

Prof. Dr. Mustafa BALCI
Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

Ç Ö Z Ü M L Ü
M A T E M A T İ K

ANALİZ

Problemleri

1

balcı Yayınları

İÇİNDEKİLER

1	KÜMELER VE SAYILAR	
	Kümeler	1
	Tümevarım Yöntemi	3
	Problemler	3
	Çözümler	9
	Problemler	33
	Çözümler	35
	Bölüm Problemleri	44
	Çözümler	46
2	FONKSİYONLAR	
	Gerekli Bilgiler	51
	Problemler	54
	Çözümler	57
	Trigonometrik, Üstel, Logaritmik ve Hiperbolik Fonksiyonlar	70
	Problemler	71
	Çözümler	73
	Bölüm Problemleri	82
	Çözümler	88
3	LİMİT	
	Diziler	92
	Problemler	96
	Çözümler	98
	Bir Fonksiyonun Limiti	107
	Problemler	108
	Çözümler	110
	Bölüm Problemleri	118
	Bölüm Probleminin Çözümleri	120
4	SÜREKLİLİK	
	Sürekli Fonksiyonlar	124
	Sürekli Fonksiyonların Özellikleri	125
	Problemler	127
	Çözümler	129
	Bölüm Problemleri	136
	Çözümler	137
5	TÜREV	
	Türev Alma Kuralları	141
	Problemler	143
	Çözümler	148
	Türevin Uygulamaları	164
	Türevle İlgili Teoremler	164

Problemler	167
Çözümler	172
Belirsiz Şekiller	195
Problemler	196
Çözümler	198
Problemler	214
Çözümler	215
Bölüm Problemleri	229
Çözümler	231

6 BELİRSİZ İNTEGRALLER

Problemler	235
Çözümler	235
Problemler	237
Çözümler	237
Problemler	241
Çözümler	242
Problemler	247
Çözümler	248
Problemler	257
Çözümler	258
Problemler	264
Çözümler	265
Bölüm Problemleri	273
Çözümler	275

7 BELİRLİ İNTEGRALLER

Problemler	304
Çözümler	308
Bölüm Problemleri	329
Çözümler	331

8 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

Alan Hesabı	338
Problemler	338
Çözümler	341
Yay Uzunluğu Hesabı	353
Problemler	353
Çözümler	355
Hacim Hesabı	358
Problemler	359
Çözümler	361
Dönel Yüzeylerin Alanı	375
Problemler	375
Çözümler	377
Bölüm Problemleri	383
Çözümleri	386

KÜMELER

Bu bölümle ilgili temel bilgiler aşağıda özetlenmiştir. Problemlerin çözümüne geçmeden önce bu kısmı okumanız tavsiye olunur.

TANIM

Eğer bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B nin bir **alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir, yani

$$A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B].$$

Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin **eşitliği**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

şeklinde tanımlanır. Eğer A kümesinin en az bir elemanı B de değilse veya B in en az bir elemanı A da değilse A ile B **farklıdır** denir, $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin **birleşimi** denir. $A \cup B$ ile gösterilir. Buna göre,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dir.

TANIM

A ve B kümelerinin ortak elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B kümelerinin **arakesiti** veya **kesişimi** denir, $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}.$$

TANIM

$A \cap B = \emptyset$ ise A ile B kümeleri **ayrıktır** denir.

TANIM

A kümesinde olup da B de bulunmayan elemanların kümesine B nin A kümesine göre tümleyeni denir, $A \setminus B$ ile gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin **simetrik farkı**, kümelerden birine ait olup da diğerine ait olmayan elemanların kümesidir.

Buna göre,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

dır.

TANIM

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. $\emptyset$ sembolü ile gösterilir.

TANIM

Bir A kümesinin E evrensel kümesine göre tümleyeni A kümesinin **tümleyeni** denir. A^t ile gösterilir. Buna göre

$$A^t = \{ x : x \notin A \}$$

dir.

TEOREM

(De Morgan Kuralları)

A ve B herhangi iki küme olsun.

$$(a) (A \cup B)^t = A^t \cap B^t$$

$$(b) (A \cap B)^t = A^t \cup B^t$$

dır.

TANIM

A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı**, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm sıralı (a, b) ikililerinin kümesidir. Buna göre,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B \}$$

dir.

TÜMEVARIM YÖNTEMİ

Doğal sayılarla ilgili önermelerin doğruluğunu göstermeye yarayan ispat metodlarından biri de tümevarım metodudur. Bu metod aşağıdaki basit teoreme dayanır.

TEOREM

$D \subset \mathbf{N}$ olsun. D kümesi

(a) $1 \in D$

(b) $k \in D \Rightarrow (k + 1) \in D$

şartlarını gerçeklerse $D = \mathbf{N}$ dir.

SONUÇ

$P(n)$ doğal sayılarla ilgili bir önerme ve D de bu önermenin doğruluk değerleri kümesi, yani

$$D = \{ n : n \in \mathbf{N} \text{ ve } P(n) \text{ doğru} \}$$

olsun. Eğer

(a) $1 \in D$

ve

(b) $k \in D$ olduğunda $(k + 1) \in D$

ise $D = \mathbf{N}$ dir, yani $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbf{N}$ için doğrudur.

PROBLEMLER

1. A , B ve C herhangi üç küme olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \setminus A = \emptyset$

(b) $A \setminus \emptyset = A$

(c) $A \Delta \emptyset = A$

(d) $A \cup B = B \cup A$

(e) $A \cap B = B \cap A$

(f) $A \Delta B = B \Delta A$

(g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

(i) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(j) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(l) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(m) $A^t \setminus B^t = B \setminus A$

(n) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(o) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(p) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- (b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
- (c) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
- (d) $A \Delta B = E \Leftrightarrow A = B^t$
- (e) $A \subset B \Leftrightarrow A^t \supset B^t$
- (f) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^t$
- (g) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
- (h) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$
- (i) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$
- (j) $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t \Leftrightarrow A = B$

3. a ve b pozitif iki sayı olsun.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

olduğunu gösteriniz.

4. n bir tamsayı olmak üzere, $P = 2n$ şeklinde yazılabilen p sayısına **çift sayı** denir. $q + 1$ çift olduğunda q sayısına **tek sayı** adı verilir. Buna göre tek sayılar $2n-1$ şeklinde yazılabilen sayılardır. İspat ediniz ki eğer a bir tek sayı ise n^2-1 sayısı 8 ile bölünür.

5. Eğer her pozitif h için $0 \leq x < h$ ise $x = 0$ dır, ispatlayınız.

6. İspat ediniz ki

(a) Her bir x reel sayısı için $n > x$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı vardır.

(b) $x > 0$ ise $\frac{1}{n} < x$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı vardır.

7. a, b ve x reel sayılar olsun. Her bir n doğal sayısı için

$$a \leq x < a + \frac{b}{n}$$

ise $x = a$ dır, gösteriniz.

8. a ve b , $a < b$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun.

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

olduğunu gösteriniz.

9. x ve y , $x < y$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun. $x < z < y$ olacak şekilde en az bir z reel sayısının varlığını gösteriniz. Bu özellikten yararlanarak, “Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz çoklukta reel sayı vardır” diyebilir miyiz?

10. x rasyonel, $x \neq 0$ ve y irrasyonel olsun. $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, x / y ve y / x sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

11. İki irrasyonel sayının toplamı ve çarpımı daima irrasyonel midir?

12. “Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{8} (2n + 1)^2$ dir” önermesini $p(n)$ ile gösterelim.

(a) Herhangi bir k doğal sayısı için $p(k)$ doğru olduğunda $p(k + 1)$ de doğrudur, gösteriniz.

(b) “Tümevarım metodu gereğince $p(n)$ önermesi her n doğal sayısı için doğrudur” diyebilir miyiz?

13. Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1) (2n + 1)$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

(d) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n (2n - 1) (2n + 1)$

(f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n (n + 1) (2n + 1)$

(g) $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (n + 1) 2^{n-1} = n \cdot 2^n$

$$(h) 1.4 + 2.9 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

$$(i) 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$(j) 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(k) 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

$$(l) a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$(m) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(n) \frac{1^2}{1.2} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$(o) \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{1}{(p+n-1)(p+n)} = \frac{n}{p(p+n)}, \quad (p \in \mathbb{R}^+)$$

$$(p) 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad (a \neq 1)$$

$$14. x \neq 1 \text{ için } \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$15. x \neq 1 \text{ için } \sum_{k=1}^n \frac{x^{2^k - 1}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^{2^n}} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$16. \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$17. \text{ Her } n \text{ doğal sayısı için } \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$18. 0 < p < 1 \text{ için } (1 - p)^n \geq 1 - np \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$19. \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ ve } \alpha_n \geq 0 \text{ için}$$

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \geq 1 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

20. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha_n < 1$ için

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n) \geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

21. Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $(2n)! \leq 2^{2n} (n!)^2$

(b) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

(c) $3^n \geq n \cdot 2^n$

(d) $2! \cdot 4! \dots (2n)! \geq [(n+1)!]^n$

22. Her $n \in \mathbb{N}_2$ için

$$3^n + 4^n \leq 5^n$$

olduğunu gösteriniz.

23. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

(a) $n(2n+1)(7n+1)$ sayısının 6 ile

(b) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile

(c) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ sayısının 7 ile

(d) $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ sayısının 17 ile

(e) $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$ sayısının 5 ile

(f) $12^n + 10$ sayısının 11 ile

bölünebileceğini gösteriniz.

24. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ifadesini sadeleştirerek sonucu bulunuz. Bulduğunuz sonucu tümevarımla ispatlayınız.

25. n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

26. $p \geq 0$ ve $n \in N_0$ için

$$(1 + p)^n \geq 1 + np + \frac{n(n-1)}{2} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

27. $0 < p < 1$ ve her $n \in N_0$ için

$$(1 - p)^n \leq 1 - np + \frac{n(n-1)}{2} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

28. $p > 0$ ve $n \in N_2$ için

$$(1 + p)^n \geq 1 + np + \frac{n^2}{4} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

29. Her $n \in N$ için

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz (Yol gösterme : $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$ özdeşliğinden x^n nin katsayılarını karşılaştırınız).

30. Her $n \in N$ için

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \dots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

olduğunu ispatlayınız (Yol gösterme: $(1 + x)^{2n} (1 - x)^{2n} = (1 - x^2)^{2n}$ özdeşliğinden yararlanınız).

ÇÖZÜMLER

$$(a) \quad x \in A \setminus A \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin A \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in A^t \Rightarrow x \in A \cap A^t = \emptyset \\ \Rightarrow A \setminus A \subset \emptyset \quad (1)$$

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cap A^t \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in A^t \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin A \\ \Rightarrow x \in A \setminus A \Rightarrow \emptyset \subset A \setminus A \quad (2)$$

(1) ve (2) den $A \setminus A = \emptyset$ bulunur.

$$(b) \quad x \in A \setminus \emptyset \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in \emptyset^t = E \\ \Rightarrow x \in A \cap E \Rightarrow x \in A \\ \Rightarrow A \setminus \emptyset \subset A \quad (3)$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap E \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in E \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin E^t \\ \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A \setminus \emptyset \Rightarrow A \subset A \setminus \emptyset \quad (4)$$

(3) ve (4)'den $A \setminus \emptyset = A$ bulunur.

$$(c) \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad B = \emptyset \text{ alınırsa}$$

$$A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$$

$$(d) \quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ veya } x \in B \Leftrightarrow x \in B \text{ veya } x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$$

$$(e) \quad x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \Leftrightarrow x \in B \text{ ve } x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$$

$$(f) \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) \\ = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$$

$$(g) \quad x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C) \\ \Rightarrow x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C) \\ \Rightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C \\ \Rightarrow A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C \quad (5)$$

$$x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C \\ \Rightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \quad (6)$$

$$(5) \text{ ve } (6) \text{ dan } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$(j) \quad x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (7)$$

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in B \text{ ve } x \in A \text{ veya } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad (8)$$

$$(7) \text{ ve } (8) \text{ den } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(k) \quad x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (9)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \text{ veya } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \cup C$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (10)$$

$$(9) \text{ ve } (10) \text{ dan } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ bulunur.}$$

$$(l) \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin (B \cap C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in (B \cap C)^t \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in (B^t \cup C^t) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin B \text{ veya } x \notin C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \text{ veya } x \in (A \setminus C) \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ &\Rightarrow A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \text{ veya } x \in (A \setminus C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin B \text{ ve } x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin (B \cap C) \\ &\Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C) \\ &\Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C) \end{aligned} \quad (12)$$

(11) ve (12) den $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ olur.

$$(m) \quad A^t \setminus B^t = B \setminus A$$

$$\begin{aligned} x \in A^t \setminus B^t &\Rightarrow x \in A^t \text{ ve } x \notin B^t \Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \text{ ve } x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A \\ &\Rightarrow A^t \setminus B^t \subset B \setminus A \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x \in B \setminus A &\Rightarrow x \in B \text{ ve } x \notin A \Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \in B \\ &\Rightarrow x \in A^t \text{ ve } x \notin B^t \Rightarrow x \in A^t \setminus B^t \\ &\Rightarrow B \setminus A \subset A^t \setminus B^t \end{aligned} \quad (14)$$

(13) ve (14) den eşitlik bulunur.

$$(n) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } y \in C) \text{ veya } (x \in B \text{ ve } y \in C) \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times C \text{ veya } (x, y) \in B \times C \\ &\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \\ &\Rightarrow (A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned} \quad (15)$$

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \text{ veya } (x, y) \in (B \times C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } y \in C) \text{ veya } (x \in B \text{ ve } y \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \text{ ve } y \in C \Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C \\ &\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C \quad (16) \end{aligned}$$

$$(15) \text{ ve } (16) \text{ den } (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(o) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cap B) \times C &\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } y \in C) \text{ ve } (x \in B \text{ ve } y \in C) \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times C \text{ ve } (x, y) \in B \times C \\ &\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \\ &\Rightarrow (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C) &\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \text{ ve } (x, y) \in (B \times C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } y \in C) \text{ ve } (x \in B \text{ ve } y \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } y \in C \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \text{ ve } y \in C \Rightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times C \\ &\Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C \quad (18) \end{aligned}$$

(17) ve (18) den istenilen eşitlik bulunur.

$$2. (a) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

$\Rightarrow : A \cap B = A$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ ise $x \in A \cap B$ dir. Dolayısı ile $x \in B$ elde edilir. Bu durumda $A \subset B$ dir.

$\Leftarrow : A \subset B$ olsun. $A \cap B = A$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cap B$ alalım. Dolayısı ile $x \in A$ dir. Yani $A \cap B \subset A$ olur.

$x \in A$ alalım. $A \subset B$ olduğundan $x \in B$ dir. Dolayısı ile $x \in A \cap B$ elde edilir. Yani $A \subset A \cap B$ olur.

$A \cap B \subset A$ ve $A \subset A \cap B$ olduğundan $A \cap B = A$ dir.

$$(b) A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

$\Rightarrow : A \cup B = B$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ ise $x \in A \cup B$ dolayısı ile hipotezden $x \in B$ olur. Yani $A \subset B$ dir.

$\Leftarrow : A \subset B$ olsun. $A \cup B = B$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cup B$ olsun. $\Rightarrow$

$x \in B$ dir. $A \cup B \subset B$ sağlanır.

$x \in B$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ olup, $B \subset A \cup B$ gerçekleşir. O halde $A \cup B = B$ olur.

(c) $\Rightarrow : A \Delta B = \emptyset$ olsun. $A = B$ olduğunu gösterelim. Bir an için $A \neq B$ olduğunu düşünelim. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$ olur. Bu da hipotez ile çelişir. Yani $A = B$ dir.

$\Leftarrow : A = B$ olsun. $A \Delta B = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

(d) $A \Delta B = E \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = E \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = E$

$$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ ve } A \cup B = E$$

$$\Leftrightarrow A^t = B$$

olur.

(e) $\Rightarrow : A \subset B$ olsun. $A^t \supset B^t$ olduğunu gösterelim. $x \in B^t$ olsun. $\Rightarrow x \notin B$
 $\Rightarrow$ hipotezden $x \notin A \Rightarrow x \in A^t \Rightarrow A^t \supset B^t$.

$\Leftarrow : A^t \supset B^t$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim.

$x \in A$ olsun. $\Rightarrow x \notin A^t$ hipotezden $x \notin B^t$ gerçekleşir.

$\Rightarrow x \in B$ elde edilir. Yani $A \subset B$ gerçekleşir.

(f) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^t$

$\Rightarrow : A \cap B = \emptyset$ olsun. $B \subset A^t$ olduğunu gösterelim.

$x \in B$ olduğunu kabul edelim. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $x \notin A$ olur.

$\Rightarrow x \in A^t$ yani $B \subset A^t$ gerçekleşir.

$\Leftarrow : B \subset A^t$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$x \in B$ olsun. Hipotezden $x \in A^t$ yani $x \notin A$ olur.

Bu durumda $A \cap B = \emptyset$ gerçekleşir.

(g) $\Rightarrow : A \subset C$ ve $B \subset C$ olsun. $A \cup B \subset C$ olduğunu gösterelim.

$x \in A \cup B$ olsun. Bu durumda $x \in A$ veya $x \in B$; $x \in A$ ise

$A \subset C$ olduğundan $x \in C$ gerçekleşir, yani $A \cup B \subset C$ olur.

$x \in B$ ise $B \subset C$ olduğundan $x \in C$ olur.

Yani $A \cup B \subset C$ gerçekleşir.

$\Leftarrow : A \cup B \subset C$ olsun. $A \subset C$ ve $B \subset C$ olduğunu gösterelim.

$x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ dir. Hipotezden $x \in C$ olur.
Yani $A \subset C$ dir.

$x \in B$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ dir. Hipotezden $x \in C$ olur.
Yani $B \subset C$ dir.

(h) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

$\Rightarrow$: $C \subset A$ ve $C \subset B$ olsun. $C \subset A \cap B$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ olsun. $C \subset A$ olduğundan $x \in A$ gerçekleşir. $C \subset B$ olduğundan $x \in B$ dir. Bu durumda $x \in A \cap B$. Yani $C \subset A \cap B$ olur.

$\Leftarrow$: $C \subset A \cap B$ olsun. $C \subset A$ ve $C \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ ise hipotezden $x \in A \cap B$ dir. Yani $x \in A$ ve $x \in B$. Bu durumda $C \subset A$ ve $C \subset B$ gerçekleşir.

(i) $A \times B = \emptyset$ ise $A \neq \emptyset$ veya $B \neq \emptyset$ dir. Çünkü $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ise $A \times B \neq \emptyset$ olur.

(j) $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t \Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow$: $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t$ olsun. $A = B$ olduğunu gösterelim. Bunun için de $A \subset B$ ve $B \subset A$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in A$ olsun. $x \in (B \setminus A)^t$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)^t$ (hipotezden)

$\Rightarrow x \in (A \cap B^t)^t \Rightarrow x \in A^t \cup (B^t)^t \Rightarrow x \in A^t$ veya $x \in B$

$x \in A^t$ olamaz. Çünkü $x \in A$ kabul etmiştik. Bu durumda $x \in B$ dir. Yani $A \subset B$ gerçekleşir.

$x \in B$ olsun. $\Rightarrow x \in (A \setminus B)^t \Rightarrow x \in (B \setminus A)^t$ (hipotezden)

$\Rightarrow x \in (B \cap A^t)^t \Rightarrow x \in B^t \cup (A^t)^t \Rightarrow x \in B^t \cup A$

$\Rightarrow x \in B^t$ veya $x \in A$

$x \in B^t$ olamaz. Çünkü $x \in B$ kabul etmiştik.

Bu durumda $x \in A$ dir. Yani $B \subset A$ gerçekleşir.

$\Leftarrow$: $A = B$ olsun. $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t$ olduğunu gösterelim.

$(A \setminus B)^t = (A \setminus A)^t = \emptyset^t = E$ $(B \setminus A)^t = (B \setminus B)^t = \emptyset^t = E$

$\Rightarrow (A \setminus B) = (B \setminus A)^t$

3. $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Rightarrow \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

4. a tek sayı ise $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a = 2n - 1$ şeklinde yazılabilir.

$$a^2 - 1 = (2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4(n^2 - n) = 4n(n - 1)$$

n tek ise $n - 1$ çift sayıdır ve $n - 1 = 2p$ yazılabilir.

$$a^2 - 1 = 4(2p + 1) \cdot 2p = 8p(2p + 1) \Rightarrow a^2 - 1, 8 \text{ ile bölünür.}$$

n çift ise $n = 2q$ yazılabilir.

$$a^2 - 1 = 4 \cdot 2q(2q - 1) = 8q(2q - 1) \Rightarrow a^2 - 1, 8 \text{ ile bölünür.}$$

5. $0 \leq x < h$ olsun. $x \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $h < x$ olacak şekilde bir h sayısı bulmak mümkündür. Bu ise $0 \leq x < h$ kabulümüz ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır. Yani $x = 0$ dır.

6. Bir an için iddiamızın gerçekleşmediğini kabul edelim. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq x_0$ olacak şekilde bir x_0 bulunsun. Bu ise doğal sayılar kümesinin üstten sınırlı olduğunu gösterir. Halbuki doğal sayılar kümesi üstten sınırlı değildir.

- (b) $x > 0$ olsun. 5. sorudan $x > h$ olacak şekilde bir h sayısı vardır.

$$h = \frac{1}{n}, n \text{ sayısı } \frac{1}{n} \leq h \text{ olacak şekilde seçilirse, aynı } n \text{ sayısı için}$$

$$\frac{1}{n} \leq x \text{ olur.}$$

7. Kabul edelim ki her n doğal sayısı için $a \leq x < a + \frac{b}{n}$ olduğunda $x \neq a$ olsun. Bu durumda $a + \frac{b}{n} < x$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu ise $x < a + \frac{b}{n}$ olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlıştır. Yani $x = a$ olmalıdır.

8. $a < b$ eşitsizliğin her iki yanına a sayısını eklersek

$$a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \text{ bulunur.}$$

$a < b$ eşitsizliğin her iki yanına b sayısını eklersek

$$a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \text{ olur.}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden $a < \frac{a+b}{2} < b$ elde edilir.

9. $x < y$ olduğundan $y - x > 0$

6. sorunun b) şikkından $\frac{1}{m} < y - x$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. $mx < n$ olacak şekilde her zaman bir n doğal sayısının varlığından sözedebiliriz.

Dolayısı ile $n - 1 \leq mx < n \Rightarrow \frac{n}{m} - \frac{1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$ gerçekleşir.

$$\Rightarrow \frac{n}{m} < x + \frac{1}{m} < x + y - x = y \Rightarrow x < \frac{n}{m} < y$$

olur. Böylece iki reel sayı arasında sonsuz çoklukta reel sayı vardır diyebiliriz.

10. x rasyonel, y irrasyonel ise $x + y$ nin irrasyonel olduğunu gösterelim.

Bir an için $x + y$ nin rasyonel olduğunu düşünelim. $x + y = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) şeklinde yazabiliriz. x rasyonel olduğundan $x = \frac{r}{s}$ ($s \neq 0$) olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\Rightarrow \frac{r}{s} + y = \frac{p}{q} \Rightarrow y = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{sp - qr}{qs} . \quad (qs \neq 0)$$

olur ki bu y nin rasyonel sayı olduğunu gösterir. Bu ise hipotez ile çelişir. Öyleyse $x + y$ irrasyoneldir.

x rasyonel, y irrasyonel ise $-y$ sayısı da irrasyonel olacağından

$x + (-y) = x - y$ sayısı da irrasyoneldir.

x rasyonel, y irrasyonel ise $x.y$ sayısının da irrasyonel olduğunu gösterelim.

Bir an için $x.y$ nin rasyonel olduğunu düşünelim. Bu durumda

$x . y = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) olacak şekilde $p, q \in \mathbb{Z}$ vardır. x rasyonel olduğundan

$x = \frac{r}{s}$ ($s \neq 0$) olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır. Böylece

$$\frac{r}{s} . y = \frac{p}{q} \Rightarrow y = \frac{sp}{rq} \quad (rq \neq 0)$$

bulunur. O hâlde bu ise y nin rasyonel olduğunu gösterir. Bu kabulümüz ile çelişir. $x.y$ sayısı irrasyonel bir sayıdır.

11. $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir. $\sqrt{2} . \sqrt{2} = 2$ irrasyonel değildir.

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ da irrasyonel değildir.

12. (a) $p(k)$ doğru olsun. Yani

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{8} (2k + 1)^2 \quad (1)$$

olsun.

$p(k+1)$ için

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + 1 = \frac{1}{8} (2k + 3)^2$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(1) eşitsizliğinin her iki yanına $k + 1$ sayısını ekleyelim.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 &= \frac{1}{8} (2k + 1)^2 + k + 1 \\ &= \frac{1}{8} (4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8) \\ &= \frac{1}{8} (4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8} (2k + 3)^2 \end{aligned}$$

(b) "Tümevarım metodu gereğince $p(n)$ önermesi her n doğal sayısı için doğrudur" diyebilir miyiz?

Hayır. Örneğin $n = 2$ için

$$3 = \frac{1}{8} \cdot 5^2 = \frac{25}{8}$$

olur ki, bu doğru değildir.

13. (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

1) $n = 1$ için $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow 1 = 1$ doğru.

2) $n = k$ için doğru olsun. Yani

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2} k(k + 1) \quad (I)$$

olduğunu kabul edelim.

3) $n = k + 1$ için de doğru olacağını, yani

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{1}{2} (k + 1) (k + 2) \quad (II)$$

olduğunu gösterelim :

(I) eşitsizliğinin her iki tarafına $(k + 1)$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 &= \frac{1}{2} k (k + 1) + (k + 1) \\ &= \frac{1}{2} (k + 1) (k + 2) \end{aligned}$$

O halde önerme $n = k + 1$ için de doğrudur. Tümevarım yöntemi gereğince önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

$$(b) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

1) $n = 1$ için

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu, yani

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k (k + 1) (2k + 1) \quad (I)$$

olduğunu kabul edelim.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k + 1)^2 = \frac{1}{6} (k + 1) (k + 2) (2k + 3)$$

olduğunu gösterelim: (I) eşitliğinde her iki yana $(k + 1)^2$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{1}{6} k (k + 1) (2k + 1) + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1) \left(\frac{k(2k + 1) + 6(k + 1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} (k + 1) (2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6} (k + 1) (k + 2) (2k + 3). \end{aligned}$$

$$(c) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

1) $n = 1$ için

$$1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} k^2 (k + 1)^2 \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani;

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k + 1)^3 = \frac{1}{4} (k + 1)^2 (k + 2)^2$$

olacağını gösterelim:

(I) eşitliğinin her iki yanına $(k + 1)^3$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &= \frac{1}{4} k^2 (k + 1)^2 + (k + 1)^3 \\ &= (k + 1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} (k + 1)^2 (k + 2)^2 \end{aligned}$$

(d) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

1) $n = 1$ için

$$1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

eşitliğinin varlığını gösterelim :

(I) eşitliğinin her iki yanına $2k + 1$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 .$$

(k) $1 (1!) + 2 (2!) + 3 (3!) + \dots + n (n!) = (n + 1)! - 1$

1) $n = 1$ için

$$1 (1!) = 2! - 1 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$1 (1!) + 2 (2!) + \dots + k (k!) = (k + 1)! - 1 \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani,

$$1 (1!) + 2 (2!) + \dots + (k + 1) (k + 1)! = (k + 2)! - 1$$

olduğunu gösterelim. (I) eşitliğinde eşitliğin her iki yanına $(k+1) (k+1)!$ eklersek eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} 1 (1!) + 2 (2!) + \dots + k (k!) + (k + 1) (k + 1)! &= (k + 1)! - 1 + (k + 1) (k + 1)! \\ &= (k + 1)! [1 + k + 1] - 1 \\ &= (k + 1)! \cdot (k + 2) - 1 \\ &= (k + 2)! - 1. \end{aligned}$$

$$(I) \quad a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1) d) = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d]$$

1) $n = 1$ için

$$a + (1 - 1) d = \frac{1}{2} [2a + (1 - 1) d] \Rightarrow a = a$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (k-1) d) = \frac{k}{2} [2a + (k-1) d] \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını yani

$$a + (a + d) + \dots + (a + kd) = \frac{k+1}{2} [2a + kd]$$

olduğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $a + kd$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} a + (a + d) + \dots + (a + (k-1) d) + (a + kd) &= \frac{k}{2} [2a + (k-1) d] + a + kd \\ &= \frac{2ak + k^2 d - dk + 2a + 2kd}{2} = \frac{2a(k+1) + kd(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2} [2a + kd] \end{aligned}$$

$$(n) \quad \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

1) $n = 1$ için

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1.2}{2.(2+1)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani,

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$ sayısı eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} & \frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+3)k(k+1) + 2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + 3k + 2k + 2]}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \end{aligned}$$

$$(p) \quad 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad (a \neq 1)$$

1) $n = 1$ için

$$1 + a = \frac{1 - a^2}{1 - a} \Rightarrow 1 + a = 1 + a$$

önerme doğru

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani

$$1 + a + \dots + a^k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani,

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{k+1} = \frac{1 - a^{k+2}}{1 - a}$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına a^{k+1} eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^k + a^{k+1} = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} + a^{k+1}$$

$$= \frac{1 - a^{k+1} + a^{k+1} - a^{k+2}}{1 - a}$$

$$= \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}.$$

14. 1) $n = 1$ için

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x} \Rightarrow 1 + x = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} \Rightarrow 1 + x = 1 + x$$

önerme doğrudur.

2) $n = p$ için önerme doğru olsun, yani

$$\prod_{k=0}^p (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{p+1}}}{1 - x} \quad (I)$$

olsun.

3) $n = p + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$\prod_{k=0}^{p+1} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{p+2}}}{1 - x}$$

olacağını göstereyim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1 + x^{2^{p+1}})$ ile çarpalım.

$$\prod_{k=0}^p (1 + x^{2^k})(1 + x^{2^{p+1}}) = \frac{(1 - x^{2^{p+1}})}{1 - x} (1 + x^{2^{p+1}})$$

$$\prod_{k=0}^{p+1} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - (x^{2^{p+1}})^2}{1 - x} = \frac{1 - x^{2^{p+2}}}{1 - x}$$

15. 1) $n = 1$ için

$$\frac{x^{2^0}}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{x}{1 - x^2} = \frac{1 + x - 1}{1 - x^2} \Rightarrow \frac{x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}$$

önerme doğrudur.

2) $n = p$ için önerme doğru, yani

$$\sum_{k=0}^p \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^{2^p}} \quad (I)$$

olsun.

3) $n = p + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani,

$$\sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^{2^{p+1}}}$$

olduğunu gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}$ eklenirse

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^p}} + \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{-1+x^{2^{p+1}}+x^{2^p}-x^{2^{p+1}}}{(1-x^{2^p})(1-x^{2^{p+1}})} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{2^p}}{(1-x^{2^p})(1-x^{2^{p+1}})} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{p+1}}}.\end{aligned}$$

16. 1) $n = 1$ için

$$\frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

önerme doğrudur.

2) $n = p$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{k=1}^p \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+1)!} \quad (I)$$

olsun.

3) $n = p + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+2)!} \text{ eşitliğinin varlığını gösterelim.}$$

(I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{p+1}{(p+2)!}$ sayısını ekleyelim.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^p \frac{k}{(k+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} &= 1 - \frac{1}{(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{(k+1)!} &= 1 - \frac{p+2}{(p+2)(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} = 1 + \frac{-p-2+p+1}{(p+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+2)!}\end{aligned}$$

17. Her n doğal sayısı için

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

olduğunu gösteriniz.

1) $n = 1$ için

$$\frac{1}{2} = \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$\sum_{p=k+1}^{2k} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$\sum_{p=k+2}^{2k+2} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

olacağını gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$ sayısını ekleyelim.

$$\begin{aligned} \sum_{p=k+1}^{2k} \frac{1}{p} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} &= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ \sum_{p=k+2}^{2k+2} \frac{1}{p} &= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{(-1)^{2k+1+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+2+1}}{2k+2} = \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \end{aligned}$$

18. 1) $n = 1$ için

$$1 - p \geq 1 - p$$

olur. Önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$(1 - p)^k \geq 1 - kp \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$(1 - p)^{k+1} \geq 1 - (k + 1)p$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitsizliğinin her iki yanını $(1 - p)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} (1 - p)^k (1 - p) &\geq (1 - kp)(1 - p) \Rightarrow (1 - p)^{k+1} \geq 1 - p - kp + kp^2 \\ &= 1 - p(1 + k) + kp^2 \geq 1 - (k + 1)p. \end{aligned}$$

19. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_n \geq 0$ için

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

olduğunu gösteriniz.

1) $n = 1$ için

$$1 + \alpha_1 \geq 1 + \alpha_1 \text{ önerme doğrudur.}$$

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim.

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k) \geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1 + \alpha_{k+1})$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)(1 + \alpha_{k+1}) &\geq [1 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)](1 + \alpha_{k+1}) \\ &= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \\ &= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1}) + \alpha_{k+1}(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \\ &\geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

20. 19. soruya benzer şekilde çözülür.

21. (a) $(2n)! \leq 2^{2n} (n!)^2$

1) $n = 1$ için

$$2! \leq 2^2 (1!)^2 \Rightarrow 2 \leq 4$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$(2k)! \leq 2^{2k} (k!)^2 \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani

$$(2k + 2)! \leq 2^{2k+2} [(k+1)!]^2$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitsizliğinin her iki yanını $(2k + 1)(2k + 2)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} (2k)! \cdot (2k + 1)(2k + 2) &\leq 2^{2k} (k!)^2 (2k + 1)(2k + 2) \\ &\leq 2^{2k} (k!)^2 (2k + 2)(2k + 2) \\ &= 2^{2k} \cdot 2 \cdot 2 (k!)^2 (k + 1)^2 \\ &= 2^{2k+2} (k! (k+1))^2 \\ &= 2^{2k+2} [(k+1)!]^2 \end{aligned}$$

$$(b) n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

eşitsizliğinde $a_k = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) alınır

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ elde edilir.}$$

$$(c) 3^n \geq n \cdot 2^n$$

$$1) n = 1 \text{ için}$$

$3 \geq 2$ önerme doğrudur.

$$2) n = k \text{ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,}$$

$$3^k \geq k \cdot 2^k \quad (I)$$

olsun.

$$3) n = k + 1 \text{ için önermenin doğru olacağını, yani}$$

$$3^{k+1} \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterelim.

$$(I) \text{ eşitsizliğini her iki yanını 3 ile çarpalım.}$$

$$3^{k+1} \geq 3k \cdot 2^k \quad (II)$$

bulunur.

Şimdi, $3k \cdot 2^k - (k+1) \cdot 2^{k+1}$ farkını inceleyelim. $k \geq 2$ için

$$3k \cdot 2^k - (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2^k (3k - 2k - 2) = 2^k (k - 2) \geq 0$$

olduğundan $3k \cdot 2^k \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ dır.

Dolayısıyla (II) dan $3^{k+1} \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ olur.

$$(d) 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \geq [(n+1)!]^n$$

$$1) n = 1 \text{ için}$$

$2! \geq 2!$ önerme doğrudur.

$$2) n = k \text{ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,}$$

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \geq [(k+1)!]^k \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru, yani

$$2! \cdot 4! \dots (2k + 2)! \geq [(k+2)!]^{k+1}$$

olacağını gösterelim. (I) eşitsizliğinin her iki yanını $(2k + 2)!$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} 2! \cdot 4! \dots (2k)! (2k + 2)! &\geq [(k + 1)!]^k \cdot (2k + 2)! \\ &= [(k+1)!]^k (2k + 2) (2k + 1) \cdot \dots \cdot (k + 2) (k + 1)! \\ &> [(k+1)!]^k \underbrace{(k + 2)(k + 2) \dots (k + 2)}_{k + 1 \text{ tane}} \cdot (k + 1)! \\ &= [(k+1)!]^k (k + 1)! (k + 2)^{k+1} = [(k + 1)!]^{k+1} (k + 2)^{k+1} \\ &= [(k + 1)! (k + 2)]^{k+1} = [(k + 2)!]^{k+1}. \end{aligned}$$

22. 1) $n = 2$ için

$$3^2 + 4^2 \leq 5^2 \Rightarrow 25 \leq 25$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$3^k + 4^k \leq 5^k \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani

$$3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1} \text{ olacağını gösterelim.}$$

(I) eşitsizliğinin her iki yanını 5 ile çarpalım :

$$3^k 5 + 4^k 5 \leq 5^k 5$$

$$3^k 3 + 4^k 4 < 3^k 5 + 4^k 5 < 5^k 5 \Rightarrow 3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1}$$

gerçeklenir.

23. (a) 1) $n = 1$ için $n(2n + 1)(7n + 1) = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 24$ olup 6 ile bölünür.

O halde önerme $n = 1$ için doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani $k(2k + 1)(7k + 1)$ sayısı 6 ile bölünsün. Buna göre

$$k(2k + 1)(7k + 1) = 6p$$

olacak şekilde p tamsayısı vardır.

3) $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(k + 1)(2k + 3)(7k + 8)$$

sayısının 6 ile bölünebildiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}(k + 1)(2k + 3)(7k + 8) &= 14k^3 + 51k^2 + 61k + 24 \\ &= (14k^3 + 9k^2 + k) + (42k^2 + 60k + 24) \\ &= 6p + 6(7k^2 + 10k + 4) = 6q \quad (q \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

olduğundan 6 ile bölünür.

(b) $3^{n+1} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile bölünebileceğini gösteriniz.

1) $n = 1$ için

$$3^{1+3} - 4^{4+2} = 81 - 4096 = -4015 = 11 \cdot (-365)$$

olduğundan önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani

$$3^{k+3} - 4^{4k+2} = 11 \cdot p \text{ olacak şekilde bir } p \text{ tam sayısı var olsun.}$$

3) $n = k + 1$ önermesinin doğru olacağını yani $3^{k+4} - 4^{4k+6}$ sayısının 11 ile bölünebildiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}3^{k+4} - 4^{4k+6} &= 3^{k+3} \cdot 3 - 4^4 (4^{4k+2}) = 3(3^{k+3} - 4^{4k+2}) - 253 \cdot 4^{4k+2} \\ &= 3(3^{k+3} - 4^{4k+2}) - 11 \cdot 23 \cdot 4^{4k+2} = 3 \cdot 11p - 11 \cdot 23 \cdot 4^{4k+2} \\ &= 11(3p - 23 \cdot 4^{4k+2}) = 11 \cdot q \quad (q \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

(d) 1) $n = 1$ için

$$3 \cdot 5^{2-1} + 2^{3-2} = 15 + 2 = 17$$

olduğundan önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani, p bir tamsayı olmak üzere

$$3 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k-2} = 17p \text{ olsun.}$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} \text{ sayısının 17 ile bölünebileceğini gösterelim.}$$

$$\begin{aligned}3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} &= 3 \cdot 5^{2k-1} \cdot 5^2 + 2^{3k-2} \cdot 2^3 \\ &= 3 \cdot 5^{2k-1} (17 + 8) + 8 \cdot 2^{3k-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 17 \cdot 3 \cdot 5^{2k-1} + 8 \underbrace{(3 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k-2})}_{17p} \\
&= 17 (8p + 3 \cdot 5^{2k-1}) \\
&= 17q, \quad q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

olur. Önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

$$\begin{aligned}
24. \quad &\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \dots \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

olur.

$$1) \quad n = 2 \text{ için } \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+1)}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

olur. Önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(k+1)}{2k} \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğruluğunu gösterelim.

$$\text{Yani } \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)} \text{ sağlanır mı?}$$

(I) eşitliğini $\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{k+1}{2k} \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k+2)}{2k(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}
\end{aligned}$$

25. Bir elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{1}$,

İki elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{2}$,

⋮

n elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{n}$ dir.

Buna göre n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

olur. Ayrıca

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

binom formülünde $a = b = 1$ alınırsa

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

bulunur.

26. 1) $n = 0$ için

$$(1 + p)^0 \geq 1 + 0 \cdot p + 0p^2 \Rightarrow 1 = 1 \text{ önerme doğrudur.}$$

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$(1 + p)^k \geq 1 + kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2. \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğruluğunu gösterelim. (I) eşitsizliğinin her iki yanı $1 + p$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} (1 + p)^{k+1} &\geq 1 + kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 + p + kp^2 + \frac{k(k-1)}{2} p^3 \\ &= 1 + (k+1)p + p^2 \left(\frac{k^2 - k + 2k}{2} \right) + \frac{k(k-1)}{2} p^3 \\ &\geq 1 + (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} p^2 \end{aligned}$$

bulunur.

27. 1) $n = 0$ için

$$1 \leq 1 \text{ önerme doğrudur.}$$

2) $n = k$ için önerme doğru, yani

$$(1 - p)^k \leq 1 - kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru, yani

$$(1 - p)^{k+1} \leq 1 - (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} p^2 \text{ olduğunu gösterelim.}$$

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1 - p)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
 (1 - p)^{k+1} &\leq (1 - p) \left(1 - kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 \right) \\
 &= 1 - kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 - p + kp^2 - \frac{k(k-1)}{2} p^3 \\
 &= 1 - (k+1)p + p^2 \left(\frac{k^2 - k + 2k}{2} \right) - \frac{k(k-1)}{2} p^3 \\
 &\leq 1 - (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} p^2
 \end{aligned}$$

28. 1) $n = 2$ için

$$(1 + p)^2 \geq 1 + 2p + \frac{4}{4} p^2 \Rightarrow (1 + p)^2 \geq (1 + p)^2$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru, yani

$$(1 + p)^k \geq 1 + kp + \frac{k^2}{4} p^2 \quad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru, yani

$$(1 + p)^{k+1} \geq 1 + (k+1)p + \frac{(k+1)^2}{4} p^2$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1 + p)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
 (1 + p) (1 + p)^k &\geq (1 + p) \left(1 + kp + \frac{k^2}{4} p^2 \right) \\
 (1 + p)^{k+1} &\geq 1 + kp + \frac{k^2}{4} p^2 + p + kp^2 + \frac{k^2}{4} p^3 \\
 &= 1 + (k+1)p + \left(\frac{k^2 + 4k}{4} \right) p^2 + \frac{k^2}{4} p^3
 \end{aligned}$$

olur. $2k > 1$ olduğundan

$k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 (1 + p)^{k+1} &\geq 1 + (k+1)p + \frac{(k+1)^2}{4} p^2 + \frac{k^2}{4} p^3 \\
 &\geq 1 + (k+1)p + \frac{(k+1)^2}{4} p^2.
 \end{aligned}$$

29. Binom açılımından

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

yazılabilir. $(1+x)^n (1+x)^n$ çarpımında x^n in katsayısı

$$\left[\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \right] \text{ olur.}$$

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \dots + \binom{2n}{n}x^n + \binom{2n}{n+1}x^{n+1} + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

açılımında x^n in katsayısı $\binom{2n}{n}$ dir. O halde

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$$

olur. Diğer taraftan

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

olduğundan

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

elde edilir.

$$30. (1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \dots + \binom{2n}{n}x^n + \binom{2n}{n+1}x^{n+1} + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

$$(1-x)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 - \dots + (-1)^n \binom{2n}{n}x^n$$

$$+ (-1)^{n+1} \binom{2n}{n+1}x^{n+1} - \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

$(1+x)^{2n} (1-x)^{2n}$ çarpımında x^{2n} in katsayısı

$$\left[\binom{2n}{0}\binom{2n}{2n} - \binom{2n}{1}\binom{2n}{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2n}\binom{2n}{0} \right]$$

olur. Diğer taraftan

$$(1-x^2)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1}x^2 + \dots + (-1)^n \binom{2n}{n}x^{2n}$$

$$+ (-1)^{n+1} \binom{2n}{n+1}x^{2n+2} + \dots + \binom{2n}{2n}x^{4n}$$

olur. x^{2n} in katsayılarını karşılaştırsak

$$\binom{2n}{0}\binom{2n}{2n} - \binom{2n}{1}\binom{2n}{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2n}\binom{2n}{0} = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

bulunur.

$$\binom{2n}{0} = \binom{2n}{2n}, \quad \binom{2n}{1} = \binom{2n}{2n-1}, \dots, \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{0}$$

olduğundan

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \dots + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

elde edilir.

PROBLEMLER

1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olsun. A ile B nin noktasal toplamı

$A + B = \{x + y; x \in A \text{ ve } y \in B\}$ şeklinde tanımlanır.

(a) $[1, 3] + [5, 6]$, $(a - p, a + p) + (b - q, b + q)$ ve $(-\infty, 5) + (7, +\infty)$ kümelerini bulunuz.

(b) $[-1, 0] + [0, 1] = [-1, 0] \cup [0, 2]$ olduğunu gösteriniz.

(c) Daima $A + B = A \cup B$ yazılabilir mi?

Daima $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ yazılabilir mi?

2. a, b herhangi iki reel sayı olsun.

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

3. a, b, c, d reel sayılar ve $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$ olsun.

$$[a, b] \cap [c, d] = \left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2} \right]$$

$$[a, b] \cup [c, d] = \left[\frac{a+c-|a-c|}{2}, \frac{b+d+|b-d|}{2} \right]$$

olduğunu gösteriniz.

4. Herhangi bir C kümesi için

$$\inf C \leq \lim C \leq \overline{\lim} C \leq \sup C$$

olduğunu gösteriniz.

5. $A, B \subset \mathbb{R}$ ve $C = \{ a + b : a \in A \text{ ve } b \in B \}$ olsun.

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) A ve B supremuma sahip ise C de sahiptir

ve $\sup C = \sup A + \sup B$ dir. Gösteriniz.

- (b) A ve B bir infimuma sahipse C de sahiptir ve

$$\inf C = \inf A + \inf B$$

olacağını gösteriniz.

6. $A, B \subset \mathbb{R}$ olsun. A nın her bir a elemanı ve B nin her bir b elemanı için $a \leq b$ oluyorsa bu takdirde A bir supremuma, B minimuma sahiptir ve

$$\sup A \leq \inf B$$

dir. Gösteriniz.

7. Aşağıdaki (a_k) eşitsizliklerin herbirinin çözümü bir (b_j) eşitsizliğidir. Hangi (a_k) eşitsizliğine hangi (b_j) eşitsizliğinin karşılık geldiğini bulunuz.

$$(a_1) \quad |x| < 3$$

$$(b_1) \quad 4 < x < 6$$

$$(a_2) \quad |x - 1| < 3$$

$$(b_2) \quad -3 < x < 3$$

$$(a_3) \quad |3 - 2x| < 1$$

$$(b_3) \quad x > 3 \text{ veya } x < -1$$

$$(a_4) \quad |1 + 2x| \geq 1$$

$$(b_4) \quad x > 2$$

$$(a_5) \quad |x - 1| > 2$$

$$(b_5) \quad -2 < x < 4$$

$$(a_6) \quad |x + 2| \geq 5$$

$$(b_6) \quad -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ veya } 1 \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$(a_7) \quad |5 + x^{-1}| < 1$$

$$(b_7) \quad x \leq -7 \text{ veya } x \geq 3$$

$$(a_8) \quad |x - 5| < |x + 1|$$

$$(b_8) \quad 1 < x < 2$$

$$(a_9) \quad |x^2 - 2| \leq 1$$

$$(b_9) \quad -\frac{1}{4} < x < -\frac{1}{6}$$

$$(a_{10}) \quad x < x^2 - 12 < 4x$$

$$(b_{10}) \quad x \geq 0 \text{ veya } x \leq -1$$

8. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

$$(a) \lfloor 3x \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$$

$$(d) \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2$$

$$(b) \lfloor 5x \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

$$(e) \lfloor x^2 - 3x \rfloor = -2$$

$$(c) \lfloor 3x \rfloor = 3 \lfloor x \rfloor$$

$$(f) \left\lfloor x + \left\lfloor x + 1 + \left\lfloor x + 2 \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor = -3$$

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz. (a) ve (b) deki eşitsizliklerden yararlanarak benzer bir eşitsizliği $\lfloor nx \rfloor$ için yazınız ve ispatlayınız.

$$(a) \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$(b) \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

ÇÖZÜMLER

1. (a) $\lfloor 1, 3 \rfloor + \lfloor 5, 6 \rfloor = \lfloor 6, 9 \rfloor,$

$$(a - p, a + p) + (b - q, b + q) = (a + b - p + q, a + b + (p + q))$$

$$(b) \lfloor -1, 0 \rfloor + \lfloor 0, 1 \rfloor = \lfloor -1 + 0, 0 + 1 \rfloor = \lfloor -1, 1 \rfloor$$

(c) Daima $A + B = A \cup B$ yazılamaz. (Örnek a seçeneği)

2. $a < b$ olsun $\Rightarrow \max \{a, b\} = b$ (1)

olur.

$$\frac{1}{2} (a + b + |a - b|) = \frac{1}{2} (a + b + (b - a)) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\max \{a, b\} = \frac{1}{2} (a + b + |a - b|)$ dır.

$$a < b \text{ için } \min \{a, b\} = a \quad (3)$$

olur.

$$\frac{1}{2} (a + b - |a - b|) = \frac{1}{2} (a + b - (b - a)) = \frac{1}{2} (2a) = a \quad (4)$$

(3) ve (4) ten $\min \{a, b\} = \frac{1}{2} (a + b - |a - b|)$ bulunur.

$a > b$ için de aynı eşitlik gerçekleşir.

3. $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$ olduğundan

- 1) $a \leq c$, $c \leq b$ ve $b \leq d$ olabilir.
- 2) $a < c$, $c < b$ ve $d < b$ olabilir.
- 3) $c \leq a$, $a \leq d$ ve $b \leq d$ olabilir.
- 4) $c < a$, $a < d$ ve $d < b$ olabilir.

1) $a \leq c$, $c \leq b$ ve $b \leq d$ ise

$$[a, b] \cap [c, d] = [c, b]$$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2} \right] = \left[\frac{a+c-a+c}{2}, \frac{b+d+b-d}{2} \right] = [c, b]$$

2) $a < c$, $c < b$ ve $d < b$ ise

$$[a, b] \cap [c, d] = [c, d]$$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2} \right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2}, \frac{b+d-b+d}{2} \right] = [c, d]$$

3) $c \leq a$, $a \leq d$ ve $b \leq d$

$$[a, b] \cap [c, d] = [a, b]$$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2} \right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2}, \frac{b+d+b-d}{2} \right] = [a, b]$$

4) $c < a$, $a < d$ ve $d < b$

$$[a, b] \cap [c, d] = [a, d]$$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2} \right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2}, \frac{b+d-b+d}{2} \right] = [a, d]$$

4. $\inf C \leq \lim C$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\inf C \leq \lim C$ olmasın. Bu durumda $\lim C \leq \inf C$ dir. $\lim C$ nin bir yığılma noktası olduğunu biliyoruz. Öyleyse $\lim C$ sayısının her $\delta > 0$ komşuluğunda C cümlesinin $\lim C$ den farklı en az bir x elemanı vardır.

$$\inf C > \lim C \Rightarrow \inf C - \lim C > 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\inf C - \lim C}{2} > 0 \text{ seçelim.}$$

$$\begin{aligned}
|x - \underline{\lim} C| &< \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} \\
\Rightarrow -\frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} &< x - \underline{\lim} C < \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} \\
\Rightarrow \underline{\lim} C - \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} &< x < \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} + \underline{\lim} C
\end{aligned}$$

Bu durumda $x < \inf C$ dir. Yani C nin elemanı $\inf C$ 'den küçük elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece $\inf C \leq \underline{\lim} C$ (1) elde edilir.

$\overline{\lim} C \leq \sup C$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\overline{\lim} C \leq \sup C$ olmasın. Bu durumda $\sup C < \overline{\lim} C$ dir. $\overline{\lim} C$ bir yığılma noktası olduğundan $\overline{\lim} C$ nin her $\delta > 0$ komşuluğunda C cümlesinin en az bir x elemanı vardır, öyle ki $x \overline{\lim} C$ den farklıdır.

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} C > \sup C &\Rightarrow \overline{\lim} C - \sup C > 0 \\
\Rightarrow \delta = \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2} &> 0 \text{ seçersek}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x - \overline{\lim} C| &< \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2} \\
\overline{\lim} C - \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2} &< x < \overline{\lim} C + \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2}
\end{aligned}$$

Buradan $x > \sup C$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Yani $\overline{\lim} C \leq \sup C$ (2) olmalıdır.

Son olarak $\underline{\lim} C < \overline{\lim} C$ (3) olduğu açıktır.

(1), (2) ve (3) den $\inf C \leq \underline{\lim} C \leq \overline{\lim} C \leq \sup C$ elde edilir.

5. (a) A supremuma sahip olduğundan $\forall a \in A$ için $a \leq \sup A$
 B supremuma sahip olduğundan $\forall b \in B$ için $b \leq \sup B$ dir.
 $\Rightarrow a + b \leq \sup A + \sup B$ (1)

eşitliği gerçekleşir.

$$\forall \epsilon > 0 \text{ için } \exists a \in A, \sup A < a + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists b \in B, \sup B < b + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sup A + \sup B < a + b + \epsilon$$

ε keyfi olduğundan

$$\sup A + \sup B < a + b \quad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\sup A + \sup B = \sup C$$

6. A bir supremuma sahip ise $\forall a \in A$ için $a \leq \sup A$

B bir infimuma sahip ise $\forall b \in B$ için $b \geq \inf B$

$\forall a \in A$ için $a \leq b$ olduğundan $b \geq \sup A$ olacaktır. $\inf B$ cümleye dahil olduğundan (B bir minimuma sahipti) B nin elemanlarının en küçük olanı $\inf B$ 'ye eşit olup dolayısıyla,

$$\inf B \geq \sup A \text{ olur.}$$

7. (a₁) $|x| < 3$

$$|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad (b_2)$$

(a₂) $|x - 1| < 3$

$$|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4 \quad (b_5)$$

(a₃) $|3 - 2x| < 1$

$$|3 - 2x| < 1 \Rightarrow -1 < 3 - 2x < 1$$

$$\Rightarrow -4 < -2x < -2$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \quad (b_8)$$

(a₄) $|1 + 2x| \geq 1$

$$|1 + 2x| \geq 1 \Rightarrow 1 + 2x \geq 1 \text{ veya } 1 + 2x \leq -1$$

$$1 + 2x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

veya

$$1 + 2x \leq -1 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow x \geq 0 \text{ veya } x \leq -1 \quad (b_{10})$$

(a₅) $|x - 1| > 2$

$$|x - 1| > 2 \Rightarrow x - 1 > 2 \text{ veya } x - 1 < -2$$

$$\Rightarrow x > 3 \text{ veya } x < -1 \quad (b_3)$$

$$(a_6) |x + 2| \geq 5$$

$$|x + 2| \geq 5 \Rightarrow x + 2 \geq 5 \text{ veya } x + 2 \leq -5$$

$$x + 2 \geq 5 \Rightarrow x \geq 3$$

veya

$$x + 2 \leq -5 \Rightarrow x \leq -7 \quad (b_7)$$

$$(a_7) |x - 5| < |x + 1|$$

$$|x - 5| - |x + 1| < 0$$

$$1. \ x < -1 \text{ ise}$$

$$-x + 5 + (x + 1) < 0$$

$$6 < 0$$

$$C_1 = \emptyset$$

$$2. \ -1 \leq x < 5 \text{ ise}$$

$$-x + 5 - (x + 1) < 0$$

$$-2x + 4 < 0$$

$$x > 2$$

$$C_2 = (2, 5)$$

$$3. \ x \geq 5 \text{ ise}$$

$$x - 5 - (x + 1) < 0 \Rightarrow -6 < 0$$

$$\Rightarrow C_3 = [5, \infty)$$

$$\Rightarrow C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (2, \infty) \quad (b_4)$$

$$(a_8) \left| 5 + \frac{1}{x} \right| < 1$$

$$\left| 5 + \frac{1}{x} \right| < 1 \Rightarrow -1 < 5 + \frac{1}{x} < 1$$

$$x > 0 \text{ ise}$$

$$-x < 5x + 1 < x$$

$$-x < 5x + 1 \text{ ve } 5x + 1 < x$$

$$-1 < 6x \quad 4x < -1$$

$$-\frac{1}{6} < x \quad x < -\frac{1}{4}$$

$$C_1 = \emptyset$$

$$x < 0 \text{ ise} \quad -x > 5x + 1 > x$$

$$-x > 5x + 1 \text{ ve } 5x + 1 > x$$

$$-1 > 6x \text{ ve } 4x > -1$$

$$-\frac{1}{6} > x \text{ ve } x > -\frac{1}{4}$$

$$C_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$C = C_1 \cup C_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right) \quad (b_9)$$

$$(a_9) |x^2 - 2| \leq 1$$

$$|x^2 - 2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x^2 - 2 \quad \text{ve} \quad x^2 - 2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq x^2 \quad \text{ve} \quad x^2 \leq 3$$

$$C_1 = [1, \infty) \cup (-\infty, -1] \quad \text{ve} \quad C_2 = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$C = C_1 \cap C_2 = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}] \quad (b_6)$$

$$(a_{10}) x < x^2 - 12 < 4x$$

$$x < x^2 - 12 < 4x \Rightarrow x < x^2 - 12 \quad \text{ve} \quad x^2 - 12 < 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 > 0 \quad \text{ve} \quad x^2 - 4x - 12 < 0$$

0	-3	4
$x^2 - x - 12$	+ 0 -	0 +

0	-2	6
$x^2 - 4x - 12$	+ 0 -	0 +

$$\Rightarrow C_1 = (-\infty, -3) \cup (4, \infty), \quad C_2 = (-2, 6)$$

$$\Rightarrow C = C_1 \cap C_2 = (4, 6) \quad (b_1)$$

8. (a), (b) ve (c) benzer çözümlere sahip olduğundan (c) yi çözüp (a) ve (b) yi bir alıştırmaya bırakıyoruz.

$$(c) \lfloor 3x \rfloor = 3 \lfloor x \rfloor$$

$$x = \lfloor x \rfloor + t \quad 0 \leq x < 1$$

$$3x = 3 \lfloor x \rfloor + 3t \quad 0 \leq 3t < 3$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3 \lfloor x \rfloor & , 0 \leq 3t < 1 \\ 3 \lfloor x \rfloor + 1 & , 1 \leq 3t < 2 \\ 3 \lfloor x \rfloor + 2 & , 2 \leq 3t < 3 \end{cases}$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3 \lfloor x \rfloor & , 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 3 \lfloor x \rfloor + 1 & , \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 3 \lfloor x \rfloor + 2 & , \frac{2}{3} \leq t < 1 \end{cases}$$

$0 \leq t < \frac{1}{3}$ olsun.

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor \Rightarrow 3 \lfloor x \rfloor = 3 \lfloor x \rfloor$$

elde edilir. Buna göre kesir kısmı $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ aralığında olan her sayı eşitliği sağlar. Yani m bir tam sayı olmak üzere

$$\left[m, m + \frac{1}{3}\right)$$

tipindeki aralıklar denklemini sağlar.

$$C_1 = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[m, m + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \text{ ise}$$

$$\lfloor 3x \rfloor = 3 \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow 0 = 1$$

Bu ise mümkün değildir. $C_2 = \emptyset$ dir.

$$\frac{2}{3} \leq t < 1 \text{ ise}$$

$$\lfloor 3x \rfloor = 3 \lfloor x \rfloor + 2 \Rightarrow 0 = 2$$

Bu ise mümkün değildir. $C_3 = \emptyset$ olur.

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[m, m + \frac{1}{3}\right)$$

$$d) \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2$$

$$\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x-1}{3} < 3$$

$$\Rightarrow 6 \leq x-1 < 9$$

$$\Rightarrow 7 \leq x < 10 \Rightarrow C = [7, 10)$$

$$e) \left\lfloor x^2 - 3x \right\rfloor = -2$$

$$\left\lfloor x^2 - 3x \right\rfloor = -2 \Rightarrow -2 \leq x^2 - 3x < -1$$

$$\Rightarrow -2 \leq x^2 - 3x \text{ ve } x^2 - 3x < -1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ ve } x^2 - 3x + 1 < 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

0	1	2
x^2-3x+2	$\begin{array}{c} + \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ 0 \end{array}$

	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
x	$\begin{array}{c} + \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ 0 \end{array}$

$$C_1 = (-\infty, 1] \cup [2, \infty), \quad C_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$C = C_1 \cap C_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1 \right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

f) $|x + |x+1 + |x+2|| = -3$

$$\begin{aligned} |x + |x+1 + |x+2|| &= |x + |x+1| + |x+2|| \\ &= |x+2| + |x+1| + |x| \\ &= |x| + 2 + |x| + 1 + |x| \\ &= 3|x| + 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3|x| + 3 = -3 \Rightarrow 3|x| = -6 \Rightarrow |x| = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

9. (a) $|2x| = |x| + \left| x + \frac{1}{2} \right|$

$0 \leq t < 1$ olmak üzere

$$x = |x| + t \Rightarrow 2x = 2|x| + 2t \Rightarrow |2x| = \begin{cases} 2|x|, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2|x| + 1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

$0 \leq t < \frac{1}{2}$ ise $\frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left| t + \frac{1}{2} \right| = 0$ dir. Problem 8. (c) den

$$|x| + \left| x + \frac{1}{2} \right| = |x| + \left| |x| + t + \frac{1}{2} \right| = |x| + |x| + \left| t + \frac{1}{2} \right| = 2|x| = |2x|$$

$\frac{1}{2} \leq t < 1$ ise $1 \leq t + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ olur. Problem 8. (c) den

$$|x| + \left| x + \frac{1}{2} \right| = |x| + \left| |x| + t + \frac{1}{2} \right| = |x| + |x| + \left| t + \frac{1}{2} \right| = 2|x| + 1 = |2x|$$

bulunur.

(b) $|3x| = |x| + \left| x + \frac{1}{3} \right| + \left| x + \frac{2}{3} \right|$

$$x = |x| + t \quad 0 \leq t < 1$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3\lfloor x \rfloor & , 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 1 & , \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 2 & , \frac{2}{3} \leq t < 1 \end{cases}$$

$0 \leq t < \frac{1}{3}$ ise $\frac{1}{3} \leq t + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} \leq t + \frac{2}{3} < 1$ dir.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= 3\lfloor x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor \end{aligned}$$

$\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}$ ise $\frac{2}{3} \leq t + \frac{1}{3} < 1$, $1 \leq t + \frac{2}{3} < \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= 3\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 3x \rfloor \end{aligned}$$

$\frac{2}{3} \leq t < 1$ ise $1 \leq t + \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$, $\frac{4}{3} \leq t + \frac{2}{3} < \frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ &= 3\lfloor x \rfloor + 1 + 1 = 3\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor 3x \rfloor \end{aligned}$$

$$\lfloor nx \rfloor = \left\lfloor x \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$\lfloor nx \rfloor = \begin{cases} n\lfloor x \rfloor & , 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ n\lfloor x \rfloor + 1 & , \frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ n\lfloor x \rfloor + n-1 & , \frac{n-1}{n} \leq t < 1 \end{cases}$$

$0 \leq t < \frac{1}{n}$ ise

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor \\ = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor \end{aligned}$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$$\frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n} \text{ ise}$$

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor + 1$$

⋮

$$\frac{n-1}{n} \leq t < 1 \text{ ise}$$

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor + 1 + 1 \dots + 1$$

$$= n \lfloor x \rfloor + n - 1$$

$$= \lfloor nx \rfloor$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \ 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$(b) \ 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \ n! \geq n^{n/2} \quad (n \geq 2) \quad (b) \ n! \geq 2^{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

$$(c) \ n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3)$$

3. $p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

olduğunu gösterniz.

4. $a > 0$, $b > 0$ ve $n \geq 2$ için

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

olduğunu gösteriniz.

5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $6 \mid n(n^2 - 1)$ olduğunu gösteriniz.

6. Her $n \in \mathbb{N}$ için $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$ olduğunu gösteriniz.

7. $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 + n + 41$ sayısı asal mıdır?

8. $2^p - 1$ sayısının $p = 2, 3, 5, 7$ asal sayıları için asal olacağını gösteriniz. “ p asal ise $2^p - 1$ asaldır” önermesi doğru mudur?

9. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

10. x rasyonel olduğunda $x + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olacağını gösteriniz.

11. Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayısının varolacağını gösteriniz.

12. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

(a) $|x^2 - 7x + 6| > x^2 - 7x + 6$

(b) $|3x-5| - |2x+3| > 0$

(c) $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$

13. $\left\| x + \left\| x+1 + \left\| x+2 + \left\| \dots + \left\| x+n \right\| \right\| \dots \right\| \right\| = 0$

denkleminin bir köke sahip olması için n ne olmalıdır?

$n = 6$ için denklemi çözünüz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 1$ için $1.2.3 = \frac{1}{4} \cdot 1.2.3.4 \Rightarrow 6 = 6$

olur. O halde eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

Eşitlik $n = k$ için doğru olsun. Bu takdirde

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) \quad (I)$$

eşitliği doğrudur.

Eşitliğin $n = k + 1$ için doğru olacağını göstereyim. Bunun için

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \quad (II)$$

eşitliğin varlığını göstermek yeterlidir.

(I) eşitliğinin her iki yanına $(k+1)(k+2)(k+3)$ ifadesi eklenirse

$$\begin{aligned} 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\ = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) &= (k+1)(k+2)(k+3) \left(\frac{1}{4} k+1 \right) \\ &= \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \end{aligned}$$

bulunur ki bu da (II) ifadesidir.

1. (b) İspat (a) şıkkındaki gibi yapılır.

2. (a) $n! > n^{n/2} \quad (n > 1)$

Bu eşitsizliğin doğruluğu tümevarımla gösterilebilir. Fakat biz başka bir yoldan ispatlamaya çalışacağız.

$(n!)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2 = [1.n] \cdot [2(n-1)] \dots [r(n-r+1)] \dots [n.1]$ yazılabilir. Burada $r, 1 \leq r \leq n$ bağıntısını sağlayan bir doğal sayıdır. $(r-1)(r-n) \leq 0$ olduğundan $r(n-r+1) \geq n$ dir. Bu eşitsizlikte $r = 1, 2, \dots, n$ yazılırsa

$$1.n = n, 2.(n-1) > n, \dots, r(n-r+1) > n, \dots, n.1 = n$$

bulunur. Buna göre

$$(n!)^2 \geq n.n \dots n = n^n$$

dir. Buradan

$$n! \geq n^{n/2}$$

eşitsizliği elde edilir.

b) $n! \geq 2^{n-1}$

1) $1! \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 = 1$

olacağından önerme $n = 1$ için doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$k! > 2^{k-1} \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$(k + 1)! > 2^k$$

olduğunu göstereyim. (I) eşitsizliğini $(k + 1)$ ile çarpalım.

$$(k + 1)! = k! \cdot (k + 1) \geq 2^{k-1} (k + 1) \geq 2^{k-1} \cdot 2 = 2^k$$

c) $(n+1)^n = n^n + nn^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{n!}$

$$< n^n + n^n \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan

$$1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 2$$

Buna göre

$$(n + 1)^n \leq n^n + 2 \cdot n^n = 3n^n < n \cdot n^n = n^{n+1}$$

elde edilir.

3. $|a + b| \leq |a| + |b| \leq 2 \max \{ |a|, |b| \}$ yazılabilir. $p \geq 1$ için

$$|a + b|^p \leq [2 \max \{ |a|, |b| \}]^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

bulunur. Çünkü $\max \{ |a|, |b| \}$, $|a|$ veya $|b|$ dir.

4. Kabul edelim ki $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ eşitsizliği doğru olmasın. Bu takdirde $\sqrt[n]{a+b} \geq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ olur. Her iki tarafın n - ninci kuvveti alınır

$$a + b \geq a + b + \binom{n}{1} a^{n-1/n} b^{1/n} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{1/n} b^{n-1/n} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{1} a^{n-1/n} b^{1/n} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{1/n} b^{n-1/n} \leq 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Zira pozitif sayıların toplamı negatif olmaz. O halde,

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

eşitsizliği doğrudur.

5. Tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ için $n(n^2 - 1) = 0$ olduğundan $6 \mid 0$ dır. Önerme $n = 1$ için doğru olur.

$n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $n(n^2 - 1) = 6p$ olacak şekilde bir p tamsayısı vardır.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim :

$$\begin{aligned} (k+1) \cdot [(k+1)^2 - 1] &= (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k \\ &= k(k^2 - 1) + 3k(k+1) = 6p + 3k(k+1) \end{aligned}$$

olur. $k(k+1)$ sayısı çift olduğundan $3k(k+1)$, 6 ile bölünür. Bu durumda $3k(k+1) = 6q$ olacak biçimde bir q tamsayısı vardır. O halde,

$$(k+1) [(k+1)^2 - 1] = 6p + 6q = 6(p + q)$$

olur ki bu önermenin $k + 1$ için de doğru olduğunu gösterir.

6. $n = 1$ için $3^{6n} - 2^{6n} = 3^6 - 2^6 \equiv [(3^3) - 8] [(3^3) + 8] = 19.35$ olacağından, önerme $n = 1$ için doğrudur.

Önerme $n = k$ için doğru olsun. Bu durumda

$$3^{6k} - 2^{6k} = 35.p$$

olacak şekilde bir p tamsayısı vardır.

$n = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim :

$$\begin{aligned} 3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)} &= 3^{6k+6} - 2^{6k+6} = 3^6 3^{6k} - 2^6 2^{6k} \\ &= 729.3^{6k} - 64.2^{6k} = (665 + 64) 3^{6k} - 64.2^{6k} \\ &= 665.3^{6k} + 64(3^{6k} - 2^{6k}) \\ &= 35.19.3^{6k} + 64.35p \\ &= 35.(19.3^{6k} + 64p) = 35.q \end{aligned}$$

O halde $3^{6n} - 2^{6n}$ sayısı her $n \in \mathbb{N}$ için 35 ile bölünür.

7. $n^2 + n + 41$ ifadesinde n yerine 1, 2, 3, ..., 40 sayıları yazıldığında hep asal sayılar elde edilir. Bu $n^2 + n + 41$ sayısının her bir n için asal olacağını göstermez. Çünkü $n = 41$ için

$$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41.43$$

bulunur ki bu $n^2 + n + 41$ sayısının asal olmadığını gösterir.

8. $p = 2$ için $2^2 - 1 = 3$, $p = 3$ için $2^3 - 1 = 7$, $p = 5$ için $2^5 - 1 = 31$, $p = 7$ için $2^7 - 1 = 127$ bulunur. Bu sayılar asaldır. $p = 11$ için $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ olur, bu da $2^{11} - 1$ sayısının asal olmadığını gösterir. O halde " p asal ise $2^p - 1$ asaldır." önermesi yanlıştır.

9. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasyonel olsun. Bu takdirde $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. Her iki tarafın karesi alınır

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$$

bulunur. Sol taraf irrasyonel, sağ taraf rasyonel olduğundan bu mümkün değildir. O halde $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrasyoneldir.

10. $x + \sqrt{2}$ rasyonel olsun. $x + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. Buradan

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - x$$

bulunur. Sol taraf irrasyonel, sağ taraf rasyoneldir. Bu olamaz. O halde $x + \sqrt{2}$ irrasyoneldir.

11. r_1 ve r_2 iki rasyonel sayı olsun.

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

denirse r rasyonel ve $r_1 < r < r_2$ dir. O halde iki rasyonel sayı arasında daima bir rasyonel sayı bulunur. Bu düşünce arka arkaya uygulandığında şu sonuç elde edilir. İki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı bulunur.

12. a) $|x^2 - 7x + 6| > x^2 - 7x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$

x	1	6
$x^2 - 7x + 6$	+ 0 - 0 +	

b) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0 \Leftrightarrow |3x - 5| > |2x + 3|$

x	2/5	8	
$5x^2 - 42x + 16$	+ 0 - 0 +		

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 25 > 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 42x + 16 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{5} \text{ veya } x > 8$$

c) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

olduğu bilinmektedir. Eşitsizliğin sol parçasından

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$$

yazılabilir. $a = x^2$, $b = 5x$ yazılırsa

$$|x^2| - |5x| \leq |x^2 - 5x|$$

bulunur. O halde verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ 'den eşitliği sağlayan noktalar çıkarılarak bulunabilir.

$x^2 - |5x| = |x^2 - 5x|$ denkleminin çözüm kümesi $C_1 = \{0\} \cup [5, +\infty)$ olacağından verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$$C = (-\infty, 0) \cup (0, 5) = (-\infty, 5) \setminus \{0\} \text{ dır.}$$

13. $\left| x + \left| x + 1 + \left| x + 2 + \left| \dots + \left| x + n \right| \right| \right| \dots \right| \right| = 0 \Rightarrow$

$$(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)|x| = 0 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)|x| = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{n}{2} + |x| = 0 \Rightarrow |x| = -\frac{n}{2} \text{ olmalı.}$$

Sol taraf bir tamsayı olduğundan sağ taraf da bir tamsayı olmalıdır. Bunun için de n çift sayı olmalıdır.

$$n = 6 \text{ için } |x| = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow -3 \leq x < -2 \text{ olmalıdır.}$$

GEREKLİ BİLGİLER

Bu bölümdeki problemleri çözmek için aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır.

TANIM

A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye A dan B ye bir **fonksiyondur** denir.

(a) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.

(b) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir.

TANIM

f ve g aynı küme üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve bu kümenin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ ise f ile g fonksiyonları **eşittir** denir ve $f = g$ şeklinde yazılır.

TANIM

f , A dan B ye bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için

$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna **özdeşlik** veya **birim fonksiyon** denir, I_A ile gösterilir.

TANIM

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu takdirde g fonksiyonu $f(A)$ daki her $f(x)$ elemanını C kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına dönüştürür. Böylece A nın her bir x elemanını C nin bir $z = g(f(x))$ elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının **bileşkesi** denir ve $g \circ f$ ile gösterilir.

TANIM

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için

$$f(A) = B$$

oluyorsa f fonksiyonuna **örtten fonksiyon**, aksi takdirde fonksiyona **içine fonksiyon** adı verilir. Buna göre eğer f örtense her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan**, $f(x_1) \leq f(x_2)$ olursa **azalmayandır** denir. Benzer olarak, E kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **azalan**, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise **artmayandır** denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona **kesin olarak monotondur**, artmayan veya azalmayansa **monotondur** denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona **parçalı monoton fonksiyon** adı verilir.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer farklı elemanların görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna **birebirdir** denir.

TANIM

Hem birebir hem de örten olan fonksiyona **birebir örten fonksiyon** denir.

TANIM

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir örten olsun.

$$f(g(y)) = y \text{ ve } g(f(x)) = x$$

veya başka bir yazılışla

$$f \circ g = I_Y \text{ ve } g \circ f = I_X$$

ise g fonksiyonuna f nin **tersidir** denir, f^{-1} ile gösterilir.

TANIM

Eğer $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine bir **simetrik küme** denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir **çift fonksiyondur** denir. Eğer her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir **tek fonksiyondur** denir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f , A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun **mutlak değeri fonksiyonu** denir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

şeklinde tanımlanan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **tam kısım fonksiyonu** adı verilir.

Burada $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermektedir.

TANIM

n bir doğal sayı ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ler de, $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir **polinom (çok terimli)** denir. Buradaki n doğal sayısına **polinomun derecesi**, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sayılarına da **polinomun katsayıları** adı verilir.

TANIM

$f : A \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin **işaret fonksiyonu** denir, $\text{sgn} f$ ile gösterilir. Başka bir yazıyla

$$\text{sgn } f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

PROBLEMLER

1. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + 1$ olsun. $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{f(2)}$, $f(a+b)$, $f(a) - f(b)$, $f(a)$, $f(b)$, $f(ab)$ ifadelerini bulunuz.
2. Her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = |x - 3| + |x - 1|$ olsun. $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(-1)$, $g(-2)$ ifadelerini hesaplayınız. $g(t + 2) = g(t)$ eşitliğini sağlayan t değerlerini bulunuz.
3. $f(n) = n!$ şeklinde tanımlanan ve **faktöriyel fonksiyonu** adı verilen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz. Bu fonksiyon örten midir?
4. $\lambda(x)$, x den büyük olmayan asal sayıların sayısını göstermek üzere $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **asal sayı fonksiyonu** adı verilir. Bu fonksiyonun $(0, 15)$ aralığındaki grafiğini çiziniz.
5. $|x| \leq 2$ için $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f(-x) = f(x)$	(b) $f(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$
(c) $f(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$	(d) $f\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$
(e) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{1 + t}$	(f) $\frac{1}{2 + f(x)} = \frac{2 - f(x)}{x^2}$
6. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ 2, & 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor.
 - (a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
 - (b) $g(x) = f(2x)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.
 - (c) $h(x) = f(x - 2)$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.
 - (d) $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$ şeklinde tanımlanan k fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.
7. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olan $D = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$ kümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye olan bir fonksiyonun grafiği olabilir mi? Neden?

8. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye olan öyle iki f ve g fonksiyonu bulunuz ki $f \neq g$ fakat $f \circ g = g \circ f$ olsun.
9. İspat ediniz ki, eğer f ve g çift ise $f + g$ de çifttir. Bu iddia tek fonksiyonlar için de geçerli midir?
10. f ve g tek fonksiyon olduğunda $f \cdot g$ nin çift olacağını gösteriniz.
11. Öyle f fonksiyonları bulunuz ki aşağıdaki bağıntılar yanlış olsun.
- (a) $f(x^2) = [f(x)]^2$ (b) $f(|x|) = |f(x)|$
 (c) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (d) $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$
 (e) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$
12. Öyle f fonksiyonları bulunuz ki problem 11 deki eşitlikler doğru olsun.
13. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
- (a) $y = -\lfloor x \rfloor$ (d) $y = \lfloor 2x \rfloor$ (g) $y = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$
 (b) $y = \lfloor -x \rfloor$ (e) $y = 2\lfloor x \rfloor$ (h) $y = 1 / (\lfloor x \rfloor + 3)$
 (c) $y = -\lfloor -x \rfloor$ (f) $y = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$
14. Karşılarında yazılı aralıklar üzerinde tanımlı f fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
- (a) $f(x) = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$, $[-4, 4]$ (c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$, $[0, 3]$
 (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, $[-3, 3]$ (d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $[0, 5]$
15. $[-1, 2]$ aralığında $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ve $g(x) = \lfloor 2x \rfloor$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları veriliyor. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların $[-1, 2]$ aralığındaki grafikleri çiziniz.
- (a) $h(x) = f(x) + g(x)$ (c) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
 (b) $k(x) = f(x) + g\left(\frac{x}{2}\right)$ (d) $q(x) = \frac{1}{4} f(2x) \cdot g\left(\frac{x}{2}\right)$

16. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının eğer varsa terslerini bulunuz.

(a) $f(x) = x + 1$

(b) $f(x) = 2x + 5$

(c) $f(x) = 1 - x^2$

(d) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 8x, & 4 < x \end{cases}$ ise

17. $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. sgnf fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

18. $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{x-2}{\sqrt{|x|^2-9}} \right)$ şeklinde tanımlanan $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş A kümesini bulup, grafiğini çiziniz.

19. $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon monoton mudur?

20. Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olduğunu gösteriniz.

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},$

$g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

(b) $f(x) = x - \sqrt{x^2-1},$

$g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

21. $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = f(|x|)$ bağlantılarının grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız.

$y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak yukarıdaki bağlantıların grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜMLER

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(2) &= 2 + 1 = 3 & f(a+b) &= a + b + 1 \\
 f(-2) &= -2 + 1 = -1 & f(a) - f(b) &= a + 1 - b + 1 = a - b \\
 f(2) &= -3 & f(a) &= a + 1 \\
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} & f(b) &= b + 1 \\
 \frac{1}{f(2)} &= \frac{1}{-3} & f(ab) &= ab + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad g(0) &= |-3| + |-1| = 3 + 1 = 4 & g(1) &= |1-x| + |1-1| = |-2| + 0 = 2 \\
 g(2) &= |2-3| + |2-1| = 1 + 1 = 2 & g(3) &= |3-3| + |3-1| = 0 + 2 = 2 \\
 g(-1) &= |-1-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8 & g(-2) &= |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8 \\
 g(t+2) &= g(t) \Rightarrow |t+2-3| + |t+2-1| = |t-3| + |t-1| \\
 &\Rightarrow |t+1| = |t-3| \\
 &\Rightarrow t+1 = t-3 \text{ veya } t+1 = -(t-3) \\
 &\Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad f(n+1) - f(n) &= (n+1)! - n! = n! (n+1-1) = n! \quad n > 0 \\
 &\Rightarrow f(n) < f(n+1) \text{ yani fonksiyon artandır.}
 \end{aligned}$$

Fonksiyon örten değildir. Örneğin 5 sayısı hiçbir doğal sayının faktöriyeli değildir.

$$4. \quad 0 < x < 2 \text{ için}$$

$$\lambda(x) = 0$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \lambda(x) = 1$$

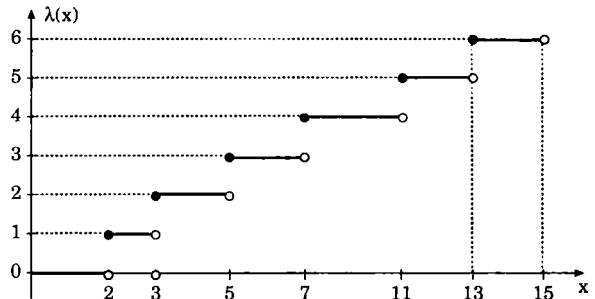
$$3 \leq x < 5 \Rightarrow \lambda(x) = 2$$

$$5 \leq x < 7 \Rightarrow \lambda(x) = 3$$

$$7 \leq x < 11 \Rightarrow \lambda(x) = 4$$

$$11 \leq x < 13 \Rightarrow \lambda(x) = 5$$

$$13 \leq x < 15 \Rightarrow \lambda(x) = 6$$



$$5. \quad (a) \quad f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$$

$$(b) \quad f(a-2) = \sqrt{4 - (a-2)^2} = \sqrt{4 - a^2 + 4a - 4} = \sqrt{4a - a^2}$$

$$(c) f\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - s^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{16 - s^2}$$

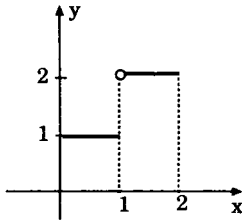
$$(d) f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 25}{4}}$$

$$(e) f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$$

$$(f) \frac{1}{2 + f(x)} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}} = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{(2 - \sqrt{4 - x^2})(2 + \sqrt{4 - x^2})}$$

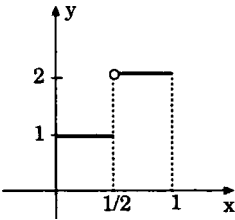
$$= \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{4 - (4 - x^2)} = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2} = \frac{2 - f(x)}{x^2}$$

6. (a)



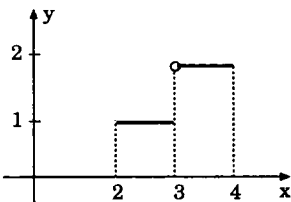
$$(b) g(x) = f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq 2x \leq 1 \text{ ise} \\ 2, & 1 < 2x \leq 2 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

g fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ aralığıdır.



$$(c) h(x) = f(x - 2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x - 2 \leq 1 \\ 2, & 1 < x - 2 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ 2, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

h fonksiyonunun tanım kümesi $[2, 4]$ aralığıdır.



(d) $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$

$f(2x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ aralığı $f(x - 2)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[2, 4]$ aralığıdır. Dolayısı ile

$$D_k = [0, 1] \cap [2, 4] = \emptyset \text{ dir.}$$

7. $|x| + |y| = 1$

1) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise $x + y = 1$,

2) $x \leq 0$ ve $y \geq 0$ ise $-x + y = 1$,

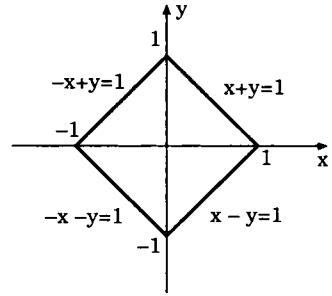
3) $x \leq 0$ ve $y \leq 0$ ise $-x - y = 1$,

4) $x \geq 0$ ve $y \leq 0$ ise $x - y = 1$

olur.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ noktaları grafiğe aittir.

Şu halde $\frac{1}{2}$ sayısına hem $\frac{1}{2}$, hem $-\frac{1}{2}$ karşılık gelmektedir. O halde D kümesi bir fonksiyonun grafiği olamaz.



$|x| + |y| = 1$ in grafiği

8. $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ olsun.

$$\left. \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 \\ (f \circ g)(x) &= g(f(x)) = g(x) = x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g = g \circ f$$

9. f ve g çift olduğundan $f(-x) = f(x)$ ve $g(-x) = g(x)$ dir.

$h = f + g$ dersek $h(-x) = h(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$h(-x) = (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x) \Rightarrow f + g \text{ çift fonksiyondur.}$$

İddia tek fonksiyon içinde geçerlidir. İspat benzer şekilde yapılabilir.

10. f tek ise $f(-x) = -f(x)$, g tek ise $g(-x) = -g(x)$ olur.

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) \Rightarrow f \cdot g \text{ çifttir.}$$

11. (a) $f(x) = x + 1$ olsun. $f(x^2) = x^2 + 1$, $[f(x)]^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ olduğundan, $f(x^2) \neq [f(x)]^2$ dir.

(b) $f(|x|) = |f(x)|$

$f(x) = x + 1$ olsun. $f(|x|) = |x| + 1$, $|f(x)| = |x + 1|$ olacağından $f(|x|) \neq |f(x)|$ dir. Örneğin $f(|-2|) = |-2| + 1 = 1$, $|f(-2)| = 1$ olur.

(c) $f(x) = x + 1$ olsun.

$$f(x + y) = x + y + 1$$

$$f(x) + f(y) = x + 1 + y + 1 = x + y + 2 \Rightarrow f(x + y) \neq f(x) + f(y).$$

(d) $f(x) = 2x + 1$ olsun. $f(\lfloor x \rfloor) = 2\lfloor x \rfloor + 1$ ve $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor 2x + 1 \rfloor$ olur.

Dolayısıyla $f(\lfloor x \rfloor) \neq \lfloor f(x) \rfloor$ dır.

(e) $f(x) = x + 1$ olsun. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1$ ve $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x + 1}$ olacağından

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \neq \frac{1}{f(x)} \text{ dir.}$$

12. (a) $f(x) = x$ olsun.

$$f(x^2) = x^2, [f(x)]^2 = x^2 \Rightarrow f(x^2) = [f(x)]^2$$

(b) $f(x) = x$ olsun.

$$f(|x|) = |x|, |f(x)| = |x| \text{ olduğundan } f(|x|) = |f(x)| \text{ dir.}$$

(c) $f(x) = 3x$ olsun. $f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y$ ve $f(x) + f(y) = 3x + 3y$ olduğundan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dir.

(d) $f(x) = x + 1$ olsun. $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor + 1$ ve $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ olacağından $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$ dır.

(e) $f(x) = x$ olsun. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ olacağından $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ dir.

13. (a) $y = -\lfloor x \rfloor$

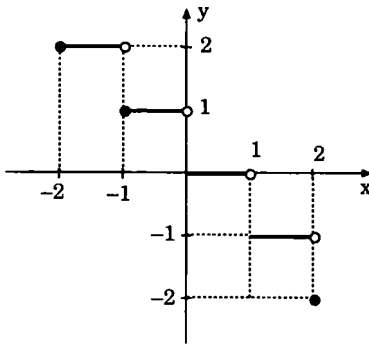
$$-2 \leq x < -1 \text{ ise } \lfloor x \rfloor = -2 \Rightarrow y = 2$$

$$-1 \leq x < 0 \text{ ise } \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < 1 \text{ ise } \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ ise } \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$x = 2 \text{ ise } \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow y = -2$$



$y = -|x|$ in grafiği

(c) $y = -|-x|$

$$x = -2 \text{ ise } y = -2$$

$$-2 < x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x < 1$$

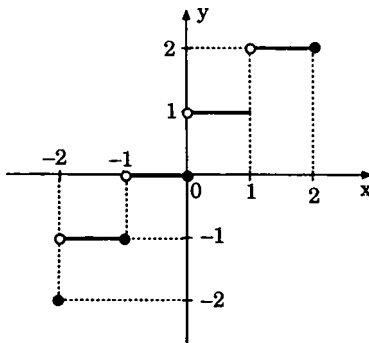
$$x = 2 \Rightarrow |-x| = 2 \Rightarrow y = -|-x| = -2$$

$$|-x| = 1 \Rightarrow y = -|-x| = -1$$

$$|-x| = 0 \Rightarrow y = -|-x| = 0$$

$$|-x| = -1 \Rightarrow y = -|-x| = 1$$

$$|-x| = -2 \Rightarrow y = -|-x| = 2$$



$y = -|-x|$ in grafiği

(d) $y = \lfloor 2x \rfloor$

$$-2 \leq x < -\frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq 2x < -3 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -4$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -1 \Rightarrow -3 \leq 2x < -2 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -3$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -1$$

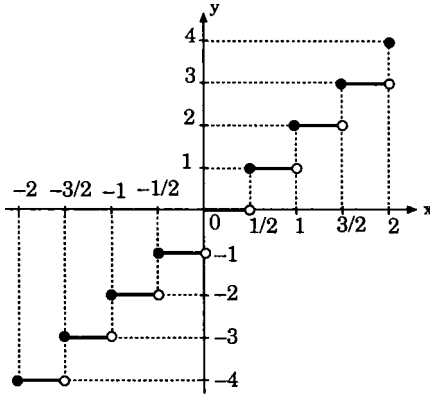
$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 1$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 2$$

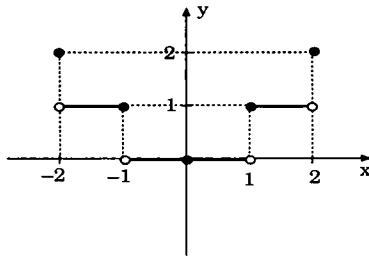
$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \lfloor 4 \rfloor = 4$$



(g) $y = \lfloor |x| \rfloor$

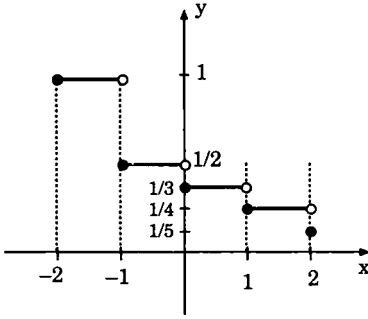
$$\begin{aligned} -2 < x \leq -1 &\Rightarrow 1 \leq |x| < 2 \Rightarrow y = 1 \\ -1 < x \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq |x| < 1 \Rightarrow y = 0 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow 0 \leq |x| < 1 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow 1 < |x| \leq 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \text{ ve } x = 2 \text{ için} &\Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$



fonksiyon çift olduğundan $[0, 2]$ de grafik çizilip Oy- eksenine göre simetri alınabilirdi.

(h) $y = \lfloor \frac{1}{|x|+3} \rfloor$

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow \lfloor |x| \rfloor = -2 & y = 1 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow \lfloor |x| \rfloor = -1 & y = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow \lfloor |x| \rfloor = 0 & y = \frac{1}{3} \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow \lfloor |x| \rfloor = 1 & y = \frac{1}{4} \\ x = 2 &\Rightarrow \lfloor |x| \rfloor = 2 & y = \frac{1}{5} \end{aligned}$$



14. (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ fonksiyonu çift olduğundan $[0, 3]$ aralığında grafiği çizip Oy- eksenine göre simetri alalım.

$$\lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \leq x^2 < m+1, \quad m \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m} \leq x < \sqrt{m+1}$$

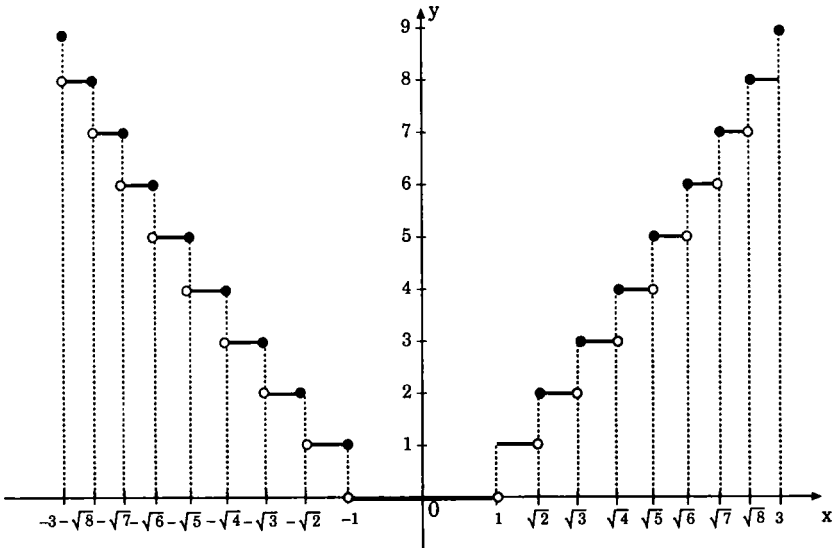
$$m = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0 \quad m = 5 \Rightarrow \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 5$$

$$m = 1 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1 \quad m = 6 \Rightarrow \sqrt{6} \leq x < \sqrt{7} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 6$$

$$m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2 \quad m = 7 \Rightarrow \sqrt{7} \leq x < \sqrt{8} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 7$$

$$m = 3 \Rightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3 \quad m = 8 \Rightarrow \sqrt{8} \leq x < 3 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 8$$

$$m = 4 \Rightarrow 2 \leq x < \sqrt{5} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 4 \quad x = 3 \text{ ise } \lfloor x^2 \rfloor = 9$$



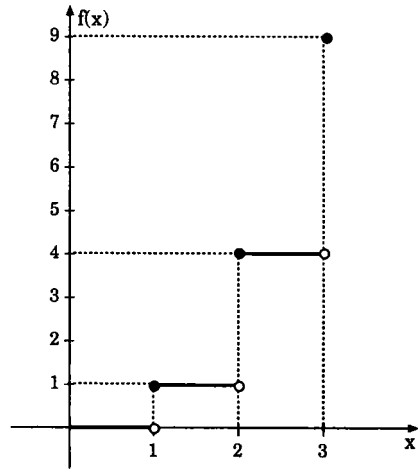
(c) $f(x) = [x]^2, [0, 3]$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [x]^2 = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow [x]^2 = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow [x]^2 = 4$$

$$x = 3 \quad [x] = 3 \Rightarrow [x]^2 = 9$$



15. (a) $h(x) = f(x) + g(x) = [x] + [2x]$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow [x] = -1, [2x] = -2 \Rightarrow h(x) = -3$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1, [2x] = -1 \Rightarrow h(x) = -2$$

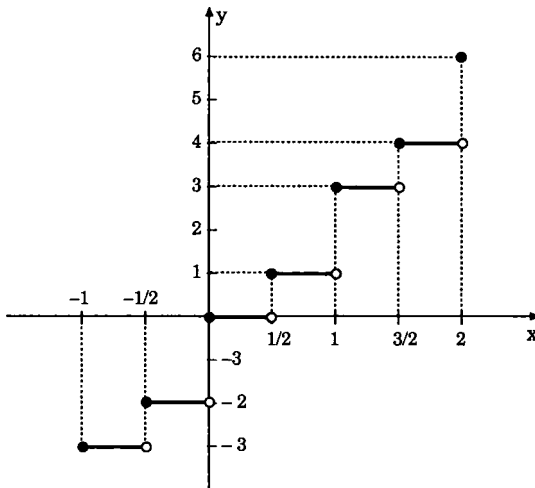
$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = 0, [2x] = 0 \Rightarrow h(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0, [2x] = 1 \Rightarrow h(x) = 1$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow [x] = 1, [2x] = 2 \Rightarrow h(x) = 3$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1, [2x] = 3 \Rightarrow h(x) = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2, [2x] = 4 \Rightarrow h(x) = 6$$



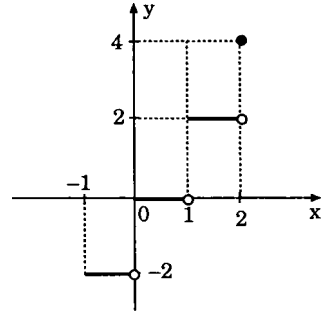
$$(b) k(x) = f(x) + g\left(\frac{x}{2}\right) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = -2$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 4$$



(c) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, (a) şıkkındaki $\lfloor x \rfloor$ ve $\lfloor 2x \rfloor$ değerleri gözönüne alınırsa

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = 2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow p(x) = 1$$

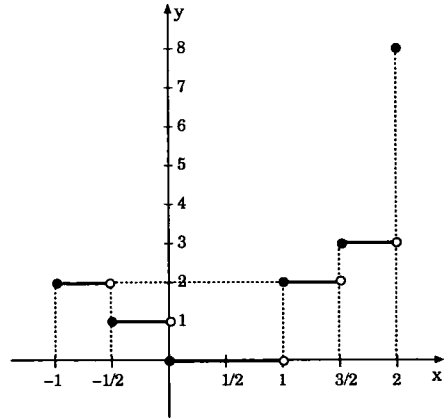
$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow p(x) = 0$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow p(x) = 2$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow p(x) = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow p(x) = 8$$



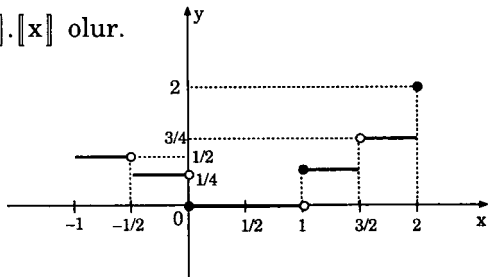
$$(d) q(x) = \frac{1}{4} f(2x) \cdot g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \lfloor 2x \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor \text{ olur.}$$

(c) şıkkında bulunan değerler kullanılarak

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ için } q(x) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ için } q(x) = \frac{1}{4}$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ için } q(x) = 0$$



$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \quad \text{için} \quad q(x) = 0$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \quad \text{için} \quad q(x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \quad \text{için} \quad q(x) = \frac{3}{4}$$

$$x = 2 \quad \text{için} \quad q(x) = 2$$

16. (a) $f(x) = x + 1$

Bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekir.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

dolayısı ile f birebir fonksiyondur.

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$ olacak şekilde

$\exists x \in \mathbb{R}$ vardır $\Rightarrow f$ örtendir.

Şimdi f fonksiyonunun tersini bulalım.

$$x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = y - 1 \text{ dir.}$$

(c) $f(x) = 1 - x^2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ önermesi doğru mudur?}$$

$$1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow f, 1 : 1 \text{ değildir}$$

Dolayısıyla tersi yoktur.

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ ise} \\ x^2, & 1 \leq x < 4 \text{ ise} \\ 8x, & 4 < x \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ olsun. } x_1, x_2 < 1 \text{ ise } x_1 = x_2$$

$$1 \leq x_1, x_2 < 4 \text{ ise } x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ sağlanır.}$$

$$x_1, x_2 > 4 \text{ ise } 8x_1 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ dir.}$$

Yani f $1 : 1$ fonksiyondur.

$$y \in \mathbb{R} \text{ olsun. } x < 1 \text{ için } x = y, 1 \leq x < 4 \text{ için } x = \sqrt{y}, 4 < x \text{ için } x = \frac{8}{y},$$

olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ bulunacağından f örtendir.

Şimdi fonksiyonun tersini bulalım.

$$x < 1 \quad \text{ise } y = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y \Rightarrow f^{-1}(x) = x$$

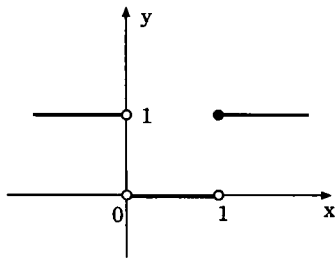
$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{ise } y = x^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$x > 4 \quad \text{ise } y = 8x \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{8} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ ise} \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ \frac{x}{8}, & 4 < x \text{ ise} \end{cases}$$

$$17. 0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = 0$$

$$x \geq 1 \text{ ve } x < 0 \Rightarrow \frac{\lfloor x \rfloor}{x} > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = 1$$



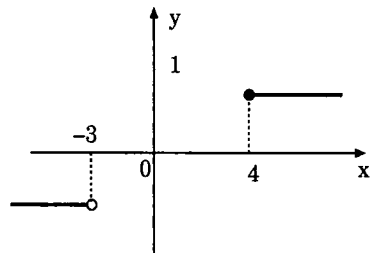
$$18. f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > 3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > 3 \text{ veya } \lfloor x \rfloor < -3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 4 \text{ veya } x < -3 \Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus [-3, 4)$$

$$x > 4 \text{ için } \operatorname{sgn} f(x) = 1,$$

$$x < -3 \text{ için } \operatorname{sgn} f(x) = -1$$

olur.

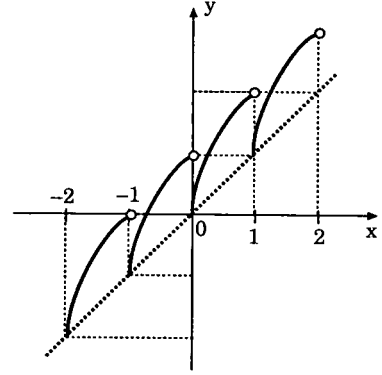


19. $x = \lfloor x \rfloor + t$, $0 \leq t \leq 1$ olduğu düşünülürse

$$y = \lfloor x \rfloor + t + \sqrt{t} = x + \sqrt{t}$$

olur. $y = x$ ve $y = \sqrt{t}$ grafikleri gözönüne alındığında yandaki şekil elde edilir.

Bu fonksiyon monoton olmayıp parçalı monotonudur.



$$20. (a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - 1 = f(x)$$

$$(b) f(x) = x - \sqrt{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

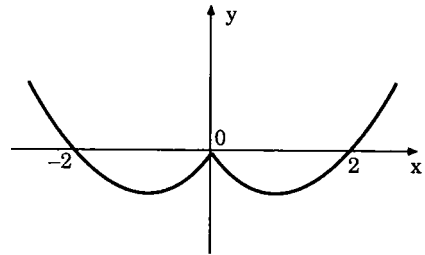
$$g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})} = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1} = x - \sqrt{x^2-1} = f(x)$$

21. $y = x^2 - 2x$ için

$$(a) y = f(|x|) = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

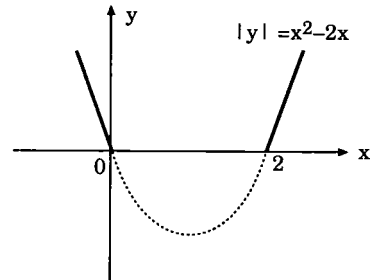
$y = f(|x|)$ çizilirken $x \geq 0$ için

$y = f(x)$ çizilir ve y eksenine göre simetri alınır.

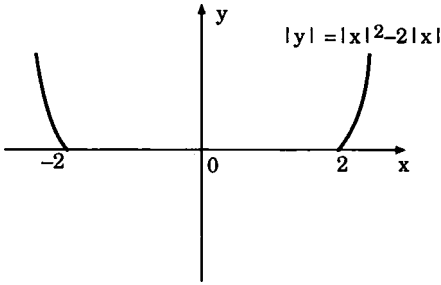


$$(b) |y| = f(x)$$

$|y| = f(x)$ in grafiği çizilirken önce $y = f(x)$ in grafiği çizilir. Sonra grafikten $y < 0$ olduğu yerler atılır.

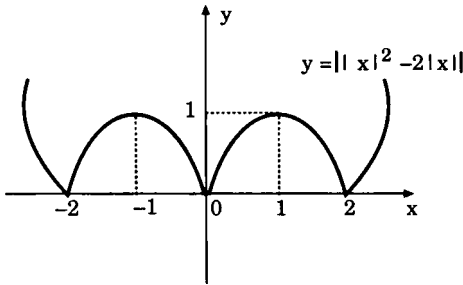


(ç) $|y| = f(|x|)$



$|y| = |f(x)|$ çizilirken $x \geq 0$ için $y = f(x)$ çizilir, y eksenine göre simetri alınır ve y nin negatif olduğu yerler atılır.

(d) $y = |f(|x|)|$



$y = f(x)$ çizilir. Oy ekseninin solundaki parça atılıp, sağdaki parçanın Oy eksenine göre simetriği alınır. Böylece $y = f(|x|)$ çizilmiş olur. Ox ekseninin üzerinde kalan parça aynen kalır, eksenin altındaki parçanın Ox eksenine göre simetriği alınır.

TRİGONOMETRİK, ÜSTEL, LOGARİTMİK, HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

TANIM

$a \neq 1$ herhangi bir pozitif reel sayı olsun.

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir **üstel fonksiyon** denir.

TANIM

$y = a^x$ in grafiğinden de kolayca görülebileceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu birebir örtendir. Dolayısıyla bu fonksiyonun $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona **logaritma fonksiyonu** adı verilir ve fonksiyonun kuralı $y = \log_a x$ (a tabanına göre logaritma x okunur) biçiminde yazılır. Demek ki $x > 0$ için

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

dir.

Hiperbolik fonksiyonlar aşağıdaki biçimde tanımlanır :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

TANIM

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonunun $y = f(x)$ eşitliği ile verilen kuralı başka şekillerde de verilebilir. Örneğin $x = g(t)$ alınırsa x değişkeni A kümesini taradığında t de belli bir C kümesini tarar. Buna bağlı olarak $y = f(g(t))$ olur. Demek ki bir f fonksiyonunun grafiği

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, t \in C$$

şeklinde de verilebilir. Burada C , t parametresinin taradığı küme olup çoğunlukla bir I aralığıdır. u ile v de aynı C kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. t parametresinin değişim kümesi $I = [a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık olduğunda $A(u(a), v(a))$ noktasına eğrinin **başlangıç noktası** $B(u(b), v(b))$ noktasına da **bitiş noktası** adı verilir. Böyle eğrilere de **yönlendirilmiş eğriler** denir.

PROBLEMLER

1. $\theta \neq 2k\pi$ için aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu tümevarım metodu ile gösteriniz.

$$(a) \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$(b) \frac{1}{2} + \cos \theta + \sin 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

2. $\theta \neq k\pi$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \dots + \sin (2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}$$

$$(b) \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$$

$$(c) \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \dots \cdot \cos 2^n \theta = \frac{\sin 2^{n+1} \theta}{2^{n+1} \sin \theta}$$

3. $y = \sin x$ eğrisinin grafiğinden yararlanarak

$$y = \sin 2x \text{ ve } y = \sin \frac{x}{2} \text{ eğrilerini çiziniz.}$$

4. $y = \cos x$ in grafiğinden yararlanarak

$$y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \text{ ve } y = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \text{ in grafiğini çiziniz.}$$

5. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

$$(a) \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (b) \arcsin \frac{1}{2} \quad (c) \arctan 0 \quad (d) \operatorname{arccot} 1$$

6. $\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. $\arcsin \frac{x-1}{x+1} = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \sin (\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(c) \tan (\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) \cos (\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(d) \arcsin (\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$(c) \arccos (\arcsin x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$(e) \cos (\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(f) \arcsin x + \arcsin t = \arcsin \left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$(g) \arccos x + \arccos t = \arccos \left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)} \right)$$

$$(h) \arctan x + \arctan t = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$$

$$(i) \sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

9. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğrilerin kartezyen koordinat sistemindeki denklemini yazınız. Eğrilerin cinsini belirtiniz.

$$(a) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(f) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(b) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(g) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(c) \begin{cases} x = t \\ y = t^2 + \pi t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(h) \begin{cases} x = a \cos t + b \sin t \\ y = a \sin t - b \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(d) \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(i) \begin{cases} x = \sqrt{-t} \\ y = -\frac{1}{4}t + 1 \end{cases}, \quad t \leq 0$$

$$(e) \begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}, \quad t \neq -1$$

$$(j) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

10. Parametrik denklemleri aşağıda verilen eğrileri çizin.

$$(a) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(c) \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 1 \end{cases}, \quad -8 \leq t \leq 1$$

$$(b) \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(d) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

11. $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f + g$ periyodik midir? $f + g$ fonksiyonunun esas periyodu var mıdır?

12. $f(x) = \sin^4 x$ ve $g(x) = \cos^4 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f + g$ periyodik midir? $f + g$ nin esas periyodu f ve g nin esas periyoduna eşit midir?

ÇÖZÜMLER

$$1. \quad (a) \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

1) $n = 1$ için

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \sin \theta$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin k\theta = \frac{\sin \frac{k+1}{2} \theta \sin \frac{k}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin (k+1)\theta = \frac{\sin \frac{k+2}{2} \theta \cdot \sin \frac{k+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(1) eşitliğinin her iki yanına $\sin (k+1)\theta$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin k\theta + \sin (k+1)\theta &= \frac{\sin \frac{k+1}{2} \theta \cdot \sin \frac{k}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} + \sin (k+1)\theta \\ &= \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \left[\sin \frac{k+1}{2} \theta \cdot \sin \frac{k}{2} \theta + \sin (k+1)\theta \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{2k+1}{2} \theta + \cos \frac{2k+1}{2} \theta - \cos \frac{k+3}{2} \theta \right] \\ &= \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(k + \frac{3}{2} \right) \theta \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left(\sin \frac{k+2}{2} \theta \cdot \sin \frac{k+1}{2} \theta \right). \end{aligned}$$

$$b) \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos (n\theta) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

1) $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos \theta &= \frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos\theta}{2} = \frac{\cos\theta}{2} + \frac{1 + \cos\theta}{2} = \frac{1}{2} + \cos \theta \end{aligned}$$

olur. O halde önerme $n = 1$ için doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos (k\theta) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

eşitliği doğru olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu, yani,

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos (k + 1)\theta = \frac{\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

eşitliğinin varlığını göstereyim.

(1) eşitliğinin her iki yanına $\cos (k + 1)\theta$ ekleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos k\theta + \cos(k + 1)\theta &= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \cos (k + 1)\theta \\ &= \frac{\sin(k + 1)\theta \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \cos(k + 1)\theta + 2\sin\frac{\theta}{2} \cos(k + 1)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin(k + 1)\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos(k + 1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$2. \quad (a) \sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \dots + \sin (2n - 1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}$$

1) $n = 1$ için $\sin \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} = \sin \theta$ olur. Önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru, yani,

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin (2k - 1)\theta = \frac{\sin^2 k\theta}{\sin \theta} \quad (1)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani,

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin (2k + 1) \theta = \frac{\sin^2(k + 1)\theta}{\sin \theta}$$

eşitliğinin varlığını göstereceğiz.

(1) eşitliğinin her iki yanına $\sin (2k + 1) \theta$ eklenirse

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin (2k + 1) \theta &= \frac{\sin^2(k)\theta}{\sin \theta} + \sin(2k + 1)\theta \\ &= \frac{\sin^2(k\theta) + \sin(2k + 1)\theta \sin \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 k\theta + \sin \theta (2 \sin k\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos \theta + (\cos^2 k\theta \cdot \sin^2 k\theta) \cdot \sin^2 \theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{(\sin k\theta \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot \cos k\theta)^2}{\sin \theta} = \frac{\sin^2(k + 1)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$(b) \cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n - 1) \theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}.$$

(1) $n = 1$ için

$$\cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2 \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin \theta} = \cos \theta$$

bulunur. O halde eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

(2) $n = k$ için doğru olsun :

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2k - 1) \theta = \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta}. \quad (1)$$

(3) $n = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\cos (2k + 1) \theta$ eklenirse

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2k - 1) \theta + \cos (2k + 1) \theta \\ &= \frac{\sin 2k\theta}{2 \sin \theta} + \cos (2k + 1) \theta = \frac{\sin 2k\theta + 2 \cos (2k + 1) \theta \sin \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{\sin 2k\theta + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(2k + 2)\theta - \sin 2k\theta]}{2 \sin \theta} = \frac{\sin(2k + 2)\theta}{2 \sin \theta} \end{aligned}$$

bulunur ki bu da önermenin $k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterir.

$$(c) \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \dots \cdot \cos 2^n \theta = \frac{\sin 2^{n+1} \theta}{2^{n+1} \sin \theta}$$

1) $n = 1$ için

$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta = \frac{\sin 4\theta}{4 \sin \theta} = \frac{2 \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta}{4 \sin \theta} = \frac{2 \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta}{4 \sin \theta} \\ = \cos \theta \cos 2\theta$$

2) $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \dots \cdot \cos 2^k \theta = \frac{\sin 2^{k+2} \theta}{2^{k+2} \sin \theta} \quad (1)$$

3) $n = k + 1$ için

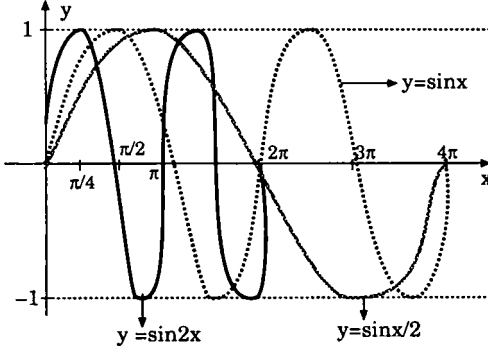
$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \dots \cdot \cos 2^{k+1} \theta = \frac{\sin 2^{k+2} \theta}{2^{k+2} \sin \theta}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

(1) eşitliğini $\cos 2^{k+1} \theta$ ile çarpalım.

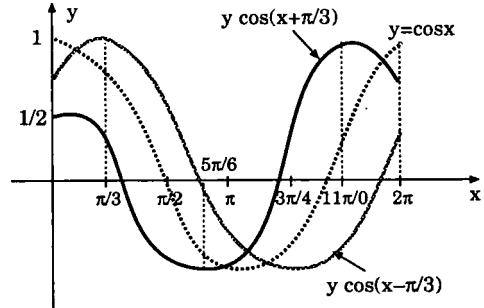
$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \dots \cos 2^k \theta \cdot \cos 2^{k+1} \theta = \frac{\sin 2^{k+1} \theta}{2^{k+1} \sin \theta} \cdot \cos 2^{k+1} \theta \\ = \frac{2 \sin 2^{k+1} \theta \cdot \cos 2^{k+1} \theta}{2^{k+2} \sin \theta} = \frac{\sin(2^{k+1} + 2^{k+1}) \theta}{2^{k+2} \sin \theta} = \frac{\sin 2^{k+2} \theta}{2^{k+2} \sin \theta}.$$

3.



4. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ eğrisini çizmek için $y = \cos x$ eğrisini $\frac{\pi}{3}$ birim sola kaydırmak yeterdir.

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ eğrisini çizmek için $y = \cos x$ eğrisini $\frac{\pi}{3}$ birim sağa kaydırmak gerekir.



5. (a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $\arcsin \frac{1}{2}$

$$x = \arcsin \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

(c) $\arctan 0$

$$x = \arctan 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

(d) $\operatorname{arccot} 1$

$$x = \operatorname{arccot} 1 \Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

6. $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin (a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} &= \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{29}} \sqrt{1 - \frac{25}{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}} \sqrt{1 - \frac{4}{29}} \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{4}{29} + \frac{25}{29} \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7. $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \sin y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 y} = \frac{x-1}{x+1}$

$$\Rightarrow \cos^2 y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow y = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}.$$

8. (a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\arctan x = y \Rightarrow \tan y = x \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos y} = x \Rightarrow \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = x$$

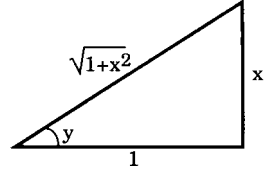
$$\Rightarrow \sin^2 y = x^2 - x^2 \sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(b) \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ olur.}$$



$$(c) \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sin y \Rightarrow \tan y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

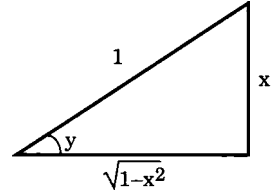
$$\Rightarrow \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$(ç) \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \Rightarrow \tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

olur. Buradan

$$\tan y = \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ bulunur.}$$



$$(d) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos x = y \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = y \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = \arcsin y$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = \arcsin(\cos x).$$

$$(f) \arcsin x + \arcsin t = \arcsin(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x = u, \arcsin t = v, x = \sin u, t = \sin v$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u$$

$$= \sin u \sqrt{1-\sin^2 v} + \sin v \sqrt{1-\sin^2 u}$$

$$= x \sqrt{1-t^2} + t \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \sin(u+v) = x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow u+v = \arcsin(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x + \arcsin t = \arcsin(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2})$$

$$(g) \arccos x + \arccos t = \arccos (xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})$$

$$u = \arccos x, \quad v = \arccos t, \quad x = \cos u, \quad t = \cos v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

$$= \cos u \cdot \cos v - \sqrt{1-\cos^2 u} \cdot \sqrt{1-\cos^2 v}$$

$$= x \cdot t - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$\Rightarrow u+v = \arccos (xt - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2})$$

$$\arccos x + \arccos t = \arccos (xt - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2})$$

$$(h) \arctan x + \arctan t = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$$

$$u = \arctan x, \quad v = \arctan t \Rightarrow x = \tan u, \quad t = \tan v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} = \frac{x+t}{1-xt}$$

$$\Rightarrow u+v = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right) \Rightarrow \arctan x + \arctan v = \arctan \left(\frac{x+t}{1-xt} \right)$$

$$(i) \sin(2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin x = u, \quad x = \sin u \Rightarrow \sin(2u) = 2 \sin u \cdot \cos u$$

$$= 2 \sin u \sqrt{1-\sin^2 u} = 2x \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \sin(2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1-x^2}$$

$$9. (a) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

İkinci denklemden $t = 2 - y$ bulunur. Bu değer birinci denklemde yerine konursa $x = 1 + 2(2 - y) \Rightarrow x + 2y = 5$ bulunur.

Bu bir doğru denklemdir.

$$(b) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y = t \Rightarrow x = 3y^2 \text{ (parabol)}$$

$$(c) \begin{cases} x = t \\ y = t^2 + \pi t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = t \Rightarrow y = x^2 + \pi x \text{ (parabol)}$$

$$(d) \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$$

$$x - y = 2t \Rightarrow t = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{x - y}{2} \right)^2 + \frac{x - y}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$$

$$(e) \begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \frac{t}{1+t} \end{cases}, \quad t \neq -1$$

$$x + y = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t} = \frac{1+t}{1+t} = 1 \Rightarrow x + y = 1 \text{ (doğru)}$$

$$(f) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

$$x^2 + y = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \text{ (parabol)}$$

$$(g) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (sikloid)}$$

$$(h) \begin{cases} x = a \cos t + b \sin t \\ y = a \sin t - b \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + 2ab \cos t \cdot \sin t + b^2 \sin^2 t$$

$$+ a^2 \sin^2 t - 2ab \cos t \sin t + b^2 \cos^2 t$$

$$= a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2 + b^2 \text{ (çember)}$$

$$(i) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

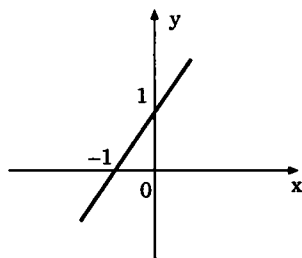
$$\left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a} \right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ (astroid eğrisi)}$$

$$10. (a) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$$

$$y = 3(x - 1) + 4 = 3x + 1$$

doğru denklemdir.

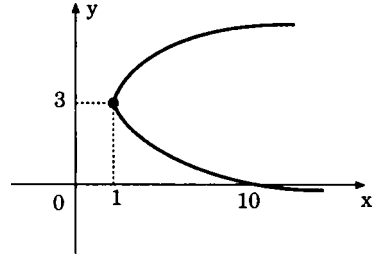


$$(b) \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y = 3 - t \Rightarrow t = 3 - y$$

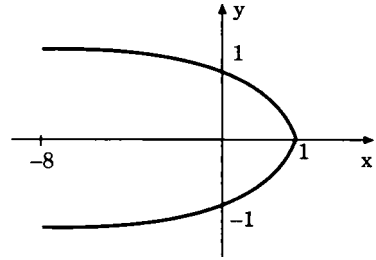
$$x = 1 + t^2 = 1 + (3 - y)^2$$

$$x = 1 + (3 - y)^2$$



$$(c) \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad -8 \leq t \leq 1$$

$$x = 1 - y^2$$



$$11. f(x + p) = f(x) \Rightarrow \sin^2(x + p) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2(x + p) - \sin^2 x = 0 [\sin(x + p) - \sin x][\sin(x + p) + \sin x] = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x + p) - \sin x = 0 \Rightarrow x + p = x + 2k\pi \Rightarrow p = 2k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow \sin(x + p) + \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Rightarrow p = (2k-1)\pi$$

Buna göre esas periyot $T = \pi$ dir.

$g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonunun periyodunda π olacağı benzer şekilde gösterilebilir.

$f(x) + g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sabit fonksiyonu için her p sayısı bir periyottur. Esas periyot yoktur.

$$12. f(x) = \sin^4 x$$

$$f(x + p) = f(x) \Rightarrow \sin^4(x + p) = \sin^4 x \Rightarrow \sin^4(x + p) - \sin^4 x = 0$$

$$(\sin(x + p) - \sin x)(\sin(x + p) + \sin x)(\sin^2(x + p) + \sin^2 x) = 0$$

$$\sin(x + p) - \sin x = 0 \Rightarrow x + p = x + 2k\pi \Rightarrow p = 2k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$\sin(x + p) + \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Rightarrow p = (2k-1)\pi \quad k = 1, 2 \dots$$

olur. Esas periyot $T = \pi$

Benzer şekilde $g(x) = \cos^4 x$ fonksiyonunun esas periyodunun π olduğu gösterilebilir.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = h(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(x + p) = h(x) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x + 4p) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$4x + 4p = 4x + 2k\pi \Rightarrow p = k \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

bulunur. Esas periyot $T = \frac{\pi}{2}$ dir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki kurallara tanımlanan reel değerli fonksiyonların (en geniş) tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

(g) $t(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

(b) $g(x) = \sqrt{\log(5x - x^2)}$

(h) $w(k) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

(c) $h(x) = \log_x 5$

(i) $k(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$

(d) $u(x) = \arcsin \frac{x-3}{2} + \log(4-x)$

(j) $m(x) = \sqrt{1 - \sqrt{9 - x^4}}$

(e) $v(x) = \arccos\left(\frac{3}{4+2\sin x}\right)$

(j) $n(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1+9x^2}}$

(f) $s(x) = \log(\cos x)$

2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dir. $0 \leq x \leq 1$ için $f(f(x)) = x$ olduğunu gösteriniz.

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dir. $x \neq 1$ için $f(f(f(f(x)))) = x$ olduğunu gösteriniz.

4. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ olsun.

(a) $x \geq 0$ için $g(\sqrt{x^2+1}) = f(x)$ olacağını gösteriniz.

(b) $x \geq 1$ için $g(\sqrt{x^2-1}) = g(x)$ olacağını gösteriniz.

5. $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ olsun. $a, b \in (-1, 1)$ için

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

olacağını gösteriniz.

6. $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ için $f(a+b) + f(a-b) = 2f(a) \cdot f(b)$ olacağını gösteriniz.

7. $f, [0, 1]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdaki biçimde tanımlanan g, h, k fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

$$(a) g(x) = f(3x^2) \quad (b) h(x) = f(x-5) \quad (c) k(x) = f(\tan x)$$

8. $a \cos x + b \sin x + c = 0$ denkleminin, $x_1, x_2 \neq 2k\pi$ bağıntısını sağlayan x_1, x_2 kökleri için

$$\sin(x_1 + x_2) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\tan\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

olacağını gösteriniz.

9. $\arctan \sqrt{x(x+1)} + \arcsin \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{2}$ denklemini çözünüz.

10. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ biçiminde tanımlanan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1}(x) = \sin hx$ olacağını gösteriniz.

11. $s(A) = n$ olsun. A 'nın r elemanlı alt kümelerinin sayısının $\binom{n}{r}$ olacağını gösteriniz.

12. $s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olsun.

(a) A dan B ye m^n tane fonksiyon tanımlanabileceğini gösteriniz.

(b) A dan B ye tanımlanan fonksiyonlardan $\binom{m}{n} n!$ tanesinin birebir olacağını gösteriniz.

13. İspat einiz ki, her $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için öyle bir çift p fonksiyonu ile tek q fonksiyonu vardır ki $f = p + q$ dir.

14. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

- (a) $f(0) = 0$ ise $n - 1$ inci dereceden bir p polinomu bulunabilir ki bunun için $f(x) = x \cdot p(x)$ dir.
- (b) Her bir reel a sayısı için $p(x) = f(x + a)$ şeklinde tanımlanan p fonksiyonu n inci dereceden bir polinomdur.
- (c) Bir a sayısı için $f(a) = 0$ ise $n - 1$ inci dereceden öyle bir h polinomu vardır ki $f(x) = (x - a) \cdot h(x)$ yazılabilir.

15. Derecesi 2 den büyük olmayan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan p polinomlarını bulunuz.

- (a) $p(x) = p(1 - x)$ (c) $p(2x) = 2p(x)$
 (b) $p(x) = p(1 + x)$ (d) $p(3x) = p(x + 3)$

16. Katsayıları tam sayı olan

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

şeklindeki bir cebirsel denklemin tam sayı olmayan bir rasyonel kökünün olamayacağını gösteriniz.

17. $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayılar, a_0 ve a_n sıfırdan farklı olmak üzere,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

denklemini veriliyor. Gösteriniz ki, eğer bu denklemin bir p/q rasyonel kökü varsa p sayısı a_n yi, q da a_0 sayısını böler.

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

bağıntısını sağlıyor. $f(0)$ nedir?

19. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

bağıntısını sağlıyor. $f(0)$ nedir?

20. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için $f(1) = 3$ ve $n > 1$ için

$$f(n + 1) = \frac{3f(n) + 1}{3}$$

dir. $f(100)$ nedir?

21. $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{2k^2} = \arctan \frac{n}{n+1}$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \text{ ve } 5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ve } x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$$

(b) $g(x) = \sqrt{\log(5x-x^2)}$

$$g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \log(5x-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 5x-x^2 \geq 1 \Leftrightarrow -(x^2-5x-1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2-5x-1 \leq 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2} \right]$$

(c) $h(x) = \log_x 5$

$$h(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \log_x 5 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ ve } x > 0$$

(d) $u(x) = \arcsin \frac{x-3}{2} + \log(4-x)$

$$u(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left| \frac{x-3}{2} \right| \leq 1 \text{ ve } 4-x > 0 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \text{ ve } x < 4 \\ \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ ve } x < 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4)$$

(e) $v(x) = \arccos \left(\frac{3}{4+2\sin x} \right)$

$$v(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4+2\sin x} \right| = \frac{3}{4+2\sin x} \leq 1 \Leftrightarrow 4+2\sin x \geq 3 \\ \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(f) $s(x) = \log(\cos x)$

$$s(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(g) $t(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

$$t(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x|-x > 0 \Rightarrow x < 0.$$

(h) $w(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

$$w(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arcsin(\log_2 x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 2^0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

$$(i) \quad k(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$$

$$k(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) > 0 \Leftrightarrow \log_4 x > 1 \Leftrightarrow x > 4.$$

$$(i) \quad m(x) = \sqrt{1 - \sqrt{9 - x^2}}$$

$$m(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{9 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 9 - x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 9 \text{ ve } x^2 \geq 8 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \text{ ve } |x| > 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$$

$$2. \quad f(f(x)) = \sqrt{1 - f(x)^2} = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$3. \quad f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - x + 1} = x,$$

$$f(f(f(x))) = f(x), \quad f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x.$$

$$4. \quad (a) \quad g(\sqrt{x^2 + 1}) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2} \\ = x + \sqrt{x^2 + 1} = f(x).$$

$$(b) \quad g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} + x = g(x)$$

$$5. \quad f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \log\left(\frac{1 - \frac{a+b}{1+ab}}{1 + \frac{a+b}{1+ab}}\right) = \log\left(\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}\right)$$

$$= \log(1+ab-a-b) - \log(1+ab+a+b)$$

$$= \log((1-a)(1-b)) - \log((1+a)(1+b))$$

$$= \log(1-a) + \log(1-b) - \log(1+a) - \log(1+b)$$

$$= \log \frac{1-a}{1+a} + \log \frac{1-b}{1+b} = f(a) + f(b)$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad f(a+b) + f(a-b) &= \frac{a^{a+b} + a^{-a-b}}{2} + \frac{a^{a-b} + a^{-a+b}}{2} \\
 &= \frac{a^a \cdot a^b + a^{-a} \cdot a^{-b} + a^a \cdot a^{-b} + a^{-a} \cdot a^b}{2} \\
 &= \frac{a^a(a^b + a^{-b}) + a^{-a}(a^b + a^{-b})}{2} = 2 \cdot \frac{(a^b + a^{-b})}{2} \cdot \frac{(a^a + a^{-a})}{2} \\
 &= 2 f(a) \cdot f(b)
 \end{aligned}$$

$$7. \quad (a) \quad g(x) = f(3x^2)$$

$$0 \leq 3x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$T_g = \left\{ x : -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$(b) \quad h(x) = f(x-5)$$

$$0 \leq x-5 \leq 1 \Rightarrow 5 \leq x \leq 6 \Rightarrow T_h = \{ x : 5 \leq x \leq 6 \}$$

$$(c) \quad k(x) = f(\tan x)$$

$$0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \text{ tamsayı})$$

$$\Rightarrow T_k = \left\{ x : n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + n\pi \right\}$$

$$8. \quad a \cos x + b \sin x + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \cos x + \sin x = -\frac{c}{b}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan \alpha \cos x + \sin x = -\frac{c}{b} \Rightarrow \sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x = -\frac{b}{c} \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha + x) = -\frac{b}{c} \cos \alpha = \sin u$$

x_1 ve x_2 denklemin kökleri olduğundan

$\alpha + x_1 = u$ ise $\alpha + x_2 = \pi - u$ olur. Dolayısıyla $x_1 + x_2 = \pi - 2\alpha$ dir.

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$x_1 + x_2 = \pi - 2\alpha$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

$$9. \quad \arctan \sqrt{x(x+1)} = u, \quad \arcsin \sqrt{x^2+x+1} = v,$$

$$\sqrt{x(x+1)} = \tan u, \quad \sqrt{x^2+x+1} = \sin v$$

$$\sin u = \sqrt{x^2+x+1}, \quad u + v = \frac{\pi}{2}, \quad \tan u = \frac{1}{\sin v}, \quad \tan u \cdot \sin v = 1$$

$$\Rightarrow \tan u \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = 1 \Rightarrow \tan u \cdot \cos u = 1 \Rightarrow \sin u = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} = 1 \Rightarrow x^2+x+1 = 1 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = -1$$

$$10. \quad \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = y \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Rightarrow x^2+1 = e^{2y} + 2xe^y + x^2$$

$$\Rightarrow 1 = e^{2y} - 2xe^y \Rightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sinh y \Rightarrow f^{-1}(x) = \sinh x$$

$$13. \quad f \text{ nin tanım kümesindeki her } x \text{ için } f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

yazılabilir.

$$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \text{ denirse}$$

$$p(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$$

olduğundan $p(x)$ daima çifttir.

$$q(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -q(x)$$

olup $q(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

$$14. \quad (a) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\text{Eğer } f(0) = 0 \text{ ise } f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 \Rightarrow a_0 = 0 \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned}\text{Bu durumda } f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\ &= x (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}) = x p(x)\end{aligned}$$

Burada $p(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$, $n-1$. dereceden bir polinomdur.

$$\begin{aligned}\text{(b) } f(x+a) &= \sum_{k=0}^n a_k (x+a)^k = a_0 + a_1 (x+a) + a_2 (x+a)^2 + \dots + a_n (x+a)^n \\ \Rightarrow p(x) &= f(x+a), \text{ n. dereceden bir polinomdur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c) } f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \\ - \quad 0 &= a_0 + a_1 a + \dots + a_n x^n \\ \hline f(x) &= a_1 (x-a) + \dots + a_n (x^n - a^n) = g(x-a) + \dots + a_n (x-a)(x^{n-1} + \dots + a^{n-1}) \\ &= (x-a) [a_0 + a_1 (x+0) + \dots + a_n (x^{n-1} + \dots + a^{n-1})] = (x-1) h(x)\end{aligned}$$

denirse $h(x)$, $n-1$ inci dereceden bir polinomdur.

16. a ile b aralarında asal, $b \neq 0$ ve verilen denklemin $x = \frac{a}{b}$ şeklinde bir kökü olsun. Kök denklemini sağlayacağından

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{a}{b} + a_n = 0$$

olur. Eşitliğin her iki yanını b^{n-1} ile çarpılırsa.

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{b} + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} b + \dots + a_{n-1} a b^{n-1} + a_n b^{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow a_1 a^{n-1} &= a_2 a^{n-2} b + \dots + a_{n-1} a b^{n-1} + a_n b^{n-1} = -\frac{a^n}{b}\end{aligned}$$

bulunur. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ler tam sayılar, a, b tam sayı ve $b \neq 0$ olduğundan eşitliğin sol tarafı bir tamsayıdır. Sağ taraf da bir tamsayı olmalıdır. $(a, b) = 1$ olduğundan $\frac{a^n}{b}$ nin tamsayı olması için $b = 1$ olmalıdır. Bu durumda $x = a$, yani bir tamsayı olur.

17. $x = \frac{p}{q}$ verilen denklemin bir kökü olsun. Denklemden x yerine $\frac{p}{q}$ yazılırsa

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

bulunur. Her iki taraf q^n ile çarpılıp düzenlenirse

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \Rightarrow \quad (1)$$

$$a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = -a_np^n$$

yazılabilir. Her iki taraf q ile bölünürse

$$a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = -\frac{a_np^n}{q}$$

eşitliğin sol tarafı bir tamsayı olduğundan sol tarafta bir tamsayı olmalıdır. O halde $q \mid a_np^n$ dir. $(p, q) = 1$ olduğundan $q \mid a_n$ dir.

(1) in her iki tarafı p ile bölünürse

$a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \dots + a_1q^{n-1} = -a_0\frac{a^n}{p}$ elde edilir Sol taraf bir tamsayı olduğundan sağ tarafta bir tamsayıdır. $(p, q) = 1$ olduğundan $p \mid a_0$ dir.

18. $x = y = 0$ alınırsa $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ olur.

19. $x = y = 0$ alınırsa $f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) - f^2(0) = 0$
 $\Rightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ veya $f(0) = 1$ dir.

20. Her $n \geq 1$ için $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{3}$ yazılabilir.

$$n = 1 \Rightarrow f(2) = f(1) + \frac{1}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow f(3) = f(2) + \frac{1}{3}$$

$$n = 3 \Rightarrow f(4) = f(3) + \frac{1}{3}$$

⋮

$$n = 9 \Rightarrow f(99) = f(99) + \frac{1}{3}$$

olur. Taraf tarafa toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$f(100) = f(1) + 99 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 33 = 36$$

bulunur.

21. Eşitliği tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için

$$\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{2}$$

olur. O halde önerme $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun. O halde

$$\sum_{m=1}^k \arctan \frac{1}{2m^2} = \arctan \frac{k}{k+1} \quad (I)$$

eşitliği doğrudur. $n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $\arctan \frac{1}{2(k+1)^2}$ terimini ekleyelim.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k+1} \arctan \frac{1}{2m^2} &= \arctan \frac{k}{k+1} + \arctan \frac{1}{2(k+1)^2} \\ &= \arctan \left(\frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2(k+1)^2}} \right) = \arctan \left(\frac{2k(k+1)^2 + k+1}{2(k+1)^3 - k} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da önermenin $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir.

DİZİLER

TANIM

Tanım kümesi N doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir.

Diziler değer kümesine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, Q rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir.

TANIM

Her n doğal sayısı için $s_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Her n doğal sayısı için $s_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir.

TANIM

$\forall n \in N$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine **sınırlı dizi** denir.

TANIM

Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** (eküs) veya **supremumu** denir.

Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** (ebas) veya **infimumu** denir.

TANIM

$\varepsilon > 0$ ve $a \in R$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in R\}$$

kümesine a nın ε -**komşuluğu** denir.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir s reel sayısının ε -komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisinin **limiti** s dir (veya s ye **yakınsaktır**) denir ve

$$\lim s_n = s \text{ veya } (s_n) \rightarrow s$$

şeklinde gösterilir.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye **yakınsaktır** denir ve

$$\lim s_n = s \text{ veya } (s_n) \rightarrow s$$

şeklinde gösterilir.

TEOREM

Yakınsak her dizi sınırlıdır.

TEOREM

$(s_n) \rightarrow s$ ise $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda (s_n) \rightarrow \lambda \cdot s$

TEOREM

$(s_n) \rightarrow s$ ve $(t_n) \rightarrow t \Rightarrow (s_n + t_n) \rightarrow s + t$ dir.

TEOREM

$(s_n) \rightarrow s$ ve $(t_n) \rightarrow t \Rightarrow (s_n \cdot t_n) \rightarrow s \cdot t$ dir.

TEOREM

$(s_n) \rightarrow s$, $s \neq 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{s_n} \right) \rightarrow \frac{1}{s}$$

dir.

Sonuç : $(s_n) \rightarrow s$ ve $(t_n) \rightarrow t$, $(t \neq 0)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \neq 0$ ise

$$\left(\frac{s_n}{t_n} \right) \rightarrow \frac{s}{t}$$

dir.

TANIM

(s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n < s_{n+1}$ ise diziye **monoton artan dizi**
 - 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq s_{n+1}$ ise diziye **geniş anlamda monoton artan veya azalmayan dizi**
 - 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n > s_{n+1}$ ise diziye **monoton azalan dizi**
 - 4) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \geq s_{n+1}$ ise diziye **geniş anlamda monoton azalan veya artmayan dizi**
- denir.

TEOREM

Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

TEOREM

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad \text{dir.}$$

TEOREM

(a) $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, (b_n) azalan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ varsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

dır.

(b) $b_n \rightarrow \infty$, (b_n) artan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ varsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dır.

TEOREM

$u_n > 0$ ve $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$ ise $\lim \sqrt[n]{u_n} = c$ dir.

TEOREM

$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

TANIM

$a : N \rightarrow R$, $a(n) = a_n$ dizisi verilmiş olsun.

$k : N \rightarrow N$, $k(n) = k_n$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$(a \circ k) : N \rightarrow R$, $a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$

bileşke fonksiyonuna a dizisinin bir **alt dizisi** adı verilir.

TEOREM

$(s_n) \rightarrow s$ ise $(s_{k_n}) \rightarrow s$ dir.

TANIM

(s_n) bir reel terimli dizi olsun. (s_n) bir **Cauchy dizisidir** $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için bir $n_0 \in N$ vardır öyle ki $m, n \geq n_0$ için $|s_m - s_n| < \epsilon$.

TEOREM

Reel terimli bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

TANIM

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \Leftrightarrow \forall B_1 \in R$ için $\exists n_1 \in N$ öyle ki $\forall n \geq n_1$ için $s_n > B_1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty \Leftrightarrow \forall B_2 \in R$ için $\exists n_2 \in N$ öyle ki $\forall n \geq n_2$ için $s_n < B_2$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ olması halinde “ (s_n) **artı sonsuza gidiyor**”, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ olması halinde de “ (s_n) **eksi sonsuza gidiyor**” denir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right)$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$$

$$(ç) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ dır, gösteriniz.

4. $\lim a_n = \lim b_n = p$ olsun. Bir (c_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

ise $\lim c_n = p$ dir, gösteriniz (Sıkıştırma Teoremi).

5. $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$ dizisinin monoton artan ve sınırlı olduğunu gösteriniz. Bu dizi yakınsak mıdır?

6. $(-1)^n$ dizisinin farklı 5 tane alt dizisini bulunuz. Bu dizinin başka alt dizileri var mıdır?

7. $s_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olsun. (s_n) dizisine eşit olan bir dizi bulunuz. Bu dizi yakınsak mıdır?
8. $\left(\frac{3n}{2n-7}\right)$ dizisinin en küçük üst sınırını (sup) ve en büyük alt sınırını (inf) bulunuz.
9. $\left((-1)^n/n\right)$ dizisinin kaç terimi $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ aralığının dışındadır?
10. $|a| < 1$ için $(1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.
11. Genel terimi $\frac{1}{n} \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} \right)$ olan dizinin yakınsadığı sayıyı bulunuz.
12. $a_1 = 0$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.
13. $\inf a_n + \inf b_n \leq \inf (a_n + b_n) \leq \sup (a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösteriniz.
14. $a \neq 0$ için $(|a|^{1/n}) \rightarrow 1$ olduğunu gösteriniz.
15. $a_n = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)$ olsun. İspat ediniz ki $a_n > 0$ ve $a_{n+1} < a_n$ dir.
16. $\left(\frac{2.4..2n}{3.5...(2n+1)}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.
17. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5}$$

18. $(a_n) > 0$ ve $a > 0$ olsun. $(a_n) \rightarrow a$ olduğundan $\log(a_n) \rightarrow \log a$ dır, gösteriniz.

19. $(a_n) \rightarrow a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise $(\sqrt[k]{a_n}) \rightarrow \sqrt[k]{a}$ dır, gösteriniz.

20. $(a_n) \rightarrow a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve $p \in \mathbb{Q}$ ise $(a_n^p) \rightarrow a^p$ dir, gösteriniz.

21. (a_n) dizisinin tekrarlama bağıntısı

$$a_{n+2} - a_{n+1} + 6a_n = 0$$

dır. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

$$1. (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^2 - 3n - 1}{n^3 + n^2} = \infty$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

$$(ç) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{n(n+1)}{2n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{3}{4}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} \quad 1 < \sin n! < 1 \Rightarrow -\frac{n}{n^2+1} < \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2+1} = 0 \quad (\text{sıkıştırma teoreminden})$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 \right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right)} = 3.$$

$$2. \quad a) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad (\text{sayfa 6, problem 14})$$

$$= \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^{n+1}} = 0)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$$

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow x + 2x + \dots + nx - n < \lfloor x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor \leq x + 2x + \dots + nx$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} x - n < \lfloor x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n(n+1)}{2} x$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leq \frac{n+1}{2n}x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}x = \frac{x}{2}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \dots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ olduğunu göstereceğiz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon)$ vardır,

öyle ki $|a_n - a| < \varepsilon$ dur.

$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$|s_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0(\varepsilon)$ sayısının mevcut olduğunu göstere-
lim.

$$\begin{aligned} |s_n - a| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n - n \cdot a}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| (a_1 - a) + \dots + (a_{n_0} - a) + (a_{n_0+1} - a) + \dots + (a_n - a) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left[\underbrace{|a_1 - a| + \dots + |a_{n_0} - a|}_B + \underbrace{|a_{n_0+1} - a|}_{< \varepsilon} + \dots + \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon} \right] = \frac{B}{n} + \frac{n - n_0}{n} \varepsilon \end{aligned}$$

$\frac{B}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan $\left| \frac{B}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı $n_0'(\varepsilon)$ sayısı vardır.

$m_0(\varepsilon) = \max \{ n_0(\varepsilon), n_0'(\varepsilon) \}$ olsun. $\forall n > m_0(\varepsilon)$ için

$$n - n_0 < n \Rightarrow \frac{n - n_0}{n} < \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow \frac{n - n_0}{n} \varepsilon < \varepsilon \Rightarrow \frac{B}{n} + \frac{(n - n_0)}{n} \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

4. $\lim a_n = \lim b_n = p$ olsun.

$\lim a_n = p$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için bir n_1 sayısı vardır,

öyleki $n > n_1$ için $|a_n - p| < \varepsilon$ dur.

$\lim b_n = p$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için bir n_2 sayısı vardır,

öyleki $n > n_2$ için $|b_n - p| < \varepsilon$

$\max \{ n_1, n_2 \} = m_0$ diyelim.

O halde $n > m_0$ için $-\varepsilon < a_n - p \leq c_n - p \leq b_n - p < \varepsilon$

$$\Rightarrow |c_n - p| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = p$$

5. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1}$ olup verilen dizi monoton artandır.

$n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

olduğundan verilen dizi sınırlıdır.

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır.

6. $((-1)^n)$ dizisinin farklı 5 tane alt dizisini bulalım.

$$((-1)^{2n}) = (1, 1, \dots), \quad ((-1)^{2n+1}) = (-1, -1, -1, \dots)$$

$$(-1, -1, 1, 1, \dots), \quad (-1, -1, -1, 1, 1, 1, \dots), \quad ((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$\vdots$

Bu dizinin başka alt dizileri de vardır.

7. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$

$$1 = A(n+2) + Bn \Rightarrow 1 = (A+B)n + 2A \Rightarrow$$

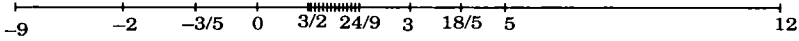
$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned}$$

olur. $\lim s_n = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}$

bulunur. $t_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ alınırsa $(s_n) = (t_n)$ olur.

8. $s_n = \left(\frac{3n}{2n-7} \right)$



$$\sup \left(\frac{3n}{2n-7} \right) = 12, \quad \inf \left(\frac{3n}{2n-7} \right) = -9$$

9. $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$ dizisinin $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100} \right)$ aralığı dışındaki terimlerini bulalım.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow n \leq 100$$

bulunur. O halde ilk 100 terim $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100} \right)$ komşuluğunun dışındadır.

10. $|a| < 1$ için

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n \text{ olsun.}$$

$$s_{n+1} - s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1} - (1 + a + \dots + a^n) = a^{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow s_n < s_{n+1} \text{ yani verilen dizi monoton artandır.}$$

$$|s_n| = |1 + a + a^2 + \dots + a^n| = \frac{|1 - a^{n+1}|}{1 - a} < \frac{1 + |a|^{n+1}}{1 - a} < \frac{2}{1 - a}$$

$$\Rightarrow (s_n) \text{ sınırlı dolayısı ile verilen dizi yakınsaktır.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

11. $a_n = \frac{n+1}{n}$ diyelim.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n+1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

12. $a_1 = 0$, $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

$$a_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} , a_3 = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 < a_3 \text{ ve } a_{n-1} < a_n \text{ olsun.}$$

$a_n < a_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 2 + a_{n-1} < 2 + a_n \Rightarrow \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \text{ dir.}$$

Yani dizi monoton artandır. Şimdi dizinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$$a_2 = \sqrt{2} < 2$$

$$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$$

$a_2 < 2$ ve $a_n < 2$ olsun. $a_{n+1} < 2$ olduğunu gösterelim.

$$a_n < 2 \Rightarrow 2 + a_n < 4 \Rightarrow \sqrt{2 + a_n} < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2 \text{ dir.}$$

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ olsun $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = L$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0$$

$$\Rightarrow L = 2 \text{ veya } L = -1 , a_n > 0 \text{ olduğundan } L = 2 \text{ dir.}$$

13. İlk olarak $\inf a_n + \inf b_n \leq \inf (a_n + b_n)$ olduğunu gösterelim.

$\inf$ tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq \inf a_n$, $b_n \geq \inf b_n$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } a_n + b_n \geq \inf a_n + \inf b_n \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \inf (a_n + b_n) \geq \inf (a_n) + \inf b_n \quad (1)$$

Şimdi $\sup (a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösterelim.

her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq \sup (a_n)$, $b_n \leq \sup (b_n)$ dir.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} , a_n + b_n \leq \sup a_n + \sup b_n$$

$$\Rightarrow \sup (a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n \quad (2)$$

Ayrıca

$$\inf (a_n + b_n) \leq \sup (a_n + b_n) \quad (3)$$

olduğu açıktır. (1), (2) ve (3)'den istenilen eşitsizlik gerçektir.

14. $|a| > 1$ olsun.

$x_n = |a|^{1/n} - 1$ diyelim. $|a| > 1$ olduğundan $x_n > 0$ dir.

$$\Rightarrow |a|^{1/n} = x_n + 1 \Rightarrow |a| = (1 + x_n)^n$$

olur. Bernoulli eşitsizliğinden

$$|a| = (1 + x_n)^n \geq 1 + n x_n \Rightarrow 0 < x_n \leq \frac{|a| - 1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a| - 1}{n} = 0$ olduğundan sıkıştırma teoreminden, $\lim x_n = 0$ dir.

$$|a| = 1 \text{ ise } (|a|^{1/n}) = (1, 1, 1, \dots) \rightarrow (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^{1/n} = 1$$

$$0 < |a| < 1 \text{ olsun. } \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow b = \frac{1}{|a|} \text{ dersek}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^{1/n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^{1/n} = 1 \text{ dir.}$$

$$15. a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ olduğundan}$$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!}$$

dir. Dolayısıyla

$$a_n = (-1)^n (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!}$$

bulunur. Her $n \geq 1$ için $a_n > 0$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{1.3.5\dots(2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \end{aligned}$$

olacağından (a_n) azalandır.

$$16. \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2.4.(2n)(2n+2)}{3.5.7...(2n+1).(2n+3)} \cdot \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.4.6...(2n)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ olup dizi monoton azalandır.

$$\frac{2.4.6...(2n)}{3.5.7...(2n+1)} < \frac{2.4.6...(2n)}{2.4.6...(2n)} = 1 \Rightarrow \text{dizi sınırlıdır.}$$

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır.

$$17. (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^5 = e^5$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}, \quad \frac{4}{n} = \frac{1}{k} \text{ diyelim.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{20k} = e^{20}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5}, \quad \frac{3}{n} = \frac{1}{k} \text{ diyelim.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{6k-5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^6 \left[1 + \frac{1}{k}\right]^{-5} = e^6 \cdot 1 = e^6$$

18. $(a_n) \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ vardır. Öyle ki $\forall n > n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dur.

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$|\log a_n - \log a| < |\log(a + \varepsilon) - \log a| = \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) = \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \text{ için } \exists n_0 \ni \forall n > n_0 \text{ için } |\log a_n - \log a| < \varepsilon_1 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow (\log a_n) \rightarrow (\log a) \text{ dir.}$$

19. $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$ eşitliğinde

$a = \sqrt[k]{a_n}$, $b = \sqrt[k]{a}$ alınırsa

$$a_n - a = (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}) \left[(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2} \sqrt[k]{a} + \dots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \right]$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} = \frac{a_n - a}{\left[(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2} \sqrt[k]{a} + \dots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \right]}$$

$(a_n) \rightarrow a$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \ni n > n_0$ için $|a_n - a| < (\sqrt[k]{a})^{k-1} \varepsilon$

yazabiliriz. $|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| < \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

20. $(a_n) \rightarrow a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olsun.

$p \in \mathbb{Q}$ sayısını $p = \frac{m}{k}$ ($m, k \in \mathbb{Z}$, $(m, k) = 1$ ve $k \neq 0$) şeklinde seçelim. 19. sorudan biliyoruz ki $(a_n) \rightarrow a$ ise $(\sqrt[k]{a_n}) \rightarrow \sqrt[k]{a}$ dir. Yine biz biliyoruz ki $m \in \mathbb{Z}$ için $a_n \rightarrow a$ ise $a_n^m \rightarrow a^m$ dir. Buna göre

$$(a_n)^p = (a_n)^{\frac{m}{k}} = (\sqrt[k]{a_n})^m \rightarrow (\sqrt[k]{a})^m = (a)^{\frac{m}{k}} = a^p$$

dir.

21. Karakteristik denklem $x^2 - x + 6 = 0$

$x_1 = 3$, $x_2 = -2$ dir. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ olduğundan

$$\Rightarrow a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 (-2)^n \Rightarrow 0 = 3A_1 + A_2 (-2) \text{ ve}$$

$$1 = A_1 \cdot 9 + A_2 \cdot 4 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{15} \text{ ve } A_2 = -\frac{1}{15} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{3^n}{15} - \frac{(-2)^n}{15} = (-1)^{n+1} \frac{2^n}{15} + \frac{3^n}{15}$$

BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi aynı bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitleri varsa

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(3) \quad \text{Her } x \in A \text{ için } g(x) \neq 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$(4) \quad \text{Her } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

dır.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun.

(1) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi bir L_1 reel sayısına yakınsıyorsa, bu L_1 sayısına f fonksiyonunun a noktasında **sol tarafı limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = L_1$$

şeklinde gösterilir.

(2) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi L_2 sayısına yakınsıyorsa bu L_2 sayısına fonksiyonun **sağ taraflı limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = L_2$$

biçiminde yazılır.

(3) Bir f fonksiyonunun bir noktada limitin var olması için gerek ve yeter şart o noktada sağ ve sol limitlerinin mevcut ve eşit olmasıdır.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 3, & x = 1 \text{ ise} \\ 4x - 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}, \quad a = 1$$

$$(b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}, \quad a = 1$$

$$(c) f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}, \quad a = 2$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı noktalardaki limitlerini bulunuz.

$$(a) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|2x|}{x}, \quad a = 0$$

$$(b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x/2, & x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ 1/2, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}, \quad a = 1$$

$$(c) f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \neq \pi \text{ ise} \\ 0, & x = \pi \text{ ise} \end{cases}, \quad a = \pi$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}, \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x|}{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x - a}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x \rfloor$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$(ç) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x)$$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$$

$$(ç) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\sin x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$(ç) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

6. “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ dir.” önermesinin doğruluğunu gösteriniz. Bu önermenin karşıtı da doğru mudur?
7. $f(x) = 9x - 5$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$ kalsın.
8. $g(x) = 2x^2 + 3$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x) - g(0)| < \frac{1}{2}$ olsun.
9. $f(x) = 3x + 5$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki $|x - 2| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 11| < \varepsilon$ kalsın.
10. Aşağıdaki eşitliklerde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hangi noktalarda limiti yoktur?
- (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$
- (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$
- (c) $f(x) = 1 - x + \lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor$
11. $f : [-\pi, \pi] \setminus [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\lfloor \sin x \rfloor}{\sin \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun hangi noktalarda limiti yoktur.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 3, & x = 1 \text{ ise} \\ 4x - 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}, \quad a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 1) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}, \quad a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$$

$$(c) f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}, \quad a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{(x^2 - 4)}{x - 2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = -4$$

O halde 2 noktasında limit yoktur.

$$2. (a) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|2x|}{x}, \quad a = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

$$(b) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x/2, & x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ 1/2, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}, \quad a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$(c) f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{\sin x}, & x \neq \pi \text{ ise} \\ 0, & x = \pi \text{ ise} \end{cases}, \quad a = \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} -\frac{\sin x}{\sin x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \text{ yoktur.}$$

$$3. (a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (x + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x|}{x} = 2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \|x\|$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \|x\| = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \|x\| = 1 \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

$$(ç) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)}{x^2 \left(p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2}} = \frac{a}{p}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) - \frac{4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 2 - \frac{4}{x - 2} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 2 - \frac{4}{x - 2} \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x - 2} \text{ mevcut değil.}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - 4x^2})(1 + \sqrt{1 - 4x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - 4x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 4x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - 4x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - 4x^2})} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \dots + \binom{m}{m} h^m - x^m}{h}$$

$$= \binom{m}{1} x^{m-1} = mx^{m-1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x - a}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(3\sqrt{x} - 3\sqrt{a})(3\sqrt{x} + 3\sqrt{a})}{(x - a)(3\sqrt{x} + 3\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{9x - 9a}{(x - a)(3\sqrt{x} + 3\sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{9}{3\sqrt{x} + 3\sqrt{a}} = \frac{3}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 0\end{aligned}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-5 + \frac{6}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1)} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 1} + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(5 + \frac{1}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

4. (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{sıkıştırma kriterinden} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

(ç) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \sin^2 \frac{a}{2} x\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) = 1 \cdot \cos a = \cos a \end{aligned}$$

(f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} \sin x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}\right) - 1}{h} \sin x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{2} \cdot \sin x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \\
 &= 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{ax}{2} - \left(1 - 2\sin^2 \frac{bx}{2}\right)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \right] = \frac{b^2 - a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$5. (a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} \cdot \frac{(x + 1)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{x} = t \text{ denirse } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin t = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(ç) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \quad \left(\cos x = u \text{ denirse } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \rightarrow 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

Önermenin karşıtı doğru değildir. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ rasyonel} \\ 1, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$

fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$ olduğu halde $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcut değildir.

7. $|x-1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 4| = |9x - 5 - 4| = |9x - 9| = 9|x - 1| < 9\delta$

$$9\delta \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{90} \text{ seçmeliyiz.}$$

8. $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x) - g(0)| = |2x^2 + 3 - 3| = |2x^2| = 2|x|^2 < 2\delta^2$

$$2\delta^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{2} \text{ seçilmeli.}$$

9. $|x-2| < \delta$ olduğundan $|f(x) - 11| = |3x + 5 - 11| = |3x - 6| = 3|x - 2| = 3\delta$

$$3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3} \text{ seçilmeli.}$$

10. (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & x \text{ tamsayı} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & x \text{ tamsayı değilse} \end{cases}$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \text{ tamsayı} \\ -1 & x \text{ tamsayı değilse} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tüm noktalarda fonksiyonun limiti vardır ve -1 dir.

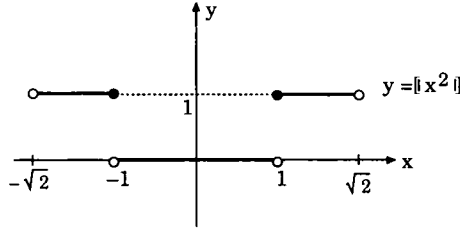
(b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$

$$\lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \leq x^2 < m+1 \Rightarrow \sqrt{m} \leq x < \sqrt{m+1}$$

$$m = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$$

$$m = 1 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1$$

$$m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$$



Dolayısı ile $\lfloor x^2 \rfloor$ fonksiyonunun n doğal sayı olmak üzere $\pm \sqrt{n}$ noktalarında limiti yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}^-} \lfloor x^2 \rfloor = n - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}^+} \lfloor x^2 \rfloor = n$$

$$c) \quad f(x) = 1 - x + \lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor = 1 - x + \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor -x \rfloor = 2 - x + \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$$

$$f_1(x) = 2 - x, \quad f_2(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$$

f_1 fonksiyonunun limiti her yerde var ve

f_2 fonksiyonunun limitinin her yerde olduğunu a) şıkında göstermiştik. Dolayısı ile f fonksiyonunun limiti her yerde vardır.

$$11. \quad x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1, \lfloor \sin x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1, \lfloor \sin x \rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 1}$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1, \lfloor \sin x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2, \lfloor \sin 2 \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \in (2, 3) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2, \lfloor \sin x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \in [3, \pi) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor \sin x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor \sin x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

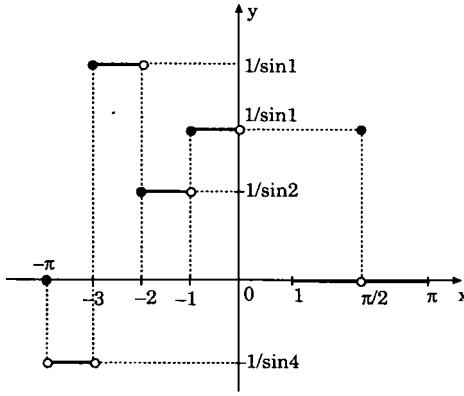
$$x = -\pi \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -4, \lfloor \sin x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \in (-\pi, -3), \lfloor x \rfloor = -4, \lfloor \sin x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 4}$$

$$x \in [-3, -2), \lfloor x \rfloor = -3, \lfloor \sin x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 3}$$

$$x \in [-2, -1), \lfloor x \rfloor = -2, \lfloor \sin x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 2}$$

$$x \in [-1, 0), \lfloor x \rfloor = -1, \lfloor \sin x \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 1}$$



Dolayısı ile fonksiyonun $-1, -2, -3$ noktalarında limiti yoktur.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $\lim a_n \neq 0$ olduğunda $((-1)^n a_n)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

2. $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin monoton artan ve sınırlı olduğunu gösteriniz. Dizi yakınsak mıdır? Yakınsaksa limitini bulunuz.

3. $F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine **Fibonacci dizisi** denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

olacağını gösteriniz.

4. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ biçiminde tanımlanan dizinin limitini bulunuz.

5. (a) $(a_n) \rightarrow a$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq c$ ise $a \leq c$ dir.
 (b) (b_n) yakınsak ve tüm terimleri negatif olan bir dizi ise limit negatif veya sıfırdır.
 (c) (c_n) yakınsak ve tüm terimleri pozitif olan bir dizi ise limit pozitif veya sıfırdır.
 önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

6. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. $a_1 = \alpha$ ve $n > 1$ için

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha + a_{n-1}^2)$$

biçiminde tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

7. $(s_n) \rightarrow s$ ve $(t_n) \rightarrow t$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n < t_n$ ise $s \leq t$ dir. İspatlayınız.

8. Tüm terimleri rasyonel olan bir dizinin limiti irrasyonel olabilir mi?

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots}} = 2$

(b) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6} \dots}} = 3$

(c) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20} \dots}} = 5$

10. Fibonnocci dizisinin genel terimini bulunuz.

11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun limitli olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

12. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rasyonel ise} \\ x^2, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun hangi noktalarda limiti vardır?

BÖLÜM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

1. Yakınsak dizinin her alt dizisinin de yakınsak olduğunu biliyoruz.

Verilen dizinin $\left((-1)^{2n} a_{2n}\right)$ ve $\left((-1)^{2n+1} a_{2n+1}\right)$ gibi iki alt dizisini gözönüne alalım.

$\lim a_n = A$ ise $\lim a_{2n} = a$ ve $\lim a_{2n+1} = a$ dır.

Bu durumda $\lim (-1)^{2n} a_{2n} = a$ ve $\lim (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a$ dır.

Dolayısı ile $\left((-1)^n a_n\right)$ dizisi yakınsak olamaz.

2. $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$ olduğundan

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4) = 3 \Rightarrow a_2 > a_1 \text{ dir.}$$

$a_n > a_{n-1}$ olduğunu kabul edelim ve $a_{n+1} > a_n$ olduğunu gösterelim.

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow a_{n-1} + 4 < a_n + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_{n-1} + 4) < \frac{1}{2}(a_n + 4) \Rightarrow$$

$a_n < a_{n+1}$ O halde verilen dizi tümevarım prensibi gereğince monoton artandır.

Şimdi sınırlı olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 4$ olacağını gösterelim.

$n = 1$ için $a_1 = 2 < 4$ doğrudur. $a_{n-1} < 4$ olduğunu kabul edelim ve $a_n < 4$ olduğunu gösterelim.

$$a_{n-1} < 4 \Rightarrow a_{n-1} + 4 < 8 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_{n-1} + 4) < \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \Rightarrow a_n < 4$$

Tümevarım prensibi gereğince dizi sınırlıdır. Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır. $\lim a_n = L$ olsun.

$$\text{Bu durumda } \lim a_{n+1} = L \text{ dir. } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a_n + 4) \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2}(L + 4) \Rightarrow 2L = L + 4 \Rightarrow L = 4 \Rightarrow \lim a_n = 4$$

3. $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ indirgeme bağıntısının $F_n = k^n$ şeklinde çözümleri varsa

$$k^{n+1} = k^{n-1} + k^n \Rightarrow k^2 = k + 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0. \text{ Buradan,}$$

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow F_n = Ak_1^n + Bk_2^n \quad (A \text{ ve } B \text{ keyfi sabitler})$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} A + \frac{1-\sqrt{5}}{2} B = 1 \quad (F_1 = 1)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 B = 1 \quad (F_2 = 1)$$

$$\text{Bu sistemin çözümünde } A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1 \text{ olduğundan } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dir.}$$

$$4. \quad a_1 = \sqrt{2} \text{ ve } n > 1 \text{ için } a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$$

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow a_1 < a_2 \text{ dir.}$$

(1) $a_{n-1} < a_n$ olduğunu kabul edelim ve $a_n < a_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$(1) \text{ den } a_{n-1} < a_n \Rightarrow \sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{a_n} \Rightarrow 2 + \sqrt{a_{n-1}} < 2 + \sqrt{a_n} \\ \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}} < \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

Dolayısı ile tümevarım prensibi gereğince dizi monoton artandır.

$$a_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2 \text{ ve } a_n < 2 \quad (2) \text{ olsun.}$$

$a_{n+1} < 2$ olduğunu gösterelim.

$$(2) \text{ den } a_n < 2 \Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{2} \Rightarrow 2 + \sqrt{a_n} < 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + 2} = 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$$

Dolayısı ile tümevarım prensibi gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} < 2$. Yani a_n dizisi sınırlıdır. Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan

$\lim a_n = L$ olacak şekilde bir L sayısı vardır.

$$\lim a_n = \lim \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$$

$$L = \sqrt{2 + \sqrt{L}} \Rightarrow L^2 - \sqrt{L} - 2 = 0 \Rightarrow (L^2 - 2)^2 = L \Rightarrow L = 1$$

5. (a) $(a_n) \rightarrow a$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dir.

$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$\forall n$ için $a_n \leq c$ olduğundan $a - \varepsilon < a_n \leq c \Rightarrow a - \varepsilon < c \Rightarrow a < c + \varepsilon$

ε yeterince küçük seçilebilen pozitif bir sayı olduğundan $a \leq c$ dir.

(b) $(b_n) \rightarrow b$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $|b_n - b| < \varepsilon$

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < 0 \Rightarrow b < \varepsilon \Rightarrow b \leq 0 \text{ olmalıdır.}$$

(c) (b) şikkına benzer olarak yapılır.

6. $n = 2$ için $a_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^2) < \alpha = a_1 \Rightarrow a_2 < a_1$

$a_n < a_{n-1}$ olduğunu kabul edelim ve $a_{n+1} < a_n$ olduğunu gösterelim.

$$a_n < a_{n-1} \Rightarrow a_n^2 < a_{n-1}^2 \Rightarrow \alpha + a_n^2 < \alpha + a_{n-1}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) < \frac{1}{2}(\alpha + a_{n-1}^2) \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$\Rightarrow$ dizi monoton azalandır.

Ayrıca $0 < a_n \leq a_1 = \alpha$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlı dolayısı ile yakınsaktır.

$$\lim a_n = L \text{ olsun. } \Rightarrow \lim a_{n-1} = L \Rightarrow L = \frac{1}{2}(\alpha + L^2) \Rightarrow L^2 - 2L + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha, L_{1,2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{1-\alpha}}{2} = 1 \mp \sqrt{1-\alpha}$$

$$0 < a_n < \alpha \text{ olduğundan } L = 1 - \sqrt{1-\alpha} \text{ dir.}$$

7. $(s_n) \rightarrow s$ ve $(t_n) \rightarrow t$ ise $(s_n - t_n) \rightarrow (s - t)$ dir.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \ni \forall n > n_0 \text{ için } |s_n - t_n - (s - t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon + s - t < s_n - t_n < \varepsilon + s - t$$

$s_n \leq t_n$ olduğundan $s_n - t_n < 0$ dir. Bu durumda,

$$-\varepsilon + s - t < s_n - t_n < 0 \Rightarrow -\varepsilon + s - t < 0 \Rightarrow s - t < \varepsilon$$

ε yeterince küçük seçilebilen bir pozitif sayı olduğundan

$$s - t \leq 0 \Rightarrow s \leq t$$

8. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ şeklinde tanımlanan dizinin tüm terimleri rasyoneeldir.

Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ rasyonel bir sayı değildir.

9. (a) $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ olsun. $\Rightarrow a^2 = 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}_a \dots \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$$a = 2, a = -1 \Rightarrow a = 2 \text{ olmalıdır. } (a > 0)$$

(b) $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$ olsun. $\Rightarrow a^2 = 6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6}}}_a \dots \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$

$$a = 3 \text{ ve } a = -2 \Rightarrow a = 3 \text{ olmalıdır. } (a > 0)$$

(c) $a = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$ olsun. $\Rightarrow a^2 = 20 + a \Rightarrow a^2 - a - 20 = 0$

$$a = 5, a = -4, a = 5 \text{ olmalı. } (a > 0)$$

10. 3. soruda $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ olduğu gösterildi.

11. z tamsayı olsun.

$$\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = z + \sqrt{z - z} = z,$$

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = z + \sqrt{z - (z - 1)} = z + 1$$

Dolayısı ile tamsayı değerlerinde fonksiyonun limiti yoktur.

12. (x_n) dizisi L ($L \neq 0$) noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. x_n in rasyonel elemanlarını a_n , irrasyonel elemanlarını b_n ile gösterelim. $f(a_n) = 0$, $f(b_n) = b_n^2 \rightarrow L^2$ dolayısı ile alt dizilerin görüntülerinin limiti farklı ($L \neq 0$) olduğundan 0 hariç hiçbir noktada limit yoktur.

4.1. SÜREKLİ FONKSİYONLAR

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde **süreklidir** denir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında **süreklidir**. $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

- (1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ fonksiyonu a noktasında **sağdan süreklidir**,
- (2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ fonksiyonu a noktasında **soldan süreklidir**.

TANIM

Bir $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse, fonksiyon bu noktada **süreksizdir** denir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ile $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ da sürekli ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise

$$\alpha f + \beta g \text{ ve } f \cdot g$$

fonksiyonları da a noktasında süreklidir. Ayrıca, eğer $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

TEOREM

(İşaret Koruma Özeliği)

f fonksiyonu a noktasında sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. a nın öyle bir δ - komşuluğu vardır ki bu aralıktaki her x için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işarettedir.

TEOREM

(Bolzano Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli ise (a, b) aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

TEOREM

(Ara Değer Teoremi)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ de $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1, x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1, x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

TEOREM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ olsun.

$$|x - c| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(c)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu c noktasında **bir yerel** (lokal, rölatif) **maksimuma** sahiptir denir.

$d \in A$ olsun.

$$|x - d| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(d)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonu d noktasında **bir yerel** (lokal, rölatif) **minimuma** sahiptir denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine fonksiyonun **ekstremlerini** veya **ekstrem değerleri** adı verilir.

Eğer her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(p)$$

olacak şekilde bir $p \in A$ varsa f fonksiyonu p noktasında bir **mutlak maksimuma**, her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(r)$$

olacak şekilde bir $r \in A$ varsa, f fonksiyonu r noktasında bir **mutlak minimuma** sahiptir denir.

Sürekli bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak maksimum ve mutlak minimuma sahiptir, yani $[a, b]$ aralığında

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} = f(x_1)$$

$$\inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} = f(x_2)$$

olacak şekilde x_1 ve x_2 noktaları vardır.

TEOREM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve kesin olarak artan bir fonksiyon olsun.

$f(a) = c$ ve $f(b) = d$ ise

- (1) $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ fonksiyonunun f^{-1} tersi vardır.
- (2) f^{-1} fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde kesin olarak artandır.
- (3) f^{-1} fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde sürekli dir.

TEOREM

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde **düzgün sürekli dir** $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ dır.

TEOREM

Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün sürekli dir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin A daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonu A üzerinde **parçalı sürekli dir** denir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda sürekli olup olmadığını inceleyiniz. Süreksiz olanların çeşidini belirtiniz.

a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ $x = 0$

c) $f(x) = |x + 2|$ $x = -2$

2. a, b ve c sabit sayılar olmak üzere, bir f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq c \text{ ise} \\ ax + b, & x < c \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlanıyor. b ve c verildiğinde f fonksiyonunu $x = c$ noktasında sürekli yapan a değerlerini bulunuz.

3. Problem 2 deki soruyu,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \geq c \text{ ise} \\ ax^2 + b, & x < c \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için cevaplandırınız.

4. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ c - 2x, & 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$ eşitliği ile tanımlanan $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun sürekli olması için c ne olmalıdır?

5. Tanjant ve kotanjant fonksiyonları nerede sürekli-dir?

6. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanıyor.

Bu fonksiyonun $\left[-2, -\frac{1}{5}\right]$ ve $\left[\frac{1}{5}, 2\right]$ aralıklarındaki grafiğini çiziniz.

Sıfır noktasındaki sağ ve sol limitlerini hesaplayınız. Bu fonksiyon $x=0$ da sürekli olacak şekilde $f(0)$ tanımlanabilir mi?

7. $f(x) = (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$ olarak Problem 6 daki soruları cevaplayınız.
8. $f(x) = x(-1)^{(-1)^{\left\lfloor 1/x \right\rfloor}}$ olarak Problem 6 daki soruları cevaplayınız.
9. $x \neq 0$ için $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olması için $f(0)$ nasıl tanımlanmalıdır?
10. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye öyle bir fonksiyon tanımlayınız ki bu fonksiyon hiçbir noktada sürekli olmasın?
11. Kendileri sürekli olmadıkları halde çarpımları sürekli olan iki fonksiyon bulunuz.
12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesini bulunuz.
13. f ve g , $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye
- $$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \text{ ise} \\ x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$
- biçiminde tanımlanan fonksiyonlar olsunlar. $f \circ g$ bileşke fonksiyonunu bulunuz. Bileşke fonksiyonu hangi noktalarda sürekli dir.
14. $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ k, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$
- fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olması için k ne olmalıdır?
15. $f(x) = \tan x$ olsun. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ve $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ olduğu halde, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısı var mıdır? Bu sonuç Bolzano Teoremi ile çelişir mi?

16. $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir sürekli fonksiyon olsun. İspat ediniz ki $[0, 1]$ aralığındaki en az bir c için $f(c) = c$ dir. (Böyle noktalara f nin **sabit noktaları** denir). Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonlarının sabit noktalarını bulunuz.

a) $f(x) = 1 - x^2$

d) $f(x) = 1 - x$

b) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x$

c) $f(x) = \sin x$

f) $f(x) = \frac{1}{2}$

17. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

18. $f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$, $f : \mathbb{R} \setminus [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz. Bu fonksiyon parçalı sürekli midir?

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - \lfloor x \rfloor = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - \lfloor x \rfloor = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ mevcut değildir.}$$

Dolayısı ile $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli değildir. Burada sıçrama süreksizliği vardır.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad x = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad f(0) = 0$$

olduğundan fonksiyon $x = 0$ 'da sürekli değildir. $x = 0$ da sonsuz süreksizliği vardır.

c) $f(x) = |x + 2|$

$$x > -2 \Rightarrow f(x) = x + 2, \quad x \leq -2 \Rightarrow f(x) = -(x + 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} -(x + 2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \text{ dır.}$$

$f(-2) = |2 + 2| = 0$ olduğundan f fonksiyonu $x = -2$ noktasında süreklidir.

2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \sin x = \sin c, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} ax + b = ac + b$$

limitin mevcut olması için $\sin c = ac + b$ olmalı. Bu durumda

$$a = \frac{\sin c - b}{c} \text{ seçilmelidir.}$$

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} 2 \cos x = 2 \cos c, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} ax^2 + b = ac^2 + b$$

limitin mevcut olması için $2 \cos c = ac^2 + b$ seçilmelidir. Bu durumda

$$a = \frac{2 \cos c - b}{c^2} \text{ olmalıdır.}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (c - 2x) = c - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2. \text{ Limitin var olması için } c - 2 = 2 \Rightarrow c = 4$$

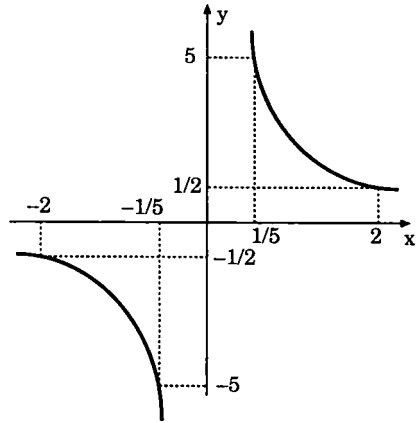
olmalıdır.

5. Tanjant fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ aralıklarında, Kotanjant fonksiyonu $(\pi k, \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) aralıklarında süreklidir.

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

fonksiyon sürekli olacak şekilde $f(0)$ tanımlanamaz.



$$7. \quad x \in \left[\frac{1}{5}, 2 \right] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 5, \quad f(x) = (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 2 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 3 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$\frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \leq \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 4 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$x = 5 \Rightarrow \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 5 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$x \in \left[-2, -\frac{1}{5} \right] \Rightarrow -5 \leq \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} < x \leq -\frac{1}{5} \Rightarrow -5 \leq \frac{1}{x} < -4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -5 \Rightarrow f(x) = -1$$

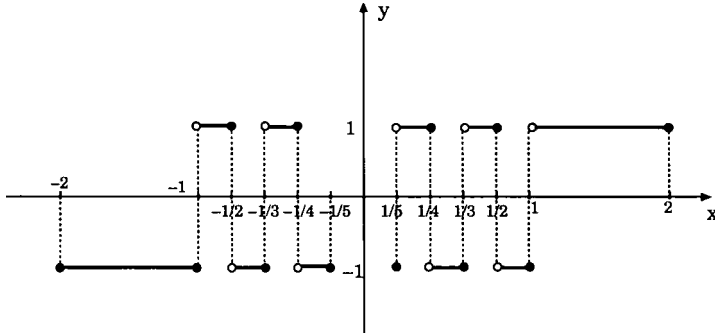
$$-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow -4 \leq \frac{1}{x} < -3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -4 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{x} < -2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -3 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -2 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = -1$$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$ limitleri yoktur.

Fonksiyon $x = 0$ noktasında sürekli olacak şekilde $f(0)$ tanımlanamaz.

8. $f(x) = x(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x, \quad x = -2 \Rightarrow f(x) = 2$$

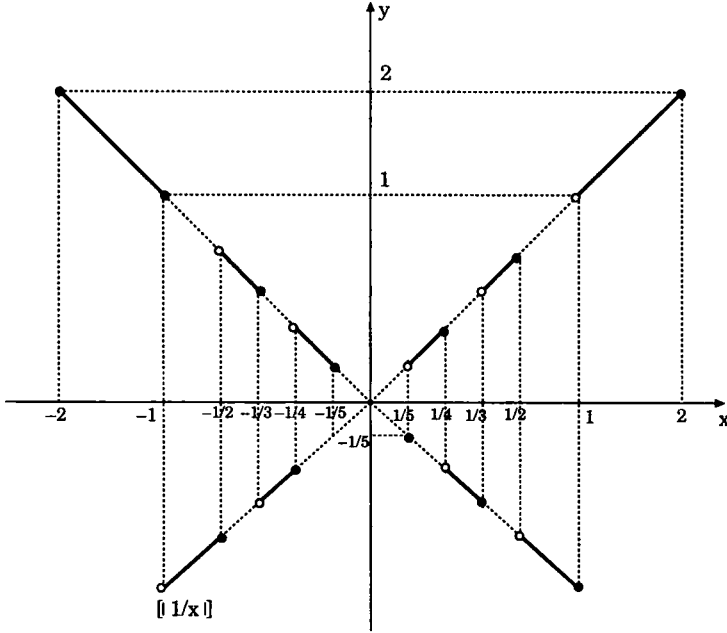
$$\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = -x, \quad -2 < x \leq -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = x, \quad -1 < x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = x$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -x, \quad -\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -x$$

$$\frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = x, \quad -\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = x$$

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{4} < x \leq -\frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = -x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} = 0 \quad \text{olur.}$$

$f(0) = 0$ tanımlanırsa fonksiyon 0'da sürekli olur.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ sağlanırsa f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad \text{olarak tanımlanmalıdır.}$$

10.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \text{ ve } x \text{ irrasyonel} \\ 0, & x \in (-1, 1) \text{ ve } x \text{ rasyonel} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu hiçbir noktada sürekli değildir. Çünkü hiçbir noktada limit yoktur.

11. $[1, +\infty)$ aralığında $f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ ve $g(x) = \lfloor x \rfloor$ biçiminde tanımlanan f ve g fonksiyonları $x = 2$ noktasında sürekli olmadıkları halde $(f \cdot g)(x) = x$ fonksiyonu $x = 2$ de sürekli.

12. $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow k^+} x - \lfloor x \rfloor = k - k = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} x - \lfloor x \rfloor = k - (k - 1) = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \text{ değerlerinde limit yoktur.}$$

Fonksiyon bu noktalarda süreksizdir.

$$13. f(x) = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ da sürekliliğini araştıralım.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = (f \circ g)(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(0)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon her yerde süreklidir.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ eşitliği sağlanırsa, fonksiyon 0 noktasında sürekli olur.
(Fonksiyonun diğer noktalarda sürekli olduğu açıktır.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + x^n}{x} = \binom{n}{1} = n$$

$f(0) = k = n$ olmalıdır.

15. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında $\tan c = 0$ olacak şekilde bir c değeri yoktur. Tan x fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmadığından Bolzano Teoremi ile çelişmez.

16. İspat : $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli olsun.

$g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunu tanımlayalım. f sürekli olduğundan g fonksiyonu da sürekli olur.

$g(0) = f(0)$ ve $0 \leq f(0) \leq 1$ olduğundan $g(0) \geq 0$ dir.

$g(1) = f(1) - 1$ ve $0 \leq f(1) \leq 1$ olduğundan $g(1) \leq 0$ dir.

g sürekli ve $g(0)$ ile $g(1)$ ters işaretli olduğundan Bolzano teoremi gereğince $g(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (0, 1)$ vardır.

$g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ olacağından c , f nin sabit noktasıdır.

a) $f(x) = 1 - x^2$, $I = [0, 1]$

$$f(c) = 1 - c^2 = c \Rightarrow c^2 + c - 1 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad c_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [0, 1]$$

b) $f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$

$$f(c) = c^2 = c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ ve } c_2 = 1, \quad c_1, c_2 \in [0, 1]$$

c) $f(x) = \sin x$, $I = [0, 1]$

$$f(c) = \sin c \Rightarrow \sin c = c \Rightarrow c = 0, \quad c \in [0, 1]$$

d) $f(x) = 1 - x$, $I = [0, 1]$

$$f(c) = 1 - c = c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

e) $f(x) = x$, $I = [0, 1]$

$f(c) = c = c \Rightarrow [0, 1]$ deki tüm x değerleri birer sabit noktadır.

f) $f(x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 1]$

$$f(c) = c \Rightarrow \frac{1}{2} = c \text{ olmalı. } c = \frac{1}{2} \text{ sabit noktadır.}$$

17. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - t| < \delta$ şartını sağlayan tüm x, t noktaları için

$$|f(x) - f(t)| = |\sin x - \sin t| \leq |x - t| < \delta = \varepsilon \text{ seçersek}$$

$$|f(x) - f(t)| = |\sin x - \sin t| < \varepsilon \text{ olur.}$$

Dolayısı ile $\sin x$ fonksiyonu düzgün sürekli dir.

18. $k \neq 0$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. $f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = \frac{k}{k} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = \frac{k}{k-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow k} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \text{ mevcut değil}$$

$\Rightarrow$ tam sayılarda fonksiyon sürekli değildir.

f fonksiyonu parçalı sürekli değildir. Çünkü süreksizlik noktaları sonsuz adettedir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonu a noktasında, g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli olduğunda $g \circ f$ fonksiyonu da a noktasında sürekli, ispatlayınız.
2. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğunda $|f|$ fonksiyonunun da a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz. $|f|$ sürekli olduğunda f sürekli olmak zorunda mıdır?
3. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler,

$$p = \max \{f, g\}, \quad q = \min \{f, g\}$$
 fonksiyonları da a noktasında sürekli, gösteriniz.
4. Polinomların her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.
5. Bir aralığın sadece bir noktasında sürekli, fakat diğer tüm noktalarında süreksiz olan bir fonksiyon var mıdır?
6. $[a, b]$ aralığındaki her u, v için

$$|f(u) - f(v)| \leq k |u - v|$$
 olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli, gösteriniz.
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli ve kesin olarak monoton fonksiyon olsun. $f^{-1}[(a, b)]$ kümesinin bir açık aralık olduğunu gösteriniz.
8. $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ polinomunun c_0 ve c_n katsayıları zıt işaretli olduğunda en az bir pozitif a için $p(a) = 0$ dır, gösteriniz.
9. $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir f fonksiyonu veriliyor. $f(a) \geq a$ ve $f(b) \leq b$ olduğunda f fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olacağını gösteriniz.

10. $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli fakat düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.
11. Logaritma fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.
12. Tek dereceli tüm polinomların en az bir sıfır yerinin (kökünün) var olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. $g, f(a)$ noktasında sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $|f(x) - f(a)| < \rho$ iken $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ olacak biçimde $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan f, a da sürekli olduğundan $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \rho$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\rho)$ sayısı vardır. O halde $|x - x_0| < \delta$ iken $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ gerçekleşir. Bu ise $g \circ f$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olması demektir.

2. f, a noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ kalır.

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \text{ olduğundan } ||f(x)| - |f(a)|| < \varepsilon \text{ olur.}$$

Bu ise bize $|f|$ fonksiyonunun a noktasında sürekliliğini verir.

$|f|$ sürekli olduğunda f fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir. Bunu aksine bir örnek ile açıklayalım.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ -1, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayalım.

$x = a$ rasyonel olsun. $(x_n) = \left(a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ve bu dizinin terimleri rasyonel olan alt dizisini (t_n) , irrasyonel olan alt dizisini (u_n) ile gösterelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = a \text{ ve } \lim t_n = \lim u_n = a \text{ olur.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

olduğundan f fonksiyonunun a noktasında limiti yoktur. a 'nın irrasyonel olması durumunda benzer işlemler yapılır. f nin a noktasında limiti olmadığından sürekli de değildir.

Fakat $|f(x)| = 1$ sabit fonksiyonu her yerde sürekli dir.

3. f, a noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \ni |x - a| < \delta_1$ için

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

g, a noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \ni |x - a| < \delta_2$ için

$$|g(x) - g(a)| < \epsilon$$

$p(a) = \max \{ f(a), g(a) \}, \max \{ \delta_1, \delta_2 \} = \delta$ olmak üzere

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta$ için $|p(x) - p(a)| < \epsilon$ olur. Dolayısı ile p fonksiyonu da sürekli dir. Aynı şekilde q fonksiyonunun sürekliliği de gösterilebilir.

4. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomunu göz önüne alalım.

$f(x) = x^n$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ olduğundan f fonksiyonu keyfi a noktasında her n için sürekli dir. Sürekli bir fonksiyonun sabitle çarpımı ve sürekli fonksiyonların sonlu toplamı da sürekli olduğundan $p(x)$ fonksiyonu sürekli dir.

5. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel} \\ -x, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli, diğer noktalarda süreksizdir.

(x_n) sıfıra yakınsayan rasyonel terimli bir dizi olsun. $(f(x_n)) = (x_n) \rightarrow 0$ olur. (t_n) , sıfıra yakınsayan irrasyonel terimli bir dizi ise $(f(t_n)) = (-t_n) \rightarrow 0$

dır.

$f(0) = 0$ olduğundan $f, x = 0$ da sürekli dir. $a \neq 0$ olsun. (x_n) , a 'ya yakınsayan rasyonel terimli bir dizi olsun. $(f(x_n)) = (x_n) \rightarrow a$ olur. (t_n) , a 'ya yakınsayan irrasyonel terimli bir dizi olsun. $(f(t_n)) = (-t_n) \rightarrow -a$ olur. $a \neq -a$ olduğundan $f, x = a$ da sürekli değildir.

6. $|f(u) - f(v)| < k|u - v|$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |u - t| < \delta$ için $|f(u) - f(t)| < \varepsilon$ oluyorsa

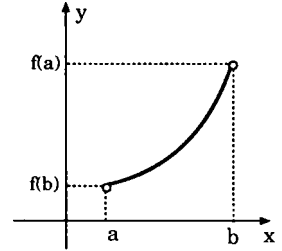
$f, t \in [a, b]$ noktasında süreklidir.

Yukarıdaki eşitsizlik $[a, b]$ aralığındaki her u, v için sağlandığından $t \in [a, b]$ ve $v = t$ için de sağlanır.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{k} \text{ için } \Rightarrow |f(u) - f(t)| < k|u - t| < k \cdot \delta = k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Dolayısı ile f fonksiyonu t noktasında süreklidir. t keyfi olduğundan $f, [a, b]$ de süreklidir.

7. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlı ve artan olduğundan $[a, b]$ aralığında da tanımlı ve artandır. Fonksiyonun $[a, b]$ aralığında aldığı en küçük değer $f(a)$, en büyük değer $f(b)$ dir. f sürekli olduğundan, $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri bir defa alır. Dolayısıyla, $[a, b]$ aralığının görüntü kümesi $[f(a), f(b)]$ aralığıdır. Eğer f azalan ise görüntü kümesi $[f(b), f(a)]$ aralığı olur. (a, b) açık aralığında a ve b bulunmadığından görüntü kümesinde $f(a)$ ve $f(b)$ bulunmaz. Bu durumda $f((a, b)) = (f(a), f(b))$ olur.



8. $c_0 < 0$ ve $c_n > 0$ olsun. $x = 0$ için $p(0) = c_0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ olur. Şu halde yeter derece büyük bir x_1 noktası için $p(x_1) > 0$ dir. Bolzano teoreminden, $(0, x_1)$ aralığında $p(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

$c_0 > 0$ ve $c_n < 0$ olduğunda benzer ispat yapılır.

9. f sürekli ise $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu da süreklidir.

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

($f(a) \geq a$ olduğundan)

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

($f(b) \leq b$ olduğundan)

$g(a)$ ile $g(b)$ ters işaretli olduğundan, Bolzano Teoremi gereğince,

$g(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

$$g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c \text{ olup, } f \text{ sabit noktaya sahiptir.}$$

10. $a \in (0, 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ olduğundan f fonksiyonu keyfi $a \in (0, 1)$ de süreklidir.

Şimdi düzgün sürekli olmadığını gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |x - t| < \delta$ için $|f(x) - f(t)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right| < \varepsilon$ olmalıdır.

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right| = \frac{|x - t|}{x \cdot t}$$

$0 < x < 1$ aralığına ait iki noktayı $x_1, x_1 + \delta$ ($\delta > 0$) olarak seçersek

$$|f(x_1) - f(x_1 + \delta)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + \delta} \right| = \frac{\delta}{x_1 \cdot (x_1 + \delta)}$$

x_1 0'a yeteri kadar yakın olduğunda sağ taraf istenildiği kadar büyük yapılabilir. Dolayısı ile fonksiyon düzgün sürekli değildir.

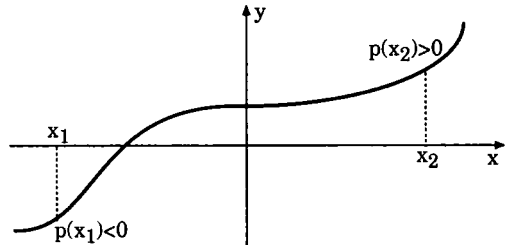
11. (a_n) pozitif bir dizi ve a pozitif bir sayı olsun.

$(a_n) \rightarrow a$ olduğunda $\log a_n \rightarrow \log a$ olduğu bilinmektedir. Buna göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $|a_n - a| < \delta$ olduğunda $|\log a_n - \log a| < \varepsilon$ kalır. Bu da $f(x) = \log x$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir.

12. $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1}$ ve $a_{2m+1} > 0$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ olacağından yeter derece büyük bir x_2 için $p(x_2) > 0$ ve yeter derece küçük bir x_1 için $p(x_1) < 0$ olur.

Bolzano teoreminden (x_1, x_2) aralığında öyle bir c vardır ki $p(c) = 0$ olur.



TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 , A nın bir yığılma noktası ve f de A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti, veya $x = x_0 + h$ koymakla elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu x_0 noktasında **türevlenebilir** denir ve bu limit f nin x_0 noktasındaki **türevi** adını alır. Bu türev

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, Df(x_0)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

TEOREM

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ve f de A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 da türevlenebiliyorsa, bu noktada süreklidir.

TÜREV ALMA KURALLARI

1. Sabitin türevi sıfırdır.
2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$
3. f ve g , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise $f + g$ de x noktasında türevlenebilir ve

$$(f + g)'(x) = (f' + g')(x)$$

dir.

4. f ve g , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise $f.g$ de x noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f.g)'(x) = (f'.g + f.g')(x)$$

dir.

5. f ve g , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinden tanımlanmış ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ ise f/g fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x)$$

dir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir olsun. g fonksiyonu $f(A)$ kümesini içine alan bir B kümesinde tanımlı ve bu kümenin $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ise $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

dır.

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu birebir örten olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ da türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise $f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ da türevlenebilir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$(\sin hx)' = \cos hx$$

$$(\cos hx)' = -\sin hx$$

$$(\tan hx)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\cot hx)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

PARAMETRİK OLARAK VERİLEN FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$\begin{cases} x = h(t) \\ y = k(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyonlar bu noktada sürekli midir?

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \text{ ise} \\ 2, & x = 2 \text{ ise} \\ 4 - x, & x > 2 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x^2, & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$c) f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x), & x < 1 \text{ ise} \\ e^x - e, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases} \quad x_0 = 0 \text{ ve } x_0 = 1$$

$$f) f(x) = |1 - x^2| \quad x_0 = 0$$

$$g) f(x) = \|x\| \quad x_0 = 2 \text{ ve } x_0 = \frac{3}{2}$$

$$h) f(x) = x \lfloor x \rfloor \quad x_0 = 0$$

$$ı) f(x) = x \lceil x \rceil \quad x_0 = 0 \text{ ve } x_0 = \frac{3}{2}$$

2. $f(0) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$ ve $g(x) = (x^2 + 2x + 3)f(x)$ olduğuna göre $g'(0)$ türevini bulunuz.

3. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \arctan \frac{1}{x}$

e) $y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$

b) $y = \arccos \sqrt{x}$

f) $y = \frac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10 \tan^2 x + 1)}{3 \tan^3 x}$

c) $y = \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

g) $y = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$

ç) $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$

h) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

d) $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

ı) $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}} x\right)$

i) $y = \frac{-1}{2 \sin^2 x} + \ln(\tan x)$

j) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

k) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

l) $y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$

m) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arctan\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

n) $y = \arctan x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

o) $y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$

ö) $y = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$

p) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2}$

r) $y = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x})$

s) $y = \frac{1}{2} \left[(x-a) \sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} \right]$

ş) $y = \ln(a+x + \sqrt{2ax+x^2})$

$$t) \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$u) \quad y = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$$

$$ü) \quad y = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$v) \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\tan \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}} \right)$$

$$y) \quad y = a \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2 + ax}$$

$$z) \quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin\left(\frac{a \sin x + b}{a + b \sin x}\right), \quad (a^2 - b^2 > 0)$$

4. Aşağıdaki eşitliklerden y' türevini bulunuz.

$$a) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$d) \quad x^2 + xy + y^2 = 6$$

$$b) \quad y^2 = px$$

$$e) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$c) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f) \quad x = y + \arccot y$$

5. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ eşitliğinden y' türevinin $x = 0$ için değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki eşitliklerden y'' türevini bulunuz.

$$a) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$c) \quad x^2 + xy + y^2 = a^2$$

$$b) \quad \arctan y = x + y$$

7. Aşağıdaki parametrik denklemlerle verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

$$a) \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} x = \cos^3 t (\cos t)^{-1/2} \\ y = \sin^3 t (\cos t)^{-1/2} \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

8. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^x$

c) $f(x) = x^{1/x}$

b) $f(x) = x^{(x^x)}$

d) $f(x) = x^{\tan x}$

9. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların n . mertebeden türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \cos 2x$

b) $y = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \cos^2 x$

c) $f(x) = \sin x$

10. $f(x) = x^2 e^{-x/a}$ olsun. $f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$ olduğunu gösteriniz.

11. $f(x) = x^n$ olsun.

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

olduğunu gösteriniz.

12. $f(x) = e^{-x^2}$ olsun.

a) $f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0)$

b) $f^{(2m-1)}(0) = 0$

c) $f^{(2m)}(0) = (-2)^m (2m-1)(2m-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$

olduğunu gösteriniz.

13. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ için

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & , n \text{ çift ise} \\ 0 & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

14. $f(x) = x(1 + x)^{-1/2}$ olsun. $n \geq 2$ için

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5...(2n-3)}{2^{n-1}} \cdot n$$

olduğunu gösteriniz.

15. $f(x) = x e^{x/a}$ olduğunda $f^{(n)}(x) = \frac{x + na}{a^n} e^{x/a}$ dır, gösteriniz.

16. $f(x) = x^{n-1} \ln x$ için $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$ olduğunu tümevarımı metodu ile gösteriniz.

17. $f(x) = x^{n-1} e^{1/x}$ için $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$ olacağını gösteriniz.

18. f ve g fonksiyonları için $A \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise f, g de n . mertebeden türevlenebilir ve

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

dır, gösteriniz (**Leibniz Formülü**).

19. $f(x) = x^3 \sin x$ olduğuna göre $f^{(30)}(x)$ türevini bulunuz.

20. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

biçiminde parametrik olarak veriliyor.

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ türevinin $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki değerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

$$1. \quad a) \quad f(x) = \begin{cases} x & , x < 2 \text{ ise} \\ 2 & , x = 2 \text{ ise} \\ 4 - x & , x > 2 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{x - 2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

Bu durumda $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ limiti mevcut değildir. Yani fonksiyonun 2 noktasında türevi yoktur.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise fonksiyon x_0 noktasında süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$f(x_0) = f(2) = 2 \Rightarrow f, x_0 = 2$ de süreklidir.

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \geq 0 \text{ ise} \\ -x^2 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

Sağ ve sol türevler mevcut olduğundan fonksiyonun 0 noktasındaki türevi vardır ve 0 a eşittir. 0 noktasında fonksiyon türevlenebilir olduğundan süreklidir.

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) & , x < 1 \text{ ise} \\ e^x - e & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - e - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - e}{x - 1} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = \infty$$

$\Rightarrow f$ fonksiyonu türevlenemez, zira sol türev yoktur.

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases} \quad x_0 = 0 \text{ ve } x_0 = 1$$

f fonksiyonunun sürekliliğini araştıralım.

$x_0 = 0$ alalım. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olsun. $x_n \rightarrow 0$ dir.

(x_n) dizisinin rasyonel terimlerini a_n ile irrasyonel terimlerini b_n ile gösterelim. $x_n \rightarrow 0$ olduğundan $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ dir.

$f(a_n) = 1$, $f(b_n) = 0$ dolayısı ile f fonksiyonunun 0 noktasında limiti yoktur ve sürekli değildir. Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenemez. $x_0 = 1$ noktası için de aynı şekilde hesaplanabilir.

f) $f(x) = |1 - x^2|$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - x^2| - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = 0 \Rightarrow f \text{ türevlenebilir, dolayısı ile sürekli.}$$

g) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x_0 = 2$ ve $x_0 = \frac{3}{2}$

$(x_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ ve $(y_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ dizileri 2 noktasına yakınsayan iki dizi-
dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor 2 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 2 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor 2 - \frac{1}{n} \right\rfloor = 1$$

olduğundan f fonksiyonu 2 noktasında sürekli değildir. Dolayısı ile 2 noktasında türevlenemez.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor = 1, \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$$

$\lfloor x \rfloor$ fonksiyonu $x_0 = \frac{3}{2}$ noktasında sürekli. dir.

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\lfloor \frac{3}{2} + h \right\rfloor - 1}{h} = 0 \Rightarrow f \text{ fonksiyonunun } \frac{3}{2} \text{ noktasındaki türevi } 0 \text{ dir.}$$

h) $f(x) = x \lfloor x \rfloor$ $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor = 0. \text{ Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenebilirdir ve sürekli.}$$

ı) $f(x) = x \lfloor x \rfloor$ $x_0 = 0$ ve $x_0 = \frac{3}{2}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor \text{ mevcut değil.}$$

Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenemez.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor x \rfloor = 0 = f(0)$ olduğundan fonksiyon 0'da süreklidir.

$$\begin{aligned}
 2. \quad g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x + 3)f(x) - 3f(0)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x + 3)f(x) - 15 + (x^2 + 2x + 3)5 - (x^2 + 2x + 3)5}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 3) \left(\frac{f(x) - 5}{x} \right) + \left(\frac{x^2 + 2x}{x} \right) 5 = 3 \cdot 4 + 10 = 22
 \end{aligned}$$

$$3. \quad a) \quad y = \arctan \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$b) \quad y = \arccos \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$$

$$c) \quad y = \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' \\
 &= -\frac{1-x}{1+x+1-x} \cdot \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \right] \left[\frac{1+x}{1-x} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

$$ç) \quad y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) + 1 = \tan^4 x$$

$$d) \quad y = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \sqrt{1+x^2} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

e) $y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$

$$y' = \frac{1}{5} \cos^2 x \cdot (-\sin x) (3 \cos^2 x - 5) - 6 \cos x \sin x \cdot \frac{1}{15} \cos^3 x$$

$$= -\frac{3}{5} \cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x - \frac{2}{5} \cos^4 x \sin x$$

$$= -\cos^2 x \sin x (\cos^2 x - 1) = \cos^2 x \sin^3 x$$

f) $y = \frac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10 \tan^2 x + 1)}{3 \tan^3 x}$

$$= \frac{\tan^6 x + 9 \tan^4 x - 9 \tan^2 x - 1}{3 \tan^3 x}$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + 3 \tan x - \frac{3}{\tan x} - \frac{1}{3} \frac{1}{\tan^3 x}$$

$$y' = \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + 3 (1 + \tan^2 x) + 3 \frac{(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x} + \frac{(1 + \tan^2 x)}{\tan^4 x}$$

$$= \tan^4 x + 4 \tan^2 x + 4 \tan^{-2} x + \tan^{-4} x + 6$$

$$= \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{4 \sin^2 x}{\cos^2 x} + 4 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} + 6$$

$$= \frac{\sin^8 x + 4 \sin^6 x \cos^2 x + 4 \sin^2 x \cos^6 x + 6 \sin^4 x \cos^4 x + \cos^8 x}{\sin^4 x \cos^4 x}$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^4}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}$$

g) $y = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - x \sin x - \cos x)(x \sin x + \cos x) - (\sin x + x \cos x - \sin x)(x \cos x - \sin x)}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

$$= -\frac{x^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(x \sin x + \cos x)^2} = -\frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

h) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\text{i)} \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)^2}} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)' = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - bx^2}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}}$$

$$\text{i)} \quad y = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln(\tan x)$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cdot \cos x} \\ = \frac{1}{\sin^3 x \cdot \cos x}$$

$$\text{j)} \quad y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

$$y' = \frac{-e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-x}{1+x}$$

$$\text{k)} \quad y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$$

$$\text{l)} \quad y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

$$y' = \arctan \frac{x}{a} + \frac{\frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{a}{2} \frac{(2x)}{x^2 + a^2} = \arctan \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} - \frac{ax}{a^2 + x^2} \\ = \arctan \frac{x}{a}$$

$$\text{m)} \quad y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arctan \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)$$

$$y' = \frac{-x / \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} + \frac{\frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}}{1 + \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)^2} \\ = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

$$\text{n) } y = \arctan x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \right) \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^4} \end{aligned}$$

$$\text{o) } y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{ö) } y = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{2x}(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2} \right) \cdot \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \cdot \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} - \frac{2e^{2x}}{e^{4x}-1} = \frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}} \end{aligned}$$

$$\text{p) } y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2}$$

$$y' = \arcsin \sqrt{x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}} = \arcsin \sqrt{x}$$

$$\text{r) } y = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1+\sqrt{x})$$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$\text{s) } y = \frac{1}{2} \left[(x-a) \sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} \right]$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{2ax-x^2} + \frac{(x-a)}{2} \cdot \frac{(2a-2x)}{\sqrt{2ax-x^2}} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2ax-x^2-x^2+2ax-0^2+a^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \right] = \frac{2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{2ax-x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ş) } y = \ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$$

$$y' = \frac{1 + \frac{2a+2x}{2\sqrt{2ax+x^2}}}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

$$\text{t) } y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{a^2-a^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2-a^2+x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \sqrt{x^2-a^2} \end{aligned}$$

$$\text{u) } y = \frac{m}{2}\ln(x^2-a^2) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{m}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a} \cdot \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{mx}{(x^2-a^2)} + \frac{n}{(x^2-a^2)} \\ &= \frac{mx+n}{(x^2-a^2)} \end{aligned}$$

$$\text{ü) } y = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} = \frac{1}{(x^2-x+1)(1+x)} = \frac{1}{1+x^3} \end{aligned}$$

$$\text{v) } y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right) - \ln\left(\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}\right)\right] \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}} - \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}{\tan^2\frac{x}{2}-(2-\sqrt{3})^2}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}} \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} - (2-\sqrt{3})^2}$$

y) $y = a \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2+ax}$

$$\begin{aligned} y' &= a \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \right) - \frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax}} = \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{x+a}\sqrt{x}} - \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{ax+x^2}} \end{aligned}$$

z) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin\left(\frac{a\sin x + b}{a+b\sin x}\right), (a^2 - b^2 > 0)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{a^2\cos x + ab\cos x \sin x - ab\sin x \cos x - b^2\cos x}{(a+b\sin x)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a\sin x + b}{a+b\sin x}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{(a^2-b^2)\cos x}{\sqrt{(a^2-b^2)(1-\sin^2 x)}} \cdot \frac{1}{(a+b\sin x)} \\ &= \frac{1}{(a+b\sin x)} \end{aligned}$$

4. a) $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2y'y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

b) $y^2 = 2px$

$$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$$

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{b^2x}{a^2y}$$

d) $x^2 + xy + y^2 = 6$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

e) $e^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \Rightarrow y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

f) $x = y + \arccot y$

$$1 - y' = \frac{-1}{1+y^2}y' \Rightarrow 1 = y' \left(\frac{y^2}{1+y^2} \right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} \Rightarrow y' = y^{-2} + 1$$

5. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$

$$e^{xy}(y + xy') - 2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x - e^{xy}y}{xe^{xy} + 3y^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 + y^3 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

6. a) $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}, \quad y'' = \frac{-y - xy'}{y^2} = \frac{-y - x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2} = -a^2y^{-3}$$

b) $\arctan y = x + y$

$$\frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1 + y' \Rightarrow y' \left(\frac{-y^2}{1+y^2} \right) = 1 \Rightarrow y' = -\frac{1+y^2}{y^2} = -1 - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2}{y^3}y' = \frac{2}{y^3} \left(-\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -2 \frac{1+y^2}{y^5}$$

c) $x^2 + xy + y^2 = a^2$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$y'' = -\frac{(2+y')(x+2y) - (1+2y')(2x+y)}{(x+2y)^2}$$

$$= -\frac{2x+4y+xy'+2yy'-2x-y-4xy'-2yy'}{(x+2y)^2}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{-3y + 3xy'}{(x+2y)^2} = \frac{-3y + 3x \cdot \left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2} = \frac{-3xy - 6y^2 - 6x^2 - 3xy}{(x+2y)^3} \\
 &= \frac{-6xy - 6y^2 - 6x^2}{(x+2y)^3} = \frac{-6(x^2 + xy + y^2)}{(x+2y)^3} = -6a^2 (x+2y)^{-3}
 \end{aligned}$$

$$7. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2} t^2$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t (\cos t)^{-1/2} \\ y = \sin^3 t (\cos t)^{-1/2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \sin^2 t (\cos t)^{1/2} + \frac{1}{2} (\cos t)^{-3/2} \sin^4 t}{-\frac{5}{2} \cos t^{3/2} \sin t} \\
 &= \frac{\cos t^{-3/2} \cdot \sin^2 t \left(3 \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2} \right)}{-\frac{5}{2} \cos t^{3/2} \sin t} \\
 &= -\frac{2 \sin t}{5 \cos^3 t} \cdot \left(3 \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$8. \quad \text{a)} \quad f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

$$\text{b)} \quad f(x) = x^{(x^x)} \Rightarrow \ln f(x) = x^x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{(x^x)} x^x \left(\ln x (\ln x + 1) + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{c)} \quad f(x) = x^{1/x} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad f'(x) = x^{1/x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right) = x^{1/x} \cdot (1 - \ln x) x^{-2}$$

d) $f(x) = x^{\tan x}$

$$\ln f(x) = \tan x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1 + \tan^2 x) \ln x + \frac{\tan x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\tan x} \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right)$$

9. a) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6x^{-4} \dots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$

b) $y = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2 \cdot 2} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

c) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin \left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

d) $f(x) = \cos 2x$

$$f'(x) = -2 \sin 2x = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f''(x) = -2^2 \cos 2x = 2^2 \cos \left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f'''(x) = 2^3 \sin 2x = 2^3 \cos \left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cos \left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

e) $f(x) = \cos^2 x$

$$f'(x) = -\frac{2\sin 2x}{2} = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x = 2 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x = 2 \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos\left(2x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

10. $f(x) = 2xe^{-x/a} - \frac{x^2}{a} e^{-x/a} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f'(x) = 2e^{-x/a} - \frac{4x}{a} e^{-x/a} + \frac{x^2}{a^2} e^{-x/a} \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$f''(x) = -\frac{6}{a} e^{-x/a} + \frac{6x}{a^2} e^{-x/a} - \frac{x^2}{a^3} e^{-x/a} \Rightarrow f''(0) = -\frac{6}{a}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{12}{a^2} e^{-x/a} - \frac{4x}{a^3} e^{-x/a} + \frac{x^2}{a^4} e^{-x/a} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{12}{a^2}$$

⋮

$$f^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

11. $f(1) = 1 = \binom{n}{0}$

$$f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n = \binom{n}{1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1) = \binom{n}{2} 2!$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{n} n! \Rightarrow f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

12. a) $f(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \Rightarrow f''(0) = -2$$

$$f'''(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2} \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 48x^2 e^{-x^2} + 16x^4 e^{-x^2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 12$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0) \text{ sağlanır.}$$

b) $f^{(2m-1)}(0) = 0$

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \dots, f^{(2m-1)}(0)$$

c) $f'(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 12, \dots, f^{(2m)}(0) = (-2)^m (2m-1)(2m-3) \dots 5.3.1$

13. $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$ olduğundan

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \right]$$

olur. $x = 0$ yazılırsa

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} [n! + (-1)^n n!] = n! \left[\frac{1 + (-1)^n}{2} \right] = \begin{cases} n! , n \text{ çift ise} \\ 0 , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur.

14. $f(x) = x(1+x)^{-1/2}$

$$f'(x) = (1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2} x(1+x)^{-3/2}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-3/2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot x(1+x)^{-5/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1.3}{2^2} \cdot 3(1+x)^{-5/2} - \frac{1.3.5}{2^3} x(1+x)^{-3/2}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2^{n-1}} n(1+x)^{1/2-n} - \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n} x(1+x)^{1/2-n-1}$$

olacağından

$$f^{(n)}(0) = \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2^{n-1}} \cdot n$$

bulunur.

15. $f(x) = x e^{x/a}$

$$f'(x) = e^{x/a} + \frac{x}{a} e^{x/a} = e^{x/a} \left(1 + \frac{x}{a} \right) = \frac{x+a}{a} e^{x/a}$$

$$f''(x) = \frac{1}{a} e^{x/a} + \frac{1}{a} \frac{x+a}{a} e^{x/a} = \frac{x+2a}{a^2} e^{x/a}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{x+na}{a^n} e^{x/a} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{x+na}{a^n}$$

16. “ $f(x) = x^{n-1} \ln x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$ dir.” önermesinin doğruluğunu tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için

“ $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ dir.” önermesi elde edilir. Bu önerme doğru olduğundan verilen önerme $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun. Bu takdirde

“ $f(x) = x^{k-1} \ln x \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{x}$ dir.” önermesi doğrudur.

Buradan yararlanarak, önermenin $n = k + 1$ için doğru olacağını, yani “ $f(x) = x^k \ln x \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = \frac{k!}{x}$ dir.” önermesinin doğruluğunu göstere-
lim.

$$(x^k \ln x)^{(k+1)} = (x \cdot x^{k-1} \ln x)^{(k+1)} = [(x \cdot x^{k-1} \ln x)^{(k)}]'$$

olur. Diğer taraftan

$$[x \cdot g(x)]^{(k)} = k g^{(k-1)}(x) + x g^{(k)}(x)$$

olacağından

$$\begin{aligned} [(x \cdot x^{k-1} \ln x)^{(k)}]' &= [k (x^{k-1} \ln x)^{(k-1)} + x \cdot (x^{k-1} \ln x)^{(k)}]' \\ &= [k (x^{k-1} \ln x)^{(k-1)} + x \cdot \frac{(k-1)!}{x}]' \\ &= k \cdot (x^{k-1} \ln x)^{(k)} + 0 = k \cdot \frac{(k-1)!}{x} = \frac{k!}{x} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$(x^k \ln x)^{(k+1)} = \frac{k!}{x}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

17. $P(n) : f(x) = x^{n-1} e^{1/x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$ dir.

$$P(1) : f(x) = e^{1/x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} \text{ dir.}$$

Bu önerme doğrudur.

Önerme $n = k$ için doğru olsun. Bu takdirde

$$f(x) = x^{k-1} e^{1/x} \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} \text{ dir.}$$

önermesi doğrudur. Başka bir yazıyla

$$(x^{k-1} e^{1/x})^{(k)} = (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}$$

dir.

Önermenin $n = k + 1$ için doğru olacağını, yani

$$(x^k e^{1/x})^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{k+2}}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (x^k e^{1/x})^{(k+1)} &= [(x^k e^{1/x})^{(k)}]' = [(x \cdot x^{k-1} e^{1/x})^{(k)}]' \\ &= [k (x^{k-1} e^{1/x})^{(k-1)} + x \cdot (x^{k-1} e^{1/x})^{(k)}]' \\ &= [k (x^{k-1} e^{1/x})^{(k-1)} + x \cdot (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}]' \\ &= [k (x^{k-1} e^{1/x})^{(k)} + (-1)^k (e^{1/x} x^{-k})'] \\ &= (-1)^k k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} + (-1)^k \left[-\frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} - \frac{k e^{1/x}}{x^k} \right] \\ &= (-1)^k k \cdot \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{k+2}} - (-1)^k k \cdot \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

18. Tümevarım prensibini kullanarak ispatı yapalım.

$$n = 1 \text{ için } (f.g)'(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x) g(x) + f(x) g'(x) &= \binom{1}{0} f(x) g'(x) + \binom{1}{1} f'(x) g(x) \\ &= f(x) g'(x) + f'(x) g(x) \end{aligned}$$

$n-1$. türev için eşitlik doğru olsun. Yani

$$(f.g)^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \text{ olsun. (1)}$$

(1) ifadesinin her iki yanının türevini alalım.

$$\begin{aligned} (f.g)^{(n)} &= \left(\binom{n-1}{0} f(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{1} f'(x) g^{(n-2)}(x) + \dots + \binom{n-1}{n-1} f^{(n-1)}(x) g(x) \right)' \\ &= \binom{n-1}{0} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{0} f g^{(n)} + \binom{n-1}{1} f''(x) g^{(n-2)}(x) \\ &\quad + \binom{n-1}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \dots + \binom{n-1}{n-1} f^{(n)}(x) g(x) + \binom{n-1}{n-1} g^{(n-1)}(x) g'(x) \end{aligned}$$

olur.

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{0}, \quad \binom{n-1}{0} = \binom{n}{0},$$

$$\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n-1} \text{ ve } \binom{n-1}{n-1} = 1$$

olduğundan

$$(f.g)^{(n)} = \binom{n}{0} f g^{(n)} + \binom{n}{1} f' g^{(n-1)} + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

olur.

19. $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ seçelim ve $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$
 $f^{(4)}(x) = f^{(5)} = \dots = f^{(n)}(x) = 0$

$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ olduğunu biliyoruz.

Lebiniz Formülüne göre

$$h^{(n)}(x) = (g.f)^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) f(x) + n f'(x) g^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} f''(x) g^{(n-2)}(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f'''(x) g^{(n-3)}(x)$$

$$= \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) x^3 + n.3x^2 \cdot \sin\left(x + (n-1) \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2} 6x \cdot \sin\left(x + (n-2) \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 6 \cdot \sin\left(x + (n-3) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$h^{(30)}(x) = \sin(x + 15\pi) \cdot x^3 + 90x^2 \sin\left(x + 29 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 90.29.x \sin(x + 14\pi) + 145.28.6 \cdot \sin\left(x + 27 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -x^3 \sin x + 90x^2 \cos x + 2610x \cdot \sin x + 25.872 \cdot \cos x$$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 \cos t}{-3 \sin t} = -\frac{4}{3} \cot(t)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{4}{3} \cot(t) \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3 \sin t} \right) = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sin^3 t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{2^3}{(\sqrt{2})^3} = \frac{-16}{9\sqrt{2}}$$

TÜREVİN UYGULAMALARI

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

Bir fonksiyonun bir a noktasındaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktadan çizilen teğetin eğimidir. Yani

$$m = f'(a)$$

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Yolun zamana göre türevi hızı, hızın zamana göre türevi ivmedir.

$$v = s', \quad a = v' = s''$$

TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER

TEOREM

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $c \in (a, b)$ noktasında türevli ve $f'(c) \neq 0$ olsun. (a, b) aralığının öyle bir $(c - \delta, c + \delta)$ alt aralığı vardır ki bu aralıktaki her x için $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ ile $f'(c)$ aynı işarettedir.

SONUÇ

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $c \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f'(c) > 0$ ise c nin öyle bir δ -komşuluğu vardır ki bu komşulukta f artandır. Eğer $f'(c) < 0$ ise bu komşulukta f azalandır.

TEOREM

(Fermat Teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa

$$f'(c) = 0$$

dır.

TANIM

Bir $A \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde

$$f'(c) = 0$$

şartını sağlayan c noktalarına f fonksiyonunun **Duraklama noktaları** veya **Kritik noktaları** denir.

TEOREM

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası, $f'(c)$ mevcut ve sıfırdan farklı olsun.

- 1) Eğer $f'(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum
- 2) Eğer $f'(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum

vardır.

TEOREM

f fonksiyonunun (a, b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve (a, b) aralığının bir c noktasında

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \text{ ve } f^{(n)}(c) \neq 0$$

olsun. Ayrıca $f^{(n)}$ fonksiyonu c de sürekli olsun.

- (1) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum vardır.
- (2) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum vardır.
- (3) Eğer n tek ise c de ne yerel minimum ne de yerel maksimum vardır.

TEOREM (Rolle Teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında, $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

TEOREM

Kapalı bir aralıkta sürekli ve iç kısmında türevlenebilen bir fonksiyonun iki sıfır yeri arasında türevinin sıfır olduğu en az bir yer vardır.

TEOREM (Diferansiyel Hesabının Ortalama Değer Teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu takdirde, (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

TEOREM (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi)

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve aralığın iç kısmında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca $\forall x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu takdirde, (a, b) aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

TANIM

$K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K ya bir **konveks küme** adı verilir.

TANIM

$K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun.

K konvekstir $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in K$

TANIM

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde **konvekstir** denir.

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ de **konkavdır**.

TEOREM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci türevi var olsun.

Eğer her $x \in (a, b)$ için $f''(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ de konveks-tir.

TANIM

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya **büküm noktası** veya **dönüm noktası** adı verilir.

PROBLEMLER

1. $y = x^3 - 6x + 2$ eğrisine teğet olan ve $y = 6x - 2$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.
2. $y = \frac{x}{1+x^2}$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.
3. $(0, 3)$ ve $(5, -2)$ noktalarından geçen doğrunun $y = c(x + 1)^{-1}$ eğrisine teğet olması için c ne olmalıdır?
4. $y = \frac{ax}{a^2 + x^2}$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri $y = \sqrt{2ax - x^2}$ eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetine paralel olur.
5. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve $(4, 0)$ noktasından geçen doğruların denklemini yazınız.
6. $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçen ve $x^2 - 4y + 4 = 0$ parabolüne teğet olan doğruların birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.
7. c herhangi bir sabit olmak üzere, $x = -c$ doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktadan $y^2 = 4cx$ parabolüne çizilen iki teğetin dik kesiştiklerini gösteriniz.
8. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6$ eğrisine $A(2, 2)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.
9. $y = 2x$ doğrusunun $y = x^2 + ax + b$ parabolüne $A(2, 4)$ noktasında teğet olması için a ve b ne olmalıdır?
10. $y = -x$ doğrusunun $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz. Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?
11. $y = x^3$ eğrisinin $(0, 0)$ noktasındaki teğetini bulunuz. Teğet değme noktasında eğriyi keser mi?
12. m nin hangi değerleri $y = mx$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberine teğettir?
13. $xy = 2$ ile $x^2 - y^2 = 3$ eğrilerinin kesim noktalarında bu eğrilere çizilen teğetlerin dik kesiştiklerini gösteriniz.
14. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisine, bu eğrinin $y = -x$ doğrusu ile kesim noktasından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.
15. $y^2 = 4px$ parabolüne üzerindeki bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsine üzerindeki bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.
17. $y = x - x^2$ eğrisine $x = 0$ apsisli noktasından çizilen teğetin Ox- eksenine ile yaptığı açısının ölçüsünü bulunuz.
18. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ eğrisine, bu eğrinin x- eksenini kesim noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini yazınız.
19. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ parametrik denklemi ile verilen eğriye $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.
20. Aşağıdaki eğri çiftlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.
- a) $y^2 = 6x + 9$ ile $y^2 = 9 - 6x$
- b) $x^2 - y^2 = 5$ ile $4x^2 + 9y^2 = 72$
21. $y^2 = x^3$ eğrisine $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ apsisli noktalarından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.
22. $x^m y^n = a^{m+n}$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasından eğriye çizilen teğetin denklemini yazınız.
23. $4x^2 + y^2 = 72$ eğrisinin, $(4, 4)$ noktasında kesişen teğetlerinin denklemini yazınız.
24. c bir sabit olmak üzere $f(x) = x^4 + cx^2 + 1$ olsun. f nin artan ve azalan olduğu yerleri (aralıkları) bulunuz. f nin ekstremumlarını hesaplayınız. Bundan faydalanarak $c = 18$ ve $c = -18$ için fonksiyonun grafiğini çiziniz.
25. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklardaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.
- a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-3, 10]$
- b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-2, 10]$
- c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$
- d) $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$
- e) $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$, $[-1, 3]$
- f) $f(x) = e^x \sin x$, $[0, 2\pi]$

g) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $[-1, 1]$

h) $f(x) = x^4 + 1$, $[-1, 3]$

26. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların

a) Kritik noktalarını bulunuz.

b) f' türev fonksiyonunun işaretini inceleyerek artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

c) Yerel minimum ve yerel maksimum noktalarını bulunuz.

1) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

3) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$

4) $f(x) = xe^{-x}$

27. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$ fonksiyonu veriliyor. k ne olmalıdır ki f fonksiyonu

a) $x = 2$ de yerel minimuma

b) $x = -3$ de yerel minimuma,

c) $x = 1$ de büküm noktasına

sahip olsun. Bu fonksiyon bir yerel maksimuma sahip olabilir mi?

28. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün $(0,1)$ noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

29. $A(0, 5)$ noktasının $4y = x^2$ parabolüne olan uzaklığını bulunuz.

30. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin hangi noktası $(3,4)$ noktasına en yakındır.

31. $f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x}{4}$ eşitliği ile verilen f fonksiyonunun ekstrem değerini bulunuz.

32. a yarıçaplı bir çember içine çizilebilen dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

33. Köşeleri orijin, x - eksen, y - eksen ve $y = 4 - x^2$ parabolü üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

34. İki köşesi x - eksen, iki köşesi de $y = 16 - 3x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanın alanını bulunuz.

35. Toplamları 1000 ve kareleri toplamı mümkün olduğu kadar küçük olan iki sayı bulunuz.
36. Yarıçapı a olan bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel silindirin hacmi en fazla ne olabilir?
37. a yarıçaplı bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel dik koniler içinde hacmi en fazla olanın hacmini hesaplayınız.
38. L uzunluğunda bir tel iki parçaya bölünerek bir çember ile bir kare yapılmak istenmektedir. Kare ile dairenin alanları toplamının en büyük olabilmesi için çemberin yarıçapı ne olmalıdır? Karenin kenar uzunluğu ile toplam alanı hesaplayınız.
39. Bir hareketlinin hızı, zamana bağlı olarak, $v = t(t + 2) + 2$ şeklinde değişmektedir. Bu hareketlinin minimum hızını bulunuz.
40. Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin ivmesi zamana bağlı olarak

$$a = \sin(t^2) \cdot (t > 0)$$

biçiminde verilmektedir. Bu hareketlinin ivmesi ne zaman maksimum olur?

41. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $(x > 0)$

b) $\tan x > x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\frac{1}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x > 0)$

d) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$, $(x > -1 \text{ ve } 0 < \alpha < 1)$

e) $|\sin x - \sin t| \leq |x - t|$

f) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

g) $\frac{x-a}{x} < \ln \frac{x}{a} < \frac{x-a}{a}$, $(0 < a < x)$

h) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $(x > 0)$

42. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[0, 1]$ aralığında Rol-le teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse teoreme uyan c sayısını bulunuz.

43. $e^x = 1 + x$ denkleminin $x = 0$ dan başka kökünün olmadığını gösteriniz.
44. Rolle teoreminden yararlanarak $5x^4 - 4x + 1 = 0$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.
45. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremden adı geçen x_0 noktasını bulunuz.
46. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan eğrilerin konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz. Bu eğrilerin büküm noktalarını bulunuz.
- a) $y = 2x^2 + 1$ d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$
- b) $y = -2x^3 + 3x^2 - 12x$ e) $y = e^{-x^2}$
- c) $y = \frac{1}{x}$
47. Ortalama değer teoreminden yararlanarak
- $$\sin(x + h) - \sin x = h \cdot \cos x_0$$
- olacak şekilde bir $x_0 \in (x, x + h)$ sayısının varlığını gösteriniz.
48. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa bu teoremden adı geçen x_0 sayısını bulunuz.
49. Ortalama değer teoreminden faydalanarak Rolle Teoremini ispat ediniz.
50. Tek fonksiyonun türevinin çift, çift fonksiyonun türevinin tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.
51. İspat ediniz ki, eğer $[a, b]$ aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.
52. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında türevlenebilir olsun. f' fonksiyonunun $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alabileceğini gösteriniz. (**Darboux Teoremi**).
53. Sıfır yerleri reel olan bir polinomun türevinin kompleks sıfır yerlerinin olmayacağını gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. $y = x^3 - 6x + 2$ $m = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6 = 6 \Rightarrow 3x_0^2 = 12$, $x_0 = \pm 2$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2$ olur.

Doğrunun denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 6(x - 2)$

$\Rightarrow y = 6x - 14$

$x_0 = -2$ ise $y_0 = 6$ bulunur.

Bu durumda doğru denklemi

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = 6(x + 2) \Rightarrow y = 6x + 18$ olur.

2. $y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow m = y'(0) = 1$ olur.

Doğru denklemi $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = x$ olur.

3. $(0, 3)$ ve $(5, -2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x-0}{5-0} \Rightarrow y = 3 - x$

olur. Bu doğrunun eğimi $m = -1$ dir.

(x_0, y_0) noktasında $y = c(x+1)^{-1}$ eğrisinin teğetinin denklemini bulalım.

$y_0 = \frac{c}{x_0+1}$, $y' = \frac{-c}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{-c}{(x_0+1)^2}$

$\Rightarrow y - \frac{c}{x_0+1} = \frac{-c}{(x_0+1)^2}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{-cx}{(x_0+1)^2} + \frac{cx_0}{(x_0+1)^2} + \frac{c}{x_0+1}$.

Bu doğru $y = 3 - x$ doğrusuna eşlenirse

$\frac{c}{(x_0+1)^2} = 1$ ve $\frac{cx_0}{(x_0+1)^2} + \frac{c}{x_0+1} = 3 \Rightarrow x_0 + \frac{c}{x_0+1} = 3$

$\Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + (c - 3) = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + [(x_0+1)^2 - 3] = 0$

$\Rightarrow x_0^2 = 1$ bulunur. $x_0 = -1$ olamayacağından $x_0 = 1$ dir.

$c = (x_0+1)^2 = 4$ olur.

4. $y = \sqrt{2ax - x^2}$ eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetinin eğimi

$\Rightarrow y' = \frac{2a - 2x}{2\sqrt{2ax - x^2}} \Rightarrow y'(a) = 0$ dir. Dolayısıyla

$$y' = \frac{a(a^2 + x^2) - ax(2x)}{(a^2 + x^2)^2} = 0 \text{ olmalı.}$$

$$\Rightarrow a^3 - ax^2 = 0 \Rightarrow a^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$$x = a \Rightarrow y = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}, \quad x = -a \Rightarrow y = -\frac{a^2}{a^2 + a^2} = -\frac{1}{2}$$

bulunur. İstenen noktalar $\left(a, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(-a, -\frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır.

5. Elipse (x_0, y_0) noktasında çizilen teğetin eğimi

$$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow m = y'(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{4y_0}$$

$$\Rightarrow \text{Teğetin denklemi } y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0) \Rightarrow 4y_0y - 4y_0^2 = x_0^2 - xx_0$$

$$\Rightarrow 4y_0y + xx_0 = x_0^2 + 4y_0^2 \quad (*)$$

olur. Bu doğru $(4, 0)$ noktasından geçtiğinden $4x_0 = x_0^2 + 4y_0^2$ olmalıdır. Diğer taraftan (x_0, y_0) elipsin bir noktası olduğundan $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ olur. Bu iki denklemden $x_0 = 1$ olduğu görülür.

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir. } (*) \text{ denkleminde,}$$

$$x_0 = 1, y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ alınır } 6y + \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = 0, \quad x_0 = 1, y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ alınır } 6y - \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

6. $x^2 - 4y + 4 = 0$ parabolüne (x_0, y_0) noktasında teğet olan doğruların denklemi :

$$2x - 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{2} \Rightarrow y' \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{x_0}{2},$$

$$\Rightarrow y - y_0 = \frac{x_0}{2}(x - x_0), \quad y - x \frac{x_0}{2} = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$$

olur. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ bu denklemi sağlayacağından

$$-\frac{3}{4}x_0 = y_0 - \frac{x_0^2}{2} \Rightarrow 2x_0^2 - 3x_0 - 4y_0 = 0 \text{ ve}$$

(x_0, y_0) parabol üzerinde bulunduğundan $x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0$ olur.

$$\begin{cases} 2x_0^2 - 3x_0 - 4y_0 = 0 \\ x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0 \end{cases} \text{ sistemi çözümlenerek } x_0 = 4 \text{ veya } x_0 = -1 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $m_1 = 2$ ve $m_2 = -\frac{1}{2}$ olur. $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğundan teğetler diktir.

7. $x = -c$ doğrusu üzerindeki herhangi bir $(-c, k)$ noktasından çizilen teğet parabole (a, b) noktasında teğet olsun. (a, b) parabol üzerinde bulunduğundan

$$b^2 = 4ac \quad (1)$$

dir. Parabole (a, b) noktasından çizilen teğetin eğimini bulalım.

$$y^2 = 4cx \Rightarrow 2yy' = 4c \Rightarrow by' = 2c \Rightarrow m = \frac{2c}{b}$$

olur. Dolayısıyla teğetin denklemi

$$y - b = \frac{2c}{b}(x - a)$$

olur. Teğet $(-c, k)$ noktasından geçtiğinden

$$k - b = \frac{2c}{b}(-c - a) \Rightarrow kb - b^2 = -2c^2 - 2ac$$

bulunur. (1) den $ac = \frac{b^2}{4}$ dir. Bu değer son eşitlikte yerine konur ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$-b^2 + 2kb + 4c^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri çarpımı

$$b_1 \cdot b_2 = -4c^2$$

dir. Teğetlerin eğimleri çarpımı

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{2c}{b_1} \cdot \frac{2c}{b_2} = \frac{4c^2}{b_1 b_2} = \frac{4c^2}{-4c^2} = -1$$

olacağından çizilen teğetler birbirine diktir.

8. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6 \Rightarrow 2x - 2y - 2xy' + 2yy' + 2 + y' = 0 \Rightarrow (2,2)$ noktası için $4 - 4 - 4m + 4m + 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2$ bulunur. Teğetin denklemi

$$y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6$$

olur.

9. $y' = 2x + a$

$$y' \Big|_{(2,4)} = 4 + a \Rightarrow 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2 \text{ olmalı.}$$

$$(2, 4) \text{ parabol denklemini sağlayacağından } 4 = 4 + (-2) \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$$

10. $-x = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = x_3 = 3$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = y_3 = -3 \text{ bulunur.}$$

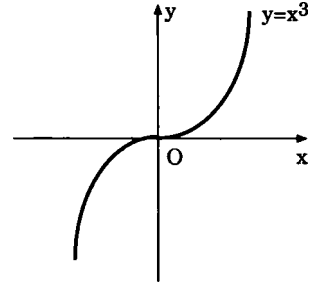
Doğru eğriyi (0, 0) da keser, (3, -3) de teğettir, çünkü

$$y'(x) = 3x^2 - 12x + 8 \Rightarrow y'(3) = -1 \text{ dir.}$$

11. $y = x^3 \Rightarrow y'(0) = 0 = m$

Teğetin denklemi $y = mx \Rightarrow y = 0$ olur.

$y = 0$ doğrusu $y = x^3$ eğrisini orijinde keser.



12. $2x + 2yy' - 4 = 0, y' = \frac{4-2x}{2y} = \frac{2}{y} - \frac{x}{y}$

Çemberin (a, b) noktasından geçen teğetin denklemi

$$y - b = \left(\frac{2}{b} - \frac{a}{b} \right) (x - a)$$

olur. Bunun $y = mx$ olması dolayısıyla (0, 0) dan geçmesi gerekir.

$$(0,0) \text{ noktası için } -b = \left(\frac{2}{b} - \frac{a}{b} \right) (-a) \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 0$$

(a, b) çemberi sağladığından

$$a^2 + b^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow 4a - 3 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m_2 = \frac{2 - \frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$13. xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 2 \text{ olur.}$$

$x_1 = 2 \Rightarrow y = 1$ ve $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -1 \Rightarrow A(2, 1)$ ve $B(-2, -1)$ kesim noktalarıdır.

$$A(2, 1) \text{ noktasındaki teğetlerin eğimleri, } y = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow 4 - 2m_2 = 0$$

$\Rightarrow m_2 = 2$ olur. $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ olduğundan $(2, 1)$ noktasındaki teğetler birbirine diktir.

$$B(-2, -1) \text{ noktasında } y' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, \quad 2x - 2yy' = 0 - 4 + 2m_2 = 0$$

$\Rightarrow m_2 = 2$ olur. $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğundan bu noktadan eğrilere çizilen teğetler de birbirine diktir.

$$14. x^{2/3} + (-x)^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow 2x^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad y_{1,2} = \mp \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \Rightarrow m = y' \bigg|_{\left(\pm \frac{a}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)} = 1$$

olacağından teğetlerin denklemleri

$$y \mp \frac{a}{2\sqrt{2}} = \left(x \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x - y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

olur.

$$15. y^2 = 4px \Rightarrow 2yy' = 4p \Rightarrow y' = \frac{2p}{y} \Rightarrow m = y' \bigg|_{(x_1, y_1)} = \frac{2p}{y_1}$$

olur. (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemi

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2p(x - x_1) \Rightarrow$$

$$yy_1 = 2px + y_1^2 - 2px_1, \quad yy_1 = 2px + 4px_1 - 2px_1 \Rightarrow yy_1 = 2p(x + x_1)$$

$$16. \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad y' = -\frac{xb^2}{ya^2} \Rightarrow m = y' \Big|_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}, \quad (x_1, y_1) \text{ elips}$$

$$\text{üzerinde olduğundan } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} (x - x_1)$$

$$\Rightarrow yy_1 a^2 - (y_1)^2 a^2 = -x_1 x b^2 + x_1^2 b^2$$

$$yy_1 a^2 + x x_1 b^2 = (y_1)^2 a^2 + (x_1)^2 b^2 \Rightarrow \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{(x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

olur.

$$17. y' = 1 - 2x \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$x = 0 \text{ ise } y = 0 \text{ olur. } y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

$$\tan \theta = m = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$18. x \text{ eksenini kestiği noktada } y = 0 \text{ dır.}$$

$$0 = \arcsin \frac{x-1}{2} \Rightarrow \sin 0 = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{2} \Rightarrow x = 1$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\text{Teğet denklemi } y = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y = 1 \text{ olur.}$$

$$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -2 \text{ bulunur. Buna göre Normalin denklemi}$$

$$y = -2(x - 1) \Rightarrow y + 2x = 2$$

olur.

$$19. y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t} \Rightarrow m = y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi} \text{ olur.}$$

$$\text{Teğet denklemi } y - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi} \left(x - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(4 + \pi)x + (\pi - 4)y = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2 \text{ olur.}$$

20. (a) Eğrilerin kesim noktaları :

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 6x + 9 \\ y^2 = 9 - 6x \end{array} \right\} \Rightarrow 6x + 9 = 9 - 6x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

olacağından eğriler $A(0, 3)$ ve $B(0, -3)$ noktalarında kesişirler. $A(0, 3)$ noktasında eğrilere çizilen teğetlerin eğimleri :

$$2yy' = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot m = 6 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$2yy' = -6 \Rightarrow 2 \cdot (-3) \cdot m = -6 \Rightarrow m_2 = -1 \text{ olur. } m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

olduğundan teğetler, dolayısıyla eğriler, $A(0, 3)$ noktasında dik kesişirler. $B(0, -3)$ de dik kesiştikleri benzer şekilde gösterilebilir.

(b) Eğrilerin kesim noktaları :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ 4x^2 + 9y^2 = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9x^2 - 9y^2 = 45 \\ 4x^2 + 9y^2 = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow 13x^2 = 117 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\Rightarrow 9 - y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \text{ olur.}$$

Eğriler $A(3, 2)$, $B(-3, 2)$, $C(3, -2)$, $D(-3, -2)$ noktalarında kesişirler.

$A(3, 2)$ noktasında eğrilere çizilen teğetlerin eğimleri :

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

$$8x + 18yy' = 0 \Rightarrow 8 \cdot 3 + 18 \cdot 2 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

olur. $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ olduğundan teğetler, dolayısıyla eğriler dik kesişirler.

B, C, D noktalarındaki durum benzer şekilde gösterilebilir.

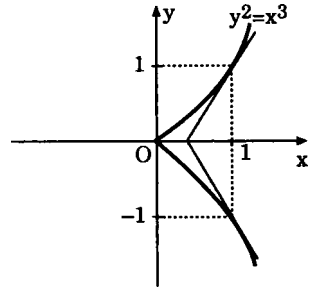
21. $x_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -1, y_3 = 1$$

$$y = \pm x^{3/2} \text{ için } y' = \pm \frac{3}{2} x^{1/2} \text{ olacağından}$$

$$(0, 0) \text{ da } m = y'(0) = 0 \text{ dir.}$$

Teğetin denklemi $y = 0$ dir.



$$2yy' = 3x^2, y' = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y}, y' \Big|_{x=0} = 0, y' \Big|_{(1,1)} = \frac{3}{2}, y' \Big|_{(1,-1)} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 0 = 0(x - 0), \quad y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1), \quad y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \left| \quad y = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad \right| \quad y = -\frac{1}{2}(3x - 1)$$

22. $mx^{m-1}y^n + nx^m y^{n-1} \cdot y' = 0$, $y' = -\frac{mx^{m-1}y^n}{nx^m y^{n-1}} = -\frac{m}{n} \frac{y}{x}$,

$$y' \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{m}{n} \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \text{Teğet denklem}$$

$$y - y_0 = \frac{my_0}{nx_0}(x - x_0), \quad nx_0(y - y_0) + my_0(x - x_0) = 0 \text{ dir.}$$

23. Teğetin değme noktası (a, b) olsun. Eğimini bulalım.

$$4x^2 + y^2 = 72 \Rightarrow 8x + 2yy' = 0 \Rightarrow 4a + bm = 0 \Rightarrow m = -\frac{4a}{b}$$

olur. Teğetin denklemi

$$y - b = -\frac{4a}{b}(x - a) \Rightarrow by - b^2 + 4ax - 4a^2 = 0$$

olur. Bu doğru $(4, 4)$ noktasından geçtiğinden

$$-4a^2 - b^2 + 16a + 4b = 0$$

olur. (a, b) , $4x^2 + y^2 = 72$ eğrisi üzerinde bulunduğundan

$$4a^2 + b^2 = 72 \text{ olur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} -4a^2 - b^2 + 16a + 4b = 0 \\ 4a^2 + b^2 - 72 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 16a + 4b - 72 = 0 \Rightarrow b = 18 - 4a$$

$\Rightarrow 4a^2 + (18 - 4a)^2 = 72 \Rightarrow 5a^2 - 36a + 63 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{21}{5}$ dir.

$$a = 3 \text{ için } 4 \cdot 9 + b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6,$$

$$a = \frac{21}{5} \text{ için } 4 \cdot \frac{441}{25} + b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow b = \pm \frac{6}{5}$$

olur. Yandaki şekilden de görüldüğü gibi değme noktaları $A(3, 6)$ ve $B(\frac{21}{5}, \frac{6}{5})$ dir.

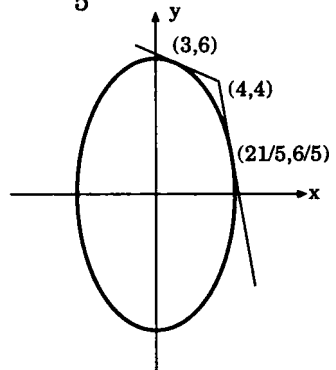
Teğetlerin denklemleri :

$$8x + 2yy' = 0 \Rightarrow 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = -2$$

$$y - 6 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 12 \text{ ve}$$

$$8 \cdot \frac{21}{5} + 2 \cdot \frac{6}{5} m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -14,$$

$$y - \frac{6}{5} = -14 \left(x - \frac{21}{5} \right) \Rightarrow y = -14x + 60 \text{ olur.}$$



24. $f'(x) = 4x^3 + 2cx = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 + c) = 0$, $x = 0$ ve $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{2}}$

$c > 0$ olsun. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+

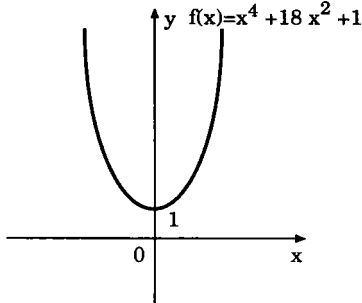
$(-\infty, 0)$ da azalan
 $(0, +\infty)$ da artandır.

$c < 0$ olsun.

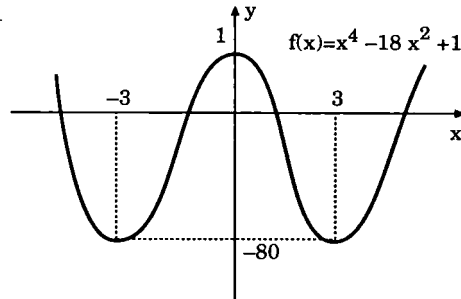
x	$-\sqrt{-c/2}$	0	$\sqrt{-c/2}$
f'	-	0	+

$(-\infty, -\sqrt{\frac{-c}{2}})$ ve $(0, \sqrt{\frac{-c}{2}})$ de azalan, $(-\sqrt{\frac{-c}{2}}, 0)$ ve $(\sqrt{\frac{-c}{2}}, +\infty)$ da artan

$C=18$ ise



$C=-18$ ise



25. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-3, 10]$, $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	-3	3/2	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	20	-1/4	72

$x = \frac{3}{2}$ mutlak minimum nokta, $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ mutlak minimum değer

$x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = 72$ mutlak maksimum değer

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $I = [-2, 10]$

x	-2	3/2	10
f'(x)		-	0
f(x)	12	-1/4	72

$x = \frac{3}{2}$ mutlak minimum nokta, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ mutlak minimum değer

$x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = 72$ mutlak maksimum değer

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$

x	1/10	1	10
f'(x)		-	0
f(x)	$\frac{101}{10}$	2	$\frac{101}{10}$

$x = \frac{1}{10}$ ve $x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = \frac{101}{10}$ mutlak maksimum değer

$x = 1$ mutlak minimum nokta, $f(1) = 2$ mutlak minimum değer

d) $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$

$f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ monoton artan fonksiyon

$x = -1$ mutlak minimum nokta,

$f(-1) = \frac{1}{2}$ mutlak minimum değerdir.

$x = 5$ mutlak maksimum nokta,

$f(5) = 32$ mutlak maksimum değerdir.

e) $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$, $[-1, 3]$

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 25) - 2x(x^2 + 100)}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-250x}{(x^2 - 25)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-1	0	3
f'(x)		-	0
f(x)	$-\frac{101}{24}$	-4	$-\frac{109}{16}$

$x = 0$ mutlak maksimum nokta, $f(0) = -4$ mutlak maksimum değerdir.

$x = 3$ mutlak minimum nokta, $f(3) = -\frac{109}{10}$ mutlak minimum değerdir.

f) $f(x) = e^x \sin x$, $I = [0, 2\pi]$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	0	+	-	+
$f(x)$		$\sqrt{2}/2 e^{3\pi/4}$	$-\sqrt{2}/2 e^{7\pi/4}$	0

Mutlak maksimum değer $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$

Mutlak minimum değer $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{4}}$

g) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $[-1, 1]$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-2x}} < 0 \text{ azalan bir fonksiyon}$$

$x = -1$ mutlak maksimum nokta, $f(-1) = 3$ mutlak maksimum değerdir.

$x = 1$ mutlak minimum nokta, $f(1) = 1$ mutlak minimum değerdir.

h) $f(x) = x^4 + 1$, $[-1, 3]$

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	-1	0	3
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	2	1	82

$x = 0$ mutlak minimum nokta, $f(0) = 1$ mutlak minimum değerdir.

$x = 3$ mutlak maksimum nokta, $f(3) = 82$ mutlak maksimum değerdir.

26. 1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

a) $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$

b)

x	-1	1
f'	-	+
f	-1/2	1/2

$(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ da azalan $(-1, 1)$ de artan

c) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2}$, $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$(-1, -\frac{1}{2})$ yerel minimum, $(1, \frac{1}{2})$ yerel maksimum noktalarıdır.

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$

b)

x	-1	0	1		
f'	+	0	-	0	+
f	-2	2			

$(+\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ da artan, $(-1, 0)$ ve $(0, 1)$ de azalan

c) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$, $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$

$(1, 2)$ yerel minimum, $(-1, -2)$ yerel maximum noktadır.

3) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

a) $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(2(x+2) + x-1) = (x-1)(3x+3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve $x = -1$

b)

x	-1	1
f'	+	-
f	-2	0

$(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ da artan $(-1, 1)$ de azalan

c) $f(-1) = 4, f(1) = 0$

$(-1, 4)$ noktası yerel maksimum, $(1, 0)$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

4) $f(x) = xe^{-x}$

a) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b)

x	1		
f'	+	0	-
f		1/e	

$(-\infty, 1)$ de artan, $(1, \infty)$ da azalan

c) $f(1) = e^{-1}$ olduğundan $(1, e^{-1})$ yerel maksimum noktasıdır.

27. a) $f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} = 0, 2x^3 = k \Rightarrow x = 2$ olduğundan $k = 16$

$f''(x) = 2 + \frac{2k}{x^3} \Rightarrow f''(2) = 2 + \frac{2 \cdot 16}{2^3} = 18 > 0 \Rightarrow x = 2$ yerel minimum noktasıdır.

b) $f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} = 0, f'(-3) = 0 \Rightarrow -6 - \frac{k}{9} = 0 \Rightarrow k = -54$

$f''(-3) = 2 + \frac{2 \cdot (-54)}{(-3)^3} = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow x = -3$ yerel minimum noktasıdır.

c) $f''(x) = 2 + \frac{2k}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = -k, x = 1 \Rightarrow k = -1$

$f''(1) = 2 + \frac{2 \cdot (-1)}{1} = 0, f'''(x) = -\frac{6k}{x^4},$

$f'''(1) = -\frac{6 \cdot (-1)}{1} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ yerel maksimum olmaz.

28. Eğri üzerinde aranan nokta $A(x, \sqrt{x^2 - 1})$,

bu noktanın $(0, 1)$ noktasına uzaklığı

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2}$$

dir. d yi minimum yapan değer $f(x) = x^2 + (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$ fonksiyonunu minimum yapan değerdir. Bu fonksiyon $x \geq 1$ ve $x \leq -1$ için tanımlıdır.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2(\sqrt{x^2 - 1} - 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{4x\sqrt{x^2 - 1} - 2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow 2x(2\sqrt{x^2 - 1} - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

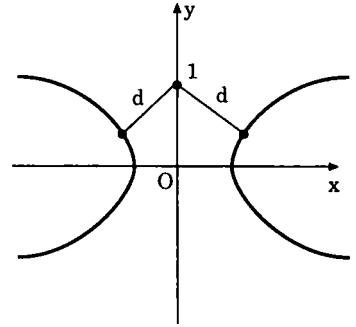
bulunur.

$$f''(x) = 4 - \frac{2}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

$f''\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ olduğundan $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bir yerel minimum noktasıdır.

$f''\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ olduğundan $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bir yerel minimum noktasıdır.

Hiperbolün $(0,1)$ noktasına en yakın noktalar, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır.



29. Parabolün üzerindeki nokta $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$ biçimindedir. Bu noktanın $(0,5)$ noktasına uzaklığı d olsun.

$d = \sqrt{x^2 + \left(5 - \frac{x^2}{4}\right)^2}$ ifadesini, dolayısı ile $f(x) = x^2 + \left(5 - \frac{x^2}{4}\right)^2$ fonksiyonunu minimum yapan x noktasını bulmalıyız.

$$f'(x) = 2x + 2\left(5 - \frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{x}{2}\right) = x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3, \quad f''(0) = -3 < 0, \quad 0'da \text{ yerel maksimum,}$$

$$f''(\pm 2\sqrt{3}) = 6 > 0, \quad \pm 2\sqrt{3} \text{ noktaları yerel minimum noktalarıdır.}$$

$$d(\pm 2\sqrt{3}) = \sqrt{12 + (5 - 3)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4 \text{ olur.}$$

30. Çember üzerindeki nokta $(x, \sqrt{1-x^2})$. Bu noktanın $(3,4)$ noktasına uzaklığı d olsun. $d = \left[(x-3)^2 + (\sqrt{1-x^2}-4)^2 \right]^{1/2}$ olur. Bu ifadeyi minimum yapan, dolayısı ile $f(x) = (x-3)^2 + (\sqrt{1-x^2}-4)^2$ fonksiyonunu minimum yapan x noktasını bulmalıyız.

$$f'(x) = -6 + \frac{8x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}, \quad x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{aranan nokta } \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \text{ noktasıdır.}$$

$$31. f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{4}{16+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} - \frac{4}{16+x^2} = \frac{-3x^2+2}{(1+x^2)(16+x^2)} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2-12=0 \\ \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$x=-2$ yerel minimum, $x=2$ yerel maksimum noktasıdır.

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x}{4} = -\arctan \frac{x - \frac{x}{4}}{1 + \frac{x^2}{4}} = -\arctan \frac{3x}{4+x^2}$$

Yerel maksimum değer

$$f(2) = -\arctan \frac{3}{4},$$

Yerel minimum değer

$$f(-2) = \arctan \frac{3}{4}$$

olur.

x		-2	2	
f'	-	+	0	-
f				

32. $x^2 + y^2 = a^2$, $A = x \cdot y = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

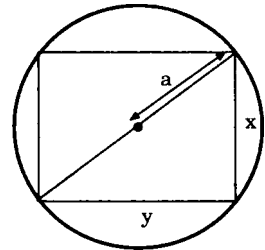
$$A'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a^2, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Dikdörtgenin alanı en fazla

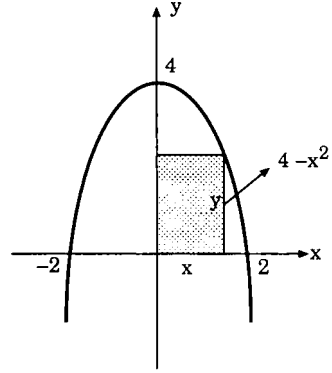
$$A(2) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2} \text{ olur.}$$



33. $A = x \cdot y = x(4 - x^2)$

$$A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$



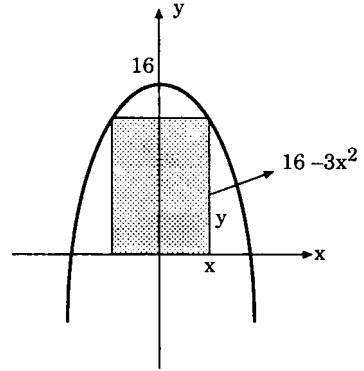
34. $\frac{A}{2} = x(16 - 3x^2)$

$$A = 2x(16 - 3x^2)$$

$$A'(x) = 32 - 18x^2$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$A_{\max} = 2 \cdot \frac{4}{3} \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{32}{3} = \frac{256}{9}$$



35. $x + y = 1000$, $x^2 + y^2 = f(x, y)$ ifadesini minimum yapan x ve y bulunacaktır. $y = 1000 - x$ olduğundan

$F(x) = x^2 + (1000 - x)^2$ fonksiyonunu minimum yapan noktayı bulalım.

$F'(x) = 4x - 2000 = 0 \Leftrightarrow x = 500 \Rightarrow y = 500$. O halde bu iki sayı 500 ve 500 dür.

36. $V = \pi r^2 \cdot h$

$$(2r)^2 + h^2 = (2a)^2$$

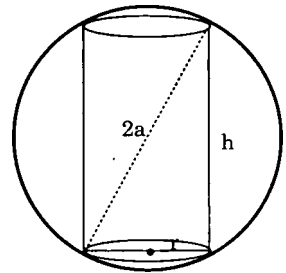
$$h^2 = 4(a^2 - r^2)$$

$$h = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V'(r) = 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 0$$



$$\Leftrightarrow 4 \pi r (a^2 - r^2) = 2 \pi r^3 \Leftrightarrow a^2 - r = \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a \right)^2 \cdot 2 \sqrt{a^2 - \frac{2}{3} a^2} = \frac{4}{3} a^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi a^3$$

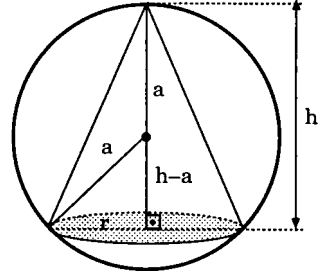
37. $r^2 = a^2 - (h - a)^2 = 2ah - h^2$ olduğundan

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} (2ah - h^2) h = \frac{\pi}{3} (2ah^2 - h^3)$$

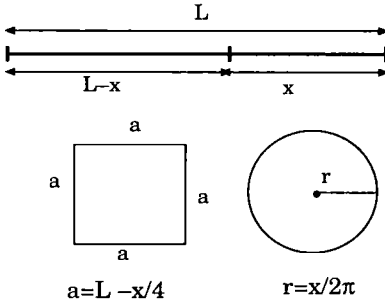
$$V'(h) = \frac{\pi}{3} (4ah - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4a}{3}$$

Maksimum hacim

$$V\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(2a \cdot \frac{16a^2}{9} - \frac{64}{27} a^3 \right) = \frac{32}{81} \pi a^3$$



38.



$P(x)$ ile karenin ve çemberin alanları toplamını gösterelim.

$$P(x) = \left(\frac{L-x}{4} \right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2$$

$$P'(x) = -\frac{(L-x)}{8} + \frac{x}{2\pi} = \frac{\pi x - L\pi + 4x}{8\pi}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x(\pi + 4) - L\pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{L\pi}{\pi + 4}$$

$$r = \frac{x}{2\pi} = \frac{L}{2(\pi + 4)}$$

$$P\left(\frac{L\pi}{\pi + 4}\right) = \left(\frac{L}{4} - \frac{L\pi}{4(\pi + 4)} \right)^2 + \pi \left(\frac{L}{2(\pi + 4)} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi + 16}$$

39. $V' = t - 2 + t = 2t - 2$

$$V' = 0 \Leftrightarrow t = 1, \quad V(1) = (1)(-1) + 2 = 1$$

40. $a'(t) = 2t \cos(t^2)$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ veya } \cos(t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ veya}$$

$$t^2 = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = \mp 1, \mp 2, \dots) \Leftrightarrow t = \sqrt{(2k - 1) \frac{\pi}{2}}$$

41. a) $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$$

x	0	1
f'(x)	-	0
f(x)		

$f(x)$ fonksiyonu minimum değerini 1 de alır.

$$f(1) \leq f(x) \Rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{x} \text{ gerçekleşir.}$$

b) $\tan x > x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$[0, x]$ aralığında $\tan x$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = 1 + \tan^2 c, \quad 0 < c < x \Rightarrow \frac{\tan x}{x} = 1 + \tan^2 c > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{x} > 1 \Rightarrow \tan x > x$$

c) $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (x > 0)$

$\arctan x$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2}, \quad 0 < c < x \Rightarrow \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$0 < c < x \text{ için } \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \text{ olduğundan } \frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1$$

bulunur. $x > 0$ olduğundan $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ elde edilir.

d) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad (x > -1 \text{ ve } 0 < \alpha < 1),$

$f(x) = (1+x)^\alpha$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x - 0} = \alpha (1+c)^{\alpha-1}$$

bulunur. Buradan $0 < c < x$ ve $x > -1$ olduğundan

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} < \alpha (1+0)^{\alpha-1} = \alpha \Rightarrow (1+x)^\alpha < \alpha x + 1$$

bulunur. $x = 0$ için eşitlik durumu elde edilir.

e) $|\sin x - \sin t| < |x - t|$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonuna $[t, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{\sin x - \sin t}{x - t} = \cos(c) \quad t < c < x$$

$$\left| \frac{\sin x - \sin t}{x - t} \right| = |\cos(c)| \leq 1 \Rightarrow |\sin x - \sin t| \leq |x - t| \text{ bulunur.}$$

f) e) şıkkındaki yolla yapılır.

g) $\frac{x-a}{x} < \ln \frac{x}{a} < \frac{x-a}{a}, \quad 0 < a < x$

$[a, x]$ aralığında $f(x) = \ln x$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < x \text{ yazılabilir.}$$

$$\begin{aligned} a < c &\Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a}, \quad c < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln x - \ln a}{x - a} < \frac{1}{a} \\ &\Rightarrow \frac{x-a}{x} < \ln x - \ln a < \frac{x-a}{a} \Rightarrow \frac{x-a}{x} < \ln \frac{x}{a} < \frac{x-a}{a} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

h) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad (x > 0)$

$f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında, ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{1}{1+c} \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}, \quad 0 < c < x$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

42. $f(x) = x - x^3$ fonksiyonu $[0, 1]$ de sürekli $\forall x \in (0, 1)$ için türevlenebilir ve $f(1) = f(0) = 0$ şartları sağlandığından Rolle teoremi uygulanabilir.

$\Rightarrow f'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (0, 1)$ vardır.

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0, 1) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

43. $x = 0 \Rightarrow e^0 = 1 + 0 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ bir köktür. Kabul edelim ki verilen denklemin $x = 0$ dan başka x_0 gibi bir kökü daha vardır. Bu durumda $e^x - x - 1 = 0$ ve $f(x) = e^x - x - 1$ denilirse $f(0) = f(x_0) = 0$ dır. f fonksiyonu Rolle Teoreminin hipotezlerini sağladığından

$\exists c \in (0, x_0)$ vardır $\Rightarrow f'(c) = 0$ dır $\Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(c) = e^c - 1 = 0 \Rightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0$. Bu ise bir çelişkidir. Yani $c \in (0, x_0)$ olmalıdır. O halde verilen denklemin $x_0 = 0$ dan başka kökü yoktur.

44. $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$ denirse $f(0) = f(1) = 0$ dır. Rolle teoreminden, $(0, 1)$ aralığındaki en az bir c için $f'(c) = 0$ dır.

$f'(x) = 5x^4 - 4x + 1$ olduğundan $(0, 1)$ aralığında $5c^4 - 4c + 1 = 0$ olacak şekilde en az bir c vardır.

45. $f(x) = x - x^3$ fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında sürekli ve $(-2, 1)$ aralığında da türevlenebilir olduğundan ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar.

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{0 - 6}{3} = 1 - 3x_0^2, \quad -2 < x_0 < 1$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \mp 1$$

$x_0 \in (-2, 1)$ olduğundan $x_0 = -1$ olmalıdır.

46. a) $y = 2x^2 + 1$

$y' = 4x$, $y'' = 4 > 0 \Rightarrow y$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ da konvektir.

b) $y = -2x^3 + 3x^2 - 12x$

$$y' = -6x^2 + 6x - 12$$

$$y'' = -12x + 6$$

x	1/2		
y''	+	0	-
y	Konveks		Konkav

fonksiyon $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ aralığında konveks, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ aralığında konkavdır.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 12 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$$

Konvekslikten konkavlığa geçtiği nokta olan $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ noktası büküm noktasıdır.

c) $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$

x	0
y''	- +

$(-\infty, 0)$ aralığında konkav, $(0, +\infty)$ da konvektir. Büküm noktası yoktur. Zira fonksiyon $x = 0$ da tanımsızdır.

d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2}, \quad y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

	-1	0
x^3	-	- +
$2x^3+2$	-	0 +
$\frac{2x^3+2}{x^3}$	+	0 +

$\Rightarrow (-\infty, -1)$ ve $(0, \infty)$ da konveks, $(-1, 0)$ da konkav, $(-1, 0)$ noktası büküm noktası

e) $y = e^{-x^2}$

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

x	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
y''	+ -	- +

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ da konveks, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ de konkavdır.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$ noktaları büküm noktalarıdır.

47. $h > 0$ dır. $[x, x + h]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna O.D.T. uygulanırsa

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{x+h-x} = \cos x_0, \quad x < x_0 < x+h$$

$$\Rightarrow \sin(x+h) - \sin x = h \cos x_0$$

bulunur.

48. f ve g fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında sürekli ve $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında türevlenebilirdir. Ayrıca $g'(x) = -\sin x$ fonksiyonunun $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bir kökü olmadığından genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin şartları sağlanır. Buna göre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0} = \frac{\cos x_0}{-\sin x_0} \Rightarrow x_0 \in (a, b) \Rightarrow \cot x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}$$

49. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısının varlığını göstereceğiz. Bu hipotezler altında ortalama değer teoremi gerçekleşeceğinden $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

$f(b) = f(a)$ olduğundan $f'(c) = 0$ olur.

50. $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Bu eşitlikte iki tarafın türevi alınır

$$(f(-x))' = -f'(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

bulunur. Bu da f' türev fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösterir. Aynı şekilde çift fonksiyonun türevinin tek fonksiyon olduğu gösterilebilir.

51. $[a, b]$ aralığının her noktasında türev 0 ve x_1 ve x_2 , $[a, b]$ aralığında herhangi iki nokta olsun. Ortalama değer teoreminden

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır. $f'(c) = 0$ olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ dir. Bu da f nin sabit fonksiyon olduğunu gösterir.

52. $f'(a) = A$, $f'(b) = B$ ve $A < C < B$ olsun. (a, b) aralığında $f'(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktasının varlığını gösterelim.

$$g(x) = f(x) - C(x - a)$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu için

$$g'(x) = f'(x) - C$$

olacağından, g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında türevli, dolayısıyla sürekli-
lidir. Bu nedenle $[a, b]$ aralığında en küçük değerini alır.

$$g'(a) = f'(a) - C < 0 \text{ ve } g'(b) = f'(b) - C > 0$$

olduğundan g fonksiyonu en küçük değerini $[a, b]$ aralığının bir c iç noktasında alır. Fermat teoreminden $g'(c) = 0$ olur. Bu da

$$f'(c) - C = 0 \Rightarrow f'(c) = C$$

olmasını gerektirir. Yani f' fonksiyonu $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

53. $P(x)$, n - ninci dereceden bir polinom olsun. $P(x) = 0$ denkleminin reel kökleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Rolle teoreminden $P'(x)$ in sıfır yerleri $t_1 \in]x_1, x_2[$, $t_2 \in]x_2, x_3[$, $\dots$, $t_{n-1} \in]x_{n-1}, x_n[$ olur. $P'(x)$, $n-1$ inci dereceden olduğundan başka kökü yoktur.

BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir f fonksiyonunun bir noktadaki limiti hesaplanırken, belirsiz ifadeler denilen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0$$

ifadeleriyle karşılaşıldığında aşağıdaki teorem yardımıyla bu limitler kolayca hesaplanabilir.

TEOREM (L'Hospital kuralı) :

f ve g , $A \subset \mathbb{R}$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar; a , A nın bir yığılma noktası ve D de a 'nın, bir delinmiş komşuluğu olsun. f ve g fonksiyonları A ile D nin her ortak x noktasında türevli,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow a} g'(x) \neq 0$$

ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

SONUÇ

f ve g fonksiyonları sabit bir M reel sayısından büyük ve her x noktasında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

ve her $x > M$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x}$

ç) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$

ı) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\arctan \frac{1}{x}}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$

ö) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)}$

s) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2}$

ş) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$

u) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

ü) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$

v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}$

y) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x}$

z) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - x^{-2} \right)$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right)$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \left(a \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{x}}{a} - b \cdot \text{Arctan} \frac{\sqrt{x}}{b} \right)$$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

$$ı) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1+x)]^x$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/\ln x}$$

5. $a_i > 0$ olmak üzere

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $a, b > 0$ için $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x + b^x - 1)^{\frac{1}{x}} = ab$ olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerini bulunuz.

a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{26}$

c) $\sqrt[4]{82}$

d) $\sqrt[7]{130}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ m, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması için m ne olmalıdır?

9. Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L'Hospital kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$ limitini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{2 \tan x}{\sin x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^3 x} = -2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\text{ç) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2+x} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{2x \sin x^2 + 2x^3 \cos x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2 \cos x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2}{2x \cos x^2 + 2x \cos x^2 - 2x^3 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{2 \cos x^2 - x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x} = -1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-1) + 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-1) + e^x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-1) + e^x + e^x}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{b^x \ln b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\sin x) \cdot \cos x + \sin x}{4x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(\sin x) \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \sin(\sin x) + \cos x}{12x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos^3 x + 2 \cos x \sin x \cos(\sin x) + \cos x \sin(\sin x) + \cos(\sin x) \cos x \sin x - \sin x}{24x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)(\cos^3 x + \cos x) + 3 \cos x \sin x \cos(\sin x) - \sin x}{24x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x)(\cos^4 x + \cos^2 x) + (-3 \cos^2 x \sin x - \sin x) \cdot \sin(\sin x)}{24} \\ &+ \frac{\cos x(3 \cos x \cos(\sin x) - 1) + (-3 \sin x \cos(\sin x) + \sin(\sin x) \cos^2 x) \cdot \sin x}{24} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 + \tan^2 4x)4 - 12(1 + \tan^2 x)}{3.4 \cos 4x - 12 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 4x - \tan^2 x}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan 4x - \tan x)(\tan 4x + \tan x)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x)(\sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x)}{\cos 4x \cdot \cos x (\cos 4x - \cos x) \cos 4x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 4x \cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{-2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}}$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{\frac{3}{2}} = -2.$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin(ax) \cdot a}{\cos(ax)}}{-\frac{\sin(bx) \cdot b}{\cos(bx)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\sin x} \ln a \cos x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\sin x} \ln a \cos^2 x + \sin x \cdot a^{\sin x}}{6x}$$

$$= (\ln a)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x} \cos^2 x}{6x} + \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} \sin x}{6x}$$

$$= (\ln a)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - a^{\sin x} \ln a \cos^3 x + a^{\sin x} 2 \sin x \cos x}{6} + \frac{\ln a}{6}$$

$$= 0 + \frac{\ln a}{6} = \frac{1}{6} \ln a$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\arctan \frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\arctan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{3x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x} = \infty$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{m \cos mx}{\sin mx}}{\frac{n \cos nx}{\sin nx}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin x}{\sin mx} \cdot \frac{\cos mx}{\cos nx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin nx}{nx} \cdot \frac{mx}{\sin mx} \cdot \frac{\cos mx}{\cos nx} = 1. \end{aligned}$$

$$ö) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x) + \sin x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + 1}{\cos x} + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2} \right)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \end{aligned}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{cx^{c-1} - c}{2(x-1)} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{c(c-1)x^{c-2}}{2} = \frac{c(c-1)}{2} \end{aligned}$$

$$ş) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - e^x - 1}{2x} = \infty$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x + 1} = 0$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$$

$$ü) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x} = 1$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$y) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \frac{1}{x}}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x + 1}{xe^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + xe^x}{e^x + xe^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^x + x \cdot e^x}{e^x + e^x + xe^x} = 1 \end{aligned}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}) \quad (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - x}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{\frac{3}{2}x^{1/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sqrt{x}}{3x} = \infty \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) \quad (\infty - \infty) \text{ belirsizliği}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{2 \sin x \cos x (1 - \cos x) + \sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2}{2 \cos x (1 - \cos x) + \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{-2 \sin x (1 - \cos x) + 2 \cos x \sin x + 2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{-2(1 - \cos x) + 2 \cos x + 2 \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (\infty - \infty) \text{ belirsizliği}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x + 2x \sin x \cos x} \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x + x \sin 2x} \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x + \sin 2x + 2x \cos 2x} \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x + \frac{\sin 2x}{\sin x} + 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos 2x} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2 + 2 + 2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{\ln x (x-1)} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\frac{1}{x} (x-1) + \ln x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \left(\frac{0}{0} \text{ hali} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x + \sin x)(x \cos x - \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin^2 x + 2x \sin x \cos x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x (\sin x + 2x \cos x)}
\end{aligned}$$

olur. Pay ve payda $\sin x$ ile sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + 2x \cos x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} \\
&= -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right) & (\infty - \infty) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x \sin x} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\sin x + x \cos x} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x + \cos x) \quad (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x + \cos x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \sin x \cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = 1
 \end{aligned}$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (0 \cdot \infty)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x - \tan x = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x} \quad (0 \cdot \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{a}{x}} \cdot a = a$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln (x - 1) \quad (0 \cdot \infty)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln (x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2 \cdot x}{x-1} = -\lim_{x \rightarrow 1} 2 \ln x + (\ln x)^2 = 0\end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) (\infty \cdot 0)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x^{1/4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2}}{-\frac{1}{4} x^{-5/4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^{1/4}} = 0\end{aligned}$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b} \right) (\infty \cdot 0)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b} \right)}{x^{3/2}} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{a^2}} \left(\frac{1}{2a\sqrt{x}} \right) - b \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{b^2}} \left(\frac{1}{2b\sqrt{x}} \right)}{\frac{3}{2} x^{1/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2}{a^2+x} - \frac{b^2}{b^2+x}}{3x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a^2}{(a^2+x)^2} + \frac{b^2}{(b^2+x)^2}}{3} = -\frac{1}{3} \frac{a^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{3a^2b^2}\end{aligned}$$

4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} \quad (1^\infty)$

$$y = (1 + ax)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(1 + ax)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1+ax} = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x} \quad (0^0)$

$$y = (1 - 2^x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln(1 - 2^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \ln(1 - 2^x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - 2^x)}{\frac{1}{\sin x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2^x \ln 2}{1 - 2^x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2 \sin^2 x}{(1 - 2^x) \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1 - 2^x} = \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-2^x \ln 2} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$, $y = (\tan x)^{\tan 2x}$, $\ln y = \tan 2x \cdot \ln(\tan x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\tan 2x}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{1}{(\tan 2x)^2} \cdot 2 \cdot (1 + \tan^2 2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\tan x} + \tan x}{\frac{1}{(\tan 2x)^2} + 1} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} \quad (1^\infty)$

$$y = (\sin x)^{\tan x}, \quad \ln y = \tan x \ln \sin x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\tan^2 x} \cdot (1 + \tan^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x (1 + \tan^2 x)} \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x \quad (1^\infty)$$

$$y = \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x} - \frac{1}{x^2}}{e^{1/x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} + \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} \right] \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2 + 2x} = e \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{(x+1)(6x+2)} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}, \quad y = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1-x^2)^{-5/2} - (1-x^2)^{-3/2}}{12} = \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} = e^{1/6} \end{aligned}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} \quad (1^\infty)$$

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{1-\cos x}$$

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{1-\cos x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} = e^{-1/3} \end{aligned}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1+x)]^x \quad (0^0)$$

$$y = [\ln(1+x)]^x \Rightarrow \ln y = x \ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{1+x} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1+x)]^x = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/\ln x} \quad (0^0)$$

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/\ln x} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/\ln x} = e^{-1} \text{ bulunur.}$$

$$5. y = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln y = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)}{\alpha} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a_1^\alpha \ln a_1 + \dots + a_n^\alpha \ln a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln(a_1 \cdot a_2 \dots a_n)}{n} \\
 \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} y &= e^{\frac{\ln(a_1 \cdot a_2 \dots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}
 \end{aligned}$$

$$6. \quad y = (a^x + b^x - 1)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(a^x + b^x - 1)}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x + b^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a^x \ln a + b^x \ln b = \ln a + \ln b \\
 &= \ln(a \cdot b) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (a^x + b^x - 1)^{1/x} = e^{\ln(ab)} = a \cdot b
 \end{aligned}$$

$$7. \quad f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$

$$a) \quad \sqrt{6}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad \sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x = 625, \quad \Delta x = -0,25 \quad \text{seçelim.}$$

$$\sqrt{6} \cong \sqrt{6.25} + (-0,25) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6.25}} \cong 25 - \frac{0,25}{2 \cdot 2,5} \cong 2,5 - 0,05 \cong 2,45$$

$$b) \quad \sqrt[3]{26}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x) \cong \sqrt[3]{x} + \Delta x \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$x = 27, \quad \Delta x = -1,$$

$$\sqrt[3]{26} \cong \sqrt[3]{27} - 1 \cdot \frac{1}{3} (27)^{-2/3} = 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = 3 - \frac{1}{27} = \frac{80}{27} \cong 2,962$$

$$c) \quad f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad \Delta x = 1, \quad x = 81$$

$$\sqrt[4]{82} \cong \sqrt[4]{81} + 1 \cdot \frac{1}{4} (81)^{-3/4} = 3 + \frac{1}{4 \cdot 27} = 3 + 0,00925 = 3,00925$$

$$d) \quad \sqrt[7]{130}, \quad f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x) = \sqrt[7]{x} + \Delta x \cdot \frac{x^{-6/7}}{7}$$

$$f(x) = \sqrt[7]{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{7} x^{-6/7} \quad \text{olacağından, } x = 128, \quad \Delta x = 2$$

$$\sqrt[7]{130} \cong 2 + 2 \cdot \frac{1}{7} (128)^{-6/7} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{7 \cdot 64} = 2 + \frac{1}{224} \cong 2,004$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1-x^2} = 2 \Rightarrow f(0) = m = 2 \text{ olmalıdır.}
 \end{aligned}$$

$$9. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x+1}} = \sqrt{4} = 2$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/x+1}) \quad (0 \cdot \infty) \text{ belirsizliği}$$

$f(x) = e^x$ fonksiyonuna $\left[\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$e^{1/x} - e^{1/x+1} = e^c \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{e^c}{x(x+1)}$$

olacak şekilde bir $c \in \left(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right)$ vardır.

$x \rightarrow \infty$ için $c \rightarrow 0$ dır. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf x^2 ile çarpılırsa

$$x^2 (e^{1/x} - e^{1/x+1}) = \frac{x}{x+1} e^c$$

bağıntısı bulunur. Limit alınır

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/x+1}) = 1 \cdot 1 = 1$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

g) $y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

h) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

c) $y^2 = x^2 - 4x + 5$

ı) $y = \ln(2x - x^2)$

ç) $y = \sqrt{6x - x^2}$

i) $y = x + \sin x$

d) $y = \frac{x}{x - 1}$

j) $y = x - \sin x$

e) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$

h) $y = 1 - x^{2/3}$

f) $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x}$

2. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a) $r = 4 \cos 2\varphi$

c) $r^2 = \cos 2\varphi$

b) $r = \sin 3\varphi$

d) $r = 1 - \cos \varphi$

3. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarındaki teğetlerini bulunuz. Bu teğetlerin oluşturdukları açılarının ölçülerini hesaplayınız.

a) $r = 2(1 - \cos \varphi)$

b) $r = \sin \varphi$

$r = -6 \cos \varphi$

$r = \cos 2\varphi$

4. Aşağıda denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

a) $r = \cos 3\varphi$

b) $r = 1 - 2 \cos \varphi$

c) $r^2 = \sin 2\varphi$

5. $r = 2(1 - \cos \varphi)$ kardioidine $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasından çizilen teğetin kutup doğrusu (Ox - eksen) ile yaptığı açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

1. Fonksiyon polinom tipli olduğundan tanım kümesi $T = \mathbb{R}$ dir.

2. Asimtot yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = +\infty$$

3. $x = 0 \Rightarrow y = -2$

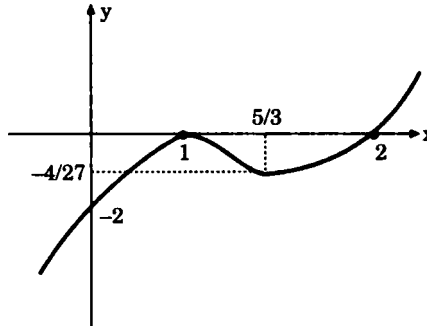
$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1, \quad x_3 = 2$$

4. $y' = 3x^2 - 8x + 5$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = 1$$

5.

x	$-\infty$	0	1	$5/3$	2	$+\infty$
y'	+	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-2	0	-4/27	0	$+\infty$



b) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

1. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ olmalıdır.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = 2$$

$$T.K = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

x		1	2	
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	

2. Eğik asimtot

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x)}{(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 2}{x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2} \\
 &\Rightarrow y = x - \frac{3}{2} \text{ eğik asimptottur.}
 \end{aligned}$$

$x \rightarrow -\infty$ için limit alınırsa diğer asimptotun $y = -x + \frac{3}{2}$ olduğu görülür.

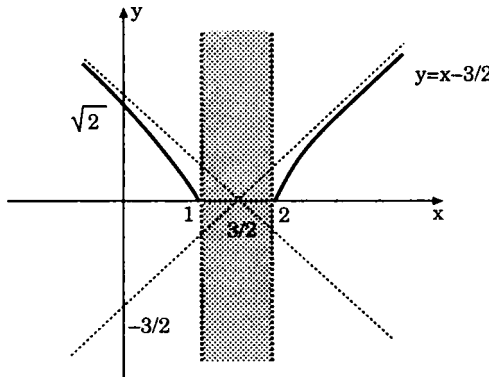
3. $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$

$y = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$

4. $y' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin \text{T.K.}$

5.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		-	-	+	
y	$+\infty$	$\searrow \sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow +\infty$



c) $y^2 = x^2 - 4x + 5$ ($y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ eğrisi çizilip x eksenine göre simetri alınacaktır.)

1. $T = \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = \infty$ olduğundan eğrinin eğik yada eğri asimptotu vardır.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + 1} = |x-2| \sqrt{1 + \frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x-2| \text{ alındığında}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \Rightarrow y = |x-2| \text{ eğri asimtottur.}$$

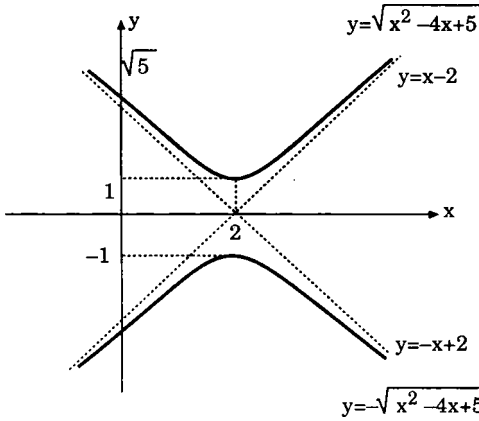
$$3. x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

$$4. y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Buna karşılık } y \text{ değeri } y = 1 \text{ dir.}$$

5.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow \sqrt{5}$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$



$$\text{ç) } y = \sqrt{6x - x^2}$$

$$1. 6x - x^2 \geq 0$$

$$T.A = [0, 6]$$

2. Asimtot yoktur.

$$3. x = 0 \Rightarrow y = 0$$

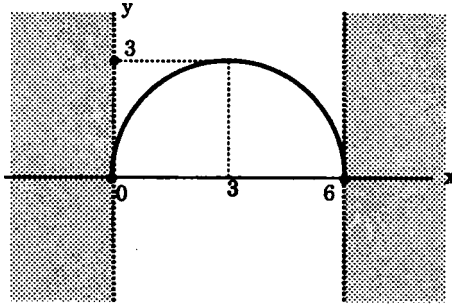
$$y = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

$$4. y' = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0, 6], x = 3 \Rightarrow y = 3$$

x	0		6	
$6x-x^2$	-	+		-

5.

x	0	3	6		
y'		+	0	-	
y	0	↗	3	↘	0



d) $y = \frac{x}{x-1}$

1. $T.A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimtot

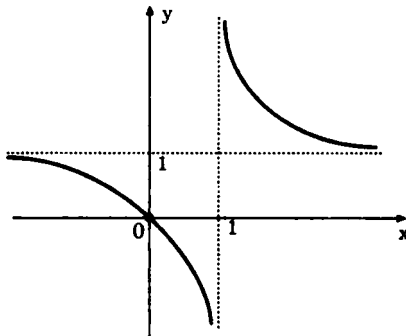
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ düşey asimtot}$$

3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

4. $y' = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$

5.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	-	-	-
y	1 ↘	0 ↘	$-\infty$ ↘ $+\infty$	1 ↘



e) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$

1. $T.A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{x^2 - 4} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8}{x^2 - 4} = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ düşey asimtot}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{8}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{8}{x^2 - 4} = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ düşey asimtot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{8}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ yatay asimtot}$$

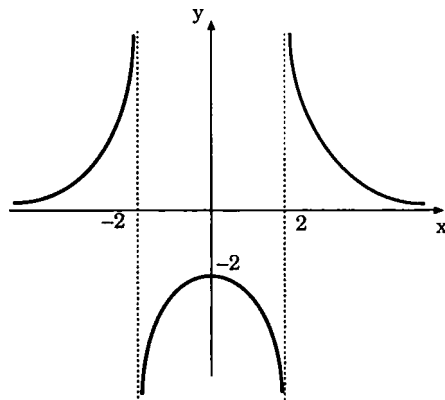
3. $x = 0 \Rightarrow y = -2$

4) $y' = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		+	+	-	-
y	0	$+\infty$	$-\infty$	-2	$+\infty$



$$f) y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x}$$

$$1. T.K = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$$

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } x = -3$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ düşey asimtot}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -3 \text{ düşey asimtot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ yatay asimtot}$$

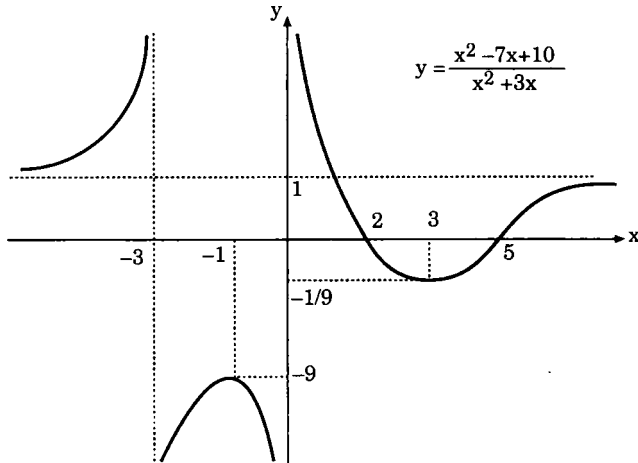
$$3. y = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 2$$

$$4. y' = \frac{10(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 3x)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ve } x = -1$$

5.

x	$-\infty$	-3	-1	0	2	3	5	$+\infty$		
y'	+		+	0	-		-	0	+	+
y	1	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$	-9	$\nearrow -\infty$	$\searrow +\infty$	0	-1/9	$\nearrow 0$	$\searrow 1$



$$g) y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

$$1. T.A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ düşey asimtot}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ eğik asimtot}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3 & 2x - 4 \\ - x^2 - 2x & \frac{1}{2}x + 1 \\ \hline 2x - 3 & \\ - 2x - 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$3. x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

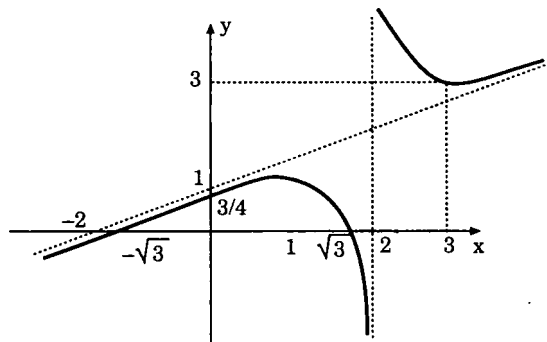
$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$4. y' = \frac{2x(2x - 4) - 2(x^2 - 3)}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(2x - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 3$$

5.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	2	3	$+\infty$
y'	+	+	0	+	-	-	-	+
y	$-\infty$	0	$3/4$	1	0	$-\infty$	$+\infty$	3



h) $y = \frac{x^2+1}{x}$

1. T.A = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ düşey asimtot}$$

$y = x$ eğik asimtot.

$$\frac{x^2+1}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x \\ x \end{array} \right.$$

1

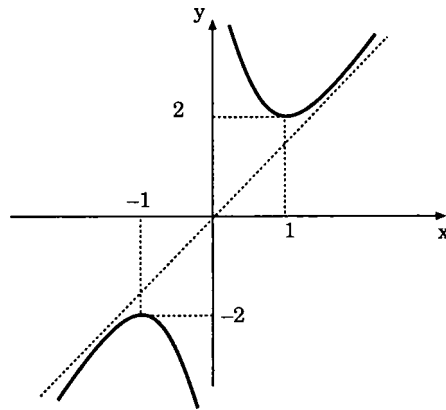
3. Eğri eksenleri kesmez.

4. $y' = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -2, y_2 = 2$

5.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	-	0	+
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	2	$+\infty$



1) $y = \ln(2x - x^2)$

1. $2x - x^2 > 0$

T.A = (0, 2)

x	0	2
$2x - x^2$	-	+

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x - x^2) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2x - x^2) = -\infty$

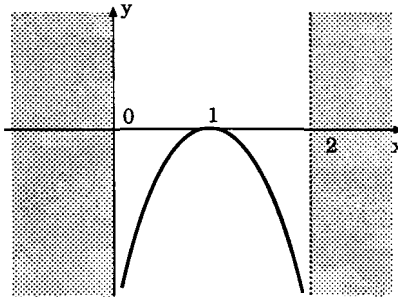
$x = 0$ ve $x = 2$ düşey asimtot

3. $y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

4. $y' = \frac{2-2x}{2x-x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

5.

x	0	1	2
y'		+	-
y	$-\infty$	0	$-\infty$



$y = \ln(2x - x^2)$

i) $y = x + \sin x$

1. T.A = R

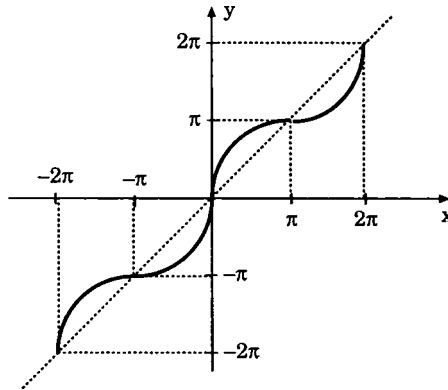
2. Asimtot yok

3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

4. $y' = 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi$

5.

x	$-\pi$	0	π
y'	+	+	+
y	$-\pi$	0	π



j) $y = x - \sin x$

1. T.A = $\mathbb{R}$

2. Asimtot yok

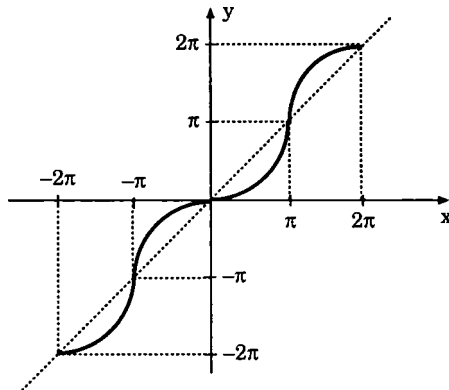
3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

4. $y' = 1 - \cos x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$

5.

x	-2π	$-\pi$	0	$+\pi$	2π
y'	+	+	+	+	+
y	-2π	$-\pi$	0	$+\pi$	2π



h) $y = 1 - x^{2/3}$

1. T.A = $\mathbb{R}$

2. Asimtot yok

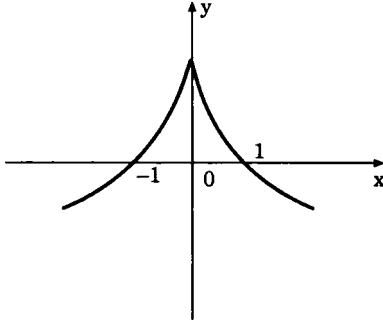
3. $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$y = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

5.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	-	0	-
y	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

$$4. y' = -\frac{2}{3} x^{-1/3}$$



2. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a) $r = 4 \cos 2\varphi$

$$r = 0 \Rightarrow 4 \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ için}$$

$$\tan \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0. \text{ Bu durumda teğetin eğim açısı}$$

$$\theta = \psi + \varphi = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ olacaktır. Teğetin eğimi}$$

$$m = \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} = 1. \text{ Orijindeki teğet istenildiğinden}$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = x \text{ kutupta teğet olan doğrudur.}$$

b) $r = 3 \sin \varphi$

$$r = 0 \Rightarrow 3 \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi$$

$$\varphi = 0 \text{ için } \tan \psi = \frac{r}{r'} \Big|_{\varphi=0} = \frac{3 \sin \varphi}{3 \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow \psi = 0. \text{ Teğetin eğim açısı } \theta = \psi + \varphi = 0 \text{ olur.}$$

$$m = \tan \theta = 0 \text{ olduğundan orijindeki teğet } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 0 \text{ doğrusu olur.}$$

c) $r^2 = \cos 2\varphi$

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi} \text{ için teğeti bulalım.}$$

$$r = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos 2\varphi} = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \psi = \frac{r}{r'} \bigg|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{-2\sin 2\varphi} \bigg|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} \bigg|_{\frac{\pi}{4}} = 0$$

$\Rightarrow \psi = 0$. Bu durumda teğetin eğim açısı $\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{4}$ olacaktır.

Teğetin eğimi $m = \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = mx \Rightarrow y = x$ kutupta teğet olan doğrudur. $r = -\sqrt{\cos 2\varphi}$ için teğet doğru $y = -x$ dir.

d) $r = 1 - \cos \varphi$

$$r = 0 \Rightarrow 1 - \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 2k\pi$$

$$\tan \psi = \frac{r}{r'} \bigg|_{\varphi=0} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \text{ ifadesi } \varphi = 0 \text{ ve } \varphi = 2\pi \text{ için tanımsız}$$

$$\text{ve } \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0 \text{ olduğundan } \theta = 0 \text{ dolayısı ile}$$

$$m = 0 \text{ dir. Teğetin denklemi } y - 0 = m(x - 0) \Rightarrow y = 0 \text{ olur.}$$

3. a) $r = 2(1 - \cos \varphi)$

$$r = -6 \cos \varphi$$

$$2(1 - \cos \varphi) = -6 \cos \varphi \Rightarrow 1 = -2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 3$$

$$\tan \psi = \frac{r}{r'} \bigg|_{\varphi = \frac{2\pi}{3}} = \frac{-6 \cos \varphi}{6 \sin \varphi} \bigg|_{\frac{2\pi}{3}} = -\cot \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{6}$$

Şimdi değme noktasının koordinatlarını bulalım.

$$x_0 = 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2}$$

$$y_0 = 3 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ Bu urumda eğim açısı } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \text{ ve}$$

$$\text{eğim } m = \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olur. Buna göre } (x_0, y_0) \text{ noktasındaki}$$

$$\text{teğet denklem } y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \text{ elde edilir.}$$

b) $r = \sin \varphi$, $r = \cos 2\varphi$

$$\sin \varphi = \cos 2\varphi \Rightarrow \sin \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi \Rightarrow 2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = 1 \text{ veya } \sin \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ veya } \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ olur.}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ise } \tan \psi = \frac{r}{r'} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \varphi + \psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow m = \tan \theta = \tan \pi = 0 \text{ olur.}$$

$$x_0 = r \cos \varphi = r \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ teğet denklemdir.}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ ise } \tan \psi = \frac{r}{r'} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{6}} = \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \alpha + \varphi = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow m = \tan \theta = \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$x_0 = r \cos \varphi = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y_0 = r \sin \varphi \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

olduğundan teğetin denklemi

$$y - \frac{1}{4} = \sqrt{3} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \Rightarrow y = \sqrt{3} x + 1 \text{ olur.}$$

4. a) $r = \cos 3\varphi$

1. $TA = R$

2. Peryot : $\frac{2\pi}{3}$

3. $f(-\varphi) = \cos(-3\varphi) = \cos(3\varphi) = f(\varphi)$

$\Rightarrow$ eğri kutup eksenine göre simetri

$$\begin{aligned} f\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3\varphi \cdot \cos \pi - \sin 3\varphi \cdot \sin \pi \\ &= -\cos 3\varphi = -f(\varphi) \end{aligned}$$

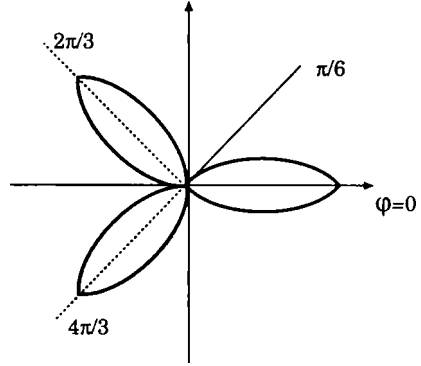
Eğri $\frac{\pi}{3}$ uzunluktaki aralıkta çizim yapılır.

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ kadar saat yönünde çevrilir. Aralık $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ alınabilir. Ku-

tup eksenine göre simetri olduğundan $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında çizim yapılır ve kutup eksenine göre simetri alınır.

4. $r' = -3 \sin 3\varphi$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında $\sin 3\varphi \geq 0 \Rightarrow r' \leq 0$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$
r'		-
r	1	0



b) $r = 1 - 2 \cos \varphi$

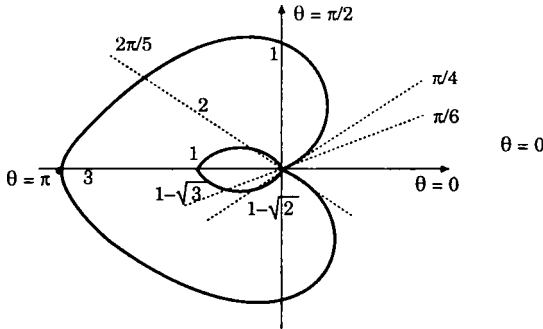
1. T.A = R

2. Peryot : 2π

3. $f(-\varphi) = f(\varphi)$ kutup eksenine göre simetri alınacak, yani $[0, \pi]$ aralığında çizim yapılır.

4. $r' = 2 \sin \theta \geq 0$ ($\theta \in [0, \pi]$)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y'	+	+	0	+	+	0	+
y	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	1	1	3



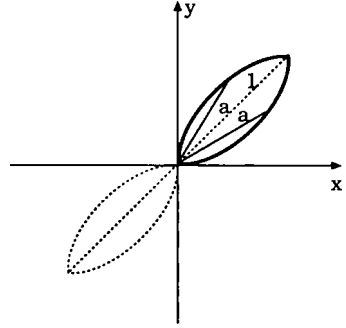
c) $r^2 = \sin 2\theta$, $r = \pm \sqrt{\sin 2\theta}$ eğrisi çizilmeli, sonra da kutba göre simetri alınmalıdır.

$\sin 2\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\theta < \pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tanım aralığıdır.

$r' = \frac{2 \cos 2\theta}{2 \sqrt{\sin 2\theta}}$

ϑ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r'		+	+	0	-
r	0				
		$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
			$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	0
			$\parallel$	$\parallel$	
			a	a	

$$\begin{aligned}
 5. \quad \tan \psi &= \frac{r}{r'} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(1 - \cos \vartheta)}{2 \sin \vartheta} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{4} \\
 \theta &= \psi + \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$



BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıda tanımlanan fonksiyonların $x = 0$ noktasında türevli olup olmadığını araştırınız.

a) $f(x) = x|x|$

c) $f(x) = x^{2/3} \sin x$

b) $f(x) = |x| \sin x$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (1 - \cos x)$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevli midir?

f' türev fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir? $x = 0$ da f'' türevi var mıdır? Bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

3. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$ eğrisi veriliyor. Bu eğriye üzerindeki herhangi bir noktadan çizilen teğetin eksenlerden ayırdığı parçaların uzunlukları u ile v ise

$$u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

dır, gösteriniz. $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = \frac{2}{3}$ özel halleri için bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

b) $f(x) = 1 + xg(x)$,

bağıntılarını sağlayan bir f fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevli olacağını ve $f'(x) = f(x)$ bağıntısının sağlanacağını gösteriniz. (Burada $g, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ özelliğine sahip bir fonksiyondur.)

5. $f', [a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıkta $f(x) = 0$ denkleminin üç kökü olsun. $f'(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığında en az bir köke sahip olacağını gösteriniz.

6. f ve g konveks ve g artan ise $g \circ f$ de konvektir, gösteriniz.

7. $f, [a, b]$ üzerinde türevli ve $f(b) < f(a)$ olsun. f' fonksiyonunun (a, b) aralığındaki en az bir noktada negatif olacağını gösteriniz.

8. f ile $g, [a, b]$ üzerinde türevli iki fonksiyon, $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ olsun. (a, b) aralığının en az bir c noktasında f ve g nin grafiklerinin teğetlerinin paralel olacağını gösteriniz.

9. $f, \mathbb{R}$ üzerinde türevli bir fonksiyon olsun.

$f(1) = 1, x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ ise

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 1$ dir, gösteriniz.

b) $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

10. a ve b iki pozitif sayı ve $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremden sözü edilen c sayısının, a ile b nin geometrik ortalaması olan $\sqrt{ab}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

11. a ile b iki reel sayı ve $f(x) = x^2$ olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremden adı geçen c sayısının, a ile b nin aritmetik ortalaması olan $\frac{a+b}{2}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

12. Kabul edelim ki, $y = f(x)$ in türevi $y' = (x - 1)^2 (x - 2)$ olsun. f nin yerel ekstremum ve dönüm noktalarını bulunuz.

13. a bir reel sayı olsun. $\forall x \in (-\infty, a)$ için $f'(x) > 0$ ve $\forall x \in (a, +\infty)$ için $f'(x) < 0$ ise a noktası bir yerel maksimum noktası mıdır?

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x) = x|x|$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

b) $f(x) = |x| \sin x$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin x}{x} = 0$$

c) $f(x) = x^{2/3} \sin x$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3} \sin x}{x} = 0$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (1 - \cos x)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} (1 - \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^{2/3}} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{-3/2} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{2/3} \frac{\sin x}{x} = 0.1 = 0 \end{aligned}$$

2. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f$ fonksiyonu

$x = 0$ 'da türevlenebilirdir ve değeri 0 dır.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f 0'da türevlenebilir olduğundan 0'da süreklidir.

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \right) \text{ mevcut değil} \Rightarrow x = 0 \text{'da } f'' \text{ mevcut değil.}$$

3. $x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$ eğrisine üzerindeki (x_0, y_0) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım. $\alpha x^{\alpha-1} + \alpha y^{\alpha-1} y' = 0$,

$$y' = - \left(\frac{x}{y} \right)^{\alpha-1}, \quad y'|_{(x_0, y_0)} = - \left(\frac{x_0}{y_0} \right)^{\alpha-1}, \quad y - y_0 = - \left(\frac{x_0}{y_0} \right)^{\alpha-1} (x - x_0) \text{ teğet denklemdir.}$$

$$y_0^{\alpha-1} y - y_0^\alpha - x_0^\alpha + x_0^{\alpha-1} x = 0, \quad y_0^{\alpha-1} y - y_0^{\alpha-1} x = x_0^\alpha + y_0^\alpha$$

$\Rightarrow y_0^{\alpha-1}y + x_0^{\alpha-1}x = a^\alpha$ elde edilir. Bu denklemin eksenleri kestiği noktanın uzunlukları

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a^\alpha}{y_0^{\alpha-1}} \Rightarrow u = \frac{a^\alpha}{y_0^{\alpha-1}}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{a^\alpha}{x_0^{\alpha-1}} \Rightarrow v = \frac{a^\alpha}{x_0^{\alpha-1}}$$

$$u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}{y_0^{-\alpha}} + \frac{a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}{x_0^{-\alpha}} = a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} (x_0^\alpha + y_0^\alpha) = a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \cdot a^\alpha = a^{\frac{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2}{1-\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ise $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ eğrisinin eksenleri ayırdığı parçaların uzunlukları toplamı $u + v = a$ dır.

$\alpha = \frac{2}{3}$ ise $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisi üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eksenleri ayırdığı parçaların uzunlukları toplamı $u^2 + v^2 = a^2$ dir.

$$\begin{aligned} 4. \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{(f(h) - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{h \cdot g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot g(h) = f(x) \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 1 \right) \end{aligned}$$

5. $f(x) = 0$ denkleminin üç kökü $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ olsun.

Yani $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ dir.

$f(x_0) = f(x_1)$ ve f türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince

$f'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (x_0, x_1)$ vardır.

$f(x_1) = f(x_2)$ ve f türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince

$\alpha \in (x_1, x_2)$ vardır ki $f'(\alpha) = 0$ dır.

Buna göre $f'(c) = f'(\alpha) = 0$ ve f'' mevcut olduğundan Rolle teoremi gereğince $f''(e) = 0$ olacak şekilde $e \in (c, \alpha)$ vardır. Dolayısı ile $f''(x) = 0$ denkleminin (a, b) aralığında en az bir kökü vardır.

6. f konveks ise $0 < t < 1$ için $f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$ sağlanır.

$$0 < t < 1 \text{ için } (g \circ f)(tx + (1-t)y) = g(f(tx + (1-t)y))$$

$$< g(tf(x) + (1-t)f(y)) \quad (g \text{ artan olduğundan})$$

$$< t g(f(x)) + (1-t) g(f(y)) \quad (g \text{ konveks olduğundan})$$

$$= t (g \circ f)(x) + (1-t) (g \circ f)(y)$$

7. f , $[a, b]$ üzerinde türevli ise aynı zamanda sürekli olacağından ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar. Bu durumda $\exists c \in (a, b)$ vardır. Öyle ki,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = - \left(\frac{f(a) - f(b)}{b - a} \right) < 0 \quad (f(b) < f(a))$$

8. f ve g , $[a, b]$ üzerinde türevli ise aynı zamanda bu aralıkta sürekli. Dolayısı ile genelleştirilmiş ortalama değer teoremine göre $\exists c \in (a, b)$ vardır ki $g'(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{g(b) - g(a)}{g(b) - g(a)} = 1 \Rightarrow f'(c) = g'(c)$$

Yani f ve g eğrilerinin c noktasındaki teğetlerinin eğimleri eşittir. Yani bu teğetler birbirine paraleldir.

9. a) f fonksiyonu 1 noktasında tanımlı ($f(1) = 1$) $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ noktasında minumuma sahiptir. Yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(1) \leq f(x) \Rightarrow 1 \leq f(x)$ dir.
- b) Fermat teoreminden $f'(1) = 0$ dır.

10. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ sürekli ve $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (a, b) ($a > 0$) de mevcuttur.

Bu durumda ortalama değer teoreminden

$$\exists c \in (a, b) \ni f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2 = ab$$

$$c = \sqrt{a \cdot b} \quad (a > 0 \text{ ve } b > 0)$$

11. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $f'(x) = 2x$ türevi (a, b) de mevcuttur. Dolayısı ile ortalama değer teoreminden $\exists c \in (a, b)$ vardır ki

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{b^2 - a^2}{b - a} \Rightarrow 2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

12. $y' = (x - 1)^2 (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve $x = 2$

$$y''(x) = 2(x - 1)(x - 2) + (x - 1)^2 = (x - 1)(3x - 5)$$

$$y'''(x) = 6x - 8 \Rightarrow y'''(1) = 0$$

$$y^{(4)}(x) = 6 > 0$$

$n = 4$ (çift) ve $y^{(4)}(1) > 0$ olduğundan 1 noktası f nin yerel minimum noktasıdır.

$y''(2) = 1 > 0 \Rightarrow 2$ noktası f fonksiyonunun bir yerel minimum noktasıdır.

$$y''(x) = (x - 1)(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ve } x = \frac{5}{3}$$

y'' türevi 1 ve $\frac{5}{3}$ noktalarında işaret değiştirir. Dolayısı ile bu noktalar dönüm noktalarıdır.

13. a noktasının yerel maksimum noktası olması için yukardaki şartlar yetmez. Ayrıca fonksiyon a noktasında tanımlı olduğunun bilinmesi gerekir.

PROBLEMLER

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int (\sqrt[5]{x} + x^2) dx$
2. $\int (2x^2 - 5x + 3) dx$
3. $\int (1-x)^3 \sqrt{x} dx$
4. $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} dx$
5. $\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx$
6. $\int (a+x)^3 dx$
7. $\int \left(\sin x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$
8. $\int (2^x + x^2) dx$
9. $\int (1+x)^4 dx$
10. $\int (x^3 + 1)^2 x^2 dx$

ÇÖZÜMLER

1. $\int (\sqrt[5]{x} + x^2) dx = \frac{5}{6} x^{6/5} + \frac{x^3}{3} + C$
2. $\int (2x^2 - 5x + 3) dx = 2 \int x^2 dx - 5 \int x dx + 3 \int dx$
 $= 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C$
3. $\int (1-x)^3 \sqrt{x} dx = \int (1 - 3x + 3x^2 - x^3) x^{1/2} dx$
 $= \int (x^{1/2} - 3x^{3/2} + 3x^{5/2} - x^{7/2}) dx$
 $= \int x^{1/2} dx - 3 \int x^{3/2} dx + 3 \int x^{5/2} dx - \int x^{7/2} dx$
 $= -\frac{2}{9} x^{9/2} + \frac{6}{7} x^{7/2} - \frac{6}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C$
4. $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} dx = \int \left(x^2 + 3 + \frac{5}{x^2} \right) dx$
 $= \int x^2 dx + \int 3 dx + \int \frac{5}{x^2} dx = x^3 + 3x - \frac{5}{x} + C$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx &= \int 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{3}{2} x^2 - 4x + 4 \arctan x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 4x^2 + 3x & x^2 + 1 \\
 \hline
 3x^3 + 3x & 3x - 4 \\
 \hline
 & -4x^2 \\
 & -4x^2 - 4 \\
 \hline
 & 4
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \int (a+x)^3 dx &= \int (a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3) dx \\
 &= a^3 x + \frac{3}{2} a^2 x^2 + ax^3 + \frac{x^4}{4} + C
 \end{aligned}$$

$$7. \quad \int \left(\sin x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -\cos x + 4 \arcsin x + C$$

$$8. \quad \int (2^x + x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$9. \quad \int (1+x)^4 dx = \int (1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4) dx = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + \frac{x^5}{5} + C$$

$$10. \quad \int (x^3 + 1)^2 x^2 dx = \int (x^8 + 4x^5 + 4x^2) dx = \frac{x^9}{9} + \frac{4}{6} x^6 + \frac{4}{3} x^3 + C$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int x e^{x^2} dx$

i) $\int (e^{x^2} + e^{-x^2}) dx$

s) $\int x e^{-x^2} dx$

b) $\int x^2 (1 + x^3)^4 dx$

j) $\int (3 - 2x)^4 dx$

ş) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

k) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

t) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} dx$

ç) $\int \frac{x^7}{1 - x^4} dx$

l) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$

u) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx$

d) $\int \sin^2 x \cos x dx$

m) $\int \tan x dx$

ü) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + 3}{\sqrt[4]{x-1}} dx$

e) $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$

n) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

v) $\int \frac{dx}{\sin x}$

f) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

o) $\int e^{\cos x} \sin x dx$

y) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

g) $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$

ö) $\int e^{x^3} x^2 dx$

z) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

h) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

p) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

ı) $\int e^{-3x} dx$

r) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

ÇÖZÜMLER

1. a) $x^2 = t$ denirse $2x dx = dt$ olur.

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

b) $1 + x^3 = t$ denirse $3x^2 dx = dt$ olur. Bu durumda

$$\int x^2 (1 + x^3)^4 dx = \int \frac{t^4}{3} dt = \frac{t^5}{15} + C = \frac{(1 + x^3)^5}{15} + C$$

c) $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\ln x) + C$$

$$\text{ç)} \quad 1 - x^4 = t \Rightarrow -4x^3 dx = dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{1-x^4} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{x^4(-4x^3)}{1-x^4} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{(1-t)}{t} \cdot dt \\ &= -\frac{1}{4} (\ln t - t) + C = -\frac{1}{4} (\ln(1-x^4) - 1+x^4) + C \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sin x)^3}{3} + C$$

$$\text{e)} \quad \arctan x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$$

$$\text{f)} \quad \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int -\frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t + C = -\arctan(\cos x) + C$$

$$\text{g)} \quad 1 - x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx &= \int (1-t)t^{1/2} \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int t^{1/2} - t^{3/2} dt \\ &= \frac{1}{5} t^{5/2} - \frac{1}{3} t^{3/2} + C = \frac{1}{5} (1-x^2)^{5/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x+1) dx = dt$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+x+1) + C$$

$$\text{i)} \quad -3x = t \Rightarrow -3 dx = dt$$

$$\int e^{-3x} dx = \int e^t \left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$\text{j)} \quad \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2 dt$$

$$\int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx = \int (e^t + e^{-t}) 2 dt = 2e^t - 2e^{-t} + C = 2e^{x/2} - 2e^{-x/2} + C$$

j) $3 - 2x = t \Rightarrow -2 dx = dt$

$$\int (3 - 2x)^4 dx = \int t^4 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{10} t^5 + C = -\frac{1}{10} (3 - 2x)^5 + C$$

k) $\tan 5x = 5t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 5x} = dt$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \int dt = t + C = \frac{1}{5} \tan 5x + C$$

l) $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

m) $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C$$

n) $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{t^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3(\sin x)^3} + C$$

o) $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = \int e^t (-dt) = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

ö) $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot e^t + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

p) $1 + \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1 + \ln x) + C$$

$$r) \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$s) x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$$

$$\int x e^{-x^2} dx = \int e^{-t} \frac{dt}{2} = -\frac{1}{2} e^{-t} + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$ş) \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

$$x - 2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{t}{2} + C \\ &= \arcsin \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

$$t) [\sin^2 x = u \Rightarrow du = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} dx &= \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - (\sin^2 x)^2}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C \\ &= \arcsin (\sin^2 x) + C \end{aligned}$$

$$u) 2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2}{\sqrt{1 - (2^x)^2}} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \arcsin t + C = \frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + C \end{aligned}$$

$$ü) \text{ ebob } \{3, 4\} = 12, \quad x - 1 = t^{12}, \quad dx = 12 t^{11} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + 3}{\sqrt[4]{x-1}} dx &= \int \frac{t^{12} + 3}{t^3} \cdot 12 t^{11} dt = 12 \int t^{12} + 3t^8 dt \\ &= 12 \left(\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^9}{9} \right) + C = 12 \left(\frac{(x-1)^{13/12}}{13} + \frac{(x-1)^{9/12}}{3} \right) + C \end{aligned}$$

$$v) \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dt = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$y) \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int dt = t + C = \tan \frac{x}{2} + C$$

$$z) \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{t^2+2t+1} dt = \int \frac{2}{(t+1)^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{u^2} du = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C \quad [t+1=u, \quad dt=du]$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

b) $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$

c) $\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

d) $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

e) $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

f) $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\int \arctan x dx$ | g) $\int x^2 e^{-x} dx$ | m) $\int (ax^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$ |
| b) $\int e^{2x} \sin 3x dx$ | h) $\int x(x-1)^8 dx$ | n) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ |
| c) $\int x^3 \ln x dx$ | i) $\int x^3 e^{2x} dx$ | o) $\int \arctan x dx$ |
| d) $\int e^x \sin x dx$ | j) $\int x^2 e^{-3x} dx$ | ö) $\int x \ln(x^2) dx$ |
| e) $\int e^{ax} \sin bx dx$ | k) $\int \cos(\ln x) dx$ | p) $\int x \sec^2 x dx$ |
| f) $\int (\ln x)^2 dx$ | l) $\int (x^2 - 2x + 5) e^x dx$ | r) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$ |

ÇÖZÜMLER

1. a) $u = \arcsin x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad [1-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt] \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + t^{1/2} + C \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

b) $x^2 = u$, $e^x dx = dv \Rightarrow du = 2x dx$, $v = e^x$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x) + C \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

c) $\sin(\ln x) = u$, $dx = dv \Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = x$

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\ [\cos(\ln x) = u, dx = dv \Rightarrow du &= -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx, v = x] \\ \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - (x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx) \\ \Rightarrow 2 \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) + 2C \\ \Rightarrow \int \sin(\ln x) dx &= \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C \end{aligned}$$

$$d) \quad x^2 = u, \quad x e^{x^2} dx = dv \Rightarrow du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$e) \quad u = \ln x, \quad dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$f) \quad u = x^2, \quad \sin x dx = dv \Rightarrow du = 2x dx, \quad -\cos x = v$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

$$u = x, \quad dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx, \quad v = \sin x$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$2. \quad a) \quad u = \arctan x, \quad dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad v = x$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |t| + C$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C$$

$$[1+x^2 = t, \quad dt = 2x dx]$$

$$b) \quad e^{2x} = u, \quad \sin 3x dx = dv \Rightarrow du = 2e^{2x} dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$I = \int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \int \cos 3x e^{2x} dx$$

$$u = e^{2x}, \quad \cos 3x dx = dv \Rightarrow du = 2e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$I = -\frac{e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \left[\frac{e^{2x}}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x e^{2x} dx \right]$$

$$= -\frac{e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int \sin 3x e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow I = \int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{3}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \sin 3x + C$$

$$c) \quad u = \ln x \quad x^3 dx = dv \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

d) (b) şıkkına benzer olarak yapılır.

e) (b) şıkkına benzer olarak yapılır.

$$f) \quad u = (\ln x)^2, \quad dv = dx \Rightarrow du = 2 (\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$I = \int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$I = x (\ln x)^2 - 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$g) \quad u = x^2, \quad e^{-x} dx = dv \Rightarrow 2x dx = du, \quad v = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int e^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C \end{aligned}$$

$$h) \quad u = x, \quad (x-1)^8 dx = dv \Rightarrow du = dx, \quad \frac{(x-1)^9}{9} = v$$

$$\begin{aligned} \int x (x-1)^8 dx &= \frac{1}{9} x (x-1)^9 - \frac{1}{9} \int (x-1)^9 dx \\ &= \frac{1}{9} x (x-1)^9 - \frac{1}{90} (x-1)^{10} + C \end{aligned}$$

$$i) \quad u = x^3, \quad e^{2x} dx = dv \Rightarrow du = 3x^2 dx, \quad \frac{1}{2} e^{2x} = v$$

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \int e^{2x} x^2 dx & \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad e^{2x} dx = dv \\ du = 2x dx, \quad \frac{1}{2} e^{2x} = v \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \right] & \left[\begin{array}{l} u = x, \quad e^{2x} dx = dv \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

$$j) \quad u = x^2, \quad e^{-3x} dx = dv \Rightarrow du = 2x dx, \quad v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

$$\begin{aligned}
 \int e^x e^{-3x} dx &= -\frac{x^2}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx & \left[\begin{array}{l} u = x, \quad e^{-3x} dx = dv \\ du = dx, \quad -\frac{1}{3} e^{-3x} = v \end{array} \right] \\
 &= -\frac{x^2}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3} \left[-\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right] \\
 &= -\frac{x^2}{3} e^{-3x} - \frac{2x}{9} e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C
 \end{aligned}$$

$$k) \quad u = \cos(\ln x), \quad dv = dx \Rightarrow du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos(\ln x) dx &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx & \left[\begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & dv = dx \\ du = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right] \\
 &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\
 \Rightarrow \int \cos(\ln x) dx &= \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \sin(\ln x) + C
 \end{aligned}$$

$$l) \quad u = x^2 - 2x + 5, \quad e^x dx = dv \Rightarrow du = 2x - 2, \quad v = e^x$$

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 - 2x + 5) e^x dx &= e^x (x^2 - 2x + 5) - \int e^x (2x - 2) dx, & \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = u \quad e^x dx = dv \\ 2 dx = du \quad v = e^x \end{array} \right] \\
 &= e^x (x^2 - 2x + 5) - \left[(2x - 2) e^x - \int 2e^x dx \right] = e^x (x^2 - 4x + 9) + C
 \end{aligned}$$

$$m) \quad u = ax^2 + bx + c, \quad e^{-x} dx = dv \Rightarrow du = 2ax + b, \quad v = -e^{-x}$$

$$\int (ax^2 + bx + c) e^{-x} dx = -e^{-x} (ax^2 + bx + c) + \int (2ax + b) e^{-x} dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = 2ax + b & e^{-x} dx = dv \\ du = 2a dx & v = -e^{-x} \end{array} \right]$$

$$= -e^{-x} (ax^2 + bx + c) - (2ax + b) e^{-x} + \int e^{-x} 2a dx$$

$$= -e^{-x} (ax^2 + bx + c) - (2ax + b) e^{-x} - 2ae^{-x} + C$$

$$= -e^{-x} (ax^2 + (2a + b)x + (2a + b + c)) + C$$

$$n) \quad u = \ln x, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} dx = dv \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$$

$$o) \quad u = \ln(x^2) \quad x dx = dv \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln(x^2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$p) \quad u = x, \quad \sec^2 x dx = dv \Rightarrow du = dx, \quad v = \tan x$$

$$\int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$r) \quad u = (\ln x)^2, \quad \frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow du = \frac{2}{x} \ln x \cdot dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & \frac{dx}{x^2} = dv \\ du = \frac{dx}{x} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2 \left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right]$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki indirgeme formüllerinin doğruluğunu gösteriniz.

$$a) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$b) \int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \quad (n > 1)$$

$$c) \int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \quad (n > 1)$$

$$d) \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx = \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x + \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx \quad (n > 1)$$

$$e) \int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx = \frac{-1}{n-1} \sin^{n-1} x + \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx \quad (n > 1)$$

$$f) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx \quad (n > 1)$$

$$g) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx \quad (m \neq n)$$

$$h) \int (a^2 - x^2)^n dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$ı) \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$i) \int x^n (\ln x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n - \frac{n}{n+1} \int x^n (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \neq -1)$$

$$j) \int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} \left[x^n \sin ax - n \int x^{n-1} \sin ax dx \right]$$

$$k) \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

2. $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ olduğuna göre $n \geq 2$ için

$$I_n = \frac{2 \sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

3. $I_n = \int \frac{x^n dx}{1+x^2}$ olduğuna göre $n > 1$ için

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçekleştiğini gösteriniz.

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\int \sin^4 x dx$ | f) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx$ | j) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^5 dx$ |
| b) $\int \cos^7 x dx$ | g) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ | k) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ |
| c) $\int \sin^3 x \cos^6 x dx$ | h) $\int \cot^4 x dx$ | l) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$ |
| d) $\int \tan^5 x dx$ | ı) $\int x^{10} \ln x dx$ | m) $\int (4-x^2)^3 dx$ |
| e) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$ | i) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ | n) $\int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx$ |

ÇÖZÜMLER

1. a) $\cos^{n-1} x = u$, $\cos x dx = dv \Rightarrow du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x$, $v = \sin x$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^n x dx &= \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx \\
 &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{(n-2)} x \cdot \sin^2 x dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x - (n-1) \int \cos^n x dx \\
 \Rightarrow n \int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx \\
 \Rightarrow \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx
 \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{\sin^{n-2} x} = u$, $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \Rightarrow -(n-2) \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} dx = du$, $v = -\cot x$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^n x} &= \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x} \\
 &= -\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x} - (n-2) \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} dx \\
 &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{1}{\sin^n x} dx + (n-2) \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx \\
 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^n x} &= -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^{n-1} x} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \cot^n x dx &= \int \cot^{n-2} x \cdot \cot^2 x dx \\
 &= \int \cot^{n-2} x (1 + \cot^2 x - 1) dx \\
 &= \int \cot^{n-2} x (1 + \cot^2 x) dx - \int \cot^{n-2} x dx \\
 &= -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x)}{\sin x} dx \\
 &= \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx - \int \cos^{n-2} x \sin x dx \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = u \\ du = -\sin x dx \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx + \int u^{n-2} du = \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx + \frac{u^{n-1}}{n-1} \\
 &= \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx + \frac{\cos^{n-1} x}{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x)}{\cos x} dx \\
 &= \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx - \int \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = u \\ du = \cos x dx \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx - \int u^{n-2} du \\
 &= \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx - \frac{1}{n-1} u^{n-1} \\
 &= \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx - \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x
 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \sin^k x \cos^m x dx = -\frac{1}{m+k} \sin^{k-1} x \cos^{m+1} x + \frac{k-1}{m+k} \int \sin^{k-2} x \cos^m x dx$$

olduğunu biliyoruz.

$k-2 = -n$ dönüşümü yapılırsa

$k = -(n-2)$ olur.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx = -\frac{1}{m-n+2} \frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{n-1}{m-n+2} \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx$$

bulunur.

$$g) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx$$

$$u = \cos^{m-1} x \Rightarrow du = -(m-1) \cos^{m-2} x \sin x dx$$

$$dv = \frac{\cos x}{\sin^n x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{1-n} \frac{1}{\sin^{n-1} x}$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \int \cos^{m-1} x \cdot \frac{\cos x}{\sin^n x} dx$$

$$= \frac{1}{1-n} \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^{m-2} x \cdot \sin^2 x}{\sin^n x} dx$$

$$= \frac{1}{1-n} \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{m-1}{n-1}\right) \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{1}{1-n} \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} = \frac{1}{(m-n)} \frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx$$

$$h) u = (a^2 - x^2)^n \Rightarrow du = -2n(a^2 - x^2)^{n-1} x dx, dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int (a^2 - x^2)^n dx = x(a^2 - x^2)^n + 2n \int (a^2 - x^2)^{n-1} x^2 dx \quad (1)$$

ve

$$\int (a^2 - x^2)^n dx = \int (a^2 - x^2)^{n-1} (a^2 - x^2) dx$$

$$= a^2 \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx - \int x^2 (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \int x^2 (a^2 - x^2)^{n-1} dx = a^2 \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx - \int (a^2 - x^2)^n dx$$

eşitliğini (1)'de yerine yazarsak

$$\int (a^2 - x^2)^n dx = x(a^2 - x^2)^n + 2na^2 \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx - 2n \int (a^2 - x^2)^n dx$$

$$\Rightarrow (2n+1) \int (a^2 - x^2)^n dx = x(a^2 - x^2)^n + 2na^2 \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \int (a^2 - x^2)^n dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx$$

$$1) (\ln x)^n = u \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^n dx &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

$$i) x^{n+1} dx = dv \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} = v$$

$$(\ln x)^n = u \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \int x^n (\ln x)^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln x)^n - \frac{n}{n+1} \int x^{n+1} \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n - \frac{n}{n+1} \int x^n (\ln x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

$$j) u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} dx, \quad \cos ax dx = dv \Rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax) = v$$

$$\begin{aligned} \int x^n \cos ax dx &= \frac{1}{a} x^n \cdot \sin(ax) - \frac{1}{a} \int \sin(ax) \cdot (nx^{n-1}) dx \\ &= \frac{1}{a} \left[x^n \sin(ax) - n \int x^{n-1} \sin(ax) dx \right] \end{aligned}$$

$$k) u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} dx$$

$$\sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \int x^n \sin x dx &= -x^n \cos x - \int (-\cos x)(nx^{n-1}) dx \\ &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{\sin(n-1)x \cos x}{\sin x} + \int \cos(n-1)x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x} + \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x \\ &= \frac{I_n}{2} + \frac{I_{n-2}}{2} + \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n-2} + \frac{2 \sin(n-1)x}{n-1}$$

3. $I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{x^{n-1}}{n-1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} I_n + I_{n-2} &= \int \frac{x^n}{1+x^2} dx + \int \frac{x^{n-2}}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{x^n + x^{n-2}}{1+x^2} dx = \int x^{n-2} dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad a) \quad \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

$$b) \quad \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (1)$$

eşitliğinde $n = 7$ alınırsa

$$\int \cos^7 x dx = \frac{1}{7} \sin x \cos^6 x + \frac{6}{7} \int \cos^5 x dx$$

son integral için (1) eşitliğinde $n = 5$ alınırsa

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx$$

$$= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = u \\ du = \cos x dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \int (1 - u^2) du$$

$$= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} u - \frac{4}{15} u^3$$

$$= \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \sin x - \frac{4}{15} (\sin x)^3 \Rightarrow$$

$$\int \cos^7 x dx = \frac{1}{7} \sin x \cdot \cos^6 x + \frac{6}{7} \left(\frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{5} \sin x - \frac{4}{15} \sin^3 x \right) + C$$

$$= \frac{1}{7} \sin x \cdot \cos^6 x + \frac{6}{35} \sin x \cos^4 x + \frac{24}{35} \sin x - \frac{8}{35} \sin^3 x + C$$

$$c) \int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx$$

indirgeme formülünde $n = 3, m = 6$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^6 x dx &= -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x + \frac{2}{9} \int \sin x \cos^6 x dx \\ &= -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x + \frac{2}{9} \int (-u^6) du \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = u \\ du = -\sin x \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x - \frac{2}{63} \cos^7 x + C \end{aligned}$$

$$d) \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

indirgeme formülünde $n = 5$ alınır

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x dx &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x (1 + \tan^2 x - 1) dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x (1 + \tan^2 x) dx + \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$e) \int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx = \frac{-1}{n-1} \sin^{n-1} x + \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx \quad n > 1$$

indirgenme formülünde $n = 4$ alınır

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx &= \frac{-1}{3} \sin^3 x + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \int \frac{1}{\cos x} dx - \int \cos x dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \end{aligned}$$

$$f) \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx = \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x + \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx$$

olduğunu biliyoruz. $n = 5$ alınır

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx &= \frac{1}{4} \cos^4 x + \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx \\
 &= \frac{1}{4} \cos^4 x + \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin x} dx \quad [\sin x = u \Rightarrow du = \cos x dx] \\
 &= \frac{1}{4} \cos^4 x + \int \frac{(1 - u^2)}{u} du = \frac{1}{4} \cos^4 x + \ln u - \frac{u^2}{2} + C \\
 &= \frac{1}{4} \cos^4 x + \ln (\sin x) - \frac{(\sin x)^2}{2} + C
 \end{aligned}$$

g) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ indirgeme formülünde
 $n = 5$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$n = 3$ alınırsa

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C_1 \\
 \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^5 x} &= \frac{1}{4} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

h) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx \quad (n > 1)$
 indirgeme formülünde

$m = n = 4$ alınırsa

$$\int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^4 dx = \int \cot^4 x dx = -\frac{\cos^5 x}{4 \sin^4 x} - \frac{2}{3} \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx \quad (1)$$

$m = 4, n = 2$ alınırsa

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^5 x}{\sin x} - 4 \int \cos^4 x dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x \quad (3)$$

(1), (2) ve (3) den

$$\int \cot^4 x dx = -\frac{\cos^5 x}{4\sin^4 x} + \frac{2}{3} \frac{\cos^5 x}{\sin x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}\sin 4x + C$$

bulunur.

1) $u = x^{10} \Rightarrow du = 10x^9 dx$, $\ln x dx = dv \Rightarrow v = x(\ln x - 1)$

$$\begin{aligned} \int x^{10} \ln x dx &= x^{10} \cdot x(\ln x - 1) - 10 \int (x^{10} \ln x - x^{10}) dx \\ &= x^{11}(\ln x - 1) - 10 \int x^{10} \ln x + 10 \int x^{10} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 11 \int x^{10} \ln x dx = x^{11}(\ln x - 1) + \frac{10}{11}x^{11} + C_1$$

$$\Rightarrow \int x^{10} \ln x dx = \frac{x^{11}}{11}(\ln x - 1) + \frac{10}{121}x^{11} + C$$

i) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$ indirgeme formülünde

$n = 6$ yazılırsa

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5} \frac{\cos x}{\sin^5 x} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{\sin^4 x},$$

$n = 4$ yazılırsa

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5} \frac{\cos x}{\sin^5 x} - \frac{4}{15} \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{8}{15} \cot x + C$$

j) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx \quad (n > 1)$

indirgeme formülünde

$n = m = 5$ alınırsa

$$\int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^5 dx = -\frac{\cos^6 x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$$

$m = 5, n = 3$ alınırsa

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos^6 x}{2 \sin^2 x} - 2 \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x}{\sin x} dx \quad [\sin x = u \Rightarrow du = \cos x dx]$$

$$= \int \left(\frac{1 - u^2}{u} \right)^2 du = \int \frac{1}{u} - 2u + u^3 du$$

$$= \ln |u| - u^2 + \frac{u^4}{4} + C = \ln |\sin x| - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^5 dx = -\frac{\cos^6 x}{4 \sin^4 x} + \frac{1}{4} \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} + \ln |\sin x| - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos x} dx & [\cos x = u \Rightarrow du = -\sin x dx] \\ &= -\int \left(\frac{1 - u^2}{u} \right) du = \frac{u^2}{2} - \ln u + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\text{l) } \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx \quad (m \neq n)$$

indirgeme formülünde $m = 5$, $n = 2$ alınır

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = \frac{\cos^4 x}{3 \sin x} - \frac{4}{3} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \frac{\cos^4 x}{3 \sin x} + \frac{4}{3} \frac{1}{\sin x} + \frac{4}{3} \sin x + C.$$

$$\text{m) } \int (4 - x^2)^3 dx$$

$$\int (a^2 - x^2)^n dx = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1} \int (a^2 - x^2)^{n-1} dx \quad \text{indirgeme}$$

formülünde $a = 2$, $n = 3$ alınır

$$\int (4 - x^2)^3 dx = \frac{x(4 - x^2)^3}{7} + \frac{24}{7} \int (4 - x^2)^2 dx,$$

$a = 2$, $n = 2$ alınır

$$\begin{aligned} \int (4 - x^2)^2 dx &= \frac{x(4 - x^2)^2}{5} + \frac{16}{5} \int (4 - x^2) dx \\ &= \frac{x(4 - x^2)^2}{5} + \frac{64}{5} x - \frac{16}{15} x^3 + C_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int (4-x^2)^3 dx = \frac{x(4-x^2)^3}{7} + \frac{24}{35}x(4-x^2)^2 + \frac{1536}{35}x - \frac{364}{105}x^3 + C$$

$$n) I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} \Rightarrow I_n = \frac{2\sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$$

$$n = 5 \text{ alınırsa } \int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx = \frac{\sin 4x}{2} + \int \frac{\sin 3x}{\sin x} dx$$

$$n = 3 \text{ için } \int \frac{\sin 3x}{\sin x} dx = \sin 2x + \int \frac{\sin x}{\sin x} dx = \sin 2x + x + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx = \frac{\sin 4x}{2} + \sin 2x + x + C$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$a) \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$b) \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} = \ln \left| \frac{(x-2)^{3/10}(x+3)^{-2/15}}{x^{1/6}} \right| + C$$

$$c) \int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1} = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$$

$$d) \int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + C$$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$$

$$b) \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$c) \int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$$

$$d) \int \frac{x+2}{x^2+x} dx$$

$$e) \int \frac{x dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$f) \int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} dx$$

$$g) \int \frac{x^4}{x^4-1} dx$$

$$ı) \int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$i) \int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2x} dx$$

$$j) \int \frac{x^3}{(x+1)^3} dx$$

$$k) \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx$$

ÇÖZÜMLER

$$1. \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{x(A+B)+2A-2B}{x^2-4} \Rightarrow A+B=0 \text{ ve } 2A-2B=1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$b) \quad \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x^2+x-6)} = \frac{x+1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}$$

$$x+1 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)$$

$$x = -3 \Rightarrow -2 = B(-3)(-5) \Rightarrow B = -\frac{2}{15}$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 = C \cdot (2) \cdot (5) \Rightarrow C = \frac{3}{10}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A \cdot 3 \cdot (-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx = \int -\frac{1}{6} \frac{1}{x} - \frac{2}{15} \frac{1}{x+3} + \frac{3}{10} \frac{1}{x-2} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|x| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + \frac{3}{10} \ln|x-2| + C$$

$$= \ln|x^{-1/6}| + \ln|(x+3)^{-2/15}| + \ln|x-2|^{3/10} + C$$

$$= \ln \left| \frac{(x+3)^{-2/15}(x-2)^{3/10}}{x^{1/6}} \right| + C$$

$$c) \quad \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x+5 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$x = 1 \Rightarrow 8 = 2B \Rightarrow B = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 = 4C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 5 = -A + B + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(3x+5)}{x^3-x^2-x+1} dx &= \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - 4 \frac{1}{x-1} \\ &= -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } \frac{1}{x^2+7x+6} &= \frac{1}{(x+1)(x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x+1)}{(x+1)(x+6)} \\ &= \frac{x(A+B)+6A+B}{(x+1)(x+6)}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}A+B &= 0 \\ 6A+B &= 1\end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+7x+6} &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+6} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{5} \ln|x+6| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{2. a) } \frac{1}{(x-3)(x+2)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{x(A+B)+2A-3B}{(x-3)(x+2)}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}A+B &= 0 \\ 2A-3B &= 1\end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-3| - \frac{1}{5} \ln|x+2| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

$$x = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$x = -2 \Rightarrow B = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx + \int \frac{2}{x+2} \, dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+3} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x+2)^2}{(x+1)^{1/2} \cdot (x+3)^{3/2}} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{(x+2)(x+1)^2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$1 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+2)$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = C$$

$$x = -2 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow A + 2B + 2C = 1 \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2} &= \int \frac{1}{x+2} \, dx - \int \frac{1}{x+1} \, dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx \\ &= \ln|x+2| - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C \\ &= \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int \frac{x+2}{x^2+x} \, dx$$

$$\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+B) + A}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow B = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x} \, dx &= \int \frac{2}{x} \, dx - \int \frac{1}{x+1} \, dx \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$e) \frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$x = A(x+1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+1)^2(x+2) + D(x+1)^2$$

$$x = -1 \Rightarrow -1 = B$$

$$x = -2 \Rightarrow -2 = D$$

$$x = 0 \Rightarrow 4A + 4B + 2C + D = 0 \Rightarrow 4A + 2C = 6$$

$$x = -3 \Rightarrow -3 = -2A + B + 4C + 4D \quad 4C - 2A = 9$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{10}, C = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x+1)^2(x+2)^2} &= \int \frac{\frac{3}{10}}{x+1} dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{12}{5}}{x+2} dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{12}{5} \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + C \end{aligned}$$

$$f) \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

$$A+B=1, C=1, A=1 \Rightarrow B=0$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln|x| + \arctan x + C$$

$$g) \frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A - B - D \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = 15A + 5B + (2C+D) \cdot 3 \Rightarrow C = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4-1} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + -\frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

$$1) \quad x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \Rightarrow$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \Rightarrow$$

$$1 = (A + C)x^3 + (B - \sqrt{2}A + \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x + (B + D) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - \sqrt{2}A + \sqrt{2}C + D = 0 \\ A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}A + \sqrt{2}C + 1 = 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \cdot 2A = 1 \\ -\sqrt{2}B + \sqrt{2}D = 0 \Rightarrow B = D \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = D = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2} dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{2\sqrt{2}x}{1 - x^2} + C$$

$$i) \quad \int \frac{x^2 + 2x + 7}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 7}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \frac{x^2 + 2x + 7}{x(x-1)(x+2)} dx$$

$$= -\frac{7}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{10}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{7}{6} \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= -\frac{7}{2} \ln|x| + \frac{10}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{6} \ln|x+2| + C$$

j) $\int \frac{x^3}{(x+1)^3} dx$ integralinde $x+1=u \Rightarrow du=dx$ değişken değiştirme-
si yapılırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x+1)^3} &= \int \frac{(u-1)^3}{u^3} du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^3} du \\ &= \int \left(1 - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du = u - 3\ln|u| - \frac{3}{u} + \frac{1}{2u^2} + C \\ &= (x+1) - 3\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

bulunur.

k) $x = u^2$, $dx = 2u du$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} dx &= \int \frac{(u+1)2u}{u^2+1} du = 2 \int \frac{u^2}{u^2+1} du + \int \frac{2u}{u^2+1} du \\ &= 2 \int du - 2 \int \frac{1}{u^2+1} du + \int \frac{2u}{u^2+1} du \\ &= 2u - 2 \arctan u + \ln|u^2+1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5}}$$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt{15 - 4x - 4x^2}}$$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$b) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$c) \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$b) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$b) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c) \int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} dx$$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$b) \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$c) \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$

$$d) \int \frac{x^2 + x + 1}{x \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$a) \int x^3 (1 + 2x^2)^{-3/2} dx$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+4}}$$

$$c) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}}$$

$$d) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$$

$$e) \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$$

$$f) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

ÇÖZÜMLER

$$1. \quad a) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 3^2 \quad [x - 1 = u \Rightarrow du = dx]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 9}} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 3^2}} \\ &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 9} \right| + C \\ &= \ln \left| x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 - 9} \right| + C \\ &= \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 8} \right| + C \end{aligned}$$

$$b) \quad 4x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)^2 + 4 \quad [2x - 1 = u, \quad 2 dx = du]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2 + 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + 4}| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 5}| + C \end{aligned}$$

$$c) \quad 15 - 4x - 4x^2 = -(4x^2 + 4x - 15) = -[(2x + 1)^2 - 16] = 16 - (2x + 1)^2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{15 - 4x - 4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (2x + 1)^2}} \quad [2x + 1 = u, \quad 2 dx = du] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{u}{4} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x + 1}{4} + C \end{aligned}$$

$$2. \quad a) \quad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x+2}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{4}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + 2 \arcsin (x-1) + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} \\
 &= \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \ln \left(\left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right| \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx \\
 \int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2-2x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \sqrt{8+2x-x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\text{3. a) } \frac{1}{x-1} = t \Rightarrow x = \frac{1+t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{t^2+1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
 &= - \ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C = - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2-2x+2}}{x-1} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = - \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C \\
 &= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{4. a) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx = (ax+b) \sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = a\sqrt{x^2-x+1} + \frac{(2x-1)(ax+b)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$2x^2 = 2a(x^2 - x + 1) + (2x-1)(ax+b) + 2\lambda$$

$$2x^2 = x^2(2a+2a) + x(-2a-a+2b) + (2a-b+2\lambda)$$

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow -3a + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$2a - b + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| \\ &= \frac{2x+3}{8} \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}{2} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) \sqrt{1-x^2} \\ &\quad - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow x^5 &= (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) (1-x^2) - x (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c) + \lambda \\ a &= -\frac{3}{5}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{4}{15}, \quad d = 0, \quad e = -\frac{8}{15}, \quad \lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{8+4x^2+3x^4}{15} \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx &= (ax^2+bx+c) \sqrt{x^2-4x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} \\ \Rightarrow \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} &= (2ax+b) \sqrt{x^2-4x+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}} (ax^2+bx+c) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-4x+1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = (2ax + b) (x^2 - 4x + 1) + (x - 2) (ax^2 + bx + c) + \lambda$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c = \frac{28}{3}, \quad \lambda = 18$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx &= \frac{1}{3} (x^2 + 5x + 28) \sqrt{x^2-4x+1} + \int \frac{18 dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 3}} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 5x + 28) \sqrt{x^2-4x+1} \\ &\quad + 18 \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2-4x+1} \right| + C \end{aligned}$$

5. a) $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^5} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = - \int \frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} dt \quad (t = \sin u, dt = \cos u du) \\ &= - \int \frac{\sin^4 u}{\cos u} \cdot \cos u du = \int \sin^4 u du \\ &= \frac{1}{4} \sin^3 u \cos u + \frac{3}{8} \sin u \cos u - \frac{3}{8} u + C \\ &= \frac{1}{4} t^3 \cos(\arcsin t) + \frac{3}{8} t \cos(\arcsin t) - \frac{3}{8} \arcsin t + C \\ &= \frac{1}{4} t^3 \cdot \sqrt{1 - t^2} + \frac{3}{8} t \sqrt{1 - t^2} - \frac{3}{8} \arcsin t + C \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \frac{3}{8} \frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x} + C \\ &= \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2} \right) \sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{(1-t)^2 - 2t(1-t) + 2t^2}{t^2}}} \\ &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{5t^2 - 4t + 1}} = -\frac{1}{10} \int \frac{10t - 4 + 4}{\sqrt{5t^2 - 4t + 1}} dt \\ &= -\frac{1}{10} \int \frac{10t - 4}{\sqrt{5t^2 - 4t + 1}} - \frac{4}{10} \int \frac{1}{\sqrt{5t^2 - 4t + 1}} dt \\ &= -\frac{1}{5} \sqrt{5t^2 - 4t + 1} - \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}}} dx \\ &= -\frac{1}{5} \sqrt{5t^2 - 4t + 1} - \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| t - \frac{2}{5} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} \right| + C \\ &= -\frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x+1} - \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$c) \frac{1}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2-x+1}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^3} \frac{\sqrt{(1-t)^2-t(1-t)+t^2}}{t}} \\ &= -\int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} = (At+B) \cdot \sqrt{3t^2-3t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2-3t+1}}$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} = A\sqrt{3t^2-3t+1} + (At+B) \left(\frac{6t-3}{2\sqrt{3t^2-3t+1}} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{3t^2-3t+1}}$$

$$2t^2 = 2A(3t^2-3t+1) + (At+B)(6t-3) + 2\lambda$$

$$2t^2 = t^2 \cdot 12A + t(-9A+6B) + 2A-3B+2\lambda$$

$$12A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, \quad 6B - 9A = 9 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$2A - 3B + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{24}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} dt &= \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{3t^2-3t+1} + \frac{5}{24} \int \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}} \\ &= \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{3t^2-3t+1} + \frac{5}{24\sqrt{3}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2-x+1}} &= -\left(\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{4} \right) \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} - \\ &\quad \frac{5}{24\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \int \frac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} \\ &= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx = A\sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{A(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow$$

$$2x+2 = 2Ax - A + 2\lambda \Rightarrow A = 1, \lambda = \frac{3}{2}$$

$$I_1 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \ln\left(x-\frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}\right).$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\ln\left(t-\frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}\right) = -\ln\left(\frac{2-x}{2x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-x+1}\right). \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \ln\left(x-\frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}\right) - \ln\left(\frac{2-x}{2x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

6. a) $r = 1, p = 2, q = -\frac{3}{2} \cdot \frac{r+1}{p} = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$x^2 = y \Rightarrow 2x dx = dy \quad \frac{1}{2} \int y(1+2y)^{-3/2} dy = \int x^3 (1+2x^2)^{-3/2} dx$$

$$1+2y = t^2 \Rightarrow dy = t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-1)}{2} \cdot t^{-3} \cdot t dt = \frac{1}{4} \int 1-t^{-2} dt = \frac{1}{4} (t + t^{-1}) + C$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1+2y} + \frac{1}{\sqrt{1+2y}} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}} \right) + C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}, r = 0, p = 4, q = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}, \frac{r+1}{p} + q = 0 \in \mathbb{Z}$

$$x^{-4} + 1 = t^4, x^4 = \frac{1}{t^4-1} \Rightarrow x = (t^4-1)^{-1/4}$$

$$dx = -t^3 (t^4-1)^{-5/4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \left(\frac{t^4-1}{t^4} \right)^{1/4} \cdot t^3 (t^4-1)^{-5/4} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int (t^4 - 1)^{-1} \cdot t^2 dt = - \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt \\
 \frac{t^2}{t^4 - 1} &= \frac{At + B}{t^2 + 1} + \frac{C}{t - 1} + \frac{D}{t + 1}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4}, \quad A = 0 \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{t - 1} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{t + 1} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{4} \ln|t - 1| + \frac{1}{4} \ln|t + 1| + C \\
 &= -\frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{x^{-4} + 1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} + 1}{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} - 1} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$c) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 + x^5}} = \int x^{-1} (1 + x^5)^{-1/2} dx$$

$$r = -1, \quad p = 5, \quad q = -\frac{1}{3}, \quad \frac{r+1}{p} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + x^5 = t^3 \Rightarrow$$

$$x = (t^3 - 1)^{1/5} \Rightarrow dx = \frac{3}{5} t^2 (t^3 - 1)^{-4/5} dt$$

$$\int x^{-1} (1 + x^5)^{-1/2} dx = \int (t^3 - 1)^{-1/5} t^{-1} \cdot \frac{3}{5} t^2 (t^3 - 1)^{-4/5} dt = \frac{3}{5} \int \frac{t}{t^3 - 1} dt$$

$$\frac{t}{t^3 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + t + 1}$$

$$t = A(t^2 + t + 1) + (t - 1)(Bt + C) \Rightarrow A = C = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 + x^5}} = \frac{3}{5} \int \frac{\frac{1}{3}}{t - 1} dt + \frac{3}{5} \int \frac{-\frac{t}{3} + \frac{1}{3}}{t^2 + t + 1} dt$$

$$= \frac{1}{5} \ln|t - 1| - \frac{1}{10} \int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dx + \frac{3}{10} \int \frac{1}{t^2 + t + 1}$$

$$= \frac{1}{5} \ln|t - 1| - \frac{1}{10} \ln|t^2 + t + 1| + \frac{3}{10} \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{10} \ln|t - 1|^2 - \frac{1}{10} \ln|t^2 + t + 1| + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{(t - 1)^2}{t^2 + t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{\left(\sqrt[3]{1 + x^5} - 1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1 + x^5}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + x^5} + 1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{2\sqrt[3]{1 + x^5} + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$d) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+4\sqrt{x^3}}} = \int x^{-3/2} (1+x^{3/4})^{-1/3} dx \quad (r = -\frac{3}{2}, p = \frac{3}{4}, q = -\frac{1}{3})$$

$$\frac{r+1}{p} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{r+1}{p} + q = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^{-3/4} + 1 = t^3$$

$$\Rightarrow x = (t^3 - 1)^{-4/3}, \quad dx = -\frac{4}{3} (t^3 - 1)^{-7/3} \cdot 3t^2 dt = -4t^2 (t^3 - 1)^{-7/3} dt$$

$$I = \int (t^3 - 1)^2 \left(1 + \frac{1}{t^3 - 1}\right)^{-1/3} \cdot (-4) \cdot t^2 (t^3 - 1)^{-7/3} dt = -4 \int t dt$$

$$= -2t^2 + C = -2 \sqrt[3]{(x^{-3/4} + 1)^2} + C$$

$$e) I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} dx = \int x^{1/3} (1+x^{1/3})^{-1/2} dx, \quad r = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{r+1}{p} = 4 \in \mathbb{Z}, \quad 1 + x^{1/3} = t^2, \quad x = (t^2 - 1)^3, \quad dx = 6t (t^2 - 1)^2 dt$$

$$I = \int (t^2 - 1) t^{-1} \cdot 6t \cdot (t^2 - 1)^2 dt = 6 \int (t^2 - 1)^3 dt = 6 \int t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 dt$$

$$= 6 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{3}{5} t^5 + t^3 - t \right] + C$$

$$= \left[\frac{(1+x^{1/3})^{7/2}}{7} - \frac{3}{5} (1+x^{1/3})^{5/2} + (1+x^{1/3})^{3/2} - 1 - x^{1/3} \right] + C$$

$$f) I = \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} dx = \int x^5 (x^2-1)^{-2/3} dx, \quad r = 5, \quad p = 2, \quad q = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{r+1}{p} = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 - 1 = t^3, \quad x = (t^3 + 1)^{1/2}, \quad dx = \frac{1}{2} (t^3 + 1)^{-1/2} \cdot 3t^2 dt$$

$$I = \frac{3}{2} \int (t^3 + 1)^{5/2} \cdot t^{-2} \cdot t^2 (t^3 + 1)^{-1/2} dt = \frac{3}{2} \int (t^3 + 1)^2 dt$$

$$= \frac{3}{2} \int t^6 + 2t^3 + 1 dt = \frac{3}{14} t^7 + \frac{3}{4} t^4 + \frac{3}{2} t + C$$

$$= \frac{3}{14} (x^2 - 1)^{7/3} + \frac{3}{4} (x^2 - 1)^{4/3} + \frac{3}{2} (x^2 - 1)^{1/3} + C$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$

5. $\int \frac{dx}{x^3+ax^2}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

7. $\int \cos(\ln x) dx$

8. $\int x\cos^2 x dx$

9. $\int \frac{\sin x dx}{a^2 + \cos^2 x}$

10. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

11. $\int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} dx$

12. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

13. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

14. $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2} dx$

15. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

16. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x} + 1}$

17. $\int \frac{dx}{1 + \tan x}$

18. $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9}$

19. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx$

20. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$

22. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5}$

23. $\int \frac{\cos^3 x dx}{1 - \sin x}$

24. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin 2x}$

25. $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x(1 + 2\cos x)}$

26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$

27. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$

30. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$

31. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$

32. $\int (e^x + 1)^3 e^x dx$

33. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

34. $\int e^x \sin e^x dx$

$$35. \int \frac{x^5}{x^{12}-1} dx$$

$$37. \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$39. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$41. \int \sqrt{1+\sin x} dx$$

$$43. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$45. \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$47. \int x^2 e^{2x} \cdot \sin x dx$$

$$49. \int \frac{dx}{x^4+16}$$

$$51. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0)$$

$$53. \int \frac{dx}{1+a \cos x} \quad (a > 0)$$

$$55. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$57. \int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} dx$$

$$59. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$61. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$63. \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$65. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}$$

$$67. \int \frac{dx}{5+3 \cos x}$$

$$69. \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$$

$$71. \int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$36. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$38. \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$$

$$40. \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$$

$$42. \int |x| dx$$

$$44. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}}$$

$$46. \int \sin x \cdot e^{-\cos x} dx$$

$$48. \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$50. \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$$

$$52. \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} \quad (a \neq 0)$$

$$54. \int \sqrt{3-x^2} dx$$

$$56. \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx$$

$$58. \int \sqrt{x^2+5} dx$$

$$60. \int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2} dx$$

$$62. \int \frac{\sin x dx}{5+4 \sin x}$$

$$64. \int \frac{a + \tan x}{1 - a \tan x} dx$$

$$66. \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$68. \int \frac{dx}{2+\sin x}$$

$$70. \int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$$

$$72. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^{2n}-a^{2n}}}$$

73. $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} dx$

74. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)} \quad (p \in \mathbb{N})$

75. $\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$

76. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

77. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

78. $\int \frac{x dx}{1+x \tan x}$

79. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

80. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$

81. $\int \cos \sqrt{x} dx$

82. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)^2}$

83. $\int \frac{\sin x - 5 \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

[Yol gösterme : $\sin x - 5 \cos x = a (\sin x + \cos x) + b (\cos x - \sin x)$ eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. $3x+1=t^3 \Rightarrow x=\frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx=t^2 dt$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \int \frac{(t^3+2)}{3} t dt = \frac{t^5}{15} + \frac{t^2}{3} + C = \frac{(3x+1)^{5/3}}{15} + \frac{(3x+1)^{2/3}}{3} + C$$

2. $\text{ekok}(2,3)=6 \Rightarrow x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5 dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^2+t^3} = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C = 2\sqrt{x} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - \ln|1+x^{1/6}| + C \end{aligned}$$

3. $x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos^2 t}} dt = \int dt = t + C \\ &= \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C \end{aligned}$$

$$4. \quad \ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C = \tan(\ln x) + C$$

$$5. \quad x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + ax^2} = \int \frac{dx}{x^2(x+a)} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t} + a\right)} dt = -\int \frac{t}{1+at} dt$$

$$= -\int \left(\frac{1}{a} - \frac{\frac{1}{a}}{at+1} \right) dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{at+1} dt - \frac{1}{a} \int dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \ln|at+1| - \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a^2} \ln\left|\frac{a}{x} + 1\right| - \frac{1}{ax} + C$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}} = -\arcsin \frac{\frac{1}{2} - x}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\arcsin(1 - 2x) + C$$

$$7. \quad u = \cos(\ln x), \quad dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx, \quad v = x$$

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx, \quad \begin{cases} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ dv = dx \quad \quad \quad v = x \end{cases}$$

$$= x \cos \ln x + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} \cos \ln x - \frac{x}{2} \sin(\ln x) + C$$

$$8. \quad u = x, \quad dv = \cos^2 x dx \Rightarrow du = dx,$$

$$v = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos^2(x) \, dx &= \frac{x}{4} \cdot \sin(2x) + \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{x}{4} \sin(2x) + \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{8} - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

$$9. \quad \cos x = t \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$$

$$\int \frac{\sin x}{a^2 + \cos^2 x} \, dx = - \int \frac{du}{a^2 + t^2} = -\frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C = -\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{\cos x}{a} \right) + C$$

$$10. \quad \tan x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2} = \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\tan x} + C$$

$$11. \quad \int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} \, dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} \, dx - 2 \int \frac{1}{e^{2x} + 4} \, dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} \, dx = \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{e^x}{2} \right), \quad [e^x = u]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{2x} + 4} \, dx &= \int \frac{e^{-2x}}{1 + 4e^{-2x}} \, dx = -\frac{1}{8} \int \frac{-8e^{-2x}}{1 + 4e^{-2x}} \, dx \\ &= -\frac{1}{8} \ln(1 + 4e^{-2x}) = -\frac{1}{8} \ln \left(\frac{e^{2x} + 4}{e^{2x}} \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} \, dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{e^x}{2} \right) + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{e^{2x} + 4}{e^{2x}} \right) + C$$

bulunur.

$$12. \quad \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

$$13. \sin x = u \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$14. \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2} = x - 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3 + x^2}$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2} \, dx = \int (x - 1) \, dx + \int \frac{1}{x+1} \, dx + \int \frac{1}{x^3 + x^2} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2} \, dx = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^3}(1+t)} \, dt = - \int \frac{t}{1+t} \, dt \quad \left[x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} \, dt \right]$$

$$= - \int \frac{1+t-1}{1+t} \, dt = -t + \ln|1+t| = -\frac{1}{x} + \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| - \frac{1}{x} + \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| + C$$

$$15. \sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int 2 \cdot \arcsin u \, du = 2 \cdot (u \arcsin u + \sqrt{1-u^2}) + C$$

$$= 2 \left(\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \right) + C$$

$$16. a^x = u \Rightarrow a^x \ln a \, dx = du$$

$$\int \frac{a^x}{a^{2x} + 1} \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\ln a} \arctan u + C = \frac{1}{\ln a} \arctan a^x + C$$

$$17. \int \frac{dx}{1 + \tan x}$$

$$\tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x) \, dx = du \Rightarrow (1 + u^2) \, dx = du$$

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} - \frac{1}{2} \int \frac{u-1}{1+u^2} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + u| - \frac{1}{4} \ln (1 + u^2) + \frac{1}{2} \arctan u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + \tan x| - \frac{1}{4} \ln (1 + \tan^2 x) + \frac{1}{2} x + C$$

$$18. \quad 2x^2 - 4x + 9 = 2 \left[x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{9}{2} \right] = 2 \left[(x-1)^2 + \frac{7}{2} \right] = 14 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9} = \frac{1}{14} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x-1}{\sqrt{7}} \right)^2 \right)} dx = \frac{\sqrt{7}}{14} \arctan \left(\frac{x-1}{\sqrt{7}} \right) + C$$

$$\begin{aligned} 19. \quad \int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-10}{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 4 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 4 \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x+2| - 4 \arctan(x-1) + C \end{aligned}$$

$$20. \quad \int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x+1)^2$$

$$x = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A + B + D \Rightarrow A + D = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + (C + D) \cdot 4 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = 15A + 5B + (2C + D) 9 \Rightarrow 5A + 3D = \frac{5}{2}$$

Bu denklem sistemleri çözülerek $A = \frac{1}{2}$, $D = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2-x^4}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2}} dx = \int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C \end{aligned}$$

$$22. \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} - 5} dt \\ &= -\int \frac{1}{4t^2 - 2t + 1} dt = -\int \frac{dt}{4\left[\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right]} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{4t-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} \cdot \cos x dx \quad [u = \sin x, du = \cos x dx] \\ &= \int (1 + \sin x) \cdot \cos x dx = \int (1 + u) du = u + \frac{u^2}{2} + C \\ &= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

$$24. \tan x = t \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+3\sin 2x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{6t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{t^2+6t+1} dt = \int \frac{1}{(t+3)^2-8} dt \quad \left[\begin{array}{l} t+3=u \\ du=dt \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{u^2-8} du = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int \frac{1}{u-\sqrt{8}} du - \int \frac{1}{u+\sqrt{8}} du \right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{u-\sqrt{8}}{u+\sqrt{8}} \right) + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t+3-\sqrt{8}}{t+3+\sqrt{8}} + C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\tan x + 3 - \sqrt{8}}{\tan x + 3 + \sqrt{8}} + C \end{aligned}$$

$$25. \tan \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+2\cos x)} dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1+\frac{2-2t^2}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = - \int \frac{t^2+2t+1}{t(t^2-3)} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \frac{2+\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{t-\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{t+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|t| - \frac{2+\sqrt{3}}{3} \ln|t-\sqrt{3}| - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \ln|t+\sqrt{3}| + C \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - (2+\sqrt{3}) \ln \left| \tan \frac{x}{2} - \sqrt{3} \right| - (2-\sqrt{3}) \ln \left| \tan \frac{x}{2} + \sqrt{3} \right| \right] + C \end{aligned}$$

$$26. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = A\sqrt{x^2-4} + \frac{Ax^2+Bx}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$$

$$x^2 = 2Ax^2 + Bx - 4A + \lambda \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = 0, \lambda = 2$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C$$

$$27. \quad 2x = 3 \sin t \Rightarrow x = \frac{3}{2} \sin t, \quad dx = \frac{3}{2} \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{\frac{3}{2} \sin t} \cdot \frac{3}{2} \cos t \, dt = 3 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} \, dt \\ &= 3 \int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t} dt = 3 \int \frac{1}{\sin t} dt - 3 \int \sin t \, dt \\ &= 3 \cos t + 3 \int \frac{1}{\sin t} \, dt \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin t} \, dt \text{ integralini hesaplayalım.}$$

$$\tan \frac{t}{2} = u \Rightarrow \sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} \, du$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{1+u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= 3 \cos t + 3 \int \frac{1}{\sin t} dt = 3 \cos t + 3 \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C \\ &= 3 \cos \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) + 3 \ln \left| \tan \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{2x}{3} \right) \right| + C \end{aligned}$$

$$28. \quad 1 + \sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2du}{u} = 2 \ln |u| + C = 2 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$$

$$29. \quad \text{ekok}(2, 4) = 4, \quad x+1 = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} &= \int \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int \frac{t^2}{1+t} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 4 \left(\frac{(x+1)^{1/2}}{2} - (x+1)^{1/4} \right) + 4 \ln |1 + (x+1)^{1/4}| + C \end{aligned}$$

$$30. \quad r = 0, \quad p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{r+1}{p} = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{x} = t^2 \Rightarrow x = (t^2 - 1)^2, \quad dx = 2(t^2 - 1) \cdot 2t \, dt$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx = \int t \cdot 4t(t^2 - 1) \, dt = 4 \int (t^4 - t^2) \, dt = 4 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C$$

$$= 4 \left[\frac{(1 + \sqrt{x})^{5/2}}{5} - \frac{(1 + \sqrt{x})^{3/2}}{3} \right] + C$$

31. $x^3 + 2 = u \Rightarrow du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3} \sqrt{u} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+2} + C$$

32. $e^x + 1 = u \Rightarrow du = e^x dx$

$$\int (e^x + 1)^3 e^x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + C$$

33. $e^x = u \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \ln|u| - \ln|1+u| + C \\ &= \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + C \end{aligned}$$

34. $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$$\int e^x \sin e^x dx = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(e^x) + C$$

35. $\int \frac{x^5}{x^{12}-1} dx = \int \frac{x^5}{(x^6)^2-1} dx \quad [x^6 = u \Rightarrow du = 6x^5 dx]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{12} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{12} (\ln|u-1| - \ln|u+1|) + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x^6-1}{x^6+1} \right| + C \end{aligned}$$

36. $u = \ln x, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad 2\sqrt{x} = v$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

$$37. u = \frac{1}{1+x^2} dv = dx, \quad du = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad v = x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C\end{aligned}$$

$$38. \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{(\cos x + 1) - 1}{1+\cos x} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+\cos x} dx \\ &= x - \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = x - \int dt = x - t + C = x - \tan \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

$$39. \frac{1}{x} = t \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{\frac{-1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}} dt = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}} \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = - \arcsin \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right) + C \\ &= - \arcsin \left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}} \right) + C = - \arcsin \left(\frac{\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= - \arcsin \left(\frac{2-x}{\sqrt{5}x} \right) + C\end{aligned}$$

$$40. \tan \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln |1+t| + C = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41. \int \sqrt{1 + \sin x} \, dx &= \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \, dx \\ &= \int \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} \, dx = \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

$$42. |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\int |x| dx = \begin{cases} \int x dx, & x \geq 0 \\ \int -x dx, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} x \cdot x + C & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} x(-x) + C & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} x|x| + C, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} x|x| + C, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} x|x| + C$$

$$\begin{aligned} 43. \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= dv, \quad \arcsin x = u \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2}, \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C \end{aligned}$$

$$44. \frac{1}{x} = t \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 1}} = -\int \frac{t}{\sqrt{1+t-t^2}} dt \\ &= -\int \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \frac{2\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} dt \\
&= \sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\frac{2}{x} - 1}{\sqrt{5}}\right) + C
\end{aligned}$$

45. $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}
\int \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t \sin t dt \quad [u = t, \sin t dt = dv \Rightarrow du = dt, v = -\cos t] \\
&= 2 \left(-t \cos t + \int \cos t dt \right) = -2t \cos t + 2 \sin t + C \\
&= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

46. $-\cos x = u \Rightarrow du = \sin x dx$

$$\int \sin x e^{-\cos x} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{-\cos x} + C$$

47. $u = x^2, dv = e^{2x} \sin x dx, du = 2x dx, v = \int e^{2x} \sin x dx$ olur.

$U = e^{2x}, dV = \sin x dx \Rightarrow dU = 2e^{2x} dx, V = -\cos x$ olacağından

$$\begin{aligned}
v &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \\
&= -e^{2x} \cos x + 2 \left[e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right] \\
&= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx \\
&= \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{2x} \sin x dx &= \frac{x^2}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \int x e^{2x} (2 \sin x - \cos x) dx \\
&= \frac{x^2}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} \int x e^{2x} \sin x dx + \frac{2}{5} \int x e^{2x} \cos x dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} I_1 + \frac{2}{5} I_2$$

bulunur.

$$\begin{aligned} I &= \int x e^{2x} \sin x \, dx = x \cdot \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{1}{5} \int e^{2x} (2 \sin x - \cos x) \, dx \\ &= \frac{x}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \int e^{2x} \sin x + \frac{1}{5} \int e^{2x} \cos x \, dx \\ &= \frac{x}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} e^{2x} \cdot (2 \sin x - \cos x) \\ &\quad + \frac{1}{5} (e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x \, dx) \\ &= \frac{e^{2x}}{5} [2x \sin x - x \cos x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \sin x] - \frac{2}{5} \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) \\ &= \frac{e^{2x}}{5} [2x \sin x - x \cos x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \sin x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x] \\ &= \frac{e^{2x}}{5} (2x \sin x - x \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x) \\ I_2 &= \int x e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx = e^{2x} \sin x - \frac{2}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) \\ &= \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} \cos x \, dx &= x \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) - \int \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) \, dx \\ &= \frac{x e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) - \frac{1}{5} \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \frac{e^{2x}}{5} \\ &\quad (\sin x + 2 \cos x) \end{aligned}$$

olur. O halde $I = \frac{x^2}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} I_1 + \frac{2}{5} I_2$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 e^{2x} \sin x \, dx = \frac{x^2}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{4}{5} \\ &\quad \left(\frac{e^{2x}}{5} \right) (2x \sin x - x \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x) \\ &\quad + \frac{2}{5} \frac{e^{2x}}{5} (x \sin x + 2x \cos x - \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x) \\ &= \frac{e^{2x}}{25} [10x^2 \sin x - 5x^2 \cos x - 8x \sin x + 4x \cos x + \frac{12}{5} \sin x - \frac{16}{5} \cos x \\ &\quad + 2x \sin x + 4x \cos x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x - \frac{8}{5} \cos x] \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{2x}}{25} [10x^2 \sin x - 5x^2 \cos x - 6x \sin x + 8x \cos x + \frac{4}{5} \sin x - \frac{22}{5} \cos x]$$

olur.

$$48. \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{3/2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{1/2}} - \int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

$$[x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt]$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cos^2 t}{1}} dt - \int \frac{1}{\frac{\cos^2 t}{\cos^3 t}} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt - \int \cos t dt$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| - \sin t + C = \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$= \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$49. x = 2t \text{ denirse } dx = 2 dt$$

$$\int \frac{dx}{x^4+16} = \int \frac{2 dt}{16t^4+16} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^4+1}$$

integrali elde edilir. Bu integral sayfa 262 de i) şıkında hesaplandı.

$$50. \tan x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ olur.}$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin^2 x + 1) - 1}{(\sin^2 x + 1)} dx = \int dx - \int \frac{1}{\sin^2 x + 1} dx$$

$$= x - \int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} dt = x - \int \frac{1}{2t^2+1} dt$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} t + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2} \tan x) + C$$

$$\begin{aligned}
 51. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2 \tan^2 x + b^2} dx \quad \left[\begin{array}{l} \tan x = u \\ du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{du}{a^2 u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \arctan\left(\frac{au}{b}\right) + C = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 53. \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(a \tan x + b)^2} dx \quad \left[\begin{array}{l} \tan x = u \\ du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{du}{(au + b)^2} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{au + b} + C = -\frac{1}{a(a \tan x + b)} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 53. \int \frac{dx}{1 + a \cos x} \quad (-1 < a < 1) \\
 \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\
 \int \frac{dx}{1 + a \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{t^2(1-a) + a + 1} dt \\
 &= \frac{2}{1-a} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{a+1}{1-a}} = \frac{2}{1-a} \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\frac{a+1}{1-a}}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot \tan \frac{x}{2}\right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 54. \int \sqrt{3-x^2} dx \\
 x = \sqrt{3} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos t dt \\
 \int \sqrt{3-x^2} dx &= \int \sqrt{3} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \sqrt{3} \cos t dt = 3 \int \cos^2 t dt = 3 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
 &= \frac{3}{2} t - \frac{3}{4} \sin 2t + C = \frac{3}{2} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C
 \end{aligned}$$

$$55. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{3-x^2}} dx = -\sqrt{3-x^2} + C$$

$$56. \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx$$

$$x = \sqrt{3} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx &= \int \frac{(\sqrt{3} \sqrt{1-\sin^2 t}) \sqrt{3} \cos t}{\sqrt{3} \sin t} dt = \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt \\ &= \sqrt{3} \int \frac{1}{\sin t} dt - \int \sqrt{3} \sin t dt \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin t} dt \text{ integralini hesaplayalım.}$$

$$\tan \frac{t}{2} = u \Rightarrow dt = \frac{2}{1+u^2} du, \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} du = \int \frac{2}{(u+1)^2} du = -\frac{2}{u+1} + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx = \sqrt{3} I_1 + \sqrt{3} \cos t + C = -\frac{2\sqrt{3}}{u+1} + \sqrt{3} \cos t + C$$

$$= -2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{1 + \tan \frac{t}{2}} + \sqrt{3} \cos \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= -2\sqrt{3} \frac{1}{1 + \tan \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} \right)} + \sqrt{3} \cos \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$57. \int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} dx = \int \frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{1/2}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} dx = \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x} \right) + C$$

$$58. x = \sqrt{5} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{5} (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \int \sqrt{5(\tan^2 t + 1)} \cdot \sqrt{5} (1 + \tan^2 t) dt = 5 \int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$= 5 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C$$

$$\begin{aligned} 59. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1) - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \\ &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx \\ &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60. u = \sqrt{2-x-x^2}, dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow du = \frac{-1-2x}{2\sqrt{2-x-x^2}} dx, v = -\frac{1}{x} \\ \int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \int \frac{1+2x}{2x\sqrt{2-x-x^2}} dx \\ = \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x-x^2}} \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right] \\ = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \arcsin \frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}}} \\ = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \arcsin \frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 61. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \\ \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{2}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1+2t-t^2} dt = \int \frac{2}{2-(t-1)^2} dt \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2-(t-1)^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-t+1} + \frac{B}{\sqrt{2}+t-1}$$

$$2 = \sqrt{2}(A+B) + (B-A) + t(A-B) \Rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2 dt}{1+2t-t^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}+1-t} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}-1+t} dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}+1-t| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}-1+t| + C \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}+1-\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}-1+\tan\frac{x}{2}\right| + C \end{aligned}$$

62. $\int \frac{\sin x dx}{5+4\sin x}$

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{5+4\sin x} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{(4\sin x + 5) - 5}{5+4\sin x} dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{5}{4} \int \frac{1}{5+4\sin x} dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{5}{4} \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5 + \frac{8t}{1+t^2}} dt = \frac{1}{4} x - \frac{5}{2} \int \frac{1}{5t^2 + 8t + 5} dt \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{5}{2} \int \frac{1}{5\left[\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}\right]} = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \arctan \frac{t + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + C \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{5}{6} \arctan \frac{5t+4}{3} + C \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{5}{6} \arctan \left(\frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3} \right) + C \end{aligned}$$

63. $\tan \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{b \cdot 2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{a+2bt-at^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{\frac{a^2+b^2}{a^2} - \left(t - \frac{b}{a}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{t - \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}{t - \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - \left(\frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a} \right)}{\tan \frac{x}{2} - \left(\frac{b - \sqrt{a^2+b^2}}{a} \right)} \right| + C
\end{aligned}$$

$$64. \tan x = t \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{a + \tan x}{1 - a \tan x} dx = \int \frac{a + t}{(1 - at)(1 + t^2)} dt$$

$$\left[\frac{a + t}{(1 - at)(1 + t^2)} = \frac{A}{1 - at} + \frac{Bt + C}{1 + t^2} \Rightarrow A = a, B = 1, C = 0 \right]$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{a}{1 - at} dt + \int \frac{t}{1 + t^2} dt = -\ln|1 - at| + \frac{1}{2} \ln|1 + t^2| + C \\
&= -\ln|1 - a \tan x| + \frac{1}{2} \ln|1 + \tan^2 x| + C
\end{aligned}$$

$$65. I = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2 - b^2 \tan^2 x} dx = \int \frac{dt}{a^2 - b^2 t^2} \quad \left[\begin{array}{l} \tan x = t \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{a^2 - b^2 t^2} = \frac{A}{(a - bt)} + \frac{B}{a + bt} \Rightarrow a(A + B) + t(Ab - Bb) = (b \neq 0)$$

$$\Rightarrow a \cdot 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}, B = \frac{1}{2a}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a - bt} dt + \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a + bt} dt = -\frac{1}{2a} \ln|a - bt| + \frac{1}{2a} \ln|a + bt| + C \\
&= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + bt}{a - bt} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + b \tan x}{a - b \tan x} \right| + C
\end{aligned}$$

$$66. \tan \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int dt = t + C = \tan \frac{x}{2} + C$$

$$67. \tan \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+3\cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{8+2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{2} \right) + C \end{aligned}$$

$$68. \tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dt = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sin x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{2t^2+2t+2} dt = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2\tan \frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

$$69. \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(\sin x + 1) - 1}{1+\sin x} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+\sin x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= x - \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} dt = x - 2 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt \\
 &= x + \frac{2}{t+1} + C = x + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C
 \end{aligned}$$

$$70. \tan \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)} dt = \int \frac{1+t^2}{t \cdot (t^2+2t+1)} dt \\
 &= \int \frac{1+t^2}{t(t+1)^2} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2} dt \\
 &= \ln |t| + 2 \frac{1}{t+1} + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C
 \end{aligned}$$

$$71. \tan x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx &= \int \frac{\tan x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{a^2 + b^2 t^2} dt \\
 &= \int \frac{t}{(1+t^2)(a^2 + b^2 t^2)} dt
 \end{aligned}$$

$$\frac{t}{(1+t^2)(a^2 + b^2 t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{a^2 + b^2 t^2}$$

$$t = t^3 (Ab^2 + C) + t^2 (D + Bb^2) + t (Aa^2 + C) + D + Ba^2$$

$$Ab^2 + C = 0$$

$$D + Bb^2 = 0$$

$$Aa^2 + C = 1$$

$$Ba^2 = Bb^2 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$D + Ba^2 = 0$$

$$A(a^2 - b^2) = 1, A = \frac{1}{a^2 - b^2}, C = \frac{b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{1}{a^2 - b^2} \int \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \int \frac{t}{a^2 + b^2 t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \ln(a^2 + b^2 t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln\left(\frac{1 + t^2}{a^2 + b^2 t^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln\left(\frac{1 + \tan^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}\right) + C$$

$$72. \quad x^n = \frac{a^n}{\cos t} \Rightarrow nx^{n-1} dx = a^n \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^{2n} - a^{2n}}} &= \int \frac{x^{n-1} dx}{x^n \sqrt{x^{2n} - a^{2n}}} = \frac{a^n}{n} \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{a^n}{\cos t} \sqrt{a^{2n}(1 - \cos^2 t)}} \cdot dt \\ &= \frac{1}{a^n} \int dt = \frac{1}{a^n} + C = \frac{1}{a^n} \arccos \frac{a^n}{x^n} + C \end{aligned}$$

$$73. \quad (x+1)e^{-x} = u \Rightarrow du = -xe^{-x} dx, \quad dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2} dx &= -\frac{(x+1)e^{-x}}{x} - \int e^{-x} dx = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x} + e^{-x} + C \\ &= -\frac{1}{x} e^{-x} + C \end{aligned}$$

$$74. \quad \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)} \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \dots + \frac{A_{p+1}}{x+p}$$

$$1 = A_1(x+1)(x+2)\dots(x+p) + A_2 x(x+2)(x+3)\dots(x+p)$$

$$\dots + A_{p-1} x(x+1)(x+2)\dots(x+p-2)(x+p) + A_p x(x+1)\dots(x+p-1)$$

$$x=0 \Rightarrow A_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \Rightarrow A_1 = p!$$

$$x=-1 \Rightarrow A_2 = (-1)(1) \cdot (2) \dots (p-1) \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{(p-1)!}$$

$$x=-2 \Rightarrow A_3 = (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \dots (p-2) \Rightarrow A_3 = 2(p-2)! = (-1)^2 2! (p-2)!$$

Bu şekilde devam edilerek

$$A_n = (-1)^{n-1} / (n-1)! (p-n+1)! \text{ olacağı görülür.}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)} &= A_1 \ln|x| + A_2 \ln|x+1| + \dots + A_p \ln|x+p| + C \\
 &= \ln \left| x^{A_1} (x+1)^{A_2} \dots (x+p)^{A_p} \right| + C \\
 &= \ln \left| x^{p!} (x+1)^{-(p-1)!} \dots (x+p)^{(-1)^{p-1}(p-1)!} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$75. I = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

$$\frac{x}{\cos x} = u, \quad \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = dv \text{ denirse}$$

$$du = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} \quad v = -\frac{1}{(x \sin x + \cos x)} \text{ olur.}$$

$$I = -\frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \int \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x (x \sin x + \cos x)} dx$$

$$= -\frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + C$$

$$76. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} (1+x^{1/2})^{1/2} dx$$

$$r = -\frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad n = 2$$

$$q \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{r+1}{p} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow 1+x^{1/2} = t^2$$

$$x = (t^2 - 1)^2, \quad dx = 4t(t^2 - 1) dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int (t^2 - 1)^{-1} (t^2)^{1/2} \cdot 4t(t^2 - 1) dt = \int 4t^2 dt = \frac{4}{3} t^3 + C \\
 &= \frac{4}{3} (1+x^{1/2})^{3/2} + C
 \end{aligned}$$

$$77. x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{3t^2}{1+t} dt = 3 \int (t-1) dt + 3 \int \frac{1}{1+t} dt = 3 \frac{(t-1)^2}{2} + 3 \ln|1+t| + C \\
 &= 3 \frac{(x^{1/3}-1)^2}{2} + 3 \ln|1+x^{1/3}| + C
 \end{aligned}$$

$$78. \int \frac{x}{1+x \tan x} dx = \int \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad \left[\begin{array}{l} u = \cos x + x \sin x \\ du = x \cos x dx \end{array} \right]$$

$$= \ln |\cos x + x \sin x| + C$$

$$79. I = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \int x^{-5/2} (1+x)^{1/2} dx$$

$$r = -\frac{5}{2}, \quad p = 1, \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow q \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{r+1}{p} = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z},$$

$$\frac{r+1}{p} + q = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^{-1} + 1 = t^2$$

$$x = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$I = \int (t^2 - 1)^2 t \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt = -2 \int t^2 dt = -\frac{2}{3} t^3 + C = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3/2} + C$$

$$80. u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2 (\ln x) \frac{1}{x} dx, \quad \frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = -\frac{1}{x} (\ln x)^2 + 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \left[\begin{array}{l} \ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{x^2} dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{x} (\ln x)^2 + 2 \left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right] = -\frac{1}{x} (\ln x)^2 - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$$

$$81. \sqrt{x} = t \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\int \cos \sqrt{x} dx = 2 \int t \cos t dt, \quad [t = u, \quad \cos t dt = dv, \quad dt = du, \quad \sin t = v]$$

$$= 2 t \sin t - 2 \int \sin t dt = 2 t \sin t + 2 \cos t + C$$

$$= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$82. \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$I = \int \frac{dx}{(1 + \sin x)^2} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2}{(1+t)^4} dt$$

$$\frac{1+t^2}{(1+t)^4} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3} + \frac{D}{(1+t)^4} \Rightarrow$$

$$1+t^2 = A(1+t)^3 + B(1+t)^2 + C(1+t) + D$$

$t = -1$ için $D = 2$ bulunur.

$$1+t^2 = At^3 + (3A+B)t^2 + (3A+2B+C)t + (A+B+C+2)$$

$$A = 0, B = 1, C = -2$$

$$I = 2 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt + 2 \int \frac{-2}{(1+t)^3} dt + 2 \int \frac{2}{(1+t)^4} dt$$

$$= -\frac{2}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2}{3(1+t)^3} + C$$

$$= \frac{-2}{1+\tan \frac{x}{2}} + \frac{2}{(1+\tan \frac{x}{2})^2} - \frac{4}{3(1+\tan \frac{x}{2})^3} + C$$

$$83. \sin x - 5 \cos x = a (\sin x + \cos x) + b (\cos x - \sin x)$$

$$= \sin x (a - b) + \cos x (a + b)$$

$$a - b = 1, a + b = -5 \Rightarrow 2a = -4, a = -2, b = -3$$

$$\int \frac{\sin x - 5 \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -2 \int dx - 3 \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= -2x - 3 \ln |\sin x + \cos x| + C$$

TANIM

$[a, b]$ aralığını

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

özellikliğini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğu sağlamak için a sayısını x_0 , b sayısını da x_n ile gösterelim.

$$P = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının bir **parçalanması** veya **bölüntüsü** denir.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a, b]$ nin P parçalanmasına karşılık gelen **kapalı alt aralıkları**,

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$$

aralıklarına da **açık alt aralıkları** adı verilir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının **boyu** veya **ölçüsü** denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** denir, $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde,

$$\|P\| = \max \{ \Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n \}$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirine eşit ise bu parçalanmaya **düzgün parçalanma** adı verilir.

TANIM

$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir merdiven fonksiyonu, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ olsun.

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \Delta x_k = s_1 (x_1 - x_0) + \dots + s_n (x_n - x_{n-1})$$

sayısına s merdiven fonksiyonunun a dan b ye kadar **integrali** denir, a ve b sayılarına da **integrasyon sınırları** adı verilir.

TANIM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a, b]$ aralığının

$$P = \{ x_0, x_1, \dots, x_n \}$$

parçalanması için

$$M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \},$$

$$m_k = \inf \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

olsun.

$$\bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

ve

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

toplamlarına, sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Üst Darboux Toplamı** ve **Alt Darboux Toplamı** adı verilir.

TANIM

$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann Toplamı** denir.

TEOREM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\bar{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon \quad (\text{Riemann Şartı})$$

kalacak şekilde $[a, b]$ nin bir P parçalanmasının var olmasıdır.

TEOREM

f ve g , $[a, b]$ de integrallenebilen fonksiyonlar olsunlar.

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise αf ve βg fonksiyonları da $[a, b]$ de integrallenebilir ve

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

olur.

(b) $f \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

(c) f^2 integrallenebilir.

(d) $f \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ integrallenebilir.

(e) $|f|$ integrallenebilir ve $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ dir.

(f) $f \cdot g$ integrallenebilir.

TEOREM

$[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

TEOREM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan [veya azalan] ise f fonksiyonu $[a, b]$ de Riemann anlamında integrallenebilirdir.

TEOREM (İntegral hesabın temel teoremi)

f , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dir.

TEOREM

f , $[a, b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(z) dz$$

ve

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

dir.

Şimdi f nin F ilkel fonksiyonunun özelliklerini veren iki teoremi ispat edelim.

TEOREM

$f, [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a, b]$ üzerinde

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

TEOREM

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve f de φ nin görüntü kümesi üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b (\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

dir.

TEOREM

f ve g , $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a, b) de türevli olsunlar.

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

dir.

TEOREM (Birinci Ortalama Değer Teoremi)

f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile fg bu aralıkta integrallenebilir olsun. g , $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[\inf, \sup]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = k \int_a^b g(x) dx$$

dır. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise $[a, b]$ aralığındaki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların $[-1, 3]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(d) $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$

(b) $f(x) = \lfloor -x \rfloor$

(e) $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

(c) $f(x) = 2 \lfloor x \rfloor$

(f) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

2. $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = a - b$ olduğunu gösteriniz.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.

4. $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt$ olsun. f fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

5. $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

6. (a) $\int_0^9 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt$ integralini hesaplayınız.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.

7. İntegral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$(a) \int_0^1 x \, dx$$

$$(b) \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$(c) \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$(d) \int_a^b e^x \, dx$$

$$(e) \int_0^{10} 2^x \, dx$$

8. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) \, dx = \frac{100}{3}$$

$$(b) \int_2^6 \sqrt{x-2} \, dx = \frac{16}{3}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 3x + 2} = \ln \frac{9}{8}$$

$$(d) \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$(e) \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{\pi}{16}$$

$$(f) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$(g) \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$(h) \int_0^1 \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \frac{2}{3}$$

$$(j) \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x \, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}$$

$$(k) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2$$

$$(l) \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{12a}$$

$$(m) \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} \, dx = \frac{a}{4} (\pi - 2)$$

$$(n) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}} = 2 - \ln 2$$

$$(o) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^4}{16}$$

$$(p) \int_1^3 \frac{dx}{x + x^2} = \ln \frac{3}{2}$$

$$(r) \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(s) \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$(t) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

$$(u) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \, dx = 4 - \pi$$

$$(v) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2+\pi}{4}$$

$$(y) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$(z) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = 1 - \cos 1$$

9. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $c \geq 0$ sayısını bulunuz.

$$(a) \int_0^c x(1-x)dx = 0$$

$$(b) \int_0^c |x(1-x)|dx = 0$$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ olduğuna göre $\int_0^2 f(x) dx$ integralini hesaplayınız.

11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

$$(b) \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} \quad (t > 0)$$

12. f ve g , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq g(x) \text{ ise } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ dir, gösteriniz.}$$

13. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \int_0^\pi f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$$

$$(c) \int_0^\pi x.f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

$$(d) \int_0^\pi f(\sin x) \cdot \cos x dx = 0$$

14. $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(1) \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx,$$

$$(2) \int_{-a}^a f(x^2)dx = 2 \int_0^a f(x^2)dx$$

$$(3) \int_{-a}^a x f(x^2)dx = 0$$

15. Sürekli f fonksiyonu çift fonksiyon olduğunda

$$\int_0^\pi f(\cos x)dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

dır, gösteriniz.

16. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının karşılarında yazılı aralıklardaki ortalama değerlerini hesaplayınız. Ortalama değer teoreminde sözü geçen x_0 noktasını bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$ $[0, 1]$

(b) $f(x) = a + b \cos x$ $[-\pi, \pi]$

(c) $f(x) = \sin^2 x$ $[0, \pi]$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0, 4]$

17. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun.

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) = 0$$

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

18. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \sin^n x$

(b) $f(x) = \cos^n x$

19. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n(n-1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right) = 2\sqrt{2} - 2$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}} + \sqrt[n]{e^n}}{n} = e - 1$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1} \quad (\lambda \geq -1)$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) = 2$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) = 1$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}} \right) = 2 \ln 2 - 1$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{\pi}{2}$$

20. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$(a) \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x| dx$$

ÇÖZÜMLER

$$1. (a) -1 \leq x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1, \quad 1 \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0, \quad 2 \leq x < 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \lfloor x \rfloor dx &= \int_{-1}^0 \lfloor x \rfloor dx + \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^3 \lfloor x \rfloor dx \\ &= \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx \\ &= -1 + 0 + 1 + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$(b) f(x) = \lfloor -x \rfloor$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = 0$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -1$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -2$$

$$2 < x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x < -2 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -3$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \lfloor -x \rfloor dx &= \int_{-1}^0 \lfloor -x \rfloor dx + \int_0^1 \lfloor -x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor -x \rfloor dx + \int_2^3 \lfloor -x \rfloor dx \\ &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -6 \end{aligned}$$

$$(c) (a) \text{ şıkkından}$$

$$\int_{-1}^3 2 \lfloor x \rfloor dx = 2 \int_{-1}^3 \lfloor x \rfloor dx = 2 \cdot 2 = 4$$

bulunur.

$$(d) f(x) = \lfloor 2x \rfloor$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 1$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 3$$

$$2 \leq x < \frac{5}{2} \Rightarrow 4 \leq 2x < 5 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 4$$

$$\frac{5}{2} \leq x < 3 \Rightarrow 5 \leq 2x < 6 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 5$$

$$\int_{-1}^3 \lfloor 2x \rfloor dx = \int_{-1}^{-1/2} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{-1/2}^0 \lfloor 2x \rfloor dx + \int_0^{1/2} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{1/2}^1 \lfloor 2x \rfloor dx$$

$$+ \int_1^{3/2} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{3/2}^2 \lfloor 2x \rfloor dx + \int_2^{5/2} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{5/2}^3 \lfloor 2x \rfloor dx$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$(e) f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -1$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq x + \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{2} < 3 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2$$

$$\frac{5}{2} \leq x < 3 \Rightarrow 3 \leq x + \frac{1}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 3$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^3 \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx \\
&\quad + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx + \int_{\frac{5}{2}}^3 \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^3 3 dx \\
&= (-1) \frac{1}{2} + 0 + 1.1 + 2.1 + 3. \frac{1}{2} = 4
\end{aligned}$$

(f) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ olduğundan, (d) gereğince

$$\int_{-1}^3 \left(\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) dx = \int_{-1}^3 \lfloor 2x \rfloor dx = 6 \text{ olur.}$$

2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & x \text{ tamsay ise} \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ olduğundan

$$\int_a^b (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) dx = \int_a^b (-1) dx = -x \Big|_a^b = a - b \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int_0^n \lfloor x \rfloor dx &= \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \dots + \int_{n-1}^n \lfloor x \rfloor dx \\
&= \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx + \dots + \int_{n-1}^n (n-1) dx \\
&= 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \\
&= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}$$

$$4. \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \int_0^x 0 dt = 0$$

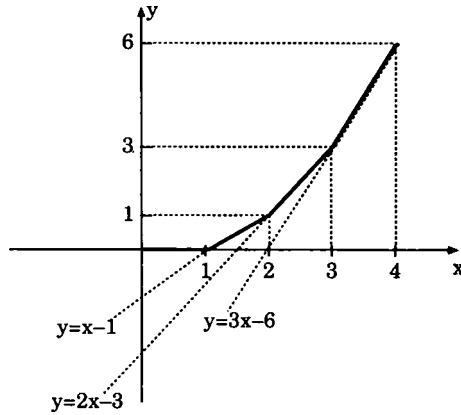
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^x 1 dt = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq t < x < 3 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \|t\| dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 dt + \int_2^x 2 dt$$

$$= 1 + 2x - 4 = 2x - 3$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow 0 \leq t < x < 4 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \|t\| dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 dt + \int_2^3 2 dt + \int_3^x 3 dt$$

$$x = 4 \Rightarrow f(x) = 6 \quad \quad \quad = 3x - 6$$



$$5. \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \leq x^2 < m+1 \Rightarrow \sqrt{m} \leq x < \sqrt{m+1}$$

$$m = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0, \quad m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$$

$$m = 1 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1, \quad m = 3 \Rightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3$$

$$\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_1^{\sqrt{2}} \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \lfloor x^2 \rfloor dx$$

$$= 0 \cdot (1 - 0) + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3})$$

$$= 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

$$6. \quad (a) \quad \lfloor \sqrt{t} \rfloor = m \quad (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow m \leq \sqrt{t} < (m+1)$$

$$\Rightarrow m^2 \leq t < (m+1)^2$$

$$m = 0 \Rightarrow 0 \leq t < 1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 0$$

$$m = 1 \Rightarrow 1 \leq t < 4 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 1$$

$$m = 2 \Rightarrow 4 \leq t < 9 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 2$$

$$\begin{aligned}\int_0^9 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt &= \int_0^1 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt + \int_1^4 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt + \int_4^9 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^4 1 dt + \int_4^9 2 dt \\ &= 0 \cdot (1-0) + (4-1) + 2(9-4) = 3 + 10 = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad \int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt &= \int_0^1 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt + \int_1^4 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt + \dots + \int_{(n-1)^2}^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_1^4 1 dt + \dots + \int_{(n-1)^2}^{n^2} (n-1) dt \\ &= 0 + 1 \cdot (4-1) + 2 \cdot (9-4) + \dots + (n-1) \cdot (n^2 - (n-1)^2) \\ &= 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1) \cdot (2n-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)(2k-1) = \sum_{k=1}^n 2k^2 - 3k + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}\end{aligned}$$

7. (a) $\int_0^1 x dx$

$[0, 1]$ aralığını n eşit parçaya bölelim, yani $\Delta x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ olsun.

$$f(x) = x$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & | & | & | \\ x_0=0 & x_1=1/n & x_2=2/n & & x_{k-1}=k-1/n & x_k=k/n & x_n=1 \end{array}$$

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \sup \left\{f(x) : \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\right\} = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

$$m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \inf \left\{f(x) : \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\right\} = f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k-1}{n}$$

$$\ddot{U}(f, p) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$A(f, p) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$= \frac{1}{n^2} (0 + 1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1).n}{2} = \frac{(n-1)}{2n}$$

$$\inf\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sup\left(\frac{n-1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\inf \ddot{U}(f, p) = \sup A(f, p) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

bulunur.

$$(b) \int_0^1 x^2 dx$$

$[0, 1]$ aralığını herbirinin uzunluğu $\Delta x_k = \frac{1-0}{n}$ olan n tane alt aralığa bölelim.

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$M_k = \sup \{f(x) : \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\} = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$$

$$m_k = \inf \{f(x) : \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\} = f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{(k-1)^2}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{U}(f, P) &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(f, p) &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} (0 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1).n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\sup A(f, P) = \inf \ddot{U}(f, P) = \frac{1}{3} \text{ olacağından } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

bulunur.

$$(e) \int_0^{10} 2^x dx$$

$[0, 10]$ aralığını herbirinin uzunluğu $\Delta x_k = \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n}$ olan n eşit par-

çaya bölelim.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{10}{n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{10}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{(n-1) \cdot 10}{n}, \quad x_n = 10 \quad \text{olur.}$$

$$M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \} = f\left(k \cdot \frac{10}{n}\right) = 2^{10 \frac{k}{n}}$$

$$m_k = \inf \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \} = f\left((k-1) \frac{10}{n}\right) = 2^{10 \frac{k-1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(f, p) &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 2^{10 \frac{k}{n}} \cdot \frac{10}{n} \\ &= \frac{10}{n} \left(2^{10/n} + 2^{20/n} + \dots + 2^{(n-1)10/n} + 2^{10} \right) \\ &= \frac{10}{n} \left[\left(2^{10/n} \right) + \left(2^{10/n} \right)^2 + \dots + \left(2^{10/n} \right)^{n-1} + \left(2^{10/n} \right)^n \right] \\ &= \frac{10}{n} \cdot 2^{10/n} \left(1 + 2^{10/n} + \dots + \left(2^{10/n} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{10}{n} 2^{10/n} \cdot \left(\frac{1 - \left(2^{10/n} \right)^n}{1 - 2^{10/n}} \right) = \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10/n}}{1 - 2^{10/n}} \cdot (1 - 2^{10}) \end{aligned}$$

$$\frac{10}{n} = x \quad \text{denirse} \quad (n \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \inf \bar{U}(f, p) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2^x}{1 - 2^x} (1 - 2^{10}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + x 2^x \ln 2}{-2^x \ln 2} (1 - 2^{10}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \ln 2}{-\ln 2} (1 - 2^{10}) = \frac{(2^{10} - 1)}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(f, P) &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 2^{10(k-1)/n} \frac{10}{n} \\ &= \frac{10}{n} (1 + 2^{10/n} + 2^{20/n} + \dots + 2^{10(n-1)/n}) \\ &= \frac{10}{n} (1 + 2^{10/n} + (2^{10/n})^2 + \dots + (2^{10/n})^{n-1}) \\ &= \frac{10}{n} \frac{(1 - (2^{10/n})^n)}{1 - 2^{10/n}} \end{aligned}$$

$$\frac{10}{n} = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - 2^{10})}{1 - 2^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{10}}{-2^x \ln 2} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$$

$$\inf \bar{U}(f, p) = \sup A(f, p) = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2} \Rightarrow \int_0^{10} 2^x dx = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$$

$$8. \quad (a) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^8 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3}$$

$$(b) \int_2^6 \sqrt{x-2} dx = \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} \Big|_2^6 = \frac{2}{3} (2^2)^{3/2} - 0 = \frac{16}{3}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \ln \frac{9}{8}$$

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A + B = 1, \quad 2A + B = 0 \Rightarrow A = -1, \quad B = 2$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx = - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$= - \ln|1+x| \Big|_0^1 + 2 \ln|x+2| \Big|_0^1$$

$$= - \ln 2 + 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = \ln 9 - \ln 8 = \ln \frac{9}{8}$$

$$(d) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx - \int_3^4 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-2| \Big|_3^4 - \ln|x-1| \Big|_3^4$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = \ln \frac{4}{3}$$

$$(e) \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4)^2+1} dx \quad [x^2 = u]$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{4} \arctan u \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$$

$$(f) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$(g) \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int_0^1 \frac{3 du}{3\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \Big|_0^1 \quad [x-2=3u]$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(h) \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}} dy = \frac{1}{3} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3y^2}{\sqrt{(y^3)^2+4}} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+4}} = \frac{1}{3} \ln |u + \sqrt{u^2+4}| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \ln |1 + \sqrt{5}| - \frac{1}{3} \ln |2| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$$

$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int_0^1 (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \quad [\cos x = u]$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(i) \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(1 - \sin^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2} dx \quad [\sin^2 x = u]$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)^2 + u^2} = \int_0^{1/2} \frac{du}{1 - 2u + u^2 + u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \arctan \left(\frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \arctan(2u - 1) \bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \arctan 0 - \arctan(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(j) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln u \bigg|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \quad [\ln x = u]$$

$$(k) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u} = -\ln |u| \bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$(l) \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{12a}$$

$$\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \bigg|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{a} \arctan 1$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$(m) \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = \frac{a}{4} (\pi - 2)$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{a \sin^2 t}}{\sqrt{a - a \sin^2 t}} \cdot 2a \sin t \cdot \cos t dt \quad [x = a \sin^2 t]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a \cdot \sin^2 t dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = a \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{4} (\pi - 2)$$

$$(n) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}} = 2 - \ln 2$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}} &= \int_1^3 \frac{udu}{1+u} = \int_1^3 \frac{u+1-1}{u+1} du = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \quad [2x+1=u^2] \\ &= u - \ln|1+u| \Big|_1^3 = 3 - \ln 4 - 1 + \ln 2 = 2 + \ln \frac{1}{2} = 2 - \ln 2 \end{aligned}$$

$$(o) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{16} a^4$$

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \quad [x = a \sin t] \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} (2 \sin t \cos t)^2 dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin 2t)^2 dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{4} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{16} a^4 \end{aligned}$$

$$(p) \int_1^3 \frac{dx}{x+x^2} = \ln \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{x+x^2} &= \int_1^3 \frac{1}{x} dx - \int_1^3 \frac{1}{x+1} dx = \ln|x| \Big|_1^3 - \ln|x+1| \Big|_1^3 \\ &= \ln 3 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 2 = \ln 3 + \ln \frac{1}{2} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(r) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2 t dt \quad [x = 2 \sin t] \\ &= 4 \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/6} = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$(s) \int \frac{dx}{3+2\cos x} = 2 \int \frac{1/(1+t^2)}{3 + \frac{2-2t^2}{1+t^2}} dt \quad \left[\tan \frac{x}{2} = t \right]$$

$$= 2 \int \frac{1}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{t}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} \right) \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \text{ elde edilir.}$$

$$(t) \tan x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{dt}{1+t^2} \text{ olacağından}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} &= \int \frac{1/(1+t^2)}{1 + \frac{a^2 t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{1+(a^2+1)t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \arctan(\sqrt{1+a^2} t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \arctan(\sqrt{1+a^2} \tan x) \\ &\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$(u) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = 4 - \pi \quad [e^x - 1 = u^2]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \int_0^2 \frac{2u \cdot u}{u^2 + 4} du = 2 \int_0^2 \frac{(u^2 + 4 - 4)}{u^2 + 4} du \\ &= 2 \int_0^2 du - 8 \int_0^2 \frac{1}{u^2 + 4} du = 4 - 8 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} \Big|_0^2 \\ &= 4 - 4 \arctan 1 = 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 - \pi \end{aligned}$$

$$(v) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2+\pi}{4}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{ integralinde } u = \frac{1}{1+x^2}, dv = dx \text{ alınıp kısmi integrasyon}$$

yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)} &= \frac{x}{1+x^2} \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \\
 &= 1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx - 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\
 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\arctan x \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\arctan 1 - \arctan(-1)) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2+\pi}{4} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (y) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \\
 x &= \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, \quad x=1 \Rightarrow t=0, \quad x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \\
 \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\pi/3} \frac{(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t} dt = \tan t - t \Big|_0^{\pi/3} = \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

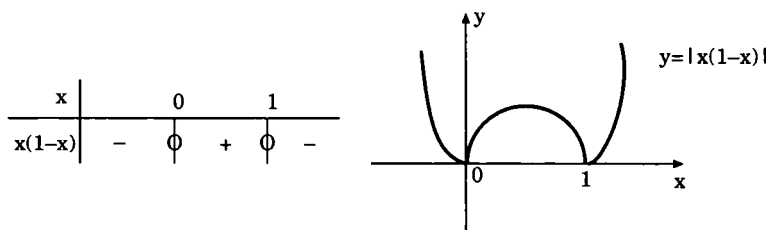
$$\begin{aligned}
 (z) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= 1 - \cos 1 \\
 \ln x = t \Rightarrow x &= e^t \Rightarrow dx = e^t dt, \quad x=e \Rightarrow t=1, \quad x=1 \Rightarrow t=0 \\
 \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= \int_0^1 \sin t dt = -\cos t \Big|_0^1 = -\cos 1 + 1 = 1 - \cos 1
 \end{aligned}$$

$$9. \quad a) \int_0^c x(1-x) dx = 0$$

$$\int_0^c x(1-x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^c = \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3} = 0 \Rightarrow 3c^2 - 2c^3 = 0$$

$$c^2 (3 - 2c) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ ve } c = \frac{3}{2}$$

$$b) \int_0^c |x(1-x)| dx = 0$$



$$i) \quad c = 0 \text{ ise } \int_0^0 |x(1-x)| dx = 0 \text{ dir.}$$

$$ii) \quad c > 0 \text{ ise } |x(1-x)| \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$\int_0^c |x(1-x)| dx > 0 \text{ dir.}$$

$$\text{O halde } \int_0^c |x(1-x)| dx = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$10. \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2-x dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right) = \frac{5}{6}$$

$$11. a) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n (-dt) = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt, \quad [x-1=t]$$

$$= \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

$$b) \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/x}^1 \frac{-1/u^2}{1+\frac{1}{u^2}} du = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$[t = \frac{1}{u} \Rightarrow t = x \Rightarrow u = \frac{1}{x}, \quad t = 1 \Rightarrow u = 1, \quad dt = -\frac{1}{u^2} du]$$

12. $f(x) - g(x) \leq 0$ dir. $f - g$ integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - g(x_k)) \Delta x_k = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ dir.}$$

$f - g \leq 0$ olduğundan toplamdaki her bir $(f(x_k) - g(x_k))$ terimi negatif veya sıfırdır. Dolayısı ile

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

gerçeklenir.

13. a) $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx &= \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^0 f(\sin(\pi - t))(-dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt \end{aligned}$$

b) $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ olur.

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt$$

c) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$ integralinde $x = \pi - t$ değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))(-dt) \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt \Rightarrow 2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

$$d) \int_0^{\pi} f(\sin x) \cdot \cos x dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x dx &= \int_{\pi}^0 f(\sin(\pi - t)) \cos(\pi - t) (-dt) \quad [x = \pi - t] \\ &= - \int_0^{\pi} f(\sin t) \cos t dt \Rightarrow 2 \int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. 1) \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(-t) (-dt) + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx \quad [x = -t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{-a}^a f(x^2) dx &= \int_{-a}^0 f(x^2) dx + \int_0^a f(x^2) dx = \int_a^0 f(t^2) (-dt) + \int_0^a f(x^2) dx \\ &= \int_0^a f(t^2) dt + \int_0^a f(x^2) dx = 2 \int_0^a f(t^2) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_{-a}^a x f(x^2) dx &= 0 \\ \int_{-a}^a x f(x^2) dx &= \int_{-a}^0 x f(x^2) dx + \int_0^a x f(x^2) dx \\ &= \int_a^0 -t f(t^2) (-dt) + \int_0^a x f(x^2) dx \quad [x = -t] \\ &= - \int_0^a t f(t^2) dt + \int_0^a x f(x^2) dx = 0 \end{aligned}$$

15. f çift fonksiyon olduğundan $f(\cos x) = f(-\cos x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\cos x) dx &= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^0 f(\cos(\pi - t)) (-dt) \quad [x = \pi - t] \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} f(-\cos t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} f(\cos t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

16. a) $f(x) = x^2 \quad [0, 1]$

$$k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0, 1]$$

b) $f(x) = a + b \cos x \quad [-\pi, \pi]$

$$k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} (x + b \cos x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(ax + b \sin x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} (a\pi + a\pi) = a$$

$$a + b \cos x = a \Rightarrow b \cos x = 0 \quad (b \neq 0)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

c) $f(x) = \sin^2 x \quad [0, \pi]$

$$k = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_0 = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$$

d) $f(x) = \sqrt{x} \quad [0, 4]$

$$k = \frac{1}{4-0} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{16}{9}$$

17. $f(x) \geq 0$ olduğundan $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ olacağı bilinmektedir. $\int_a^b f(x) dx = 0$ fakat en az bir $p \in (a, b)$ için $f(p) > 0$ olsun. f sürekli olduğundan,

işaret koruma özelliğinden, öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki

$\forall x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $f(x) > 0$ olur. Bu durumda $\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x) dx > 0$ olur ki

bu da $\int_a^b f(x) dx = 0$ olmasıyla çelişir. O halde her $x \in [a, b]$ için

$f(x) = 0$ dır.

$$18. I_n = \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x - (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$$

$$\Rightarrow n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$$

formülünde n 'e göre her uygulamasında $\sin x$ 'in üssü 2 kadar eksilir. Bu durumda n nin tek olması halinde I_n integrali

$$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x ,$$

n nin çift olması halinde

$$I_0 = \int dx = x \text{ elde edilir.}$$

$\sin^n x$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında integrali alınır, $-\sin^{n-1} x \cos x$ ifadesi alt ve üst sınırdan sıfır olacağından

$$n \text{ tek ise; } n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$(n-2) I_{n-2} = (n-3) I_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$5 I_5 = 4 I_3$$

$$3 I_3 = 2 I_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 2$$

$$n \text{ çift ise; } n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$(n-2) I_{n-2} = (n-3) I_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$4 I_4 = 3 I_2$$

$$2 I_2 = I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Bu ifadeler taraf tarafa çarpılırsa

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-2)(n-3)\dots 4.2}{n(n-2)\dots 5.3} & , n \text{ tek ise} \\ \frac{(n-1)(n-3)\dots 5.3.1}{n(n-2)\dots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2} & , n \text{ çift ise} \end{cases}$$

19. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right) = 2\sqrt{2} - 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$= \left. 2(1+x)^{1/2} \right|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} \right) = e - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$$

$$= \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n}}{n} &= \frac{2}{\pi} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n}}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{\cos x}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\lambda} + 2^{\lambda} + 3^{\lambda} + \dots + n^{\lambda}}{n^{\lambda+1}} &= \frac{1}{\lambda+1} \quad (\lambda \geq 0) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\lambda} + 2^{\lambda} + 3^{\lambda} + \dots + n^{\lambda}}{n^{\lambda+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^{\lambda}}{n^{\lambda}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\lambda} \\
 &= \int_0^1 x^{\lambda} dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) &= 2 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{n+3(k-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+3\frac{k}{n}}} \\
 &= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{1+x} \Big|_0^3 = 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) &= 1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}} \right) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - \left(x - \ln(1+x) \right) \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^1 \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$20. a) \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

x		0		1		2	
$x^3 - 3x^2 + 2x$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $\frac{x}{\cos^3 x}$ $\begin{array}{c} | \quad -\pi \quad \quad -\pi/2 \quad \quad \pi/2 \quad \quad \pi \\ | \quad - \quad \quad \circ \quad + \quad \quad \circ \quad - \quad | \end{array}$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x| dx &= - \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos^3 x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{-\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= - \int_0^{-1} (1 - u^2) du + \int_{-1}^1 (1 - u^2) du - \int_1^0 (1 - u^2) du \\ &= \int_{-1}^0 (1 - u^2) du + \int_{-1}^1 (1 - u^2) du + \int_0^1 (1 - u^2) du = 2 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \\ &= 2 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n \|t\|^2 dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \|t\|^2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

(c) $\int_0^x \|t\|^2 dt = 2(x-1)$ eşitliğini sağlayan pozitif x sayılarını bulunuz.
- İkinci dereceden öyle bir p polinomu bulunuz ki $p(0) = p(1) = 0$ ve

$$\int_0^1 p(x) dx = 1 \text{ olsun.}$$
- $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx$ olduğunu gösteriniz.

4. f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $k \neq 0$ için

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

5. f sürekli bir tek fonksiyon olduğunda $\int_0^\pi f(\cos x) dx = 0$ dır, gösteriniz.

6. $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ integralini hesaplayınız.

7. Sürekli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\int_a^b f(x) dx = 0$ ise fonksiyonu (a, b) aralığının en az bir c noktasında sıfır değerini alır; gösteriniz.

8. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos^3 x + b \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{b \cos^3 x + a \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx$ integrallerini hesaplayınız.

9. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

10. f fonksiyonu sürekli ve tersi bulunan bir fonksiyon olsun.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\ln x} f(t) dt = 1 \text{ ise } f(x) \text{ nedir?}$$

11. $I = \int_{-2}^{-1/2} \left(\frac{2+x}{1-x} \right)^{1/2} dx$ integralini hesaplayınız.

12. $x = \sin u$ değişken değıştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak,

$$\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

13. $u = 1 - x$ değıştirmesini yaparak, $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak,

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $0 \leq t < 1 \Rightarrow \lfloor t \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 0$

$$1 \leq t < 2 \Rightarrow \lfloor t \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 1$$

$$2 \leq t < 3 \Rightarrow \lfloor t \rfloor = 2 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 4$$

$\vdots$

$$n-1 \leq t < n \Rightarrow \lfloor t \rfloor = n-1 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = (n-1)^2$$

$$\int_0^n \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^1 \lfloor t \rfloor^2 dt + \int_1^2 \lfloor t \rfloor^2 dt + \dots + \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor^2 dt$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + \dots + (n-1)^2 \cdot 1$$

$$= 1 + (2)^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n \cdot (n-1)(2n-1)}{6}$$

$$b) \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq t < x < 1$$

$$f(x) = \int_0^x [t]^2 dt = \int_0^x 0 dt = 0$$

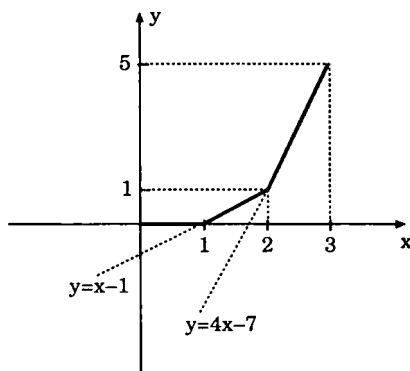
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq t < x < 2$$

$$f(x) = \int_0^x [t]^2 dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^x t dt = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq t < x < 3$$

$$f(x) = \int_0^x [t]^2 dt = \int_0^1 0 dt + \int_1^2 t dt + \int_2^x t^2 dt \\ = 1 + 4x - 8 = 4x - 7$$

$$x = 3 \Rightarrow f(x) = \int_0^3 [t]^2 dt = 5$$



$$c) \quad \int_0^x [t]^2 dt = 2(x-1)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq t < x < 1 \Rightarrow [t] = 0 \Rightarrow [t]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x [t]^2 dx = 2(x-1) \Rightarrow 0 = 2(x-1) \Rightarrow x = 1 \quad x \in [0, 1]$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq t < x < 2 \Rightarrow 0 \leq t < 1 \Rightarrow [t]^2 = 0$$

$$1 \leq t < 2 \Rightarrow [t]^2 = 1$$

$$\int_0^x [t]^2 dt = \int_0^1 [t]^2 dt + \int_1^x [t]^2 dt = 0 + 1(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-1) = 2(x-1) \Rightarrow x = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq t < x < 3$$

$$\int_0^x [t]^2 dt = \int_0^1 [t]^2 dt + \int_1^2 [t]^2 dt + \int_2^x [t]^2 dt$$

$$= 0 + 1 + 4(x-2) = 2(x-1) \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

2. $P(x) = ax^2 + bx + c$ $P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$P(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 6 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -6 \\ b = 6 \end{matrix} \Rightarrow P(x) = -6x^2 + 6x$$

3. $t = \frac{x-a}{b-a}$ değişken değiştirilmesi yapıldığında

$$dt = \frac{dx}{b-a}, \quad x = a \Rightarrow t = 0, \quad x = b \Rightarrow t = 1 \text{ olacağından}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^1 f(a + (b-a)t) \cdot (b-a) dt = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t) dt.$$

4. $x = \frac{t}{k}$ denirse $dx = \frac{dt}{k}$, $x = a \Rightarrow t = ka$, $x = b \Rightarrow t = kb$ olacağından

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{t}{k}\right) dt = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

5. $x = \pi - t$ denirse $dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \pi$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\cos x) dx &= \int_\pi^0 f(\cos(\pi - t)) (-dt) = \int_0^\pi f(-\cos t) dt = \int_0^\pi -f(\cos t) dt \\ &= - \int_0^\pi f(\cos x) dx \Rightarrow 2 \int_0^\pi f(\cos x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^\pi f(\cos x) dx = 0 \end{aligned}$$

6. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} = \cos(x) [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$= -\cos x [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -\cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

olur ki bu f fonksiyonunun tek olduğunu gösterir.

f tek ise $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ olduğundan $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$ olur.

7. İntegral hesabın birinci ortalama değer teoremi gereğince, f , $[a, b]$ de sürekli ise $[\inf f, \sup f]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$$

olur. f sürekli olduğunda, $\inf f$ ile $\sup f$ arasındaki her değeri en az bir defa alacağından $k = f(c)$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ vardır. Bu durumda

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow (b-a)f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

$$8. I = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos^3 x + b \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dt, \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{b \cos^3 x + a \sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt \quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^3 t + b \cos^3 t}{\sin t + \cos t} dt = J \Rightarrow I = J \text{ bulunur.}$$

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{a(\cos^3 x + \sin^3 x) + b(\cos^3 x + \sin^3 x)}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} \frac{((\cos x + \sin x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x))}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x \cos x) dx = (a+b) \left[x + \frac{\cos^2 x}{2} \right] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= (a+b) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(a+b)}{2} (\pi - 1) \Rightarrow I = \frac{(a+b)}{4} (\pi - 1)$$

9. x_0 , $[a, b]$ de herhangi bir nokta olsun. f integrallenebilir olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ öyleki $|x - x_0| < \delta$ bağıntısını sağlayan her x için

$$\int_{x_0}^x |f(t)| dt < \varepsilon \text{ olur.}$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt < \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 , $[a, b]$ de seçilmiş keyfi bir nokta olduğundan F fonksiyonu $[a, b]$ de süreklidir.

10. $\frac{d}{dx} \int_0^{\ln x} f(t) dt = 1 \Rightarrow f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow f(\ln x) = x \Rightarrow f(x) = e^x$

olur.

11. $\frac{2+x}{1-x} = t^2$ denirse $x = \frac{t^2-2}{t^2+1}$ ve $dx = \frac{6tdt}{(1+t^2)^2}$ olur.

$$\begin{aligned} I &= \int t \cdot \frac{6tdt}{(1+t^2)^2} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} dt = 6 \left[\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{-1}{(1+t^2)^2} dt \right] \\ &= 6 \left[\arctan t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2} \arctan t \right] = 3 \arctan t - \frac{3t}{1+t^2} \\ &= 3 \arctan \sqrt{\frac{2+x}{1-x}} - (1-x) \sqrt{\frac{2+x}{1-x}} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre;

$$I = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} dx = 3 \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

12. $x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u \, du$, $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \Rightarrow u = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^m u (1-\sin^2 u)^n \cdot \cos u \, du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^m u \cdot \cos^{2n+1} u \, du \end{aligned}$$

bulunur.

$I = \int_0^1 x^3 (1-x^2)^{10} dx$ integralinde $x = \sin u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 u \cos^{20} u \cdot \cos u \, du = \int_0^{\pi/2} \sin^3 u \cos^{21} u \sin u \, du \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 u) \cos^{21} u \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^{21} u \sin u \, du - \int_0^{\pi/2} \cos^{23} u \sin u \, du \\ &= -\frac{1}{22} \cos^{22} u \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{24} \cos^{24} u \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{22} - \frac{1}{24} = \frac{1}{264} \end{aligned}$$

13. $x = 1 - u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa $dx = -du$ olur.

$x = 0$ için $u = 1$ ve $x = 1$ için $u = 0$ olacağından

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_1^0 u^m (1-u)^n (-du)$$

olur. Belirli integrasyon değişkeninden bağımsız olduğundan

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1-x)^{10} dx &= \int_0^1 x^{10} (1-x)^2 dx = \int_0^1 x^{10} - 2x^{11} + x^{12} dx \\ &= \frac{x^{11}}{11} - \frac{1}{6} x^{12} + \frac{x^{13}}{13} \Big|_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} = -\frac{20}{143} \end{aligned}$$

ALAN HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisi, x - eksenini, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

dir.

2. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

olur.

3. $r = r(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

dir.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile Ox - eksenini tarafından sınırlanan dülemsel bölgelerin alanını bulunuz.

(a) $y = 2 + x - x^2$

(b) $y = 4x - x^2$

(c) $y = x(x - 1)(x - 2)$

2. $y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ve x - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. $y = \lfloor x \rfloor$, $x = -1$, $x = 2$ ve x - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{x^2}{4}$ ile $y = \frac{x}{2} + 2$

(b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

(c) $x = y^3 - 4y$ ile $x = 4 - y^2$

(d) $y = x^3 - 12x$ ve $y = x^2$

(e) $y = x^3$ ile $y = x^2$

(f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$

(g) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$

(h) $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$

(i) $y = \cos x$, $y = x + 1$ ve $y = 0$

(i) $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$

(j) $y = x^4 - 2x^2$ ile $y = 2x^2$

(k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

5. $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

6. $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{5\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. $y = 4 - |x|$ eğrisi, x - eksen ve $x = -2$, $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı $A(k)$ olsun. $\sum_{k=1}^n A(k)$ ifadesini bulunuz. n yeter derece büyük seçildiğinde bu alanların toplamı hangi sayıya yaklaşır?

10. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = a^2$ ve $x^2 + y^2 = b^2$ çemberleri ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi çiziliyor. Bu elipsin çemberler arasındaki bölgeyi, alanları oranı $\frac{a}{b}$ olacak şekilde böldüğünü gösteriniz.

11. $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 2)$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve x - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
12. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ absisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
13. $y = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ eğrisi, $y = x$ doğrusu ile $x = 0$, $x = 6$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
14. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.
- (a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)
 - (b) $r = a \cos 2\varphi$ (dört yapraklı gül)
 - (c) $r = 4 + 2 \cos \varphi$ (limaçon)
 - (d) $r = a(1 - \sin \varphi)$ (kardiyoid)
 - (e) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)
15. $r = \sqrt{|\cos \varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
16. $r = 1 + 2 \sin \varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.
17. $r = \varphi$ Archimedes spiralinin $[0, 2\pi]$ aralığındaki parçası ile kutup eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
18. $r = a\varphi$ Arşimet spiralinin birinci ve ikinci sarmalı arasındaki bölgenin alanını bulunuz.
19. $r = 2 \sin \varphi$ ve $r = 2 \cos \varphi$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
20. $r = 2a \cos 3\varphi$ eğrisinin içinde $r = a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

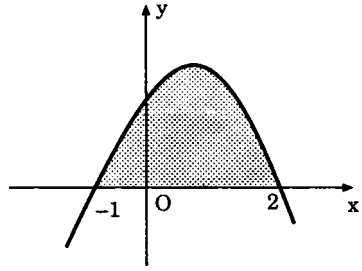
21. $r = 2a \cos 2\varphi$ gülünün içinde, $r = \sqrt{2} a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.
22. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ lemniskatlarının her ikisinin de içinde bulunan ortak bölgenin alanını bulunuz.
23. $r = 2(1 - \cos \varphi)$ kordiyoidinin dışında $r = 2$ çemberin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.
24. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.
25. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
26. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
27. $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = 2 + x - x^2$

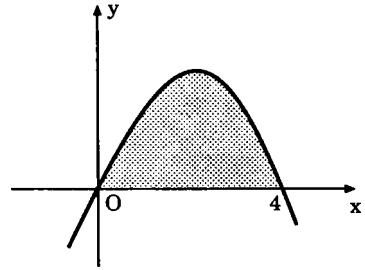
$$y = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ve } x = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 |2 + x - x^2| dx \\ &= \int_{-1}^2 2 + x - x^2 dx \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} br^2 \end{aligned}$$



b) $y = 4x - x^2$

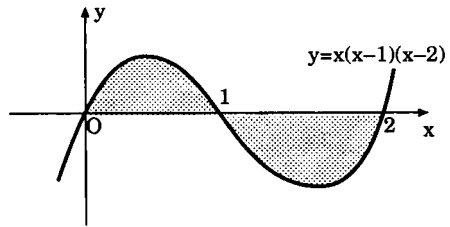
$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 |f(x)| dx \\ &= \int_0^4 (4x - x^2) dx \\ &= 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 \\ &= \frac{32}{3} br^2 \end{aligned}$$



c) $y = x(x-1)(x-2)$

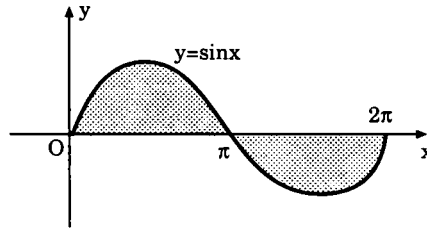
$$y = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

$$A = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x(x-1)(x-2) dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx \\ &= \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx - \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} br^2 \end{aligned}$$

2.



$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \text{ br}^2$$

$$3. \quad A = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 ||x|| dx = - \int_{-1}^0 ||x|| dx + \int_0^1 ||x|| dx + \int_1^2 ||x|| dx \\ &= - \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 dx = 2 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

$$4. \quad a) \quad y = \frac{x^2}{4} \text{ ile } y = \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2$$

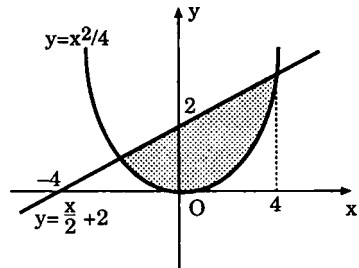
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 1 = \mp 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ ve } x_2 = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^4 \\ &= 9 \text{ br}^2 \end{aligned}$$



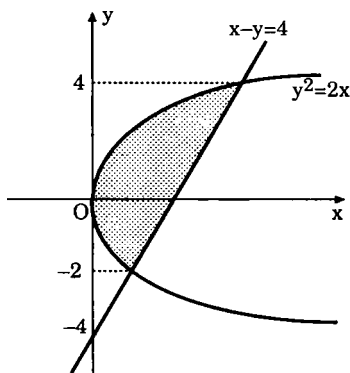
b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

$$\frac{y^2}{2} = 4 + y \Rightarrow$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow$$

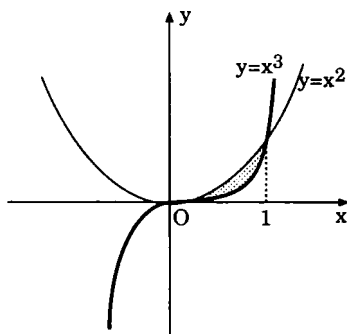
$$y = 4 \text{ ve } y = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |u(y) - v(y)| dy = \int_{-2}^4 y + 4 - \frac{y^2}{2} dy \\ &= \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \Big|_{-2}^4 = 18 \text{ br}^2 \end{aligned}$$



e) $y = x^3$ ile $y = x^2$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \text{ br}^2 \end{aligned}$$



f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$

$$\Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x$$

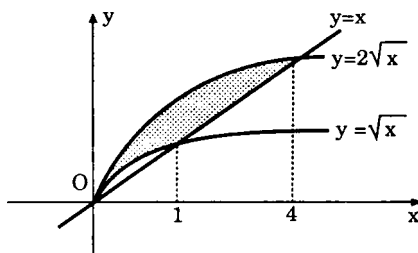
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 1$$

$$x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 4$$

$$A = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x) dx$$

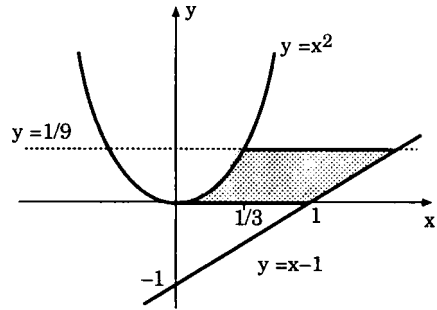
$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{5}{2} \text{ br}^2$$



h) $y = x^2$, $y = x - 1$,

$y = \frac{1}{9}$ ve $y = 0$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{9}} (y+1-\sqrt{y}) dy \\ &= \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{2}{3}y^{3/2} \Big|_0^{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{5}{34} br^2 \end{aligned}$$



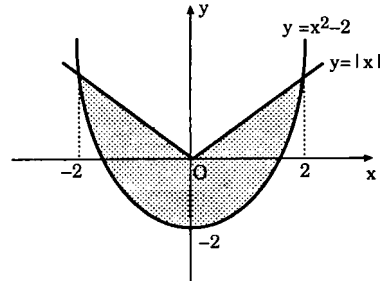
k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Bölge simetrik olduğundan

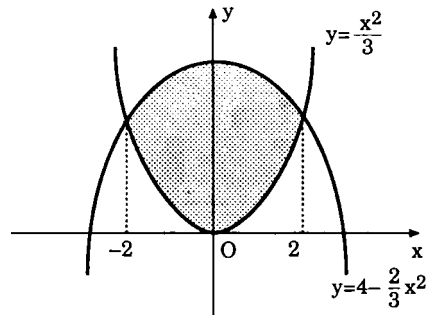
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^2 [|x| - (x^2 - 2)] dx \\ &= 2 \int_0^2 (x - x^2 + 2) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{20}{3} br^2 \end{aligned}$$



5. $\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2}{3}x^2$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} dx \\ &= 2 \int_0^2 4 - x^2 dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} br^2 \end{aligned}$$

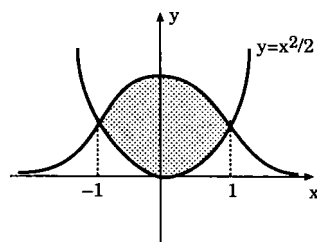


$$6. \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + x^4 = 2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

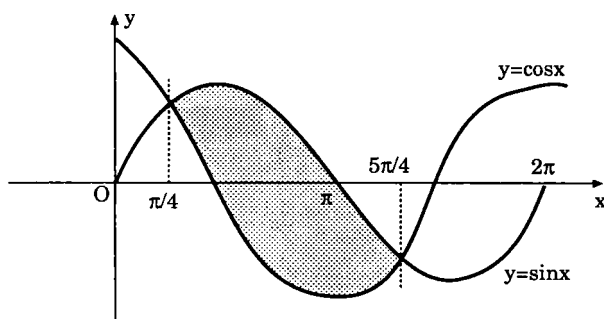
$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \arctan x - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \text{ br}^2$$



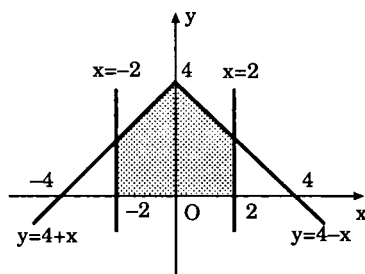
7.



$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ br}^2$$

$$8. \quad A = 2 \int_0^2 (4-x) dx = 2 \left(4x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = 12 \text{ br}^2$$

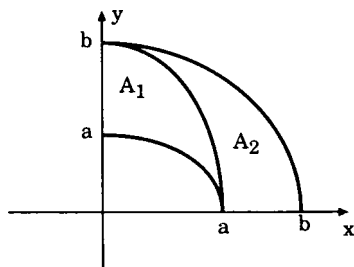


$$\begin{aligned}
 9. \quad A(k) &= \int_0^1 (x^k - x^{k+1}) dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 \sum_{k=1}^n A(k) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

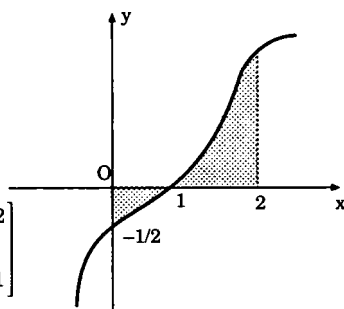
$$10. \quad A_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a}{4} (b-a)$$

$$A_2 = \frac{\pi b^2}{4} - \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi b}{4} (b-a)$$

$$A_1 : A_2 = \left[\frac{\pi a}{4} (b-a) \right] : \left[\frac{\pi b}{4} (b-a) \right] = \frac{a}{b}$$



$$\begin{aligned}
 11. \quad A &= \int_0^2 |f(x)| dx \\
 &= \int_0^1 -\frac{1}{4}(x^3 + x - 2) dx + \int_1^2 \frac{1}{4}(x^3 + x - 2) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \\
 &= \frac{9}{2} br^2
 \end{aligned}$$



$$12. \quad y' = 3x^2 - 1 \quad m = y'(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

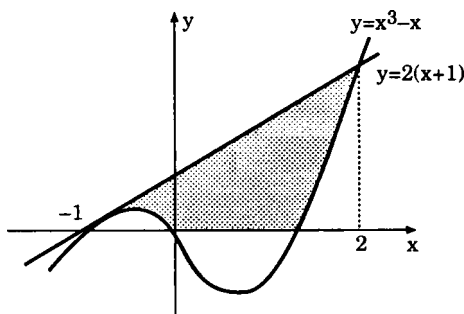
$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - (-1) = 0$$

Teğet denklemi :

$$y = m(x+1) \Rightarrow y = 2(x+1)$$

$$x^3 - x = 2x + 2 \Rightarrow$$

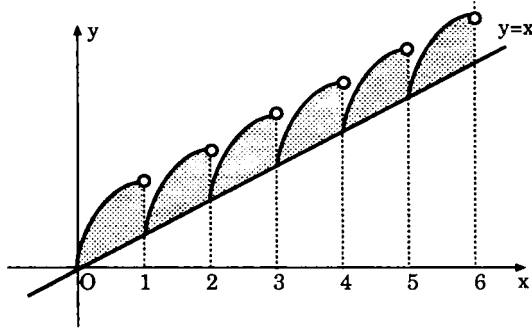
$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
 (x+1)(x^2-x-2) &= (x+1)(x-2)(x+1) \\
 &= (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2
 \end{aligned}$$

$$A = \int_{-1}^2 (2x + 2 - x^3 + x) dx = \frac{27}{4} \text{ br}^2$$

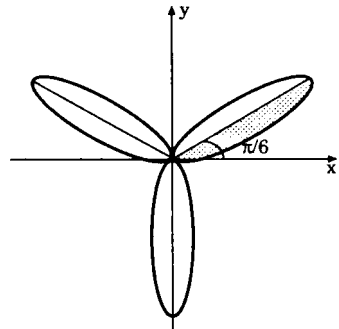
13.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^6 \left(\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - x \right) dx = 6 \int_0^1 \left(\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} - x \right) dx \\
 &= 6 \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = 6 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) = 6 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1 \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

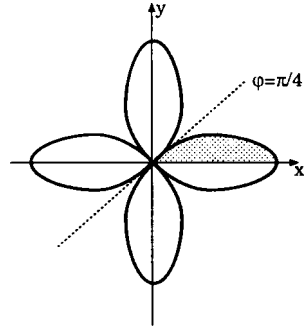
14. a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 6 \int_0^{\pi/6} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 6\varphi}{2} d\varphi \\
 &= \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = a^2 \frac{\pi}{4} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



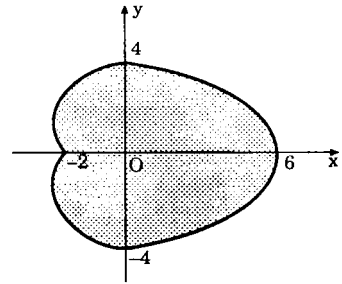
b) $r = a \cos 2\varphi$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi \\
 &= 2a^2 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{2} \\
 &= 2a^2 \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi a^2}{2} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



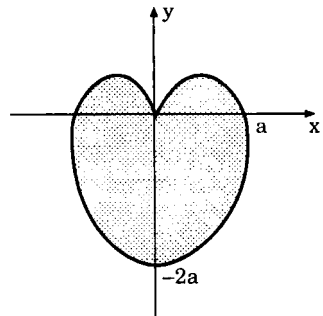
c) $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (4 + 2\cos\varphi)^2 d\varphi$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \left(16 + 16\cos\varphi + 4 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \\
 &= (18\varphi + 16\sin\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi} = 18\pi \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

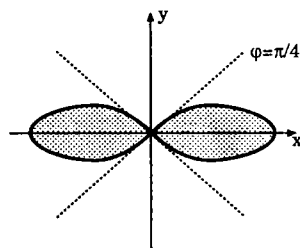


d) $r = a(1 - \sin \varphi)$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \sin \varphi)^2 d\varphi \\
 &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \\
 &= a^2 \left(\varphi + 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = a^2 \left(\frac{3\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{e) } A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi \\ &= 2a^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 br^2 \end{aligned}$$



$$15. A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 2 br^2$$

$$16. r = 1 + 2 \sin \theta$$

$$r = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ veya } \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$r = -1 \Leftrightarrow \sin \theta = -1$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 2 \sin \theta)^2 \, d\theta$$

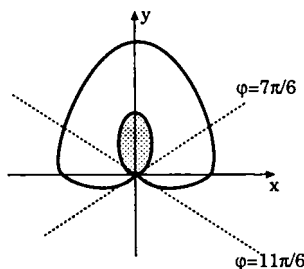
$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (3 + 4 \sin \theta - 2 \cos 2\theta) \, d\theta$$

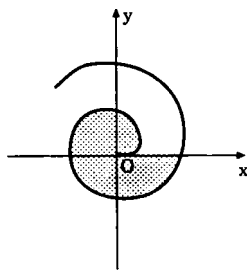
$$= \frac{1}{2} \left(3\theta - 4 \cos \theta - \sin 2\theta \Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{11\pi}{2} - 4 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{2} - 4 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

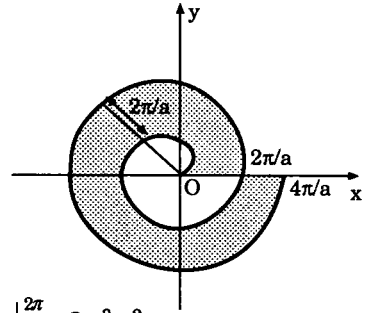
$$= \frac{1}{2} (2\pi - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$17. A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3} br^2$$

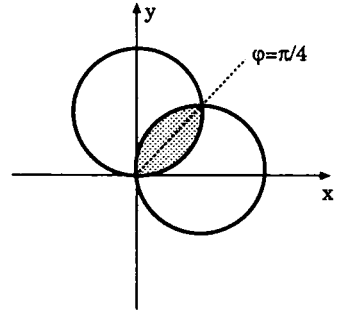


$$\begin{aligned}
 18. \quad A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(r + 2\pi a)^2 - r^2] d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\pi a r + 4\pi^2 a^2) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4\pi a^2 \varphi + 4\pi^2 a^2 d\varphi \\
 &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (\varphi + \pi) d\varphi = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{2} \varphi^2 + \pi \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^3 a^2
 \end{aligned}$$

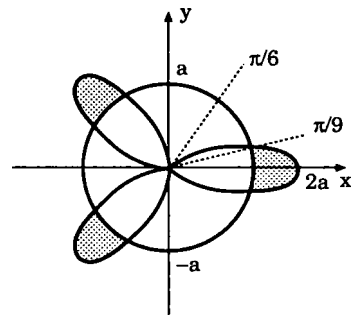


$$19. \sin \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\
 &= 4 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

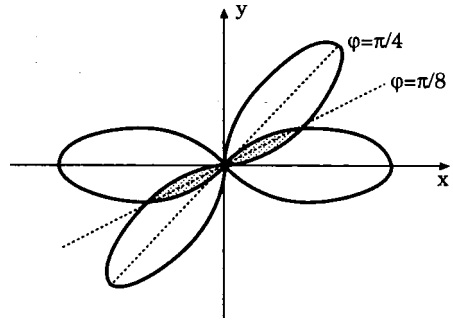


$$\begin{aligned}
 20. \quad A &= 6 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} [(2a \cos 3\varphi)^2 - a^2] d\varphi \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/9} [4 \cos^2 3\varphi - 1] d\varphi \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/9} [2(1 + \cos 6\varphi) - 1] d\varphi \\
 &= 3a^2 \left(\varphi + \frac{1}{3} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/9} \\
 &= 3a^2 \left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2
 \end{aligned}$$

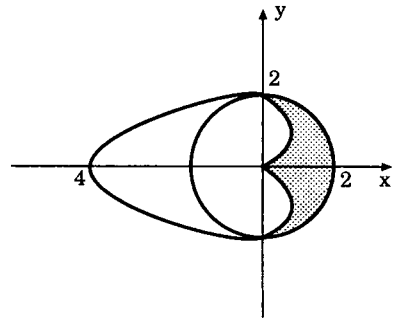


$$\begin{aligned}
 21. \quad A &= \frac{1}{2} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} [(2a \cos 2\varphi)^2 - (\sqrt{2}a)^2] d\varphi = 2a^2 4 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[2 \cdot \frac{(1 + \cos 4\varphi)}{2} - 1 \right] d\varphi \\
 &= 8a^2 \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} \right) = 8a^2 \cdot \frac{1}{4} = 2a^2 br^2
 \end{aligned}$$

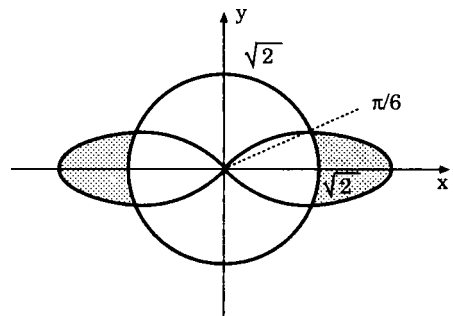
$$\begin{aligned}
 22. \quad A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{8}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi \\
 &= 2a^2 \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} \right) \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) a^2 \\
 &= \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) a^2
 \end{aligned}$$



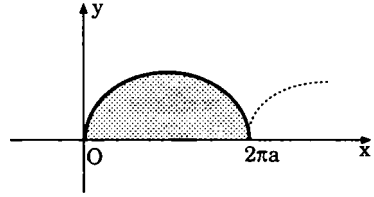
$$\begin{aligned}
 23. \quad A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2^2 - (2(1 - \cos \varphi))^2) d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} 4 - 4 + 8 \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} 8 \cos \varphi - 2(1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\
 &= (8 \sin \varphi - 2\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 8 - \pi br^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 24. \quad A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (4 \cos 2\varphi - 2) d\varphi \\
 &= 2 (2 \sin 2\varphi - 2\varphi) \Big|_0^{\pi/6} \\
 &= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - \pi) br^2
 \end{aligned}$$

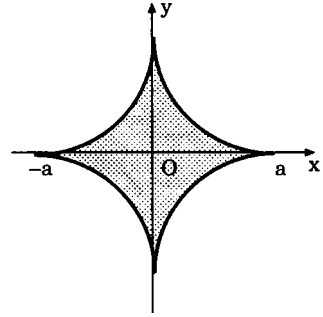


$$\begin{aligned}
 25. \quad A &= \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \cdot x'(t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} |a(1 - \cos t)| \cdot a(1 - \cos t) \, dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t \, dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\
 &= a^2 \left[t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) = 3\pi a^2
 \end{aligned}$$



$$26. \quad x = a \cos^3 t, \quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) \, dt \\
 &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t \, dt \\
 &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t)^2 \sin^2 t \, dt \\
 &= 12a^2 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{8} \, dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t \cos 2t}{8} \, dt \right] = \frac{3}{8} \pi a^2 \, br^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 27. \quad x &= 5 \cos t & x = 0 &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\
 y &= 4 \sin^3 t & x = 5 &\Rightarrow t = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 4 |\sin^3 t| \cdot (-5 \sin t) \, dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^2 \, dt \\
 &= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) \, dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \, dt \\
 &= 20 \left[t - \sin 2t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\pi/2} = 20 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 15\pi \, br^2
 \end{aligned}$$

YAY UZUNLUĞU HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

dir.

2. $r = r(\varphi)$ eğrisinin $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur.

3. Denklemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ biçiminde parametrik olarak verilen eğrinin $t = t_1$ ve $t = t_2$ parametrelerine karşılık gelen noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt$$

birimdir.

PROBELMLER

1. Aşağıdaki denklemleri verilen eğrilerin, karşılarında apsisleri yazılı noktalar arasında kalan parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

(b) $y = x^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$

(c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

(d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}$ eşitliği ile tanımlanan eğrinin, apsisi $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ olan noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

3. Parametre aralıkları karşılarında verilen aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$

(d) $\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2 \sin t \end{cases}, [0, 2\pi]$

(b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ (e) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t^3 \end{cases}, [0, \sqrt{5}]$

(c) $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \alpha$

(f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t^2 - 1 \\ y = \frac{4}{3} t^{3/2} \end{cases}, [0, 2]$

4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının uzunluğunu bulunuz.

5. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan, aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $r = 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ (c) $r = \frac{3}{\cos \varphi}, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

(b) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq 3\pi$

6. $r = ae^{\varphi}$ logaritmik spiralinin $r = 2a$ çemberi içinde kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y' = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{1/2} 2x = x(x^2 + 2)^{1/2}$

$$\begin{aligned}\ell &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = 12\end{aligned}$$

b) $y = x^{3/2}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$\begin{aligned}\ell &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^5 \\ &= \frac{8}{27} \left(\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right) = \frac{335}{27}\end{aligned}$$

c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{3}{2}(4 - x^{2/3})^{1/2} \left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{(4 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}} \\ \ell &= \int_0^8 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x^{2/3} + (4 - x^{2/3})}{x^{2/3}}} dx = \int_0^8 \sqrt{4x^{-2/3}} dx \\ &= \int_0^8 2x^{-1/3} dx = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^8 = 3 \cdot 4 = 12\end{aligned}$$

d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y' = x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2}$

$$\begin{aligned}\ell &= \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{8x + 16x^2 + 1}{16x} \right)^{1/2} dx \\ &= \int_1^4 \frac{4x + 1}{4\sqrt{x}} dx \quad [x = u^2, dx = 2u du] \\ &= \int_1^2 \frac{4u^2 + 1}{4u} 2u = \frac{1}{2} \int_1^2 (4u^2 + 1) du = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}u^3 + u \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{32}{3} + 2 - \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{31}{6}\end{aligned}$$

$$2. \quad y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} \, dt, \quad x_1 = 1 \text{ ve } x_2 = 3, \quad y' = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} \, dt = \int_1^3 \sqrt{1 + t^2 - 1} \, dt = \int_1^3 t \, dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_1^3 = 4$$

$$3. \quad a) \quad x = 2t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{16t^2 + 9t^4} \, dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{16 + 9t^2} \, dt \\ &= \frac{2}{18} \frac{2}{3} (16 + 9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{122}{27} \end{aligned}$$

$$b) \quad x = \frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}$$

$$x' = \frac{1}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}}{1 + \sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{1 + t^2}$$

$$y' = \sqrt{2} t^{1/2}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (1 + t^2 + 2t) = (1 + t)^2 \Rightarrow \ell = \int_0^2 (1 + t) \, dt = 4$$

$$c) \quad x = R \cos t$$

$$y = R \sin t \quad 0 \leq t \leq \alpha$$

$$\ell = \int_0^\alpha \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt = \int_0^\alpha \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = R\alpha$$

$$d) \quad x = 2(1 - \cos t)$$

$$y = 2 \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \, dt = 4\pi$$

$$\text{e) } x = 3t^2 \quad 0 \leq t \leq \sqrt{5}$$

$$y = 3t^3$$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\sqrt{5}} \left((x')^2 + (y')^2 \right)^{1/2} dt = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{36t^2 + 81t^4} dt = \int_0^{\sqrt{5}} t \sqrt{36 + 81t^2} dt \\ &= \frac{1}{2.81} \cdot \frac{2}{3} (36 + 81t^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{3}}{81} \end{aligned}$$

$$\text{f) } x = \frac{1}{2}t^2 - t, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2} \quad 0 \leq t \leq 2$$

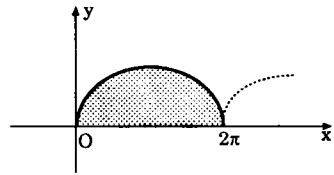
$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^2 \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(t-1)^2 + 4t} dt = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_0^2 (t+1) dt = \frac{1}{2}t^2 + t \Big|_0^2 = 4 \end{aligned}$$

$$4. \quad \ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \left((a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$= a \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \left(2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{1/2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left(\frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = 8a$$



$$5. \quad \text{a) } r = 4 \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \int_0^{\pi} (16 \cos^2 \varphi + 16 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = 4\pi$$

$$\text{b) } r = \sin^3 \frac{\varphi}{3} \quad 0 \leq \varphi \leq 3\pi$$

$$r' = 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \ell &= \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\varphi = \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3}} \, d\varphi \\
 &= \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3} \right)^{1/2} d\varphi = \int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos \frac{2\varphi}{3}}{2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \left(\varphi - \sin \frac{2\varphi}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \Big|_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$c) \quad r = \frac{3}{\cos \varphi} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \ell &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{9}{\cos^2 \varphi} + \frac{9 \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi}} \, d\varphi \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{3}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = 3 \cdot \tan \varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 3 \cdot (1 - (-1)) = 6
 \end{aligned}$$

$$6. \quad a e^\varphi = 2a \Rightarrow e^\varphi = 2 \Rightarrow \vartheta = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{\ln 2} \left(r^2 + (r')^2 \right)^{1/2} d\varphi = \int_0^{\ln 2} (a^2 e^{2\varphi} + a^2 e^{2\varphi})^{1/2} d\varphi \\
 &= \sqrt{a} a e^\varphi \Big|_0^{\ln 2} \Rightarrow \sqrt{2} a (2 - 1) = \sqrt{2} a
 \end{aligned}$$

HACİM HESABI

1. **Kesit Yöntemi :** Bir doğruya t noktasında dik olan düzlemin cisimle arakesitinin alanı $A(t)$ ise tüm cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(t) \, dt$$

olur.

2. **Disk Yöntemi** : $y = f(x)$ eğrisi, x - eksen ve $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin, x - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

olur.

3. **Kabuk (Silindirik Tabakalar) Yöntemi** : $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin y - eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_a^b |x [f(x) - g(x)]| dx$$

dir.

PROBLEMLER

1. Bir düzgün piramidin yüksekliği 100 cm dir. Bu piramidin tabanı, bir kenarının uzunluğu 100 cm olan bir karedir. Bu piramidin her cm^3 ünün ağırlığı 3 gr olduğuna göre bu piramidin ağırlığı kaç kg dır?
2. Bir cisim xOy - düzlemi tarafından $x^2 + y^2 = a^2$ dairei boyunca kesilmektedir. Bu cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle elde edilen kesitleri, bir kenarı bu düzlemlerin daire üzerinde ayırdığı kirislere eşit olan eşkenar üçgenlerdir. Cismin hacmini bulunuz.
3. Bir cismin tabanı $x^2 + y^2 \leq 1$ dairesidir. Bu cismin Ox - eksenine dik düzlemlerle arakesiti karelerdir. Cismin hacmini bulunuz.
4. R yarıçaplı kürenin hacmini kesitlerden yararlanarak hesaplayınız.
5. Bir cismin tabanı eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Cismin büyük eksene dik düzlemlerle arakesiti yüksekliği 6 cm olan birer ikizkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

6. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

(e) $y = 3x - x^2$, $y = x$

(b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(f) $y^2 = 2px$, $x = h$

(c) $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

(ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

(h) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 0$

(d) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $y = 0$

(i) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

7. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$

(c) $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = a$

(b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$

eksen $y = 1$

(b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$

eksen $y = 2$

(c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

eksen $y = 4$

(d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$

eksen $y = -3$

(e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$

eksen $y = -3$

(f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$

eksen $x = -1$

9. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin (a) Ox - eksenini (b) Oy - eksenini, etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

10. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri, $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Ox - ekseninde etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.
12. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin Ox - ekseninde etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.
13. Aşağıda eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin Oy - ekseninde etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk metodu ile hesaplayınız.
- (a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ (d) $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$
- (b) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ (e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$
- (c) $y = -x + 6$, $xy = 5$
14. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin ve Oy ekseninde etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cisimlerin hacimlerini bulunuz.
15. $r = a(1 + \cos \varphi)$ kardioidinin kutupsal eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

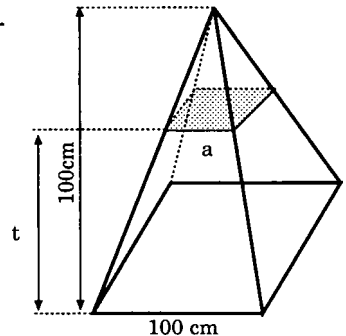
1. a : Kesit aralığında oluşan karenin bir kenarı

$$\frac{100-t}{100} = \frac{a}{100} \Rightarrow a = (100-t)$$

olur.

$$\text{Kesit alanı } A(t) = (100-t)^2,$$

$$V = \int_0^{100} A(t) dt = \int_0^{100} (100-t)^2 dt$$



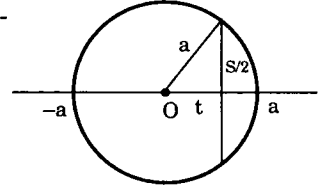
$$= -\frac{(100-t)^3}{3} \Big|_0^{100} = \frac{100^3}{3} \text{ cm}^3$$

3 gr = 3×10^{-3} kg ve 1 cm^3 ünün ağırlığı 3×10^{-3} kg ise piramidin ağırlığı

$$\frac{(100)^3}{3} \cdot 3 \times 10^{-3} = 1000 \text{ kg}$$

2. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki eş-kenar üçgenin kenar uzunluğuna s dersek

$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow s^2 = 4a^2 - 4t^2$$



Kesitin alanı $A(t) = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ olacağından

$$V = \int_{-a}^a A(t) dt = \int_{-a}^a \frac{s^2\sqrt{3}}{4} dt$$

$$= \sqrt{3} \int_{-a}^a (a^2 - t^2) dt$$

$$= \sqrt{3} \left[a^2t - \frac{t^3}{3} \Big|_{-a}^a \right] = \sqrt{3} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 4\frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \text{ br}^3$$

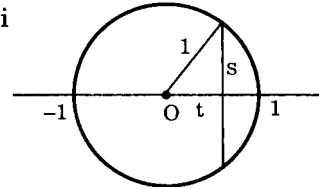
3. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki karenin kenar uzunluğuna s dersek

$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow s^2 = 4 - 4t^2$$

$$A(t) = s^2 = 4 - 4t^2$$

$$V = \int_{-1}^1 A(t) dt = \int_{-1}^1 (4 - 4t^2) dt$$

$$= 4 \left[t - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{16}{3} \text{ br}^3$$

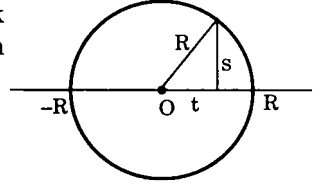


4. Yarım kürenin tabanı bir çember ve dik kesitlerle yarım çember oluşur. Bu çemberin yarıçapına s dersek,

$$t^2 + (s)^2 = R^2 \Rightarrow s^2 = R^2 - t^2$$

$$\text{Yarım çemberin alanı } \frac{\pi s^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - t^2)$$

$$V = 2 \cdot \int_{-R}^R \frac{\pi}{2} (R^2 - t^2) dt = \pi \left(R^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(\frac{4}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ br}^3$$



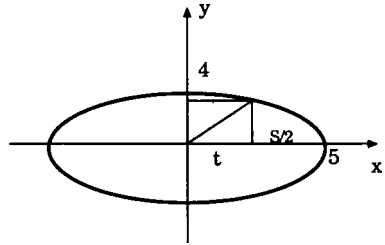
5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow x = t$ ve $h = 6$ ise

$$y = 4 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} = \frac{s}{2}$$

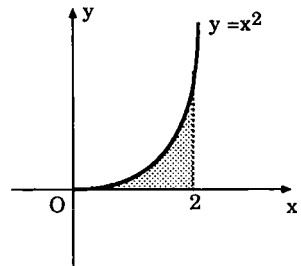
$$A(t) = \frac{h \cdot s}{2} = 24 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}}$$

$$V = \int_{-5}^5 24 \sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} dt = 24 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot 5 \cos \varphi d\varphi$$

$$= 120 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 60 \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi \text{ cm}^3$$

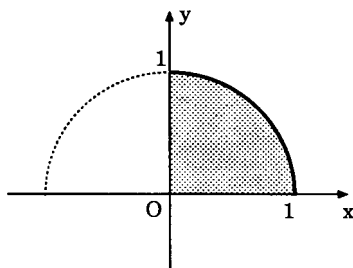


6. a) $V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$
- $$= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ br}^3$$



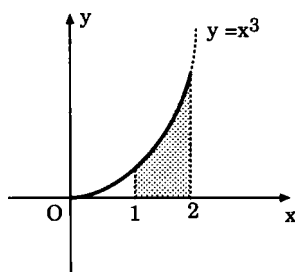
b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\
 &= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi}{15} br^3
 \end{aligned}$$



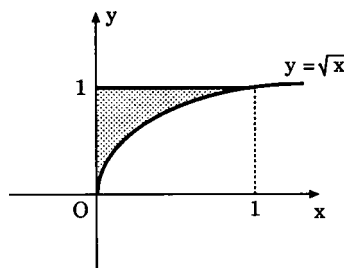
c) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 x^6 dx \\
 &= \pi \frac{x^7}{7} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{7} (2^7 - 1) \\
 &= \frac{127}{7} \pi br^3
 \end{aligned}$$



ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left[1 - (\sqrt{x})^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (1 - x) dx \\
 &= \pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} br^3
 \end{aligned}$$

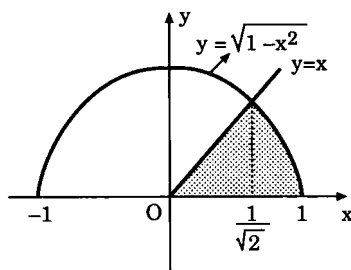


d) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $y = 0$

$$y = y \Rightarrow x = \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x)^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 \\
 &= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} + \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3} \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

e) $y = 3x - x^2$, $y = x$

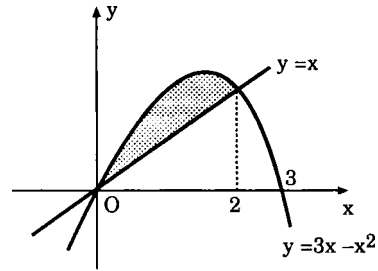
$$y = y \Rightarrow x = 3x - x^2$$

$$x^2 = 2x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 2$$

$$V = \pi \int_0^2 [(3x - x^2)^2 - x^2] dx$$

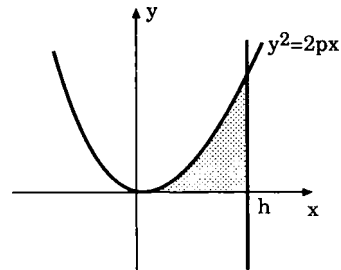
$$= \pi \int_0^2 [9x^2 - 6x^3 + x^4] dx = \pi \left(\frac{64}{3} - 24 + \frac{32}{5} \right) = \frac{56\pi}{15} \text{ br}^3$$



f) $y^2 = 2px$, $x = h$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h 2px dx$$

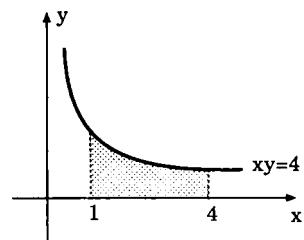
$$= \pi px^2 \Big|_0^h = \pi p h^2 \text{ br}^3$$



g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

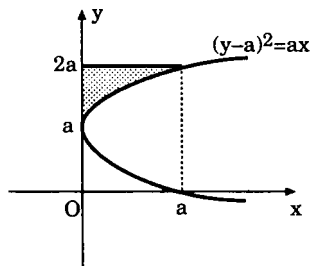
$$v = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = \pi 16 \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$$

$$= 16\pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = 12\pi \text{ br}^3$$



h) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^a (f^2(x) - g^2(x)) dx \\
 &= \pi \int_0^a \left(4a^2 - (a + \sqrt{ax})^2 \right) dx \\
 &= \pi \left(\int_0^a 3a^2 - 2a^{3/2} x^{1/2} - ax \, dx \right) \\
 &= \pi \left(3a^2 x - \frac{4}{3} a^{3/2} x^{3/2} - a \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \pi \left(3a^3 - \frac{4}{3} a^3 - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{7\pi}{6} a^3 \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

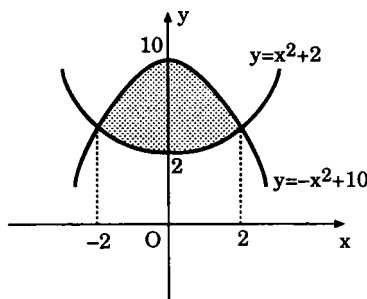


1) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

$$x^2 + 2 = -x^2 + 10$$

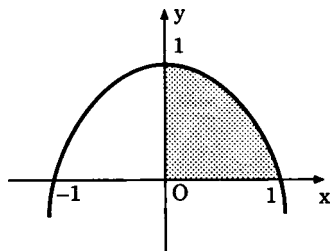
$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 [f^2(x) - g^2(x)] dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 \left[(-x^2 + 10)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 20x^2 + 100 - x^4 - 4x^2 - 4) dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (-24x^2 + 96) dx = \pi \left(-8x^3 + 96x \right) \Big|_{-2}^2 = 256\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



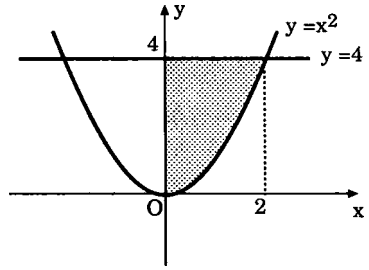
7. a) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_c^d g^2(y) dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-y})^2 dy \\
 &= \pi \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



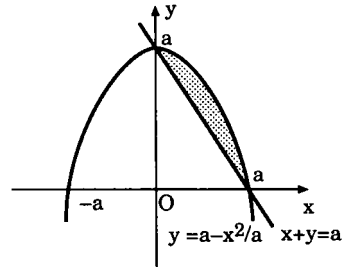
b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 g^2(y) dy = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



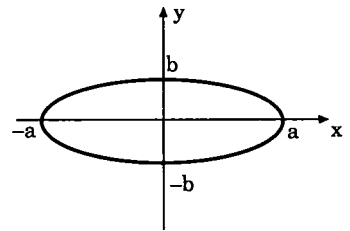
c) $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = a$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left[\left(\sqrt{a^2 - ay} \right)^2 - (y - a)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^a [a^2 - ay - y^2 + 2ay - a^2] dy \\ &= \pi \int_0^a ay - y^2 dy = \pi \left[a \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^a \\ &= \pi \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{a^3}{6} \text{ br}^3 \end{aligned}$$



d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

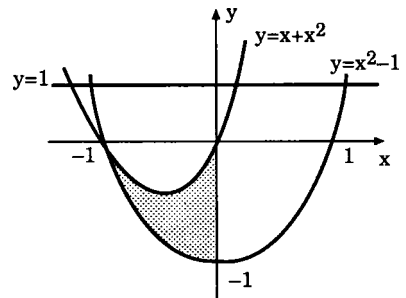
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b g^2(y) dy = \pi \int_{-b}^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \right) dy \\ &= \pi \left[a^2 y - \frac{a^2}{b^2} \frac{y^3}{3} \right]_{-b}^b \\ &= \pi \left(a^2 b - \frac{a^2 b}{3} + a^2 b - \frac{a^2 b}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^2 b \end{aligned}$$



8. a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ eksen $y = 1$

$$x + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = -1$$

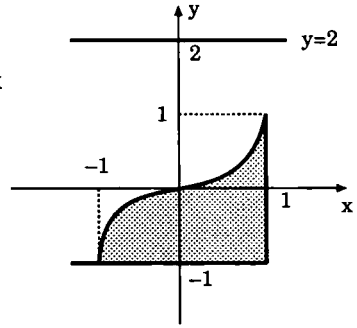
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 |x^2 - 1 - 1|^2 dx \\ &\quad - \pi \int_{-1}^0 |x + x^2 - 1|^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 (4 - 4x^2 + x^4) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -\pi \int_{-1}^0 (1 - 2(x + x^2) + (x + x^2)^2) dx \\
 & = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^0 \right) - \pi \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^0 \right) \\
 & = \pi \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) - \pi \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{2} \pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

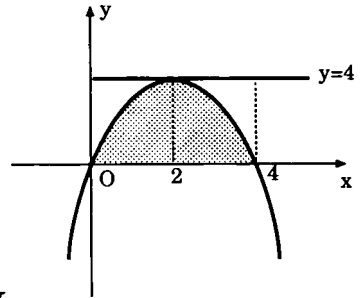
b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ $y = 2$ eksen

$$\begin{aligned}
 V & = \pi \int_{-1}^1 |-1 - 2|^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^3 - 2)^2 dx \\
 & = 18\pi - \pi \int_{-1}^1 (x^6 - 4x^3 + 4) dx \\
 & = 18\pi - \pi \left(\frac{x^7}{7} - x^4 + 4x \Big|_{-1}^1 \right) \\
 & = 18\pi - \pi \left(\frac{58}{7} \right) = \frac{68}{7} \pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



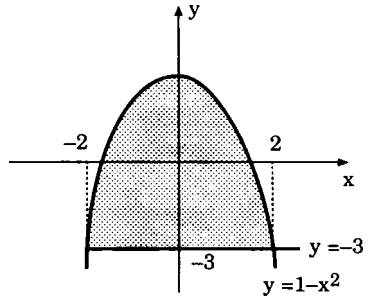
c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ eksen $y = 4$

$$\begin{aligned}
 V & = \pi \int_0^4 [4^2 - (4 - 4x + x^2)^2] dx \\
 & = 64\pi - 2\pi \int_0^2 (x - 2)^4 dx \\
 & = 64\pi - 2\pi \left(\frac{(x - 2)^5}{5} \Big|_0^2 \right) \\
 & = 64\pi - 2\pi \left(\frac{32}{5} \right) = 64\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{256\pi}{5}
 \end{aligned}$$



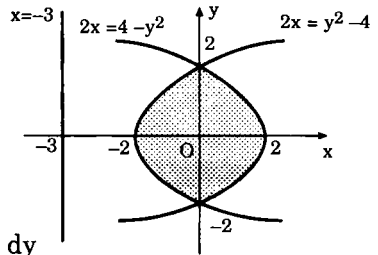
d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ eksen $y = -3$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 \left| 1 - x^2 - (-3) \right|^2 dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 \\
 &= 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{512}{15} \pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eksen $x = -3$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-2}^2 \left| \frac{4 - y^2}{2} - (-3) \right|^2 dy \\
 &\quad - \pi \int_{-2}^2 \left| \frac{y^2 - 4}{2} - (-3) \right|^2 dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (100 - 20y^2 + y^4) dy - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (y^4 + 4y^2 + 4) dy \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (96 - 24y^2) dy = \frac{\pi}{4} \left(96y - 8y^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (192 - 64) = 64\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



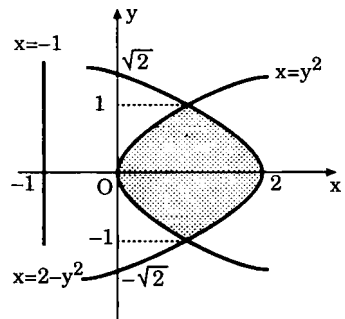
f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$, $x = -1$ eksen

$$x = x \Rightarrow y^2 = 2 - y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^1 (2 - y^2 - (-1)^2) dy \\
 &\quad - \pi \int_{-1}^1 (y^2 - (-1)^2) dy
 \end{aligned}$$



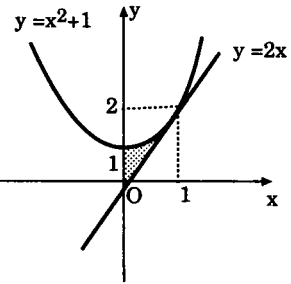
$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_{-1}^1 (9 - 6y^2 + y^4) dy - \pi \int_{-1}^1 (y^4 + 2y^2 + 1) dy \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (8 - 8y^2) dy = 8\pi y - \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{32\pi}{3} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

9. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$

$$y' = 2x \Big|_{x=1} = 2 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

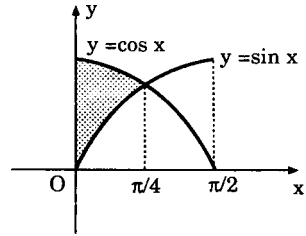
$$y = 2x \text{ (teğet denklemi)}$$



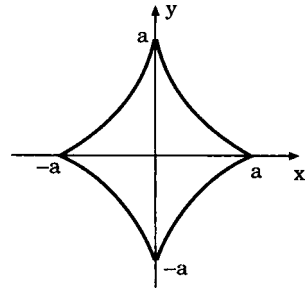
$$\begin{aligned}
 \text{a) } V &= \pi \int_0^1 (f^2(x) - g^2(x)) dx \\
 &= \pi \int_0^1 ((x^2 + 1)^2 - (2x)^2) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2) dx \\
 &= \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx \\
 &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } V &= \pi \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{y}{2} \right)^2 - (y - 1) \right] dy \\
 &= \pi \frac{y^3}{12} \Big|_0^1 + \pi \left[\frac{y^3}{12} - \frac{(y - 1)^2}{2} \right] \Big|_1^2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



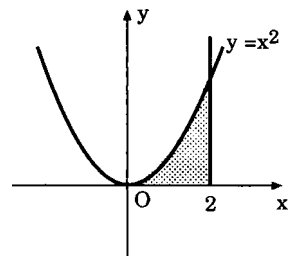
$$\begin{aligned}
 11. \quad V &= \pi \int_{-a}^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx \quad [x = a \cos^3 \theta] \\
 &= \pi \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos^2 \theta)^3 a \cdot 3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 3\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^3 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 3\pi a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^3 u^2 du \\
 &= 3\pi a^3 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{3}{5} u^5 + \frac{3}{7} u^7 - \frac{u^9}{9} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{32\pi a^3}{105} \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 12. \quad V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^6 dt = 5\pi^2 a^3 \text{ br}^3
 \end{aligned}$$

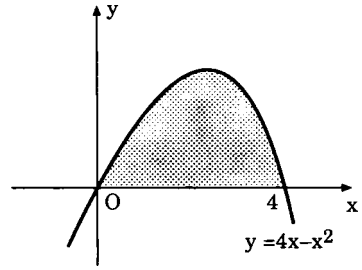
$$13. \quad a) \quad y = x^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\
 &= 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^2 = 8\pi \text{ br}^3
 \end{aligned}$$



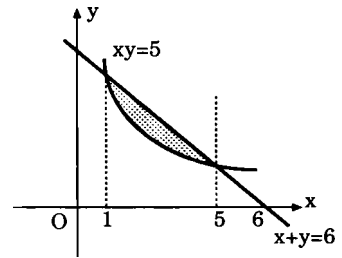
b) $y = 4x - x^2$ $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x (4x - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \bigg|_0^4 \right) \\ &= \frac{128}{3} \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



c) $y = -x + 6$, $xy = 5$

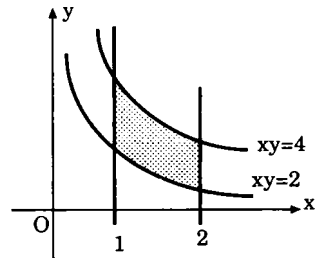
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^5 x |f(x) - g(x)| dx \\ &= 2\pi \int_1^5 x \left(-x + 6 - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= 2\pi \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5 \right) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \bigg|_1^5 \right) = \frac{64\pi}{3} \text{ br}^3 \end{aligned}$$



$(y = y \Rightarrow \frac{5}{x} = -x + 6, 5 = -x^2 + 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0, x = 1 \text{ ve } x = 5)$

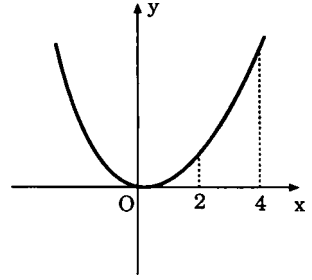
d) $xy = 2$, $xy = 4$ $x = 1$ $x = 2$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x |f(x) - g(x)| dx \\ &= 2\pi \int_1^2 x \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= 4\pi (2 - 1) = 4\pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\ &= 2\pi \int_2^4 x \cdot \frac{1}{4} x^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_2^4 \right) = 30\pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$



14. $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x |\cos x - \sin x| dx$

$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x |\sin x - \cos x| dx$$

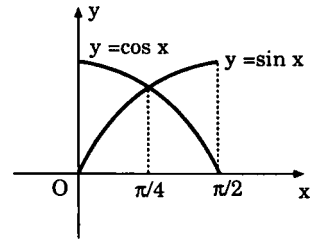
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$$

$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$= 2\pi \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \right)$$

$$+ 2\pi \left(x \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right)$$

$$= \pi^2 (\sqrt{2} - 1)$$



15. $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$$x = r \cos \theta = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$dx = [a (-\sin\theta) (\cos\theta) - a \sin\theta (1+\cos\theta)] d\theta$$

$$= - a (\sin\theta + 2 \sin\theta \cos\theta) d\theta = - a \sin \theta (1 + 2\cos\theta) d\theta$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \sin^2\theta [-a \sin\theta (1 + 2\cos\theta)] d\theta$$

$$= - a^3 \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 (1 + 2 \cos\theta) \sin^3\theta d\theta$$

$$= - a^3 \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 (1 + 2 \cos\theta) (1 - \cos^2 \theta) \sin\theta d\theta$$

$\cos\theta = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$V = a^3 \pi \int_1^{-1} (1 + u)^2 (1 + 2u) (1 - u^2) du$$

$$= a^3 \pi \int_1^{-1} (-2u^5 - 5u^4 - 2u^3 + 4u^2 + 4u + 1) du$$

eşitliği elde edilir. Tek fonksiyonların simetrik aralıklardaki integralleri sıfır olduğundan

$$V = a^3 \pi \int_1^{-1} (-5u^4 + 4u^2 + 1) du = a^3 \pi \int_{-1}^1 (5u^4 - 4u^2 - 1) du$$

$$= 2a^3 \pi \int_0^1 (5u^4 - 4u^2 - 1) du = 2a^3 \pi \left(u^5 - \frac{4}{3} u^3 - u \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} \pi a^3$$

DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının x - eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

dir.

2. Eğri denkleminin $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ biçiminde verilmesi durumunda

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \cos \varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$

(b) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$

(c) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$

(d) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

(a) $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$

(b) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$

3. Orijin ile (h, r) noktasını birleştiren doğru parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen koninin yanal alanını bulunuz.
4. Yarıçapı R olan bir kürenin yüzey alanını hesaplayınız.
5. $y = x^2$ parabolünün $O(0, 0)$ ve $A(\sqrt{2}, 2)$ noktaları arasındaki parçasının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.
6. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $[x_1, x_1 + h]$ aralığına karşılık gelen parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen küre parçasının alanını bulunuz.
7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.
8. $4x^2 + y^2 = 4$ elipsinin birinci bölgedeki parçasının Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.
9. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

olan eğri parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

olan astroid eğrisinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

11. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} \\ y = 4 - \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

olan eğrinin koordinat eksenleriyle kesim noktaları arasında kalan parçasının, Ox - eksenini etrafında dönmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

12. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının

(a) Oy - eksenini

(b) en yüksek noktasına teğet olan doğru

etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

13. $r = 2a \cos \varphi$ eğrisi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

14. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ $0 \leq x \leq 3$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = (x^2 + 2)^{1/2} x$$

$$1 + (y')^2 = 1 + (x^2 + 2) x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2} \cdot (x^2 + 1) dx = \frac{99}{2} \pi \text{ br}^2$$

b) $y = x^3$ $0 \leq x \leq 1$

$$S = 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{u} du$$

$$= \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{\pi}{9.3} (10^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ br}^2$$

c) $y = 2\sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^8 |y| \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^8 2\sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^8 \sqrt{x+1} dx \\ &= 4\pi \left. \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right|_0^8 = \frac{208}{3} \pi \text{ br}^2 \end{aligned}$$

d) $y = \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi |y| \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} u \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \text{ br}^2 \end{aligned}$$

2. a) $y = \frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+(x')^2} dy = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{y}}\right)^2} dy \\ &= 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y+1} dy = \pi \cdot \left. \frac{2}{3} (1+2y)^{3/2} \right|_0^{3/2} = \frac{2\pi}{3} (8-1) = \frac{14\pi}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

b) $y = \ln x \quad 1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+(x')^2} dy = 2\pi \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+u^2} du \\ &= 2\pi \left(u \sqrt{u^2+1} + \ln(u + \sqrt{u^2+1}) \right) \Big|_1^2 \\ &= 2\pi \left(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) - \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \\ &= 2\pi \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right) \text{ br}^2 \end{aligned}$$

3. $(0, 0)$ ile (h, r) noktasından geçen doğru denklemi

$$\frac{y-r}{r} = \frac{x-h}{h} \Rightarrow hy - hr = xr - hr \Rightarrow x = \frac{h}{r} y$$

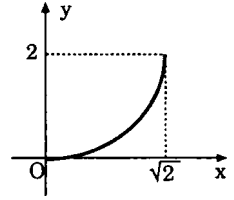
$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = 2\pi \frac{r}{h^2} \sqrt{r^2 + h^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{br}^2$$

4. $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ yarı çemberinin Ox etrafında döndürürsek küre elde ederiz.

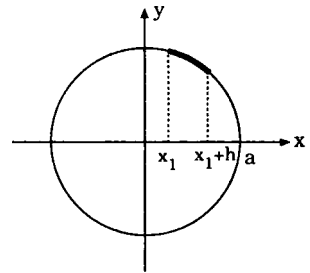
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R |y| \sqrt{1 + (y')^2} dy = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2 \quad \text{br}^2 \end{aligned}$$

5. $y = x^2$, $0 \leq y \leq 2$

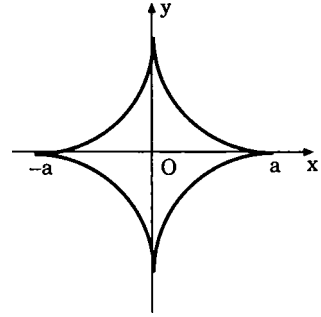
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4y} dy = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4y)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{9}{2} \pi \quad \text{br}^2 \end{aligned}$$



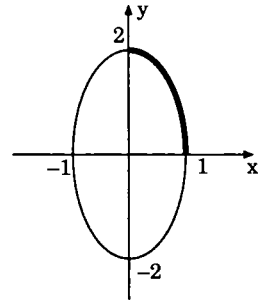
6. $S = 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad x_1 > 0$
- $$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi a \cdot (x_1 + h - x_1) = 2\pi a \cdot h \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 7. \quad S &= 2\pi \int_{-a}^a |y| \sqrt{1+(y')^2} dx \\
 &= 2\pi \cdot 2 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 2\pi \cdot 2 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx \\
 &= 2\pi (-2) \pi \frac{3}{2} a^{1/3} \frac{2}{5} (a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2} \Big|_0^a \\
 &= 2 \cdot \frac{6\pi}{5} a^{1/3} (a^{5/3}) = \frac{12\pi}{5} a^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 8. \quad S &= 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(x')^2} dy \quad x=0 \Rightarrow y=\pm 2 \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^2 \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4(4-y^2)}} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{16-3y^2} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi/3} 4 \sqrt{1-\sin^2 t} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos t dt \\
 &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{\cos 2t + 1}{2} dy \\
 &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin 2t + 2t}{2} \Big|_0^{\pi/3} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right) br^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 9. \quad S &= 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 6\pi \int_0^1 t \sqrt{16t^2 + 9} dt \\
 &= \frac{6\pi}{32} \frac{2}{3} (16t^2 + 9)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} ((25)^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{\pi}{8} \cdot 98 = \frac{49}{4} \pi br^2
 \end{aligned}$$

$$10. \quad S = 2\pi \int_{+\pi}^0 a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= 6\pi a^2 \int_a^{\pi} |\sin^4 t \cos t| dt \\
&= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt - 6\pi a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 t \cos t dt \\
&= 6\pi a^2 \left(\frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = 6\pi^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{5} \pi a^2 \text{ br}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. S &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2} \right) \sqrt{t^4 + t^2} dt = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} 4t \sqrt{1+t^2} dt - \pi \int_0^{2\sqrt{2}} t^3 \sqrt{1+t^2} dt \\
&\quad [1+t^2 = u^2 \Rightarrow t dt = u du] \\
&= 8\pi \int_1^3 u^2 du - \pi \int_1^3 (u^4 - u^2) du = \frac{8\pi}{3} \left(u^3 \Big|_1^3 \right) - \pi \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \Big|_1^3 \right) \\
&= 29.6\pi \text{ br}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. a) S &= 2\pi \int_0^{\pi} a(t - \sin t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\
&= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sqrt{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2
\end{aligned}$$

b) ($t = 0 \Rightarrow y = 0$, $t = \pi \Rightarrow y = 2a$)

Sikloid eğirisinin en yüksek noktası $(x, y) = (\pi a, 2a)$ noktasıdır.

Bu noktadaki teğetin denklemi $y = 2a$ dır.

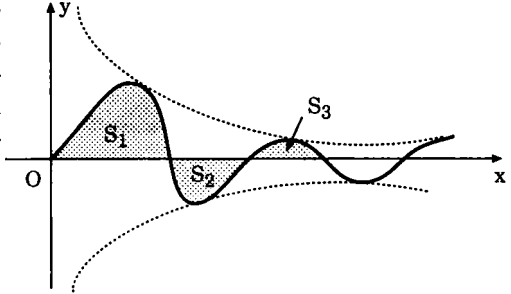
$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi} |a(1 - \cos t) - 2a| \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) dt \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi a^2 \left(-2\cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - 2\cos^3 \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \left(-\sin \frac{t}{2}\right) dt \right) \\
 &= 4\pi a^2 \left[2 - 2(-1) + 2 \int_{-1}^0 (1 - u^2) du \right] \\
 &= 4\pi a^2 \left(4 - 2 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^0 \right) = 4\pi a^2 \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{32}{3} \pi a^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad S &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/2} |r \cos u| \sqrt{4a^2 \cos^2 u + 4a^2 \sin^2 u} \, du \\
 &= 16a^2 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = 16a^2 \pi \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2u}{2} \right) du \\
 &= 8a^2 \pi \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} = 4a^2 \pi^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad S &= 2\pi \int_\alpha^\beta |r \sin u| \sqrt{r^2 + (r')^2} \, du \\
 &= 2\pi \cdot 2 \int_0^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2u} \cdot \sin u \sqrt{a^2 \cos 2u + \frac{a^2 \cdot \sin^2 2u}{\cos 2u}} \, du \\
 &= 4\pi a^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2u} \sin u \frac{1}{\sqrt{\cos 2u}} \, du = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin u \, du \\
 &= 4\pi a^2 \left(-\cos u \Big|_0^{\pi/4} \right) = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $y = \sqrt{|x|}$ eğrisiyle $x - 5y + 6 = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
2. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.
 - (a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$
 - (b) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$
 - (c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$
 - (d) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$, $4y = x^2$
 - (e) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$
 - (f) $x = y^2 - 1$, $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$
 - (g) $x = y^2(1 - y)$, $x = 0$, $y = 0$
3. $y^2 = (1 - x^2)^3$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.
4. $(y - 2)^2 = x^3$ eğrisinin iki kolu ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
5. $y = e^{-x} \sin x$ eğrisiyle Ox - eksenini arasında kalan kapalı bölgelerin alanları $S_1, S_2, S_3, \dots$ olsun. (S_n) dizisinin, ortak oranı $e^{-\pi}$ olan bir geometrik dizi olduğunu gösteriniz.
 
6. $r = 12 \cos 3\phi$ gülünün içinde, $r = 6$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.
7. Kutupsal koordinatlara geçerek $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. Aşağıdaki eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $1 \leq x \leq 16$

(b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

9. $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ eğri parçasının Ox- eksenini etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}$, $\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{2}$ eğri parçasının Ox- eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

11. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Ox- eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

(a) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$

(c) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$

(d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

(e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

(f) $y = \cos x + \sin x$, $g(x) = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

12. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Oy- eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayınız.

(a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

(b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

(c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

(d) $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

(e) $y = |x - 2|$, $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2}$

(f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

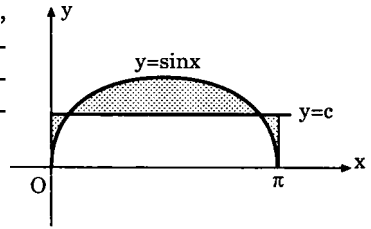
13. Birinci bölgede $x = y - y^3$ eğrisi ile $x = 1$, $y = 1$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) x - eksen (b) y - eksen (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

14. $y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$ eğrisinin sınırladığı bölge x - eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

15. $(y - x)^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge Ox - eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

16. Yandaki şekilde, $y = \sin x$ eğrisi, $x=0$, $x = \pi$, $y = c$ doğruları tarafından sınırlanan taraflı bölge $y = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacminin minimum olması için c ne olmalıdır?



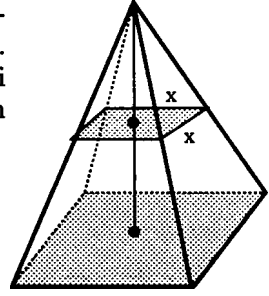
17. f , $[a, b]$ üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox - eksen tarafından sınırlanan bölge, $c \leq a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

18. $y = x^4$ eksen, x - eksen ve $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

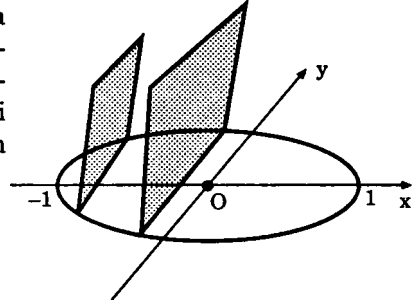
19. f ve g , $[a, b]$ üzerinde $g(x) \leq f(x)$ bağıntısını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ ve $x = b$ tarafından sınırlanan bölge, $c \leq a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

20. $y = 2x$, $y = -2x^2 + 4x$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

21. 3 cm yüksekliğindeki bir kare piramidin, yüksekliğine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Piramidin tepe noktasından x birim uzaktaki kesit, bir kenarı x olan bir karedir. Piramidin hacmini kesit yöntemiyle bulunuz.

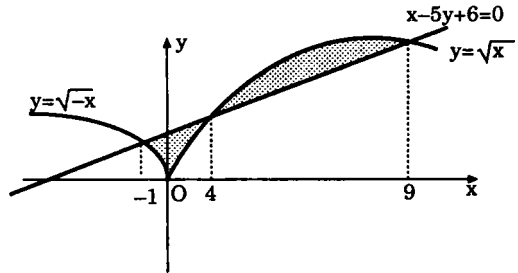


23. $x = -1$ ve $x = 1$ düzlemleri arasında kalan bir cismin x - eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Bu karelerin iki köşesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde bulunduğuna göre cismin hacmini bulunuz.



ÇÖZÜMLER

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{-x} \right] dx \\
 &= \int_0^4 \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{x} \right] dx \\
 &\quad + \int_4^9 \left[\sqrt{x} - \frac{1}{5}(x+6) \right] dx \\
 &= \frac{13}{30} + \frac{16}{15} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



2. a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

$$y = y \Rightarrow 4(1 - x^2) = x^4 - 1 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 (4(1 - x^2) - x^4 + 1) dx = \int_{-1}^1 (-4x^2 - x^4 + 5) dx$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} + 5x \Big|_{-1}^1 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + 5 - \frac{4}{3} - \frac{1}{5} = \frac{104}{15} \text{ br}^2$$

$$b) y = x^4 - 4x^2 + 4, y = x^2$$

$$y = y \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow x = \mp 2, x = \mp 1$$

$$A = \int_{-2}^2 |y_1 - y_2| dx$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4 - x^2) dx + 2 \int_1^2 (x^2 - x^4 + 4x^2 - 4) dx + \\ &= 2 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3} x^3 + 4x \right) \Big|_0^1 + 2 \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - 4x \right) \Big|_1^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) + 2 \left(\frac{40}{3} - \frac{32}{5} - 8 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5} + 4 \right) = 8 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

$$c) y = \frac{x^2}{x^2+1}, y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y = y \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi - 2 \text{ br}^2 \end{aligned}$$

$$d) y = \frac{8}{x^2+4}, 4y = x^2$$

$$y = \frac{8}{4y+4} \Rightarrow 4y^2 + 4y - 8 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow x = \mp 2$$

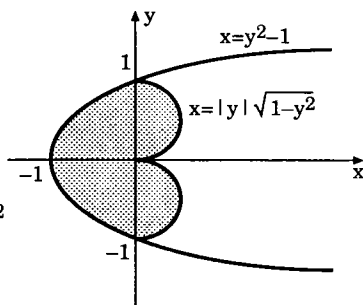
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 \frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} dx = 4 \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^2 \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} = 2\pi - \frac{4}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

$$e) y = x + 1, y = \cos x, y = 0$$

$$y = y \Rightarrow x + 1 = \cos x \Rightarrow x = 0$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{-1}^0 x + 1 dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{2} \text{ br}^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } A &= \int_{-1}^1 (|y| \sqrt{1-y^2} - y^2 + 1) dy \\
 &= 2 \int_0^1 (y \sqrt{1-y^2} - y^2 + 1) dy \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-y^2)^{3/2} - \frac{y^3+y}{3} \right] \Big|_0^1 = 2 \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



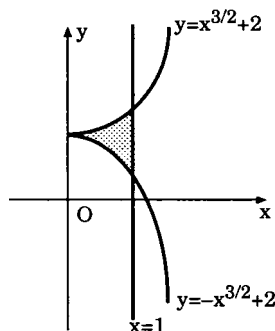
$$\text{g) } x = y^2(1-y), \quad x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ve } y = 1$$

$$A = \int_c^d x dy = \int_0^1 y^2(1-y) dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ br}^2$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad A &= 2 \int_0^1 \left((1-x^2)^{3/2} - \left[-(1-x^2)^{3/2} \right] \right) dx = 4 \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 x)^{3/2} \cdot (-\sin x) dx \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2} dx \\
 &= \left(x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad (y-2)^2 &= x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} + 2 \text{ veya} \\
 y &= -x^{3/2} + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 (x^{3/2} + 2 + x^{3/2} - 2) dx \\
 &= \int_0^1 2x^{3/2} dx = \frac{4}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ br}^2
 \end{aligned}$$



$$5. \quad S_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-x} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)(-e^{-x}) dx$$

$$= e^{-\pi} + 1 - \left(e^{-x} \sin x \left|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x (-e^{-x}) dx \right. \right) = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow 2S_1 = e^{-\pi} + 1 \Rightarrow S_1 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-x} (-\cos x) \left|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x (-e^{-x}) dx \right.$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \left(e^{-x} \sin x \left|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x (-e^{-x}) dx \right. \right)$$

$$\Rightarrow -2S_2 = e^{-2\pi} + e^{-\pi} \Rightarrow -S_2 = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{e^{-2\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} + 1}$$

$$= \frac{e^{-\pi} + 1}{e^{-\pi} + 1} \cdot e^{-\pi} = e^{-\pi}$$

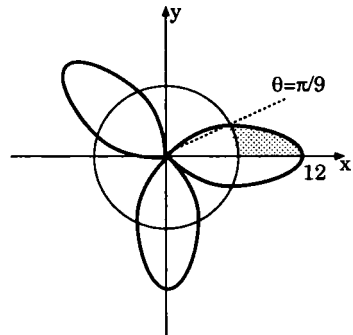
$$\Rightarrow S_n = S_1, e^{-\pi(n-1)} = (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}}{2}$$

$$6. A = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} (144 \cos^2 3\theta - 36) d\theta$$

$$= 3 \left(\int_0^{\pi/9} \left(144 \cdot \frac{\cos 6\theta + 1}{2} \right) - 36 \right) d\theta$$

$$= 3 \left(72 \left(\frac{\sin 6\theta}{6} + \theta \right) - 36\theta \right) \left|_0^{\pi/9} \right.$$

$$= 3 \left(12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 36 \frac{\pi}{9} \right) = 3 (6\sqrt{3} + 4\pi) \text{ br}^2$$



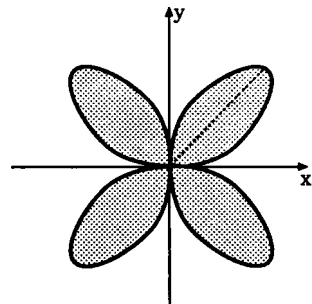
$$7. (x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2 \Rightarrow r^6 = 4r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$r^2 = 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \Rightarrow r^2 = \sin^2 2\theta$$

$$\frac{A}{8} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta \Rightarrow A = 4 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta$$

$$= 2 \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \left|_0^{\pi/4} \right. = \frac{\pi}{2}$$



8. a) $y = \frac{2}{5} x^{5/4} - \frac{3}{5} x^{3/4} \quad 1 \leq x \leq 16$

$$y' = \frac{1}{2} x^{1/4} - \frac{1}{2} x^{-1/4} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4} (x^{1/2} - 2 + x^{-1/2})$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \frac{(x^{1/2} - 1)^2}{x^{1/2}}$$

$$\ell = \int_1^{16} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{16} \frac{x^{1/2} + 1}{x^{1/4}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} x^{5/4} + \frac{4}{3} x^{3/4} \right) \Big|_1^{16} = \frac{256}{15} \text{ br}^2$$

b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1} \, dt, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$y' = \sqrt{\sec^4 x - 1} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \sec^4 x - 1 = \sec^4 x \Rightarrow$$

$$\ell = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2$$

9. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$S = 2\pi \int_0^{1/2} |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= 2\pi \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^{1/2} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \text{ br}^2$$

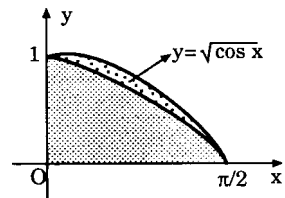
10. $x = \frac{1}{2} t^2, \quad y = t, \quad \sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{2}$

$$S = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} t \sqrt{t^2 + 1} dt = \pi \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{3/2} \Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3} \pi \text{ br}^2$$

11. a) $y = \sqrt{\cos x}, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$

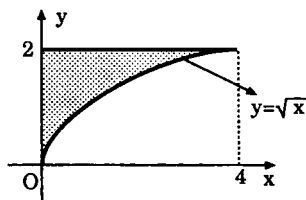
$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\cos x})^2 dx = \pi \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \pi \text{ br}^3$$



b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^4 \left(2^2 - (\sqrt{x})^2 \right) dx$$

$$= \pi \left(4x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \right) = \pi (16 - 8) = 8\pi \text{ br}^3$$



c) $y = x^2 + 1$

$$y = -x + 3$$

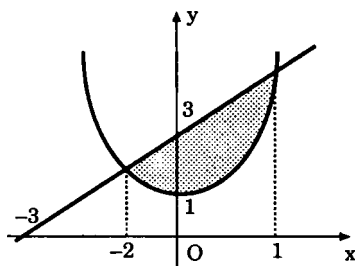
$$y = y \Rightarrow x^2 + 1 = -x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

$$V = \pi \int_{-2}^1 \left[(-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1) dx$$

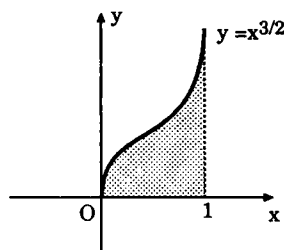
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \Big|_{-2}^1 \right) = \frac{117\pi}{5} \text{ br}^3$$



d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^1 (x^{3/2})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{4} \text{ br}^3$$

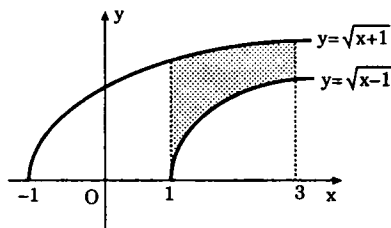


e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

$$V = \pi \int_1^3 (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$= \pi \int_1^3 \left((\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^3 (x+1 - x+1) dx = 4\pi \text{ br}^3$$

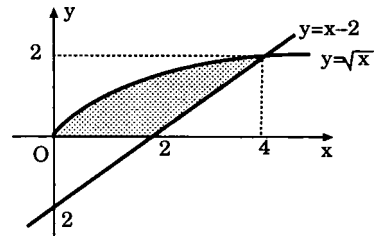


f) $y = \cos x + \sin x$, $y = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/4} [(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2] dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cos x \sin x - 1 + 2 \cos x \sin x) dx \\ &= 4\pi \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) = \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$

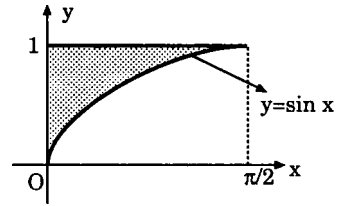
12. a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(y+2)^2 - (y^2)^2] dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (y+2)^3 - \frac{1}{5} y^5 \right] \Big|_0^2 \\ &= \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right] = \frac{184}{15} \text{ br}^3 \end{aligned}$$



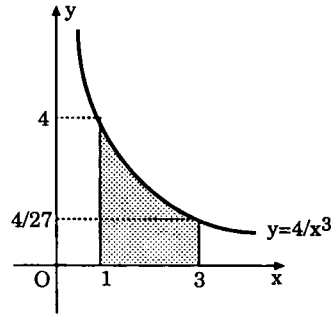
b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy \\ &= \pi \left[\arcsin^2 y \cdot y \right. \\ &\quad \left. \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \arcsin y \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy \right] \\ &= \pi \left[\frac{\pi^2}{4} - 2 \left(-\arcsin y (1-y^2)^{1/2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\sqrt{1-y^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (\pi^2 - 8) \text{ br}^3 \end{aligned}$$



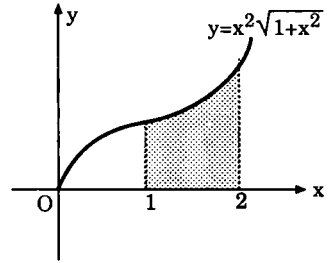
c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{4}{27}}^4 \left(\frac{4^{2/3}}{y^{2/3}} - 1 \right) dy + \pi \int_0^{4/27} (3^2 - 1^2) dy \\ &= \pi \left(4^{2/3} \cdot 3y^{1/3} - y \right) \Big|_{\frac{4}{27}}^4 + 8\pi \cdot \frac{4}{27} \\ &= \pi \left[4^{2/3} \cdot 3 \cdot 4^{1/3} - 4 - 4^{2/3} \cdot 3 \cdot \frac{4^{1/3}}{3} + \frac{4}{27} \right] + \frac{32\pi}{27} \\ &= \frac{16}{3} \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$

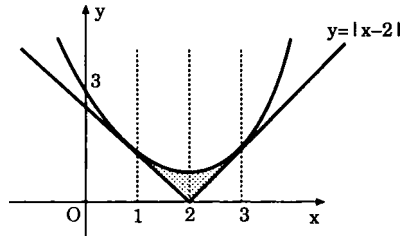


d) $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t(t^2-1)t dt = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{100\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{15} \pi \end{aligned}$$



e)



Silindirik tabakalar yöntemiyle yapalım.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 x |f(x) - g(x)| dx = 2\pi \int_1^3 x \left| \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2} - |x-2| \right| dx \\ &= 2\pi \int_1^3 \frac{1}{2} x [(x-2)^2 + 1] dx - 2\pi \int_1^3 x |x-2| dx \\ &= \pi \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 5x) dx + 2\pi \int_1^2 -x(x-2) dx - 2\pi \int_2^3 x(x-2) dx \\ &= \frac{16\pi}{3} + \frac{14\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} \text{ br}^3 \end{aligned}$$

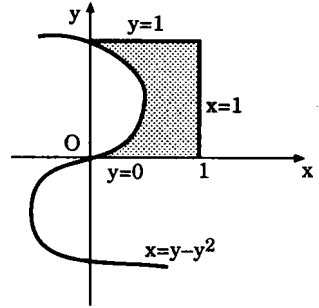
f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dy = \int_1^2 1+y^3 dy = y + \frac{y^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{19}{4} \pi \text{ br}^3$$

13. a) $V = 2\pi \int_0^1 y |u(y)-v(y)| dy$

$$= 2\pi \int_0^1 y |1-(y-y^3)| dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y-y^2+y^4) dy = \frac{11}{15} \pi \text{ br}^3$$



b) $V = \pi \int_0^1 (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_0^1 [1 - (y - y^3)^2] dy$

$$= \pi \int_0^1 (1 - y^2 + 2y^4 - y^6) dy = \frac{97}{105} \pi \text{ br}^3$$

c) $V = \pi \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - y + y^3)^2 dy$

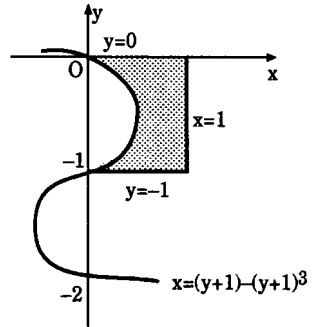
$$= \pi \int_0^1 (1 + y^2 + y^6 - 2y + 2y^3 - 2y^4) dy = \frac{97}{105} \pi$$

- d) Sözkonusu bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi, o bölgenin bir birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen bölgenin x - eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmine eşittir. Buna göre

$$V = 2\pi \int_{-1}^0 y [1 - (y+1) + (y+1)^3] dy$$

$$= -2\pi \int_{-1}^0 (y^4 + 3y^3 + 2y^2 + y) dy = \frac{23}{30} \pi \text{ br}^3$$

olur.



$$14. y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$$

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 2$$

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{2x^3 - x^4}{4} dx = \pi \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(2 - \frac{8}{5} \right) = \frac{2\pi}{5} \text{ br}^3$$

$$15. (y - x)^2 = x^3 \Rightarrow y - x = \pm x^{3/2} \Rightarrow y = x \pm x^{3/2}, \quad x = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x + x^{3/2})^2 - (x - x^{3/2})^2 \right] dx = \pi \int_0^1 4x^{5/2} dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{7} \pi \text{ br}^3$$

$$16. V = \pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2 dx$$

$$+ \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2 dx$$

$$+ \pi \int_{\pi - \arcsin c}^{\pi} (c - \sin x)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2 dx + \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2 dx$$

$$= 2\pi \left(c^2 x - 2c \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\arcsin c}$$

$$+ \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + 2c \cos x + c^2 x \right) \Big|_{\pi - \arcsin c}^{\pi}$$

$$\cos(\arcsin c) = \sqrt{1 - c^2} \text{ ve } \sin(2 \arcsin c)$$

$$= 2 \cdot \sin(\arcsin c) \cos(\arcsin c) = 2 \cdot c \sqrt{1 - c^2} \text{ olduğundan}$$

$$V = 2\pi \left[c^2 \arcsin c + 2c \sqrt{1 - c^2} + \frac{\arcsin c}{2} - \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \right]$$

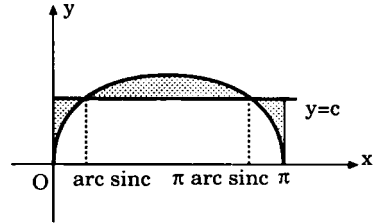
$$+ \pi \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \sqrt{1 - c^2} + c^2 \pi \right]$$

$$- c^2 \arcsin c - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2} c \sqrt{1 - c^2} - 2c \sqrt{1 - c^2} - c^2 \arcsin c \Big]$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - 2c + c^2 \frac{\pi}{2} \right]$$

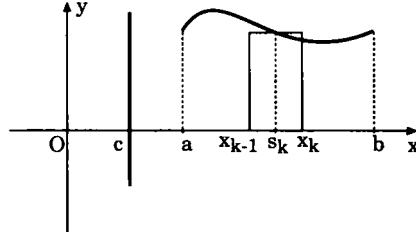
$$\Rightarrow V'_c = 0 \Leftrightarrow 2\pi(c\pi - 2) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{\pi} \text{ dir ve } V''_c = 2\pi^2 > 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{\pi} \text{ minimum nokta}$$



$$\begin{cases} x = \pi - u \\ dx = -du \end{cases}$$

17. $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun. $\Sigma_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alalım.



Boyu $f(\Sigma_k)$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= | \pi (x_k - c)^2 - \pi (x_{k-1} - c)^2 | f(\Sigma_k) \\ &= 2\pi \left| \frac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \right| | f(\Sigma_k) | \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

$$\|P\| \rightarrow 0 \text{ için } \frac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \cong \Sigma_k - c$$

olacağından

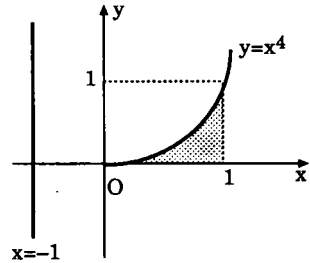
$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n (\Sigma_k - c) f(\Sigma_k) \Delta x_k \\ &= 2\pi \int_a^b (x - c) f(x) dx \end{aligned}$$

bulunur.

18. Problem 17 den

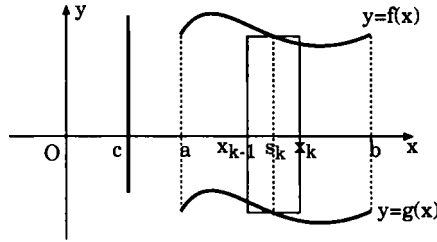
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) \cdot f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x + 1) x^4 dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{15} \pi \text{ br}^3 \end{aligned}$$

olur.



19. $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun.

$\Sigma_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alalım.



Boyu $(f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k))$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ eksenine etrafında döndürülmesi ile meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\Delta x_k = (\pi (x_k - c)^2 - \pi (x_{k-1} - c)^2) (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k))$$

$$= 2\pi \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k$$

$$V \cong 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k$$

$$\frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} \cong \Sigma_k - c \text{ olduğundan}$$

$\|P\| \rightarrow 0$ için

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n (\Sigma_k - c) (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \Delta x_k$$

$$= 2\pi \int_0^b (x - c) (f(x) - g(x)) dx$$

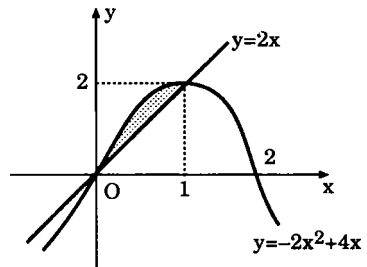
$$20. V = 2\pi \int_a^b (x - c) |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) (-2x^2 + 4x - 2x) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x + 1) (2x - 2x^2) dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 x^2 + x - x^3 - x^2 dx$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$$



21. Kesit bir kare ve kenarı x birim olduğundan, kesitin alanı $A(x) = x^2$

$$V = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = 9 \text{ br}^3$$

22. $t^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow S^2 = 4 - 4t^2$

$\Rightarrow$ kesitin alanı $A(t) = 4 - 4t^2$

$$V = \int_{-1}^1 A(t) dt = \int_{-1}^1 (4 - 4t^2) dt = 4 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = 4 \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

