \ldots, a_K$ ve H tane doğa durumu olsun. Bunlardan i'inci eylemle j'inci doğa durumuna karşılık olan ödülü M_{ij} ile, j'inci doğa durumunun gerçekleşme olasılığını da p_j ile gösterelim.

$$\sum_{j=1}^{H} p_j = 1$$

olsun. Bu durumda a_i eyleminin **beklenen parasal değeri** BPD(a_i) şudur:

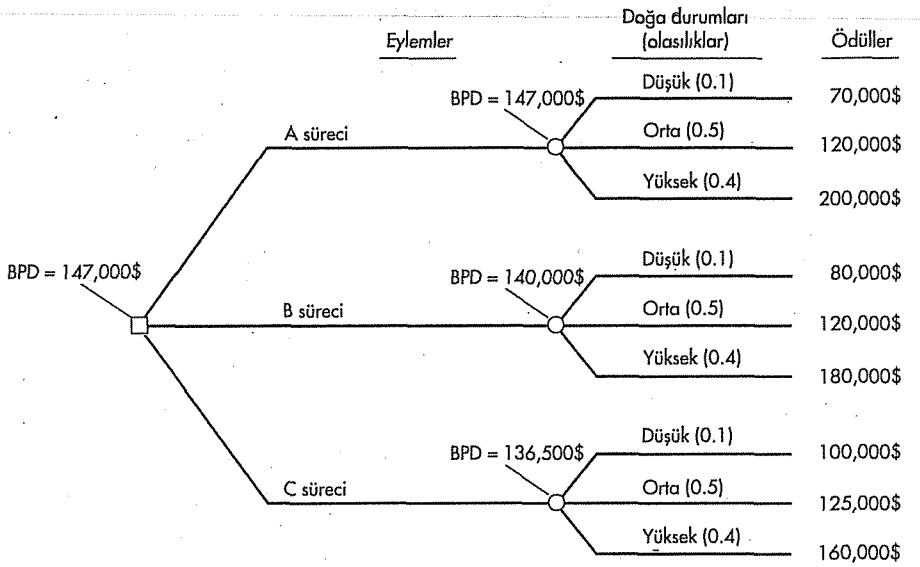
$$\text{BPD}(a_i) = p_1 M_{i1} + p_2 M_{i2} + \cdots + p_H M_{iH} = \sum_{j=1}^{H} p_j M_{ij}$$

Çeşitli eylem seçenekleriyle ilişkilendirilmiş beklenen parasal değerler, karar vericiye uygulamadaki pek çok problem için son derecede çekici bir seçim ölçütü sağlar. Bu ölçütle en yüksek beklenen parasal değeri veren eylem seçilir. Bu durumda şekerleme üreticisi bu ölçütü izleyerek A üretim sürecini seçer. İlginçtir ki ne maksimin ne de minimaks pişmanlık ölçütü bu seçimi yapmıştır. Ancak burada yüksek düzeyde bir talebin gerçekleşme şansının düşüğe göre çok daha fazla olduğu bilgisi işe karışmıştır. Bu da A sürecini göreli olarak çekici bir seçenek kılmıştır.

Beklenen Parasal Değer Ölçütü

Almaşık eylemler arasında bir seçim yapılacaksa, **beklenen parasal değer ölçütü**, beklenen parasal değeri en yükek olan eylemi seçer.

Bir karar probleminin beklenen parasal değer ölçütü yardımıyla çözümlenmesi, **karar ağacı** denen bir düzenek aracılığıyla kolayca sergilenebilir. Şekerleme üreticisi için böyle bir gösterim Çizim 19.1'de verilmiştir. Çizimin sol yanından başlarsak, oradaki kare kavşağından olanaklı üç eylemi temsil eden dallar çıkmaktadır. Karelerle gösterilen kavşaklar karar verilmesi gereken yerlerdir. Daha sonra, her birine bir olasılık atadığımız doğa durumlarını temsil eden dalların çıktığı daire kavşaklarına geliriz. Son olarak, bu son dalların ucuna her bir eylem-doğa durumu birleşimine karşılık gelen ödüller yerleştirilmiştir. Hesaplamalar bu ödüllerden başlayıp sağdan sola doğru gider. Her daire kavşağında, oradan çıkan dalların ödülleriyle olasılıklarının çarpım toplamlarını buluruz. Bu toplam her eylemin BPD'sini verir. Sonunda kare kavşağında en yüksek BPD belirtilir. Bunun A sürecinden doğduğunu görüyoruz, öyleyse beklenen parasal değer ölçütüne göre bu süreç seçilmelidir. Bu eylemin seçimi şekerleme üreticisine 147,000 $'lık bir beklenen parasal değer ya da beklenen kâr sağlar.



ÇİZİM 19.1 Şekerleme üreticisi için karar ağacı

ÖRNEK 19.3

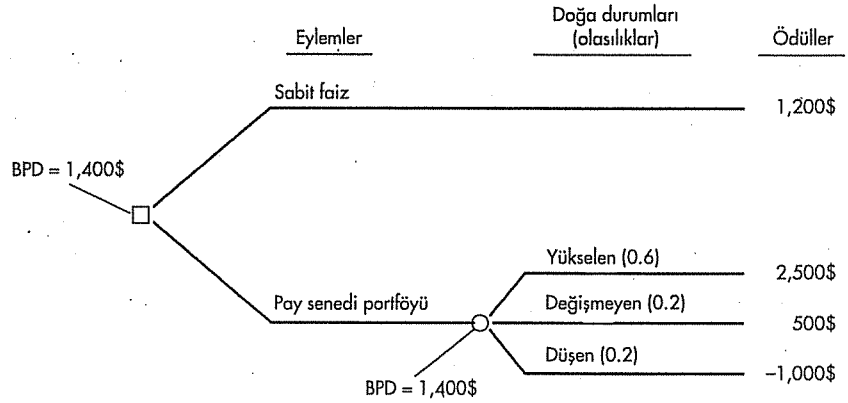
Sabit faizli bir yatırımla pay senedi portföyü arasında karar verecek olan Örnek 19.1 ile 19.2'deki yatırımcıya yeniden dönelim. Yatırımcının borsanın geleceği konusunda çok iyimser olduğunu, borsanın yükselme olasılığının 0.6, öbür iki durumdan her birinin olasılığının da 0.2 olacağına inandığını varsayalım. Dolayısıyla ödüller ile doğa durumu olasılıkları aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibidir. Beklenen parasal değer ölçütüne göre hangi yatırım seçilmelidir?

YATIRIM	BORSANIN DURUMU		
	YÜKSELEN ($p = 0.6$)	DEĞİŞMEYEN ($p = 0.2$)	DÜŞEN ($p = 0.2$)
Sabit faiz	1,200	1,200	1,200
Pay senedi portföyü	2,500	500	–1,000

Borsada ne olursa olsun sabit faizli yatırımın ödülü hep 1,200 $ olacağından bu yatırımın beklenen parasal değeri 1,200 $'dır. Pay senetleri portföyü için ise,

$$\text{BPD} = (0.6)(2{,}500) + (0.2)(500) + (0.2)(-1{,}000) = 1{,}400\ \$$$

bulunur. Bu daha yüksek bir beklenen parasal değer olduğundan, yatırımcı bu ölçüte göre pay senedi portföyünü seçer.



ÇİZİM 19.2 Örnek 19.3'teki yatırımcı için karar ağacı

Bu problemin karar ağacı Çizim 19.2'de gösterilmiştir. Dikkat ederseniz, sabit faiz eylemi için doğa durumuna karşılık gelen dallar yoktur, çünkü doğa durumu ne olursa olsun aynı (1,200 $'lık) ödül gerçekleşmektedir. Öyleyse bu ödül bu eylemin beklenen parasal değeridir.

ÖRNEK 19.4

Bu örnek, bir *dizi* kararın gerekebileceği bir problemi açıklamaktadır. Karar ağaçlarının kullanımı özellikle bu tür problemlerde yararlıdır. Bir ilaç üreticisi, yeni bir ağrı kesici formülünün patentini elinde tutmaktadır. Üretici bu patenti 50,000 $'a satabilir ya da ilacın etkinliği için yoğun denemelere girişebilir. Bu denemeleri yürütmenin maliyeti 10,000 $'dır. İlaç etkin bulunmazsa pazara sürülmeyecek, deneme giderleri zarar olarak yazılacaktır. Geçmişte bu tür ilaç denemelerinin %60'ında ilaç etkin bulunmuş, 40'mda bulunmamıştır.

Denemeler ilacı etkin bulursa, üreticinin önünde yine iki seçenek vardır. Patenti ve deneme sonuçlarını 120,000 $'a satabilir ya da ilacı pazara kendisi sürebilir. Pazara kendisi girerse, başarılı bir satış kampanyasıyla (deneme giderleri düşüldükten sonraki) kârın 180,000 $ olacağı, orta derecede başarılı bir kampanyayla 90,000 $ olacağı tahmin edilmektedir. Her iki kampanya düzeyinin eşit şansı olduğu sanılmaktadır. Beklenen parasal değer ölçütüne göre ilaç üreticisi ne yapmalıdır?

En iyisi bu probleme karar ağacı yoluyla yaklaşmaktır. Düzenlenen ağaç Çizim 19.3'te gösterilmiştir. Sol yandaki ilk karar noktasından başlayarak dallar çizilir. Üretici ya patenti satar, o zaman yapacak bir şey yoktur; ya da elinde tutup ilacın etkinliğini denemeye girişir. İki doğa durumu sözkonusudur: ya (0.6 olasılıkla) ilaç etkindir ya da (0.4 olasılıkla) değildir. İkinci durumda öykü biter. Ama ilaç etkin çıkarsa ikinci bir karar verilmek zorundadır: ilacı pazarlamak ya da patenti ve deneme sonuçlarını satmak. İlk seçenek benimsenirse, son durum pazarlamanın başarı düzeyiyle belirlenecektir, bu başarı derecesi de (her biri 0.5 olasılıkla) ya orta ya da yüksek olur.

Bundan sonra, bütün eylem-doğa durumları birleşimlerinin ödülleri çizimin sağ yanına yazılır. En alttan başlayalım. Üreticinin ilk kararı patenti satmaksa 50,000 $ alır. Patent tutulur da ilaç etkin çıkmazsa, üretici deneme giderleri olan 10,000 $ kaybeder. Bu değer eksi ödül olarak gösterilir. İlaç etkin çıkar da patentle deneme sonuçları satılırsa üretici 120,000 $ alır, bundan deneme giderleri 10,000 $'ı düşersek ödül 110,000 $ olur. Son olarak, eğer ilaç pazarlanırsa, orta ve yüksek derecede başarıların ödülleri sırasıyla 90,000 ve 180,000 $'dan deneme giderleri indirilerek 80,000 ve 170,000 $ olarak bulunur.

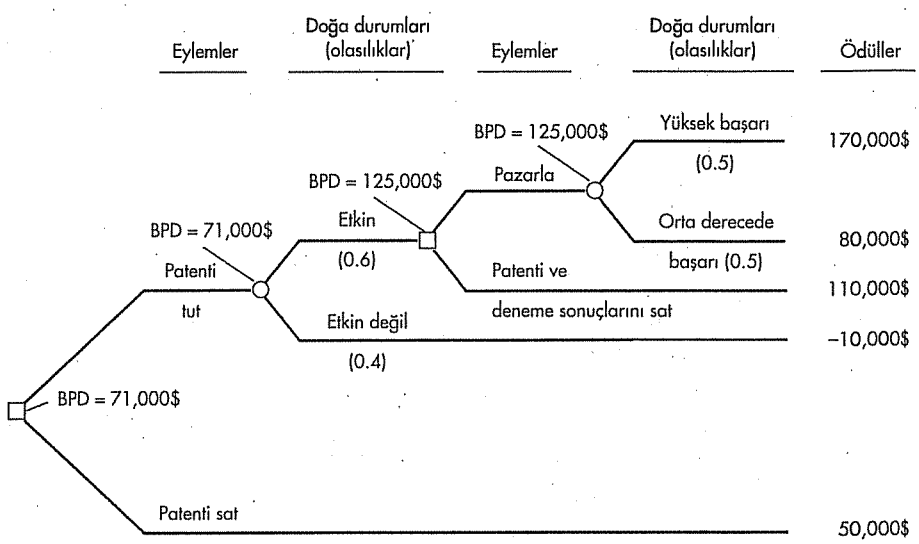
Bu noktaya ulaştıktan sonra ağaç boyunca sağdan sola geriye doğru giderek bu karar problemini çözebiliriz. Buna mecburuz çünkü ikinci karar noktasındaki olanaklı en iyi seçenekten beklenen parasal değer bulunmadan, ilk karar noktasındaki uygun eylem belirlenemez.

Öyleyse başlangıçta patentin satılmadığını, denemelerin de ilacı etkin bulduğunu düşünüp hesaba girişiyoruz. Eğer patent ve deneme sonuçları satılırsa kazanç 110,000 $ olacaktı. İlacın pazarlanmasından beklenen parasal değer de şudur:

$$(0.5)(170{,}000) + (0.5)(80{,}000) = 125{,}000\ \$$$

Bu rakam 110,000 $'ı geçtiği için, beklenen parasal değer ölçütüne göre bu aşamadaki en iyi seçenek ilacı pazarlamaktır. Dolayısıyla bu tutar ikinci karar noktasındaki kare kavşağına yazılır ve üreticinin ilk kararı patenti elde tutması ve denemelerin ilacı etkin bulması durumundaki ödül anlamına gelir.

ÇİZİM 19.3 Örnek 19.4'teki ilaç üreticisi için karar ağacı



Bu durumda, ilk karar için ödül çizelgesi doğa durumu olasılıklarıyla birlikte aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Patenti satmanın beklenen parasal değeri kesin bir 50,000 $ iken patenti elde tutmanın beklenen parasal değeri şöyle bulunur:

$$(0.6)(125{,}000) + (0.4)(-10{,}000) = 71{,}000\ \$$$

Demek ki beklenen parasal değer ölçütüne göre patent satılmamalıdır.

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI	
	ETKİN ($p = 0.6$)	ETKİN DEĞİL ($p = 0.4$)
Patenti tut	125,000	–10,000
Patenti sat	50,000	50,000

Sonunda şu bulguya ulaştık: Eğer amaç beklenen parasal değeri (yani beklenen kârı) en yükseğe çıkarmaksa, üretici patenti satmamalı, ilaç etkin bulunursa da kendi pazarlamalıdır. Bu tutum 71,000 $'lık bir beklenen kâr göstermektedir.

DUYARLILIK ÇÖZÜMLEMESİ

Şekerleme üreticisi örneğimizde beklenen parasal değer ölçütüne göre A üretim sürecinin kullanılması gerektiği ortaya çıkmıştı. Bu karar, her bir eylem-doğa durumu birleşiminin ödüllerine ve doğa durumlarının tahmin edilen gerçekleşme olasılıklarına bağlıdır. Ama çoğu zaman karar verici bu tahminler konusunda emin olamaz. Öyleyse belli bir eylem, bir karar probleminin hangi belirlenme aralığında beklenen parasal değer ölçütüne göre en uygun olur sorusunun sorulması yararlıdır. Duyarlılık çözümlemeleri bu tür sorulara yanıt arar. Bunun en basit örneği, problemin öbür bütün özellikleri aynı kalırken yalnızca bir özelliğini değiştirmektir.

Bunu açıklamak için şekerleme üreticisinin yüksek talep olasılığı 0.4'ten hoşnut olduğunu ama öteki doğa durumu konusunda pek emin olamadığını düşünelim. Düşük talep olasılığını p ile gösterelim, bu durumda orta düzey talep olasılığı $(0.6 - p)$ olur. Şimdi, beklenen parasal değer ölçütü kullanıldığında, p'nin hangi değer aralığında A sürecinin benimsenmesi en uygundur sorusunu sorarız. Çizelge 19.6'daki ödüller kullanılarak beklenen parasal değerler şöyle bulunur:

$$\text{BPD(A)} = (p)(\ 70{,}000) + (0.6 - p)(120{,}000) + (0.4)(200{,}000) = 152{,}000 - 50{,}000p$$

$$\text{BPD(B)} = (p)(\ 80{,}000) + (0.6 - p)(120{,}000) + (0.4)(180{,}000) = 144{,}000 - 40{,}000p$$

$$\text{BPD(C)} = (p)(100{,}000) + (0.6 - p)(125{,}000) + (0.4)(160{,}000) = 139{,}000 - 25{,}000p$$

BPD(A) öbür iki sürecin BPD'sinden yüksek olduğu sürece A sürecinin seçimi en uygundur. Öyleyse A sürecinin B sürecinden üstün tutulabilmesi için

$$152{,}000 - 50{,}000p \geq 144{,}000 - 40{,}000p$$

ya da

$$8{,}000 \geq 10{,}000p$$

böylece

$$p \leq 0.8$$

olmalıdır. Varsayımlarımız gereği düşük talep olasılığı 0.6'yı aşamayacağına göre bu zaten böyle olmak zorundadır. Benzer biçimde A sürecinin C sürecine üstün tutulabilmesi için şunun sağlanması gerekir:

$$152{,}000 - 50{,}000p \geq 139{,}000 - 25{,}000p$$

ya da

$$13{,}000 \geq 25{,}000p$$

böylece

$$p \leq 0.52$$

Öyleyse ödüller Çizelge 19.6'da öngörüldüğü gibi ve yüksek talep olasılığı 0.4 iken beklenen parasal değer ölçütüne göre A sürecinin en iyi seçim olmasının, düşük talep olasılığının 0.52'yi aşmaması koşuluna bağlı olduğunu saptamış bulunuyoruz.

Şimdi de şekerleme üreticisinin A sürecinin yüksek talep düzeyi için tahmin edilmiş ödülü olan 200,000 $ konusunda pek emin olamadığını düşünelim. Problemin bütün öteki özellikleri Çizelge 19.6'da belirtilen başlangıç düzeylerinde kalırken, bu ödülün hangi değer aralığında A sürecinin en uygun seçim olduğunu inceleyelim. A sürecinin yüksek talep düzeyindeki ödülüne M dersek, bu sürecin beklenen parasal değeri şu olur:

$$\text{BPD(A)} = (0.1)(70{,}000) + (0.5)(20{,}000) + 0.4\,M = 67{,}000 + 0.4M$$

B ve C süreçlerinin beklenen parasal değerleri önceden olduğu gibi 140,000 $ ve 136,500 $'dır. Öyleyse A süreci, beklenen parasal değer ölçütüne göre aşağıdaki koşulla en iyi seçimdir:

$$67{,}000 + 0.4M \geq 140{,}000$$

ya da

$$0.4M \geq 73{,}000$$

böylece

$$M \geq 182{,}500$$

Demek ki, öbür bütün özellikler başlangıçta Çizelge 19.6'da verilen biçimdeyken beklenen parasal değer ölçütüne göre A sürecinin seçilebilmesinin, yüksek talep düzeyinde A sürecinin ödülünün en az 182,500 $ olması koşuluna bağlı olduğunu göstermiş bulunuyoruz.

19.4 ÖRNEKLEM BİLGİSİNİN KULLANIMI: BAYESGİL ÇÖZÜMLEME

İş dünyasında verilen kararlar çoğu zaman büyük para miktarlarıyla ilişkilidir ve en uygun olmayan bir seçim ciddi sonuçlar doğurabilir. Durum böyleyken, karar verilmeden önce elden geldiğince çok ilgili bilgiyi derlemek için çaba harcamak karar vericinin pekâlâ işine yarayabilir. Karar verici, özellikle sonda ortaya çıkacak ödülleri belirleyen çeşitli doğa durumlarının gerçekleşme şansına ilişkin olarak olabildiğince bilgilenmek ister.

Bir karar probleminin özenli bir çözümlemesinin bu özelliği şimdiye kadarki açıklamalarımızda pek yer almadı. Altbölüm 19.3'te şekerleme üreticisi düşük, orta ve yüksek talep düzeyi olasılıklarını sırasıyla 0.1, 0.5 ve 0.4 olarak öngördü. Ancak bu öngörü önceki ürünlerin geçmişteki oranlarından başka bir şeyi yansıtmıyordu. Uygulamada bu üretici yeni ürünün geleceğini görebilmek için pekâlâ bir pazar araştırması düzenleyebilir. Bu araştırma veriyken başlangıçtaki bu **önsel olasılıklar**, üç talep düzeyi için, **ardıl olasılıklar** denen yeni olasılıklara dönüştürülebilir. Doğa durumları olasılıklarının düzeltilmesine yol açan bu bilgiye (bu örnekte pazar araştırması bulgularına) **örneklem bilgisi** adı verilir.

Aslında Altbölüm 3.8'de önsel olasılıkların, ardıl olasılıklar üretmek için düzeltilme düzeneğini görmüştük. Bu sonuca Bayes teoremiyle ulaşılır. Bu teoremi, kolaylık sağlamak amacıyla karar verme problemimiz bağlamında aşağıdaki çerçevede yeniden belirtiyoruz.[1]

Bayes Teoremi

Bir karar probleminde H tane doğa durumuna karşılık gelen H tane birbiriyle bağdaşmaz ve bütünü kapsayıcı olayı $s_1, s_2, \ldots, s_H$ ile gösterelim. A başka bir olay olsun. A gerçekleştiğinde s_i'nin gerçekleşmesinin koşullu olasılığını $P(s_i \mid A)$ ile ve s_i veriyken A'nın olasılığını da $P(A \mid s_i)$ ile gösterelim.

[1] Okuyucu daha fazla ilerlemeden Altbölüm 3.8'e yeniden bakabilir.

A veriyken s_i'nin koşullu olasılığı şöyle yazılabilir:

$$P(s_i \mid A) = \frac{P(A \mid s_i)P(s_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid s_i)P(s_i)}{P(A \mid s_1)P(s_1) + P(A \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A \mid s_H)P(s_H)}$$

Bu altbölümün terimleriyle söylersek, $P(s_i)$, s_i'nin **önsel olasılığı** olup A olayının gerçekleştiği yolundaki örneklem bilgisi veriyken $P(s_i \mid A)$ **ardıl olasılığına** dönüştürülür.

Şimdi şekerleme üreticisinin, bir pazar araştırması kuruluşunu yeni ürüne olan talep düzeyini kestirmesi için tuttuğunu düşünelim.[2] Bu kuruluş araştırma sonucunu "iyi", "fena değil" ve "kötü" diye belirtmektedir. Pazar araştırması şirketinin geçmişine bakılarak bu alandaki kestirimlerinin kalitesi anlaşılabilir. Çizelge 19.8 her bir talep düzeyi için iyi, fena değil, kötü sonuçlarının oranlarını göstermektedir. Böylece, sözgelimi, talep düzeyi yüksekken şirket %10 oranında "kötü" kestiriminde bulunmuştur. Düşük, orta ve yüksek talep düzeylerini sırasıyla s_1, s_2, s_3 ile gösterirsek koşullu olasılık simgelerini kullanıp

$$P(\text{Kötü} \mid s_1) = 0.6 \qquad P(\text{Kötü} \mid s_2) = 0.3 \qquad P(\text{Kötü} \mid s_3) = 0.1$$

vb. yazabiliriz.

Şimdi pazar araştırması kuruluşuna danışıldığını, onun da şekerlemelerin geleceği için "kötü" değerlemesini yaptığını düşünelim. Bu yeni bilgi ışığında üç talep düzeyi için

$$P(s_1) = 0.1 \qquad P(s_2) = 0.5 \qquad P(s_3) = 0.4$$

önsel olasılıklarını Bayes teoremini kullanıp düzeltelim. Düşük talep düzeyi için ardıl olasılık şöyle bulunur:

ÇİZELGE 19.8 Şekerlemelerin belli talep düzeylerine ulaşması için pazar araştırma kuruluşunca verilen değerleme oranları

DEĞERLEME	TALEP DÜZEYLERİ		
	DÜŞÜK (s_1)	ORTA (s_2)	YÜKSEK (s_3)
Kötü	0.6	0.3	0.1
Fena değil	0.2	0.4	0.2
İyi	0.2	0.3	0.7

[2] Kuşkusuz bu hizmetin karşılığını ödeyecektir. Altbölüm 19.5'te bulguların maliyete değer olup olmadığı sorusunu inceleyeceğiz.

$$P(s_1 \mid \text{Kötü}) = \frac{P(\text{Kötü} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Kötü} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Kötü} \mid s_2)P(s_2) + P(\text{Kötü} \mid s_3)P(s_3)}$$

$$= \frac{(0.6)(0.1)}{(0.6)(0.1) + (0.3)(0.5) + (0.1)(0.4)} = \frac{0.06}{0.25} = 0.24$$

Benzer biçimde öteki iki talep düzeyinin ardıl olasılıkları da şöyledir:

$$P(s_2 \mid \text{Kötü}) = \frac{(0.3)(0.5)}{0.25} = 0.60$$

$$P(s_3 \mid \text{Kötü}) = \frac{(0.1)(0.4)}{0.25} = 0.16$$

Ardıl olasılıklar beklenen parasal değerleri hesaplamada kullanılabilir. Çizelge 19.9 ödülleri, üç talep düzeyinin ardıl olasılıklarıyla birlikte göstermektedir.

Üç üretim sürecinin beklenen parasal değerleri tıpkı daha önceki gibi bulunur. Bunlar aşağıdadır:

A SÜRECİ: (0.24)(70,000) + (0.60)(120,000) + (0.16)(200,000) = 120,800 $
B SÜRECİ: (0.24)(80,000) + (0.60)(120,000) + (0.16)(180,000) = 120,000 $
C SÜRECİ: (0.24)(100,000) + (0.60)(125,000) + (0.16)(160,000) = 124,600 $

Pazarın geleceği "kötü" diye değerlenmişse beklenen parasal değer ölçütüne göre C süreci kullanılmalıdır. Pazar araştırma kuruluşunun değerlemesi düşük talebin şansını artırırken yüksek talebin şansını eskiye göre düşürdü. Pazarın geleceği konusundaki bu görüş değişikliği şekerleme üreticisinin seçimini de A sürecinden (ardıl olasılıkları temel alarak) C sürecine kaydırmış oldu.

Aynı akıl yürütmeyi izleyerek, şekerlemenin gelecekteki pazar başarısı "fena değil" ya da "iyi" çıkarsa alınacak kararları belirleyebiliriz. Üç talep düzeyi için ardıl olasılıklar yine Bayes teoremi aracılığıyla elde edilebilir. Bu olasılıklar "fena değil" değerlemesi için

ÇİZELGE 19.9 Pazar araştırması kuruluşunun "kötü" değerlemesi veriyken, şekerleme üreticisinin ödülleri ve doğa durumlarının ardıl olasılıkları

ÜRETİM SÜRECİ	TALEP DÜZEYLERİ		
	DÜŞÜK ($p = 0.24$)*	ORTA ($p = 0.60$)*	YÜKSEK ($p = 0.16$)*
A	70,000	120,000	200,000
B	80,000	120,000	180,000
C	100,000	125,000	160,000

* Ardıl olasılıklar

ÇİZELGE 19.10 Pazar araştırması kuruluşunun üç olanaklı değerlemesinden her biri için şekerleme üreticisinin beklenen parasal değerleri

ÜRETİM SÜRECİ	DEĞERLEME		
	KÖTÜ	FENA DEĞİL	İYİ
A	120,800	138,000	167,556
B	120,000	133,333	155,556
C	124,600	132,667	145,667

$$P(s_1 \mid \text{Fena değil}) = \frac{1}{15} \qquad P(s_2 \mid \text{Fena değil}) = \frac{2}{3} \qquad P(s_3 \mid \text{Fena değil}) = \frac{4}{15}$$

ve "iyi" değerlemesi için

$$P(s_1 \mid \text{İyi}) = \frac{2}{45} \qquad P(s_2 \mid \text{İyi}) = \frac{1}{3} \qquad P(s_2 \mid \text{İyi}) = \frac{28}{45}$$

çıkar. Bu ardıl olasılıkları kullanıp, verilen her değerleme için her bir üretim sürecinin beklenen parasal değerini belirleyebiliriz. Çizelge 19.10 bu büyüklükleri içermektedir.

Daha önce görmüş olduğumuz gibi, değerleme "kötü" ise C süreci yeğlenir. Başka bir değerleme yapılsa bu ölçütle A sürecini seçeriz.

Talep düzeyleri için önsel olasılıklar kullanıldığında beklenen parasal değer ölçütüyle şekerleme üreticisinin probleminde en uygun kararın A sürecini kullanmak olduğunu anımsayalım. Bu önsel olasılıklar örneklem bilgisi ışığında düzeltilirse, (değerleme "kötü" çıktığında) farklı bir karar verilebilmektedir. Demek ki pazar araştırması kuruluşuna danışmak üretici için anlamlı olabilir. Kuşkusuz, değerleme nasıl çıkarsa çıksın hep A sürecinin seçimi en uygun olursa örneklem bilgisi pek değer taşımayabilir.

ÖRNEK 19.5

Örnek 19.4'te bir ilaç üreticisi bir ağrı kesicisinin formül patentini denemelerden geçirmeden satıp satmamaya karar verecektir. (Daha sonra patent satılmasa ve ilaç etkin bulunsa —ilacı pazarlama ya da patenti ve deneme sonuçlarını satma gibi— ikinci bir karar alınması gerekecektir.) İlk karar için iki doğa durumu vardır:

s_1 = İlaç etkin
s_2 = İlaç etkin değil

Geçmiş deneyimlere dayan önsel olasılıklar şöyledir:

$$P(s_1) = 0.6 \qquad P(s_2) = 0.4$$

İlaç üreticisinin önünde ilk kararı almadan önce küçük bir maliyetle deneme yapma seçeneği vardır. Deneme yanlış sonuç verebilir. En sonunda etkin bulunan ilaçlar için daha önceleri yapılan ön denemelerde sonuç %60 oranında olumlu olmuş, geri kalan durumlarda olumsuz çıkmıştır. Etkin bulunmayan ilaçlarda ise ön denemelerin %30'unda sonuç olumlu, geri kalanında olumsuz olmuştur. Ön deneme sonucu verilmişken ilaç üreticisi ne yapmalıdır? Ön deneme sonucu olumsuz çıkarsa patentin yine de 50,000 $'a satılabileceğini varsayalım.

İlk olarak, patent elde tutulur da yoğun denemeler sonucu ilaç etkin bulunursa, pazar koşullarına ilişkin herhangi bir örneklem bilgisi yokken, bu aşamadaki en uygun kararın, Örnek 19.4'teki gibi, ilacı pazarlamak olduğuna dikkat edelim. Bu özel kararda ön denemeden elde edilen bilgi geçerli değildir. Ancak patenti satıp satmama konusunda ilk kararı etkileyebilir. Buna göre asıl bu karar üzerinde yoğunlaşmamız gerekir.

Doğa durumları veriyken, örneklem sonuçlarının koşullu olasılıkları şöyledir:

$$P(\text{Olumlu} \mid s_1) = 0.6 \qquad P(\text{Olumsuz} \mid s_1) = 0.4$$

$$P(\text{Olumlu} \mid s_2) = 0.3 \qquad P(\text{Olumsuz} \mid s_2) = 0.7$$

Ön deneme sonucu olumluysa, bu bilgi verilmişken, s_1 (Etkin) durumu için ardıl olasılık şudur:

$$P(s_1 \mid \text{Olumlu}) = \frac{P(\text{Olumlu} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Olumlu} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Olumlu} \mid s_2)P(s_2)}$$

$$= \frac{(0.6)(0.6)}{(0.6)(0.6) + (0.3)(0.4)} = 0.75$$

Üstelik, iki ardıl olasılık toplamı 1 edeceğine göre, şunu da buluruz:

$$P(s_2 \mid \text{Olumlu}) = 0.25$$

Aşağıdaki ödül çizelgesi bu ardıl olasılıkların eklenmesi dışında Örnek 19.4'dekiyle aynıdır.

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI	
	ETKİN ($p = 0.75$)*	ETKİN DEĞİL ($p = 0.25$)*
Patenti tut	125,000	–10,000
Patenti sat	50,000	50,000

* Ardıl olasılık

Patent satılırsa beklenen parasal değer 50,000 $ ama satılmazsa beklenen parasal değer

$$(0.75)(125{,}000) + (0.25)(-10{,}000) = 91{,}250\ \$$$

olur. Dolayısıyla, ön deneme sonucu olumluysa bu ölçüte göre patent satılmamalıdır.

Şimdi de ön deneme sonucunun olumsuz olması durumunu ele alalım. Bayes teoremine göre s_1 durumu için ardıl olasılık şudur:

$$P(s_1 \mid \text{Olumsuz}) = \frac{P(\text{Olumsuz} \mid s_1)P(s_1)}{P(\text{Olumsuz} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Olumsuz} \mid s_2)P(s_2)}$$

$$= \frac{(0.4)(0.6)}{(0.4)(0.6) + (0.7)(0.4)} = 0.4615$$

Demek ki s_2 durumu için ardıl olasılık şöyledir:

$$P(s_2 \mid \text{Olumsuz}) = 0.5385$$

Bir kez daha, patent satılırsa, elde edilecek beklenen parasal değer 50,000 $'dır. Patent satılmazsa, bu kararın beklenen parsal değeri şöyle bulunur:

$$(0.4615)(125{,}000) + (0.5385)(-10{,}000) = 52{,}302.50\ \$$$

Öyleyse, ön deneme sonucu olumsuz bile olsa, beklenen parasal değer ölçütüne göre en uygun karar patenti satmamaktır.

Bu özel örnekte, örneklem bilgisi ne olursa olsun seçilen eylem aynıdır. Ön denemede iki sonuçtan hangisi çıkarsa çıksın, üretici patenti satmamalıdır. Kararı etkileyemeyeceğine göre örneklem bilgisini derlemenin bir anlamı yoktur. Aslında ön deneme bedava olmayacağına göre bunu yapmak en uygun yol değildir. Öyleyse, beklenen parasal değer ölçütüne göre ilaç üreticisinin patenti satmaması ve yoğun denemelerden sonra ilaç etkin bulunursa ilacı kendisinin pazarlaması gerektiği sonucuna varırız. Ön deneme hiç yapılmamalıdır.

19.5 ÖRNEKLEM BİLGİSİNİN DEĞERİ

Örneklem bilgisinin karar verme sürecine nasıl katılacağını görmüş bulunuyoruz. Bu tür bilginin kullanıma elverişli değeri kuşkusuz doğa durumlarının gerçekleşme şanslarını daha iyi anlamamıza yardımcı olmasındadır. Bu da bir kararın temeli için sağlam bir zemin oluşturur. Bu altbölümde *parasal* bir değerin örneklem bilgisine nasıl bağlanabileceğini göreceğiz. Bu nokta önemlidir çünkü

örneklem bilgisine ulaşmanın her zaman bir maliyeti olacak, karar verici de beklenen yararın bu maliyete değip değmeyeceğini bilmek isteyecektir.

Örnek 19.5'te örneklem bulgusu ne olursa olsun aynı eylemin en uygun olduğu bir durumu ele aldık. Böyle bir durumda örneklem bilgisinin hiçbir değerinin olmadığı açıktır, çünkü bu bilgi olmadan da aynı karar alınabilirdi. Bu genel bir kuraldır: Örneklem bilgisi eylem seçimini etkileyemiyorsa değeri 0'dır.

Buna göre, bu altbölümün geri kalanında yalnızca örneklem bulgusunun eylem seçimini etkilediği durumlarla ilgileneceğiz. Yeni bir ürünü pazara sürmeye hazırlanan şekerleme üreticisi örneğimiz böyle bir durumu yansıtır. Bu üretici üç üretim süreci arasından seçim yapmak zorunda olup bu ürüne olan üç farklı talep düzeyini yansıtan üç doğa durumuyla karşı karşıyadır. Altbölüm 19.3'te, örneklem bilgisi yokken ve yalnızca önsel olasılıkları kullanarak beklenen parasal değeri 147,000 $ olan A sürecini seçmiştik.

Uygulamada örneklem bilgisini alan karar verici hangi doğa durumunun gerçekleşeceğini bilemez, ama elinde bu durumların sağlam bir olasılık değerlemesi vardır. Ancak, örneklem bilgisini bu genel çerçeve içinde tartışmadan önce **tam bilgi**nin elde edilebilir olduğu uç bir konumu —yani karar vericinin hangi durumun gerçekleşeceğini **kesinlikle** söyleyebileceği bilgiyi elde edebileceği konumu— ele almak yararlı olabilir. Böyle tam bilgi edinebilmenin karar verici için değeri nedir?

Şekerleme üreticimiz bağlamında tam bilgi, olanaklı üç talep düzeyinden hangisinin gerçekleşeceğini bilmek demektir. Herhangi bir örneklem bilgisi yokken yalnızca önsel olasılıklara dayanılarak A süreci seçilmişti. Ama, Çizelge 19.6'ya bakılarak, düşük talep düzeyi gerçekleşirse en iyi seçimin C süreci olacağı görülür. C sürecinin ödülü A sürecininkinden 30,000 $ daha büyük olduğuna göre talebin düşük olacağını bilmenin değeri 30,000 $'dır. Benzer biçimde, talebin orta düzeyde olacağı bilinirse yine C süreci seçilir. Burada en iyi seçimin ödülü A sürecininkinden 5,000 $ fazladır, bu da talebin orta düzeyde olacağını bilmenin değeridir. Ama talebin yüksek gerçekleşeceği bilinirse A süreci seçilir. Öyleyse bu bilginin bir değeri yoktur, çünkü o olmadan da aynı karar verilebilir. Dolayısıyla, tam bilginin değeri bilgi içeriğine bağlıdır. Çeşitli doğa durumlarının önsel olasılıklarını kullanıp **tam bilginin beklenen değeri**ni bulabiliriz.

Şekerleme üreticisi için önsel olasılıklar düşük talepte 0.1, orta düzey talepte 0.5, yüksek talepte 0.4 idi. Demek ki tam bilginin bu üretici için beklenen değeri 0.1 olasılıkla 30,000 $, 0.5 olasılıkla 5,000 $, 0.4 olasılıkla da 0 $'dır. Demek ki tam bilginin beklenen değeri şudur:

$$(0.1)(30{,}000) + (0.5)(5{,}000) + (0.4)(0) = 5{,}500\ \$$$

Öyleyse bu dolar tutarı şekerleme üreticisi için talep düzeyini bilmenin beklenen değerini temsil eder.

Aşağıdaki çerçevede tam bilginin beklenen değerini hesaplamanın genel yolunu göstereceğiz.

Tam Bilginin Beklenen Değeri

Bir karar verici H tane doğa durumu $s_1, s_2, \ldots, s_H$ ile karşı karşıya olup K tane olanaklı eylem arasından seçim yapacaktır. **Tam bilgi** hangi doğa durumunun gerçekleşeceği bilgisini yansıtır. Tam bilginin beklenen değeri şöyle elde edilebilir:

(i) Yalnızca $P(s_1), P(s_2), \ldots, P(s_H)$ önsel olasılıklarını kullanarak hangi eylemin seçileceğini belirleyin.

(ii) Olanaklı her s_i doğa durumu için, o durum gerçekleşirse seçilecek en iyi eylemin ödülüyle yalnız önsel olasılıklar kullanılarak seçilen eylemin ödülü arasındaki W_i farkını bulun. Bu, s_i'nin gerçekleşeceği konusundaki tam bilginin değeridir.

(iii) Bu durumda tam bilginin beklenen değeri şudur:

$$P(s_1)W_1 + P(s_2)W_2 + \cdots + P(s_H)W_H$$

Şimdi, tam bilginin genellikle elde edilememesine karşın tam bilginin beklenen değerinin hesaplanması işe yarar. Kuşkusuz hiçbir örneklem bilgisi tam bilgiden daha iyi olamayacağına göre, bunun beklenen değeri de tam bilginin beklenen değerinden fazla olamaz. Demek ki tam bilginin beklenen değeri, herhangi bir örneklem bilgisinin beklenen değerine bir *üst sınır* oluşturur. Sözgelimi şekerleme üreticisine 6,000 $ karşılığı bilgi önerilirse, bu bilginin kalitesini araştırmaya gerek yoktur. Ne kadar güvenilir olursa olsun bu bilgi satın alınmamalıdır, çünkü beklenen parasal değer ölçütüne göre beklenen değeri 5,500 $'ı aşamaz.

Şimdi daha genel bir probleme, ille tam olması gerekmeyen örneklem bilgisinin değerini ölçme problemine geçelim. Yine, yeni bir şekerlemenin geleceğini ölçme konusunda bir pazar araştırması kurumunun görüşünü alan şekerleme üreticisinin karar problemini ele alalım. Bu gelecek ölçümü "kötü", "fena değil" ve "iyi" biçiminde olsun. Altbölüm 19.4'te bu üç sonuçtan son ikisinde A sürecinin seçildiğini gördük. Öyleyse "iyi" ya da "fena değil" nitelemesi elde edilirse başlangıçtaki eylem seçimi değişmeyecek, pazar araştırması şirketine danışmanın bir yararı olmayacaktır.

Ama pazarın geleceği "kötü" diye nitelenirse, en iyi seçimin C süreci olduğunu Çizelge 19.10'dan görebiliriz. En uygun seçim 124,600 $'lık bir beklenen parasal değer verirken, tersi durumda kullanılacak olan A sürecinin beklenen parasal değeri 120,800 $'dır. Bunların farkı olan 3,800 $, *eğer değerleme "kötü" çıkmışsa* örneklem bilgisinin getirdiği kazancı temsil eder.

Demek ki "iyi" ya da "fena değil" nitelemelerinin örneklem bilgisi değeri 0, "kötü" nitelemesininki 3,800 $'dır.

Bu kazançların gerçekleşme şanslarını bilmemiz gerekir. Örneğimizde "kötü" değerlemesinin olasılığını bulmalıyız. Genel olarak, A bir parça örneklem bilgisini ve $s_1, s_2, \ldots, s_H$ de H tane olanaklı doğa durumunu gösterse şu yazılabilir:

$$P(A) = P(A \mid s_1)P(s_1) + P(A \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A \mid s_H)P(s_H)$$

Şekerleme örneğinde, s_1, s_2, s_3 düşük, orta ve yüksek düzeyde talebi gösterirken,

$$P(s_1) = 0.1 \qquad P(s_2) = 0.5 \qquad P(s_3) = 0.4$$

ve

$$P(\text{Kötü} \mid s_1) = 0.6 \qquad P(\text{Kötü} \mid s_2) = 0.3 \qquad P(\text{Kötü} \mid s_3) = 0.1$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla "kötü" değerlemesinin olasılığı şudur:

$$P(\text{Kötü}) = P(\text{Kötü} \mid s_1)P(s_1) + P(\text{Kötü} \mid s_2)P(s_2) + P(\text{Kötü} \mid s_3)P(s_3)$$

$$= (0.6)(0.1) + (0.3)(0.5) + (0.1)(0.4) = 0.25$$

Aynı yolla, Çizelge 19.8'in koşullu olasılıklarını kullanarak öbür iki değerleme için aşağıdaki olasılıkları buluruz:

$$P(\text{Fena değil}) = 0.30 \qquad P(\text{İyi}) = 0.45$$

Öyleyse, örneklem bilgisinin değeri 0.25 olasılıkla 3,800 $, 0.30 olasılıkla 0 $ ve 0.45 olasılıkla 0 $'dır. Dolayısıyla **örneklem bilgisinin beklenen değeri** şöyledir:

$$(0.25)(3{,}800) + (0.30)(0) + (0.45)(0) = 950 \$$$

Bu dolar tutarı örneklem bilgisinin karar verici için beklenen değeridir. Beklenen parasal değer ölçütüne göre bu örneklem bilgisinin maliyeti beklenen değerinden küçükse alınmaya değerdir. **Örneklem bilgisinin beklenen net değeri**ni, beklenen değeri ile maliyeti arasındaki fark olarak tanımlayalım.

Pazar araştırması kuruluşu değerlemesi için 750 $ istiyor olsun. Bu değerlemenin şekerleme üreticisi için beklenen net değeri 950 – 750 = 200 $'dır. Demek ki şekerleme üreticisinin beklenen ödülü örneklem bilgisini alırsa, almama durumuna göre 200 $ daha yüksektir. Bu tutar o bilgiyi almanın maliyet düşüldükten sonraki beklenen değeridir. Bu durumda üretici için en uygun yol, pazar araştırması raporunu alıp, değerleme "iyi" ya da "fena değil" biçimindeyse A sürecini, "kötü" biçimindeyse C sürecini kullanmaktır. Bu tutumun beklenen parasal değeri 147,200 $'dır, yani örneklem bilgisi olmadan gelen 147,000 $'a ek olarak örneklem bilgisinin beklenen değeridir.

Örneklem bilgisinin değerini hesaplamanın genel çerçevesi aşağıda sergilenmiştir.

Örneklem Bilgisinin Beklenen Değeri

Bir karar verici, $s_1, s_2, \ldots, s_H$ gibi H tane doğa durumuyla karşı karşıyayken K tane eylem arasından seçim yapacaktır. Karar verici örneklem bilgisi alabilir. M tane olanaklı örneklem bulgusu $A_1, A_2, \ldots, A_M$ olsun.

Örneklem bilgisinin beklenen değeri şöyle elde edilir:

(i) Yalnızca önsel olasılıklar kullanılırsa hangi eylemin seçileceğini belirleyin.
(ii) Her bir örneklem bulgusunu elde etmenin olasılıklarını belirleyin:

$$P(A_i) = P(A_i \mid s_1)P(s_1) + P(A_i \mid s_2)P(s_2) + \cdots + P(A_i \mid s_H)P(s_H)$$

(iii) Her olanaklı örneklem bulgusu A_i için en uygun eylemin beklenen parasal değeri ile yalnızca önsel olasılıklar kullanılırsa seçilecek olan eylemin beklenen değeri arasındaki V_i farklarını bulun. Bu değer, A_i gözlenmişken örneklem bilgisinin değeridir.
(iv) Bu durumda örneklem bilgisinin beklenen değeri şudur:

$$P(A_1)V_1 + P(A_2)V_2 + \cdots + P(A_M)V_M$$

Örneklem bilgisinin beklenen net değeri, beklenen değeri ile maliyeti arasındaki farktır.

Beklenen parasal değer ölçütüne göre, karar verici örneklem bilgisini, beklenen net değer artıysa almalıdır. Tersi durumda örneklem bilgisi satın alınmamalıdır.

ÖRNEKLEM BİLGİSİNE KARAR AĞAÇLARI ARACILIĞIYLA BAKILMASI

Örneklem bilgisinin beklenen değeri başka (ama eşdeğer) bir yolla da hesaplanabilir. Bunun aritmetiği biraz daha karışıktır ama, problemi bir karar ağacı çizerek, bir dizi karar cinsinden ortaya sermesi bakımından kolaylık sağlar. Verilecek ilk karar örneklem bilgisinin satın alınıp alınmayacağıdır. Daha sonra hangi eylem seçeneğinin izleneceğine karar vermek gerekir.

Bunu açıklamak amacıyla yine şekerleme üreticisi problemini ele alalım. Çizim 19.4, olanaklı üç pazar araştırması değerlemesini izleyen karar ağaçlarını gösterir. Bu ağaçlar Çizim 19.1'dekilerle aynı genel yapıdadır. Aradadaki temel fark, üç doğa durumuna atanan olasılıkların, belli örneklem bilgisi verilmişken, uygun ardıl olasılıklar olmasıdır. Bu ardıl olasılıklar Altbölüm 19.4'te bulunmuştu. Ödüller artık bu ardıl olasılıklarla tartılandırılmış olup, her olanaklı örneklem bulgusu veriyken, her eylemin beklenen parasal değerini verir. Bunlar da Çizelge 19.10'da gösterilen beklenen parasal değerlerdir. Son olarak Çizim

19.4'ün her parçasının sol yanında, her bir örneklem sonucunun olanaklı en yüksek beklenen parasal değerini gösteriyoruz.

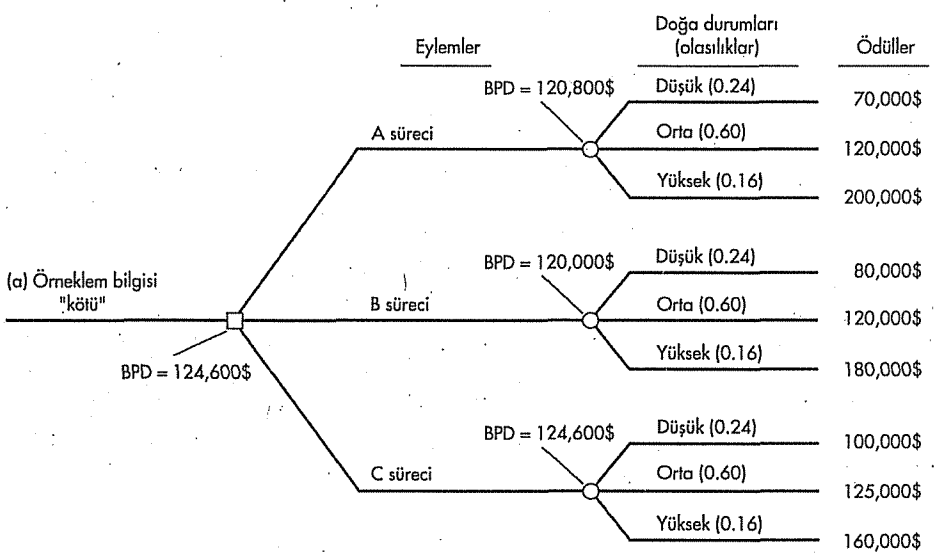
Bu bilgi Çizim 19.5'te, pazar araştırma çalışmasının satın alınıp alınmama kararının incelendiği sağ yana taşınmıştır. Eğer bu bilgi satın alınmazsa, çizimin alt bölümünde 147,000 $'lık bir beklenen parasal değer görürüz. Bu değer Çizim 19.1'den alınmış olup önsel olasılıklarla bulunmuştur.

Şimdi Çizim 19.5'in üst parçasına dönersek, elde edilen beklenen parasal değer örneklem sonucuna bağlıdır. Olasılıklar, daha önce de gördüğümüz gibi, "kötü" için 0.25, "fena değil" için 0.30 ve "iyi" için 0.45'tir. Öyleyse, 124,600 $ 0.25 olasılıkla, 138,000 $ 0.30 olasılıkla ve 167,556 $ 0.45 olasılıkla beklendiğine göre, örneklem bilgisi satın alınırsa, beklenen ödül aşağıdadır:

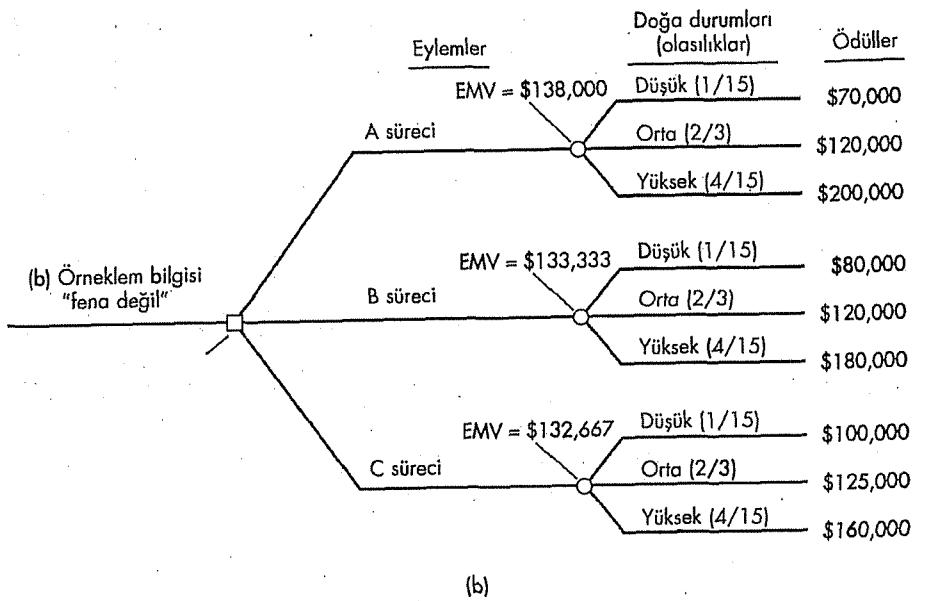
$$(0.25)(124,600) + (0.30)(138,000) + (0.45)(167,556) = 147,950\ \$$$

Ancak bu tutardan örneklem bilgisi maliyeti olan 750 $'ı çıkarmak gerekir, bu da bize 147,200 $'ı verir. Bu değer, hiç örneklem bilgisi alınmadığındaki beklenen ödülden fazla olduğundan, beklenen parasal değer ölçütüne göre, en iyi tutum pazar araştırması kurumunun hizmetini satın almaktır. Bu en uygun kararın beklenen parasal değeri, Çizim 19.5'in sol yanında görüldüğü gibi 147,200 $'dır.

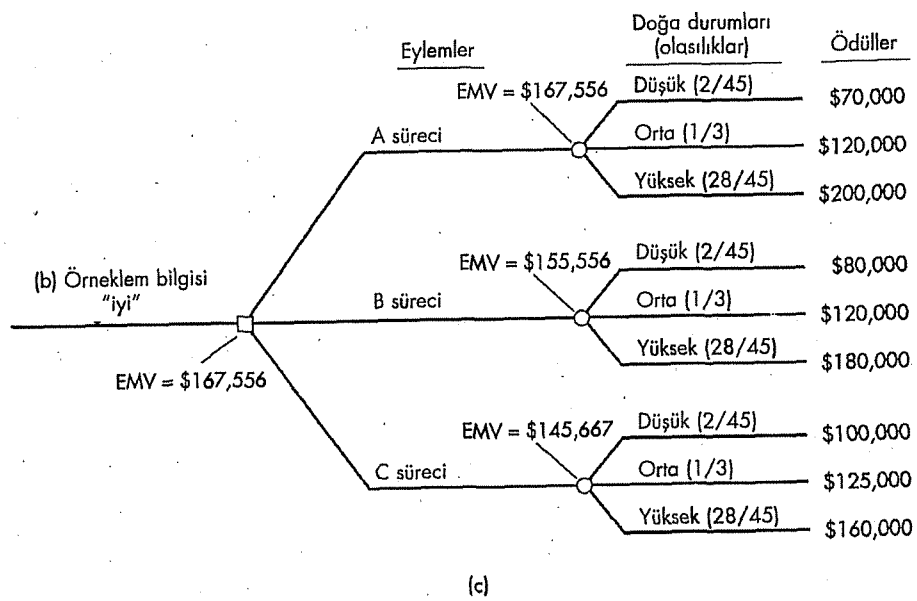
ÇİZİM 19.4 Pazar araştırması kurumunun (a) "kötü", (b) "fena değil", (c) "iyi" değerlendirmeleri veriyken şekerleme üreticisi için karar ağaçları



(a)

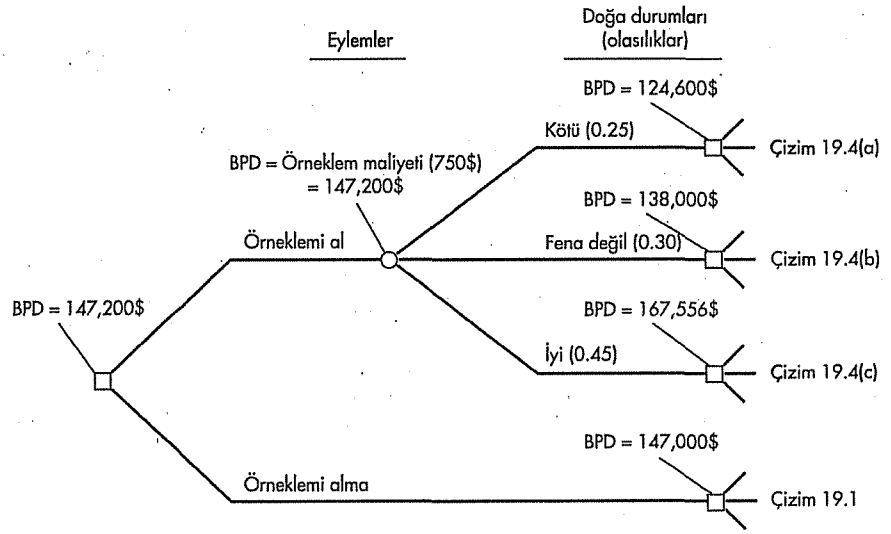


(b)



(c)

ÇİZİM 19.4 (devam)



ÇİZİM 19.5 Şekerleme üreticisinin pazar araştırma kuruluşunun hizmetini satın alıp almama kararı

ALIŞTIRMALAR

8. Bir öğrenci şimdiden iş önerisi almıştır. Şimdi işvereni olabilecek başka biriyle görüşmeye gidip gitmeme kararını vermesi gerekmektedir. Bunu yapma çabası ve zaman kaybının maliyetini 500 $ olarak görmektedir. Bu işverenin yanında işe girse de girmese de bu maliyete katlanacaktır. Yeni işveren ötekilerden üstün bir iş önerirse bunun kazancı 5,000 $ olarak görülmektedir (bundan 500 $'lık maliyet düşülmelidir). Tersi durumda, bütün çaba ve zaman boşa gitmiş olacaktır.

(a) Öğrencinin karar verme problemi için ödül çizelgesini düzenleyin.

(b) Öğrenci yeni işverenin ötekilerden daha üstün bir iş önerme olasılığını 0.05 olduğuna inanıyor diyelim. Beklenen parasal değer ölçütüne göre öğrenci yeni görüşmeye gitmeli mi?

9. Bir yönetici a_1 ve a_2 gibi iki eylemden birini seçecektir. Olanaklı iki doğa durumu, s_1 ve s_2 sözkonusudur. Ödüller aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Yönetici iki doğa durumunun gerçekleşme şansının aynı olduğuna inanıyorsa, beklenen parasal değer ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?

EYLEMLER	DOĞA DURUMLARI	
	s_1	s_2
a_1	72,000	51,000
a_2	78,000	47,000

10. Alıştırma 1'deki yatırımcı sağlam bir borsa olasılığını 0.2, orta derecede sağlam bir borsa olasılığını 0.5, zayıf bir borsa olasılığını da 0.3 olarak görmektedir.
   (a) Beklenen parasal değer ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?
   (b) Yatırımcının problemi için karar ağacını çizin.

11. Alıştırma 2'ye dönelim. Koku giderici üreticisi geçmişte bu tür yeni ürünlerden %30'unun yüksek, %40'ının orta, %30'unun da düşük talep düzeyleriyle karşılaştığını bilmektedir.
   (a) Beklenen parasal değer ölçütüne göre hangi üretim süreci kullanılmalıdır?
   (b) Bu üreticinin problemi için karar ağacını çizin.

12. Kabul edilebilir iki eylemi ve gerçekleşme şansları eşit iki doğa durumu olan bir karar problemi düşünelim.
   (a) Bu tür problemler için aşağıdaki söylemlerden her birinin doğru mu, yanlış mı olduğunu belirtin.
      (i) Beklenen parasal değer ölçütüyle seçilen eylem her zaman maksimin ölçütüyle seçilenin aynıdır.
      (ii) Beklenen parasal değer ölçütüyle seçilen eylem her zaman minimaks pişmanlık ölçütüyle seçilenin aynıdır.
      (iii) Beklenen parasal değer ölçütüyle seçilen eylem olanaklı ortalama ödülü yüksek olandır.
   (b) İki doğa durumunun gerçekleşme şansı eşit değilse yukarıda (a-iii)'e verdiğiniz yanıt aynı kalır mı?

13. Bir karar probleminde K olanaklı eylemle H doğa durumu vardır. Bu eylemlerden biri kabul edilemez ise, bu eylemin beklenen parasal değer yöntemiyle seçilemeyeceğini gösterin.

14. Alıştırma 7'deki ayakkabıcı, yeni alışveriş merkezinin çok başarılı olma olasılığının 0.4, orta derecede başarılı olma olasılığının 0.4, başarısız olma olasılığının 0.2 olduğuna inanmaktadır.
   (a) Beklenen parasal değer ölçütüne göre dükkân nerede açılmalıdır?
   (b) Karar ağacını çizin.

15. Alıştırma 1 ile 10'daki yatırımcının karar verme problemine dönelim. Bu yatırımcı sağlam borsa için yapılan 0.2 olasılık değerlemesini doğru bulmaktadır. Ama öbür iki doğa durumunun olasılık değerlendirmelerinden pek emin değildir. Zayıf bir borsa için hangi olasılık aralığında beklenen parasal değer ölçütü Alıştırma 10'dakiyle aynı eylemi seçer?

16. Alıştırma 2 ile 11'deki koku giderici üreticisinin problemine dönelim.
   (a) Bu üretici düşük talep olasılığının 0.3 olarak belirlenmesini doğru bulmaktadır, ama öbür iki talep düzeyi konusundaki olasılıklardan pek emin değildir. Orta düzeyde bir talep için hangi olasılık aralığında beklenen parasal değer ölçütü Alıştırma 11'dekiyle aynı eylemi seçer?
   (b) Alıştırma 2 ile 11'deki problemin öbür özelliklerini aynen alalım. A süreci kullanıldığında yüksek düzeyde bir talep için hangi kâr düzeyi aralığında beklenen parasal değer ölçütü Alıştırma 11'dekiyle aynı eylemi seçer?

17. Alıştırma 7 ve 14'teki ayakkabıcının problemine dönelim.
   (a) Bu ayakkabıcı yeni alışveriş merkezinin başarısız olma olasılığının 0.2 olarak belirlenmesini doğru bulmaktadır, ama öbür iki doğa durumunun olasılık değerlendirmelerinden pek emin değildir. Yeni alışveriş merkezinin çok başarılı

olacağına ilişkin hangi olasılık aralığında beklenen parasal değer ölçütü Alıştırma 14'dekiyle aynı eylemi seçer?

(b) Alıştırma 7 ile 14'deki problemin öbür özelliklerini aynı olduğunu varsayarak, yeni alışveriş merkezi çok başarılı olmuşsa, orada açılan dükkânın hangi kâr düzeyi aralığında beklenen parasal değer ölçütü Alıştırma 14'dekiyle aynı eylemi seçer?

18. Bir üretici araba sanayiinden düzenli olarak yedek parça siparişleri almaktadır. Bu üreticinin üretim süreci, düzgün işlediğinde ürettiği parçaların %10'u bu sanayiin aradığı özellikleri sağlamamaktadır. Ancak bu süreç belli bir tür arıza yapabilmekte, bu arızanın olup olmadığı bir üretim partisi başlamadan önce araştırılabilmektedir. Süreç arızalı olarak çalışırsa parçaların %30'u bu sanayiin aradığı özellikleri sağlamamaktadır. Üreticinin yaptığı anlaşmaya göre, alıcıya verdiği parçaların %10'u bozuksa elde edeceği kâr 20,000 $ olacak, %30'u bozuksa 12,000 $'da kalacaktır. Arızanın araştırılması 1,000 $'a çıkmakta, eğer bulunursa giderilmesi 2,000 $ daha gerektirmektedir. Gerektiğinde bu maliyetler kârdan düşülmelidir. Üretim sürecinin geçmişte %80 oranında arızasız çalıştığı saptanmıştır. Üretici yeni bir parti üretimine başlamadan arızanın varlığını araştırıp araştırmamaya karar verecektir.

(a) Beklenen parasal değer ölçütüne göre en uygun karar nedir?

(b) Karar ağacını çizin.

(c) Üretim sürecinin arızasız çalışma oranının bilinmediğini düşünelim. Beklenen parasal değer ölçütüne göre, bu oranın hangi değer aralığında (a)'da verilen karar en uygun olur?

19. Bir yüklenici bir yapı işi için önereceği fiyata karar verecektir. Öneriyi hazırlamak 16,000 $'a çıkmaktadır. Öneri ister kabul görsün ister reddedilsin bu maliyete katlanılacaktır. Yüklenici öneriyi 110,000 $ kâr bırakacak biçimde vermek istemektedir (öneri hazırlama giderleri bu kârdan düşülecektir). Yüklenici bu biçimde hazırlanmış önerilerin %80'inde başarılı olunduğunu bilmektedir.

(a) Ödül çizelgesini düzenleyin.

(b) Beklenen parasal değer ölçütüne göre, bir öneri hazırlanıp verilmeli midir?

(c) Beklenen parasal değer ölçütüne göre, bir öneri hazırlanıp verilmişse önerinin başarılı olma olasılığının aralığı nedir?

20. Bir araba kiralama şirketinin küçük bir şubesinin yöneticisi bir perşembe akşamı ertesi gün kiralayabileceği altı arabası olduğunu farketmiştir. Ama bölge merkezinden tanesi 20 $'a ek araba isteyebilecektir. Kiralanan her arabadan 40 $ kâr edileceği beklenmektedir. (Merkeze ödenecek para bu kârdan düşülmelidir.) Elde hiç araba yokken bir müşterinin araba kiralamak istemesinin şirkete kaybettirdiği itibar 10 $ olarak görülmektedir. Daha önceki Cuma günlerinin kayıtlarına bakan yönetici kiralanan araba sayısının altı ile on arasında değiştiğini görmüştür. Bunların oranları aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Yönetici bölge merkezinden araba isteyecekse kaç tane isteyeceği konusunda karar verecektir.

KİRALANAN ARABA SAYISI	6	7	8	9	10
YÜZDE	10	30	30	20	10

(a) Ödül çizelgesini düzenleyin.

(b) Beklenen parasal değer ölçütüne göre merkezden kaç araba istenmelidir?

21. Bir yüklenici bir fiyat eksiltmesine öneri verecektir. Öneriler 20,000 $'ın katları biçiminde olacaktır. Öneri 240,000 $ olursa işi kazanma olasılığının 0.2, 220,000 $ olursa 0.6, 200,000 $ olursa 0.8 olacağı tahmin edilmektedir. 200,000 $'ın altındaki bir öneriyle işin kazanılacağına, 240,000 $'ın üstünde ise kaçırılacağına kesin gözüyle bakılmaktadır. Yüklenici işi alırsa, bu aşamada iki olanaklı seçeneği olan bir tasarım sorununu çözmek zorundadır. 80,000 $'a şirket dışından, doyurucu bir çözümü kesin olarak üretecek danışman tutabilir. Almaşık olarak kendi kaynaklarından 30,000 $ yatırıp sorunu şirket içinden çözmeye çalışabilir; bu çaba sonuçsuz kalırsa danışmana başvurabilir. Sorunu şirket içinden çözme olasılığının 0.6 olduğu tahmin edilmektedir. Bu sorun çözüldükten sonra, sözleşmeyi yerine getirmenin ek maliyeti 140,000 $ olacaktır.

(a) Bu yüklenicinin iki karar vermesi gerekebilir. Bu kararlar nelerdir?

(b) Karar ağacını çizin.

(c) Beklenen parasal değer ölçütüne göre izlenecek en uygun yol nedir?

22. Bir yayımcı, adları Smith, Brown, Jones olan üç yazardan biriyle bir muhasebe ders kitabı sözleşmesi imzalamak niyetindedir. Eğer kitap çok başarılı olursa (herhangi bir olağandışı reklam gideri düşüldükten sonra) 250,000 $ kâr getirecek, orta derecede başarılı olursa bu kâr 80,000 $ olacaktır. Kitap başarısız olursa 80,000 $ zarar edilecektir. Aşağıdaki ilk çizelgede her bir doğa durumunun bu üç kitapla birleşimlerine karşılık gelen olasılıklar verilmiştir.

	ÇOK BAŞARILI	ORTA DERECEDE BAŞARILI	BAŞARISIZ
Smith	0.2	0.6	0.2
Brown	0.1	0.8	0.1
Jones	0.3	0.2	0.5

Yayımcının önünde, kitap bir kez yayımlandıktan sonra, 30,000 $'a mal olacak olağandışı bir reklam kampanyası başlatma seçeneği de vardır. Bu yapılırsa üç doğa durumunun olasılıklarının aşağıdaki çizelgedeki gibi olacağı tahmin edilmektedir.

	ÇOK BAŞARILI	ORTA DERECEDE BAŞARILI	BAŞARISIZ
Smith	0.4	0.4	0.2
Brown	0.3	0.6	0.1
Jones	0.5	0.2	0.3

(a) Yayımcının karar ağacını çizin.

(b) Beklenen parasal değer ölçütüne göre, hangi yazarla sözleşme imzalanmalıdır? Olağandışı reklam kampanyasına girişilmeli midir?

(c) (b)'deki hesaplamalardan sonra yayımcı seçilen yazarla sözleşme imzalamıştır. Bu noktada pazarlama bölümünde yapılan bir yanlışlık ortaya çıkmış, reklam maliyetinin aslında 40,000 $ olduğu anlaşılmıştır. BPD ölçütüne göre yayımcı yazara sözleşmeden cayması için bir para önermeli midir? Eğer önerecekse bu para en çok ne kadar olur?

23. a_1, a_2 gibi iki eylemi, s_1, s_2 iki de doğa durumu olan bir karar problemi düşünelim. M_{ij}, a_i eylemiyle s_j doğa durumunu yansıtan ödül olsun. s_1 doğa durumunun gerçekleşme olasılığının p olduğunu varsayalım, bu durumda s_2 durumunun olasılığı da $(1-p)$ olur.

(a) $$p(M_{11}-M_{21}) > (1-p)(M_{22}-M_{12})$$

ise, BPD ölçütüyle a_1 eyleminin seçileceğini gösterin.

(b) Öyleyse, a_1 kabul edilebilir bir eylemse seçilebileceği bir p olasılığı olduğunu gösterin, a_1 kabul edilebilir değilse p'nin değeri ne olursa olsun seçilemeyeceğini gösterin.

24. Bir danışman iki sözleşmeden biri için öneri hazırlamayı düşünmektedir. Sözleşmelerden hiçbiri için öneri hazırlamama seçeneği vardır, ama zaman darlığı iki öneriyi de hazırlamasını engellemektedir. Ön önerilerin hazırlanma maliyeti A sözleşmesi için 500 $, B sözleşmesi için ise 750 $'dır. Ön öneriler verildikten sonra müşteri olabileceklerin görüşleri alınmaktadır. Bu yanıtlar "olumlu", "belirsiz" ve "olumsuz" diye sınıflanabilir. İki sözleşmenin olasılıkları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Ön öneriye gelen yanıt olumsuzsa sözleşme imzalanmayacaktır. Yanıt olumsuz değilse danışman, A sözleşmesi için 1,000 $'a, B sözleşmesi için 1,500 $'a mal olacak daha ayrıntılı bir öneri hazırlayacaktır. A sözleşmesi için bu son önerinin kabul edilme olasılığı ilk yanıt olumluysa 0.9, belirsizse 0.4'tür. B önerisi için aynı olasılıklar sırasıyla 0.8 ile 0.2'dir. Eğer A sözleşmesi imzalanırsa danışmanın (öneri hazırlama giderleri düşüldükten sonra) kazancı 5,000 $ olacaktır. Aynı rakam B sözleşmesinde 6,000 $'dır. Danışman BPD ölçütünün gösterdiği yolu izlemeye niyetlidir.

	OLUMLU	BELİRSİZ	OLUMSUZ
A sözleşmesi	0.6	0.2	0.2
B sözleşmesi	0.8	0.1	0.1

(a) Bu danışman için karar ağacını çizin.

(b) Danışman bir ön öneri vermeli midir? Verecekse hangi sözleşme için vermelidir?

(c) (b)'ye verdiğiniz yanıt "evet" ise, müşteri olabileceklerden ön öneriye gelen yanıt "belirsiz"ken danışman nasıl bir yol izlemelidir?

(d) Kısa süre önce bu danışmanın yanında işe giren bir istatistikçi, ön öneri hazırlama sürecini atlayıp doğrudan son önerilerin verilmesinden yanadır. Bu durumda öneri hazırlama gideri A sözleşmesi için 1,250 $, B sözleşmesi için 1,875 $ olacaktır. Son kabul olasılıklarının değişmediği varsayımıyla istatistikçi haklı mıdır?

25. Bir üretici, satışları çok düşük giden bir mal için 100,000 $ harcayarak bir reklam kampanyası başlatıp başlatmamaya karar verecektir. Bu kampanya çok başarılı olursa (kampanya giderleri henüz düşülmeden) kazançlara 400,000 $, orta derecede başarılı olursa 100,000 $ katacak, başarılı olamazsa hiçbir şey katmayacaktır. Geçmişte benzer kampanyaların %40'ı çok başarılı, %30'u orta derecede başarılı, kalanı ise başarısız olmuştur. Bu üretici, kampanyanın olabilecek etkinliği konu-

sunda basın-yayın danışmanından görüş istemiştir. Bu danışmanın geçmişte olumlu söz ettiği kampanyaların %80'i bir hayli başarılı, %40'ı orta derecede başarılı, %10'u ise başarısız çıkmıştır.

(a) Üç doğa durumunun önsel olasılıklarını bulun.

(b) Basın-yayın danışmanının görüşü olmadan, BPD ölçütüne göre bu reklam kampanyası başlatılmalı mıdır?

(c) Basın-yayın danışmanının görüşü olumluyken üç doğa durumunun ardıl olasılıklarını bulun.

(d) Basın-yayın danışmanının görüşü olumluyken, BPD ölçütüne göre bu reklam kampanyası başlatılmalı mıdır?

(e) Basın-yayın danışmanının görüşü olumlu değilken üç doğa durumunun ardıl olasılıklarını bulun.

(f) Basın-yayın danışmanının görüşü olumlu değilken, BPD ölçütüne göre bu reklam kampanyası başlatılmalı mıdır?

26. Alıştırma 2'ye dönelim. Koku giderici üreticisinin önünde, gelecekteki talep düzeyi konusundaki görüşlere bağlı dört olanaklı üretim süreci bulunmaktadır. Geçmiş deneyimlere göre önsel olasılıklar yüksek talep için 0.3, orta derecede talep düzeyi için 0.4, düşük talep için 0.3'tür. Aşağıdaki çizelge, bir pazar araştırma kuruluşunun bu talep düzeylerini yakalayan benzer ürünler için yaptığı gelecek değerlemelerindeki "iyi", "orta", "kötü" oranlarını yansıtmaktadır.

DEĞERLEME	TALEP DÜZEYLERİ		
	DÜŞÜK	ORTA	YÜKSEK
Kötü	0.5	0.3	0.1
Orta	0.3	0.4	0.2
İyi	0.2	0.3	0.7

(a) Pazar araştırma kuruluşuna danışılmasa, BPD ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?

(b) Değerleme "kötü" çıkmışken, üç talep düzeyinin ardıl olasılıklarını bulun.

(c) Değerleme "kötü" çıkmışken, BPD ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?

(d) Değerleme "orta" çıkmışken, üç talep düzeyinin ardıl olasılıklarını bulun.

(e) Değerleme "orta" çıkmışken, BPD ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?

(f) Değerleme "iyi" çıkmışken, üç talep düzeyinin ardıl olasılıklarını bulun.

(g) Değerleme "iyi" çıkmışken, BPD ölçütüne göre hangi eylem seçilmelidir?

27. Alıştırma 7'deki ayakkabıcının önünde iki eylem seçeneği vardır. Vereceği karar, yeni alışveriş merkezinin sağlayabileceği başarı düzeyi konusundaki görüşüne bağlıdır. Geçmişte bu tür yeni merkezlerin %40'ı çok başarılı, %40'ı orta derecede başarılı olurken %20'si başarısız kalmıştır. Bir danışma kuruluşu bu tür alışveriş merkezlerinin gelecek değerlendirmelerini yapmaktadır. Verilen çizelge, belli bir sonuç gerçekten elde edilmişken daha önce yapılan "iyi", "orta", "kötü" değerlemelerinin oranlarını göstermektedir.

DEĞERLEME	BAŞARI DÜZEYİ		
	ÇOK BAŞARILI	ORTA DERECEDE BAŞARILI	BAŞARISIZ
İyi	0.6	0.3	0.2
Orta	0.3	0.4	0.3
Kötü	0.1	0.3	0.5

(a) Üç doğa durumunun önsel olasılıkları kaçtır?
(b) Ayakkabıcı danışma kuruluşundan görüş istemese, BPD ölçütüne göre hangi eylemi seçmelidir?
(c) Değerleme "iyi" çıkmışsa üç doğa durumunun ardıl olasılıkları kaçtır?
(d) Değerleme "iyi" çıkmışsa ayakkabıcı, BPD ölçütüne göre hangi eylemi seçmelidir?
(e) Değerleme "orta" çıkmışsa üç doğa durumunun ardıl olasılıkları kaçtır?
(f) Değerleme "orta" çıkmışsa BPD ölçütü izlenerek hangi eylem seçilmelidir?
(g) Değerleme "kötü" çıkmışsa üç doğa durumunun ardıl olasılıkları kaçtır?
(h) Değerleme "kötü" çıkmışsa BPD ölçütü izlenerek hangi eylem seçilmelidir?

28. Örnek 19.5'te, elindeki bir ağrı kesici formülünün patentini, ilacı yoğun denemelere sokmadan satıp satmamaya karar verecek olan ilaç üreticisini ele alalım. Bu örnekte, belli bir ön deneme sonucunda ilacın etkinliği nasıl çıkarsa çıksın patenti satmamanın en uygun karar olduğunu görmüştük. Bu üretici sonradan, yine pek az bir giderle yapılabilecek daha üstün bir sınama geliştirmiştir. Daha sonra etkin olduğu kanıtlanan ilaçların %80'inde bu sınama ile olumlu sonuç alınırken, sonradan etkin olmadığı anlaşılan ilaçların yalnızca %10'unda olumlu sonuç alınmıştır.
(a) Bu yeni ön sınamada olumlu sonuç alınmışken iki doğa durumunun ardıl olasılıklarını bulun.
(b) Yeni sınama sonucu olumluyken, BPD ölçütüne göre patent satılmalı mıdır?
(c) Yeni sınama sonucu olumsuzken, iki doğa durumunun ardıl olasılıklarını bulun.
(d) Yeni sınama sonucu olumsuzken, BPD ölçütüne göre patent satılmalı mıdır?
(e) En uygun eylemin seçimi, yeni ön sınama sonucundan etkilenir mi?
(f) Sonucun en uygun eylem seçimini etkileyip etkilememesini ön sınamanın hangi özelliği belirler?

29. Alıştırma 18'de bir araba yedek parçası üreticisi, yeni bir parti üretime geçmeden önce üretim sürecinde belli bir arıza bakımından araştırıp araştırmamaya karar verecektir. İki doğa durumu şunlardır:

s_1: Onarım gereksizdir (bütün parçaların %10'u istenen özelliklere uymaz)
s_2: Onarım gereklidir (bütün parçaların %30'u istenen özelliklere uymaz)

Bu üretim sürecinin geçmiş kayıtlarına göre önsel olasılıklar aşağıdaki gibidir:

$$P(s_1) = 0.8 \qquad P(s_2) = 0.2$$

Üretici tam üretime geçmeden tek bir parça üreterek özelliklere uyup uymadığını incelemekte, bu örneklem bilgisine dayanarak sözkonusu arızayı araştırıp araştırmamaya karar vermektedir.

(a) İncelenen tek parça özelliklere uygunsa doğa durumlarının ardıl olasılıkları kaçtır?
(b) İncelenen tek parça özelliklere uygunsa BPD ölçütüne göre arıza araştırılmalı mıdır?
(c) İncelenen tek parça özelliklere uygun değilse doğa durumlarının ardıl olasılıkları kaçtır?
(d) İncelenen tek parça özelliklere uygun değilse BPD ölçütüne göre arıza araştırılmalı mıdır?

30. Alıştırma 29'u sürdürerek, arızanın araştırılıp araştırılmama kararını vermeden önce *iki* parçanın üretilip incelendiğini düşünelim.
(a) Aslında onarım gerekmezken, her iki parçanın, yalnız bir parçanın bozuk çıkma ve hiçbir parçanın bozuk çıkmama olasılıklarını bulun.
(b) (a)'daki olasılıkları bir kez de aslında onarım gerekliyken bulun.
(c) Aşağıdaki durumlardan her biri verilmişken doğa durumlarının ardıl olasılıklarını bulup beklenen parasal değer ölçütüyle en uygun eylemi belirleyin.
(i) Her iki parça da özelliklere uymuyor.
(ii) Yalnız bir parça özelliklere uymuyor.
(iii) Her iki parça da özelliklere uyuyor.

31. Watts Yeni Ampul Şirketi dev sanayi kuruluşlarına büyük partiler halinde ampul satmaktadır. Üretim süreci düzgün işlerken (bu da %90 oranında olmaktadır) üretilen bütün ampullerin %10'u bozuk çıkmaktadır. Ancak zaman zaman bu üretim sürecinde bozuk ampul oranını %20'ye yükselten bir arıza olmaktadır. Watts Yeni Ampul Şirketi, bozuk oranı yüksek bir parti göndermenin sanayici katındaki itibarını düşürme maliyetini 5,000 $ kabul etmektedir. İçinde böyle yüksek oranda bozuk ampul olduğundan kuşkulanılan bir parti, indirimli satış yapan bir dükkânlar zincirine de satılabilir ama bu durumda partideki bozuk ampul oranı yüksek olsa da olmasa da kâr 600 $ azalır. Bu şirkette kararlar BPD ölçütüne göre alınmaktadır.
(a) Bir parti mal üretilmiştir. Başka herhangi bir bilgi yokken, bu mal bir sanayi kuruluşuna mı yoksa indirimli satış zincirine mi yollanmalıdır?
(b) Bu partiden tek bir ampul alınıp incelenmiş olsun. Aşağıdaki durumların her birinde partinin nereye yollanması gerektiğini belirleyin.
(i) Bu ampul bozuktur.
(ii) Bu ampul sağlamdır.
(c) Bu partiden iki ampulün alınıp incelendiğini düşünelim. Aşağıdaki durumların her birinde partinin nereye yollanması gerektiğini belirleyin.
(i) Her iki ampul de bozuktur.
(ii) Yalnız bir ampul bozuktur.
(iii) Her iki ampul de sağlamdır.
(d) Partiyi göndermeden önce 100 ampul çekilip incelenirse, bu karar problemine nasıl yaklaşılabileceğini hiçbir hesaplama yapmadan belirtin.

32. Alıştırma 1'deki yatırımcının problemine dönelim.
(a) "Tam bilgi" ile ne denmek istendiğini bu yatırımcının sorunu bağlamında açıklayın.
(b) Önsel olasılıklar sağlam borsa için 0.2, orta derecede sağlam borsa için 0.5, zayıf borsa için ise 0.3'tür. Bu yatırımcı için tam bilginin beklenen değerini bulun.

33. Alıştırma 2'deki koku giderici üreticisine göre önsel olasılıklar yüksek talep için 0.3, orta düzeyde talep için 0.4, düşük talep için ise 0.3'tür. Bu üretici için tam bilginin beklenen değerini bulun.
34. Alıştırma 7'deki ayakkabıcıya göre önsel olasılıklar yeni alışveriş merkezinin çok başarılı olması için 0.4, orta düzeyde başarılı olması için 0.4, başarısız olması için ise 0.2'dir. Bu ayakkabıcı için tam bilginin beklenen değerini bulun.
35. Alıştırma 18'deki araba yedek parçası üreticisi, bir üretim partisinden önce üretim sürecini inceleyip incelememe kararını verecektir. Üretim sürecinin %80 oranında düzgün çalıştığı veriyken, bu üretici için tam bilginin beklenen değerini bulun.
36. Altbölüm 19.5'te örneklem bilgisinin beklenen değerinin nasıl bulunacağını göstermeden önce tam bilginin beklenen değerinin belirlenmesini ayrı olarak ele almıştık. Aslında bu zorunlu değildi, çünkü tam bilgi, örneklem bilgisinin özel bir türünden başka bir şey değildir. Örneklem bilgisinin beklenen değerini bulmanın genel süreci veriyken, bunun nasıl tam bilgiye özgü biçime sokulabileceğini gösterin.
37. Alıştırma 25'e dönelim. Üretici bir reklam kampanyası düşünmekte olup önce bir basın-yayın danışmanından görüş istemiştir.
    (a) Bu danışmanın görüşünün üretici için beklenen değeri nedir?
    (b) Basın-yayın danışmanı 5,000 $ ücret alacaktır. Bu danışmanın görüşünün beklenen değeri nedir?
    (c) Bu üretici iki aşamalı bir karar problemiyle karşı karşıyadır. Birincisi, basın-yayın danışmanının görüşünü isteyip istememeye karar verecektir. İkincisi, reklam kampanyasını başlatıp başlatmama kararını vermek zorundadır. Bütün karar ağacını çizip üreticinin ne yapması gerektiğini belirtin.
38. Alıştırma 26'ya dönelim. Beklenen parasal değer ölçütüne göre, koku giderici üreticisinin pazar araştırması kurumuna en çok ne kadar para ödemesi gerektiğini bulun.
39. Alıştırma 27'ye dönelim. Beklenen parasal değer ölçütüne göre, alışveriş merkezinin gelecek değerlemesinin ayakkabıcı için beklenen değerini bulun.
40. Alıştırma 28'e dönelim. İlaç üreticisi, yeni bir ağrı kesici formülünün patentini satıp satmamaya karar vermeden önce yeni ön sınamayı yapmıştır. Bu sınama sonucunun ilaç üreticisi için beklenen değerini bulun.
41. Alıştırma 29'a dönelim. Araba yedek parçası üreticisi, üretim sürecini araştırmaya girişmeden önce tek bir parçayı üretip inceleyebilir. Bu örneklem bilgisinin beklenen değeri nedir?
42. Alıştırma 31'deki Watts Yeni Ampul Şirketi'ni ele alalım. Şirket, bir parti malı bir sanayi kuruluşuna mı yoksa bir indirimli satış zincirine mi göndereceğine karar vermeden önce bir ya da daha çok ampulü inceleyebilir.
    (a) Tek bir ampülü incelemenin şirket için beklenen değeri nedir?
    (b) İki ampülü incelemenin şirket için beklenen değeri nedir?
    (c) Bir ya da iki ampul incelemenin beklenen değerlerinin farkı nedir?
    (d) İncelenen ilk ampul bozuk çıkarsa ikinciyi incelemenin beklenen değeri nedir?
    (e) İncelenen ilk ampul sağlam çıkarsa ikinciyi incelemenin beklenen değeri nedir?
    (f) (c)'ye verdiğiniz yanıtla (d) ve (e)'ye verdiğiniz yanıtları uzlaştırın.

19.6 RİSKİN HESABA KATILMASI: FAYDA ÇÖZÜMLEMESİ

Beklenen parasal değer ölçütü yaygın bir uygulama alanı olan bir karar verme çerçevesi oluşturur. Yani pek çok durumda bir kimse ya da bir şirket en yüksek parasal değeri veren eylemin üstün tutulan seçenek olduğuna inanır. Ama bu, aşağıdaki örneklerin de gösterdiği gibi, değişmez bir kural değildir.

1. Pek çok kimse süreli yaşam sigortası yaptırmakta, böylece küçük bir para ödeyerek, sigorta dönemi içinde ölürlerse mirasçılarına cömertçe para ödenmesini sağlamaktadır. Şimdi sigorta şirketleri, belli bir yaştaki bir kimsenin belli bir sürede ölme olasılığını hesaplayabilmektedir. Primlerini buna göre öyle bir ayarlayabilirler ki, bir sigorta poliçesinin bedeli, ödenmesi beklenen tazminat bedelinden yüksek olur. Bu fazlalık sigorta şirketinin giderlerini ödemenin yanısıra şirkete ortalama olarak bir kâr marjı da bırakır. Bundan çıkan sonuca göre, sigortalanan kimse için bu yaşam sigortası poliçesinin beklenen ödülü maliyetinin altındadır. Dolayısıyla, eğer herkes kararlarını beklenen parasal değer ölçütüne göre alıyorsa süreli yaşam sigortası yaptırılmamalıdır. Ama yine de pek çok insan bu tür sigorta yaptırmakta, böylece ölürlerse mirasçılarının mali bir destek görmeleri güvencesi karşılığında beklenen getirilerinin birazından vazgeçmeye istekli görünmektedir.

2. Bir yatırımcı geleceğini parlak gördüğü bir şirketler grubunun bir ya da daha çok üyesinin pay senetlerinden almayı düşünüyor olsun. İlke olarak, bu şirketlerin her birine yapılacak yatırımın getirisini etkileyecek çeşitli doğa durumları öngörülebilir. Bu yolla, her bir şirkete yatırılacak sabit bir tutarın beklenen parasal değeri belirlenebilir. Beklenen parasal değer ölçütüne göre, bu yatırımcı elindeki bütün sermayesini beklenen parasal değeri en yüksek olana yatırmalıdır. Aslında borsada oynayan pek çok yatırımcı böyle bir tutum izlemez. Tersine, parasını bir pay senetleri portföyüne dağıtır. Daha yüksek bir beklenen değer göstermesine karşın "bütün yumurtaların tek bir sepete konma" seçeneğinin terkedilmesi, bu en yüksek beklenen değerli pay senedinin başarısız olması durumunda büyük miktarda para kaybetmeye karşı bir engel oluşturur. Yatırımcı seçimini bir pay senetleri portföyünden yana yapmakla, küçük bir olasılıkla da olsa büyük bir mali kayıptan kaçınmak için beklenen parasal değerin birazından vazgeçmeye istekli olduğunu göstermektedir.

Bu örneklerin her birinde, karar verici beklenen parasal değerden başka bir seçim ölçütü yeğlemekte, her defasında da bu tercih son derece akla uygun görünmektedir. İki örnek de, beklenen değere ek olarak, bir ortak öğe içermektedir. Her iki durumda da karar verici **riski** hesaba katmak istemektedir. Süreli yaşam sigortası olan kimse, ölürse ödenecek büyük bir artı getiri şansına kavuşmanın bedeli olarak eksi bir beklenen değeri kabul etmeye razı olmaktadır. Bunu yaparken *riski seven* bir tutum sergilemektedir.[3] Buna karşılık, yatırımını bir pay senetleri portföyüne dağıtan yatırımcı ise, büyük bir zararın şansını

[3] Kendisinin ölümü durumunda kuşkusuz ailesini, mali güçlüğe düşme riskine *karşı* korumaktadır.

azaltmak için daha düşük bir beklenen değere razı olmakla *riskten kaçındığını* dile getirmektedir.

FAYDA KAVRAMI

Örnek 19.3'te sabit faizi kesin bir yatırımla bir pay senetleri portföyü arasında karar verme durumundaki bir yatırımcıyı ele almıştık. Bunlardan ilkinin ödülü 1,200 $ iken ikincisi, borsa yükseliyor ya da değişmiyorsa 2,500 ve 500 $ kazanç getirecek, ama borsa düşüyorsa 1,000 $ zarar ettirecektir. Yatırımcı bu üç doğa durumunun olasılıklarının sırasıyla 0.6, 0.2 ve 0.2 olduğuna inanmaktadır. Bu olayda pay senedi portföyünü seçmenin beklenen parasal değerinin 1,400 $ olduğunu, bunun da sabit faizli yatırımınınkini 200 $ geçtiğini görmüştük. Bu karar noktasında, daha yüksek olan beklenen değerin, borsa düşerse 1,000 $ zarar riske girmeye değip değmeyeceğini incelemek gerekir. Böyle bir zararı kolayca göğüsleyebilecek çok zengin bir yatırımcı neredeyse kesinlikle bu riski göze alır. Ama 1,000 $'lık bir kayıp kendisi için yıkım olabilecek daha yoksul bir yatırımcının durumu çok farklı olabilir. Böyle bir yatırımcı için ödüller, yıkım niteliğindeki 1,000 $'lık kaybı daha yeterli bir biçimde yansıtabilecek başka tutarlarla değiştirilmelidir. Bu tutarlar, 1,000 $'lık bir kaybın, sözgelimi 500 $ ya da 2,500 $ gibi kazançlarla karşılaştırıldığında yatırımcı için değerini ya da **fayda**sını ölçmelidir.

Mikroiktisatta önemli bir işlev gören fayda kavramı, riski sevme ya da riskten kaçınma durumlarında karar verme problemlerinin çözümüne bir temel oluşturur. Bu kavramı kullanabilmek için yalnızca çok ılımlı ve genellikle akla hayli uygun varsayımlar gerekir. Bir kimsenin, parasal ya da değil, olanaklı birkaç ödülle karşı karşıya olduğunu düşünelim. Bu kimsenin her bir ödülden duyacağı doyumu ya da elde edeceği faydayı (bazen birden çoğunu aynı hizaya koyarak) sıralayabildiği varsayılır. Bu durumda A ödülü B'den, B de C'den üstün tutuluyorsa A da C'den üstün olmalıdır.

Ayrıca, A ödülü B'den, B de C'den üstün tutuluyorsa, A'yı p olasılığıyla, C'yi de $(1-p)$ olasılığıyla sunan bir bahsin varolduğu ve karar vericinin bu bahse girmekle B'yi kesin olarak almak arasında kayıtsız kalacağı varsayımını da yapmak zorundayız. Bunlar ve ayrıntılarının bizi yolumuzdan alakoyamayacağı, genellikle de zararsız kimi başka varsayımlar veriyken, akla uygun davranan karar alıcının beklenen faydası en yüksek eylemi seçeceği gösterilebilir. Bu nedenle karar problemini tıpkı Altbölüm 19.3-19.5'teki gibi, ama *ödüllerin yerine faydaları koyarak* çözümleyebiliriz. Yani ödül çizelgesi yerine bir fayda çizelgesi düzenleyip beklenen faydaları karşılaştırmak için doğa durumu olasılıklarından yararlanırız.

Şimdi çeşitli ödüllere karşılık gelen faydaların nasıl belirlendiğini ele alalım. Yatırımcımız için olanaklı ödüller –1,000 $, 500 $, 1,200 $ ve 2,500 $'dır. İlgili faydaları bulma aşamaları aşağıdaki çerçeve içinde belirtilmiştir.

Bir Fayda Fonksiyonunun Elde Edilmesi

Bir karar vericinin çeşitli ödül seçenekleri olsun. Ödüllerden faydalara geçiş aşağıdaki gibi olur:

(i) Faydanın ölçü birimi isteğe bağlıdır. Dolayısıyla istediğimiz gibi bir ölçek saptayabiliriz. Ödüllerin en düşüğü L, en yükseği de H olsun. L ödülüne 0, H ödülüne de 100 birim fayda verelim.

(ii) I, L ile H arasında herhangi bir ödül olsun. Karar vericiyi aşağıdaki seçenekler arasında kayıtsız bırakacak p olasılığını belirlememiz gerekmektedir:

(a) I ödülünü kesinlikle almak

(b) H ödülünü p olasılığıyla, L ödülünü de $(1-p)$ olasılığıyla almak.

(iii) Bu durumda I ödülünün karar vericiye faydası $100p$'dir. Faydayı ödülle ilişkilendiren eğriye **fayda fonksiyonu** denir.

İlk adım sırf kolaylık olsun diye konmuştur. Faydayı ölçmede bize uygun bir ölçü verir. En düşük ve en yüksek ödüllerin faydalarım yansıtmak üzere 0 ve 100 sayılarının seçimi de isteğe bağlıdır. En yüksek ödülün faydası en küçüğünkinden büyük olmak koşuluyla başka herhangi iki değer de aşağıdaki çözümlemeyi etkilemeden aynı işi görür.

Uygulama sırasında ikinci adım en zorudur. Bunun bir nedeni karar vericinin olasılıkları tutarlı bir biçimde kullanabileceğinin öngörülmüş olmasıdır. Uygulamada p olasılığı, aşağıdaki gibi sorular sorularak, deneme-yanılma yoluyla belierlenmelidir:

S. Kesinlikle alabileceğin I'yı mı yoksa 0.9 olasılıkla H'yi, 0.1 olasılıkla L'yi kazanabileceğin bir bahsi mi yeğlersin?
S. Kesinlikle alabileceğin I'yı mı yoksa 0.8 olasılıkla H'yi, 0.2 olasılıkla L'yi kazanabileceğin bir bahsi mi yeğlersin?

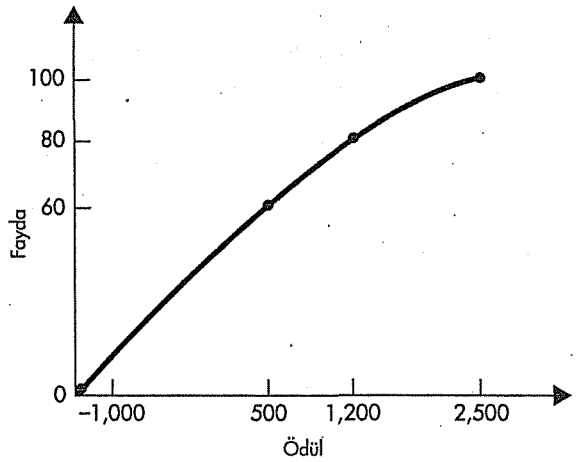
Bu süreç, kayıtsızlık noktasına ulaşılıncaya kadar sürer.

Son adımdaki akıl yürütme kolaydır. H'nin faydası 100, L'nin faydası 0 olduğuna göre, p olasılıkla H'yi, $(1-p)$ olasılıkla L'yi elde etmenin beklenen faydası şudur:

$$100p + 0(1-p) = 100p$$

Karar alıcı bu bahis ile I'yı kesinlikle elde etme arasında kayıtsız kaldığına göre $100p$'lik fayda I'nın ödülüyle eşleştirilir.

Şimdi de yatırımcımıza dönelim. İlk adımda 0 faydayı en düşük ödül –1,000 $ ile, 100 birim faydayı da en yüksek ödül 2,500 $ ile eşleştirelim.



ÇİZİM 19.6 Bir yatırımcının fayda fonksiyonu

Geriye 500 $ ve 1,200 $'lık ara ödüllerin faydalarını belirlemek kalır. Bu da karar vericiye aşağıdaki türden bir dizi soru yöneltilerek gerçekleştirilir:

> **S.** Kesinlikle alabileceğin 500 $'ı mı, yoksa p olasılıkla 2,500 $'ı, $(1-p)$ olasılıkla −1,000 $'ı kazanabileceğin bir bahsi mi yeğlersin?

Karar alıcının iki seçenek arasında kayıtsız kalacağı değere ulaşıncaya kadar, p olasılığına çeşitli değerler verilerek denemeler yapılır. Bu süreç 1,200 $'lık ödül için de yinelenir.

Bu yatırımcı 500 $'lık ödül ile $p = 0.6$ olasılıklı bu bahis arasında ve 1,000 $'lık ödül ile $p = 0.8$ olasılıklı bu bahis arasında kayıtsız kalmış olsun. Bu durumda ara ödüllerin faydaları şöyle olur:

$$500\ \$ \text{ ödül} \qquad \text{Fayda} = (100)(0.6) = 60$$

$$1{,}200\ \$ \text{ ödül} \qquad \text{Fayda} = (100)(0.8) = 80$$

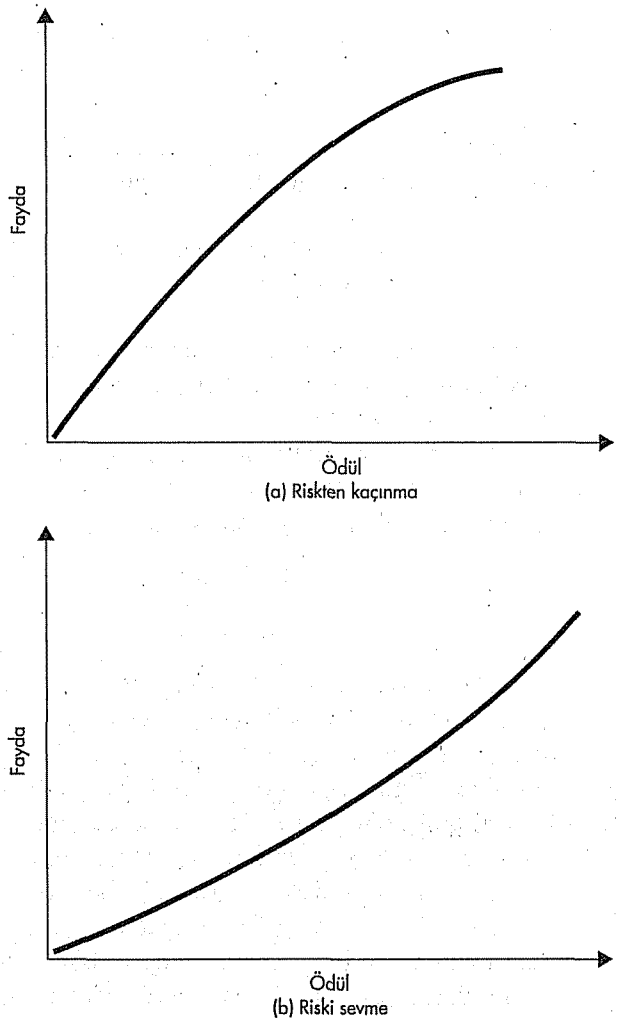
Bu yatırımcının dört fayda ölçüsü, bunlara karşılık gelen ödüllerle birlikte Çizim 19.6'da birer noktaylà gösterilmiştir. Bu yatırımcının fayda fonksiyonunun genel kalıbını belirtmek için bu noktalar bir eğriyle birleştirilmiştir. Bu eğrinin biçimi ilginçtir, çünkü yatırımcının riske karşı olan tutumunu yansıtır. Beklendiği gibi ödül yükseldikçe fayda da artar. Ancak, dikkat ederseniz faydanın *artış hızı*, en düşük ödüllerde en yüksek olup ödül büyüdükçe yavaşlamaktadır. Bu da en düşük ödüllerin, parasal tutarlarıyla orantılı olarak değil, daha fazla istenmediği anlamına gelir ve riskten *kaçınan* bir tutumu gösterir. Bu kaçınma, yatırımcının önerilen bahisler karşısındaki davranış biçiminden görülebilir. Sözgelimi yatırımcı, 500 $'lık kesin bir ödülle 0.6 olasılıkla 2,500 $ kazanabileceği

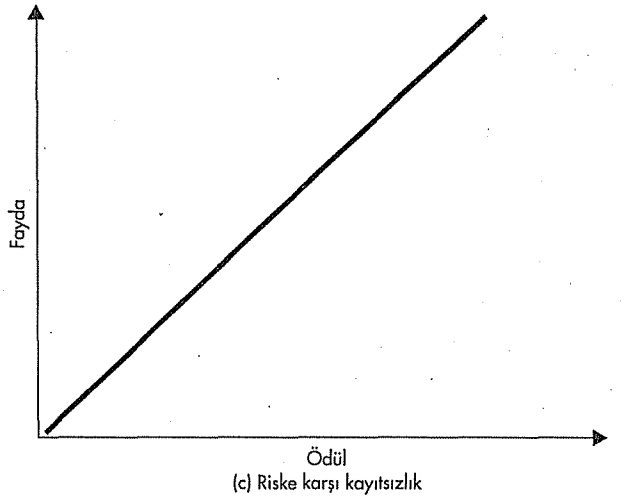
ve 0.4 olasılıkla 1,000 $ kaybedebileceği bir bahis arasında kayıtsızdır. Bu bahsin beklenen parasal değeri şudur:

$$(0.6)(2{,}500) + (0.4)(-1{,}000) = 1{,}100\ \$$$

Bu da eşit derecede beğenilen 500 $'lık kesin ödülden bir hayli yüksektir. Bu farkın tutarı riskten kaçınmanın bir ölçüsünü verir.

ÇİZİM 19.7 Fayda fonksiyonları

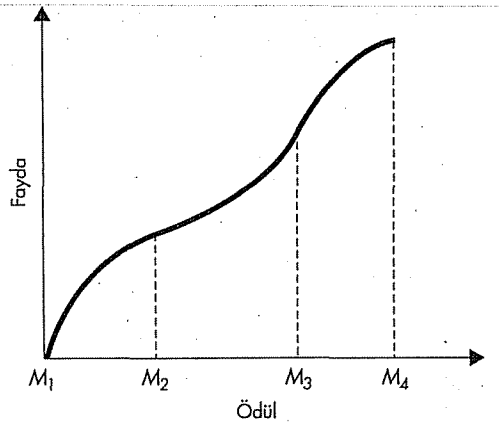




ÇİZİM 19.7 (devam)

Çizim 19.6'daki eğim, riskten kaçınmanın sık rastlanan bir örneğidir. Çizim 19.7'de üç tür fayda fonksiyonu gösteriyoruz. Çizimin (a) bölümündeki, ödül büyüdükçe faydanın *azalan* bir hızla yükseldiği fonksiyon, Çizim 19.6'dakiyle aynı biçimdedir, bu da riskten *kaçınma*yı yansıtır. Çizimin (b) bölümünde, ödül büyüdükçe fayda *artan* bir hızla yükselir. Bu da en büyük ödüllerin, parasal tutarlarıyla orantılı olarak değil, daha fazla istendiği anlamına gelir ve *riski sevme* tutumunu gösterir. Son olarak Çizim 19.7'nin (c) bölümü, bütün ödüller için faydanın *sabit* bir hızla arttığı ara durumu sergiler. Bu durumda ödüllerin parasal değerleri, riske karşı *kayıtsız* bir tutum gösteren karar verici için faydanın doğru bir ölçüsüdür.

Çizim 19.7'deki üç eğri riskten kaçınma, riski sevme ve riske karşı kayıtsızlığı sergilemektedir. Ancak bir karar vericinin bütün olanaklı ödüller aralığı boyunca bu davranışlardan yalnızca birini göstermesi gerekmez. Çizim 19.8 daha karmaşık bir konumu yansıtır. Burada M_1 ve M_2 arasındaki ödüllerde fayda fonksiyonu Çizim 19.7(a)'daki gibi olup bu aralıkta riskten kaçınmayı gösterir. Ama parasal tutarı M_2 ile M_3 arasındaki ödüller için bu fayda fonksiyonunun biçimi Çizim 19.7(b)'deki gibidir. Dolayısıyla, bu ödül aralığında karar vericinin risk sever olduğu anlamını taşır. Son olarak M_3 ile M_4 arasındaki en büyük ödüller aralığında durum yine tersine döner, karar verici bu bölgede riskten kaçınır. Böyle bir fayda fonksiyonu uygulamadaki problemlerde ortaya çıkabilir. Sözgelimi bir yatırımcı önemli bir kayba uğramaktan kaçınabilirken, orta derecede değil ama epeyi yüksek bir artı getiri elde etmek uğruna biraz riski göze alabilir. Ancak, biraz riskle yeterince yüksek bir getiri elde edilebilecek bir yatırımcı, daha yüksek bir getiri için daha çok riske girmeye isteksiz olabilir.



ÇİZİM 19.8 M_1 ile M_2 ve M_3 ile M_4 ödülleri arasında riskten kaçınan, M_2 ile M_3 ödülleri arasında ise riski seven yatırım fonksiyonu

KARAR VERMEDE BEKLENEN FAYDA ÖLÇÜTÜ

Uygun faydaların belirlenmesinden sonra karar verme problemini çözmek için geriye beklenen en yüksek fayda ölçütüyle seçilecek eylemi bulmak kalır. Bu beklenen faydalar, aşağıdaki çerçevede açıklandığı gibi, doğa durumlarının olasılıkları kullanılarak bildik biçimde elde edilir.

Beklenen Fayda Ölçütü

Bir karar vericinin önünde $a_1, a_2, \ldots, a_K$ gibi K tane olanaklı eylem ile H tane doğa durumu olsun. U_{ij}, i'inci eylemle j'inci durumun faydasını; p_j de j'inci doğa durumunun gerçekleşme olasılığını göstersin. Bu durumda a_i eyleminin beklenen faudası $BF(a_i)$ şöyledir:

$$BF(a_i) = p_1U_{i1} + p_2U_{i2} + \cdots + p_HU_{iH} = \sum_{j=1}^{H} p_jU_{ij}$$

Eylem seçenekleri arasında seçim yapılacaksa, **beklenen fayda ölçütü**, beklenen faydası en yüksek olan eylemin seçilmesini öngörür. Genel kabul gören varsayımlarla, akla uygun davranan bir karar vericinin bu ölçütü kullanması gerektiği gösterilebilir.

Karar verici riske karşı kayıtsızsa beklenen fayda ölçütüyle beklenen parasal değer ölçütü eşdeğerdir.

ÇİZELGE 19.11 Bir yatırımcı için faydalar ve doğa durumu olasılıkları

YATIRIM	BORSANIN DURUMU		
	YÜKSELEN ($p = 0.6$)	DEĞİŞMEYEN ($p = 0.2$)	DÜŞEN ($p = 0.2$)
Sabit faiz	80	80	80
Pay senedi portföyü	100	60	0

Çizelge 19.11, yatırımcımızın faydalarıyla doğa durumu olasılıklarını gösterir. Sabit faizli yatırım seçilirse, hangi doğa durumu gerçekleşirse gerçekleşsin, 80 birimlik fayda kesindir. Pay senedi portföyünün beklenen faydası şudur:

$$(0.6)(100) + (0.2)(60) + (0.2)(0) = 72$$

Bu 80'den küçük olduğundan, yatırımcı, beklenen fayda ölçütüne göre, sabit faizli yatırımı seçmelidir.

Örnek 19.3'te, beklenen parasal değer ölçütüne göre pay senedi portföyünün seçildiğini görmüştük. Ama çözümlemeye başka bir etmenin —yatırımcının riskten kaçınma derecesinin— eklenmesi, sabit faizli seçeneğin daha iyi bir seçim olması sonucunu doğurmuştur. Bu örnek bazen, riskin önemli bir etmen olduğu durumda, beklenen parasal değer ölçütünün karar vericinin probleminin çözmekte yetersiz kaldığını gösterir.

Beklenen fayda ölçütü karar verme problemlerine yaklaşma amacıyla ele aldığımız ölçütler içinde en genel uygulanabileni, akla dayanarak en iyi savunulabilenidir. Temel aksaklığı, elde edilmesi kesin belli ödüllerle aynı çekicilikte sayılan bahislere ilişkin bilgi edinme güçlüğünden kaynaklanır. Daha önce gördüğümüz gibi, bu tür bilgi faydaların belirlenmesinin temelidir. Riske karşı kayıtsızlığın akla uygun bir varsayım olabileceği geniş bir problem yelpazesinde beklenen parasal değer ölçütü hâlâ uygulanabilir. Sözgelimi, yerleşik bir şirkette karar verilirken elde edilecek ödüller şirketin toplam cirosu içinde küçük bir pay oluşturuyorsa bu duruma sıkça rastlanır. Ancak (sözgelimi yeni bir ticari havayolu şirketinin geliştirilmesinde olduğu gibi) olabilecek kayıplar şirketi iflasa sürükleyebilecek boyuttaysa faydalar da riskten kaçınmayı uygun biçimde yansıtmalıdır. Bir şirket aynı işkolundaki başka şirketlerle ya da müşterisi olabilecek kuruluşlarla ortak olarak riski dağıtmaya çalışabilir. Ayrıca devlet de riski paylaşmaya ya da büyük bölümünü üstlenmeye çağrılabilir.

ALIŞTIRMALAR

43. Alıştırma 1'deki yatırımcı için (dolar cinsinden) şu altı ödül olanaklıdır:

−1,500 −600 800 1,200 4,300 6,600

–1,500 $'lık ödüle 0; 6,600 $'lık ödüle 100 birim fayda atayalım. Öbür dört ödülden her biri için yatırımcıya şu soru yöneltilmiştir:
S: I ödülünü kesinlikle almayı mı istersiniz, yoksa p olasılıkla 6,600 $ kazanabileceğiniz, $(1-p)$ olasılıkla 1,500 $ kaybedebileceğiniz bir bahse mi girmek istersiniz? Yatırımcının bu seçenekler arasında kayıtsız kaldığı p olasılığı saptanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir:

ÖDÜL	–600	800	1,200	4,300
p	0.20	0.30	0.40	0.80

(a) Bu dört ara ödülün faydalarını bulun.
(b) Üç doğa durumunun olasılıklarının şöyle olduğunu varsayalım:

$$P(s_1) = 0.2 \qquad P(s_2) = 0.5 \qquad P(s_3) = 0.3$$

Beklenen faydayı en yükseğe çıkarmak için hangi yatırım seçilmelidir?

44. Bir karar verici olanakları ödülleri (dolar cinsinden)

1,000 3,000 6,000 9,000 10,000 12,000

olan bir problemle karşı karşıyadır. 1,000 $'lık ödüle 0, 12,000 $'lık ödüle 100 birim fayda atanmıştır. Bu karar verici bu aralıktaki ödüller için riske karşı kayıtsızdır.
(a) Dört ara ödülün faydalarını bulun.
(b) Her I ara ödülü için, karar vericinin I'yı kesin almakla, p olasılıkla 12,000 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 1,000 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığını bulun.

45. Alıştırma 7'deki ayakkabıcının önünde (dolar cinsinden) şu altı ödül bulunmaktadır:

–10,000 30,000 60,000 70,000 90,000 130,000

10,000 $ kayba 0, 130,000 $ kâra 100 birim fayda atayalım. Her I ara ödülü için, ayakkabıcının I'yı kesin almakla, p olasılıkla 130,000 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 10,000 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

ÖDÜL	30,000	60,000	70,000	90,000
p	0.35	0.60	0.70	0.85

(a) Ara ödüllerin faydaları kaç birimdir?
(b) Yeni alışveriş merkezinin çok başarılı, orta derecede başarılı ya da başarısız olma olasılıklarının sırasıyla 0.4, 0.4, 0.2 olduğunu düşünelim. Beklenen fayda en yükseğe çıkarılacaksa hangi eylem seçilmelidir?

46. Alıştırma 45'teki ayakkabıcı 30,000 $'ı kesin almakla, p olasılıkla 130,000 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 10,000 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığının kaç olması gerektiği konusunda emin değildir. Problemin öbür özelliklerinin Alıştırma 45'teki gibi olduğu varsayımıyla, bu olasılık değerinin hangi aralığında beklenen fayda ölçütü aynı eylemi seçer?

47. Alıştırma 19'daki yükleniciyi alalım. Aslında bu yüklenici bir öneri vermekle vermemek arasında kayıtsızdır. Bu, yüklenicinin fayda fonksiyonunun biçimi bakımından ne anlama gelir?

48. Alıştırma 22'deki yayımcı iki aşamalı bir karar problemiyle karşı karşıya olup en sondaki ödülleri (dolar cinsinden) şöyledir:

$$-110{,}000 \quad -80{,}000 \quad 50{,}000 \quad 80{,}000 \quad 220{,}000 \quad 250{,}000$$

110,000 $ kayba 0, 250,000 $ kâra 100 birim fayda atayalım. Her I ara ödülü için yayımcının I'yı kesin almakla, p olasılıkla 250,000 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 110,000 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bu yayımcı beklenen faydasını en yükseğe çıkarmak isterse nasıl bir yol izlemelidir?

ÖDÜL	–80,000	50,000	80,000	220,000
p	0.20	0.45	0.55	0.95

49. Alıştırma 24'teki danışmanın problemine dönüp (d) bölümündeki seçeneği gözardı edelim. Olanaklı ödüller (dolar cinsinden) şöyledir:

$$-2{,}250 \quad -1{,}500 \quad -750 \quad -500 \quad 3{,}500 \quad 3{,}750$$

Her I ara ödülü için danışmanın I'yı kesin almakla, p olasılıkla 3,750 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 2,250 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bu danışman beklenen faydasını en yükseğe çıkarmak isterse nasıl bir yol izlemelidir?

ÖDÜL	–1,500	–750	–500	3,500
p	0.15	0.20	0.25	0.98

BÖLÜM SONU ALIŞTIRMALARI

50. Aşağıdaki dört karar verme ölçütünü inceledik:

- **(i)** Maksimin ölçütü
- **(ii)** Minimaks pişmanlık ölçütü
- **(iii)** Beklenen parasal değer ölçütü
- **(iv)** Beklenen fayda ölçütü

Bu ölçütlerin gerisindeki felsefeyi kısaca açıklayıp her birinin üstünlükleriyle aksaklıklarını tartışın.

51. Örneklem bilgisinin, işletmecilikteki karar verme bağlamı içinde ne gibi bir değeri olabilir? Örneklem bilgisinin yararlı olabileceği karar verme problemlerine örnekler verin.

52. Riski sevme, riskten kaçınma ve riske karşı kayıtsızlık arasındaki ayırımı belirtin. Bu kavramların işletmecilikteki karar verme çözümlemesiyle ne ilgisi vardır?

53. Bir danışman, imzalanabilecek iki sözleşme için ayrıntılı öneriler sunmayı düşünmektedir. İlk sözleşme önerisini hazırlamanın maliyeti 100 $ iken ikincininki 150 $'dır. İlk sözleşmenin önerisi kabul edilir de iş tamamlanırsa 800 $ kazanç sağlanacaktır. İkinci sözleşme önerisi kabul edilir de iş tamamlanırsa 1,200 $ kazanç sağlanacaktır. Bu kazançlardan öneri hazırlama giderleri düşülmelidir. Danışman isterse iki sözleşme için de öneri verebilir. Ancak her iki öneriyi aynı zamanda hazırlayacak kaynaklardan yoksundur. Sunduğu bir öneri kabul edilir de kendisi gereğini yerine getiremezse itibar kaybı maliyetini 200 $ olarak düşünmektedir. Karar verme süreçinde dört doğa durumu vardır:

s_1: Her iki öneri de reddedilir
s_2: İlk sözleşme önerisi kabul, ikincisi reddedilir
s_3: İkinci sözleşme önerisi kabul, ilki reddedilir
s_4: Her iki öneri de kabul edilir.

(a) Danışmanın önünde dört tane olanaklı eylem seçeneği vardır. Bunlar nelerdir?
(b) Bu danışmanın karar verme problemi için ödül çizelgesini düzenleyin.
(c) Maksimin ölçütüyle hangi eylem seçilir?
(d) Minimaks pişmanlık ölçütüyle hangi eylem seçilir?

54. Alıştırma 53'e dönelim. Danışman ilk sözleşme önerisinin kabul olasılığının 0.7, ikincininkinin 0.4 olduğuna inanmaktadır. Ayrıca önerilerden birinin kabulünün ötekininkinden bağımsız olduğu kanısındadır.
(a) Dört doğa durumunun olasılıkları kaçtır?
(b) Beklenen parasal değer ölçütüne göre danışman hangi eylemi seçmelidir? Bu eylemin beklenen parasal değeri kaçtır?
(c) Danışmanın problemi için karar ağacını çizin.
(d) Bu danışman için tam bilginin beklenen değeri nedir?
(e) Danışmana ilk sözleşme önerisinin geleceği konusunda "içeriden bilgi" sunulması önerilmiştir. Bu bilgi, önerisinin kabul edilip edilmeyeceğini kesinlikle bileceği anlamında, tümüyle güvenilirdir. Ama ikinci sözleşme önerisinin ne olacağı konusunda hiçbir bilgi yoktur. Bu "içeriden bilgi"nin beklenen değeri kadardır?

55. Alıştırma 53 ile 54'e bakalım. Danışmanın önünde (dolar cinsinden) olanaklı şu dokuz ödül bulunmaktadır:

−250 −150 −100 0 550 700 750 950 1,050

250 $ kayba 0, 1,050 $ ödüle 100 birim fayda atayalım. Her I ara ödülü için danışmanın I'yı kesin almakla, p olasılıkla 1,050 $ kazanabileceği ya da $(1-p)$ olasılıkla 250 $ kaybedebileceği bir bahse girmek arasında kayıtsız kaldığı p olasılığı aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Bu danışman beklenen faydasını en yükseğe çıkarmak isterse hangi eylemi seçmelidir? Bu eylemin beklenen faydası ne kadardır?

ÖDÜL	−150	−100	0	550	700	750	950
p	0.05	0.10	0.20	0.65	0.70	0.75	0.85

EK ÇİZELGE 1 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu

Bu çizelge, her birinin başarı olasılığı p olan n tane bağımsız denemeden x tanesinin başarılı olmasının olasılığını gösterir. Sözgelimi her birinin başarı olasılığı 0.35 olan sekiz denemeden dördünün başarılı olma olasılığı 0.1875'tir.

n	x	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4850	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094

EK ÇİZELGE 1 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu (Devam)

n	x	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2789	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2958	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2579	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0226	.0439
	9	.0000	.000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0442	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0685	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161

EK ÇİZELGE 1 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu (Devam)

n	x	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0454	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1549	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0816	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0348	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085

EK ÇİZELGE 1 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu (Devam)

n	x	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2552	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1669	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.1811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	2835	2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1649
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0044	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000

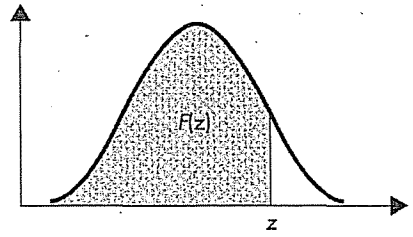
EK ÇİZELGE 1 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu (Devam)

n	x	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.1138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1419	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.0602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

Reproduced with permission from National Bureau of Standards, *Tables of the Binomial Probability Distribution*, United States Department of Commerce (1950).

EK ÇİZELGE 2 $e^{-\lambda}$ değerleri

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0.00	1.000000	2.60	.074274	5.10	.006097	7.60	.000501
0.10	.904837	2.70	.067206	5.20	.005517	7.70	.000453
0.20	.818731	2.80	.060810	5.30	.004992	7.80	.000410
0.30	.740818	2.90	.055023	5.40	.004517	7.90	.000371
0.40	.670320	3.00	.049787	5.50	.004087	8.00	.000336
0.50	.606531	3.10	.045049	5.60	.003698	8.10	.000304
0.60	.548812	3.20	.040762	5.70	.003346	8.20	.000275
0.70	.496585	3.30	.036883	5.80	.003028	8.30	.000249
0.80	.449329	3.40	.033373	5.90	.002739	8.40	.000225
0.90	.406570	3.50	.030197	6.00	.002479	8.50	.000204
1.00	.367879	3.60	.027324	6.10	.002243	8.60	.000184
1.10	.332871	3.70	.024724	6.20	.002029	8.70	.000167
1.20	.301194	3.80	.022371	6.30	.001836	8.80	.000151
1.30	.272532	3.90	.020242	6.40	.001661	8.90	.000136
1.40	.246597	4.00	.018316	6.50	.001503	9.00	.000123
1.50	.223130	4.10	.016573	6.60	.001360	9.10	.000112
1.60	.201897	4.20	.014996	6.70	.001231	9.20	.000101
1.70	.182684	4.30	.013569	6.80	.001114	9.30	.000091
1.80	.165299	4.40	.012277	6.90	.001008	9.40	.000083
1.90	.149569	4.50	.011109	7.00	.000912	9.50	.000075
2.00	.135335	4.60	.010052	7.10	.000825	9.60	.000068
2.10	.122456	4.70	.009095	7.20	.000747	9.70	.000061
2.20	.110803	4.80	.008230	7.30	.000676	9.80	.000056
2.30	.100259	4.90	.007447	7.40	.000611	9.90	.000050
2.40	.090718	5.00	.006738	7.50	.000553	10.00	.000045
2.50	.082085						



Bu çizelge, standart normal rassal değişkenin z sayısından küçük olma olasılığı $F(z)$'yi gösterir. Sözgelimi standart normal rassal değişkenin 1.96'dan küçük olma olasılığı 0.975'tir.

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
.00	.5000										
.01	.5040	.31	.6217	.61	.7291	.91	.8186	1.21	.8869	1.51	.9345
.02	.5040	.32	.6255	.62	.7324	.92	.8212	1.22	.8888	1.52	.9357
.03	.5120	.33	.6293	.63	.7357	.93	.8238	1.23	.8907	1.53	.9370
.04	.5160	.34	.6331	.64	.7389	.94	.8264	1.24	.8925	1.54	.9382
.05	.5199	.35	.6368	.65	.7422	.95	.8289	1.25	.8944	1.55	.9394
.06	.5239	.36	.6406	.66	.7454	.96	.8315	1.26	.8962	1.56	.9406
.07	.5279	.37	.6443	.67	.7486	.97	.8340	1.27	.8980	1.57	.9418
.08	.5319	.38	.6480	.68	.7517	.98	.8365	1.28	.8997	1.58	.9429
.09	.5359	.39	.6517	.69	.7549	.99	.8389	1.29	.9015	1.59	.9441
.10	.5398	.40	.6554	.70	.7580	1.00	.8413	1.30	.9032	1.60	.9452
.11	.5438	.41	.6591	.71	.7611	1.01	.8438	1.31	.9049	1.61	.9463
.12	.5478	.42	.6628	.72	.7642	1.02	.8461	1.32	.9066	1.62	.9474
.13	.5517	.43	.6664	.73	.7673	1.03	.8485	1.33	.9082	1.63	.9484
.14	.5557	.44	.6700	.74	.7704	1.04	.8508	1.34	.9099	1.64	.9495
.15	.5596	.45	.6736	.75	.7734	1.05	.8531	1.35	.9115	1.65	.9505
.16	.5636	.46	.6772	.76	.7764	1.06	.8554	1.36	.9131	1.66	.9515
.17	.5675	.47	.6803	.77	.7794	1.07	.8577	1.37	.9147	1.67	.9525
.18	.5714	.48	.6844	.78	.7823	1.08	.8599	1.38	.9162	1.68	.9535
.19	.5753	.49	.6879	.79	.7852	1.09	.8621	1.39	.9177	1.69	.9545
.20	.5793	.50	.6915	.80	.7881	1.10	.8643	1.40	.9192	1.70	.9554
.21	.5832	.51	.6950	.81	.7910	1.11	.8665	1.41	.9207	1.71	.9564
.22	.5871	.52	.6985	.82	.7939	1.12	.8686	1.42	.9222	1.72	.9573
.23	.5910	.53	.7019	.83	.7967	1.13	.8708	1.43	.9236	1.73	.9582
.24	.5948	.54	.7054	.84	.7995	1.14	.8729	1.44	.9251	1.74	.9591
.25	.5987	.55	.7088	.85	.8023	1.15	.8749	1.45	.9265	1.75	.9599
.26	.6026	.56	.7123	.86	.8051	1.16	.8770	1.46	.9279	1.76	.9608
.27	.6064	.57	.7157	.87	.8078	1.17	.8790	1.47	.9292	1.77	.9616
.28	.6103	.58	.7190	.88	.8106	1.18	.8810	1.48	.9306	1.78	.9625
.29	.6141	.59	.7224	.89	.8113	1.19	.8830	1.49	.9319	1.79	.9633
.30	.6179	.60	.7257	.90	.8159	1.20	.8849	1.50	.9332	1.80	.9641

EK ÇİZELGE 3 Standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu (Devam)

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
1.81	.9649	2.21	.9864	2.61	.9955	3.01	.9987	3.41	.9997	3.81	.9999
1.82	.9656	2.22	.9868	2.62	.9956	3.02	.9987	3.42	.9997	3.82	.9999
1.83	.9664	2.23	.9871	2.63	.9957	3.03	.9988	3.43	.9997	3.83	.9999
1.84	.9671	2.24	.9875	2.64	.9959	3.04	.9988	3.44	.9997	3.84	.9999
1.85	.9678	2.25	.9878	2.65	.9960	3.05	.9989	3.45	.9997	3.85	.9999
1.86	.9686	2.26	.9881	2.66	.9961	3.06	.9989	3.46	.9997	3.86	.9999
1.87	.9693	2.27	.9884	2.67	.9962	3.07	.9989	3.47	.9997	3.87	.9999
1.88	.9699	2.28	.9887	2.68	.9963	3.08	.9990	3.48	.9997	3.88	.9999
1.89	.9706	2.29	.9890	2.69	.9964	3.09	.9990	3.49	.9998	3.89	1.0000
1.90	.9713	2.30	.9893	2.70	.9965	3.10	.9990	3.50	.9998	3.90	1.0000
1.91	.9719	2.31	.9896	2.71	.9966	3.11	.9991	3.51	.9998	3.91	1.0000
1.92	.9726	2.32	.9898	2.72	.9967	3.12	.9991	3.52	.9998	3.92	1.0000
1.93	.9732	2.33	.9901	2.73	.9968	3.13	.9991	3.53	.9998	3.93	1.0000
1.94	.9738	2.34	.9904	2.74	.9969	3.14	.9992	3.54	.9998	3.94	1.0000
1.95	.9744	2.35	.9906	2.75	.9970	3.15	.9992	3.55	.9998	3.95	1.0000
1.96	.9750	2.36	.9909	2.76	.9971	3.16	.9992	3.56	.9998	3.96	1.0000
1.97	.9756	2.37	.9911	2.77	.9972	3.17	.9992	3.57	.9998	3.97	1.0000
1.98	.9761	2.38	.9913	2.78	.9973	3.18	.9993	3.58	.9998	3.98	1.0000
1.99	.9767	2.39	.9916	2.79	.9974	3.19	.9993	3.59	.9998	3.98	1.0000
2.00	.9772	2.40	.9918	2.80	.9974	3.20	.9993	3.60	.9998		
2.01	.9778	2.41	.9920	2.81	.9975	3.21	.9993	3.61	.9998		
2.02	.9783	2.42	.9922	2.82	.9976	3.22	.9994	3.62	.9999		
2.03	.9788	2.43	.9925	2.83	.9977	3.23	.9994	3.63	.9999		
2.04	.9793	2.44	.9927	2.84	.9977	3.24	.9994	3.64	.9999		
2.05	.9798	2.45	.9929	2.85	.9978	3.25	.9994	3.65	.9999		
2.06	.9803	2.46	.9931	2.86	.9979	3.26	.9994	3.66	.9999		
2.07	.9808	2.47	.9932	2.87	.9979	3.27	.9995	3.67	.9999		
2.08	.9812	2.48	.9934	2.88	.9980	3.28	.9995	3.68	.9999		
2.09	.9817	2.49	.9936	2.89	.9981	3.29	.9995	3.69	.9999		
2.10	.9821	2.50	.9938	2.90	.9981	3.30	.9995	3.70	.9999		
2.11	.9826	2.51	.9940	2.91	.9982	3.31	.9995	3.71	.9999		
2.12	.9830	2.52	.9941	2.92	.9982	3.32	.9996	3.72	.9999		
2.13	.9834	2.53	.9943	2.93	.9983	3.33	.9996	3.73	.9999		
2.14	.9838	2.54	.9945	2.94	.9984	3.34	.9996	3.74	.9999		
2.15	.9842	2.55	.9946	2.95	.9984	3.35	.9996	3.75	.9999		
2.16	.9846	2.56	.9948	2.96	.9985	3.36	.9996	3.76	.9999		
2.17	.9850	2.57	.9949	2.97	.9985	3.37	.9996	3.77	.9999		
2.18	.9854	2.58	.9951	2.98	.9986	3.38	.9996	3.78	.9999		
2.19	.9857	2.59	.9952	2.99	.9986	3.39	.9997	3.79	.9999		
2.20	.9861	2.60	.9953	3.00	.9986	3.40	.9997	3.80	.9999		

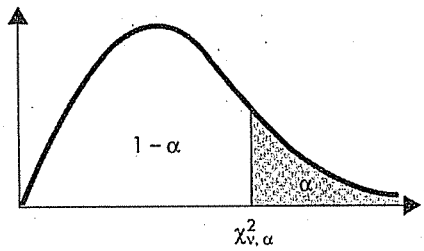
Reproduced, with permission of the trustees of Biometrica, from Biometrica Tables for Statiscians, vol. 1 (1966).

EK ÇİZELGE 4 Türdeş dağılmış kimi rassal sayılar

85387	51571	57714	00512	61319	69143	08881	01400	55061	82977
84176	03311	16955	59504	54499	302096	79485	98031	99485	16788
27258	51746	67223	98182	43166	54297	26830	29842	78016	73127
99398	46950	19399	65167	35082	30482	86323	41061	21717	48126
72752	89364	02150	85418	05420	84341	02395	27655	59457	55438
69090	93551	11649	54688	57061	77711	24201	16895	64936	62347
39620	54988	67846	71845	54000	26134	84526	16619	82573	01737
81725	49831	35595	29891	46812	57770	03326	31316	75412	80732
87968	85157	84752	93777	62772	78961	30750	76089	23340	64637
07730	01861	40610	73445	70321	26467	53533	20787	46971	29134
32825	82100	67406	44156	21531	67186	39945	04189	79798	41087
34453	05330	40224	04116	24597	93823	28171	47701	76201	68257
00830	34235	40671	66042	06341	54437	81649	70494	01883	18350
24580	05258	37329	59173	62660	72513	82232	49794	36913	05877
59578	08535	77107	19838	40651	01749	58893	99115	05212	92309
75387	24990	12748	71766	17471	15794	68622	59161	14476	75074
02465	34977	48319	53026	53691	80594	58805	76961	62665	82855
49689	08342	81912	92735	30042	47623	60061	69427	21163	68543
60958	20236	79424	04055	54955	73342	14040	72431	99469	41044
79956	98409	79548	39569	83974	43707	77080	08645	20949	56932
04316	01206	08715	77713	20572	13912	94324	14656	11979	53258
78684	28546	06881	66097	53530	42509	54130	30878	77166	98075
69235	18535	61904	99246	84050	15270	07751	90410	96675	62870
81201	04314	92708	44984	83121	33767	56607	46371	20389	08809
80336	59638	44368	33433	97794	10343	19235	82633	17186	63902
65076	87960	92013	60169	49176	50140	39081	04638	96114	63463
90879	70970	50789	59973	47771	94567	35590	23462	33993	99899
50555	84355	97066	82748	98298	14385	82493	40182	20523	69182
48658	41921	86514	46786	74097	62825	46457	24428	09245	86069
26373	19166	88223	32371	11570	62078	92317	13378	05734	71778
20878	80883	26027	29101	58382	17109	53511	95536	21759	10630
20069	60582	55749	88068	48589	01874	42930	40310	34613	97359
46819	38577	20520	94145	99405	47064	25248	27289	41289	54972
83644	04459	73253	58414	94180	09321	59747	07379	56255	45615
08636	31363	56033	49076	88908	51318	39104	56556	23112	63317
92058	38678	12507	90343	17213	24545	66053	76412	29545	89932
05038	18443	87138	05076	25660	23414	84837	87132	84405	15346
41838	68590	93646	82113	25498	33110	15356	81070	84900	42660
15564	81618	99186	73113	99344	13213	07235	90064	89150	86359
74600	40206	15237	37378	96862	78638	14376	46607	55909	46398
78275	77017	60310	13499	35268	47790	77475	44345	14615	25231
30145	71205	10355	18404	85354	22199	90822	35204	47891	69860
46944	00097	39161	50139	60458	44649	85537	90017	18157	13856
85883	21272	89266	94887	00291	70963	28169	95130	27223	35387
83606	98192	82194	26719	24499	28102	97769	98769	30757	81593
66888	81818	52490	54272	70549	69235	74684	96412	65186	87974
63673	73966	34036	44298	60652	05947	05833	27914	57021	58566
37944	16094	39797	63253	64103	32222	65925	64693	34048	75394
93240	66855	29336	28345	71398	45118	01454	72128	09715	29454
40189	76776	70842	32675	81647	75868	21288	12849	94990	21513

Reprinted from A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates, by the Rand Corporatrion (New York: FreePress, 1955), p. 259. Copyright 1955 by the Rand Corporation. Used by permission.

EK ÇİZELGE 5 Ki-kare dağılım fonksiyonunun eşik değerleri

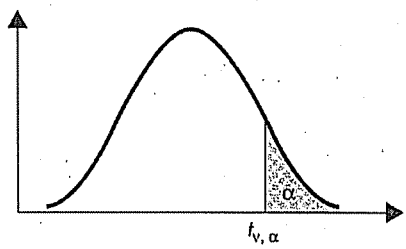


Bu çizelge, seçilmiş α olasılıkları için, $\alpha = P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,\alpha})$ eşitliğini sağlayan $\chi^2_{\nu,\alpha}$ değerlerini gösterir. Burada χ^2_ν, serbestlik derecesi ν olan ki-kare rassal değişkenidir. Sözgelimi 10 serbestlik dereceli bir ki-kare rassal değişkeninin 15.99'dan büyük olma olasılığı 0.100'dür.

ν	α									
	.995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0206	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.28	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	69.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Reproduced with permission from C. M. Thompson, "Tables of percentage points of the chi-square distribution," *Biometrika*, 32 (1941)

EK ÇİZELGE 6 Student t dağılımının eşik değerleri

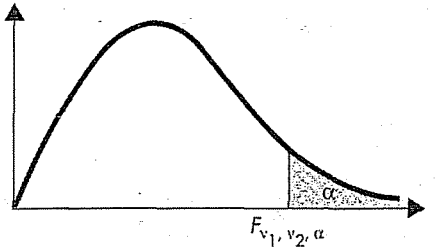


Bu çizelge, seçilmiş α olasılıkları için, $P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = \alpha$ eşitliğini sağlayan $t_{\nu,\alpha}$ değerlerini gösterir. Burada t_ν , ν serbestlik dereceli Student t rassal değişkenidir. Sözgelimi 10 serbestlik dereceli bir Student t rassal değişkeninin 1.372'den büyük olma olasılığı 0.10'dur.

ν	α				
	.100	.050	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Reproduced with permission of the trustees of Biometrika, from Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1 (1966)

EK ÇİZELGE 7 *F* dağılımının eşik değerleri



Bu çizelge $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.01$ olasılıkları için $P(F_{\nu 1, \nu 2} > F_{\nu 1, \nu 2, \alpha}) = \alpha$ eşitliğini sağlayan $F_{\nu 1, \nu 2, \alpha}$ değerlerini gösterir. Burada $F_{\nu 1, \nu 2}$, pay serbestlik derecesi ν_1, payda serbestlik derecesi ν_2 olan bir F rassal değişkenidir. Sözgelimi $F_{3,7}$ rassal değişkeninin 4.35'i aşma olasılığı 0.05'tir.

PAYDA ν_2	PAY ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51

PAYDA ν_2	PAY ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$\alpha = .01$

PAYDA ν_2	PAY ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.50
3	34.12	30.82	2946	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Reproduced, with permission of the trustees of Biometrika, from *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1 (1966).

EK ÇİZELGE 8 Wilcoxon sınama istatistiği dağılımının eşik değerleri

Bu çizelge n örneklem büyüklüğü ve seçilmiş α olasılıkları için $P(T \leq T_\alpha) = \alpha$ eşitliğini sağlayan T_α değerlerini gösterir. Burada T rassal değişkeninin dağılımı, sıfır önsavı doğruyken Wilcoxon sınama istatistiğinin dağılımıdır.

n	α				
	.005	.010	.025	.050	.100
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	3
6	0	0	1	3	4
7	0	1	3	4	6
8	1	2	4	6	9
9	2	4	6	9	11
10	4	6	9	11	15
11	6	8	11	14	18
12	8	10	14	18	22
13	10	13	18	22	27
14	13	16	22	26	32
15	16	20	26	31	37
16	20	24	30	36	43
17	24	28	35	42	49
18	28	33	41	48	56
19	33	38	47	54	63
20	38	44	53	61	70

Reproduced with permission from R. L. McCormack, "Extended tables of the Wilcoxon matched pairs signet rank statistics," *Journal of the American Statistical Association*, 60 (1965).

EK ÇİZELGE 9 Spearman sıra korelasyonu katsayısı dağılımının eşik değerleri

Bu çizelge n örneklem büyüklüğü ve seçilmiş α olasılıkları için $P(r_s > r_{s,\alpha}) = \alpha$ eşitliğini sağlayan $r_{s,\alpha}$ değerlerini gösterir. Burada r_s rassal değişkeninin dağılımı, ilişki yoktur diyen sıfır önsavı doğruyken Spearman sıra korelasyonu katsayısının dağılımıdır.

n	α			
	.050	.025	.010	.005
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	—
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.329	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Reproduced with permission from E. G. Olds, "Distribution of sums squares of rank differences for small samples," *Annals of Mathemtical Statistics*, 9 (1938).

EK ÇİZELGE 10 Durbin-Watson sınama istatistiği dağılımının eşik değerleri

$P(d < d_\alpha) = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir sayıya d_α diyelim. Burada d rassal değişkeni, regresyon hataları arasında ardışık bağımlılık yoktur diyen sıfır önsavı doğruyken Durbin-Watson istatistiğinin dağılımına uyar. Bu çizelge $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ olasılıklarında K sayıda bağımsız değişken, n tane gözlem varken $d_L \le d_\alpha \le d_Y$ eşitsizliğini sağlayan d_L ve d_U değerlerini gösterir.

$\alpha = .05$

n	K									
	1		2		3		4		5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	122	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	127	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

EK ÇİZELGE 10 Durbin-Watson sınama istatistiği dağılımının eşik değerleri (devam)

$\alpha = .01$

n	K									
	1		2		3		4		5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	072	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.54	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

Reproduced with permission from J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for serial correlation in least squares regression, II," *Biometrika*, 38 (1951).

EK ÇİZELGE 11 Dizilim sınaması istatistiğinin birikimli dağılım fonksiyonu

Bu çizelge, verilmiş n tane gözlem varken, rassal bir zaman serisinde dizilim sayısının K 'yi aşmama olasılığını gösterir.

n	K																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	.100	.300	.700	.900	1.000														
8	.029	.114	.371	.629	.886	.971	1.000												
10	.008	.040	.167	.357	.643	.833	.960	.992	1.000										
12	.002	.013	.067	.175	.392	.608	.825	.933	.987	.998	1.000								
14	.001	.004	.025	.078	.209	.383	.617	.791	.922	.975	.996	.999	1.000						
16	.000	.001	.009	.032	.100	.214	.405	.595	.786	.900	.968	.991	.999	1.000	1.000				
18	.000	.000	.003	.012	.044	.109	.238	.399	.601	.762	.891	.956	.988	.997	1.000	1.000	1.000		
20	.000	.000	.001	.004	.019	.051	.128	.242	.414	.586	.758	.872	.949	.981	.996	.999	1.000	1.000	1.000

Reproduced with permission from F. Swed and C. Eisenhart, "Tables for testing randomness of gropuing in a sequence of alternatives," Annals of Mathematical Statistics, 14 (1993).

SEÇİLMİŞ ÇİFT SAYILI ALIŞTIRMALARIN YANITLARI

BÖLÜM 2

2. (a) 26.75 (b) 25 (c) 22
4. (a) 3.125 (b) 3
6. (a) 5.94 (b) 6.35
10. (a) 29.52, 5.43 (b) 4.75 (c) 15 (d) 10
12. (a) 1.27, 1.13 (b) 2
14. (a) 5.20, 2.28 (b) 7.3 (c) 3.975
16. (a) 9.83 (b) 9.5 (c) 28.52, 5.34 (d) 8.25
18. (a) 195-395 $ (b) 154-436 $
20. (a) 23,000-35,000 (b) 23,000-35,000
26. (a) 3.375 (b) 3 (c) 3 (d) 1.08, 1.04
32. (b) 0.12, 0.28, 0.32, 0.20, 0.18 (c) 0.12, 0.40, 0.72, 0.92, 1 (d) 9.36 (e) 4.57 (f) 8-12 (g) 8-12
34. (b) 0.10, 0.40, 0.30, 0.15, 0.05 (c) 2, 10, 16, 19, 20 (d) 0.10, 0.50, 0.80, 0.95, 1 (e) 11.025 (f) 0.27, 0.52 (g) 10.95 (h) 0.77 (i) 10.45-10.95
36. (b) 0.30, 0.45, 0.20, 0.05 (c) 0.30, 0.75, 0.95, 1 (d) 1.5 (e) 0.74, 0.86 (f) 1.44 (g) 1.29 (h) 1-2
38. (b) 27,700 $ (c) 13,331 (d) 24,286
64. (a) Evet (b) Hayır
66. (a) 20.05 (b) 20.45 (c) 30.1 (d) 5.5 (e) 16.3 (f) 10.6
68. (b) 4.92 (c) 10.23 (d) 3.20 (e) 3.80 (f) 3.46

BÖLÜM 3

2. (a) 0.54 (b) 0.18 (d) 0.46 (f) 0 (h) 0.72 (i) Evet (j) Hayır
6. (a) 0.87 (b) 0.35
8. (a) 5,040 (b) 1/5,040

10. 1/120
12. 60, 1/60
14. 28
16. **(a)** 150 **(b)** 40/150 = 0.27 **(c)** 30/150 = 0.2
18. 0.35
20. **(a)** Hayır **(b)** Hayır **(c)** Hayır
22. 0.069
24. **(a)** 0.56 **(b)** 0.83
26. 0.129
28. **(a)** 0.90 **(b)** 0.88 **(c)** 0.925
30. **(a)** 0.87 **(b)** Hayır
32. 0.2
34. **(a)** 0.12 **(b)** 0.704 **(c)** Hayır **(d)** 0.333 **(e)** Hayır **(f)** 0.79 **(g)** 0.27 **(h)** 0.87
36. **(a)** 0.25 **(b)** 0.32 **(c)** 0.16 **(d)** 0.125 **(e)** 0.212
38. **(a)** 0.32 **(b)** 0.25 **(c)** 0.375 **(d)** 0.48 **(e)** 0.44 **(f)** Hayır
40. **(a)** 0.76 **(b)** 0.77 **(c)** 0.43
42. **(a)** 0.025 **(b)** 0.445 **(c)** 0.270
44. **(a)** 0.475 **(b)** 0.368 **(c)** 0.857
46. 0.375
52. **(a)** Doğru **(b)** Doğru **(c)** Doğru **(d)** Doğru **(e)** Yanlış **(f)** Yanlış **(g)** Yanlış
54. **(a)** Yanlış **(b)** Yanlış **(c)** Doğru **(d)** Yanlış **(e)** Yanlış
56. **(a)** 0.08 **(b)** Hayır **(c)** 0.27 **(d)** 0.58
58. **(a)** 0.105 **(b)** 0.2625 **(c)** 0.645 **(d)** 0.5917 **(e)** Hayır **(f)** Hayır **(g)** Hayır
60. **(a)** 0.11 **(b)** 0.69 **(c)** 0.183 **(d)** Hayır
62. **(a)** 0.12 **(b)** 0.70 **(c)** Hayır **(d)** 0.333 **(e)** 0.355
64. **(a)** 66 **(b)** 1/6
66. **(a)** 0.5192 **(b)** 0.6482 **(c)** Eksi
68. 0.483
70. **(a)** 0.514 **(b)** 0.463
72. **(a)** 0.50 **(b)** 0.84 **(c)** Hayır **(d)** 0.98976
74. **(a)** 0.52 **(b)** 0.115 **(c)** 0.885

BÖLÜM 4

2. **(c)** 0.50
4. **(c)** 0.32 (d) 0.1369
6. **(a)** $P(x) = 0.4(0.6)^{x-1}$ $x = 1, 2, 3, \ldots$ için **(b)** $F(x) = 1 - (0.6)^x$ $x = 1, 2, 3, \ldots$ için **(c)** 0.36
8. 1.25, 1.1675
10. **(a)** 49.9, 1.396 **(b)** 34.2 sent, 2.79 sent
12. **(a)** 0.2, 0.18 **(b)** 0.2, 0.17
14. 2.62, 1.47

16. 1

18. Yol 1'in beklenen değeri en yüksektir (650 $). En riskli yol olduğundan önerilmesi zorunlu değildir.

20. **(a)** 0.53 **(b)** $P(3 \mid 0) = 9/19$, $P(4 \mid 0) = 7/19$, $P(5 \mid 0) = 3/19$ **(c)** $P(0/5) = 1/8$, $P(1 \mid 5) = 5/12$, $P(2 \mid 5) = 11/24$ **(d)** 0.109 **(e)** Hayır

22. **(a)** $P(0, 0) = 0.54$, $P(0, 1) = 0.30$, $P(1, 0) = 0.01$, $P(1, 1) = 0.15$ **(b)** $P(0 \mid 1) = 1/16$, $P(1 \mid 1) = 15/16$ **(c)** 0.078

24. Bağımsızlık nedeniyle ortak olasılıklar marjinal olasılıkların çarpımıdır, böylece $P(0, 0) = 0.0216$ vb. olur.

28. 4, 4.54

28. **(a)** 0.7351 **(b)** 0.2321 **(c)** 0.0328

30. **(a)** 0.9891 **(b)** 0.5798

32. **(a)** 0.000011 **(b)** 0.3771 **(c)** 0.2235

34. 0.032

36. **(a)** 7.5, 2.525 **(b)** 1,875 $, 631 $

40. **(a)** 0.81 **(b)** 0.28 **(c)** 0.06

42. 0.916

44. 0.38

46. 0.262

48. **(a)** 0.267 **(b)** 0.264

50. **(a)** 0.171 **(b)** 0.219

52. 0.758

54. 0.83

60. **(a)** 2.21 **(b)** 1.35 **(c)** 913 $ **(d)** 405.38 $ **(e)** 0.35

64. **(a)** 0.17 **(b)** 2.59, 1.1 **(c)** 0.191

66. **(a)** 0.337 **(b)** 0.593 **(c)** 0.55, 0.056

68. Rassal bir seçimle en az analist kadar başarılı olma olasılığı 0.167'dir.

70. **(a)** 0.0907 **(b)** 0.2213

72. 0.9918

BÖLÜM 5

2. **(b)** $F(x) = 0.25x$, $0 \le x \le 4$ **(c)** 0.25 (d) 0.25

4. **(a)** 0.2 **(b)** 0.4 ile 0.6 arası

6. 26.4 milyon $, 1 milyon $

8. 54,000 $, 14,400 $

10. 1,000 $, 134.16 $ (yıldan yıla bağımsızlık olduğu varsayımıyla)

12. Eksi değerler

14. 600, 35.8

16. **(a)** 0.8849 **(b)** 0.0918 **(c)** 0.0446 **(d)** 0.8413 **(e)** 0.0233 **(f)** 0.8403 **(g)** 0.1141

18. **(a)** 0.6554 **(b)** 0.6554 **(d)** 0.6006 **(e)** 316-444 $

20. (a) 0.2266 (b) 0.2266 (c) 0.5468
22. (a) 0.2148 (b) 0.1587 (c) 0.3692
24. 0.0668
26. 15.2, 14.8
28. Yatırım A
30. (a) 98.8 (b) 183.6 (c) 0.949
32. (a) 0.3721 (b) 522.4 (c) 400-440 (d) 520-560 (e) 0.2922
34. 0.4990
36. (a) 0.7967 (b) 0.4525 (c) 0.7495 (d) 39-41
38. (a) 0.922 (b) 0.5704
40. 0.2877
42. (a) 0.0217 (b) 0.2514 (c) 0.7269
44. 0.2981, 0.2611
46. 0.3012
54. (a) 1/6 (b) 2/3 (c) 1,333.33 $ (d) Öneri (bin dolar cinsinden) B olsun. Bu durumda beklenen kâr $(B-10)(20-B)/12$ bin dolar olur. Bunu en yükseğe çıkaracak B'yi seçelim. $B = 15{,}000$ $ bulunur.
56. (c) 0.75
58. (a) 768.50 $ (b) 100.05 $ (c) 165 $, 34.50 $
62. (a) 0.3085 (b) 0.6826 (c) 79.6 (d) 53.3-66.7 dakika (e) 0.2731
6.4 (a) 0.7888 (b) 0.0062 (c) 0.0306 (d) 17.9-22.1 dakika (e) 19-21 (f) 21-23
66. %23.58
68. Neredeyse 1.0
70. (a) 0.16 (b) 0.135 (c) 0.393 (d) 0.050
72. (a) 0.7745 (b) 137.28 (c) 0.1587 (d) 0.0062

BÖLÜM 6

2. (a) 1,200 (b) 17,778 (c) 133.33 (d) 0.1303
4. (a) 0.9772 (b) 0.5762 (c) 0.3108 (d) 114,000-116,000 $
6. (a) 5.5 (b) 0.9909 (c) 08980 (d) 0.4329 (e) daha yüksek, daha yüksek, daha düşük
8. (a) 4 (b) 0.1056 (c) 0.1587 (d) 0.4532
10. (a) 0.26 (b) 0.20 (c) 0.23
12. (a) 68 (b) daha küçük (c) daha büyük
16. (a) 0.2546 (b) 0.0951 (c) 0.0086
18. (a) 0.424 (b) 0.00244 (c) 0.04942 (d) 0.0618
20. (a) 0.2 (b) 0.000889 (c) 0.0298 (d) 0.0465
22. 0.7372
24. (a) 0.0351 (b) 0.9236 (c) 0.4314 (d) daha yüksek, daha yüksek
26. 0.05
28. (a) 0.051 (b) 0.065 (c) 0.041

30. 0.0057
32. (a) 0.039 (b) 0.0384 (c) 0.4906
34. Uygulamada neredeyse sıfır
36. (a) 0.975 ile 0.99 arasında (b) Yaklaşık 0.975
38. (a) Yaklaşık 0.01 (b) Yaklaşık 0.005
40. (a) Evet (b) Evet
42. (a) 221.4 (b) 32.2
44. (a) 2.60 (b) 1.14 (c) 1.23 ve 2.34
46. 0.10'dan çok
52. (a) 0.0668 (b) 0.7745 (c) 445.6 (d) 394.4 (e) 123 (f) 76 (g) Daha küçük
54. (a) 0.0228 (b) 0.9544 (c) 13.4 (d) 8.1 (e) Daha küçük
58. (a) 0.0262 (b) 0.3446 (c) 0.2709 (d) 0.321
60. 0.005
62. 0.6826
64. (a) 0.374 (b) 0.440 (c) 0.032
66. (a) 0.995'ten çok (b) 0.9 ile 0.95 arasında

BÖLÜM 7

2. (a) 101.375, 201.696, 14.2 (b) ortalama ile varyans (c) 25.21 (d) 0.375
4. (b) $\overline{X}$ (c) 1.25, 1.11
6. (b) $\hat{\mu}^{(1)}$ (c) 1.29 (d) $(X_1 + X_2 + X_3)/3$
10. %45.8
12. (a) –0.15 (b) $p_1(1-p_1)/20 + p_2(1-p_2)/12$
14. $\hat{p}(1-\hat{p})/(n-1)$, burada $\hat{p} = X/n$
18. (a) 24.42 (b) 85.72 (c) 7.14 (d) 0.25 (e) 0.017
22. (a) 2.55 (b) 0.025

BÖLÜM 8

2. (a) $3.99 < \mu < 4.15$ (b) Daha dar (c) Daha dar (d) Daha geniş
4. (a) $174.1 < \mu < 201.7$ (b) 0.9596
6. (a) $3.72 < \mu < 3.90$ (b) Daha dar
8. $59.42 < \mu < 61.40$
10. $127.93 < \mu < 187.71$
12. (a) $10.8 < \mu < 21.9$ (b) Daha dar
16. (a) $101.5 < \mu < 122.5$ (b) Daha geniş
18. $0.455 < p < 0.559$
20. 0.5528
22. (a) $0.183 < p < 0.427$ (b) Daha dar
24. 0.8414

26. $23.1 < \sigma^2 < 111.6$
28. $10.9 < \sigma^2 < 19.4$
32. **(a)** $2.99 < \sigma^2 < 13.85$ **(b)** Daha geniş
34. $27.1 < \mu_1 - \mu_2 < 47.5$
36. $-5.57 < \mu_1 - \mu_2 < 40.59$
38. $-3{,}270 < \mu_1 - \mu_2 < 1{,}388$
40. $-9.12 < \mu_1 - \mu_2 < -1.52$
42. $-6.3 < \mu_1 - \mu_2 < 2.9$
44. $0.031 < p_1 - p_2 < 0.109$
46. 0.3328
48. 312
50. 0.383
52. 664
54. Hayır
56. **(a)** $3.26 < \mu < 3.50$ **(b)** Daha geniş
58. **(a)** $29.2 < \mu < 34.8$ **(b)** $5.0 < \sigma < 9.2$
62. **(a)** $0.441 < p < 0.517$ **(b)** 0.8472
64. **(a)** $0.41 < p < 0.60$ **(b)** Daha dar
66. 0.7498
68. $-0.068 < \mu_1 - \mu_2 < 6.902$
70. $8.43 < \mu_1 - \mu_2 < 34.39$
72. $-0.45 < \mu_1 - \mu_2 < -0.31$
74. $0.02 < p_1 - p_2 < 0.35$
76. 0.385

BÖLÜM 9

2. Sınama istatistiği –1.8'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilir.
4. Sınama istatistiği – 3.33'tür, H_0 %0.04'ten yüksek düzeylerde reddedilir.
6. 0.0008
8. 0.0004
10. **(a)** Hayır **(b)** Evet
12. Sınama istatistiği 1.741'dir, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.
14. Sınama istatistiği –3.189'dur, H_0 %5 düzeyinde reddedilir.
16. Sınama istatistiği 13.08'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilir.
18. Sınama istatistiği 46.4'tür, H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir, ama %2 düzeyinde reddedilemez.
20. Sınama istatistiği 16.96'dır, H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.
22. Sınama istatistiği – 5.62'dir, H_0 %5 düzeyinde reddedilir.
24. Sınama istatistiği 0.64'tür, H_0 %10 düzeyinde kabul edilir, p değeri 0.5222'dir.
26. Sınama istatistiği –1.94'tür, H_0 %2.62'den yüksek düzeylerde reddedilebilir.

28. Sınama istatistiği 2.239'dur, H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir, ama %2.5 düzeyinde reddedilemez.
30. Sınama istatistiği 2.04'tür, H_0 %4.14'ten yüksek düzeylerde reddedilebilir.
32. Sınama istatistiği 13.0'dır, H_0 hemen her düzeyde reddedilebilir.
34. Sınama istatistiği –1.850'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilebilir ama %5 düzeyinde reddedilemez.
36. Sınama istatistiği 1.275'tir, H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.
38. Sınama istatistiği –1.465'tir, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.
40. Sınama istatistiği –8.22'dir, H_0 %hemen her düzeyde reddedilebilir.
42. Sınama istatistiği –18.4'tür, H_0 %1 düzeyinde reddedilir.
44. Sınama istatistiği 7.10'dur, H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir ama %1 düzeyinde reddedilemez.
46. Sınama istatistiği 1.57'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.
48. 0.3897
50. 0.8599
52. 0.985
54. **(a)** 0.0082 **(b)** 0.1151 **(c)** 0.6554
60. **(a)** Yanlış **(b)** Doğru **(c)** Doğru **(d)** Yanlış **(e)** Yanlış **(f)** Doğru **(g)** Yanlış
62. **(a)** Sınama istatistiği –0.56'dır, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir. **(b)** Sınama istatistiği 17.12'dir, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.
64. **(a)** 0.0228 **(b)** 0.0014 **(c)** **(i)** daha küçük **(ii)** daha küçük **(d)** **(i)** daha küçük **(ii)** daha büyük
66. %69.66
68. Sınama istatistiği 2.36'dır, H_0 %5 düzeyinde reddedilir.
70. Sınama istatistiği 2.217'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilir.
72. %7.84
74. Sınama istatistiği –0.37'dir, H_0 %10 düzeyinde kabul edilir.
76. Sınama istatistiği 3.33'tür, H_0 %5 düzeyinde reddedilir.
78. Sınama istatistiği –2.30'dur, H_0 %1.07'den yukarı düzeylerde reddedilebilir. 80. **(a)** Sınama istatistiği –1.20'dir, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir. **(b)** Sınama istatistiği 0.93'tür, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.
82. Sınama istatistiği –1.19'dur, H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.
84. 0.0495
86. Hayır

BÖLÜM 10

2. H_0 tek yanlı karşı önsavla %1.96 düzeyinde reddedilebilir ama %0.20 düzeyinde reddedilemez.
4. Sınama istatistiği 2.78'dir, H_0 %0.27'den yüksek düzeylerde reddedilir.
6. Sınama istatistiği 1.29'dur, H_0 iki yanlı karşı önsavla %19.7'den yüksek düzeylerde reddedilebilir.

8. Sınama istatistiği 7'dir, H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir ama %2.5 düzeyinde reddedilemez.

10. Sınama istatistiği –1.73'tür, H_0 %4.18'den yüksek düzeylerde reddedilebilir.

12. Sınama istatistiği –0.57'dir, H_0 iki yanlı karşı önsavla ancak %56.86'dan yüksek düzeylerde reddedilebilir.

14. Sınama istatistiği –0.39'duır, H_0 ancak %69.66'dan yüksek düzeylerde reddedilebilir.

16. Sınama istatistiği 3.45'tir, H_0 %0.03'ten yüksek düzeylerde reddedilebilir.

18. Sınama istatistiği –4.85'tir, H_0 çok düşük düzeylerde reddedilebilir.

22. H_0 iki yanlı karşı önsavla %58.10 düzeyinde reddedilebilir ama %26.68 düzeyinde reddedilemez.

24. Sınama istatistiği 1.43'tür, H_0 %7.64'ten yüksek düzeylerde reddedilebilir.

26. Sınama istatistiği 8'dir, H_0 iki yanlı karşı önsavla %20 düzeyinde reddedilemez.

28. Sınama istatistiği –2.42'dir, H_0 tek yanlı karşı önsavla %0.78'den yüksek düzeylerde reddedilebilir.

BÖLÜM 11

2. Sınama istatistiği 2.38'dir; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

4. Sınama istatistiği 1.51'dir; H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.

6. Sınama istatistiği 3.07'dir; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

8. Sınama istatistiği 11.53'tür; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir ama %5 düzeyinde reddedilemez.

10. Sınama istatistiği 9.63'tür; H_0 %5 düzeyinde reddedilir.

12. Sınama istatistiği 0.44'tür; H_0 %10 düzeyinde kabul edilir.

14. Sınama istatistiği 11.65'tir; H_0 %0.5 düzeyinde reddedilebilir.

16. Sınama istatistiği 6.95'tir; H_0 %1 düzeyinde kabul edilir.

18. Sınama istatistiği 15.75'tir; H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

20. Sınama istatistiği 1.70'tir; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

22. Sınama istatistiği 1.4'tür; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

24. Sınama istatistiği 2.83'tür; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

26. Sınama istatistiği 20.3'tür; H_0 %5 düzeyinde reddedilir.

28. Sınama istatistiği 1.81'dir; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

30. Sınama istatistiği 0.35'tir; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

32. Sınama istatistiği 1.54'tür; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

34. Sınama istatistiği 5.80'dir; H_0 %2.5 düzeyinde reddedilebilir ama %1 düzeyinde reddedilemez.

36. Sınama istatistiği 3.21'dir; H_0 %10 düzeyinde reddedilebilir ama %5 düzeyinde reddedilemez.

BÖLÜM 12

2. (a) –0.4066 (b) Sınama istatistiği –1.476'dır ; H_0 %10 düzeyinde kabul edilir.

4. Örneklem korelasyonu 0.057'dir; sınama istatistiği 0.22'dir; H_0 alışıldık düzelerde kabul edilir.

6. Sınama istatistiği 2.073'tür; H_0 %2.5 düzeyinde reddedilebilir ama %1 düzeyinde reddedilemez.

8. Sınama istatistiği –0.41'dir; H_0 %20 düzeyinde reddedilemez.

10. Sıra korelasyonu 0.129'dur; H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

12. (a) 0.681 (b) H_0 %0.5 düzeyinde reddedilir.

14. (a) $y = 12.94 - 2.03x$ (b) $x = 0$ iken beklenen y, 12.94'tür; x'te her birim artış y'de beklenen değeri 2.03 birim olan bir azalmaya yol açar.

16. (a) $y = 0.045 - 0.224x$ (b) x'te her birim artış y'de beklenen değeri 0.224 birim olan bir azalmaya yol açar.

18. (a) $y = -11.5 + 0.402x$ (b) x'te her birim artış y'de beklenen değeri 0.402 birim olan bir artışa yol açar.

22. $R^2 = 0.878$, örneklemde satışlardaki değişkenliğin %87.8'i fiyatla olan doğrusal bağımlılıkla açıklanır.

24. $R^2 = 0.538$

26. 0.766

28. $R^2 = 0.0121$, örneklemde ücret artışlarındaki değişkenliğin %1.21'i öğretimin değerlendirilmesiyle olan doğrusal bağımlılıkla açıklanır.

30. (a) 144.47 (b) 1.899 (c) $-5.07 < \beta < 1.00$ (d) Sınama istatistiği –1.476'dır ; H_0 %10 düzeyinde kabul edilir. (e) Aynı

32. (a) $y = 3.296 + 0.539x$ (b) $0.241 < \beta < 0.838$

34. Sınama istatistiği –4.073'tür; H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

36. (a) $y = 97.2 - 58.4x$ (b) $-67.3 < \beta < -49.5$ (c) Hayır.

38. Sınama istatistiği 3.002'dir; H_0 %2.5 düzeyinde reddedilebilir ama %1 düzeyinde reddedilemez.

42. Sınama istatistiği 0.48'dir; H_0 %10 düzeyinde kabul edilir.

44. (a) 440 (b) $404 < Y_{n+1} < 476$, $423 < Y_{n+1} < 457$

46. $-0.35 < Y_{n+1} < 0.44$, $-0.7 < Y_{n+1} < 0.16$

48. $10.1 < Y_{n+1} < 23.2$, $7.8 < Y_{n+1} < 25.4$

52. Sınama istatistiği 2.844'tür; H_0 %0.05 düzeyinde reddedilir.

54. Sınama istatistiği 2.452'dir; H_0 %1 düzeyinde reddedilir ama 0.05 düzeyinde reddedilemez.

56. (a) 0.183 (b) H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

58. (a) 0.488 (b) H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

62. (a) Kestirilen değişmede bir birim artış, gerçekleşen değişmede beklenen değeri 0.7916 birim olan bir artışla ilişkilendirilir. (b) Gerçekleşen değişmedeki değişkenliğin %9.7'si kestirilen değişmeyle olan doğrusal bağlılık ile açıklanır. (c) Sınama istatistiği 2.86'dır; H_0 %0.05 düzeyinde reddedilir. (d) Sınama istatistiği –0.757'dir; H_0 %20 düzeyinde reddedilemez.

64. (a) Beceri sınavında her fazla puan, dönem sonu sınavında beklenen değeri 0.2875 olan puan artışına yol açar. (b) Dönem sonu notundaki değişkenliğin %11.58'i, beceri sınav puanıyla olan doğrusal ilişkiyle açıklanır. (c) Sınama istatistiği 6.3'tür; H_0 %0.05 düzeyinde reddedilir.

66. (a) 0.2388 (b) Sınama istatistiği 2.686'dır; H_0 %5 düzeyinde reddedilir. (c) $0.3 < \beta < 2.3$

BÖLÜM 13

2. Öbür her şey aynıyken pay senedi alımlarının değişimindeki bir birimlik bir artış, pay senedi fiyatları değişiminde beklenen değeri 0.057 birim olan bir artışa yol açar. Öbür her şey aynıyken pay senedi satışlarının değişimindeki bir birimlik bir artış, pay senedi faiyatları değişiminde beklenen değeri 0.065 birim olan bir azalışa yol açar.

4. (a) Öbür her şey aynıyken haftada bir fazla yemek beklenen değeri 0.653 libre olan ek bir şişmanlamaya, haftada bir saat fazla jimnastik beklenen değeri 1.345 libre olan bir zayıflamaya, haftada bir fazla bira beklenen değeri 0.613 libre olan ek bir şişmanlamaya yol açar. (b) Hayır

6. (a) 0.456; örneklemde süt tüketimindeki değişkenliğin %45.6'sı bağımsız değişkenlerle olan doğrusal ilişkiyle açıklanır. (b) 0.416 (c) 0.675 = süt tüketiminin gözlenen ve kestirilen değerleri arasındaki örneklem korelasyonu

10. (a) Sınama istatistiği 2.261'dir; H_0 %2.5 düzeyinde reddedilebilir ama %1 düzeyinde reddedilemez. (b) $0.54 < \beta_2 < 1.74$, $0.42 < \beta_2 < 1.86$, $0.17 < \beta_2 < 2.11$

12. (a) Sınama istatistiği –0.410'dur; H_0 %20 düzeyinde reddedilemez. (b) Sınama istatistiği 13.06'dir; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir

14. (a) Öbür her şey aynıyken kişi başına kişisel gelir ortalamasında 1 $'lık fazla piyangodan gelen kişi başına net gelirde beklenen değeri 0.04 $ olan bir artışa yol açar. (b) $0.2359 < \beta_2 < 1.5185$ (c) Sınama istatistiği –1.383'tur; H_0 %10 düzeyinde reddedilir ama %5 düzeyinde reddedilemez.

16. (a) $0.18 < \beta_1 < 0.22$ (b) Sınama istatistiği 1.19'dur; H_0 %10 reddedilemez.

18. (a) $0.0173 < \beta_5 < 0.0817$ (b) Sınama istatistiği 0.617'dir; H_0 %20 düzeyinde reddedilemez. (c) Sınama istatistiği 2.018'dir; H_0 %5 düzeyinde reddedilir ama %2 düzeyinde reddedilemez.

20. (a) Sınama istatistiği 82.0'dır,; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir.

22. (a) Sınama istatistiği 11.31'dir; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir.

24. Sınama istatistiği 6.24'tür; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir.

26. Sınama istatistiği 217'dir; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir.

30. 10.6 libre

32. 794,000 işçi saat

48. (a) Öbür her şey aynıyken her bir fazla soru yanıt yüzdesinde beklenen değeri 1.8345 olan bir artışa yol açar. Öbür her şey aynıyken her bir fazla sözcük yanıt yüzdesinde beklenen değeri 0.0.162 olan bir azalışa yol açar. (b) Örneklemde yanıt yüzdelerindeki değişkenliğin %63.7'si iki bağımsız değişkenle olan doğrusal ilişki tarafından açıklanır. (c) Sınama istatistiği 23.7'dir; H_0 %1 düzeyinde red-

dedilebilir. (d) $-3.59 < \beta_1 < -0.08$ (e) Sınama istatistiği –1.78'dir; H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir ama %2.5 düzeyinde reddedilemez.

52. (a) Öbür her şey aynıyken öğrencinin beklenen notundaki her bir fazla gözlenen puanda beklenen değeri 0.469 olan bir artışa yol açar. (b) $2.475 < \beta_2 < 4.263$ (c) Sınama istatistiği 2.096'dır; H_0 %5 düzeyinde reddedilebilir ama %2 düzeyinde reddedilemez. (d) Örneklemde notlardaki değişkenliğin %68.6'sı üç bağımsız değişkenle olan doğrusal ilişki tarafından açıklanır. (e) Sınama istatistiği 75'tir; H_0 %1 düzeyinde reddedilebilir. (f) 0.828 = gözlenen ve kestirilen puanlar arasındaki örneklem korelasyonu. (g) 76

54. (a) $110.08 < \beta_6 < 850.00$ (b) $803.4 < \beta_7 < 1{,}897.2$ (c) Sınama istatistiği –4.93'tür; H_0 %0.5 düzeyinde reddedilebilir. (d) Sınama istatistiği 6.51'dır; H_0 %0.5 düzeyinde reddedilebilir. (e) Örneklemde oyunda geçen dakikalardaki değişkenliğin %52.39'u dokuz bağımsız değişkenle olan doğrusal ilişki tarafından açıklanır. (f) 0.724 = otunda geçen sürenin gerçekleşen ve beklenen değerleri arasındaki örneklem korelasyonu.

BÖLÜM 14

2. (a) Öbür her şey aynıyken evde şömine varsa evin beklenen satış fiyatı 3,259 $ daha yüksek olur. (b) Öbür her şey aynıyken dış duvar kaplaması tuğlaysa evin beklenen satış fiyatı 2,005 $ daha yüksek olur. (c) $1{,}363 < \beta_4 < 5{,}075$ (d) Sınama istatistiği 2.611'dir; H_0 %0.5 düzeyinde reddedilebilir.

16. (a) Ortanca gelirdeki %1'lik bir artış marketin büyüklüğünde beklenen değeri %68 olan bir artışa yol açar. (b) Sınama istatistiği 8.83'tür; H_0 %0.5 düzeyinde reddedilebilir.

24. (a) Herhangi bir gözlem için gölge değişken değerlerinin toplamı bir eder. Denklemde bir sabit terim olduğuna göre tam bir çoklu doğrusallık söz konusudur. (b) β_3, öbür her şey aynıyken, birinci ve üçüncü üç ayların talepleri arasında beklenen farkın bir ölçüsüdür.

26. Ciddi model kurma hataları doğurabilir.

34. H_0 %5 düzeyinde kabul edilir.

36. H_0 %1 düzeyinde kabul edilir, %5 düzeyinde sınama kararı belirsizdir.

38. Ciddi bir ardışık bağımlı hata sorunu dışında bir şey yoktur.

40. $d = 0.85$. Hatalar arasında ardışık bağımlılık yoktur diyen önsav %1 düzeyinde reddedilir. Ciddi model kurma hataları ardışık bağımlı hataların görünmesine yol açabilir.

46. (a) Sınama istatistiği 1.179'dur; H_0 %10 düzeyinde reddedilir. (b) Sınama istatistiği 0.495'tir; H_0 %10 düzeyinde kabul edilir. (c) Çoklu doğrusallık.

50. (a) Öbür her şey aynıyken yeni siparişlerin değerinde %1'lik bir artış iflaslarda beklenen değeri %0.82 olan bir azalışa yol açar. (b) Hatalar arasında ardışık bağımlılık yoktur, bu önsav %1 düzeyinde reddedilir. (c) Hayır (d) 0.755.

52. (a) $0.035 < \beta < 0.471$ (b) içinde bulunulan dönemde 0.253 $'lık, bir sonraki dönemde 0.138'lik, iki sonraki dönemde 0.075 $'lık, vb. artışlar. Beklenen toplam

artış 0.557 $'dır. (c) Sınama istatistiği 0.56'dır, H_0 alışıldık düzeylerde reddedilemez.

BÖLÜM 15

2. (a) ÖİKT = 1,342.0, ÖAKT = 836.6, BKT = 2,178.6

(b)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	836.6	3	278.867	3.95
Öbekler içi	1,342.0	19	70.632	
Toplam	2,178.6	22		

H_0 %5 düzeyinde reddedilir ama %1 düzeyinde reddedilmez.

4. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	2.433	2	1.2165	0.40
Öbekler içi	36.100	12	3.0083	
Toplam	38.533	14		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

6. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	23.24	3	7.747	11.80
Öbekler içi	7.88	12	0.657	
Toplam	31.12	15		

(b) H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

8. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	240.93	2	120.465	1.50
Öbekler içi	966.40	12	80.533	
Toplam	1,207.33	14		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

10. (a) 9.666 (b) 1.302,1.014, –2.316 (c) 0.930

12. Sınama istatistiği 1.18'dir, H_0 %10 düzeyinde reddedilmez.

14. Sınama istatistiği 9.38'dir, H_0 %1 düzeyinde reddedilir ama %5 düzeyinde reddedilmez.

16. Sınama istatistiği 0.74'tür, H_0 %10 düzeyinde reddedilemez.

18. Sınama istatistiği 5.245'tir, H_0 %10 düzeyinde reddedilir ama %5 düzeyinde reddedilemez.

20. **(a)** Anakütle dağılımlarının merkezlerinin eşitliği **(b)** H_0 %10 düzeyinde reddedilmez.

22. **(a)**

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Gübreler	200.67	2	100.335	4.56
Tohumlar	62.25	3	20.750	0.94
Hata	132.00	6	22.000	
Toplam	394.92	11		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez. **(c)** H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

24. **(a)**

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Bölgeler	230.92	3	76.97	3.22
Renkler	74.00	2	37.00	1.55
Hata	143.33	6	23.89	
Toplam	448.25	11		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

26. $G_1 = -3.5, B_1 = 1.25, \varepsilon_{11} = -2.5$

28. **(a)**

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Emlakçiler	268	3	89.333	1.03
Evler	1,152	9	128.000	1.47
Hata	2,352	27	87.111	
Toplam	3,772	39		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

30. **(a)**

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Gösteriler	95.2	2	47.600	3.60
Bölgeler	69.5	3	23.167	1.75
Hata	79.3	6	13.217	
Toplam	244.0	11		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

32. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Yarışmacılar	364.50	21	17.3571	19.27
Hakemler	0.81	8	0.1013	0.11
Etkileşim	4.94	1,188	0.0294	0.03
Hata	1,069.94	1,385	0.9006	
Toplam	1,440.19			

(b) Yarışmacılar arasında fark yoktur diyen sıfır önsavı %1 düzeyinde reddedilir; öbür iki sıfır önsavı %5 düzeyinde reddedilmez.

34. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Konu türleri	389.00	3	129.667	5.31
Sınav türleri	57.56	2	28.786	1.18
Etkileşim	146.67	6	24.445	1.00
Hata	586.00	24	24.417	
Toplam	1,179.23	35		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

42. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	5,165	2	2,5825.5	21.48
Öbekler içi	120,802	1,005	120.2	
Toplam	125,967	1,007		

(b) H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

44. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	221.34	3	73.780	25.60
Öbekler içi	374.68	130	2.882	
Toplam	596.00	133		

(b) H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

46. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Öbekler arası	11,438.3028	2	5,719.1514	0.79
Öbekler içi	109,200.0000	15	7,280.0000	
Toplam	120,638.3028	17		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

48. Sınama istatistiği 5.05'tir, H_0 %10 düzeyinde reddedilmez.

52.

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Tüketiciler	37,571.5	124	363.00	1.35
Markalar	32,987.3	2	16,493.65	73.42
Hata	55,710.7	248	224.64	
Toplam	126,269.5	374		

(b) H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

54. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
SAT Puanı	0.82667	2	0.41333	24.79
Gelir	0.00667	2	0.00333	0.20
Hata	0.06667	4	0.01667	
Toplam	0.90000	8		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez. **(c)** H_0 %1 düzeyinde reddedilir.

56. (a) 3.3 **(b)** 0 **(c)** 0.0667 **(d)** 0.4333

58.

KAYNAK	KT	SD	OK	*F* ORANI
Fiyatlar	0.178	2	0.0890	0.09
Ülkeler	4.365	2	2.1825	2.32
Etkileşim	1.262	4	0.3155	0.33
Hata	93.330	99	0.9427	
Toplam	99.135	107		

Üç sıfır önsavından hiçbiri %5 düzeyinde reddedilemez.

60. (a)

KAYNAK	KT	SD	OK	F ORANI
SAT puanı	2.20111	2	1.10056	66.02
Gelir	0.01778	2	0.00889	0.53
Etkileşim	0.10223	4	0.02556	1.53
Hata	0.15000	9	0.01667	
Toplam	2.47112	17		

(b) H_0 %5 düzeyinde reddedilmez. **(c)** H_0 %1 düzeyinde reddedilir. **(d)** H_0 %5 düzeyinde reddedilmez.

BÖLÜM 16

2. **(a)** 3.855 **(b)** 93.2, 88.5, 97.9 **(c)** 3.67, 0.11, 7.23

4. Normallik varsayımıyla bir değerin bu sınırlar dışına düşme olasılığı 0.002'dir.

6. **(a)** 19.84 **(b)** 1.99 **(c)** 2.09 **(d)** 19.84, 17.27, 22.41 **(f)** 1.99, 0.06, 3.92

8. **(a)** (81.6, 104.8) **(b)** 0.65 **(c)** 0.59 [Süreç yetersiz]

10. **(a)** (131.36, 168.60) **(b)** 1.07 **(c)** 1.07 [Süreç yetersiz]

12. 0.056, 0.012, 0.100

14. **(a)** 0.125 **(b)** 0.125, 0.055, 0.195

16. **(a)** 0.080 **(b)** 0.080, 0.029, 0.131

18. **(a)** 13.55 **(b)** 13.55, 2.51, 24.59

22. **(a)** 119.825 **(b)** 1.985 **(c)** 2.112 **(d)** 119.825, 116.986, 122.664 **(f)** 0.985, 0, 4.149 **(h)** **(i)** (113.5, 126.2) **(ii)** 0.79 **(iii)** 0.76 [Süreç yetersiz]

24. **(a)** 0.0723 **(b)** 0.0723, 0.0376, 0.1070

26. **(b)** 343.44 **(c)** 11.51 **(d)** 12.49 **(e)** 343.44, 324.68, 362.20 **(g)** 11.51, 0, 26.12 **(h)** **(i)** Ortalama aralık = 25.94 **(ii)** 12.60 (iii) 324.51, 362.37 **(iv)** 25.94, 0, 59.14

BÖLÜM 17

2. **(a)** 100, 102.5, 99.3, 98.2, 100.0, 99.6, 100.0, 99.3, 99.3, 100.7, 110.7, 106.1 **(b)** 101.8, 104.4, 101.1, 100, 101.8, 101.5, 101.8, 101.1, 101.1, 102.5, 112.7, 108.0

4. **(a)** 100, 105.4, 109.6, 112.7, 115.5, 117.2, (b) 100, 104.8, 110.5, 112.1, 115.7, 117.5

8. $R = 7$; H_0 ancak çok yüksek anlamlılık düzeylerinde reddedilebilir.

10. $R = 5$; H_0, tek yanlı karşı önsavla %7.8 düzeyinde reddedilir ama %2.5 düzeyinde reddedilmez.

12. **(a)** $R = 7$; sınama istatistiği –3.08'dir, H_0, tek yanlı karşı önsavla %0.1 düzeyinde reddedilir.

16. 3. ve 4. Yıl değerleri 7.8 ve 7.7'dir.

22. Bütün kestirimler 1.36'dır.
24. Bütün kestirimler 5.2'dir.
32. 6.7, 6.5
36. $X_t = 18.515 - 0.032X_{t-1} + a_t$; 17.9, 17.9, 17.9
40. **(a)** 1. derece **(b)** 1,331, 1,369, 1,402
46. **(a)** 100, 110.7, 117.9, 128.0, 144.5, 159.8 **(b)** 100, 110.5, 116.4, 124.4, 138.2, 150.9 **(c)** 100, 104.1, 100.4, 105.6, 106.3, 105.2
52. **(a)** $R = 10$; sınama istatistiği –1.25'tir, H_0, tek yanlı karşı önsavla yaklaşık %10.56 düzeyinde reddedilebilir. **(c)** 3. ve 4. Yıl değerleri 779 ve 768'dir.
54. **(a)** 2. ve 3. ay değerleri 85 ve 88.7'dir.

BÖLÜM 18

14. $8.2 < \mu < 11.2$
16. $5.49 < \mu < 9.07$
20. $95{,}489 < N\mu < 113{,}136$
22. $403 < N\mu < 577$
24. $0.49 < p < 0.63$
26. $129 < Np < 197$
28. **(a)** $40.8 < \mu_3 < 45.8$ **(b)** 37.33 **(c)** $36.03 < \mu < 38.63$, $35.78 < \mu < 38.88$
30. **(a)** $2.84 < \mu_1 < 3.40$ **(b)** $3.14 < \mu_2 < 3.60$ **(c)** $3.05 < \mu < 3.41$
32. **(a)** 81,720 **(b)** $77{,}542 < N\mu < 85{,}898$
34. **(a)** 0.347 **(b)** $0.255 < p < 0.439$, $0.238 < p < 0.456$
36. **(a)** 56 **(b)** 65
38. **(a)** 54 **(b)** 59
40. **(a)** 74 **(b)** 88
42. 281
44. 211
46. **(a)** 498 **(b)** 471
48. **(a)** 91.7 **(b)** $70.7 < \mu < 112.7$
50. **(a)** 0.451 **(b)** $0.380 < p < 0.522$
52. 107
54. 130
58. **(a)** $69.1 < \mu < 80.3$ **(b)** Daha geniş
60. **(a)** $0.56 < p < 0.69$
62. **(a)** $7.0 < \mu_1 < 11.4$ **(b)** $9.8 < \mu < 13.4$
64. $0.48 < \mu < 0.72$
66. **(a)** 16 **(b)** 22
68. 76

BÖLÜM 19

2. **(a)** D sürecinin seçimi kabul edilemez **(b)** C süreci **(c)** A süreci

8. **(b)** Hayır

10. **(a)** Düşük riskli pay senedi fonu

12. **(a)** **(i)** Yanlış **(ii)** Doğru **(iii)** Doğru **(b)** Hayır

14. Yılda 74,000 $ BPD ile yeni merkezde

16. **(a)** 33/70'ten az **(b)** 816,667 $'dan çok

18. **(a)** Süreci incele, BPD = 18,600$ (b) En çok 5/6

20. **(b)** 2 araba, BPD = 16 $

22. **(b)** Jones, kampanya ile; BPD 87,000 $ **(c)** Evet, 5,000 $'a kadar

24. **(b)** B sözleşmesi için ilk öneri sunulmalı, BPD 1,890 $ **(c)** Ayrıntılı öneri sunulmamalı çünkü beklenen getiri –300 $ **(d)** Evet, şimdi en iyi tutum B sözleşmesi için öneri sunmak; BPD 2,085 $

26. **(a)** A süreci; BPD 440,000 $ (b) 0.5, 0.4, 0.1 **(c)** C süreci; BPD 345,000 $ **(d)** 9/31, 16/31, 6/31 **(e)** C süreci; BPD 395,161 $ **(f)** 2/13, 4/13, 7/13 **(g)** A süreci; BPD 607,692 $

28. **(a)** etkin 12/13, etkin değil 1/13 **(b)** Satılmamalı; BPD 114,615 $ **(c)** etkin 0.25, etkin değil 0.75 **(d)** Satılmalı; BPD 50,000 $ **(e)** Evet

30. **(a)** 0.01, 0.18, 0.81 **(b)** 0.09, 0.42, 0.49 **(c)** **(i)** 4/13, 9/13. Araştır, BPD 17,615 $ **(ii)** 12/19, 7/19. Araştır, BPD 18,263 $ **(iii)** 0.8687, 0.1313. Araştır, BPD 18,737 $

32. **(a)** Borsanın gelecekteki gelişmesine ilişkin bilgi **(b)** 1,000 $

34. Yılda 24,000 $

38. 23,000 $

42. **(a)** 34 $ **(b)** 55.80 $ **(c)** 21.80 $ **(d)** Hiçbiri **(e)** 24.29 $ **(f)** 24.29 $ ilk ampulün sağlam olma olasılığı (0.89) ile çarpılınca 21.80 $ çıkar

44. **(a)** 200/11, 500/11, 800/11, 900/11 **(b)** 2/11, 5/11, 8/11, 9/11

46. En çok 0.475

48. Smith ile sözleşme imzalayıp kampanya başlatmamalı, BF 57

54. **(a)** 0.18, 0.42, 0.12, 0.28 **(b)** Her iki sözleşme için de öneri verilmeli; BPD 510 $ **(d)** 204 $ **(e)** 79 $

D İ Z İ N

Ağaç çizimi	Tree diagram, 101
Alan araştırması örnekleme yöntemleri	Survey sampling methods, 827
Alt (birinci) dördebölen	First quartile, 28
Alt denetim eşiği	Lower control limit, 731
Alt ölçü eşiği	Lower specification limit, 738
Anakütle	Population, 3, 7, 243
Anakütle çoklu regresyonu	Population multiple regression, 542
Anakütle katsayısı	Parameter, 283
Anakütle katsayısının tahmin edilmesi	Parameter estimation, 603
Anakütle oranı	Population proportion, 256
Anakütle ortalaması	Population mean, 10
Anakütle regresyon doğrusu	Population regression line, 447
Anakütle regresyon katsayıları kümesi	Set of regression parameters, 567
Anakütle standart sapması	Population standard deviation, 20
Anakütle toplamı	Population total, 840
Anakütle varyansı	Population variance, 20
Anlamlılık düzeyi	Significance level, 362
Aralığın olasılık içeriği	Probability content of interval, 300
Aralık	Range, 27
ve denetim çizgeleri	and control charts, 755
Aralık olasılıkları	Range probabilities, 195
Aralık tahmin edicisi	Interval estimator, 300
Aralık tahmini	Interval estimate, 300
Ardıl olasılık	Posterior probability, 125
ve karar verme	and decision making, 899
Ardışık bağımlı hatalar	Autocorrelated errors, 643
Ardışık bağlanım modelleri	Autoregressive models:
regresyon hataları için	for regression errors, 645
zaman serileri için	for time series, 873
Ardışık bağlanımlı, bütünleşik hareketli ortalama modelleri	Autoregressive integrated moving average models, 820
Aşırı değişkenlik	Excessive variability, 734
Bağdaşmaz olaylar	Mutually exclusive events, 84
Bağımlı değişken	Dependent variable, 495
Bağımsız değişkenler	Independent variables, 495
Bağımsız olaylar	Independent events, 110
Bağımsız örneklemler	Independent samples, 333, 396, 443, 671

Bağımsız özellikler
Bağımsız rassal değişkenler
Bakışık (simetrik) dağılım
Basıklık katsayısı
Basına yansıma
Basit ortalanmış hareketli ortalama
Basit önsav
Basit rassal örneklem
Basit üstel düzleme
Baskın eylem
Bayes teoremi
    almaşık gösterim
    ve karar verme
Bekleme kuyrukları
Beklenen değer
    kesikli rassal değişken için
    sürekli rassal değişken için
Beklenen fayda
Beklenen fayda ölçütü
Beklenen ödül
Beklenen parasal değer
Beklenen parasal değer ölçütü
Beklenti
Belirlenebilir nedenler
Belirlilik katsayısı
Belirsizlik
    ortamında karar verme
Bernoulli dağılımı
Bileşik önsavlar
Bilgisayar paket programları
    regresyon için
    varyans çözümlemesi için
Binom dağılımı:
    çizelge olasılıklarının kullanılması
    çizelgesi
    normal dağılım yakınsaması
    olasılık fonksiyonu
    ortalaması ile varyansı
    Poisson dağılımı yakınsaması
    tanıtımı
    ve denetim çizgeleri
    ve işaret sınaması
    ve örneklem oranı

Independent attributes, 123
Independent random variables, 160, 205
Symmetric distribution, 51
Kurtosis, 462
Media reports, 352
Simple centered moving average, 783
Simple hypothesis, 360
Simple random sample, 244, 836
Simple exponential smoothing, 796
Dominating action, 884
Bayes' theorem, 124
    alternative statement, 126
    and decision making, 899
Waiting lines, 234
Expected value, 146
    for discrete random variable, 147
    for continuous random variable, 201
Expected utility, 922
Expected utility criterion, 926
Expected payoff, 892
Expected monetary value, 891
Expected monetary value criterion, 893
Expectation, 161
Assignable causes, 734
Coefficient of determination, 507, 550
Uncertainty, 2
    decision making under introduced, 5, 881
Bernoulli distribution, 170
Composite hypothesis, 360
Computer packages:
    for regression, 581
    for analysis of variance, 710
Binomial distribution:
    using tabulated probabilities for, 175
    tabulated, 931
    normal approximation to, 229
    probability function of, 171
    mean and variance of, 173
    Poisson approximation to, 184
    introduced, 170
    and control charts, 742
    and sign test, 434
    and sample proportion, 256

I. ve II. Tür hatalar
Birikimli dağılım fonksiyonu:
olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilişkisi
tanımı
Birikimli göreli sıklık
Birikimli kütle fonksiyonu
Birikimli olasılık fonksiyonu
Birikimli sıklık
Birinci dereceden ardışık bağlanım modeli:
regresyon hataları için
zaman serileri için
Boş küme
Bowman-Shelton sınaması
Bölünmüş çubuk çizimi
Bölüntü değişkeni
Bölüntüler
Bütün kareler toplamı
Bütünü kapsayıcı olaylar

Census X-11

Çan biçimli eğri
Çarpıklık (katsayısı)
Çarpma modeli
Çebişev kuralı
Çevrimsel bileşen
Çizim ölçeği karşılaştırmaları
Çoklu doğrusallık
Çoklu korelasyon
Çok gözlemli değerler
Çoklu regresyon modeli
Çubuk çizimleri

Dağılımdan bağımsız sınamalar
Dal-yaprak gösterimleri
Değişen varyans
Denetim altında
Denetim çizgesi sabitleri
Denetim çizgeleri
aralıklar için
gerçekleşme sayıları için
oranlar için
ortalamalar için

Types I and II errors, 362
Cumulative distribution function:
relation to probability density function, 196
defined, 195
Cumulative relative frequency, 36
Cumulative mass function, 144
Cumulative probability function, 143
Cumulative frequency, 33
First order autoregressive model:
for regression errors, 645
for time series, 801
Empty set, 84
Bowman-Shelton test, 462
Component bar chart, 59
Blocking variable, 691
Blocks, 691
Total sum of squares, 507, 551
Collectively exhaustive events, 85

Census X-11, 791

Bell-shaped curve, 211
Skewness, 51, 461
Multiplicative model,782
Tchebychev's rule, 22
Cyclical component, 777
Graphical size comparisons, 70
Multicollinearity, 628
Multiple correlation, 554
Multiple observation values, 41
Multiple regression model, 535
Bar charts, 59

Distribution-free tests, 431
Stem-and-leaf diagrams, 39
Heteroscedasticity, 637
In control, 734
Control chart constants, 728
Control charts:
for ranges, 756
for numbers of occurences, 746
for proportions, 741
for means, 729, 755

standart sapmalar için
tanıtımı
Denetim çizgelerinde genel eğilim
Denetim eşikleri
Deney sonuçları
Deney tasarımı
Dizilim sınaması
çizelgesi
Doğa durumları
Doğal hoşgörü
Doğal değişkenlik

Doğrusal en iyi sapmasız tahmin edici
Doğrusal ilişki:
ve korelasyon
ve regresyon
Doğrusal olmayan modeller
Doğrusal regresyon modeli
Doğum günü problemi
Dördebölenler
sayı kümesinde
sınıflı serilerde
Dördebölenler aralığı
sınıflanmış verilerde
sayı kümelerinde
Durbin *h* sınaması
Durbin-Watson sınaması
çizelgesi
Duyarlılık çözümlemesi
Duygusal söylemler
Düzeltilmiş belirlilik katsayısı
Düzensiz bileşen
Düzleme sabiti

En etkin tahmin edici
En küçük karelerle tahmin
En küçük varyanslı sapmasız tahmin edici
En sık değer
En sık değer sınıfı
En uygun dağıtım
En yüksek olabilirlik yöntemi
Endeks sayısı sorunu
Endeks sayıları

for standard deviations, 732
introduced, 725
Trends in control charts, 736
Control limits, 725, 731
Outcomes of experiment, 82
Design of experiments, 628
Runs test, 773
table for, 948
States of nature, 882
Natural tolerance, 739
Natural variability, 748

Best linear unbiased estimator, 504, 548
Linear association:
and correlation, 477
and regression, 494
Nonlinear models, 621
Linear regression model, 493
Birthday problem, 112
Quartiles,
for set of numbers, 28
for grouped data, 46
Interquartile range:
for grouped data, 46
for set of numbers, 28
Durbin's *h*-test, 657
Durbin-Watson test, 647
tables for, 946
Sensitivity analysis, 897
Emotive statements, 67
Corrected coefficient of determination, 502
Irregular component, 777
Smoothing constant, 797

Most efficient estimator, 290
Least squares estimation, 498, 543
Minimum variance unbiased estimator, 290
Mode, 15
Modal class, 50
Optimal allocation, 855
Maximum likelihood method, 275
Index number problem, 764
Index numbers, 762

Endeks sayıları için temel
Eşlenik çiftler
Etkileşim
Etkinlik
    ve regresyon
Evrilen genel eğilim
Eylemler

F dağılımı
    çizelgesi
Faktöryeller
Fayda
Fayda fonksiyonu
Fiyat endeksi:
    tartılı toplam
    tartısız toplam
    tek kalem
Gauss-Markov teoremi
Gecikmeli bağımlı değişkenler
    ve ardışık bağımlı hatalar
Geleceği kestirim:
    ardışık bağlanımlı bütünleşik hareketli ortalama modelleriyle
    ardışık bağlanımlı modellerle
    basit üstel düzlemeyle
    Holt-Winters yöntemiyle
    regresyon modelleriyle
    tanıtımı
Geliş süreçleri
Genel eğilim bileşeni
Genel ortalama
Gölge değişkenler
Göreli etkinlik
Göreli sıklık
Güç:
    ölçümü
    tanıtımı
Güncelleştirme düzeneği
Güven aralığı:
    anakütle oranı için
    anakütle ortalaması için
    anakütle varyansı için
    basit rassal örneklemeden

Base for index numbers, 765
Matched pairs, 333, 393, 437, 486, 671
Interaction, 703
Efficiency, 288
    and regression, 504, 548
Evolving trend, 782
Actions, 882

F distribution, 409
    tabulated, 942
Factorials, 100
Utility, 921
Utility function, 922
Price index:
    weighted aggregate, 767
    unweighted aggregate, 766
    single item, 764
Gauss-Markov theorem, 504, 547
Lagged dependent variables, 608
    and autocorrelated errors, 657
Forecasting:
    from autoregressive integrated moving average models, 820
    from autoregressive models, 813
    through simple exponential smoothing, 796
    through Holt-Winters method, 800
    from regression models, 518, 573
    introduced, 5, 762
Arrival process, 183
Trend component, 777
Overall mean, 706
Dummy variables, 604
Relative efficiency, 289
Relative frequency, 34
Power:
    measurement of, 413
    introduced, 362
Updating mechanism, 800
Confidence interval:
    for population proportion, 322
    for population mean, 301, 315
    for population variance, 325
    from simple random sampling, 839

katmanlı örneklemeden
kümeli örneklemeden
oranlar arasındaki fark için
ortalamalar arasındaki fark için
regresyon katsayıları için
regresyon kestirimleri için
tanımı
ve örneklem büyüklüğü
Güven düzeyi

Hakça bahisler
Hareketli ortalamalar
ve mevsime göre düzeltme
Hareketli Laspeyres fiyat endeksi
Hata kareleri toplamı
Hata varyansımn tahmin edilmesi
Hipergeometrik dağılım:
olasılık fonksiyonu
ortalaması ile varyansı
tanıtımı
Histogram
Hizmet süreleri
Holt-Winters yöntemi
mevsimlik seriler için

İki aşamalı örnekleme
İki değişkenli olasılıklar
İki yanlı karşı önsav
İki yönlü varyans çözümlemesi:
her gözde bir gözlem
her gözde birden çok gözlem

İkinci dereceden ardışık bağlanım modeli
İkinci dereceden bağımlılık
İlişkiler
İstatistik
İstatistik bakımından bağımsız olaylar
İstatistik bakımından bağımsız rassal değişkenler
ve ortak varyans
İstatistikle karar verme kuramı
İstatistikle süreç denetimi
İstatistikle kalite denetimi

from stratified sampling, 847
from cluster sampling, 866
for difference between proportions, 342
for difference between means, 332
for regression coefficients, 515, 559
for predictions from regression, 519
defined, 300
and sample size, 348
Level of confidence, 300

Fair bets, 93
Moving averages, 783
and seasonal adjustment, 785
Moving Laspeyres price index, 768
Error sum of squares, 507, 551
Error variance estimation, 513, 552
Hypergeometric distribution:
probability function of, 179
mean and variance, 179
introduced, 179
Histogram, 33
Service times, 234
Holt-Winters method, 800
for seasonal series, 804

Two-phase sampling, 871
Bivariate probabilities, 118
Two-sided alternative, 361
Two-way analysis of variance:
one observation per cell, 690
more than one observation per cell, 702

Second order autoregressive model, 814
Quadratic dependence, 622
Relationships, 4
Statistic, 246, 283
Statistically independent events, 110
Statistically independent random variables, 162, 205
and covariance, 163, 206
Statistical decision theory, 881
Statistical process control, 723
Statistical quality control, 723

İstatistikle yalan söyleme
İşaret sınaması
İyimserlik ölçütü

Kabul edilebilir eylem
Kabul edilemez eylem
Kabul edilemez tahmin edici
Kabul örneklemesi
Kalıntılar
Kalite denetimi
Kalite takımları (çemberleri)
Kamuoyu yoklamaları
Karar ağacı
    ve örneklem bilgisinin değeri
Karar dizisi
Karar verme
    ve örneklem bilgisi
Kareler toplamının ayrıştırılması

Karşı önsav
Katmanlar
    arası dağıtım
Katmanlara dağıtım
Katmanlı örnekleme
    ve örneklem büyüklüğü
Katsayı tahmini
Katsayısal olmayan sınamalar
Kavuşmazda en iyi normal tahmin edici
Kenar olasılığı (marjinal olasılık)
Kesikli rassal değişken:
    beklentisi
    doğrusal fonksiyonu
    olasılık dağılımları
    ortalaması
    standart sapması
    tanımı
    varyansı
Kestirim:
    çoklu regresyon ile
    doğrusal regresyon ile
Kısmi korelasyon
Kısmi regresyon katsayıları

Lying with statistics, 67
Sign test, 432
Criterion of optimism, 890

Admissible action, 884
Inadmissible action, 884
Inadmissible estimator, 294
Acceptance sampling, 175
Residuals, 506, 549
Quality control, 723
Quality circles, 748
Opinion surveys, 352
Decision tree, 893
    and value of sample information, 909
Sequence of decisions, 895
Decision making, 5, 881
    and sample information, 899
Sums of squares decomposition, 507, 551, 676, 695, 707
Alternative hypothesis, 360
Strata, 846
    allocation among, 854
Allocation among strata, 845
Stratified sampling, 861
    and sample size, 603
Coefficient estimation, 603
Nonparametric tests, 431, 487, 684, 773
Best asymptotic normal estimator, 294
Marginal probability, 120
Discrete random variable:
    expectation of, 146
    linear function of, 150
    probability distributions for, 141
    mean of, 147
    standard deviation of, 149
    defined, 139
    variance of, 149
Prediction:
    from multiple regression, 594
    from linear regression, 519
Partial correlation, 553
Partial regression coefficients, 537

Ki-kare dağılımı:
çizelge olasılıklarının kullanılması
çizelgesi
tanıtımı
ve merkezi limit teoremi
ve çapraz çizelgeler
ve örneklem varyansının örnekleme dağılımı
ve uyumun iyiliği sınamaları
Kombinasyonlar
Korelasyon(u):
anakütle için
örneklem
sınanması
sıra
ve belirlilik katsayısı
ve ortak varyans
Koşullu olasılık
Koşullu olasılık fonksiyonu
Kotalı örnekleme
Kötümserlik ölçütü
Kruskal-Wallis sınaması
Kutu çizimi
Kuyruk oluşturma
Kümeli örnekleme

Laspeyres fiyat endeksi
Laspeyres miktar endeksi
Log doğrusal model

Mann-Whitney sınaması
Marjinal dağılım fonksiyonu
Marjinal olasılık
Marjinal olasılık fonksiyonu
Maximax ölçütü
Maximin ölçütü
Merkezi eğilim
Merkezi limit teoremi
ve binom ve Poisson dağılımlarının normal dağılım yakınsaması
ve güven aralıkları
ve örneklem oranının dağılımı
ve örneklem ortalamasının dağılımı

Chi-square distribution:
using tabulated probabilities of, 270
tabulated, 940
introduced, 268
and central limit theorem, 227
and contingency tables, 465
and sampling distribution of sample variance, 267
and goodness of fit tests, 459
Combinations, 104
Correlation:
for population, 478
sample, 482
testing for, 483
of ranks, 487
and coefficient of determination, 507
and covariance, 478
Conditional probability, 107
Conditional probabilitiy function, 158
Quota sampling, 874
Criterion of pessimism, 887
Kruskal-Wallis test, 684
Box-and-whisker plots, 64
Queuing, 183, 234
Cluster sampling, 865

Laspeyres price index, 767
Laspeyres quantity index, 769
Log linear model, 622

Mann-Whitney test, 442
Marginal distribution function, 205
Marginal probability, 120
Marginal probability function, 157
Maximax criterion, 890
Maximin criterion, 885
Central tendency, 9
Central limit theorem, 225
and normal approximation to binomial and Poisson distributions, 228
and confidence intervals, 310
and distribution of sample proportion, 256
and distribution of sample mean, 251

ve sıfır önsavlarının sınanması
Mevsim bileşeni
bulunması
Mevsim endeksi yöntemi
Mevsime göre düzeltme
Mevsimsellik
Miktar endeksi
Minimax pişmanlık ölçütü
MINITAB programı
Modelin doğrulanması
Model kurma
Model kurma sapması
Modelin kurulması

Nicel bilgi
Nokta tahmin edicisi:
etkinliği
sapmasızlığı
seçimi
tanımı
Nokta tahmini
Normal dağılım:
binom dağılımının yakınsaması olarak
birikimli dağılım fonksiyonu
çizelgesi
olasılık yoğunluk fonksiyonu
olasılık aralığı
ortalaması ile varyansı
Poisson dağılımının yakınsaması olarak
sınanması
standart
tanıtımı
ve merkezi limit teoremi
ve örneklem ortalamasının dağılımı
ve parmak hesabı
Normal denklemler

Olasılığın göreli sıklık kavramı
Olasılık:
anlamı
ardıl
çarpılması kuralı

and hypothesis tests, 368
Seasonality component, 777
extraction of, 785
Seasonal index method, 788
Seasonal adjustment, 780, 785
Seasonality, 779
Quantity index, 768
Minimax regret criterion, 887
MINITAB program, 582
Model verification, 603
Model building, 601
Specification bias, 625
Model specification, 602

Quantitative information, 1
Point estimator:
efficiency of, 288
unbiasedness of, 287
choice of, 290
defined, 284
Point estimate, 284
Normal distribution:
as approximation to binomial distribution, 229
cumulative distribution function of, 214
tables for, 937
probability density function of, 211
range probabilities for, 215, 217
mean and variance of, 212
as approximation to Poison distribution, 231
test for, 461
standard, 216
introduced, 211
and central limit theorem, 225
and distribution of sample mean, 254
and rule of thumb, 23
Normal equations, 596

Relative frequency concept of probability, 91
Probability:
meaning of, 91
posterior, 125, 189
multiplication rule of, 108

göreli sıklık kavramı
iki değişkenli
koşullu
marjinal
ortak
önermeleri
önsel
öznel
tanıtımı
toplama kuralı
Olasılık yoğunluk fonksiyonu
Olasılık dağılımları:
kesikli rassal değişkenler için
sürekli rassal değişkenler için
Olasılık değeri
Olasılık fonksiyonu
Olasılık kütle fonksiyonu
Olasılıkların çarpılması kuralı
Olasılıkların toplanması kuralı
Olasılıklı olmayan örnekleme yöntemleri
Olasılıklı örnekleme
Olay
Olayın bütünleyicisi
olasılığı
tanımı
Olayların birleşimi:
olasılığı
tanımı
Olayların etkileşimi:
tanımı
olasılığı
Olayın gerçekleşmesi
Çapraz çizelgeler
Oranlı dağıtımı
Orta çizgi
Ortak birikimli dağılım fonksiyonu
Ortak birikimli olasılık fonksiyonu
Ortak dağılımlı rassal değişkenler
Ortak olasılık
Ortak olasılık fonksiyonu
Ortak varyans:
tanımı:
kesikli rassal değişkenler için

relative frequency concept of, 91
bivariate, 118
conditional, 107
marginal, 120
joint, 120
postulates of, 94
prior, 125, 899
subjective, 92
introduced, 3, 81
addition rule of, 106
Probability density function, 196
Probability distributions:
for discrete random variables, 141
for continuous random variables, 194
Probability value, 370
Probability function, 141
Probability mass function, 141
Multiplication rule of probabilities, 108
Addition rule of probabilities, 106
Nonprobabilistic sampling methods, 874
Probability sampling, 836
Event, 82
Complement of event:
probabilitiy of, 105
defined, 86
Union of events:
probability of, 106
defined, 85
Interaction of events:
defined, 74
probability of, 107
Occurrence of event, 83
Contingency tables, 464
Proportional allocation, 854, 863
Central line, 731
Joint cumulative distribution function, 205
Joint cumulative probability function, 161
Jointly distributed random variables, 156, 205
Joint probability, 120
Joint probability function, 156
Covariance:
defined:
for discrete random variables, 161

sürekli rassal değişkenler için
ve istatistik bakımından bağımsızlık
ve korelasyon
Ortalama(sı) (Aritmetik ortalama):
kesikli rassal değişkenin
sayı kümesinin
sınıflanmış verilerde
sürekli rassal değişkenin
ve merkezi limit teoremi
Ortalama hata karesi
Ortalama kareler
Ortalama mutlak sapma
Ortalama örneklem standart sapması
Ortalanmış hareketli ortalama
Ortalanmış hoşgörü aralığı
Ortanca(sı):
göreli etkinliği
gruplanmış verilerde
sayı kümesinin
Ortaya atılan önsav

Öbek verisi
Öbekler arası değişkenlik
Öbeklenmiş verilerde sınıflar
Öbekler içi değişkenlik
Ödül çizelgesi
Ödüller
Ölçek
Ölçme eşikleri
Önsav sınamaları(nın):
anakütle ortalaması için
anakütle oranı için
anakütle varyansı için
ardışık bağımlı hatalar için
değişen varyans için
gücünü ölçmek
iki yönlü varyans çözümlemesinde
karar kuralları
katsayısal olmayan
kavramlar
korelasyon için
normallik için
çapraz çizelgeler için

for continuous random variables, 205
and statistical independence, 163
and corelation, 498
Mean:
of discrete random variable, 147
of set of numbers, 9
for grouped data, 42
of continuous random variable, 201
and central limit theorem, 225
Mean squared error, 293
Mean squares, 678
Mean absolute deviation, 25
Average sample standart deviation, 727
Centered moving average, 783
Centered performance interval, 739
Median:
relative efficiency of, 289
for grouped data, 44
of set of numbers, 13
Maintained hypothesis, 350

Categorical data, 431
Between-groups variability, 676
Classes for grouped data, 33
Within-groups variability, 676
Payoff table, 883
Payoffs, 883
Scale, 68
Specification limits, 738
Hypothesis tests:
for population mean, 366, 377
for population proportion, 388
for population variance, 384
for autocorrelated errors, 647, 657
for heteroscedasticity, 641
measuring power of, 413
in two-way analysis of variance, 695, 707
decision rules for, 362
nonparametric, 431
concepts, 362
for correlation, 483
for normality, 461
for contingency tables, 465

oranlar arasındaki fark için
ortalamalar arasındaki fark için
rassallık için
regresyonda
tek yönlü varyans çözümlemesinde
uyumun iyiliği için
varyansların eşitliği için
Önsavın reddedilmesi
Önsavlar
Önsavların kabulü
Önsel olasılık
ve karar verme
Örneklem:
rassal
tanımı
tanıtımı
Örneklem bilgisinin beklenen değeri
Örneklem bilgisinin beklenen net değeri
Örneklem bilgisinin değeri
Örneklem büyüklüğünün tahmin edilmesi
Örneklem çoklu regresyonu
Örneklem korelasyon katsayısı
Örneklem oranı:
etkin tahmin edici olarak
örnekleme dağılımı
sapmasız tahmin edici olarak
tanımı
Örneklem ortalaması:
etkin tahmin edici olarak
örnekleme dağılımı
sapmasız tahmin edici olarak
tanımı
Örneklem regresyon doğrusu
Örneklem standart sapması
Örneklem varyansı:
etkin tahmin edici olarak
örnekleme dağılımı
sapmasız tahmin edici olarak
tanımı
Örneklem uzayı
Örnekleme(si):
basit rassal
iadeli

for difference between proportions, 403
for difference between means, 393
for randomness, 773
in regression, 516, 560, 567
in one-way analysis of variance, 679
for goodness of fit, 455
for equality of variances, 409, 486
Rejection of hypothesis, 362
Hypothesis, 360
Acceptance of hypothesis, 362
Prior probability, 125
and decision making, 899
Sample:
random, 244
defined, 3, 7
introduced, 243
Expected value of sample information, 907
Expected net value of sample information, 907
Value of sample information, 904
Sample size estimation, 348, 859
Sample multiple regression, 545
Sample correlation coefficient, 478
Sample proportion:
as efficient estimator, 290
sampling distribution of, 255
as unbiased estimator, 287
defined, 255
Sample mean:
as efficient estimator, 290
sampling distribution of, 248
as unbiased estimator, 287
defined, 12, 248
Sample regression line, 500
Sample standard deviation, 23, 267
Sample variance:
as efficient estimator, 290
sampling distribution of, 266
as unbiased estimator, 287
defined, 23, 267
Sample space, 82
Sampling:
simple random, 224, 836
with replacement, 837

iadesiz
iki aşamalı
kabul
katmanlı
kotalı
kümeli
olasılıklı
sıralı (sistematik)
Örnekleme dağılımı:
örneklem oranının
örneklem ortalamasının
örneklem varyansının
tanıtımı
Örnekleme dışı hata
Örnekleme hatası
Özellikler
Öznel olasılık

p-değeri
Parmak hesabı
Pareto çizimi
Pasta çizimleri
Permütasyonlar
Pişmanlık çizelgesi
Poisson dağılımı:
binom dağılımının yakınsaması olarak
normal dağılıma yakınsaması
olasılık fonksiyonu
ortalaması ile varyansı
tanıtımı
uyumun iyiliği sınaması
ve denetim çizgeleri
ve üstel dağılım

Rassal bölüntüler
Rassal değişkenler:
bağımsız
doğrusal fonksiyonu
farkları
kesikli
ortak dağılmış
sürekli

without replacement, 837
two-phase, 871
acceptance, 175
stratified, 845
quota, 874
cluster, 865
probability, 836
systematic, 837
Sampling distribution:
of sample proportion, 255
of sample mean, 248
of sample variance, 267
introduced, 246
Nonsampling error, 834
Sampling error, 833
Attributes, 123
Subjective probability, 93

p-value, 370
Rule of thumb, 23
Pareto diagram, 745
Pie charts, 62
Permutations, 102
Regret table, 887
Poisson distribution:
as approximation to binomial distribution, 184
normal approximation to, 231
probability function of, 181
mean and variance of, 181
introduced, 180
goodness of fit test for, 460
and control charts, 746
and exponential distribution, 236

Randomized blocks, 691
Random variables,:
independent, 160, 205
linear function of, 150, 203
differences of, 164, 206
discrete, 140
jointli distributed, 156, 205
continuous, 193

toplamları — sums of, 164, 206
Rassal değişkenlerin doğrusal fonksiyonu — Linear function of random variables, 150, 233
Rassal deneme — Random experiment, 82
Rassal örneklem — Random sample, 244
Rassal sayılar: — Random numbers:
çizelgesi — tabulated, 939
çizelgenin kullanımı — use of tables, 836
tanıtımı — introduced, 244
Rassallaştırılmış yanıt — Randomized response, 90, 109
Rassallık: — Randomness:
ilkesi — principle of, 244
sınaması — test for, 773
Rastlantılar — Coincidences, 72
Regresyon: — Regression:
açıklama gücü — explanatory power of, 505, 548
bilgisayar program paketleri — computer packages for, 581
çoklu doğrusallık — multicollinearity in, 628
çoklu model — multiple model, 535
doğrusal olmayan modeller — nonlinear models in, 621
doğrusal model — linear model, 493
gölge değişkenler — dummy variables in, 604
güven aralıkları — confidence intervals for, 515, 559
ile kestirim — prediction from, 518, 573
model kurma hataları — specification bias in, 625
önsav sınamaları — hypothesis tests for, 516, 560, 567
tahmin edilmesi — estimation, 498, 543
varsayımları — assumptions, 503, 546
ve ardışık bağımlı hatalar — and autocorrelated errors, 643
ve değişen varyans — and heteroscedasticity, 637
ve gecikmeli bağımlı değişkenler — and lagged dependent variables, 608, 657
Regresyon doğrusunun eğimi — Slope of regression line, 496
Regresyon kareleri toplamı — Regression sum of squares, 507, 551
Regresyonda bağımlılık — Dependence in regression, 495
Regresyonda hata terimi — Error term in regression, 497
Regresyonun standart varsayımları — Standard assumptions for regression, 503, 546
Risk — Risk, 22, 920
Risk sevme — Preference for risk, 920, 924
Riske karşı kayıtsızlık — Indifference to risk, 925
Riskten kaçınma — Aversion to risk, 920, 923

Sapma — Bias, 288
Sapmasız tahmin etme — Unbiased estimation, 287
Sayım — Census, 828

Sayısal bilgi
Sayısal özet:
    merkezi eğilim
    sınıflanmış verilerde
    yayıklık
Serbestlik derecesi
Serpilme çizimi
Sıklık (frekans)
Sınama düzeyi
Sınıf orta noktası
Sınıflanmış veriler
    sayısal özeti
Sıfır önsavı
Sıra korelasyonu
Sıra numaraları
Sıralama
Sıralı (sistematik) örnekleme
Sonlu anakütle düzeltme çarpanı
Sonuç kümesi
Spearman sıra korelasyonu katsayısı
    çizelgesi
Standart hata
Standart normal dağılım
    çizelgesi
Standart sapma(sı):
    anakütlenin
    kesikli rassal değişkenin
    örneklemin
    sınıflanmış serilerde
    sürekli rassal değişkenin
    yorumu
Statistical Analysis System (SAS)
        programı
Staistical Package for the Social
        Sciences (SPSS)
Student *t* dağılımı
    çizelgesi
Süreç standart sapması
Süreç yeterliliği
Sürekli rassal değişken:
    beklentisi
    doğrusal fonksiyonu
    ortalaması

Numerical information, 1, 7
Numerical summary:
    central tendency, 9
    for grouped data, 41
    dispersion, 16
Degrees of freedom, 269
Scatter plots, 63
Frequency, 33
Level of test, 365
Class marks, 44
Grouped data, 33
    numerical summary of, 41
Null hypothesis, 360
Rank correlation, 487
Ranks, 437
Ordering, 100
Systematic sampling, 837
Finite population correction factor, 250, 256, 839
Set of outcomes, 82
Spearman's rank correlation coefficient, 487
    table for, 844
Standard error, 250
Standard normal distribution, 216
    tabulated, 937
Standard deviation:
    population, 20
    of discrete random variable, 149
    sample, 23
    for grouped data, 45
    of continuous random variable, 202
    interpretation of, 22
Statistical Analysis System (SAS) program, 581

Staistical Package for the Social Sciences (SPSS),
        583
Student's *t* distribution, 311
    tabulated, 941
Process standard deviation, 728
Process capability, 738
Continuous random variable:
    expectation of, 201
    linear function of, 203
    mean of, 202

olasılık dağılımı
standart sapması
tanımı
tanıtılması
varyansı
Süreklilik düzeltmesi

Tahmin
Tahmin edici
Tam bilginin beklenen değeri
Tam bilgi
Tam çoklu doğrusallık
Tartılı ortalama
Tartılı bileşik fiyat endeksi
Tartılı bileşik miktar endeksi
Tartısız bileşik fiyat endeksi
Tek yanlı karşı önsavlar
Tek yönlü varyans çözümlemesi
Temel dönemin değiştirilmesi
Temel sonuçlar
Toplama gösterimi
Toplama modeli
Tutarlı tahmin edici
Tekdüze dağılım
ve merkezi limit teoremi

Uç gözlemler
Uyumun iyiliği sınamaları
bilinmeyen anakütle katsayılarıyla
Uyumsuz birimler
Üst denetim eşiği
Üst (üçüncü) dördebölen
Üst ölçme eşiği
Üstel dağılım
ve Poisson dağılımı
Üstel düzleme:
Holt-Winters yöntemi
basit
Varyans:
anakütlenin
kesikli rassal değişkenin
örneklemin
sınıflanmış serilerde

probability distribution for, 194
standard deviation of, 202
defined, 140
introduced, 193
variance of, 202
Continuity correction, 229

Estimate, 284
Estimator, 284
Expected value of perfect information, 905
Perfect information, 905
Perfect multicollinearity, 629
Weighted average, 784
Weighted agregate price index, 767
Weighted agregate quantity index, 768
Unweighted agregate price index, 765
One-sided alternatives, 561
One-way analysis of variance, 674
Base period change, 770
Basic outcomes, 82
Summation notation, 11
Additive model, 781
Consistent estimator, 294
Uniform distribution, 197
and central limit theorem, 226

Extreme observations, 15
Goodness of fit tests, 453
with unknown parameters, 459
Nonconforming items, 742
Upper control limit, 731
Third quartile, 28
Upper specification limit, 738
Exponential distribution, 234
and Poisson distribution, 236
Exponential smoothing:
Holt-Winters method, 806
simple, 796
Variance:
population, 20
of discrete random variable, 149
sample, 23
for grouped data, 41

sürekli rassal değişkenin
Varyans çözümlemesi
için anakütle modeli
iki-yönlü:
her gözde bir gözlem
her gözde birden çok gözlem
regresyonda
tek yönlü
Venn çizimi

Wilcoxon sınaması
çizelgesi
Yanıltıcı söylemler
Yanıt alamama
Yayıklık
Yeterlilik
Yeterlilik endeksi
Yinelenme
Zaman serisi çizimleri
ölçeği
Zaman serileri:
bileşenleri
mevsime göre düzeltme
tanıtımı
Zaman serilerinde ardışık bağımlılık
Zaman serisi modelleri
Zaman serisinin bileşenleri

of continuous random variable, 202
Analysis of variance:
population model for, 683
two-way:
one observation per cell, 690
more than one observation per cell, 702
for regression, 570
one-way, 674
Venn diagram, 85

Wilcoxon test, 437
table for, 944
Loaded statements, 67
Nonresponse, 834
Dispersion, 16
Capability, 738
Capability index, 739
Replication, 702
Time plots, 61
scale for, 68
Time series:
components of, 777
seasonal adjustment of, 780, 785
introduced, 761
Autocorrelation in time series, 813
Models for time series, 813
Components of time series, 777