final

EVİNİZE GELEN DERSHANE

ÖSS

MATEMATİK CEP KİTABI

final'in ücretsiz ekidir.

SAYILAR

RAKAM :

Sayıları ifade etmek için kullandığımız sembollere denir.

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarının her biri bir rakamdır.

DOĞAL SAYILAR :

N = {0 1, 2, 3, ..., n, ...} kümesinin elemanlarına doğal sayılar denir.

N^+ = {1, 2, 3, ..., n, ...} kümesinin elemanlarına pozitif doğal sayılar ya da SAYMA SAYILARI denir.

- En küçük doğal sayı sıfırdır.

TAMSAYILAR :

$$Z = \{\underbrace{..., -n, ..., -3, -2, -1}_{\substack{\text{Negatif Tamsayılar} \\ Z^-}}, 0, \underbrace{1, 2, 3, ..., n, ...}_{\substack{\text{Pozitif Tamsayılar} \\ Z^+}}\}$$

- $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ ve $N \subset Z$ dir.
- n bir tamsayı olmak üzere,

  Çift tamsayılar: 2n

  Tek tamsayılar: 2n – 1 ile gösterilir.
- Ardışık terimleri arasındaki farkın daima aynı olduğu bütün sayı dizilerinde :

  $$\text{Terim sayısı} = \frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Ortak fark}} + 1$$

  $$\text{Terimler Toplamı} = \frac{\text{Terim sayısı} \,.\, (\text{İlk Terim} + \text{Son Terim})}{2} \text{ dir.}$$

FAKTÖRİYEL :

1 den n ye kadar olan tamsayıların çarpımına n faktöriyel denir ve n! şeklinde gösterilir.

$5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$

- $n! = n \,.\, (n-1)!$ dir. $25! = 25 \,.\, 24!$

SAYILARIN ÇÖZÜMLENMESİ :

a, b, c birer rakam olmak üzere

$(ab) = 10a + b$

$(abc) = 100a + 10b + c$ dir.

- x sayı tabanı ve $x > a$, $x > b$, $x > c$ olmak üzere

  $(abc)_x = a \, . \, x^2 + b \, . \, x^1 + c \, . \, x^0$ şeklinde çözümlenir.

  $\rightarrow x^0$

  $\rightarrow x^1$

  $\rightarrow x^2$

$(213)_4 = 2.4^2 + 1.4^1 + 3.4^0 = 2.16 + 1.4 + 3.1 = 39$ olur.

RASYONEL SAYILAR (Q) :

a, b tamsayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesine kesir, kesirler kümesinin denklik sınıflarından her birine RASYONEL SAYI denir.

$\frac{a}{b}$ kesri :

- $|a| < |b|$ ise basit kesir.

  $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{96}, \ldots$ gibi)

- $|a| \geq |b|$ ise bileşik kesir :

  $(\frac{11}{4}, -\frac{43}{5}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{7}, \ldots$ gibi)

- $a = b$ ise tamsayı

- $a\frac{b}{c}$ yazılışına tamsayılı kesir denir.

  $2\frac{3}{5} = \frac{2.5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$ dir.

- Her tamsayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.

  $a = \frac{a}{1} \in Q \Rightarrow \boxed{Z \subset Q}$ olur.

RASYONEL SAYILARDA İŞLEMLER :

$\frac{a}{b}$ ile $\frac{c}{d}$ iki rasyonel sayı olsun.

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$

2) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}$

3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

4) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

RASYONEL SAYILARIN ONDALIK AÇILIMI:

$\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının payının paydasına bölümünden elde edilen bölüme rasyonel sayının ONDALIK AÇILIMI denir.

$\frac{8}{9} = 0,8888.... = 0,\overline{8}$ (devirli ondalık açılım)

$\frac{4}{33} = 0,121212.... = 0,\overline{12}$ (devirli ondalık açılım)

Örneklerde görüldüğü gibi bazı kesirler ondalıklı yazılmak istendiğinde, ondalık kısımdaki sayılar belli bir yerden sonra aynen tekrar ediyor ise bu sayılara devirli ondalıklı sayılar denir.

Devirli ondalıklı sayıyı rasyonel sayıya çevirme :

Sayının tamamından (virgül dikkate alınmadan) devretmeyen sayı çıkarılıp kesrin payına yazılır. Paydaya ise virgülün sağındaki devreden rakam sayısı kadar 9, devretmeyen rakam sayısı kadar 0 (sıfır) yazılır.

$$a,b\overline{c} = \frac{abc - ab}{90}$$

$$a,b\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{990}$$

$a,\overline{bc} = \dfrac{abc - a}{99}$ .... gibi.

$0,3\overline{7} = \dfrac{37 - 3}{90} = \dfrac{34}{90} = \dfrac{17}{45}$

$0,5\overline{24} = \dfrac{524 - 5}{990} = \dfrac{519}{990}$

İRRASYONEL SAYILAR :

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$ $\pi \cong 3{,}14$ $e \cong 2{,}718$

gibi devirli ondalık açılımı olmayan sayılara İRRASYONEL SAYILAR denir. Bu sayılar $\dfrac{a}{b}$ şeklinde yazılamazlar.

İrrasyonel sayılar kümesi Q' ile gösterilir.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... birer irrasyonel sayıdır.

GERÇEL (REEL) SAYILAR :

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine denir. R ile gösterilir.

$\boxed{Q \cup Q' = R}$

- Her sayma sayı bir doğal sayı, her doğal sayı bir tamsayı, her tamsayı bir rasyonel sayı ve her rasyonel ya da irrasyonel sayıda bir reel sayı belirtir.

  $N^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R$ ve $Q' \subset R$ dir.

MUTLAK DEĞER :

Sayı doğrusu üzerindeki bir $x \in R$ sayısının sıfıra olan uzaklığına x in MUTLAK DEĞERİ denir.

|x| ifadesinde

1) $x > 0$ ise $|x| = x$
2) $x < 0$ ise $|x| = -x$
3) $x = 0$ ise $|x| = 0$ dır.

$|7| = 7,\qquad |-13| = -(-13) = 13,$

$$\underbrace{\left|\sqrt{2}-9\right|}_{\text{negatif}} = -(\sqrt{2}-9) = 9-\sqrt{2}$$

Özellikler :

1) $|x| \geq 0$ dır.
2) $|x| = |-x|$

   $|x-y| = |y-x|$,

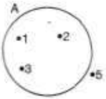
   $|2-a| = |a-2|$ gibi
3) $|x^2| = |x|^2 = x^2$, $\sqrt{x^2} = |x|$
4) $|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$
6) $c > 0$

   $|x-a| = c \Rightarrow x-a = \mp c$

   $x = a \mp c$
7) $|x-a| \leq c \Rightarrow -c \leq x-a \leq c$

   $a-c \leq x \leq a+c$
8) $|x-a| \geq c \Leftrightarrow x-a \geq c$ veya $x-a \leq -c$
9) $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

KÜMELER :



- $A = \{1,2,3\}$ kümesinde $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$, $5 \notin A$ dır.
- Aynı elemanlardan oluşan iki kümeye **Eşit Küme** ve eleman sayıları eşit olan kümelere **Denk Küme**'ler denir.

  $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,1,3\} \Rightarrow A = B$ dir. (eşit küme) $A \equiv B$ dir. (A denk B dir.)

- Hiç elemanı olmayan kümeye **Boş Küme** denir.
  $\emptyset$ yada { } şeklinde gösterilir. $\emptyset \neq \{0\}$ $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\forall x \in A$ için $x \in B$ ise $A \cup B$ dir. (A, B'nin alt kümesidir.)
- **Alt Küme Özelikleri :**

1) $\emptyset \subset A$ 2) $A \subset A$

3) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$ 4) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ dir.

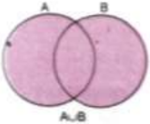
5) a) n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısı $= 2^n$ dir.

b) n elemanlı bir kümenin öz alt kümeleri sayısı $= 2^n - 1$ dir.

c) n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri sayısı $= 2^n - 1$ dir.

$$\boxed{C_n^r = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$ ile bulunur.

BİRLEŞİM :

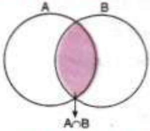


A ile B kümelerinin birleşimi $A \cup B$ biçiminde gösterilir.

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$ dir.

Her A, B kümesi için $A \cup B = B \cup A$ dır.

KESİŞİM :



A ve B kümelerinin her ikisinde de ortak olarak bulunan elemanların kümesine bu iki kümenin KESİŞİMİ yada ARAKESİTİ denir.

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ dir.

BİRLEŞİMİN ÖZELİKLERİ :

1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup B = B \cup A$

3) $A \cup \emptyset = A$ 4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

5) $A \subset (A \cup B) \wedge B \subset (A \cup B)$

6) $A \cup B = \emptyset \ (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$

7) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

8) $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$

9) $S(A \cup B \cup C) = S(A) + S(B) + S(C) - S(A \cap B) - S(A \cap C) - S(B \cap C) + S(A \cap B \cap C)$

KESİŞİMİN ÖZELİKLERİ :

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap B = B \cap A$

3) $A \cap \emptyset = \emptyset$

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5) $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

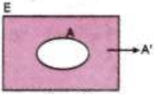
6) $A \cap B = \emptyset \begin{cases} A = \emptyset \vee B = \emptyset \text{ veya} \\ A \text{ ile } B \text{ ayrıktır.} \end{cases}$

7) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

9) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ:



$a \in A' \Leftrightarrow a \notin A$

Üzerinde işlem yaptığımız kümeleri kapsayan E kümesine EVRENSEL KÜME denir. E evrensel kümesinin herhangi bir alt kümesi A ise, E kümesinin A'da bulunmayan elemanlarının kümesine A'nın TÜMLEYENİ denir ve A′ ile gösterilir.

1) $(A')' = A$

2) $\emptyset' = E, \ E' = \emptyset$

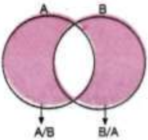
3) $A \cup A' = E, \ [S(E) = S(A) + S(A')]$

4) $E \cup A' = E, \ E \cap A' = A'$

5) $(A \cup B)' = A' \cap B', \ (A \cap B)' = A' \cup B'$

6) $A \subset B \Rightarrow A' \supset B'$

İKİ KÜMENİN FARKI :



A ve B herhangi iki küme olsun. A'nın elemanı olup, B'nin elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye "A nın B den FARKI" denir. A/B veya A–B şeklinde gösterilir.

KARTEZYEN ÇARPIM :

$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B\}$ dir.

$A \times A$ kümesi A^2 biçiminde de gösterilebilir.

$A \times B \neq B \times A$, $S(A \times B) = S(B \times A) = S(A) \cdot S(B)$ dir.

BAĞINTI :

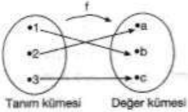
A ile B herhangi iki küme ve β, $A \times B$ nin bir alt kümesi ise, β kümesine A dan B ye bir bağıntı denir.

☞ $S(A) = m$, $S(B) = n$ ise A dan B ye $2^{m.n}$ tane bağıntı tanımlanabilir.

FONKSİYON :

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya A dan B ye bir fonksiyon denir.

$f : A \to B$ biçiminde gösterilir.



TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR :

$f : R \to R$ $\quad$ $y = f(x)$ fonksiyonunda,

a) $\forall x \in R$ için $f(-x) = f(x)$ ise f ye ÇİFT FONKSİYON denir.

b) $\forall x \in R$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f ye TEK FONKSİYON denir.

TERS FONKSİYON :

$f : A \to B$ $\qquad$ $f^{-1} : B \to A$

$x \to y$ $\qquad$ $y \to x$

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

☞ $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyondur.

- f fonksiyonu birebir ve örten değilse f^{-1} bağıntısı fonksiyon olamaz.
- a, b $\in$ R ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{c} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{cx-b}{a}$$

Genel olarak; $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

BİLEŞKE FONKSİYON :

f: A $\rightarrow$ B ve g: C $\rightarrow$ D fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer $f(A) \subset C$ ise $\forall x \in A$ için $(gof)(x) = g(f(x))$ olacak biçimde elde edilen gof: A $\rightarrow$ D fonksiyonuna f ile g nin BİLEŞKESİ denir.

Özelikleri :

1) $gof \neq fog$
2) $(fog)oh = fo(goh)$
3) $fof^{-1} = f^{-1}of = I, \quad gog^{-1} = g^{-1}og = I$

(I: Birim fonksiyon)

4) $foI = Iof = f, \quad goI = Iog = g$
5) $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
6) $fog = h \Leftrightarrow f = hog^{-1}$ ve $g = f^{-1}oh$

PERMÜTASYON :

A sonlu kümesinde, A dan A ya tanımlanan bire-bir ve örten her f fonksiyonuna A kümesinin bir PERMÜTASYONU denir.

ÖZDEŞLİKLER

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

4) $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)$

5) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab$

6) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

7) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

8) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

9) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

10) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

11) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

12) $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

13) $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

14) $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

BİNOM FORMÜLÜ :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} . b^p \text{ dir.}$$

1) $(a + b)^n$ ifadesinin açılımında $n + 1$ terim vardır.

2) $(a + b)^n$ ifadesinin açılımında baştan ve sondan eşit uzaklıkta olan terimlerin katsayıları eşittir.

3) $(a + b)^n$ ifadesinin açılımında $\binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ terimi p+1 inci terim olur.

4) $(a + b)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamını bulmak için $a = b = 1$ almak yeterlidir.

PASKAL ÜÇGENİ :

Binom açılımındaki terimlerin katsayıları Paskal üçgeni adı verilen aşağıdaki üçgenden de bulunabilir. (Paskal üçgeninin her satırındaki ikinci sayı parantezin üssünü, her satır ise katsayıları verir.)

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & \longrightarrow & (a+b)^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \longrightarrow & (a+b)^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \longrightarrow & (a+b)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \longrightarrow & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \longrightarrow & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \longrightarrow & (a+b)^5
\end{array}$$

- n pozitif tamsayı olmak üzere,

  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1})$

  $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1})$

  (yalnız n tek iken geçerlidir.)

- n çift doğal sayı ise :

  $(a - b)^n = (b - a)^n$ yazılabilir.

ORAN VE ORANTI

a ve b reel sayılarından **en az biri** sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ yazılışına a'nın b ye ORANI denir. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ oranları için,

$a . d = b . c$ ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dir. ve bu ifadeye ORANTI denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında $(a, d) \Rightarrow$ dışlar

$(b, c) \Rightarrow$ içler

ORANTININ ÖZELİKLERİ:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ dır. (Dışlar yer değişebilir.)

2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ dir. (İçler yer değişebilir.)

3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ dir. (Orantı ters çevrilebilir.)

4) $m \neq 0$ ve $n \neq 0$ için $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma + nc}{mb + nd}$ yazılabilir.

5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ya da $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ dir.

6) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ya da $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ dir.

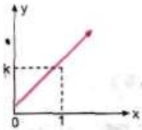
7) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = k^2 = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = k^2$

(k : orantı sabiti)

8) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ÜÇLÜ ORANTI'sı

$a : c : e = b : d : f$ biçiminde yazılabilir.

DOĞRU ORANTI :



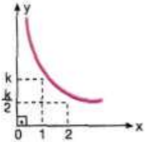
Bir orantıda çokluklardan biri artarken diğeride artıyor veya biri azalırken diğeri de azalıyorsa bu bir doğru orantıdır.

$x, y \in R^+$ ve $k > 0$ sabit bir reel sayı olmak üzere: x ile y **doğru orantılı** ise:

$\boxed{\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = k \cdot x}$ dir.

(Doğru orantılı çoklukların bölümü sabittir.)

TERS ORANTI :



Bir orantıda çokluklardan biri artarken diğeri azalıyor veya biri azalırken diğeri artıyorsa bu bir TERS ORANTI dır.

$x, y \in R^+$ çoklukları ters orantılı ise bunların çarpımı sabit olup $\boxed{y.x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}}$ dir.

ARİTMETİK-GEOMETRİK-HARMONİK ORTALAMA:

1) a ve b reel sayıları için $x = \frac{a+b}{2}$ sayısına a ile b nin ARİTMETİK ORTALAMASI denir.

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ gibi n tane sayının aritmetik ortalaması $\boxed{x = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$ dir.

2) a ve b reel sayıları için $x = \sqrt{a \cdot b}$ ise, x sayısına a ile b nin GEOMETRİK ORTALAMASI veya x sayısı a ile b arasında ORTA ORANTILI'dır denir.

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ gibi n tane sayının geometrik ortalaması $\boxed{x = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}}$ dir.

Aritmetik ortalama ≥ Geometrik ortalama

(Sayılar eşitse, Aritmetik ve geometrik ortalama eşit olur.)

3) a ve b reel sayıları için $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ sayısına a ile b nin HARMONİK ORTALAMASI denir.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gibi n tane sayının harmonik ortalaması $\boxed{x = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}}$ dir.

ÜSLÜ İFADELER

$a \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere $\underbrace{a.a.a\ldots a}_{n \text{ tane}} = a^n$ dir. (a: taban, n: üs)

1) $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ dir. (0^0 belirsizdir.)

$a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$ (a kare), $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (a küp)

2) $a > 0$ için $(-a)^{2n} = a^{2n} > 0$ dır. $[(-2)^2 = (2)^2 = 4 > 0]$

3) $a > 0$ için $(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} < 0$ dır. $[(-3)^3 = -3^3 = -27 < 0]$

4) $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$, $(a-b)^{2n-1} = -(b-a)^{2n-1}$

5) $a^n = a^m \Rightarrow n = m$ dir. $(a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq -1)$

$(2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4)$

6) $ax^n + bx^n + cx^m - dx^m + ex^m = (a+b)x^n + (c-d+e)x^m$

$[4 \cdot 2^{10} + 5 \cdot 2^{10} - 3 \cdot 2^{10} = (4+5-3) \cdot 2^{10} = 6 \cdot 2^{10}]$

7) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^2 \cdot a^3 = a^5)$;

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$, $(a^4 \cdot b^4) = (a \cdot b)^4$

8) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\left[\dfrac{a^7}{a^3} = a^4\right]$; $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ $(b \neq 0)$;

$\left[\dfrac{a^5}{b^5} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^5\right]$

9) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$; $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$;

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$; $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$;

$\dfrac{4^{-2}}{3^{-2}} = \dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}$, $(-2)^{-3} = -\dfrac{1}{8}$, $(-2)^{-4} = \dfrac{1}{16}$

10) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad (a^4)^3 = a^{12}$

KÖKLÜ İFADELER

$a \in R$ ve $n \in Z$ $(n \geq 2)$ olmak üzere, n. kuvveti alındığında a'yı veren x reel (gerçel) sayılarına, a'nın n. kuvvette kökü denir.

- n çift iken $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
- n tek iken $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.

UYARI :

Çift kuvveti negatif olan bir reel sayı bulunmadığından, negatif bir gerçel sayının çift kuvvetten kökü bir gerçel sayı değildir.

$\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[4]{-16} \neq -2$ Çünkü:
$3^3 = 27$, $(-2)^3 = -8$, $(-2)^4 \neq -16$

- $x^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = 4$ veya $x = -4$
- Bundan sonraki bütün köklü ifadelerin reel sayılarda tanımlı olduğunu varsayacağız.

A) RASYONEL KUVVET (Kökün üslü biçimde yazılması)

m çift iken $a > 0$, tek iken $a \in R$ olmak üzere

$\sqrt[m]{a^n} = |a|^{n/m}$ dir.

$\sqrt[m]{a^n} = |a|^{n/m} = a^{\frac{n.p}{m.p}} = \sqrt[m.p]{a^{n.p}}$

($a < 0$ ve p çift iken: $\sqrt[m]{a^n} \neq \sqrt[m.p]{a^{n.p}}$)

B) KÖKÜN KÖKÜ :

1) $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[m.n.p]{a^{n.p}.b^{p}.c}$

2) $\sqrt{a \mp \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ($c = \sqrt{a^2 - b}$ dir.)

3) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\ ....}}} = x \Rightarrow x = \sqrt[n-1]{a}$

4) $\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\ ...\ \sqrt{a}}}}_{n \text{ tane}} = \sqrt[2^n]{a^{2^n - 1}}$

5) $\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : ....}}} = x \Rightarrow x = \sqrt[n+1]{a}$

6) $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ...}}} = x \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

(a sayısı ardışık iki tamsayının çarpımına eşit ise sonuç büyük olan sayıya eşittir.)

7) $\sqrt{a.(a+1) + \sqrt{a(a+1) + ...}} = x \Rightarrow x = a + 1$

C) KÖKLÜ İFADELERDE DÖRT İŞLEM :

1) $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} - c\sqrt[n]{x} = (a+b-c)\sqrt[n]{x}$ dir.

2) $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$; $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

D) KESİRLERİN PAYDASINI RASYONEL YAPMA:

Bir kesrin paydasını rasyonel yapmak demek, paydada köklü terim bırakmamak demektir.

1) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} . \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

2) $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{b}} . \dfrac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \dfrac{a.\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$

3) $\dfrac{a}{b \mp \sqrt{c}} = \dfrac{a}{b \mp \sqrt{c}} . \dfrac{b \pm \sqrt{c}}{b \pm \sqrt{c}} = \dfrac{a.(b \pm \sqrt{c})}{b^2 \pm c}$

4) $\dfrac{a}{\sqrt{b} \mp \sqrt{c}} = \dfrac{a}{\sqrt{b} \mp \sqrt{c}} . \dfrac{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \dfrac{a.(b \pm \sqrt{c})}{b \pm c}$

5) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b} \mp \sqrt[3]{c}} = \dfrac{a}{\sqrt[3]{b} \mp \sqrt[3]{c}} . \dfrac{\sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}}$

$$= \frac{a\left(\sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}\right)}{b \mp c}$$

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b, c \in R$, $a \neq 0$ ve x bilinmeyen olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlerdir.

- $\boxed{b^2 - 4ac = \Delta}$ (diskriminant) ve kökler x_1, x_2 olsun

  $a \neq 0, \; b \neq 0, \; c \neq 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

- $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{-c}{a}}$ (kökler simetrik) (a ile c aynı işaretli ise reel kök yoktur.)
- $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{b}{a}$
- $b = c = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ dır.
- **Reel Köklerin araştırılması**

1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ (farklı reel iki kök vardır.)
2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (çakışık iki kök vardır.)
3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \notin R$ (gerçel kökler yoktur.)

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde b ÇİFT SAYI ise:

$b' = \frac{b}{2}$ olmak üzere

$$\boxed{\Delta' = (b')^2 - ac \text{ ve } x_{1,2} = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a}}$$

DENKLEMLERDE KÖK KATSAYI BAĞINTILARI :

A) İkinci derece denklemlerde kök katsayı bağıntıları :

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun.

1) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2) $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

3) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

4) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

6) $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

B) Üçüncü derece denklemlerde kök katsayı bağıntıları:

$a, b, c, d \in R$ ve $a \neq 0$ x bilinmeyen olmak üzere;

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 olsun.

1) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

2) $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = \frac{c}{a}$

3) $x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$

4) $x_1 + x_3 = 2x_2$ (Aritmetik dizi şartı)

5) $x_1 . x_3 = x_2^2$ (Geometrik dizi şartı)

KÖKLERİ BİLİNEN İKİNCİ DERECE DENKLEMİ YAZMAK

Kökleri x_1, x_2, x_3, ..., x_n olan n. derece denklem $a \neq 0$ olmak üzere, genel olarak

$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) = 0}$ şeklinde yazılır.

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklemi

1) $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ şeklinde yazılabilir.
Bu denklemde $a = 1$ alınırsa :

2) $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\,x_2 = 0$ denklemi elde edilir.
Bu denklem yardımıyla:
   a) Kökleri verilen ikinci derece denklem ile,
   b) Toplam ve çarpımları bilinen sayılar bulunabilir.

EŞİTSİZLİKLER

Eşitsizliğin çözümünü bulmak için, önce verilen ifadenin işareti incelenir. Bunun için de ifade sıfıra eşitlenip kökler bulunarak tabloda yazılıp çözüm bölgesi bulunur.

1) BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER :

$a \neq 0$ ve $a, b \in R$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, şeklindeki ifadelerdir.

$f(x) = ax + b = 0$ yazılırsa $x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynı

2) İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere:

$f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$ şeklindeki eşitsizliklerdir.

A) $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel kökleri yoktur.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f(x)	İşaret her yerde a'nın işaretinin aynı

$\forall x \in R$ için $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ ve $a < 0$ (daima negatif)

$\forall x \in R$ için $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ ve $a > 0$ (daima pozitif)

B) $\Delta = 0$ ise, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde eşit iki kök vardır.

x	$-\infty$	$x_1=x_2$ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$+\infty$
f(x)	a'nın işaretinin aynı	0	a'nın işaretinin aynı

C) $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 gibi farklı iki gerçel kökü vardır.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	a'nın işaretinin aynı	a'nın işaretinin tersi	a'nın işaretinin aynı	

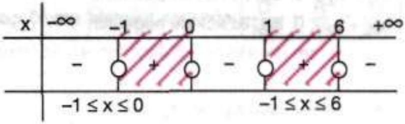
3) $f(x) = A(x) . B(x) . C(x)$ biçimindeki ifadelerin işareti incelenirken çarpanların herbiri ayrı ayrı sıfıra eşitlenip kökler bulunur. Bulunan kökler tabloda yazılır. Sonra çarpanların herbirinden en büyük üslü terimler alınıp çarpılır.

Elde edilen ax^n şeklindeki ifade de a'nın işaretinin aynısı $+\infty$ tarafa (en sağa) yazılarak, her kökte işaret değiştirilerek tablo işaretlenir. Ancak iki kat köke rastlandığında işaret değiştirilmez.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadeler $P(x) . Q(x)$ şeklindeymiş gibi düşünülerek işlem yapılır.

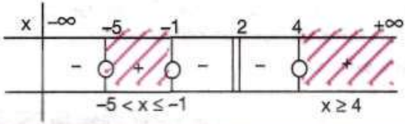
$(x^2 - 6x)(2 - 2x^2) \geq 0$

$x^2 \cdot (-2x^2) = -2x^4$



$$\frac{(x^2 - 3x - 4)(4x - 8)}{x^2 + 3x - 10} \geq 0$$

$x^2 \cdot 4x \cdot x^2 = +4x^5$



UYARI :

Bölüm halindeki ifadelerde paydayı sıfır yapan x değerleri ifadeyi tanımsız yaptıklarından; çözüm aralığına dahil edilmezler.

$ax^2 + bx + c = 0$ DENKLEMİNDE KÖKLERİN İŞARETİ

Denklemin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

1) $x_1 \cdot x_2 < 0$ ise, ters işaretli iki gerçel kök vardır.

Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 > 0$ ise, mutlak değeri büyük olan kök pozitiftir.

b) $x_1 + x_2 < 0$ ise, mutlak değeri büyük olan kök negatiftir.

c) $x_1 + x_2 = 0$ ise, köklerin mutlak değeri eşittir.

2) $x_1 \cdot x_2 > 0$ ve $\Delta \geq 0$ ise, denklemin aynı işaretli iki gerçel kök kökü vardır. Bu duruda;

a) $x_1 + x_2 > 0$ ise, iki kök de pozitiftir.

b) $x_1 + x_2 < 0$ ise, iki kök de negatiftir.

3) $x_1 \cdot x_2 = 0$ ise, denklemin köklerinden en az biri sıfırdır. Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 > 0$ ise, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$

b) $x_1 + x_2 < 0$ ise, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$

c) $x_1 + x_2 = 0$ ise, $x_1 = x_2 = 0$ olur.

4) $\Delta < 0$ ise, denklemin gerçel kökleri olmadığından, köklerin işareti sözkonusu değildir.

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ DENKLEMİNİN GERÇEL KÖKLERİNİN BİR K GERÇEL SAYISI İLE KARŞILAŞTIRILMASI

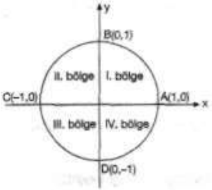
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. $x_1 < x_2$ ve $k \in R$ alalım.

1) $x_1 < k < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(k) < 0$ (k, kökler arasında)

2) $\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \text{ ve} \\ a \cdot f(k) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k + \frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow x_1 < x_2 < k \\ k + \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow k < x_1 < x_2 \end{array}$

3) $a \cdot f(k) = 0 \Rightarrow k$ denklemin köklerinden biridir.

TRİGONOMETRİ

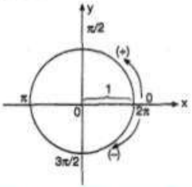


TRİGONOMETRİ ÇEMBERİ:

Merkezi koordinat eksenlerinin başlangıç noktası ve yarıçapı 1 birim uzunlukta olan çembere Trigonometri çemberi ya da birim çember denir. Birim çemberin yarıçapı $r = 1$ olduğundan çevresi 2π dir.

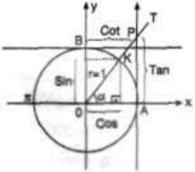
Çemberin çevresi: 360° (derece), 2π radyan ya da 400 Grada eşittir.

Bu açı ölçme birimleri arasında $\boxed{\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}}$ eşitlikleri vardır.



Çemberde saat ibresinin ters yönü (+), aynı yönü ise (–) işaretle gösterilir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR :



Trigonometri çemberi üzerinde bir nokta $K = (x_1, y_1)$ ve K'ya karşılık gelen sayı α olsun.

$\text{Sin}\alpha = y_1$, $\text{Cos}\alpha = x_1$

$\tan\alpha = |AT|$, $\text{Cot}\alpha = |BP|$

$\text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1 \Rightarrow$

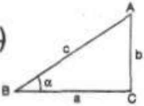
$\text{Sin}^2\alpha = 1 - \text{Cos}^2\alpha$

$\text{Cos}^2\alpha = 1 - \text{Sin}^2\alpha$

DİK ÜÇGENLERDE TRİGONOMETRİK ORANLAR:

$\text{Sin}\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \left(\frac{\text{Karşı dikkenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}\right)$

$\text{Cos}\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \left(\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}\right)$



- $\tan\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \left(\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}\right)$

- $\text{Cot}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}\right)$

- $\text{Sec}\alpha = \frac{1}{\text{Cos}\alpha} = \frac{c}{a}$, $\quad \text{Cosec}\alpha = \frac{1}{\text{Sin}\alpha} = \frac{c}{b}$

- $\tan\alpha = \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos}\alpha}$, $\quad \text{Cot}\alpha = \frac{\text{Cos}\alpha}{\text{Sin}\alpha}$

- $\tan\alpha = \frac{1}{\text{Cot}\alpha} \Rightarrow \tan\alpha \, . \, \text{Cot}\alpha = 1$

- $\text{Sec}\alpha \, . \, \text{Cos}\alpha = 1$, $\quad \text{Cosec}\alpha \, . \, \text{Sin}\alpha = 1$

- Yukarıdaki şekilde: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90°$

  $\text{Sin}A = \text{Cos}B \qquad \tan A = \text{Cot}B$

  $\text{Sin}B = \text{Cos}A \qquad \tan B = \text{Cot}A \quad$ dır.

- **Bazı özel açıların Trigonometrik Oranları:**

α	$0°$	$\pi/6$ $(30°)$	$\pi/4$ $(45°)$	$\pi/3$ $(60°)$	$\pi/2$ $(90°)$	$\frac{2\pi}{3}$ $(120°)$	π $(180°)$	$\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız	$-\sqrt{3}$	0	Tanımsız
Cot	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	Tanımsız	0

Trigonometrik Fonksiyonların bölgelere göre işareti:

	I. Bölge	II. Bölge	III. Bölge	IV. Bölge
α	$0<\alpha<90$	$90<\alpha<180$	$180<\alpha<270$	$270<\alpha<360$
Sinα	+	+	–	–
Cosα	+	–	–	+
Tanα	+	–	+	–
Cotα	+	–	+	–
	Bütün	Sınıf	Kara Tahtada	Coşar
	(Bütün açılar)	(Sinüs)	(Kotanjant Tanjant)	(Cosinüs)

Bu işaret tablosuna göre :

α dar açı olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

A) Yatay Eksene Göre :

I. Bölge	**II. Bölge**
$\text{Sin}(2k\pi + \alpha) = \text{Sin}\alpha$	$\text{Sin}(\pi - \alpha) = \text{Sin}\alpha$
$\text{Cos}(2k\pi + \alpha) = \text{Cos}\alpha$	$\text{Cos}(\pi - \alpha) = -\text{Cos}\alpha$
$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\text{Cot}(2k\pi + \alpha) = \text{Cot}\alpha$	$\text{Cot}(\pi - \alpha) = -\text{Cot}\alpha$

III. Bölge	**IV. Bölge**
$\text{Sin}(\pi + \alpha) = -\text{Sin}\alpha$	$\text{Sin}(2\pi - \alpha) = -\text{Sin}\alpha$
$\text{Cos}(\pi + \alpha) = -\text{Cos}\alpha$	$\text{Cos}(2\pi - \alpha) = \text{Cos}\alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\text{Cot}(\pi + \alpha) = \text{Cot}\alpha$	$\text{Cot}(2\pi - \alpha) = -\text{Cot}\alpha$

$Sin(-\alpha) = -Sin\alpha$	$Cos(-\alpha) = Cos\alpha$
$tan(-\alpha) = -tan\alpha$	$Cot(-\alpha) = -Cot\alpha$

B) Düşey Eksene Göre :

I. Bölge	**II. Bölge**
$Sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Cos\alpha$	$Sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = Cos\alpha$
$Cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Sin\alpha$	$Cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -Sin\alpha$
$tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Cot\alpha$	$tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -Cot\alpha$
$Cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tan\,\alpha$	$Cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tan\,\alpha$

III. Bölge	**IV. Bölge**
$Sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -Cos\alpha$	$Sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -Cos\alpha$
$Cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -Sin\alpha$	$Cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = Sin\alpha$
$tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = Cot\alpha$	$tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -Cot\alpha$
$Cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = tan\,\alpha$	$Cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -tan\,\alpha$

PERYOT :

Sinx ve Cosx fonksiyonlarının PERYODU 2π
tanx ve Cotx fonksiyonlarının PERYODU π dir.

1) $Sin^m(ax + b)$ ve $Cos^m(ax + b)$ fonksiyonlarında

a) m tek ise PERYOT: $\frac{2\pi}{a}$

b) m çift ise PERYOT: $\frac{\pi}{a}$

2) $\tan^m(ax+b)$ ve $\cot^m(ax+b)$ fonksiyonlarında m'nin tek ve çift kuvvetleri için PERYOT $\frac{\pi}{a}$ dır.

3) Birden fazla Peryodik fonksiyonun toplamının peryodu bulunurken; ayrı ayrı peryotlar bulunup bunların ortak katlarının en küçüğü (okek) alınır.

YARIM AÇI FORMÜLLERİ :

$Sin2a = 2Sina \cdot Cosa$	$Sin2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$
$Cos2a = Cos^2a - Sin^2a$ $= 2Cos^2a - 1$ $= 1 - 2\sin^2a$	$Cos2a = \dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$
$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$Cot2a = \dfrac{Cot^2 a - 1}{2Cota}$
$Sina = 2Sin\frac{a}{2} \cdot Cos\frac{a}{2} = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$	
$Cosa = Cos^2\frac{a}{2} - Sin^2\frac{a}{2} = 2Cos^2\frac{a}{2} - 1 = 1 - 2Sin^2\frac{a}{2}$	

TOPLAM VE FARK FORMÜLLERİ :

$Sin(a+b) = Sina \cdot Cosb + Sinb \cdot Cosa$

$Sin(a-b) = Sina \cdot Cosb - Sinb \cdot Cosa$

$Cos(a+b) = Cosa \cdot Cosb - Sina \cdot Sinb$

$Cos(a-b) = Cosa \cdot Cosb + Sina \cdot Sinb$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b},\quad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a.\cot b-1}{\cot a+\cot b}\quad \cot(a-b)=\frac{\cot a.\cot b+1}{\cot b-\cot a}$$

TOPLAM VEYA FARKIN ÇARPIM ŞEKLİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

$a+b=p \qquad a-b=q$ olmak üzere :

$$\text{Sinp}+\text{Sinq}=2\,\text{Sin}\,\frac{p+q}{2}\,.\,\text{Cos}\,\frac{p-q}{2}$$

$$\text{Sinp}-\text{Sinq}=2\,\text{Sin}\,\frac{p-q}{2}\,.\,\text{Cos}\,\frac{p+q}{2}$$

$$\text{Cosp}+\text{Cosq}=2\,\text{Cos}\,\frac{p+q}{2}\,.\,\text{Cos}\,\frac{p-q}{2}$$

$$\text{Cosp}-\text{Cosq}=-2\,\text{Sin}\,\frac{p+q}{2}\,.\,\text{Sin}\,\frac{p-q}{2}$$

$$\text{tanp}+\text{tanq}=\frac{\text{Sin}(p+q)}{\text{Cosp}.\text{Cosq}},\quad \text{tanp}-\text{tanq}=\frac{\text{Sin}(p-q)}{\text{Cosp}.\text{Cosq}}$$

$$\text{Cotp}+\text{Cotq}=\frac{\text{Sin}(p+q)}{\text{Sinp}.\text{Sinq}},\quad \text{Cotp}-\text{Cotq}=-\frac{\text{Sin}(p-q)}{\text{Sinp}.\text{Sinq}}$$

ÇARPIMIN TOPLAM YA DA FARKA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

$$\text{Sina}\,.\,\text{Cosb}=\frac{1}{2}\,[\text{Sin}(a+b)+\text{Sin}(a-b)]$$

$$\text{Sina}\,.\,\text{Sinb}=-\frac{1}{2}\,[\text{Cos}(a+b)-\text{Cos}(a-b)]$$

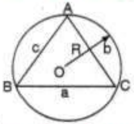
$$\text{Cosa}\,.\,\text{Cosb}=\frac{1}{2}\,[\text{Cos}(a+b)+\text{Cos}(a-b)]$$

$$\text{Sin3a}=3\text{Sina}-4\sin^3 a$$

$$\text{Cos3a}=4\text{Cos}^3 a-3\text{Cosa}$$

$$\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$$

SİNÜS TEOREMİ :



Bir üçgende kenarlar karşılarındaki açıların sinüsleri ile orantılı olup, bu oran çevrel çemberinin yarıçapına eşittir.

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ dir.

KOSİNÜS TEOREMİ :

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\mathrm{Cos}B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}C \end{array}}$$

TRİGONOMETRİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜM KÜMELERİ

I) $\mathrm{Sin}x = a$, $(a \in R)$ denkleminde

a) $|a| > 1 \Rightarrow$ çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

b) $|a| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha < 2\pi$ için $a = \mathrm{Sin}\alpha$ ise

$\mathrm{Sin}x = \mathrm{Sin}\alpha$ biçiminde yazılabilir. Buradan kökler:

$$\boxed{x_1 = \alpha + k\,.\,2\pi,\ x_2 = (\pi - \alpha) + k\,.\,2\pi\ (k \in Z)}$$ bulunur.

II) $\mathrm{Cos}x = a$, $(a \in R)$ denkleminde,

a) $|a| > 1 \Rightarrow Ç = \emptyset$ dır.

b) $|a| \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\alpha\ (0 \leq \alpha < 2\pi)$ yazılabilir.

Bu durumda kökler;

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha + k.2\pi \\ x_2 = -\alpha + k.2\pi \end{array}\right\} x = \mp \alpha + k.2\pi \quad (k \in Z)}$$ olur.

III) $\mathrm{tan}x = a$, $(a \in R)$ denkleminde

$\forall a \in R$ ve $0 \leq 0\alpha < \pi$ için $\mathrm{tan}x = \mathrm{tan}\alpha$ yazılır.

Kökler : $\boxed{x = \alpha + k\pi,\ \ (k \in Z)}$ olur.

KARMAŞIK SAYILAR

Tanım :

a,b∈R ve $i^2 = -1$ olmak üzere $Z = a + bi$ biçiminde tanımlı Z sayısına karmaşık (kompleks) sayı denir. Karmaşık sayılar kümesi C ile gösterilir. $Z = a + bi$ karmaşık sayısında;

- a'ya Z nin gerçel (reel) kısmı ($Re(Z) = a$) denir.
- b'ye Z nin sanal(imajiner) kısmı ($İm(Z) = b$) denir.

$\sqrt{-1} = i$ $\qquad \sqrt{-a} = \sqrt{(-1).a} = \sqrt{a}\,.i$

$i^1 = i \qquad i^3 = -i \qquad i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+3} = -i$

$i^2 = -1 \qquad i^4 = 1 \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n} = 1$

Bir Karmaşık Sayının Eşleniği:

$Z = a + bi$ karmaşık sayısı için $\overline{Z} = a - bi$ sayısına Z nin eşleniği denir. [$Z = 2 + 3i \Rightarrow \overline{Z} = 2 - 3i$]

KARMAŞIK SAYILARDA İŞLEMLER :

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayıları için:

1) $(a = c) \wedge (b = d) \Leftrightarrow Z_1 = Z_2$ dir.

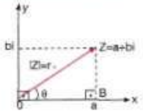
2) $Z_1 \mp Z_2 = (a \mp c) + (b \mp d)\,i$

3) $Z_1 . Z_2 = (a + bi) . (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4) $Z_1 . \overline{Z}_1 = a^2 + b^2$

5) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1 . \overline{Z}_2}{Z_2 . \overline{Z}_2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$

KARMAŞIK (KOMPLEKS) DÜZLEM VE KARMAŞIK SAYININ KUTUPSAL (TRİGONOMETRİK) BİÇİMİ



$r = |Z| = |OZ| = \sqrt{a^2 + b^2}$

gerçel sayısına Z nin MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ) denir.

a) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ d) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ b) $|z_1 . z_2| = |z_1|\,|z_2|$

e) $\left|z_1^n\right| = \left(|z_1|\right)^n$ c) $|z| . |\bar{z}| = |z|^2$

θ sayısına z karmaşık sayısının esas argümenti denir ve $Arg(z) = \theta$ ile gösterilir. OZB dik üçgeninde;

$Cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| . Cos\theta$

$Sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| . Sin\theta$ olduğuna göre;

$z = a + bi \Rightarrow z = |z| . Cos\theta + |z| . i . Sin\theta \Rightarrow$

$$\boxed{z = |z|\,(Cos\theta + i\,Sin\theta)}$$

biçiminde yazılabilir. Buna z'nin kutupsal biçimi denir.

$z_1 = |z_1|\,(Cos\theta + i\,Sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2| . (Cos\alpha + i\,Sin\alpha)$ ise :

1) $-z_1 = |z_1| . [Cos(\pi + \theta) + i\,sin(\pi + \theta)]$

2) $\bar{z}_1 = |z_1| . [Cos(2\pi - \theta) + i\,sin(2\pi - \theta)]$

3) $z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2|\,[Cos(\theta + \alpha) + i\,sin(\theta + \alpha)]$

4) $z_1^n = |z_1|^n . (cosn\theta + i\,sin\,n\theta)$

5) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\,[Cos(\theta - \alpha) + i\,sin(\theta - \alpha)]$

6) $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|} . \left(Cos\,\dfrac{\theta + k.2\pi}{n} + i\,sin\,\dfrac{\theta + k.2\pi}{n}\right)$

Buna göre z nin kare kökleri :

$$\boxed{\begin{aligned} W_0 &= \sqrt{|z_1|} . \left(Cos\,\frac{\theta}{2} + i\ sin\,\frac{\theta}{2}\right) \\ W_1 &= \sqrt{|z_1|}\left[Cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i\ sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right] \end{aligned}}$$

KARMAŞIK SAYILARDA GEOMETRİK ÖZELİKLER:

1) $|z-(a+b)i| = r$ denklemi analitik düzlemde merkezi M(a,b) ve yarıçapı r olan çember denklemidir.
2) $|z-(a+b)i| < r$ ifadesi merkezi M(a,b) ve yarıçapı r olan çemberin iç bölgesidir.
3) $|z-(a+b)i| > r$ ifadesi merkezi M(a,b) ve yarıçapı r olan çemberin dış bölgesidir.

LOGARİTMA

LOGARİTMA ALMA KURALLARI :

1) $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$
2) $\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B$
3) $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$
4) $\log_a A^n = n\log_a A$
5) $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a A$
6) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$
7) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
8) $a^{\log_a x} = x$
9) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$
10) $\log_{1/a} x = -\log_a x$
11) $\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d = \log_a d$
12) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ veya $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$

KOLOGARİTMA :

Bir $x \in R^+$ sayısının çarpmaya göre tersinin logaritmasına x'in kologaritması denir.

$\boxed{\text{Co}\log x = \log \frac{1}{x} = -\log x}$ dir.

ONDALIK LOGARİTMA :

Tabanı 10 olarak alınan logaritmaya ondalık ya da bayağı logaritma denir.

$\boxed{\log_{10} x = \log x}$ biçiminde gösterilir.

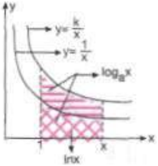
$x \in R^+$ için k bir tam sayı ve m, [0,1) aralığında olan pozitif bir ondalık sayı olmak üzere $\log_{10}x = k+m$ şeklinde yazılabilir.

$k \in Z$ sayısına KAREKTERİSTİK, $0 \le m < 1$ sayısına da MANTİS denir.

DOĞAL LOGARİTMA :

Tabanı e olarak alınan logaritmaya doğal logaritma denir.

$\boxed{\log_e x = \ln x}$ biçiminde gösterilir.

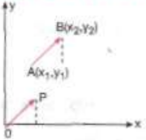


$y = \frac{k}{x}$ hiperbolünün altındaki alan, $y = \frac{1}{x}$ hiperbolü altındaki alanın k katıdır. Öyleyse:

$\boxed{\log_a x = k \, . \ln x}$ bağıntısı yazılabilir.

VEKTÖRLER

KONUM (YER) VEKTÖRÜ :



Koordinat eksenleri ile donatılmış düzlemin bir vektörü $\overrightarrow{AB}$ olsun.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ alınırsa $\overrightarrow{OP}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ vektörünün konum ya da yer vektörü denir. Analitik düzlemde $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ olarak verilmiş olsun. P noktasının koordinatları (x_0, y_0) ise, $\overrightarrow{OP} = \vec{P} = [x_0, y_0] = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ dir. veya

$\vec{P} = \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ dır.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\vec{P}\right\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

değerine $\overrightarrow{OP}$ vektörünün uzunluğu veya normu denir.

BİRİM VEKTÖR :

Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

$\vec{e}_1 = [1,0]$ ve $\vec{e}_2 = [0,1]$ vektörleri birim vektörlerdir.

Bir A vektörü için $\vec{u} = \dfrac{A}{\|\vec{A}\|}$ vektörü $\vec{A}$ ile aynı yönde olan birim vektördür.

ANALİTİK DÜZLEMDE VEKTÖREL İŞLEMLER:

$\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ olsun.

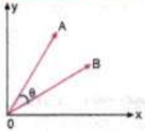
1) $\vec{A} + \vec{B} = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$ dir.
2) $\vec{A} - \vec{B} = [x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$ dir.
3) $k \in R$ ise, $k . \vec{A} = k[x_1, y_1] = [kx_1, ky_1]$ dir.
4) $\vec{A} // \vec{B}$ olması için $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k$ olmalıdır.
5) *$ax + by + c =$ doğrusuna dik vektör, $\vec{A} = [a, b]$ veya dik* vektörler $k . \vec{A} = [ka, kb]$ biçimindedir.
6) $ax + by + c = 0$ doğrusuna paralel vektör $\vec{B} = [-b, a]$ veya paralel vektörler $k . \vec{B} = [-kb, ka]$ biçimindedirler.

VEKTÖRLERİN SKALER (İÇ) ÇARPIMI :

$\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ olmak üzere

$\vec{A} . \vec{B} = \left(\vec{A}, \vec{B}\right) = x_1 . x_2 + y_1 . y_2$ reel sayısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin skaler çarpımı denir.

SKALER ÇARPIMIN ÖZELİKLERİ :



$\vec{A} = [x_1, y_1]$,

$\vec{B} = [x_2, y_2]$,

$\vec{C} = [x_3, y_3]$ vektörleri $m, n \in R$ için:

1) $\vec{A}.\vec{A} = (\vec{A})^2 = \left\|\vec{A}\right\|^2 = x_1^2 + y_1^2$ dir.

2) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

3) $\vec{A}.\vec{A} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ve $y_1 = 0$ dır.

4) $(m.\vec{A}).\vec{B} = m(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}.(m.\vec{B})$ dır.

5) $(m\vec{A})(n\vec{B}) = (m.n)(\vec{A}.\vec{B})$ dır.

6) $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ dir.

7) A ile B vektörleri arasındaki açının ölçüsü $0 \leq \theta < \pi$ olmak üzere : $\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}\right\|.\mathrm{Cos}\theta}$ dır.

$\boxed{\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0}$ dır.

PERMÜTASYON - KOMBİNEZON - OLASILIK

PERMÜTASYON :

n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farklı r tane ($r \leq n$) elemandan oluşan her sıralı r lisine a kümesinin r li permütasyonu denir. n elemanlı A kümesinin r li permütasyonlarının sayısı,

$\boxed{p_n^r = p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$ ile gösterilir.

DÖNEL SIRALAMA :

n elemanlı bir A kümesinin elemanlarının bir çember üzerindeki farklı sıralanmalarının sayısı $\boxed{(n-1)!}$ tanedir.

YİNELEMELİ PERMÜTASYON :

n tane nesnenin n_1 tanesi bir türden, n_2 tanesi ikinci türden, ...n_r tanesi r. türden ve $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ ise n nesnenin n li permütasyonlarının sayısı:

$$\boxed{\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ \dots\ n_r} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!...n_r!}}\ \text{tanedir.}$$

KOMBİNEZON :

n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı ($r \le n$) alt kümelerinin herbirine A kümesinin r li kombinezonu denir.

n elemanlı bir kümenin r li kombinezonlarının sayısı;

$$\boxed{C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}\ \text{dir.}$$

OLASILIK FONKSİYONU :

Bir deneyde çıkabileceklerin kümesine ÖRNEK UZAY, örnek uzayın her alt kümesine OLAY denir.

E örnek uzayı için boş kümeye OLANAKSIZ OLAY, E kümesine KESİN OLAY denir. E örnek uzayının A ve B gibi iki olayı için:

$A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B olaylarına AYRIK OLAYLAR denir.

Bir E örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi K ve değer kümesi $M = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$ olan P fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları gerçekliyorsa buna olasılık fonksiyonu denir. $A \in K$ ise, p(A) gerçel sayısına da A olayının OLASILIĞI denir.

1) $\forall A \in K$ için $0 \le p(A) \le 1$ dir.

2) $p(E) = 1$ dir.

3) $A, B \in K$ ve $A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ dir.

ÖZELİKLERİ :

1) $P(\emptyset) = 0$ dır.
2) $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
3) $p(A') = 1 - p(A)$ (A olayının olmama olasılığı)
4) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ dir.
5) $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ örnek uzayı için :
   $p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + p(a_4) = 1$ dir.

EŞ OLUMLU ÖRNEK UZAY:

Sonlu bir $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ örnek uzayında p olasılık fonksiyonu için $p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_n)$ ise, E örnek uzayına eş olumlu örnek uzay denir. (Olayların meydana gelme olasılığı eşit).

E eş olumlu örnek uzay ve $A \subset E$ bir olay ise, A nın olasılığı;

$$\boxed{P(A) = \frac{S(A)}{S(E)} = \frac{\text{A nın eleman sayısı}}{\text{E nin elemansayısı}}}$$ dır.

BAĞIMSIZ OLAYLAR :

E örnek uzay $A \subset E$, $B \subset E$ ve $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ ise, A ve B olaylarına biribirinden bağımsız olaylar denir.

$[p(A) \neq 0,\ \ p(B) \neq 0]$

KOŞULLU OLASILIK :

Bir E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. A olayının olasılığı B olayına bağlı ise, A olayının olasılığına, A olayının B koşullu olasılığı denir ve bu olasılık :

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$ ile gösterilir.

Örnek uzay eş olumlu ise: $\boxed{p(A/B) = \frac{S(A \cap B)}{S(B)}}$ olur.

TÜMEVARIM

TOPLAM SİMGESİ :

$\forall k \in N^+$ için $a_k \in R$ olmak üzere,

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$ dir.

ÇARPIM SİMGESİ :

$\forall k \in N^+$ için $a_k \in R$ olmak üzere;

$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 . a_2 . a_3 \dots . a_n}$ dir.

TOPLAM VE ÇARPIM SİMGESİNİN ÖZELİKLERİ:

1) c sabit bir gerçel sayı olmak üzere :

a) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{\text{n tane}} = n . c \quad \left(\sum_{k=1}^{3} 4 = 3 . 4 = 12 \right)$

b) $\sum_{k=0}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{\text{n+1 tane}} = (n+1) . c \quad \left(\sum_{k=0}^{3} 4 = 4 . 4 = 16 \right)$

c) $\sum_{k=1}^{n} c . a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \left(\sum_{k=1}^{n} 3\ a_k = 3 \sum_{k=1}^{n} a_k \right)$

2) $1 < p < n$ olmak üzere,

$\sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p} a_k$ dir.

3) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mp \sum_{k=1}^{n} b_k$ dir.

4) $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = \sum\limits_{k=p\pm m}^{n\pm m} a_{k\mp m}$

(Alt ve üst sınırlara eklenen sayı genel terimdeki değişkenden çıkarılır, çıkarılan ise eklenir.)

5) c sabit bir gerçel sayı olmak üzere;

a) $\prod\limits_{k=1}^{n} c = \underbrace{c \, . \, c \, . \, ... \, c}_{n \text{ tane}} = c^n \qquad \left(\prod\limits_{k=1}^{4} 2 = 2^4 = 16 \right)$

b) $\prod\limits_{k=1}^{n} c \, . \, a_k = c^n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k \qquad \left(\prod\limits_{k=1}^{4} 3 \, . \, k = 3^4 \prod\limits_{k=1}^{n} k \right)$

c) $\prod\limits_{k=1}^{n} c^{a_k} = c^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \qquad \left(\prod\limits_{k=1}^{5} 2^k = 2^{\sum\limits_{k=1}^{5} k} \right)$

6) $\prod\limits_{k=p}^{n} a_k = \prod\limits_{k=p\pm m}^{n\pm m} a_{k\mp m}$

7) $1 < p < n$ olmak üzere :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{p} a_k \right) . \left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k \right)$$

8) $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k \, . \, b_k) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k \right) . \left(\prod\limits_{k=1}^{n} b_k \right)$

9) $\prod\limits_{k=1}^{n} k = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, ... \, n = n!$

TOPLAM FORMÜLLERİ :

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \dfrac{n \, . \, (n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

3) $\sum_{k=1}^{n}2k = 2+4+6+...+(2n) = n(n+1)$

4) $\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+(n^2) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) $\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+(n^3) = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6) $\sum_{k=1}^{n}r^{k-1} = 1+r+r^2+...+r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$

7) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

DİZİLER

$N^+ = \{1,2,3, ..., n\}$ sayma sayıları kümesinden R gerçel sayılar kümesine tanımlanan her $f: N^+ \to R$ fonksiyonuna gerçel sayı dizisi denir.

SABİT DİZİ :

C sabit bir gerçel sayı olmak üzere, hem $r \in N^+$ için

$f(n) = a_n = c$ ise $(a_n) = (c)$ dizisine sabit dizi denir.

DİZİLER KÜMESİNDE İŞLEMLER :

(a_n) ve (b_n) birer dizi ve $k \in R$ olmak üzere;

1) $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$

2) $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$

3) $(a_n) . (b_n) = (a_n . b_n)$

4) $k . (a_n) = (k . a_n)$

5) $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right), \; b_n \neq 0$

ARİTMETİK DİZİ :

$a, r \in R$ olmak üzere, genel terimi $a_n = a + (n - 1)r$ olan (a_n) dizisine ARİTMETİK DİZİ denir.

r : ardışık terimler arasındaki fark (ortak fark)

☞ Özelikleri :

1) $p < n$ olmak üzere $\boxed{a_n = a_p + (n - p) r}$ dir.

2) $a_n = a_p + (n - p)r \Rightarrow r = \dfrac{a_n - a_p}{n - p}$

3) Aritmetik dizinin ilk n terim toplamı (S_n), a_1: ilk terim, a_n : n. terim r : ortak fark

$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n}$ ya da $\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}\left[2a_1 + (n - 1) r\right]}$

$\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]}$

GEOMETRİK DİZİ :

$a, r \in R$, $a \neq 0$, $r \neq 0$ olmak üzere genel terimi $a_n = a . r^{n-1}$ olan (a_n) dizisine geometrik dizi denir. (r: ortak çarpan)

☞ Özelikleri :

1) $p < n$ olmak üzere : $\boxed{a_n = a_p . r^{n-p}}$ dir.

2) a_1 : 1. terim a_n : n. terim r: ortak çarpan ise ilk n terim toplamı :

$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$ veya $\boxed{S_n = a_1 . \dfrac{r^n - 1}{r - 1}}$

3) $\boxed{a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2}$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

I. MUTLAK DEĞER FONKSİYONU :

$$\boxed{|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}}$$

koşulu ile tanımlanan $|f(x)|$ fonksiyonuna mutlak değer fonksiyonu denir. $\forall x \in R$ için $|f(x)| \geq 0$ dır.

(Daha önceki bölümlerde mutlak değerle ilgili yeterli bilgi verildiğinden burada yeniden incelenmemiştir.)

II. TAMDEĞER FONKSİYONU :

$\forall x \in R$ için; x bir tamsayı ise; kendisine, tamsayı değilse kendisinden büyük olmayan en büyük tamsayıya dönüştüren fonksiyona tamdeğer fonksiyonu denir. $[\![x]\!]$ biçiminde gösterilir.

$$\boxed{f : A \subset R \to Z; \quad f(x) = [\![x]\!]}$$

$$[\![f]\!](x) = [\![f(x)]\!] = \begin{cases} f(x), & f(x) \in Z \text{ ise} \\ a, & a \leq f(x) < a+1, \quad a \in Z \text{ ise} \end{cases}$$

Yani $a \in Z$ olmak üzere :

$[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$ dir.

☞ Tamdeğerin Bazı Özelikleri :

$b \in Z$ ve $a, c \in R$ için :

1) $[\![a]\!] \leq a < [\![a]\!] + 1$

2) $[\![a + c]\!] \geq [\![a]\!] + [\![c]\!]$

3) $[\![a + b]\!] = [\![a]\!] + b$

4) $[\![-a]\!] = \begin{cases} -a, & a \in Z \text{ ise} \\ -[\![a]\!] - 1, & a \in R - Z \text{ ise} \end{cases}$

☞ $f : [a,b] \to$ için $f(x) = [\![mx + n]\!]$ fonksiyonunda

1) $m > 0$ ise aralıklar soldan kapalıdır.

2) $m < 0$ ise aralıklar sağdan kapalıdır.

UYARI :

$f(x) = [\![kx]\!]$ ile tanımlı f fonksiyonu, tanım aralığı, genişliği $\frac{1}{|k|}$ olan alt aralıklara ayrılarak incelenir.

III. İŞARET FONKSİYONU :

$A \subset R$ ve $f : A \to R$ fonksiyonu verilsin

$$[Sgn(f)](x) = Sgn[f(x)] = \begin{cases} -1; & f(x) < 0 \text{ ise} \\ 0; & f(x) = 0 \text{ ise} \\ 1; & f(x) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı Sgn(f) fonksiyonuna f'nin işaret fonksiyonu denir ve signum f diye okunur.

FONKSİYONLARIN LİMİTİ VE SÜREKLİLİĞİ

$A \subset R$, $a \in A$, $\ell \in R$ olmak üzere $f:A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait olan ve a sayısına yakınsıyan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizileri bir ℓ sayısına yakınsıyor ise, $x \to a$ için f fonksiyonunun limiti ℓ sayısıdır denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

biçiminde gösterilir.

Eğer $\boxed{\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)}$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreklidir** denir.

☞ Aşağıdaki durumlarda fonksiyon SÜREKSİZDİR

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \text{Yok}$ ise,

2) $f(a) = \text{tanımsız}$ ise,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ ise yani $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$ ise

4) Grafik olarak verilmesi durumunda; grafikte kopukluk ya da boş nokta varsa.

SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT :

$$a^- \longrightarrow a \longleftarrow a^+$$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (soldan limit) $\qquad \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (sağdan limit)

Sayı doğrusu üzerinde düşünülürse x, a sayısına iki yönden (soldan ya da sağdan yaklaşabilir.)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \text{Yok} \\ \ell_1 = \ell_2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 = \ell_2 \text{ dir.} \end{array}$$

UYARI :

Aşağıdaki durumlarda sağdan ve soldan limite bakmak zorunludur.

1) Fonksiyonda MUTLAK DEĞER, SİGNUM veya TAM DEĞER varsa

2) $f(x) = \{ \vdots\vdots\vdots\vdots$ şeklinde fonksiyon parçalı verilmişse, ayırıcı noktalarda

3) $f(x) = \dfrac{p(x)}{Q(x)}$ ve $p(a) = \text{sabit}$, $Q(a) = 0$ ise

DİZİLERİN LİMİTİ :

☞ Bir gerçel sayının komşuluğu :

$a \in R$ ve $r \in R^+$ olmak üzere.

$(a-r,\ a+r) = \{x : x \in R$ ve $a - r < x < a + r\}$ açık aralığına, a'nın r komşuluğu denir ve $k_r(a)$ ile gösterilir.

$\boxed{k_r(a) = (a-r,\ a+r)}$ dir.

Bir Dizinin Limiti :

(a_n) dizisinin limiti a ise $\lim a_n = a$ ya da $(a_n) \to a$ biçiminde gösterilir.

Limiti bir gerçel sayı olan dizilere, YAKINSAK DİZİ denir. Yakınsak olmayan dizilere de IRAKSAK DİZİ denir.

BAZI İFADELERİN LİMİTLERİ :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Sin}x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Sin}ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} (1+n)^{1/n} = 1, \quad \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \cong 2{,}71828...$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n.a^{n-1}$

7) $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \text{ ise} \\ \infty, & |a| > 1 \text{ ise} \\ 1, & |a| = 1 \text{ ise} \end{cases}$

8) $a > 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

9) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1+a^n} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } |a| < 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } |a| > 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & \text{eğer } |a| = 1 \text{ ise} \end{cases}$

10) $a > 1$ ve $n \in N$ ise $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$

11) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

12) $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{ArcCotg}\frac{1}{x} = \pi$

13) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$

14) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{k.n} = e^{kx}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n+a}\right)^{kn} = e^{kx}$

TÜREV

$a, b \in R$ olmak üzere $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun, $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limiti bir gerçel sayı ise, bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasındaki TÜREVİ denir. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $\frac{df}{dx}(x_0)$ veya $f'(x_0)$ dan biri ile gösterilir. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini y', $f'(x)$ veya $\frac{dy}{dx}$ ile göstereceğiz.

UYARI :

Bir f fonksiyonu x_0 noktasında türevli iken süreklidir. Ancak sürekli iken türevli olmayabilir.

TÜREV HESAPLAMA YÖNTEMLERİ :

1) a sabit sayı olmak üzere $y = a \Rightarrow y' = 0$ (y': türev)

2) $y = x \Rightarrow y' = 1$ (x: değişken)

3) $y = u \mp v \Rightarrow y' = u' \mp v'$

4) $y = u \, . \, v \Rightarrow y' = u' \, . \, v + u \, . \, v'$

5) $y = u \, . \, v \, . \, w \Rightarrow y' = u' \, . \, v \, . \, w + v' \, . \, u \, . \, w + w' \, . \, v \, . \, u$

6) $y = a \, . \, u \Rightarrow y' = a \, . \, u'$ $(a \in R)$

7) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u' \, . \, v - v' \, . \, u}{v^2}$

8) $y = [f(x)]^n \Rightarrow y' = n \, . \, [f(x)]^{n-1} \, . \, f'(x)$

veya $y = u^n \Rightarrow y' = n \, . \, u^{n-1} \, . \, u'$

9) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

10) $y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{n \, . \, \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

11) $y = |f(x)| \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x) \, . \, |f(x)|}{f(x)} = \begin{cases} f(x)' & , \ f(x) > 0 \text{ ise} \\ -f'(x) & , \ f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$

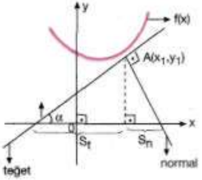
12) $y = (gof)(x) \Rightarrow y' = g'(f(x)) \, . \, f'(x)$

13) $y = f(x), \ z = g(y) \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \, . \, \dfrac{dy}{dx}$

14) $f(x, y) = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$

15) $x = f(t), \ y = g(t) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ dir.

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI :



$y = f(x)$ fonksiyonu $A(x_1, y_1)$ noktasında türevli bir fonksiyon ise, A daki teğetinin eğimi A noktasındaki türevine eşittir. Yani:

$\boxed{m_t = \tan\alpha = f'(x_1)}$ dir.

1) Teğet denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$

2) Teğet uzunluğu $t = \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}$

3) Normal denklemi $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

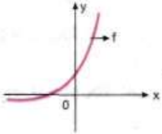
4) Normal uzunluğu $n = f(x_1) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}$

5) Teğet altı uzunluğu $S_t = \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

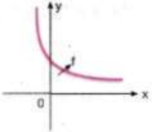
6) Normal altı uzunluğu $S_n = f(x_1) \cdot f'(x_1)$ olur.

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR:

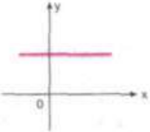
1) f fonksiyonu (a,b) aralığında artan ise, $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ olur. (İşaretin (+) olduğu bölgede artan)



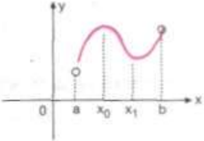
2) f fonksiyonu (a,b) aralığında azalan ise, $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ olur. (İşaretin (–) olduğu bölgede azalan)



3) f fonksiyonu (a,b) aralığında sabit ise, $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) = 0$ olur.



FONKSİYONLARIN YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM (EKSTRAMUM NOKTALARI) :



$f : (a, b) \to R$ için

$y = f(x)$ türevli olsun

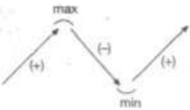
1) $x \in (a, x_0)$ için $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, b)$ için $f'(x) < 0$ ve $x = x_0$ için $f'(x_0) = 0$ ise, $x = x_0$ fonksiyonun maksimum noktasıdır.

x	a	x_0	b
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗	max	↘

2) $x \in (a, x_1)$ için $f'(x) < 0$, $x \in (x_1, b)$ iin $f'(x) > 0$ ve $x = x_1$ için $f'(x_1) = 0$ sağlanıyorsa, $x = x_0$ noktası bir minimum noktasıdır.

x	a	x_0	b
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

☞ Maksimum ve minimuma ait aşağıdaki şekli inceleyiniz.



UYARI :

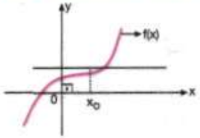
Maksimum, minimum noktasında birinci türev işaret değiştirerek sıfır olmaktadır. Maksimum, minimum (Ekstramum) noktalardan çizilen teğetler x eksenine paraleldirler. Dolayısiyle maksimum ve minimumda eğim sıfırdır. Ancak bir fonksiyonunun maksimum veya minimum noktasında türevinin işaret değiştirmesi gerekli ise de, türevin sıfır olması mutlaka gerekli değildir.

ORTALAMA DEĞER TEOREMİ :

f: [a, b] → R fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli ise, bazı $x_0 \in (a,b)$ için;

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$

BİR EĞRİNİN DÖNÜM NOKTASI :

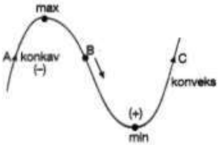


$x = x_0$ için $f''(x_0)$ işaret değiştirerek sıfıra eşit oluyorsa, $x = x_0$ apsisli nokta $y = f(x)$ eğrisinin dönüm (büküm) noktasıdır. Dönüm noktasında eğri konkavlığını değiştirir. Eğrilik, $f''(x) > 0$ olduğu noktalarda yukarı doğru. $f''(x) < 0$ olduğu noktalarda aşağıya doğrudur.

(İkinci türevin kökleri eğrinin dönüm (büküm) noktalarının apsisleridir. $y = f(x)$ *fonksiyonu 3. derecedense, dönüm noktası* aynı zamanda simetri eksenidir. İkinci türevin işaretinin (+) olduğu bölgede eğri konveks, (–) olduğu bölgede ise konkavdır.)

A → B arası konkav (max.)

B → C arası konveks (min.)



BELİRSİZ İFADELER :

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ veya $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ iseler.

$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right.$ Belirsizliği vardır.)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots \text{dir.}$$

(L'hospitale kuralı.)

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ ise

$\lim\limits_{x \to a} f(x) . g(x)$ *limiti* $0 . \infty$ belirsiz ifadedir. Bu limiti hesaplamak için, $f(x) . g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ile $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden biri elde edilerek L'hospitale kuralı uygulanır.

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ ise, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) - g(x)\right]$ limiti $\infty - \infty$ şeklindedir. Bu limiti hesaplamak için;

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) . g(x)}}$$

yazılarak L'hospitale kuralı uygulanır.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left[f(x)^{g(x)}\right]$ ifadesi 0^0, 1^∞ veya ∞^0 belirsiz şekillerinden birisi oluyorsa, $y = f(x)^{g(x)}$ den $\ln y = g(x) . \ln f(x)$ yazılıp $\lim\limits_{x \to a} \ln y = k$ olarak bulunursa $\lim\limits_{x \to a} y = e^k$ olarak yazılır.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ:

1) $y = \sin x$, $y' = \cos x$

$y = \sin u$, $y' = u' . \cos u$

2) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$

$y = \cos u$, $y' = -u' . \sin u$

3) $y = \tan u$, $y' = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' . \sec^2 u$

4) $y' = \cot u$, $y' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u . \operatorname{cosec}^2 u$

5) $y = \sec u$, $y' = \dfrac{u' . \sin u}{\cos^2 x} = u' . \sec u . \tan u$

6) $y = \operatorname{cosec} u$, $y' = -\dfrac{u' . \cos u}{\sin^2 u} = -u' . \operatorname{cosec} u . \cot u$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ:

$f(x) = \sin x \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{ArcSin}x$ diğer fonksiyonların ters fonksiyonlarıda bu şekilde yazılabilir.

1) $y = \text{arcSin}x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = \text{arcSin}u$, $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

2) $y = \text{arcCos}x$, $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = \text{arcCos}u$, $y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

3) $y = \arctan u$, $y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

4) $y = \text{arcCot}u$, $y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

LOGARİTMA VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ:

1) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$, $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

2) $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{(\ln a).x} = \frac{1}{x}\log_a e$

$y' = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u.\ln a} = \frac{u'}{u}.\log_a e$

3) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$, $y = e^u \Rightarrow y' = u'\ e^u$

4) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x.\ln a$, $\Rightarrow y = a^u \Rightarrow y' = u'.a^u.\ln a$

5) $y = u^v \Rightarrow \ln y = v.\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'.\ln u + \frac{u'}{u}.v$

$\Rightarrow y' = y.[v'.\ln u + \frac{u'}{u}.v]$

FONKSİYONLARIN DEĞİŞİMLERİNİN İNCELENMESİ VE GRAFİKLERİNİN ÇİZİMİ :

☞ Grafik Çiziminde Yapılacak İşlemler :

1) Eğer fonksiyonun tanım kümesi belirtilmemişse, fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş küme belirtilir.
2) Fonksiyonun türevi hesaplanır. Türevin işaretine göre, fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıklar ve ekstramum noktaları belirtilir.
3) $x \to -\infty$ ve $x \to +\infty$ için fonksiyonun limiti bulunur.
4) Grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktalar bulunur.
5) Varsa Asimptotlar bulunur.
6) Değişim tablosu düzenlenir.
7) Bu tabloya göre grafik çizilir.

ASİMPTOTLARIN BULUNUŞU :

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ile tanımlı f fonksiyonunda

A) Paydayı sıfır yapan x değerleri eğrinin düşey asimptotlarıdır.

B) Payın derecesi paydanın derecesinden küçük veya eşitse ($dp(x) \leq dQ(x)$) yatay asimptot vardır ve

$\lim_{x \to \mp \infty}$ için f(x) in aldığı değere eşittir.

C) Payın derecesi paydanın derecesinden büyükse ($dp(x) > dQ(x)$)

Eğik veya eğri asimptot vardır.

1) Payın derecesi paydanın derecesinden 1 fazla ise [$d(P(x)) - Q(P(x)) = 1$] eğik asimptot vardır. Payın paydaya bölümü eğik asimptotun denklemini verir.

2) Pay ile paydanın dereceleri fark 1'den fazla ise [$d(P(x)) - d(Q(x)) > 1$] eğri asimptot vardır.

Payın paydaya bölümü eğri asimptotun denklemini verir.

Düşey asimptot ile eğik asimptotun kesim noktası eğrinin simetri merkezidir.

$y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunda asimptotların kesim noktası : $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ dir.

UYARI :

1) Tek dereceli fonksiyonlar; $+\infty$ dan geliyorsa $-\infty$'a, $-\infty$ dan geliyorsa $+\infty$'a, yani geldikleri yönün aksi (zıt) yönüne giderler.

2) Çift dereceli fonksiyonlar ise; geldikleri yöne giderler. ($-\infty$'dan $\to -\infty$'a, $+\infty$'dan $\to +\infty$'a)

İNTEGRAL

İNTEGRALİN ÖZELİKLERİ :

f ve g fonksiyonları [a, b] aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise;

1) $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

2) $k \in R$ ise, $\int_a^b k.(f(x))\,dx = k\ .\ \int_a^b f(x).dx$

3) $c \in (a, b)$ olduğuna göre,

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4) $c, d \in [a, b]$ ve $c < d$ olduğuna göre,

a) $\int_c^c f(x)\,dx = 0$, b) $\int_c^a f(x).dx = -\int_a^c f(x)\,dx$

İNTEGRAL HESABININ TEMEL TEOREMLERİ:

1) $f : [a, b] \to R$ sürekli bir fonksiyon ise,

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ile tanımlı $F: [a,b] \to R$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ve $\forall x \in (a,b)$ için

$\boxed{F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)}$ dir.

2) $f : [a,b] \to R$ sürekli bir fonksiyon ve $F: [a,b] \to R$ türevli bir fonksiyon $\forall x \in a,b$ için $F'(x) = f(x)$ ise, ya da

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ise

$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

SONUÇLAR :

[a, b] aralığında tanımlı g ve h fonksiyonları (a, b) aralığında türevli olsun.

1) $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ ise, $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ dir.

2) $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ ise, $F'(x) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$ dir.

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ :

1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ yi kapsayan integraller.

$\sqrt{a^2 - x^2}$ halinde $x = a \,.\, \mathrm{Sin}\alpha$ veya $x = a \,.\, \mathrm{Cos}\alpha$

$\sqrt{x^2 - a^2}$ halinde $x = a \,.\, \mathrm{Sec}\alpha$

$\sqrt{x^2 + a^2}$ halinde $x = a \,.\, \tan\alpha$ dönüşümü yapılır.

2) Parçalı integral hesaplama yöntemi :

$\int f(x) \,.\, g'(x)dx = [f(x) \,.\, g(x)] - \int f'(x) \,.\, g(x)\,dx$ dir.

veya $\int u \,.\, du = u \,.\, v - \int v \,.\, du$ dur.

3) Yerine koyma

Köklü fonksiyonların integrallerinin hesaplanmasında eğer $a + bx$, $a + bx^2$ gibi integrand varsa, $\sqrt[n]{a + bx} = u$ veya $\sqrt[n]{a + bx^2} = u$ değişken değişimi uygulanarak çözüme gidilir.

4) Trigonometrik rasyonel fonksiyonların integrali :

$u = \tan \frac{x}{2}$ dönüşümü uygulanır. Bu durumda

$x = 2\mathrm{Arctan}x,\ dx = \dfrac{2du}{1 + u^2},\ \ \sin x = \dfrac{2u}{1 + u^2}$ ve

$\mathrm{Cos}x = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$ alınır.

TEMEL İNTEGRAL FORMÜLLERİ

1) $\int f'(x)dx = f(x) + c$

2) $\int ((x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\,.\,dx$

3) $\int dx = x + c$

4) $\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + c$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

6) $\int x^n.dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

7) $\int e^x\, dx = e^x + c$

8) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c = a^x \log_a e + c$

9) $\int \sin x\,.\,dx = -\mathrm{Cos}x + c$

10) $\int \cos x\,.\,dx = \sin x + c$

11) $\int \tan x\,.\,dx = \ln \sec x + c$

12) $\int \mathrm{Sec}x dx = \ln(\mathrm{Sec}x + \tan x) + c$

13) $\int \mathrm{Cot}x\,.\,dx = \ln \mathrm{Sin}x + c$

14) $\int \mathrm{Cosec}x\,.\,dx = \ln(\mathrm{Cosec}x - \mathrm{Cot}x) + c$

15) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

16) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\,\mathrm{Cot}x + c$

17) $\int \mathrm{Sec}x\,.\,\tan x\,.\,dx = \mathrm{Sec}x + c$

18) $\int \dfrac{dx}{1 - x^2} = \mathrm{ArcSin}x + c = -\mathrm{arcCos}x + c \ (|x| < 1)$

19) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}x + c = -\text{arcCot}x + c$

20) $\int \text{Co}\sec x \,.\, \text{Cot}x\, dx = -\text{Cosec}x + c$

KÖKLÜ İFADELERİN İNTEGRALİ :

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 . \text{arcSin}\frac{x}{a}\right) + c$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcSin}\frac{x}{a} + c$

3) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\, \text{ArcSin}\frac{x}{a}\right) + c$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + c$

6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + c$

7) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + c$

8) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\right) + c$$

9) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a . \text{arcCos}\frac{a}{x} + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c$

11) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + c$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ:

1) $\int \text{Sinaxdx} = \frac{-1}{a}\,\text{Cosax} + c$

2) $\int \text{xSinaxdx} = \frac{\text{Sinax}}{a^2} - \frac{x\,.\,\text{Cosax}}{a} + c$

3) $\int \text{Cosaxdx} = \frac{1}{a}\,\text{Sinax} + c$

4) $\int \text{xCosaxdx} = \frac{\text{Cosax}}{a^2} + \frac{\text{xSinax}}{a} + c$

5) $\int \tan \text{axdx} = -\frac{1}{a}\ln|\text{Cosax}| + c$

6) $\int \text{Cotgaxdx} = \frac{1}{a}\ln|\text{Sinax}| + c$

ÜSTEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ :

1) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

2) $\int e.x^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c$

LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ:

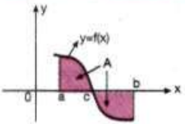
1) $\int \ln xdx = x(\ln x - 1) + c$

2) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

3) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + c$

DÜZLEMSEL BÖLGELERİN ALANLARININ HESABI:

1) $f : [a, b] \rightarrow R$, $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunun eğrisi x ekseni ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölgenin alanı A ise:

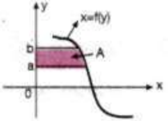


$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx \text{ dir.}$$

$a < x < c$ için: $f(x) > 0$ ve $c < x < b$ için: $f(x) < 0$ ise;

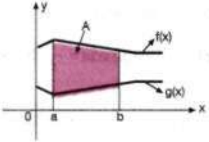
$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b -f(x)\, dx \text{ dir.}$$

2) Denklemi $y = f(x)$ olan eğri y ekseni ve denklemleri $y = a$, $y = b$ olan doğrularla sınırlı bölgenin alanı :



$$A = \int_a^b |f(y)|\, dy \text{ dir.}$$

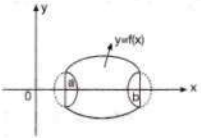
3) f ve g fonksiyonlarının eğrileri ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölgenin alanı :



$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \text{ dir.}$$

DÖNEL CİSİMLERİN HACMİ:

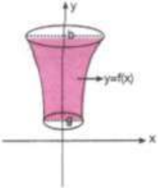
1) f: $[a,b] \rightarrow R$, $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunun eğrisi x ekseni ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölge x ekseni etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan dönel cismin hacmi:



$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx \text{ dir.}$$

2) Denklemi $y = f(x)$ olan eğri, y ekseni etrafında 360° döndürülürse oluşan dönel cismin hacmi:

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy \quad \text{dir.}$$



DETERMİNANT

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reel sayıları için $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ biçiminde verilen bir kalıba 2. mertebeden bir determinant denir.

Burada:

a_{11}, a_{12} : Birinci satır a_{11}, a_{21} : Birinci sütun

a_{21}, a_{22} : İkinci satır a_{12}, a_{22} : İkinci sütun

Yedek köşegen

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\Delta = ad - bc} \text{ dir.}$$

Asal köşegen

Determinant elemanlarını a_{ij} ile gösterirsek.

i : Satır numarasını j : Sütun numarasını

Örneğin: a_{34} elemanı 3. satır, 4. sütun elemanı dır.

Determinantın açılımı :

Bir determinantın herhangi bir satıra (veya sütuna) göre açılımı, o satır elemanlarının kofaktörleri ile çarpımlarının toplamına eşittir. Buna determinantın değeri denir.

SARRUS KURALI :

3. mertebeden determinantların hesabı için geçerli bir kuraldır.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} - \\ \Rightarrow \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} + \end{matrix}$$

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})$$
$$- (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

$i = 1,2,3, \ldots, m$ $\quad$ $j = 1,2,3, \ldots, n$ olmak koşulu ile a_{ij} gerçel sayıların meydana getirdiği tabloya, mxn türünde matris denir.

Matrisler: [ ] , ( ) , ‖ ‖ sembolleri arasına elemanlarının yazılmasıyla belirtilirler.

$$\left[a_{ij}\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

m : Satır sayısı

n : Sütun sayısı

İKİ MATRİSİN TOPLAMI :

Satır ve sütun sayısı eşit iki matris toplanırken karşılıklı elemanlar toplanır.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & \ell \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+k & b+\ell \\ c+m & d+n \end{bmatrix}$$

İKİ MATRİSİN ÇARPIMI :

A ve B gibi iki matrisin çarpımlarının tanımlı olabilmesi için; A matrisinin sütun sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir.

$[A]_{mxn}$ ise $[B]_{nxp}$ olmalıdır. $[A] . [B] = [A . B]_{mxp}$ dir.

Çarpım Yapılırken :

1) A nın 1. satır elemanları B'nin 1. sütun elemanları ile çarpılıp toplanır. Bu AB çarpım matrisinin birinci elemanıdır. (a_{11})
2) A'nın 1. satır elemanları B'nin 2. sütun elemanları ile karşılıklı çarpılıp toplanarak çarpım matrisinin a_{12} elemanı elde edilir.
3) Bu çarpım A matrisinin bütün satırları B matrisinin bütün sütunları ile çarpılıp mx; türündeki yeni matris elde edilinceye kadar devam eder.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ . \ B = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A . B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak + bm & a.l + b.n \\ ck + dm & c.l + d.n \end{bmatrix}$$

BİRİM MATRİS :

Kare matriste asal köşegen dışındaki bütün elemanları sıfır olan matrise BİRİM MATRİS denir. (Çarpma işlemine göre)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

I : Birim matris ise :

$\boxed{A . I = I . A = A}$ dır.

BİR MATRİSİN DEVRİĞİ (TRANSPOZESİ) :

Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matristir. A^T şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

KARE MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ:

Aynı türden A ve B matrisleri ile 1 birim matrisi için :

$\boxed{AB = BA = I}$ koşulunu sağlayan A ve B matrisleri varsa B matrisine, A matrisinin çarpma işlemine göre tersi denir. Bu durumda A'da B'nin tersidir. ($B^{-1} = A$)

KURAL :

Bir A karesel matrisin tersini bulmak için A nın ek matrisi bulunur. Sonuç A nın determinantına bölünür.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A} = \frac{\bar{A}}{|A|} = \frac{A_{adj}(A)}{|A|}$$

UYARI :

Bir matrisin tersinin olması için, matrisin karesel ve determinantının kesinlikle sıfırdan farklı olması gerekir.

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

final yayınları

ÖSS KONU ANLATIMLI

ÖSS MATEMATİK	Şevket Ertem - Murat Gençoğlu - Hüseyin Yiğit
ÖSS MATEMATİK	Zeki Çobanoğlu-Ali Rıza Yüce - Hasan Büyükyavuz - Barbaros Kuruoğlu
ÖSS GEOMETRİ	Vedat Yıldız
ÖSS GEOMETRİ	Yaramaz Kola
ÖSS TÜRKÇE (Uygulamalı Yöntemle)	İlyas Önkaya
ÖSS TÜRKÇE	İbrahim Tepel - Sabri Murat - Osman Oğuz - İlyas Önkaya - Ö. Tacettin Güner
ÖSS TÜRKÇE	S. Murat - C. Yerdar - A. Aslan - U. Abdullah Özkabil - H. Çelikoğlu
ÖSS FİZİK	Süleyman Bahtar
ÖSS FİZİK	Mustafa Başer
ÖSS FİZİK	Mustafa Erdem
ÖSS KİMYA	İbrahim Keser - Aziz Karakaş
ÖSS KİMYA	Refik Koçak
ÖSS BİYOLOJİ	Vesim Güneş
ÖSS TARİH	Abdurrahman Ergetin
ÖSS COĞRAFYA	İbrahim Tepel - Sabri Murat - Cengiz Kanca
ÖSS FELSEFE	İbrahim Dursun

ÖSS SORU BANKASI

ÖSS MATEMATİK	Zeki Çobanoğlu-Ali Rıza Bayram - Ali Dengin
ÖSS MATEMATİK - GEOMETRİ	O. Doğukan - Y. Yıldız - T. Durgun - Y. Gündoğdu - İ. Görgöz - T. Tunç - Y. Tepel - E. Kılınç - B. Serkuş - İ. Can
ÖSS GEOMETRİ	Yetkin Gündoğdu
ÖSS TÜRKÇE	S. Murat - C. Yerdar - A. Aslan - U. Abdullah Özkabil - H. Çelikoğlu - A. Mete Murat
ÖSS TÜRKÇE	Hıdır Acar
ÖSS TÜRKÇE	İlyas Önkaya
ÖSS TÜRKÇE	S. Murat - İ. Önkaya - H. Polat - H. Tuncer - M. Bulut - R. Bozkurt
ÖSS FEN BİLİMLERİ	S.Turan- Ö.Hunsuroğlu - İ.Keser - H.A. Çelik - A. Karakaş - Ş. Vural - Y. Çimenli - S. Elbasan - M. Gürocak - A. Turan
ÖSS FİZİK	Mustafa Erdem
ÖSS KİMYA	İbrahim Keser
ÖSS KİMYA	R. Koçak - A. Karakaş - C. Gençtürk - İ. Yalçınkaya - F. Laçinkaya - İ. Keser - H. Dursun - Y. Güntaş - A. Yılmaz - A. Aydoğan
ÖSS BİYOLOJİ	Ömer Hunsuroğlu - Vesim Güneş
ÖSS SOSYAL BİLİMLERİ	İ.Tepel - S.Murat - İ.Kılıç - B.Ulaş - H.Koç - E. Aktaş - R. Sarıkaya - C. Çelikdemir - O. Karaarslan
ÖSS TARİH	Coşkun Doğan
ÖSS COĞRAFYA	İbrahim Tepel - Bülent Ulaş
ÖSS COĞRAFYA	Bülent Ulaş

ÖSS DENEMELER

ÖSS DENEME SINAVLARI	15 Özgün Deneme Sınavı
SON 20 YILIN ÖSS SORULARI	
ÖSS KİMYA DENEMELER	İsmet Yalçınkaya

OKS (Orta Öğretim Kurumları Sınavına Hazırlık)

OKS TÜM DERSLER SORU BANKASI	Komisyon
OKS TÜM DERSLER	İ. Önkaya - İ. Keser - Y. Tepel - B. Ulaş - R. Sarıkaya - A. Cingöz - E.İ Kılınç - H. Kurt
OKS MATEMATİK	Yasin Tepel - Ertuğrul Kılınç
OKS FEN BİLGİSİ	İbrahim Keser - Hakan Kurt - Aslan Cingöz
OKS TÜRKÇE - SOSYAL BİLGİLER	Ahmet Balıkçı - İhsan Kılıç - İlyas Önkaya - Ruhi Sarıkaya - Bülent Ulaş
OKS TÜRKÇE	İlyas Önkaya

Genel Dağıtım: FİNAL PAZARLAMA
Mahmutbey Göztepe Mah. Tarhan Sok. No: 2 Bağcılar - İSTANBUL
Tel: 212 445 80 00   Faks: 212 445 62 00

www.final.com.tr