

MATEMATİK ÇKS

Karmaşık Sayılar

ISBN 975-8620-34-7



9 789758 620340

2,10 YTL



CELAL AYDIN
YAYINLARI

KARMAŞIK SAYILARDA İŞLEMLER

KARMAŞIK SAYI

Tanım: a ve b gerçel (reel) sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $Z = a + bi$ biçimindeki sayılara karmaşık sayı denir. Karmaşık sayılar kümesi C ile gösterilir.

$Z = a + bi$ karmaşık sayısında, a sayısına karmaşık sayının reel kısmı, b sayısına da karmaşık sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $\text{Re}(Z) = a$, $\text{Im}(Z) = b$ ile gösterilir.

Karmaşık sayılar kümesi,

$$C = \{Z \mid Z = a + bi, i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}\} \text{ biçiminde gösterilir.}$$

Ayrıca,

$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \text{ dir.}$$

Örnek

Aşağıdaki karmaşık sayıların reel ve imajiner kısımlarını bulunuz.

a) $Z = 2 - 4i$

b) $Z = 5i$

c) $Z = 2$

d) $Z = -5 + 4i$

Çözüm

a) $Z = 2 - 4i \Rightarrow \text{Re}(Z) = 2 \text{ ve } \text{Im}(Z) = -4$

b) $Z = 5i \Rightarrow \text{Re}(Z) = 0 \text{ ve } \text{Im}(Z) = 5$

c) $Z = 2 \Rightarrow \text{Re}(Z) = 2 \text{ ve } \text{Im}(Z) = 0$

d) $Z = -5 + 4i \Rightarrow \text{Re}(Z) = -5 \text{ ve } \text{Im}(Z) = 4 \text{ tür.}$

KARMAŞIK SAYILARDA DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

a, b, c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denklem verilsin.

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ ifadesine diskriminant denir.

1) $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ile bulunur.}$$

2) $\Delta = 0$ ise denklemin çakışık iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ dir.}$$

3) $\Delta < 0$ ise denkleminin karmaşık iki kökü vardır. Bu kökler,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ile bulunur.}$$

Tanım

$\sqrt{-1}$ sayısına sanal sayı (imajiner sayı) birimi denir ve $i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ ile gösterilir.

Örnek olarak,

$$\sqrt{-5} = \sqrt{(-1).5} = \sqrt{i^2.5} = i\sqrt{5}$$

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1).16} = \sqrt{i^2.16} = 4i$$

biçiminde ifade edilebilir.

ÖRNEK SORU

$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-20}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10

B) 5

C) -10

D) 10i

E) -10i

Çözüm

$$\sqrt{-5} = \sqrt{(-1).5} = \sqrt{i^2.5} = i\sqrt{5}$$

$$\sqrt{-20} = \sqrt{(-1).20} = \sqrt{i^2.20} = i\sqrt{20}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-20} = (i\sqrt{5}).(i\sqrt{20})$$

$$= \sqrt{5.20}.i^2 = 10.(-1) = -10$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$2x^2 - 3x + 3 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 + \sqrt{15}i$

B) $3 - \sqrt{15}i$

C) $\frac{3 + \sqrt{15}i}{4}$

D) $\frac{2 - \sqrt{15}i}{4}$

E) $\frac{-3 + \sqrt{15}i}{4}$

Çözüm

$$2x^2 - 3x + 3 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4.2.3 = 9 - 24 = -15$ olduğundan denklemin iki tane sanal kökü vardır.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-15}}{2.2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{(-1).15}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{i^2.15}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{15}.i}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}i}{4} \text{ ve } x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}i}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$x^2 - 6ix - 8 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4i

B) -2i

C) 2

D) 2i

E) 6i

Çözüm

$$x^2 - 6ix - 8 = 0$$

$$\Delta = (-6i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36i^2 + 32$$

$$= -36 + 32 = -4 < 0 \text{ olduğundan sanal iki kök vardır.}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6i) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{6i \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{6i \pm 2i}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{6i + 2i}{2} = 4i \text{ ve}$$

$$x_2 = \frac{6i - 2i}{2} = 2i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D**SANAL BİRİMİN KUVVETLERİ**

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = 1$$

$$i^5 = (i^4) \cdot i = i$$

⋮

Sonuç olarak n doğal sayı olmak üzere,

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$i^{93} + i^{42}$ sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) i E) -i

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 93 & 4 \\ -92 & 23 \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow 93 = 4 \cdot 23 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 4 \\ -40 & 10 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow 42 = 4 \cdot 10 + 2 \text{ olarak yazılabilir.}$$

Dolayısıyla,

$$i^{93} = i^{4 \cdot 23 + 1} = (i^4)^{23} \cdot i = 1^{23} \cdot i = i$$

$$i^{42} = i^{4 \cdot 10 + 2} = (i^4)^{10} \cdot i^2 = 1^{10} \cdot (-1) = -1$$

$$\Rightarrow i^{93} + i^{42} = i - 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E**ÖRNEK SORU**

$(i^{2005} - i^{2006} + i^{2007})$ sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -i B) -1 C) 2-i D) 1 E) 1-2i

Çözüm

$$i^{2005} = i^{4 \cdot 501 + 1} = (i^4)^{501} \cdot i = 1^{501} \cdot i = i$$

$$i^{2006} = i^{4 \cdot 501 + 2} = (i^4)^{501} \cdot i^2 = 1^{501} \cdot (-1) = -1$$

$$i^{2007} = i^{4 \cdot 501 + 3} = (i^4)^{501} \cdot i^3 = 1^{501} \cdot (-i) = -i$$

Sonuç olarak,

$$i^{2005} - i^{2006} + i^{2007} = i - (-1) - i = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D**ÖRNEK SORU**

$P(x) = 2x^{204} - 3x^{200} + 4x^{198} + x^6 + 4$ polinomu veriliyor.

Buna göre, $P(-i)$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 2-i E) 1+i

Çözüm

Polinomda $x = -i$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} P(-i) &= 2(-i)^{204} - 3(-i)^{200} + 4(-i)^{198} + (-i)^6 + 4 \\ &= 2(i)^{204} - 3(i)^{200} + 4(i)^{198} + (i)^6 + 4 \\ &= 2(i^4)^{51} - 3(i^4)^{50} + 4(i^4)^{49} \cdot i^2 + (i^4) \cdot (i^2) + 4 \\ &= 2 - 3 - 4 - 1 + 4 = -2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt B**ÖRNEK SORU**

Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılar olmak üzere,

$$Z_1 = 7 + 5i \text{ ve } Z_2 = 3i^{200} + 2i^{45} \text{ dir.}$$

Buna göre, $\text{Re}(Z_1) \cdot \text{Im}(Z_2)$ çarpımının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 14 B) 7 C) 2 D) -2 E) -14

Çözüm

$$Z_1 = 7 + 5i \Rightarrow \text{Re}(Z_1) = 7$$

$$Z_2 = 3(i^4)^{50} + 2(i^4)^{11} \cdot i$$

$$Z_2 = 3 + 2i \Rightarrow \text{Im}(Z_2) = 2 \text{ dir.}$$

$$\text{Re}(Z_1) \cdot \text{Im}(Z_2) = 7 \cdot 2 = 14 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A**ÖRNEK SORU**

$$Z = 3i^{2010} - 2i^{51} + 3i^{47}$$

karmaşık sayısının reel kısmı ile imajiner kısmının toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm

$$\begin{aligned}
Z &= 3.i^{2010} - 2.i^{51} + 3.i^{47} \\
&= 3.(i^4)^{502}.i^2 - 2.(i^4)^{12}.i^3 + 3.(i^4)^{11}.i^3 \\
&= 3.i^2 - 2.i^3 + 3.i^3 \\
&= -3 - i
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(Z) = -3 \text{ ve } \operatorname{Im}(Z) = -1 \text{ olup,}$$

$$\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z) = -3 - 1 = -4 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A**İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ**

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayıları veriliyor. Bu iki karmaşık sayının eşit olması için gerek ve yeter koşul reel kısımlarının birbirine, sanal kısımlarının birbirine eşit olmasıdır.

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

ÖRNEK SORU

$$Z_1 = 2x + y + i(x - 2) \text{ ve}$$

$$Z_2 = -8 + 2i \text{ karmaşık sayıları veriliyor.}$$

$Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, (x, y) çarpımı kaçtır?

- A) -64 B) -32 C) -16 D) 10 E) 8

Çözüm

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow 2x + y = -8 \text{ ve } x - 2 = 2 \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan, } x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ ve}$$

$$2.4 + y = -8 \Rightarrow y = -16 \text{ olur.}$$

$$x.y = 4.(-16) = -64 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A**ÖRNEK SORU**

$$Z_1 = (2i - a)i + 4 - bi \text{ ve}$$

$$Z_2 = (5 + 3i)i + ai + 2b - 4 \text{ karmaşık sayıları veriliyor.}$$

$Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, a nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $-\frac{5}{4}$ D) $-\frac{17}{4}$ E) $-\frac{19}{4}$

Çözüm

$$Z_1 = (2i - a)i + 4 - bi$$

$$= 2i^2 - ai + 4 - bi$$

$$Z_1 = 2 + i(-a - b)$$

$$Z_2 = (5 + 3i)i + ai + 2b - 4$$

$$= 5i + 3i^2 + ai + 2b - 4$$

$$= -3 + 2b - 4 + i(a + 5)$$

$$Z_2 = 2b - 7 + i(a + 5) \text{ olur.}$$

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow 2 = 2b - 7 \Rightarrow b = \frac{9}{2} \text{ ve}$$

$$-a - b = a + 5 \Rightarrow 2a = -b - 5$$

$$\Rightarrow 2a = -\frac{9}{2} - 5 \Rightarrow 2a = -\frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{19}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E**KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ**

$Z = a + bi$ karmaşık sayısı verilsin. $a + (-b)i = a - bi$ karmaşık sayısına, Z nin eşleniği denir ve $\bar{Z}$ ile gösterilir.

$$Z = a + bi \Rightarrow \bar{Z} = a - bi \text{ dir.}$$

Z karmaşık sayısının eşleniği karmaşık düzlemde Z nin x eksenine göre simetriğidir.

Örnek

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $Z = 2 + 3i$

b) $Z = -2 + 5i$

c) $Z = 3i$

d) $Z = 7$

Çözüm

a) $Z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{Z} = 2 - 3i$

b) $Z = -2 + 5i \Rightarrow \bar{Z} = -2 - 5i$

c) $Z = 3i \Rightarrow \bar{Z} = -3i$

d) $Z = 7 \Rightarrow \bar{Z} = 7 \text{ dir.}$

ÖRNEK SORU

$$Z = (4 - 3i)i + i^{16} - i^5$$

karmaşık sayısının eşleniği aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4 + 3i$ B) $4 - 3i$ C) $-4 + 3i$

D) $-4 - 3i$ E) $3 - 4i$

Çözüm

$$Z = (4 - 3i)i + i^{16} - i^5$$

$$= 4i - 3i^2 + (i^4)^4 - i^4.i$$

$$= 4i + 3 + 1 - i = 4 + 3i \text{ olur.}$$

$$Z \text{ nin eşleniği de, } \bar{Z} = 4 - 3i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

Bir kökü $Z_1 = 4 - i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + 8x + 17 = 0$ B) $x^2 - 8x + 17 = 0$
 C) $x^2 + 17x - 5 = 0$ D) $x^2 - 4x + 10 = 0$
 E) $x^2 - 7x - 8 = 0$

Çözüm

Bir kökü $Z_1 = 4 - i$ olan reel katsayılı ikinci derece denklemin diğer kökü Z_1 in eşleniğidir.

$$Z_2 = \overline{Z_1} = 4 + i \text{ dir.}$$

Denklemin kökler toplamı

$$Z_1 + Z_2 = 4 - i + 4 + i = 8$$

Denklemin kökler çarpımı

$$Z_1 \cdot Z_2 = (4 - i) \cdot (4 + i) = 4^2 - i^2 = 17$$

Dolayısıyla ikinci dereceden denklem

$$x^2 - 8x + 17 = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 2a + b + i(3 - a)$ ve $Z_2 = 7 + (3b - 8)i$ karmaşık sayıları veriliyor.

$Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, $Z_3 = a.b - a^b.i$ karmaşık sayısının eşleniği aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 + 3i$ B) $-3 - 4i$ C) $6 + 8i$
 D) $6 - 8i$ E) $8 - 6i$

Çözüm

$$Z_1 = 2a + b + (3 - a)i$$

$$Z_2 = 7 + (3b - 8)i$$

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow 2a + b = 7 \text{ (1)}$$

$$3 - a = 3b - 8$$

$$\Rightarrow 3b + a = 11 \text{ (2) elde edilir.}$$

(1) ve (2) den

$$\begin{array}{rcl} -3/2a + b = 7 & \Rightarrow & -6a - 3b = -21 \\ 3b + a = 11 & \Rightarrow & + \quad 3b + a = 11 \\ \hline -5a = -10 & \Rightarrow & a = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3b + 2 = 11 \Rightarrow b = 3 \text{ olarak bulunur.}$$

$Z_3 = a.b - a^b.i = 3.2 - 2^3.i = 6 - 8i$ olur ve Z_3 karmaşık sayısının eşleniği $\overline{Z_3} = 6 + 8i$ olarak bulunur.

Yanıt C

KARMAŞIK SAYILARDA TOPLAMA VE ÇIKARMA

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayıları verilsin.

$$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Örnek

$Z_1 = -2 + 3i$ ve $Z_2 = 4 - i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $Z_1 + Z_2$ toplamını bulunuz.

Çözüm

$$Z_1 + Z_2 = -2 + 4 + 3i - i$$

$$Z_1 + Z_2 = 2 + 2i \text{ olur.}$$

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 4 - 7i$ ve $Z_2 = 3 + 5i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\text{Re}(Z_1 + Z_2) + \text{Im}(Z_1 - Z_2)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -2 D) 0 E) 5

Çözüm

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (4 - 7i) + (3 + 5i) \\ &= (4 + 3) + (-7 + 5)i \\ &= 7 - 2i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(Z_1 + Z_2) = 7$$

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (4 - 7i) - (3 + 5i) \\ &= (4 - 3) + (-7 - 5)i \\ &= 1 - 12i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(Z_1 - Z_2) = -12 \text{ olur.}$$

Buradan,

$$\text{Re}(Z_1 + Z_2) + \text{Im}(Z_1 - Z_2) = 7 - 12 = -5 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$Z_1 = (-4i - 3)i$, $Z_2 = 5 - 2i$ ve $Z_3 = (3m - 3) + (4n + m - 5)i$ karmaşık sayıları veriliyor.

$Z_1 - 2.Z_2 = Z_3$ olduğuna göre, $m.n$ kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{7}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{5}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

Çözüm

$$Z_1 = (-4i - 3)i = -4i^2 - 3i = 4 - 3i$$

$$2.Z_2 = 2.(5 - 2i) = 10 - 4i$$

$$Z_1 - 2.Z_2 = Z_3$$

$$\Rightarrow (4 - 3i) - (10 - 4i) = (3m - 3) + (4n + m - 5)i$$

$$\Rightarrow -6 + i = (3m - 3) + (4n + m - 5)i$$

$$\Rightarrow 3m - 3 = -6 \Rightarrow m = -1 \text{ olur.}$$

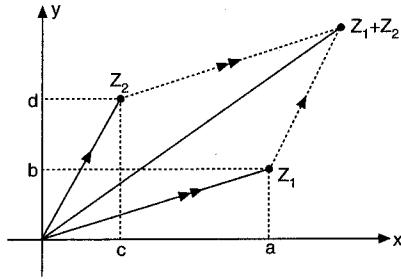
$$\Rightarrow 4n + m - 5 = 1$$

$$\Rightarrow 4n - 6 = 1 \Rightarrow n = \frac{7}{4} \text{ olur.}$$

Buradan, $m, n = (-1), \frac{7}{4}$ olarak bulunur.

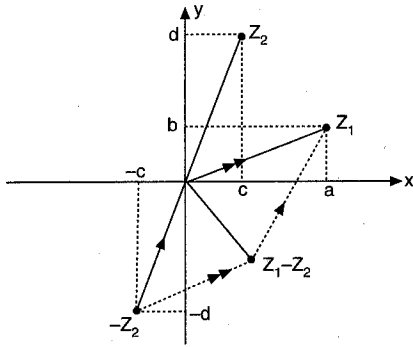
Yanıt B

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayılarının toplamının geometrik yorumu;



şeklinde dir.

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayılarının farkının geometrik yorumu,



şeklinde dir.

NOT:

1. Toplama işlemine göre etkisiz eleman $(0 + 0.i)$ karmaşık sayısıdır.
2. $Z = a + bi$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi $-Z = -a - bi$ karmaşık sayısıdır.

KARMAŞIK SAYILARDA ÇARPMA

$Z_1 = a + bi$, $Z_2 = c + di$ karmaşık sayıları verilsin.

$$Z_1.Z_2 = (a + bi).(c + di)$$

$$= a.c + a.d.i + b.c.i + b.d.i^2$$

$$= (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i \text{ olur.}$$

Örnek

$Z_1 = 2 + i$ ve $Z_2 = 4 - i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $Z_1.Z_2$ çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$Z_1.Z_2 = (2 + i)(4 - i)$$

$$= 8 - 2i + 4i - i^2$$

$$= 8 - 2i + 4i - (-1)$$

$$= 9 + 2i \text{ olur.}$$

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 3 + 2i$ ve $Z_2 = 5 - 4i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\frac{\text{Re}(Z_1.Z_2)}{\text{Im}(Z_1.Z_2)}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{23}{2}$ B) -11 C) $-\frac{21}{2}$ D) $-\frac{19}{2}$ E) -9

Çözüm

$$Z_1.Z_2 = (3 + 2i).(5 - 4i)$$

$$= 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 23 - 2i \text{ olur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(Z_1.Z_2) = 23 \\ \text{Im}(Z_1.Z_2) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{Re}(Z_1.Z_2)}{\text{Im}(Z_1.Z_2)} = -\frac{23}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 1 + i$ ve $Z_2 = 3 + 2i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $(Z_1^2.Z_2)$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -4 B) $-4+i$ C) $-4+6i$ D) $6-4i$ E) $4-6i$

Çözüm

$$Z_1^2 = Z_1.Z_1 = (1 + i).(1 + i)$$

$$= 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \text{ olur.}$$

$$Z_1^2.Z_2 = 2i.(3 + 2i) = 6i + 4i^2 = -4 + 6i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$Z_1 = (1 - i)^{24}$ ve $Z_2 = (1 + i)^{36}$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2^{16} B) $2^{16}i$ C) $-2^{16}i$ D) $-2^{30}i$ E) -2^{30}

Çözüm

$$Z_1 = [(1 - i)^2]^{12} = (1 - 2i + i^2)^{12}$$

$$= (-2i)^{12} = (-2)^{12} \cdot i^{12}$$

$$= 2^{12} \cdot (i^4)^3 = 2^{12}$$

$$Z_2 = [(1 + i)^2]^{18} = [1 + 2i + i^2]^{18} = (2i)^{18}$$

$$= 2^{18} \cdot (i^4)^4 \cdot i^2 = -2^{18}$$

Buradan,

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2^{12} \cdot (-2^{18}) = -2^{30} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

NOT:

1. Çarpma işlemine göre etkisiz (birim) eleman

$$Z = 1 + 0i = 1 \text{ karmaşık sayısıdır.}$$

2. $Z = a + bi$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi,

$$Z^{-1} = (a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \text{ dir.}$$

KARMAŞIK SAYILARDA BÖLME

$Z_1 = a + bi$, $Z_2 = c + di$ ve $Z_2 \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{Z_1 \cdot \bar{Z}_2}{Z_2 \cdot \bar{Z}_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek

$Z_1 = 1 + i$ ve $Z_2 = 2 - i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\frac{Z_1}{Z_2}$ sayısını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\ &= \frac{2 + i + 2i + i^2}{4 + 2i - 2i - i^2} \\ &= \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 3 - 5i$ ve $Z_2 = 3 + 4i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\text{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) - \text{Im}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{27}{25}$ B) $-\frac{16}{25}$ C) $-\frac{11}{25}$ D) $\frac{11}{25}$ E) $\frac{16}{25}$

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(3 - 5i)}{(3 + 4i)} = \frac{(3 - 5i) \cdot (3 - 4i)}{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)} \\ &= \frac{9 - 12i - 15i + 20i^2}{9 - 12i + 12i - 16i^2} = \frac{-11 - 27i}{25} \\ &= -\frac{11}{25} - \frac{27}{25}i \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = -\frac{11}{25}, \text{Im}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = -\frac{27}{25}$$

$$\text{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) - \text{Im}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = -\frac{11}{25} - \left(-\frac{27}{25}\right) = \frac{16}{25} \text{ olur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$Z = \frac{3 - i}{2 + i}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $\text{Im}(\bar{Z})$ nin

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm

$$\begin{aligned} Z &= \frac{3 - i}{2 + i} = \frac{(3 - i) \cdot (2 - i)}{(2 + i) \cdot (2 - i)} \\ &= \frac{6 - 5i + i^2}{4 - i^2} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i \\ \Rightarrow \bar{Z} &= 1 + i \text{ ve } \text{Im}(\bar{Z}) = 1 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$Z = \frac{8 + 6i}{7 - i}$ olduğuna göre, Z^{200} sayısının eşiti aşağıdaki-

lerden hangisidir?

- A) -2^{200} B) -2^{100} C) $-2^{100}i$
D) 2^{100} E) $2^{100}i$

1 $i^2 = -1$ olmak üzere,
 $\frac{\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

2 $i^2 = -1$ olmak üzere,
 $\frac{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-6}}{\sqrt{24}}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

3 $i^{28} + i^{17} + i^{63} + i^{10}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

4 $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
 $i^{4k+3} + i^{8k+2} + i^{8k+1}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

5 $i^4 + i^5 + i^6 + \dots + i^{21}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $i^{-5} + i^{-6} + i^{-7} + i^{-8} + i^{-10}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $(1 - i)^{80} - (1 + i)^{80}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

8 $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 1$ polinomu veriliyor. Buna göre,
 $P(i)$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 9 $Z = 2 - \sqrt{-9}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $\text{Re}(Z)$, $\text{Im}(Z)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

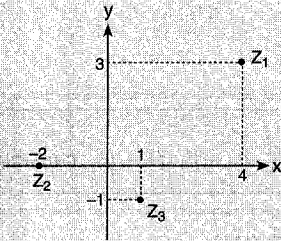
- 10 $Z = \frac{4 - i^{284}}{1 - i^{98}}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $\text{Re}(Z)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 11 $Z = 4i^{2402} - 2i^{19} + 4i^{27}$ karmaşık sayısının reel kısmı ile sanal kısmının toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 12 Karmaşık düzlemde Z_1 , Z_2 ve Z_3 karmaşık sayıları verilmiştir. Buna göre, $\text{Re}(Z_2) - \text{Re}(Z_3) + \text{Im}(Z_1)$ işleminin sonucu kaçtır?



ÇÖZÜM:

- 13 $Z_1 = 2x + 3 + 5i$

$Z_2 = 7 + (y + 1)i$ karmaşık sayıları için $Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, (x, y) çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 14 a ve b reel sayıdır.

$a - 2 + bi + 3i = b + 5 + 2ai + 4i$ eşitliğini sağlayan a ve b için $(a + b)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 15 $Z_1 = a + 3b + (b - 2a)i$ ve $Z_2 = 11 + (8 - 3b)i$ karmaşık sayıları için $Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, Z_2 nin eşleniği nedir?

ÇÖZÜM:

- 16 $x^2 + 4x + 6 = 0$ ikinci dereceden denklemin köklerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

17 $x^2 + 16 = 0$ ikinci dereceden denklemin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

18 Bir kökü $Z_1 = 2 - i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM:

19 $x^2 - 2ix - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

20 $x^2 - 4ix + 2 = 0$ denklemin köklerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

21 $Z_1 = a + 2 + 3i$

$Z_2 = 3 + 4i$ ve $Z_1 - 2Z_2 = 5 - bi$ olduğuna göre, $(a + b)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

22 $3i(1 - i) + (3 - i)(i + 1)$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

23 $\frac{2+i}{i} + \frac{2-i}{2i}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

24 $(1 + i)^6 \cdot (1 - i)^5$ çarpımının sanal kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

25 $(2 + 2i^8) \cdot (2 + 2i^4) \cdot (2 + 2i^2) \cdot (2 - 2i^4)$ çarpımının sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

26 $Z = \sqrt{3} - i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre ter-
sinin imajiner kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

27 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

28 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{51} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{61}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

29 $\frac{2-2i}{1+i} + \frac{2+2i}{1-i}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

30 $(1+i) \cdot \bar{Z} = 3+i$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısının reel
kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

31 $3 + Z = (-2i) \cdot \bar{Z}$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısını bul-
unuz.

ÇÖZÜM:

32 $(1-i) \cdot \bar{Z} + 2 = Z$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısını bu-
lunuz.

ÇÖZÜM:

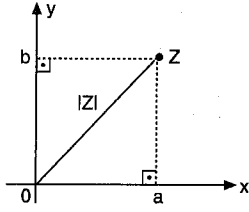
33 $Z_1 = 2 + 3i$ ve $Z_2 = 2i$ olduğuna göre, $\frac{6+4i}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}$ ifadesi-
nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

KARMAŞIK SAYININ MODÜLÜ

KARMAŞIK SAYININ MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ)

Karmaşık düzlemde bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın orijine olan uzaklığına, bu karmaşık sayının mutlak değeri veya modülü denir ve $|Z|$ ile gösterilir.



$Z = a + bi$ sayısının modülü, $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

Örnek

Aşağıda verilen karmaşık sayıların modüllerini bulunuz.

- a) $Z = 2 + 3i$
- b) $Z = -4 + 3i$
- c) $Z = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$
- d) $Z = -8i$
- e) $Z = 7$

Çözüm

- a) $Z = 2 + 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$
 $|Z| = \sqrt{13}$
- b) $Z = -4 + 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$
 $|Z| = 5$
- c) $Z = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2}$
 $|Z| = 1$
- d) $Z = -8i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(-8)^2}$
 $|Z| = 8$
- e) $Z = 7 \Rightarrow |Z| = \sqrt{(7)^2}$
 $|Z| = 7$ dir.

ÖRNEK SORU

$$Z = (4 - 3i)i - i^7 + 9i^{48}$$

karmaşık sayısının modülü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{13}$
- B) 5
- C) $\sqrt{63}$
- D) 10
- E) 13

Çözüm

$$\begin{aligned} Z &= (4 - 3i)i - i^7 + 9i^{48} \\ &= 4i - 3i^2 - i^4 + 9i^{12} \\ &= 4i + 3 - i^3 + 9 = 12 + 5i \end{aligned}$$

$$|Z| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$Z = 3 - m + 24i$ karmaşık sayısının modülü 25 olduğuna göre, m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) -4
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 10

Çözüm

$$\begin{aligned} |Z| = 25 &\Rightarrow 25 = \sqrt{(3-m)^2 + 24^2} \\ &\Rightarrow 625 = (3-m)^2 + 576 \\ &\Rightarrow (3-m)^2 = 49 \\ &\Rightarrow 3-m = 7 \text{ veya } 3-m = -7 \text{ olmalıdır.} \\ &\Rightarrow m = -4 \text{ veya } m = 10 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla m nin alabileceği değerler toplamı, $-4 + 10 = 6$ olarak bulunur.

Yanıt C

MUTLAK DEĞERİN ÖZELLİKLERİ

1. $|Z| = |\bar{Z}| = | -Z| = | -\bar{Z}|$
2. $Z_1 = a + bi$ olmak üzere,
 $Z_1 \cdot \bar{Z}_1 = |Z_1|^2 = a^2 + b^2$
3. $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$
4. $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$, ($Z_2 \neq 0$)
5. $|Z^n| = |Z|^n$
6. $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
(Üçgen eşitsizliği)
7. $\left| \frac{1}{Z} \right| = \frac{1}{|Z|}$ ($Z \neq 0$)

ÖRNEK SORU

$2Z + 4(\bar{Z} + 2i) = i\bar{Z} - 4$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının sanal kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 6
- B) 4
- C) 2
- D) -2
- E) -4

Çözüm

$$Z = a + bi \text{ olsun}$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = a - bi \text{ olur.}$$

$$2.Z + 4.(\bar{Z} + 2i) = i.\bar{Z} - 4$$

$$2.(a + bi) + 4(a - bi + 2i) = i(a - bi) - 4$$

$$2a + 2bi + 4a - 4bi + 8i = ai - bi^2 - 4$$

$$6a + (-2b + 8)i = b - 4 + ai$$

$$\Rightarrow 6a = b - 4 \text{ ve } a = -2b + 8 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 6.(-2b + 8) = b - 4$$

$$\Rightarrow 13b = 52 \Rightarrow b = 4 \text{ ve } \operatorname{Im}(Z) = b = 4 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B**ÖRNEK SORU**

$Z = \frac{3-4i}{1+2i}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $|\bar{Z}|$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{5}$

Çözüm

$|\bar{Z}| = |Z|$ olduğundan,

$$|\bar{Z}| = |Z| = \left| \frac{3-4i}{1+2i} \right| = \frac{|3-4i|}{|1+2i|}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C**ÖRNEK SORU**

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$Z_1 = \sec \alpha + i \cdot \operatorname{cosec} \alpha \text{ ve}$$

$$Z_2 = \sqrt{\tan \alpha} + i\sqrt{\cot \alpha}$$

karmaşık sayıları için $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|$ ifadesinin eşiti aşağıdaki-

lerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) $\sin \alpha$
D) $\cos \alpha$ E) $\frac{\sin 2\alpha}{2}$

Çözüm

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|^2} \text{ dir.}$$

$$|Z_1| = \sqrt{(\sec \alpha)^2 + (\operatorname{cosec} \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$|Z_2|^2 = \left(\sqrt{(\tan \alpha)^2} + \sqrt{(\cot \alpha)^2} \right)^2$$

$$= \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}} = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B**ÖRNEK SORU**

$Z = 1 - \sqrt{2}i$ karmaşık sayısı veriliyor.

Buna göre, $|Z^8|$ in değeri kaçtır?

- A) 9 B) 16 C) 27 D) 64 E) 81

Çözüm

$$|Z^8| = |Z|^8 \text{ dir.}$$

$$|Z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |Z|^8 = (\sqrt{3})^8 = (3^{\frac{1}{2}})^8 = 3^4 = 81 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E**ÖRNEK SORU**

$Z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$, $Z_2 = \sqrt{3} - i$ ve $Z_3 = 4 - 3i$ karmaşık sayı-

ları için, $\left| \frac{Z_1}{Z_2 \cdot Z_3} \right|$ nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2 \cdot Z_3} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2 \cdot Z_3|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2| \cdot |Z_3|} \text{ tür.}$$

$$|Z_1| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$$

$$|Z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$|Z_3| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{|Z_1|}{|Z_2| \cdot |Z_3|} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A**ÖRNEK SORU**

$\bar{Z} - |Z| = (12 - 3i)i - 11$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının reel kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -12 B) -8 C) 4 D) 5 E) 8

Çözüm

$$Z = a + bi \text{ olsun}$$

$$\bar{Z} = a - bi \text{ ve } |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow (a - bi) - \sqrt{a^2 + b^2} = 12i - 3i^2 - 11$$

$$\Rightarrow (a - \sqrt{a^2 + b^2}) - bi = -8 + 12i$$

$$\Rightarrow -b = 12 \Rightarrow b = -12$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a^2 + b^2} = -8$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a^2 + (-12)^2} = -8$$

$$\Rightarrow a + 8 = \sqrt{a^2 + 144}$$

$$\Rightarrow (a + 8)^2 = (\sqrt{a^2 + 144})^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 16a + 64 = a^2 + 144$$

$$\Rightarrow 16a = 80 \Rightarrow a = 5 \text{ ve}$$

$$Z = 5 - 12i \text{ olarak bulunur, } \operatorname{Re}(Z) = 5 \text{ tir.}$$

Yanıt D**ÖRNEK SORU**

Z karmaşık sayı olmak üzere,

$(2 + i)\bar{Z} = 2Z + i(5i + 23)$ eşitliği veriliyor.

Buna göre, $|Z|$ kaçtır?

- A) 5 B) $2\sqrt{7}$ C) $\sqrt{34}$ D) 6 E) $2\sqrt{10}$

Çözüm

$$\bar{Z} = a + bi \text{ olsun}$$

$$\bar{Z} = a - bi \text{ dir.}$$

$$(2 + i)\bar{Z} = 2Z + i(5i + 23)$$

$$(2 + i)(a - bi) = 2(a + bi) + i(5i + 23)$$

$$2a - 2bi + ai - bi^2 = 2a + 2bi + 5i^2 + 23i$$

$$\Rightarrow 2a + b + i(a - 2b) = (2a - 5) + i(23 + 2b)$$

$$\Rightarrow 2a + b = 2a - 5 \Rightarrow b = -5$$

$$\Rightarrow a - 2b = 23 + 2b \Rightarrow a = 23 + 4b$$

$$\Rightarrow a = 23 + 4(-5) \Rightarrow a = 3 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow Z = 3 - 5i \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C**ÖRNEK SORU**

$$Z = \frac{(2-i)(4+3i)(6+2i)}{(7-24i)(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)} \text{ karmaşık sayısının mutlak de}$$

ğeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{2}$

Çözüm

$$|Z| = \frac{|2-i| \cdot |4+3i| \cdot |6+2i|}{|7-24i| \cdot |\sqrt{6}-\sqrt{2}i|}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2}}{\sqrt{7^2 + (-24)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{625} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{10}}{25 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{50}}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1$$

Yanıt A**ÖRNEK SORU**

Z karmaşık sayı olmak üzere, $(1 + i)^{10} \bar{Z} = 27Z + 5 + 5i$ eşitliği veriliyor.

Buna göre, $\operatorname{Im}(Z)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm

$$Z = a + bi \Rightarrow \bar{Z} = a - bi \text{ dir.}$$

$$(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = (1 + 2i + i^2)^5 = 32i^5 = 32i^4 \cdot i = 32i$$

$$(1 + i)^{10} \bar{Z} = 27Z + 5 + 5i$$

$$\Rightarrow 32i(a - bi) = 27(a + bi) + 5 + 5i$$

$$\Rightarrow 32b + 32ai = (27a + 5) + i(27b + 5)$$

$$\Rightarrow 32b = 27a + 5 \text{ ve } 32a = 27b + 5 \text{ bulunur.}$$

Bu iki denklem ortak çözülürse,

$$a = b = 1 \text{ ve } Z = 1 + i \text{ bulunur.}$$

$$\text{Dolayısıyla, } \operatorname{Im}(Z) = 1 \text{ dir.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$Z = \left(\frac{1+2i}{2-i} \right)^{121} + \left(\frac{4-i}{1+4i} \right)^{98} - i^{47} + 4$$

olduğuna göre, $|Z|$ kaçtır?

- A) 3 B) $\sqrt{13}$ C) 4 D) 5 E) $2\sqrt{7}$

Çözüm

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+2i}{2-i} \right)^{121} &= \left[\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \right]^{121} \\ &= \left[\frac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2} \right]^{121} = \left(\frac{5i}{5} \right)^{121} = i^{121} \\ &= (i^4)^{30} \cdot i = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4-i}{1+4i} \right)^{98} &= \left[\frac{(4-i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} \right]^{98} \\ &= \left[\frac{4-16i-i+4i^2}{1-16i^2} \right]^{98} = \left(\frac{-17i}{17} \right)^{98} \\ &= (-i)^{98} = i^{98} = (i^4)^{24} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$i^{47} = (i^4)^{11} \cdot i^3 = -i$$

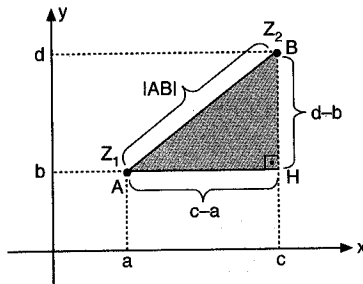
$$\Rightarrow Z = i - 1 - (-i) + 4 = 3 + 2i \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow |Z| = |Z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

KARMAŞIK DÜZLEMDE İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

$Z_1 = a + bi$ ve $Z_2 = c + di$ karmaşık sayıları verilsin.



Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıları arasındaki uzaklık;

$$\begin{aligned} |Z_1 - Z_2| &= |AB| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \\ &= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek

Aşağıda verilen karmaşık sayılar arasındaki uzaklıkları bulunuz.

a) $Z_1 = 2 - 3i$, $Z_2 = 5 + i$

b) $Z_1 = 4 + 2i$, $Z_2 = 2 + 2i$

Çözüm

$$\begin{aligned} \text{a) } |Z_1 - Z_2| &= \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |Z_1 - Z_2| &= \sqrt{(4-2)^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{2^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 17 - 21i$ ve $Z_2 = 9 + ci$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık 17 br olduğuna göre, c nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) -32 B) -36 C) -40 D) -42 E) -48

Çözüm

$$\begin{aligned} Z_1 &= 17 - 21i \\ Z_2 &= 9 + ci \end{aligned} \Rightarrow |Z_1 - Z_2| = 17$$

$$\Rightarrow \sqrt{(17-9)^2 + (-21-c)^2} = 17$$

$$\Rightarrow 8^2 + (c+21)^2 = 17^2$$

$$\Rightarrow (c+21)^2 = 289 - 64$$

$$\Rightarrow (c+21)^2 = 225 \Rightarrow c+21 = -15 \text{ veya } c+21 = 15$$

$$\Rightarrow c = -36 \text{ veya } c = -6 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla c nin alabileceği değer toplamı -42 dir.

Yanıt D

Örnek

$Z_1 = 2 - 3i$ olmak üzere, $|Z - Z_1| = 7$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.

Çözüm

$$Z = x + yi \text{ olsun.}$$

$$|Z - Z_1| = 7$$

$$\Rightarrow |(x + yi) - (2 - 3i)| = 7$$

$$\Rightarrow |(x-2) + i(y+3)| = 7$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 7$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 49 \text{ dir.}$$

Bu denklem merkezi $(2, -3)$, yarıçapı 7 br olan çemberi göstermektedir.

Not: Merkezi $M(a, b)$, yarıçapı r olan çemberin denklemi, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir.

Örnek

$Z_1 = 1 - 4i$ olmak üzere,

$M = \{Z \mid Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z - Z_1| = \sqrt{5}\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$Z = x + yi$ olsun.

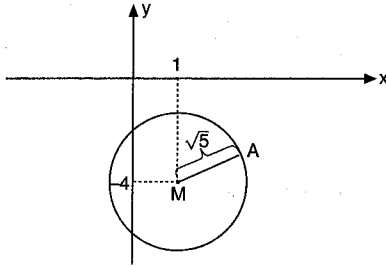
$$|Z - Z_1| = \sqrt{5} \Rightarrow |(x + yi) - (1 - 4i)| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |(x - 1) + i(y + 4)| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 5 \text{ dir.}$$

Bu denklem, merkezi $M(1, -4)$, yarıçapı $r = \sqrt{5}$ br olan çemberi göstermektedir.



SONUÇLAR

Z ve $Z_1 = a + bi$ karmaşık sayıları verilsin.

1. $|Z - Z_1| = r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi, $M(a, b)$ merkezli, r br yarıçaplı çemberdir.
2. $|Z - Z_1| \leq r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi, $M(a, b)$ merkezli, r br yarıçaplı dairedir.
3. $|Z - Z_1| > r$ koşuluna uyan Z karmaşık sayılarının kümesi, $M(a, b)$ merkezli, r br yarıçaplı dairenin dış bölgesidir.

Örnek

$A = \{Z \mid Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z + 4 - i| \leq 4\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

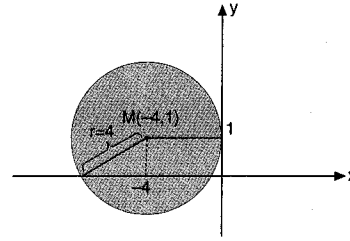
Çözüm

$$|Z + 4 - i| \leq 4$$

$$\Rightarrow |Z - (-4 + i)| \leq 4$$

$Z_1 = -4 + i \Rightarrow Z$ karmaşık sayılarının kümesi merkezi $M(-4, 1)$ ve yarıçapı $r = 4$ br olan dairedir.

Z karmaşık sayılarının görüntüsü,



şeklinde.

Örnek

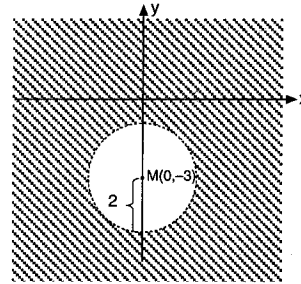
$A = \{Z \mid Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z + 3i| > 2\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$$|Z + 3i| > 2$$

$$\Rightarrow |Z - (-3i)| > 2$$

$$\Rightarrow Z_1 = -3i \Rightarrow M(0, -3) \text{ ve } r = 2 \text{ dir.}$$



Şekildeki taralı bölge A kümesidir.

Örnek

$A = \{Z \mid Z \in \mathbb{C} \text{ ve } 2 \leq |Z + 2 - 5i| \leq 4\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$$2 \leq |Z + 2 - 5i| \leq 4$$

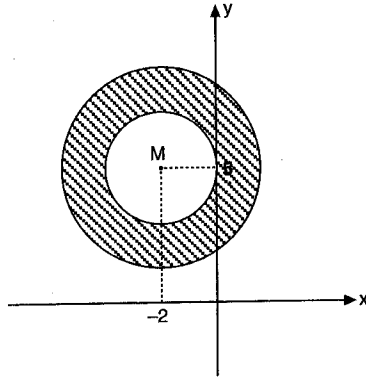
$$\Rightarrow 2 \leq |Z - (-2 + 5i)| \leq 4$$

Bu eşitsizliği iki durumda incelersek,

$2 \leq |Z - (-2 + 5i)|$ eşitsizliği $M(-2, 5)$ merkezli ve $r = 2$ br yarıçaplı dairenin dış bölgesini gösterir.

$|Z - (-2 + 5i)| \leq 4$ eşitsizliği $M(-2, 5)$ ve $r = 4$ br yarıçaplı dairedir.

Sonuç olarak A kümesinin karmaşık düzlemdeki gösterimi



şeklinde dir.

Örnek

$A = \{Z \mid Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z - 2i| \leq |Z + 4 + 2i|\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$Z = x + yi$ olsun.

$$|Z - 2i| \leq |Z + 4 + 2i| \Rightarrow |x + yi - 2i| \leq |x + yi + 4 + 2i|$$

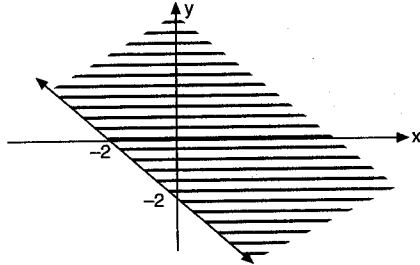
$$\Rightarrow |x + i(y - 2)| \leq |x + 4 + i(y + 2)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \leq \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 \leq x^2 + 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Rightarrow -4y + 4 \leq 8x + 4y + 20$$

$$\Rightarrow 8x + 8y + 16 \geq 0 \Rightarrow x + y + 2 \geq 0 \text{ dir.}$$



A kümesinin karmaşık düzlemdeki gösterimi şekildeki taralı bölgedir.

ÖRNEK SORU

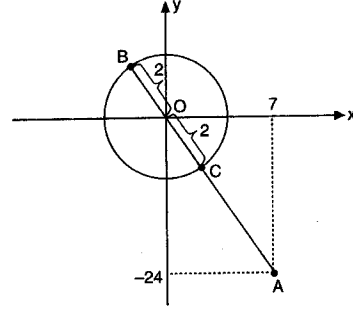
$|Z| \leq 2$ olmak üzere, $|Z - 7 + 24i|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 23 B) 24 C) 25 D) 27 E) 29

Çözüm

$|Z| \leq 2$ eşitliği 2 br yarıçaplı merkezli dairedir.

$|Z - 7 + 24i| = |Z - (7 - 24i)|$ ifadesi Z karmaşık sayıları ile $(7 - 24i)$ karmaşık sayısı arasındaki uzaklıktır.



Şekildeki A noktasının çembere en yakın noktası C, en uzak noktası B dir.

$$\left. \begin{array}{l} A(7, -24) \\ O(0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow |AO| = \sqrt{(7-0)^2 + (-24-0)^2} = 25 \text{ olur ve}$$

$|AB| = 25 + 2 = 27$ br olarak bulunur.

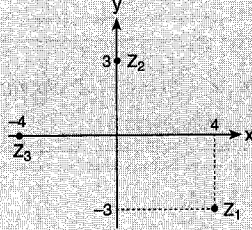
Yanıt D

SINIF SORULARI

1 $Z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının mutlak değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

2 Karmaşık düzlemde Z_1 , Z_2 ve Z_3 karmaşık sayılar verilmiştir. Buna göre, $\frac{|Z_1| + |Z_2|}{|Z_3|}$ ifadesinin değeri kaçtır?



ÇÖZÜM:

3 Z karmaşık sayısının uzunluğu 5 birim olduğuna göre, $\frac{|-Z| \cdot \bar{Z}}{Z}$ sayısının uzunluğu kaçtır?

ÇÖZÜM:

4 $Z = 2 + a + 12i$ karmaşık sayısının modülü 13 birim olduğuna göre, a nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

5 $Z = \frac{(4+i)(3-4i)}{4-i}$ karmaşık sayısı için $|\bar{Z}|$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $Z = 4 + 3i$ olduğuna göre, $|Z^{-1}|$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $Z = \frac{(2-i)(5-12i)}{4+2i}$ olduğuna göre, $|Z|$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

8 $Z = \frac{(3+4i)^2 \cdot (2+3i)^4}{(2-3i)^2}$ karmaşık sayısının modülü kaçtır?

ÇÖZÜM:

9 $Z = 4 - i\sqrt{5}$ olduğuna göre, $\frac{Z \cdot \bar{Z}}{1 - \bar{Z} \cdot 1 - Z}$ sayısının modülü kaçtır?

ÇÖZÜM:

10 $Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $Z_2 = 3 + 3i$ olduğuna göre, $Z_1^5 \cdot Z_2^2$ karmaşık sayısının mutlak değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

11 $Z_1 = 1 + 4i$
 $Z_2 = 1 + i$
 $Z_3 = 2\sqrt{2} + 3i$
 olduğuna göre, $\left| \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} \right|$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

12 $Z_1 = 8 + 2i$
 $Z_2 = 3 - 10i$
 $Z_3 = -12 + 5i$
 olduğuna göre, $\left| \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_3} \right|$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

13 $|Z + 3i| + \bar{Z} = 2 + 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

14 $Z - 2i = 4 - iZ$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısının modülü kaçtır?

ÇÖZÜM:

15 $Z = \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^{15}$ olduğuna göre, $|Z|$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

16 $Z_1 = 4 + 3i$
 $Z_2 = 2 + i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

ÇÖZÜM:

17 $Z_1 = 4 - 2i$

$Z_2 = 7 + 3i$ olduğuna göre, $|Z_1 - Z_2|$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

18 $Z_1 = -1 - 10i$

$Z_2 = a + 1 + 2i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık 13 birim olduğuna göre, a nın alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

19 $Z = 2 + i\sqrt{3}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $|Z^6|$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $|z| = 4$ olduğuna göre, $\left| \frac{z}{2i} \right|$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

21 $|a + ib - ia + b| = 4\sqrt{2}$ olduğuna göre, $a^2 + b^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

22 $Z = 2 + i$ olduğuna göre, $|Z^{-2}|$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

23 Aşağıda verilen kümeleri karmaşık düzlemde gösteriniz.

- a) $A = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z| = |Z + 2|\}$
- b) $B = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z + i| < |Z - i|\}$
- c) $C = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z + i| = |Z - 2|\}$
- d) $D = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z + 1 + 2i| = 1\}$
- e) $E = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z - 2 + i| \leq 2\}$
- f) $F = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z - 1 + 2i| > 1\}$
- g) $G = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } 4 \leq |Z| \leq 16\}$

ÇÖZÜM:

24 $\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| \geq 1$ eşitsizliğinin karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

25 $2 \leq |Z+2-i| \leq 4$ eşitsizliğinin karmaşık düzlemdeki görüntüsünü gösteriniz.

ÇÖZÜM:

26 $A = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } |Z+1| \leq 2\}$
 $B = \{Z: Z \in \mathbb{C} \text{ ve } \operatorname{Im}(Z) \leq 1\}$ kümeleri veriliyor.
 $A \cap B$ kümesinin karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

27 $|Z+1| \leq 4$ eşitsizliğinin karmaşık düzlemde gösterdiği bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM:

28 $|Z| \leq 3$ olmak üzere, $|Z-5+12i|$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

29 $|Z| \leq 2$ olmak üzere, $|Z+8+15i|$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

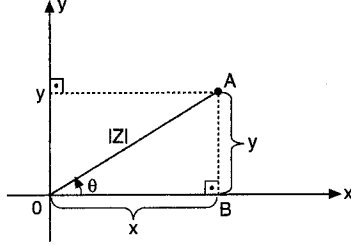
30 $|Z-2+3i| \leq 6$ ve $|Z-8-5i| \leq 1$ eşitsizliklerini sağlayan karmaşık sayılar arasındaki uzaklığın alabileceği en büyük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

KARMAŞIK SAYININ KUTUPSAL BİÇİMİ

KARMAŞIK SAYININ KUTUPSAL (TRİGONOMETRİK) BİÇİMİ

Herhangi bir $Z = x + yi$ karmaşık sayısı verilsin. Karmaşık düzlemde Z sayısına karşılık gelen nokta A olsun. A noktasını orijine birleştiren doğrunun reel eksenle pozitif yönde yaptığı en küçük açıya, Z karmaşık sayısının esas argümenti denir ve $\text{Arg}(Z) = \theta$ ile gösterilir. $\theta + k.2\pi$ açılara Z karmaşık sayısının argümentleri denir ve $\arg(Z) = \theta + k.2\pi$ ile gösterilir.



$$Z = x + yi \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dir.}$$

AOB dik üçgeninde,

$$\sin \theta = \frac{y}{|Z|} \Rightarrow y = |Z| \cdot \sin \theta \dots (1)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{|Z|} \Rightarrow x = |Z| \cdot \cos \theta \dots (2)$$

(1) ve (2) değerleri Z sayısında yazılırsa,

$$Z = |Z| \cdot \cos \theta + i |Z| \cdot \sin \theta = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ olarak bulunur.}$$

Bu yazılıma Z nin kutupsal (trigonometrik) biçimi denir.

Z karmaşık sayısı kutupsal koordinatları cinsinden $(|Z|, \theta)$ ikilişi ile gösterilir.

$$Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ sayısı,}$$

$Z = |Z| \cdot [\cos(\theta + k.2\pi) + i \sin(\theta + k.2\pi)]$ biçiminde de yazılabilir.

Ayrıca Z sayısı kutupsal biçimde kısaca $Z = |Z| \cdot \text{cis} \theta$ biçiminde de gösterilebilir.

NOT:

- $0 \leq \theta < 2\pi$ koşulunu sağlayan θ açısına Z nin esas argümenti denir ve $\text{Arg}(Z) = \theta$ biçiminde gösterilir.
- $Z = x + yi$ karmaşık sayısında

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

Kutupsal koordinatları $(8, \frac{2\pi}{3})$ olan karmaşık sayının

sanal ve reel kısımlarının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-4\sqrt{3}$ B) -16 C) $-8\sqrt{3}$
D) $-12\sqrt{3}$ E) $-16\sqrt{3}$

Çözüm

Kutupsal koordinatlar $(|Z|, \theta)$ olduğundan

$$(8, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow |Z| = 8 \text{ ve } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$Z = |Z| \cdot \text{cis} \theta = 8 \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}$$

$$= 8 \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$= 8 \cdot (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = -4 + 4\sqrt{3}i \text{ olur.}$$

$$\text{Re}(Z) = -4 \text{ ve } \text{Im}(Z) = 4\sqrt{3} \text{ olup}$$

$$\text{Re}(Z) \cdot \text{Im}(Z) = -4 \cdot (4\sqrt{3}) = -16\sqrt{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$Z = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ karmaşık sayısının trigonometrik biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\text{cis} \frac{5\pi}{4}$ B) $4 \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{4}$ C) $8 \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{4}$
D) $8 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$ E) $8 \cdot \text{cis} \frac{3\pi}{4}$

Çözüm

$$Z = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$|Z| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\tan \theta = \frac{-4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} = 1 \text{ ve } Z \text{ karmaşık sayısının görüntüsü}$$

3. bölgede olduğundan,

$$\theta = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ = \frac{5\pi}{4} \text{ dir.}$$

Buradan,

$$Z = 8 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$$

$$= 8 \text{cis} \frac{5\pi}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$Z = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}.i$ karmaşık sayısı veriliyor. $(-\bar{Z})$ sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $10.\text{cis}\frac{7\pi}{6}$ B) $10\sqrt{2}.\text{cis}\frac{7\pi}{6}$ C) $10\sqrt{2}.\text{cis}\frac{5\pi}{6}$
 D) $10\sqrt{2}.\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ E) $10.\text{cis}\frac{5\pi}{6}$

Çözüm

$$Z = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}.i$$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 + (-5\sqrt{2})^2} = \sqrt{150 + 50} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$|Z| = |-\bar{Z}| = |-\bar{Z}| = 10\sqrt{2}$$

$$(-Z) = -5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}.i$$

$$\Rightarrow (-\bar{Z}) = -5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}.i$$

$(-\bar{Z})$ sayısının görüntüsü 3. bölgededir.

$$\tan\theta = \frac{-5\sqrt{2}}{-5\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ dir.}$$

Buradan,

$$(-\bar{Z}) = 10\sqrt{2}.\text{cis}\frac{7\pi}{6} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$Z = \frac{20}{1-\sqrt{3}.i}$ karmaşık sayısı veriliyor. $(\bar{Z})$ karmaşık sayısının esas argümenti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

Çözüm

$$Z = \frac{20}{1-\sqrt{3}.i} = \frac{20(1+\sqrt{3}.i)}{(1-\sqrt{3}.i)(1+\sqrt{3}.i)} = \frac{20(1+\sqrt{3}.i)}{1-(\sqrt{3})^2.i^2} = \frac{20(1+\sqrt{3}.i)}{1^2+(\sqrt{3})^2} = 5(1+\sqrt{3}.i)$$

$Z = 5 + 5\sqrt{3}.i \Rightarrow \bar{Z} = 5 - 5\sqrt{3}.i$ ve Z karmaşık sayısının görüntüsü 4. bölgededir.

$$\tan\theta = \frac{-5\sqrt{3}}{5} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$\text{Arg}(Z) = \frac{5\pi}{4}$ ve $Z.\bar{Z} = 8$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-2i$ B) $2 + 2i$ C) $-2 - 2i$
 D) $-2 + 2i$ E) $-1 - i$

Çözüm

$$Z = a + bi \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = a - bi$$

$$Z.\bar{Z} = 8$$

$$\Rightarrow (a + bi).(a - bi) = 8$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 8$$

$$\text{Arg}(Z) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{b}{a} \Rightarrow a = b \text{ dir.}$$

$\text{Arg}(Z) = \frac{5\pi}{4}$ olduğundan Z karmaşık sayısının görüntüsü 3. bölgede olup $a < 0$ ve $b < 0$ dir.

$$a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow a^2 + a^2 = 8$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a = b = -2 \text{ olur.}$$

O halde, Z karmaşık sayısı $Z = -2 - 2i$ olarak bulunur.

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$\text{Arg}(Z - 4) = \frac{5\pi}{6}$ ve $\text{Arg}(Z + i) = \frac{\pi}{6}$ eşitliklerini sağlayan Z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

- A) 4 B) $2 + \sqrt{3}$ C) $4 + \sqrt{3}$
 D) $\frac{4 + \sqrt{3}}{2}$ E) $2 - \sqrt{3}$

Çözüm

$$Z = a + bi \text{ olsun.}$$

$$\text{Arg}(Z - 4) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \text{Arg}(a + bi - 4) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(a - 4 + bi) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{5\pi}{6} = \frac{b}{a-4} \Rightarrow a - 4 = -\sqrt{3}.b$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{3}.b = 4 \dots (1)$$

$$\text{Arg}(Z + i) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(a + bi + i) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{6} = \frac{b+1}{a} \Rightarrow a = \sqrt{3}b + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{3}.b = \sqrt{3} \dots (2) \text{ olarak bulunur.}$$

(1) ve (2) den

$$\begin{aligned} a + \sqrt{3}b &= 4 \\ + a - \sqrt{3}b &= \sqrt{3} \\ \hline 2a &= 4 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \text{ ve}$$

$$\text{Re}(Z) = a = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

Örnek

$\text{Arg}(Z + 4i) = \frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntülerini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$$Z = x + yi \text{ alalım.}$$

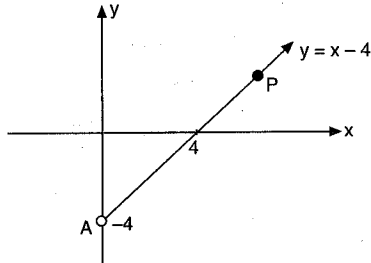
$$\text{Arg}(x + yi + 4i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}(x + (y + 4)i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{y + 4}{x} \Rightarrow x = y + 4$$

$$\Rightarrow y = x - 4 \text{ olur.}$$

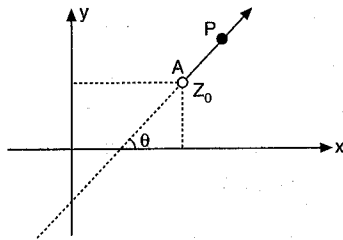
Ayrıca $x + (y + 4)i$ karmaşık sayılarının esas argümenti $\frac{\pi}{4}$ olduğundan,
 $x > 0$ ve $y + 4 > 0 \Rightarrow y > -4$ elde edilir.



Z karmaşık sayılarının görüntüsü $]AP$ yarı doğrusudur.

NOT:

$\text{Arg}(Z - Z_0) = \theta$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntüleri,



$]AP$ yarı doğrusudur.

KUTUPSAL BİÇİMDE İŞLEMLER

TOPLAMA - ÇIKARMA

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 12 \cdot \text{cis} \frac{3\pi}{4}$ ve $Z_2 = 4 \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $(3\sqrt{2} \cdot Z_1 - \sqrt{3} \cdot Z_2)$ karmaşık sayısının imajiner kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

Çözüm

Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarını $(a + bi)$ standart biçime dönüştürelim.

$$Z_1 = 12 \cdot \text{cis} \frac{3\pi}{4} = 12(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$= 12\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$$

$$3\sqrt{2} \cdot Z_1 = 3\sqrt{2}(-6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i) = -36 + 36i$$

$$Z_2 = 4 \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3} = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{3} \cdot Z_2 = \sqrt{3}(-2 + 2\sqrt{3}i) = -2\sqrt{3} + 6i \text{ dir.}$$

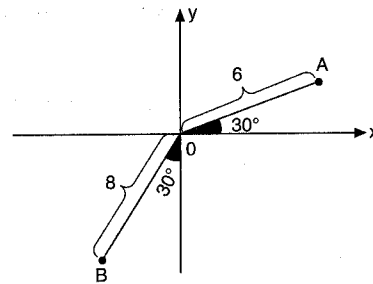
$$3\sqrt{2} \cdot Z_1 - \sqrt{3} \cdot Z_2 = (-36 + 36i) - (-2\sqrt{3} + 6i)$$

$$= 2\sqrt{3} - 36 + 30i \text{ olarak bulunur.}$$

Bu karmaşık sayının imajiner kısmı 30 dur.

Yanıt D

ÖRNEK SORU



Şekildeki karmaşık düzlemde Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri sırasıyla A ve B noktalarıdır.

$|OA| = 6$ br, $|OB| = 8$ br olduğuna göre, $(Z_1 + 2\sqrt{3} \cdot Z_2)$ karmaşık sayısının reel kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-8\sqrt{3}$ B) $-5\sqrt{3}$ C) -8 D) $-4\sqrt{3}$ E) -5

Çözüm

$$Z_1 = 6 \cdot \text{cis} 30^\circ = 6 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$Z_2 = 8 \cdot \text{cis} 240^\circ = 8 \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$$

$$= 8 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot Z_2 = 2\sqrt{3}(-4 - 4\sqrt{3}i) = -8\sqrt{3} - 24i$$

$$Z_1 + 2\sqrt{3} \cdot Z_2 = Z_3 \text{ olsun.}$$

$$Z_3 = (3\sqrt{3} + 3i) + (-8\sqrt{3} - 24i)$$

$$= -5\sqrt{3} - 21i \Rightarrow \text{Re}(Z_3) = -5\sqrt{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÇARPMA

$Z_1 = |Z_1| \cdot \text{cis} \alpha$ ve $Z_2 = |Z_2| \cdot \text{cis} \theta$ karmaşık sayılarının çarpımı,

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot \text{cis} \alpha \cdot |Z_2| \cdot \text{cis} \theta$$

$$= |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot [\cos \alpha \cos \theta + i \cos \alpha \sin \theta + i \sin \alpha \cos \theta + i^2 \sin \alpha \sin \theta]$$

$$= |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot [(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) + i(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)]$$

$$= |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot [\cos(\alpha + \theta) + i \sin(\alpha + \theta)]$$

$$= |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot \text{cis}(\alpha + \theta) \text{ olarak bulunur.}$$

Buradan,

$\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2)$ elde edilir.

Eğer Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıları kutupsal koordinatları ile verilirse,

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = (|Z_1|, \alpha) \\ Z_2 = (|Z_2|, \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (|Z_1| \cdot |Z_2|, \alpha + \theta) \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

Kutupsal koordinatları $Z_1 = (2, 43^\circ)$ ve $Z_2 = (8, 77^\circ)$ olan Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-8 - 8i$ B) $-8 + \sqrt{3}i$ C) $-8 + 8\sqrt{3}i$
D) $8 - 8\sqrt{3}i$ E) $-8\sqrt{3}i$

Çözüm

$$Z_1 = (2, 43^\circ) \Rightarrow Z_1 = 2 \cdot \text{cis} 43^\circ$$

$$Z_2 = (8, 77^\circ) \Rightarrow Z_2 = 8 \cdot \text{cis} 77^\circ$$

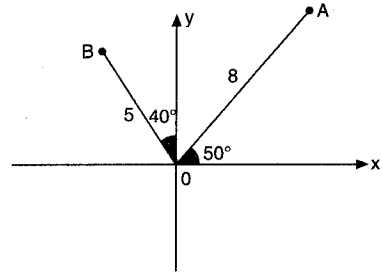
$$Z_1 \cdot Z_2 = 2 \cdot 8 \cdot \text{cis}(43^\circ + 77^\circ)$$

$$= 16 \cdot \text{cis} 120^\circ = 16 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$= 16 \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 + 8\sqrt{3}i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

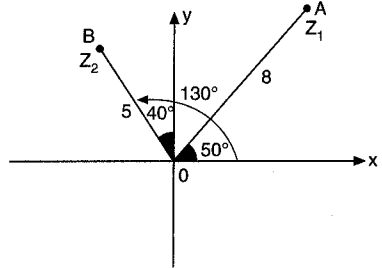


Karmaşık düzlemde $|OB| = 5$ br, $|OA| = 8$ br dir. A ve B noktalarına karşılık gelen karmaşık sayılar sırası ile Z_1 ve Z_2

olduğuna göre, $\frac{\text{Im}(Z_1 \cdot Z_2)}{\text{Re}(Z_1 \cdot Z_2)}$ oranı kaçtır?

- A) -40 B) -20 C) 0 D) 20 E) 40

Çözüm



$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 8 \cdot \text{cis} 50^\circ \\ Z_2 = 5 \cdot \text{cis} 130^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = 8 \cdot 5 \cdot \text{cis}(50^\circ + 130^\circ)$$

$$\Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = 40 \cdot \text{cis} 180^\circ$$

$$= 40 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$= 40 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -40$$

$$\Rightarrow \text{Im}(Z_1 \cdot Z_2) = 0 \text{ ve } \text{Re}(Z_1 \cdot Z_2) = -40 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla,

$$\frac{\text{Im}(Z_1 \cdot Z_2)}{\text{Re}(Z_1 \cdot Z_2)} = \frac{0}{-40} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$Z_1 = -4 + 4\sqrt{3}i$ ve $Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{17\pi}{12}$ D) $\frac{19\pi}{12}$ E) $\frac{23\pi}{12}$

Çözüm

$$\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2) \text{ dir.}$$

$$Z_1 = -4 + 4\sqrt{3}i$$

$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3}$$

Z_1 karmaşık sayısının görüntüsü 2. bölgede olduğundan

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \text{Arg}(Z_1) = \frac{2\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1 \text{ dir.}$$

Z_2 karmaşık sayısının görüntüsü 3. bölgede olduğundan

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \text{ ve } \text{Arg}(Z_2) = \frac{5\pi}{4} \text{ tür.}$$

Dolayısıyla,

$$\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} = \frac{23\pi}{12} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

BİR KARMAŞIK SAYININ KUVVETİ (DE MOIVRE FORMÜLÜ)

Her n tam sayısı için,

$Z = |Z|. \text{cis} \alpha$ olmak üzere,

$Z^n = (|Z|. \text{cis} \alpha)^n = |Z|^n. \text{cis}(n.\alpha)$ eşitliğine De Moivre formülü denir. Ayrıca $\text{Arg}(Z^n) = n.\text{Arg}(Z)$ dir.

ÖRNEK SORU

Kutupsal koordinatları $(1, \frac{\pi}{6})$ olan Z karmaşık sayısı için

Z^{40} karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-1 + \sqrt{3}i$ C) $\sqrt{3}i$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Çözüm

Kutupsal koordinatları $(1, \frac{\pi}{6})$ olan Z karmaşık sayısı,

$$Z = 1. \text{cis} \frac{\pi}{6} = \text{cis} \frac{\pi}{6} \text{ biçimindedir.}$$

$$Z^{40} = (\text{cis} \frac{\pi}{6})^{40} = \text{cis}(40. \frac{\pi}{6})$$

$$= \text{cis}(\frac{20\pi}{3}) = \text{cis}(3.2\pi + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \cos \frac{2\pi}{3} + i. \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + i. \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ve $Z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\text{Arg}(Z_1^8 \cdot Z_2^{12})$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

Çözüm

$$\text{Arg}(Z_1^8 \cdot Z_2^{12}) = \text{Arg}(Z_1^8) + \text{Arg}(Z_2^{12}) \text{ dir.}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$$

ve Z_1 sayısının görüntüsü 4. bölgede olduğundan

$$\alpha = \frac{5\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$\text{Arg}(Z_1^8) = 8. \text{Arg} Z_1 = 8. \frac{5\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$$

$$= 6.2\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ olduğundan } \text{Arg}(Z_1^8) = \frac{4\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$Z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \Rightarrow \tan \theta = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{6}}{2}} = 1$$

ve Z_2 karmaşık sayısının görüntüsü 3. bölgede olduğundan,

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \text{ tür.}$$

$$\text{Arg}(Z_2^{12}) = 12. \text{Arg} Z_2 = 12. \frac{5\pi}{4}$$

$$= 15\pi$$

$$= 7.2\pi + \pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(Z_2^{12}) = \pi \text{ dir.}$$

O halde,

$$\text{Arg}(Z_1^8 \cdot Z_2^{12}) = \frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \text{ olup}$$

$$\text{Arg}(Z_1^8 \cdot Z_2^{12}) = \frac{\pi}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

KUTUPSAL BİÇİMDE VERİLEN KARMAŞIK SAYININ ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

$Z = |Z|. \text{cis} \theta$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi,

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} . \text{cis}(-\theta) \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$Z = 4 \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{6}$ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre, $\text{Im}(\frac{1}{Z})$

kaçtır?

- A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

Çözüm

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{4} \text{cis}(-\frac{5\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{4} \text{cis}(2\pi - \frac{5\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{4} \text{cis}(\frac{7\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{4} (\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{4} (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan, $\text{Im}(\frac{1}{Z}) = -\frac{1}{8}$ olarak bulunur.

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$Z^{-1} = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{3}$ olduğuna göre, $\text{Re}(Z^5)$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{2}}{18}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{16}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{14}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

Çözüm

$Z = (Z^{-1})^{-1}$ olduğundan

$$(Z^{-1})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}(-\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{cis}(2\pi - \frac{5\pi}{3})$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{cis}(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow Z^5 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^5 \cdot \text{cis}(5 \cdot \frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{32} \cdot \text{cis}(\frac{5\pi}{3})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{6}}{16}i$$

Buradan, $\text{Re}(Z^5) = \frac{\sqrt{2}}{16}$ olarak bulunur.

Yanıt B

BÖLME

$Z_1 = |Z_1| \cdot \text{cis} \alpha$ ve $Z_2 = |Z_2| \cdot \text{cis} \theta$ karmaşık sayıları verilsin. $Z_2 \neq 0$ olmak üzere, Z_1 in Z_2 ye bölümü,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1| \cdot \text{cis} \alpha}{|Z_2| \cdot \text{cis} \theta} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot \text{cis}(\alpha - \theta) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla,

$$\text{Arg}(\frac{Z_1}{Z_2}) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2) \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$Z_1 = 12\sqrt{2} \cdot \text{cis} 74^\circ$ ve $Z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \text{cis} 14^\circ$ karmaşık sayıları veriliyor. Buna göre, $\text{Im}(\frac{Z_1}{Z_2})$ kaçtır?

liyor. Buna göre, $\text{Im}(\frac{Z_1}{Z_2})$ kaçtır?

- A) $\sqrt{6}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $3\sqrt{2}$

Çözüm

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{12\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} [\text{cis}(74^\circ - 14^\circ)]$$

$$= 2\sqrt{6} \cdot \text{cis} 60^\circ$$

$$= 2\sqrt{6} (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{6} + i \cdot 3\sqrt{2} \text{ ve}$$

$$\text{Im}(\frac{Z_1}{Z_2}) = 3\sqrt{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$$Z = 4 \cdot \frac{(\cos 216^\circ + i \sin 216^\circ) \cdot (\cos 52^\circ + i \sin 38^\circ)}{\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ}$$

olduğuna göre, $\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm

$$Z = 4 \cdot \frac{(\cos 216^\circ + i \sin 216^\circ) \cdot (\cos 52^\circ + i \sin 38^\circ)}{\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ}$$

$$Z = 4 \cdot \frac{(\cos 216^\circ + i \sin 216^\circ) \cdot (\cos 52^\circ + i \sin 52^\circ)}{\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ}$$

$$= 4 \cdot \frac{\cos(216^\circ + 52^\circ) + i \sin(216^\circ + 52^\circ)}{\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ}$$

$$= 4 \cdot \frac{\cos 268^\circ + i \sin 268^\circ}{\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ}$$

$$= 4 \cdot [\cos(268^\circ - 88^\circ) + i \sin(268^\circ - 88^\circ)]$$

$$= 4 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(-1 + 0i)$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{Re}(Z) &= -4 \\ \text{Im}(Z) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Re}(Z) + \text{Im}(Z) = -4$$

olarak bulunur.

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$$Z = \frac{(1+i)^{12}}{(-1+\sqrt{3}i)^5} \text{ karmaşık sayısının esas argümenti aşağıdaki-}$$

ğdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{7\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) π E) $\frac{3\pi}{4}$

Çözüm

$$Z = \frac{(1+i)^{12}}{(-1+\sqrt{3}i)^5} = \frac{Z_1^{12}}{Z_2^5} \text{ yazılırsa,}$$

$$Z_1 = 1+i \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ve}$$

$$\text{Arg}(Z_1) = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(Z_1^{12}) = 12 \cdot \text{Arg}(Z_1) = 12 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi \Rightarrow \text{Arg}(Z_1^{12}) = \pi$$

$$Z_2 = -1+\sqrt{3}i \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ve}$$

$$\text{Arg}(Z_2) = \frac{2\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(Z_2^5) = 5 \cdot \text{Arg}(Z_2) = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow \text{Arg}(Z_2^5) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(Z_2^5) = \frac{4\pi}{3} \text{ tür.}$$

O halde,

$$\begin{aligned} \text{Arg}(Z) &= \text{Arg}(Z_1^{12}) - \text{Arg}(Z_2^5) \\ &= \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$$Z = \frac{6}{2\sqrt{3} \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}} \text{ karmaşık sayısı veriliyor. Buna göre,}$$

$\text{Im}(Z^5)$ kaçtır?

- A) $-\frac{27}{2}$ B) -6 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{13}{2}$ E) $\frac{27}{2}$

Çözüm

$$\begin{aligned} Z &= \frac{6}{2\sqrt{3} \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)}{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ} \\ &= \sqrt{3} [\cos(360^\circ - 120^\circ) + i \sin(360^\circ - 120^\circ)] \\ &= \sqrt{3} (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \\ Z^5 &= (\sqrt{3})^5 [\cos(5 \cdot 240^\circ) + i \sin(5 \cdot 240^\circ)] \\ &= 9\sqrt{3} \cdot (\cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ) \\ &= 9\sqrt{3} \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ &= 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{9\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{27}{2} \text{ ve } \text{Im}(Z^5) = \frac{27}{2} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$Z = 2 \text{cis} \frac{3\pi}{4}$ olduğuna göre, $(-\bar{Z})$ karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$ B) $4 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$ C) $2 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$
D) $2 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{3}$ E) $2 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{2}$

Çözüm

$$\begin{aligned} Z &= 2 \cdot \text{cis} \frac{3\pi}{4} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ -Z &= -(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ (-\bar{Z}) &= (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ \Rightarrow \tan \theta &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ |(-\bar{Z})| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ (-\bar{Z}) &= 2 \cdot \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt C

SONUÇLAR

$Z = a + bi = |Z|.cis\theta$ karmaşık sayısı için,

1. $\bar{Z} = a - bi = |Z|.cis(2\pi - \theta)$
2. $-Z = -a - bi = |Z|.cis(\pi + \theta)$
3. $(-\bar{Z}) = -a + bi = |Z|.cis(\pi - \theta)$
4. $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|}.cis(2\pi - \theta)$ dır.

ÖRNEK SORU

$Z = 4.cis(\frac{5\pi}{6})$ karmaşık sayısı veriliyor.

Buna göre, $Arg(\bar{Z})$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

Çözüm

$$Z = 4.cis(\frac{5\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = 4.cis(2\pi - \frac{5\pi}{6})$$

$$= 4.cis(\frac{7\pi}{6})$$

$$\Rightarrow Arg(\bar{Z}) = \frac{7\pi}{6} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

KARMAŞIK SAYININ n. KUVVETTEN KÖKLERİ

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, sıfırdan farklı her $Z = |Z|.cis\theta$ karmaşık sayısının n. kuvvetten n tane farklı kökü vardır. Bu kökler, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ olmak üzere,

$$Z_k = \sqrt[n]{|Z|}.cis(\frac{\theta + k.2\pi}{n}) \text{ bağıntısı ile bulunur.}$$

Bağıntıya göre Z karmaşık sayısının karekökleri:
 $k = 0$ ve 1 için,

$$Z_0 = \sqrt{|Z|}.cis(\frac{\theta}{2})$$

$$Z_1 = \sqrt{|Z|}.cis(\frac{\theta}{2} + \pi) \text{ formülleri ile bulunur.}$$

Z karmaşık sayısının,

Küpkökleri:

$k = 0, 1$ ve 2 için,

$$Z_0 = \sqrt[3]{|Z|}.cis(\frac{\theta}{3})$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{|Z|}.cis(\frac{\theta + 2\pi}{3})$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{|Z|}.cis(\frac{\theta + 4\pi}{3}) \text{ formülleri ile bulunur.}$$

ÖRNEK SORU

$Z = -16$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2i$ B) $2 - i$ C) $3i$ D) $-4i$ E) $4 - 4i$

Çözüm

$$Z = -16 \Rightarrow |Z| = \sqrt{(-16)^2} = 16$$

$$Z = 16(-1 + i.0) = 16(\cos 180^\circ + i.\sin 180^\circ)$$

$$Z = 16.cis(\pi) \text{ dir.}$$

Z karmaşık sayısının karekökleri Z_0 ve Z_1 olsun.

$$Z_0 = \sqrt{16}.cis(\frac{\pi}{2}) = 4.cis(\frac{\pi}{2})$$

$$= 4(\cos \frac{\pi}{2} + i.\sin \frac{\pi}{2}) = 4i$$

$$Z_1 = \sqrt{16}[cis(\frac{\pi}{2} + \pi)] = 4.cis(\frac{3\pi}{2})$$

$$= 4(\cos \frac{3\pi}{2} + i.\sin \frac{3\pi}{2}) = -4i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$Z = 4.cis\frac{3\pi}{4}$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $cis(\frac{3\pi}{8})$ B) $cis(\frac{3\pi}{11})$ C) $2.cis(\frac{3\pi}{4})$

- D) $2.cis(\frac{11\pi}{8})$ E) $2.cis(\frac{13\pi}{8})$

Çözüm

$$Z = 4.cis\frac{3\pi}{4} \text{ sayısında } |Z| = 4 \text{ tür.}$$

Z karmaşık sayısının karekökleri,

$$Z_0 = \sqrt{4}.cis(\frac{3\pi}{2}) = \sqrt{4}.cis(\frac{3\pi}{8}) = 2.cis\frac{3\pi}{8}$$

$$Z_1 = \sqrt{4}.cis(\frac{3\pi}{2} + \pi)$$

$$= 2.cis(\frac{3\pi}{8} + \pi) = 2.cis\frac{11\pi}{8} \text{ olur.}$$

Yanıt D

▲ Not: Bir karmaşık sayının karekökleri orijine göre simetriktr.

ÖRNEK SORU

$Z = -4 - 4\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ C) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
D) $\sqrt{5} - i$ E) $\sqrt{2} - \sqrt{3}i$

Çözüm

$$Z = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$|Z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$$

$$\tan \theta = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 240^\circ \text{ dir.}$$

$$Z = 8 \cdot \text{cis} 240^\circ \text{ ve karekökleri,}$$

$$Z_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis} \left(\frac{240^\circ}{3} \right) = 2\sqrt{2} \cdot \text{cis} 120^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$$

Z_0 ile Z_1 orijine göre simetrik olduklarından

$$Z_1 = -Z_0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i \text{ olur.}$$

Yanıt A

NOT

$Z = a + bi$ karmaşık sayısının karekökleri;

1. $b > 0$ ise

$$Z_{0,1} = \mp \left(\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} + i \sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} \right)$$

2. $b < 0$ ise

$$Z_{0,1} = \mp \left(\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} - i \sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} \right)$$

ile de bulunabilir.

ÖRNEK SORU

$Z = 7 - 24i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4 + 3i$ B) $-4 - 3i$ C) $-4 + 3i$
D) $-3 + 4i$ E) $-3 - 4i$

Çözüm

$$Z = 7 - 24i \Rightarrow |Z| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = 25$$

$-24 < 0$ olduğundan

$$Z_{0,1} = \mp \left(\sqrt{\frac{25+7}{2}} - i \sqrt{\frac{25-7}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow Z_{0,1} = \mp (4 - 3i)$$

$$\Rightarrow Z_0 = 4 - 3i \text{ ve } Z_1 = -4 + 3i \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$Z = -125i$ karmaşık sayısının küpköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -25 B) $25i$ C) $-5i$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5i}{2}$

Çözüm

$$Z = -125i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(-125)^2} = 125$$

$$Z = -125i = 125(0 - i)$$

$$= 125 \cdot \text{cis} 270^\circ \text{ olarak yazılır.}$$

Dolayısıyla Z nin küp kökleri,

$$Z_0 = \sqrt[3]{125} \cdot \text{cis} \left(\frac{270^\circ}{3} \right) = 5 \cdot \text{cis} 90^\circ$$

$$= 5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 5i$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{125} \cdot \text{cis} \left(\frac{270^\circ}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 5 \cdot \text{cis} (210^\circ) = 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

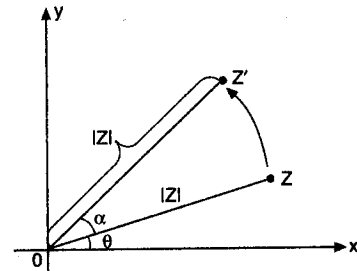
$$= 5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5i}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{125} \cdot \text{cis} \left(\frac{270^\circ}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) = 5 \cdot \text{cis} (330^\circ)$$

$$= 5(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$$

$$= 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5i}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ORJİN ETRAFINDA DÖNDÜRME

$Z = |Z| \cdot \text{cis} \theta$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsünün pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesiyle oluşan sayı Z' olsun.

$$Z' = |Z| \cdot \text{cis}(\alpha + \theta)$$

$$= |Z| \cdot [\cos(\alpha + \theta) + i \sin(\alpha + \theta)]$$

eşitliğinde gerekli açılımlar yapıp düzenlenirse,

$$Z' = \frac{|Z|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{Z}$$

$$\Rightarrow Z' = Z \cdot \text{cis} \alpha \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK SORU

$Z = 4 - \sqrt{3}i$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesiyle oluşan karmaşık sayının sanal kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Çözüm

Yeni karmaşık sayı Z' olsun.

$$Z' = Z \cdot \text{cis} 60^\circ = (4 - \sqrt{3}i) \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$= (4 - \sqrt{3}i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$= 2 + 2\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i^2$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ elde edilir ve } \text{Im}(Z') = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olarak bulunur.

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$Z = -1 - \sqrt{3}i$ karmaşık sayısının orijin etrafında negatif yönde 210° döndürülmesiyle oluşan karmaşık sayının sanal kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 + \sqrt{3}i$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $\sqrt{3} + i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $-1 - \sqrt{3}i$

Çözüm

Yeni karmaşık sayı Z' olsun.

$$Z' = Z \cdot \text{cis}(-210^\circ)$$

$$= Z \cdot \text{cis}(150^\circ)$$

$$= (-1 - \sqrt{3}i) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} + i \text{ elde edilir.}$$

Yanıt C

1 Aşağıda verilen karmaşık sayıları kutupsal biçimde yazınız.

- a) $Z = -1 - i$
- b) $Z = 2\sqrt{3} + 2i$
- c) $Z = -2i$
- d) $Z = \sqrt{3}$
- e) $Z = 1 - i\sqrt{3}$
- f) $Z = -1 + i\sqrt{3}$

ÇÖZÜM:

2 Aşağıda kutupsal koordinatlarıyla verilen karmaşık sayıların reel ve sanal kısımlarını bulunuz.

- a) $Z = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
- b) $Z = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$
- c) $Z = \left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$
- d) $Z = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$
- e) $Z = \left(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

ÇÖZÜM:

3 Aşağıda verilen karmaşık sayıların esas argümentlerini bulunuz.

- a) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- b) $Z = 3i$
- c) $Z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
- d) $Z = 3 - 3i$
- e) $Z = 3(\cos 75^\circ - i \sin 75^\circ)$

ÇÖZÜM:

4 $Z = -3\sqrt{2} - i3\sqrt{2}$ olduğuna göre, aşağıdaki karmaşık sayıları kutupsal biçimde yazınız.

- a) $\bar{Z}$
- b) $(-\bar{Z})$

ÇÖZÜM:

- 5 $Z_1 = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
 $Z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$
 olduğuna göre, $\text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2)$ toplamı kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

- 6 $|Z| = 2\sqrt{2}$ ve $\text{Arg}(Z - 2) = \frac{3\pi}{4}$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 7 $\text{Arg}(Z - i) = \frac{7\pi}{4}$ ve $\text{Arg}(Z + i) = \frac{\pi}{4}$ eşitliklerini sağlayan Z karmaşık sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 8 $\text{Arg}(Z - 2i) = \frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntülerini karmaşık düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM:

- 9 $\text{Arg}(Z + 1) = \frac{7\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

- 10 $Z_1 = 2\text{cis} \frac{\pi}{3}$
 $Z_2 = \text{cis} \frac{\pi}{2}$
 olduğuna göre, $(Z_1 + Z_2)$ toplamının sanal kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 11 $Z_1 = \cos 75^\circ + i \sin 75^\circ$
 $Z_2 = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$
 olduğuna göre, $(Z_1 + Z_2)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 12 $Z_1 = \sqrt{3} \cdot \text{cis} 47^\circ$
 $Z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \text{cis} 43^\circ$
 olduğuna göre, $(Z_1 \cdot Z_2)$ çarpımının eşiği kaçtır?

ÇÖZÜM:

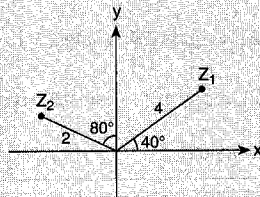
- 13 $Z_1 = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$
 $Z_2 = \sin 15^\circ + i \cos 15^\circ$
 olduğuna göre, $|Z_1 - Z_2|$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 14 $Z_1 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$
 $Z_2 = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$
 olduğuna göre, aşağıdaki işlemleri yapınız.
 a) $Z_1 \cdot Z_2$
 b) $\frac{Z_1}{Z_2}$

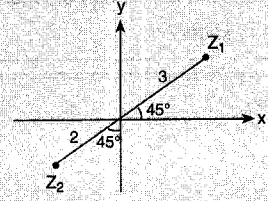
ÇÖZÜM:

- 15 Yandaki şekilde verilene göre, $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımının sanal kısmı kaçtır?



ÇÖZÜM:

- 16 Yandaki şekilde verilene göre, $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımının sanal kısmı kaçtır?



ÇÖZÜM:

- 17 $Z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ve $Z_2 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ karmaşık sayıları veriliyor. Buna göre, $\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2)$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

- 18 $Z_1 = 1 + i$ ve $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ karmaşık sayıları veriliyor. Buna göre, $\text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

- 19 Kutupsal koordinatları $Z_1 = (3, 43^\circ)$ ve $Z_2 = (\sqrt{3}, 107^\circ)$ olan Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıları için $\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2)$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

20 $Z = 3(\cos 20 + i\sin 20)$ olduğuna göre, Z^9 sayısının reel kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

21 $Z = 3 - 3i$ olduğuna göre, Z^4 sayısının reel kısmı kaçtır?

ÇÖZÜM:

22 $Z = 16(\text{cis} 40^\circ)$ olduğuna göre, Z^{-4} sayısının kutupsal biçimde yazınız.

ÇÖZÜM:

23 $Z_1 = 5\text{cis } 25^\circ$
 $Z_2 = 3\text{cis } 40^\circ$
olduğuna göre, $\text{Arg}(Z_1^5 \cdot Z_2^5)$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

24 $Z = 1 + i\sqrt{3}$ olduğuna göre, Z^{10} sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

25 $\frac{3(\text{cis } 128^\circ) \cdot 4(\text{cis } 40^\circ)}{6(\text{cis } 48^\circ)}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM:

26 $Z = \frac{(1-i)^{10}}{(-2+2i\sqrt{3})^{15}}$ olduğuna göre, Z nin esas argümenti kaç derecedir?

ÇÖZÜM:

27 $Z_1 = 2(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$
 $Z_2 = \cos 15^\circ - i\sin 15^\circ$ olduğuna göre, $\frac{Z_2}{Z_1^9}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 28 $Z = 3 \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}$ olduğuna göre, aşağıdaki karmaşık sayıları bulunuz.
- a) Z b) $\bar{Z}$ c) Z^{-1} d) $-\bar{Z}$

ÇÖZÜM:

- 29 Aşağıda verilen karmaşık sayıların kareköklerini bulunuz.

- a) $Z = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$
b) $Z = 2 - 2i\sqrt{3}$
c) $Z = -3i$
d) $Z = 4$
e) $Z = -2 + 2i$

ÇÖZÜM:

- 30 Aşağıda verilen karmaşık sayıların küpköklerini bulunuz.

- a) $Z = 8i$
b) $Z = 1 + i$
c) $Z = 32 + 32i\sqrt{3}$

ÇÖZÜM:

- 31 $Z = 27(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ karmaşık sayısının küpköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

32 $Z = a + ib$ karmaşık sayısının karekökleri ω_0 ve ω_1 dir.

$$\omega_0 = -2 + (x + 1)i$$

$\omega_1 = (y + 1) - 3i$ olduğuna göre, (x, y) çarpımının değeri kaçtır?

çözüm:

33 $Z^2 = \cos 160^\circ + i \sin 160^\circ$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayılarını bulunuz.

çözüm:

34 $Z = 8 + 6i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

çözüm:

35 $\sqrt{12 + 5i}$ karmaşık sayısının sanal kısmının alabileceği değerleri bulunuz.

çözüm:

36 $Z = 1 - i\sqrt{3}$ sayısının kareköklerini bulunuz.

çözüm:

37 $Z = \sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının kareköklerinin çarpımı nedir?

çözüm:

38 $Z = a + ib$ sayısının 4. dereceden köklerinden biri $3\text{cis}75^\circ$ olduğuna göre, diğer köklerini bulunuz.

çözüm:

39 $Z^4 + 4Z^2 + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

çözüm:

40 $Z = 1 + i\sqrt{3}$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM:

41 $Z = x + iy$ karmaşık sayısı orijin etrafında pozitif yönde 40° döndürüldüğünde $Z_1 = 2 + 2i$ karmaşık sayısı elde ediliyor. Buna göre, $Z = x + iy$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 130° döndürülmesi ile elde edilen yeni karmaşık sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM:

42 $Z = -3 + 4i$ karmaşık sayısının orijin etrafında negatif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM:

43 $Z = 3(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$ karmaşık sayısının orijin etrafında negatif yönde 60° döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM:

KONU İLE İLGİLİ SINAV SORULARI

1. $Z = \frac{1+ix}{1-ix}$ olduğuna göre, $|Z|$ değeri nedir?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

2. $(2-i)Z = 1 - \bar{Z}$ eşitliğini sağlayan, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir? ($\bar{Z}$, Z nin eşleniğidir.)

- A) $\frac{1}{3}(1+i)$ B) $\frac{1}{4}(1+i)$ C) $\frac{2}{3}-2i$
D) $1+\frac{1}{3}i$ E) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$

3. $\frac{3-2i}{1-i}$ sayısının sanal kısmı kaçtır?

- A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{5}{2}$

4. $\frac{1}{1+i} + a + bi = 1 - i$ olduğuna göre, $a + b$ nin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

5. $i^2 = -1$ olduğuna göre, $(1+i)(1+i^3)(1+i^5)$ işleminin sonucu nedir?

- A) 3 B) 1 C) 0 D) -1 E) -3

6. $(1+i)^5 + (1-i)^5$ toplamı kaçtır?

- A) -8 B) -5 C) 0 D) 5 E) 8

7. $Z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $9(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}i)$ B) $9(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i)$
C) $3(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i)$ D) $3(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}i)$
E) $3(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}i)$

8. $Z = 3 + 2i$ ve $\bar{Z} = 3 - 2i$ olduğuna göre,

$\left(\frac{Z+\bar{Z}}{Z-\bar{Z}}\right)^4$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{81}{16}$ B) $-\frac{81}{16}$ C) $-\frac{81}{16}i$ D) $\frac{81}{16}i$ E) -i

9. $i^2 = -1$ olduğuna göre,

$(1+i)(1+i^3)(1+i^5)(1+i^7)$

çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2 B) 4 C) $1+i$ D) $1-i$ E) $4i$

10. $i^2 = -1$ olduğuna göre, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2i B) -i C) -1 D) 1 E) 2i

11. Karmaşık düzlemde $Z = 3 - i$ olduğuna göre, $|Z^{-1}|$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{20}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{20}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{30}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

12. $|Z + 2 - i| = 10$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$
B) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$
C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$
D) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$
E) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 121$

13. $i = \sqrt{-1}$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

$\frac{i^{8n-1} + i^{4n}}{i^{4n-1}}$ ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $i + 1$ C) $i - 1$ D) 1 E) 2

14. $Z = x + iy$ ve $|Z| = |Z - 2i|$ olduğuna göre, Z nin karmaşık düzlemdeki geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Gerçek eksene dik bir doğru
B) Sanal eksene dik bir doğru
C) 2 birim çaplı bir çember
D) Bir elips
E) Bir parabol

15. $Z - 5 - i = 1$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayısının argümenti θ olduğuna göre, $\tan \theta$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{6}$ E) 1

16. $Z = 2 + 4i$ ve $U = 3i$ karmaşık sayılar olduğuna göre, $\frac{\bar{Z} \cdot \bar{U}}{6 + 3i}$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 2 D) $\frac{1+2i}{3}$ E) $\frac{1-2i}{3}$

17. $|Z| + Z = 3 - 2i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{5} - 2i$ B) $\frac{5}{6} - 2i$ C) $\frac{3}{4} + 2i$
D) $\frac{2}{3} - 3i$ E) $\frac{3}{5} + 3i$

1.C	2.B	3.B	4.C	5.C	6.A	7.D	8.A	9.B	10.D	11.A	12.C	13.B	14.A
15.D	16.A	17.B											

TEST 1**KARMAŞIK SAYILAR**

1. $\frac{-3\sqrt{-27}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9i B) $-9i + 18$ C) $-9i$
D) 18i E) $-2i + 5$

2. $Z = \frac{i^{64} - i^{121}}{i^3 - i^2}$ olduğuna göre, $\text{Re}(Z)$ kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

3. $Z = \frac{i^{17} - 2i^{33}}{i^4 - 2i}$ olduğuna göre, $\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$ toplamı kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{3}{5}$ C) 0 D) $\frac{1}{5}$ E) 1

4. $Z = \frac{3-i}{2+3i}$ olduğuna göre, $\text{Re}(Z) + \text{Im}(\bar{Z})$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{20}{13}$ B) $\frac{17}{13}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{14}{13}$

5. $Z = -2i - 1$ olmak üzere; $\frac{Z + \bar{Z}}{Z \cdot \bar{Z}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{4i}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) 4

6. $Z = a + ib$ olmak üzere;

$(-3 + i) \cdot Z - 2 \cdot \bar{Z} = -2i$ olduğuna göre, $(a + b)$ toplamı kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 1 E) 2

7. $i^{43} + i^{73} + i^{103} + i^{133}$ toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) i E) -i

8. $i^2 = -1$ olmak üzere;

$i^{13} + i^{18} + i^{23} + i^{28}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) -i C) 0 D) i E) 1

9. $i^2 = -1$ olmak üzere; $\frac{(1-i)^{34}}{(1+i)^{30}}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 4 C) 16 D) 30 E) 34

10. "x" değişkenine bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli reel katsayılı denklemin köklerinden biri $4 + 3i$ olduğuna göre, bu denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 4x - 9 = 0$ B) $x^2 - 8x + 6 = 0$
C) $x^2 + 10x + 12 = 0$ D) $x^2 - 4x + 7 = 0$
E) $x^2 - 8x + 25 = 0$

11. $(\sqrt{2} - i)^2 \cdot (\sqrt{2} + i)^2$ çarpımının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) $3 + i$ C) $-9i$ D) -8 E) $8i$

12. $Z = \frac{(1-i)^{63} \cdot (1+i)^{27}}{2^{40}}$ karmaşık sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 32 B) $2 + 8i$ C) $-16i$
D) $-32 - 16i$ E) -32

13. $Z = \frac{(-3+4i) \cdot (7-24i)}{(6+8i) \cdot (3+4i)}$ olduğuna göre, $|Z|$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ D) 5 E) 17

14. $Z = x + iy$ ve $Z \neq 0$ olmak üzere;

$\frac{|-\bar{Z}| \cdot |Z|}{|-\bar{Z}| \cdot |\bar{Z}|}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) x B) 2 C) $x^2 + y^2$
D) 1 E) $-2x^2 + y^2$

15. $i^{4n+k} = i$ olduğuna göre, k doğal sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $k = 4a$, $a \in \mathbb{N}$ B) $k = 4a + 2$, $a \in \mathbb{N}$
C) $k = 2a + 3$, $a \in \mathbb{N}$ D) $k = 4a + 1$, $a \in \mathbb{N}$
E) $k = 3a + 1$, $a \in \mathbb{N}$

16. $Z = i^{k+5} + i^{k+6} + i^{k+3} + i^{k+2}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre, $|Z|$ kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

17. $Z = \sqrt{-16} + 4i^{47} - 5i^{18} + 3i^{35} + \sqrt{9}$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2 + 8i$ B) $8 - 3i$ C) $-3 + 3i$
D) $5 - 3i$ E) $-4i + 5$

18. $(1 - i^{2005}) + (1 - i^{2006})$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + 3i$ B) $3 + i$ C) $1 - 3i$
D) $-1 - 3i$ E) $3 - i$

19. $i^{124} + i^{146} + 2i - 6i^{20}$ karmaşık sayısının $a + bi$ biçiminde yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-6 - 2i$ B) $-6 - i$ C) $-6 + 2i$
D) $6 + i$ E) $8 + i$

20. $Z = x + iy$ şeklinde tanımlanıyor.

$5 \cdot (1 - 2i)^{-1} = 3Z - 4\bar{Z}$ eşitliğine göre, (x, y) çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{2}{7}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{7}$



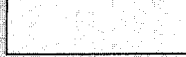
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

1. $\sqrt[4]{16} + \sqrt{-72} - \sqrt{-32} + \sqrt[3]{-8}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2i B) $\sqrt{2}i$ C) $2\sqrt{2}i$
D) $2 + 2\sqrt{2}i$ E) $2 - 2\sqrt{2}i$

2. $\frac{i^{2005} + i^{2004}}{i^{2003} + i^{2002}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) i D) -i E) $1 + i$

3. Aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $\frac{5}{3i} = -\frac{5i}{3}$
II. $3 - i = \frac{10}{3 + i}$
III. $\frac{2 - i}{2 + i} = -1$

IV. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2006} = -1$

V. $(1 + i)^5 \cdot (1 - i)^6 = 32 + 32i$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$\frac{i^{4n+5} - i^{12n+7}}{2i^{3-4n} + i^{1-4n}}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) i C) -2 D) -i E) 2i

5. $x = \sqrt{-4} \cdot a + 2 \cdot b + 3$

$y = 2 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b - 2 \cdot i$ sayıları veriliyor.

$x = y$ eşitliğini sağlayan b değeri kaçtır?

- A) -5 B) -2 C) -1 D) 1 E) 3

6. Aşağıdakilerden kaç tanesi reel sayıdır?

I. $\sqrt{-28}$

II. $5 + \sqrt[3]{-33}$

III. 0

IV. $\sqrt[6]{2 - \sqrt{3}}$

V. $\sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıları için aşağıdakilerden kaç tanesi kesinlikle doğrudur?

I. $Z_1 = \bar{Z}_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z_1) = \operatorname{Re}(Z_2)$

II. $\bar{Z}_1 = Z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z_1) = \operatorname{Im}(Z_2)$

III. $|Z_1| = |Z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z_1) = \operatorname{Re}(Z_2)$

IV. $|\bar{Z}_1| = |Z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z_1) = \operatorname{Im}(Z_2)$

V. $Z_1 = -\bar{Z}_1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z_1) = 0$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. $Z = (1+i)^{-5} + (1-i)^{-5}$ olduğuna göre, $\operatorname{Im}(\bar{Z}) \cdot \operatorname{Re}(Z)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

9. $Z = \frac{1-i}{1+i} - \frac{2+i}{2-i}$ olduğuna göre,

$\operatorname{Im}(\bar{Z})$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{9}{5}$ D) $-\frac{9}{5}$ E) $-\frac{2}{5}$

10. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$2x^2 - a.x + b + 1 = 0$ ikinci dereceden denklemin köklerinden biri $(3 - i)$ olduğuna göre, $(a + b)$ toplamı kaçtır?

A) 33 B) 32 C) 31 D) 30 E) 29

11. $f(x) = (-5)^{1-x} + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2005}$

olduğuna göre, $f(i)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) i D) $1 + i$ E) $1 - i$

12. $x^2 + 4x + a + 2 = 0$ ikinci dereceden denklemin reel kökleri yoktur. Buna göre, a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a < 1$ B) $a > -2$ C) $a < -2$
D) $a > 2$ E) $-1 < a < 3$

13. $Z - 2 = (1 - i).Z$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 - 2i$ B) $-1 + 2i$ C) $-2i$
D) $-2 + i$ E) $1 + 2i$

14. $Z.(2 - 3i) = 1 + \bar{Z}$ olduğuna göre, $\text{Re}(Z)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{3}{7}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{10}$

15. $Z = \frac{2+i}{1-i}$ karmaşık sayısının sanal kısmı reel kısmının

kaç katıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

16. $Z = \frac{-xi+3}{2x+6i}$ olduğuna göre, $|Z|$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

17. $4 - 2i = Z.(1 - i)$ eşitliği veriliyor.

Buna göre, $\bar{Z}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 - i$ B) $-1 + i$ C) $3 + i$ D) 1 E) $3 - i$

18. $Z = 2 - i$ olduğuna göre, $Z^2 + 2Z - 5$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2 - 6i$ B) $2 + i$ C) $2 - 3i$ D) $8 + i$ E) $4i - 6$

19. $Z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$, $Z_2 = 1 + 3i$ ve $Z_3 = 7 - i$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $Z = \frac{Z_1(\bar{Z}_2)^2}{(-\bar{Z}_3)^2}$ sayısının orijine olan

uzaklığı kaç birimdir?

A) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

20. $Z = 4 - 4i$ olduğuna göre, Z^9 sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^9(1 - i)$ B) $2^9(1 + i)$ C) $(1 + i)^{18}$
D) $2^{22}(1 - i)$ E) $2^{22}(1 + i)$



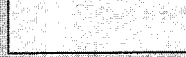
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 3**KARMAŞIK SAYILAR**

1. $Z = x + iy$ ve $Z \neq 0$ olduğuna göre,

$$\frac{2|Z|}{|Z|} + \frac{1-\bar{Z}}{1-Z}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x^2 + 2y^2$ B) $x^2 - y^2$ C) 2
D) 3 E) $\frac{1}{2}$

2. $Z \cdot i - \bar{Z} + i = 2 - Z \cdot i$

olduğuna göre, eşitliği sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 + i$ B) $i - 3$ C) $2 - i$ D) -1 E) $-i$

3. $Z = 3i^{19} + 5i^{17} + i^6$ olduğuna göre,

$$\frac{\operatorname{Im}(Z^{-1}) + \operatorname{Re}(Z)}{\operatorname{Re}(Z^{-1}) + \operatorname{Im}(Z)} \text{ kaçtır?}$$

- A) $-\frac{7}{9}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $-\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

4. Köklerinden birisi $x_1 = 2 + 3i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + 4x + 13 = 0$ B) $x^2 - 4x + 13 = 0$
C) $x^2 + 4x - 13 = 0$ D) $x^2 - 4x - 13 = 0$
E) $x^2 + 13x - 4 = 0$

5. Bir kökü $2 + 2i$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + 4x + 8 = 0$ B) $x^2 - 4x + 8 = 0$
C) $x^2 + 4x - 8 = 0$ D) $x^2 - 4x - 8 = 0$
E) $x^2 - 2x - 8 = 0$

6. $Z = x - iy$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $Z \cdot \bar{Z} - 2y^2 + x^2 + xy$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x - y$ B) $2x - y$ C) $2x + y$
D) $x - 2y$ E) $x + 2y$

7. $|Z| - Z = 1 + 5i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $12 - 5i$ B) $6 + 5i$ C) $5 - 6i$
D) $5 + 12i$ E) $12 - 6i$

8. Z karmaşık sayısı $Z \cdot \bar{Z} - \bar{Z} = 10 - 2i$ eşitliğini sağladığına göre, aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $5 - 2i$ B) $3 + 2i$ C) $-2 - 2i$
D) $-3 - 2i$ E) $-5 + 2i$

9. $\bar{Z} - 2 + 5i = |Z| - 3$

olduğuna göre, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3 - 5i$ B) $7 + 3i$ C) $9 - 6i$
D) $12 + 5i$ E) $13 - 3i$

10. $|Z| - 1 = Z - 5i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3 + 7i$ B) $7 - 12i$ C) $12 + 5i$
D) $9 - 5i$ E) $-5 + i$

11. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{31}$ ifadesinin değeri nedir?
A) $-i$ B) -1 C) 0 D) 1 E) i

12. $Z = \frac{(-7+24i)(15i-8)}{(-3-4i)(12-5i)}$ olduğuna göre, $|Z|$ nin değeri kaçtır?
A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{13}{25}$ C) $\frac{85}{15}$ D) $\frac{85}{13}$ E) 1

13. $Z_1 = a + (a+1)i$ ve $Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ şeklinde tanımlanıyor.
Buna göre, $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{5}$ olduğuna göre, a nın pozitif değeri kaçtır?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

14. $Z = \frac{(2+i)(2-x.i)}{(i-1)}$ ve $|Z| = 10$ olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?
A) -36 B) -25 C) 1 D) 25 E) 36

15. $Z = \frac{(3+i)(5+x.i)}{(3-i)}$ ve $|Z| = 13$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) 0 B) 5 C) 8 D) 12 E) 15

16. $Z = x + iy$ şeklinde tanımlanıyor.
 $|\bar{Z}| = 3$ olduğuna göre, $|\bar{Z} - Z^{-1}|$ kaç birimdir?
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

17. $Z_1 = 3 + 4i$
 $Z_2 = 4 - 2i$
 $Z_3 = -1 + 7i$ karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\left|\frac{Z_1 \cdot Z_2^3}{Z_3^2}\right|$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ E) $4\sqrt{5}$

18. $Z = \frac{\sqrt{5-12i}(3-i)}{\sqrt[4]{24+7i}}$ olduğuna göre, $\frac{1}{|Z|}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ C) $\frac{11}{13\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{13}$

19. $Z = \frac{(1+i)^6}{2-3i}$ karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

- A) $\frac{24}{13}$ B) $\frac{16}{13}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{21}{13}$ E) $-\frac{16}{13}$

20. $|Z| - Z = 3 - \sqrt{3}i$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 - \sqrt{3}i$ B) $1 + \sqrt{3}i$ C) $-1 - \sqrt{3}i$
D) $-1 + \sqrt{3}i$ E) $-\sqrt{3}i$



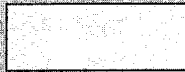
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 4**KARMAŞIK SAYILAR**

1. $(2 - \sqrt{-4}) + (5 - \sqrt{-9}) + (3 - \sqrt{-4}) \cdot (-2 + \sqrt{-49})$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 15 B) $-15 - 20i$ C) $15 - 20i$
D) $15 + 20i$ E) $20i$

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$\frac{2+i}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $\frac{i^{1905} - i^{1907}}{i^{1903} + i^{1967}}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) i C) 0 D) -i E) -1

4. $Z_1 = 3x - 1 + 2i$ ve $Z_2 = 2 + (y - 2)i$ şeklinde tanımlanıyor.

$Z_1 = Z_2$ olduğuna göre, $(x + y)$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere;

$\sqrt{5 - xi} = 3 + 2i$ denklemini sağlayan x sayısı kaçtır?

- A) -15 B) -12 C) -11 D) -6 E) -5

6. $2Z + i = Zi - 2$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ B) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ C) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$
D) $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ E) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

7. $P(x) = 5x^{42} + 3x^{31} + 3x^{21} + 4$ olduğuna göre, $P(i)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6i - 9$ B) $3i + 4$ C) $-9 + i$
D) -1 E) 0

8. $\frac{(1+i)^{41}}{(1-i)^{40}}$ karmaşık sayısının $a + bi$ biçiminde yazılışı

aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-1 - i$ B) $-1 + i$ C) $1 + i$ D) i E) 1

9. $\frac{1}{1-i} + a - ib = 1 + i$ eşitliğine göre, $(a - b)$ farkı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

10. $Z = 1 - i$ olduğuna göre, Z^{14} sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -128 B) $128i$ C) $128 \cdot (1 - i)$
D) $64 \cdot (1 + i)$ E) $64i$

11. $x^2 - 6x + 13 = 0$ denkleminin kökleri Z_1 ve Z_2 olduğuna göre, $|Z_1| \cdot |Z_2|$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) 13 B) 11 C) 9 D) 8 E) 7

12. $x^2 + kx + m = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $1 - 2i$ olduğuna göre, $(k + m)$ toplamı kaçtır?
A) -4 B) -3 C) -2 D) 3 E) 4

13. Köklerinden biri $(-2 + 3i)$ olan reel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?
A) $x^2 - 4x - 12 = 0$ B) $x^2 - 4x + 13 = 0$
C) $x^2 + 4x - 13 = 0$ D) $x^2 + 4x + 13 = 0$
E) $x^2 - 2x - 13 = 0$

14. Gerçek katsayılı $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin köklerinden biri $(1 - i)$ olduğuna göre, a, b kaçtır?
A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 4

15. $Z = \frac{3-i}{1+i} + \frac{1+2i}{1-i} - 2 + 5i$ olduğuna göre, $\text{Im}(Z)$ aşağıdakilerden hangisidir?
A) $-\frac{11}{2}$ B) $-\frac{9}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{11}{2}$

16. $Z = 3 - 4i$ olduğuna göre, $|Z^{-1}|$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 3 E) 5

17. $Z^{-1} = x - 5i$ ve $|\bar{Z}| = \frac{1}{13}$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) -12 B) -6 C) 0 D) 3 E) 6

18. $a \in \mathbb{R}$
 $Z = \frac{(a+2i)^2(3-i)}{6i+2}$ ve $|Z| = 10$ olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

19. $Z = \frac{(2+3i)^2(3-4i)}{(5-12i)}$ karmaşık sayısının modülü kaçtır?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

20. $Z \cdot \bar{Z} + 6 \cdot |Z| = 7$ olduğuna göre, $|Z|$ nin değeri kaçtır?
A) 8 B) 7 C) 5 D) 4 E) 1



DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ

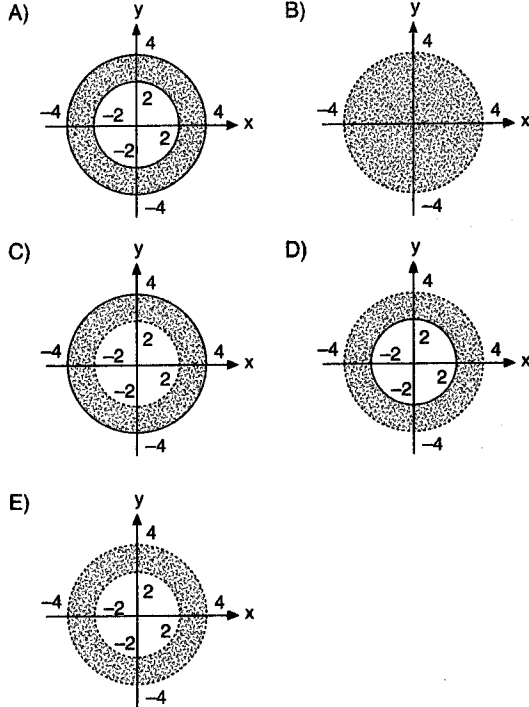


ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 5

KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ

1. $4 < Z \cdot \bar{Z} \leq 16$ koşuluna uygun Z karmaşık sayılarının grafiği aşağıdakilerde hangisidir?



2. $Z = x + iy$ ve $|Z| \leq 5$ olduğuna göre, $|Z - 8i + 6|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?
- A) 25 B) 20 C) 15 D) 10 E) 5

3. $Z = x + iy$ ve $|Z| = |Z - 2|$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısının düzlemdeki geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Gerçek eksene dik bir doğru
B) Sanal eksene dik bir doğru
C) 2 birim çaplı bir çember
D) Bir elips
E) Bir parabol

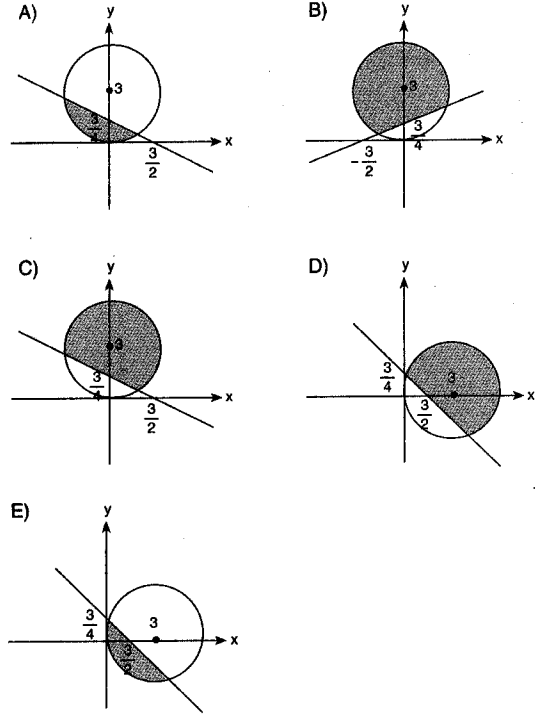
4. $i\bar{Z} + 3 - 4i = 1$ eşitliği veriliyor. Buna göre, $i\bar{Z}$ nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. A $(3 - i)$, B $(1 + i)$ ve C $(2 - i)$ noktaları veriliyor. AB doğrusu üzerinde bulunan ve C noktasına en yakın Z noktası için $\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $|Z - 2i| \leq |Z + 1|$ ve $|Z - 3i| \leq 3$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntüleri aşağıdakilerden hangisidir?



7. $|Z + 2 - i| = 10$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$
B) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 64$
C) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$
D) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$
E) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 121$

8. $|Z - 4 + i| = 3$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 3$
B) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$
C) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
D) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
E) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 3$

9. $Z = a + ib$ şeklinde tanımlanıyor.

$|Z - 3| = 2$ ve $|Z + 1 - 3i| = 1$ çemberlerinin en yakın noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

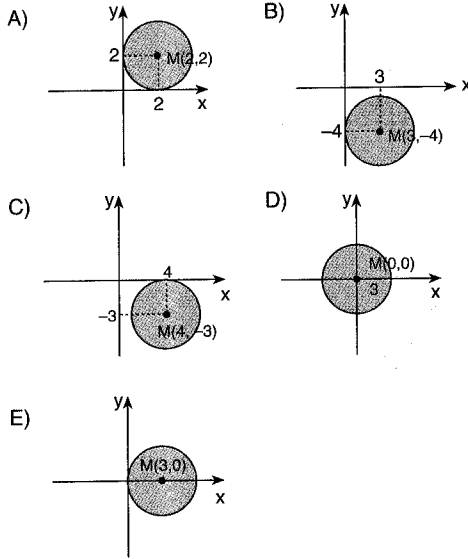
- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

10. $|Z| \leq 2$ olduğuna göre,

$|Z - 3 - 4i|$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerler farkı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

11. $|Z - 3 + 4i| \leq 3$ eşitsizliğine karşılık gelen noktaların geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?



12. $A = \{Z \in \mathbb{C}, |Z + i| = |Z + 3i|\}$ kümesinin karmaşık düzlemdeki ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 3x$ B) $y = 3x + 4$ C) $y = 2x + 3$
D) $x + y = 2$ E) $x - y = 3$

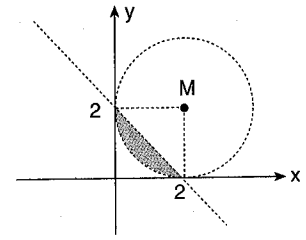
13. $A(2 - 4i)$, $B(1 + i)$ ve $C(x - 2i)$ noktaları doğrusal olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{8}{5}$ E) 2

14. $Z = a + i.b$ ve $|Z| \leq 8$ olduğuna göre, $|Z - 24 + 7i|$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

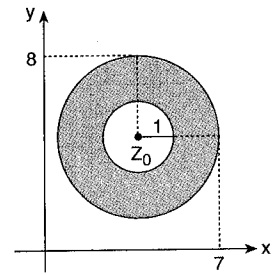
- A) 35 B) 33 C) 23 D) 17 E) 15

15. Yandaki şekle göre, taralı bölgeyi ifade eden eşitsizlik sistemi aşağıdakilerden hangisidir? (M çemberin merkezidir.)



- A) $|Z - 2il| < 2$
 $x - 2 < y$
C) $|Z - 2 - 2il| < 2$
 $y < 2 - x$
E) $|Z - 2 - 2il| \leq 2$
 $y \leq 2 - x$
- B) $|Z - 2 - 2il| < 2$
 $y > 2 - x$
D) $|Z - 2il| \leq 2$
 $y > 2 - x$

16. Şekildeki eş merkezli dairelerin merkezi $Z_0 = 4 + 5i$ karmaşık sayısı olduğuna göre taralı alanı aşağıdakilerden hangisi ifade eder?

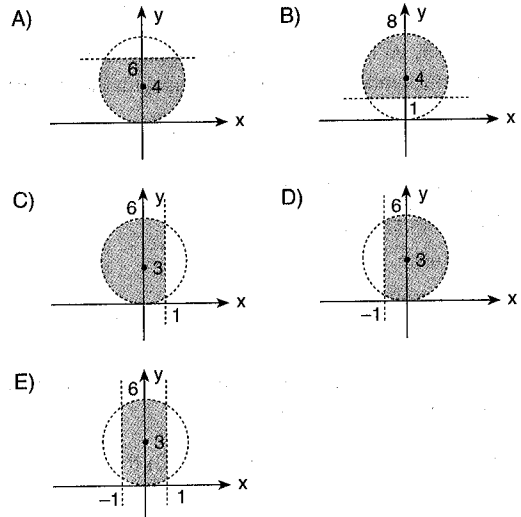


- A) $1 < |Z - Z_0| < 5$ B) $7 \leq |Z - Z_0| \leq 8$
C) $1 < |Z - Z_0| < 4$ D) $1 \leq |Z - Z_0| \leq 4$
E) $1 \leq |Z - Z_0| \leq 3$

17. $A = \{Z : |Z - 3i| < 3, Z \in \mathbb{C}\}$

$B = \{Z : |Z - 2i| > |Z|, Z \in \mathbb{C}\}$

olduğuna göre, $A \cap B$ kümesinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



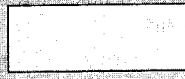
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 6

KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ

1. $Z = 3 - 3\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $Z = 6(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$
 B) $Z = 6(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$
 C) $Z = 6(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$
 D) $Z = 3(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$
 E) $Z = 3(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$

2. Kutupsal koordinatları $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ olan Z karmaşık sayısı için $\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)$ toplamı kaçtır?
 A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

3. $Z_1 = 4 \cdot \operatorname{cis} 33^\circ$
 $Z_2 = \sqrt{3} \cdot \operatorname{cis} 177^\circ$ olduğuna göre, $\operatorname{Re}(Z_1 \cdot Z_2)$ kaçtır?
 A) -6 B) -3 C) 3 D) 6 E) 18

4. $Z = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{1 + i}$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ B) $2\sqrt{2}(\sin 15^\circ + i\cos 15^\circ)$
 C) $4(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$ D) $2\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$
 E) $4(\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ)$

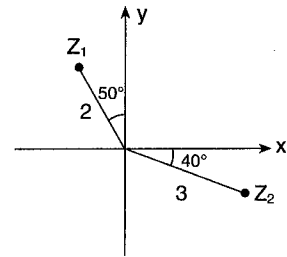
5. $Z = 2 - 2i$ karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$
 B) $2\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$
 C) $2\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$
 D) $2\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$
 E) $2\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$

6. $Z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ve $Z_2 = 4(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$ olduğuna göre, $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ B) $4(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
 C) $4(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ D) $2(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$
 E) $2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$

7. Şekilde Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri verilmiştir. Buna göre $\frac{Z_2}{Z_1}$ aşağıdakilerden hangisidir?

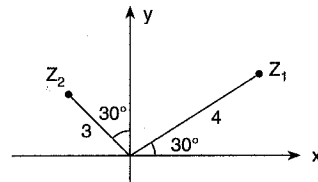


A) $-\frac{3}{2}i$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}i$ D) $-\frac{2}{3}i$ E) $\frac{3}{2}$

8. $Z = 2 - 2\sqrt{3}i$ sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\operatorname{cis} 250^\circ$ B) $4\operatorname{cis} 250^\circ$ C) $2\operatorname{cis} 300^\circ$
 D) $3\operatorname{cis} 300^\circ$ E) $4\operatorname{cis} 300^\circ$

- 9.



Şekildeki Z_1 ve Z_2 sayılarının görüntüleri verilmiştir. Buna göre, $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6(1 + \sqrt{3}i)$ B) $3(i - \sqrt{3})$ C) $6(i - \sqrt{3})$
 D) $3(1 - \sqrt{3}i)$ E) $6(i + \sqrt{3})$

10. α bir dar açı olmak üzere, $Z = 1 + \sin \alpha + i \cos \alpha$ sayısının büyüklüğü nedir?

- A) 1 B) 2
C) $\sqrt{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ D) $\sqrt{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$
E) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)$

11. $Z_1 = \left(\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{5\pi}{6} \right)$

$Z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

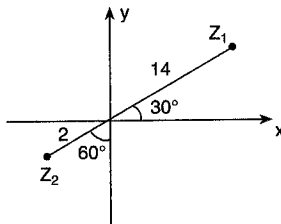
karmaşık sayıları veriliyor. Buna göre $Z_2^2 \cdot Z_1^3$ karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-2 - 2\sqrt{3}i$ B) $2\sqrt{3} - 2i$ C) $-2 + 2\sqrt{3}i$
D) $2 - 2\sqrt{3}i$ E) $2\sqrt{3} + 2i$

12. $Z = 2 + 2 \operatorname{cis} \alpha$ sayısının modülü aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $4 \sin \frac{\alpha}{2}$ B) $4 \cos \frac{\alpha}{2}$ C) $-4 \sin \frac{\alpha}{2}$
D) $-2 \cos \frac{\alpha}{2}$ E) $2 \cos \frac{\alpha}{2}$

13.



Şekilde Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri verilmiştir.

Buna göre, $\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -7 B) -7i C) -i D) $3i - 7$ E) 49

14. $Z = a + bi$ olmak üzere, $a^2 + b^2 = 4$ ve $\frac{b}{a} = 1$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısının kutupsal formu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ B) $2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{5}$ C) $2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$
D) $4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}$ E) $2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

15. $Z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$

$Z_2 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

karmaşık sayıları veriliyor. Bu sayılar için $\frac{Z_1^3}{Z_2^7}$ sayısının reel kısmı kaçtır?

- A) 3 B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

16. $Z_1 = 6 (\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$

$Z_2 = 8 (\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$

olduğuna göre, $|Z_1 - Z_2|$ nin değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

17. $Z_1 = 3 \operatorname{cis} 170^\circ$

$Z_2 = 5 \operatorname{cis} 50^\circ$

olduğuna göre, $|Z_1 - Z_2|$ kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



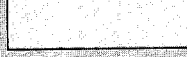
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

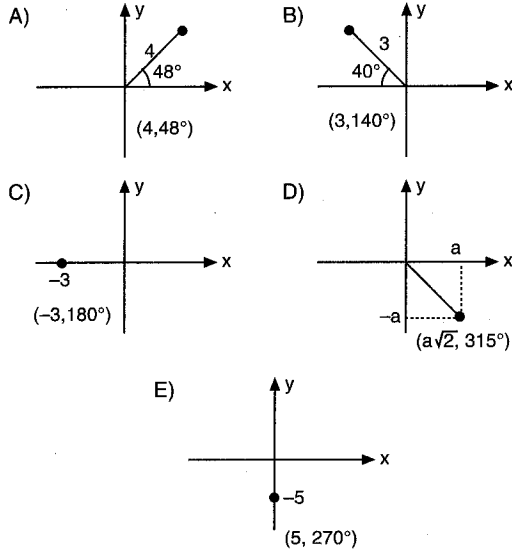
TEST 7

KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ

1. Kutupsal koordinatları $(8, 30^\circ)$ olan sayının karmaşık düzlemdeki koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(4, 4\sqrt{3})$ B) $(4, -4\sqrt{3})$ C) $(-4, 4\sqrt{3})$
D) $(4\sqrt{3}, 4)$ E) $(-4, -4\sqrt{3})$

2. Aşağıdaki şekillerden hangisinin kutupsal gösterimi altına yanlış yazılmıştır?



3. Kutupsal koordinatları $(4\sqrt{2}, 135^\circ)$ olan karmaşık sayının standart gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2 + 2i$ B) $-2 + 2i$ C) $-4 + 4i$
D) $4 + 4i$ E) $-4 - 4i$

4. $Z = \sqrt{2}(\cos 405^\circ + i \sin 405^\circ)$ karmaşık sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + i$ B) $1 - i$ C) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $Z = \frac{1}{i-1}$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{cis } \frac{\pi}{4}$ B) $\sqrt{2} \text{cis } \frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{cis } \frac{5\pi}{4}$
D) $2 \text{cis } \frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{cis } \frac{7\pi}{4}$

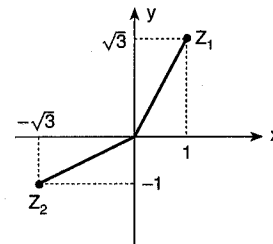
6. $Z = \frac{-2i\sqrt{3} - 4}{2 + i\sqrt{3}}$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2(\text{cis } 135^\circ)$ B) $2(\text{cis } 150^\circ)$ C) $2(\text{cis } 180^\circ)$
D) $2(\text{cis } 270^\circ)$ E) $2(\text{cis } 315^\circ)$

7. $Z = (\sqrt{3} + i\sqrt{3}) \cdot (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ karmaşık sayının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4(\sqrt{6} + i\sqrt{3})$ B) $2(-\sqrt{6} + i\sqrt{3})$ C) $2(\sqrt{6} + 3i\sqrt{2})$
D) $\frac{1}{2}(-\sqrt{6} + 3i\sqrt{2})$ E) $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 3i\sqrt{2})$

- 8.



Şekilde verilenlere göre, $(Z_2^{-1} \cdot Z_1)^{-1}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

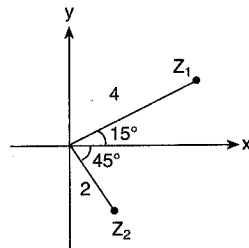
A) $i - \sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$ C) $\sqrt{3} + i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$

9. $Z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$
 $Z_2 = \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ olduğuna göre, $\left(\frac{\bar{Z}_1}{Z_2} \right)$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) -2 B) -2i C) 2 D) 2i E) -2 + 2i

10. $Z_1 = (6, 240^\circ)$, $Z_2 = (3, 120^\circ)$, $Z_3 = (9, 30^\circ)$ karmaşık sayıları kutupsal koordinatları ile verilmiştir. Buna göre, $\frac{Z_1 \cdot \bar{Z}_2}{Z_3}$ karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
 A) 2 - 2i B) 2 + 2i C) 2i
 D) -2 - 2i E) -2 + 2i

11. $Z = -i + \sqrt{3}$ olduğuna göre, Z^{-1} karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ B) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
 C) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ D) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$
 E) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$

12. Şekilde Z_1 ve Z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri verilmiştir. Buna göre $Z_1^4 \cdot Z_2^{-8}$ çarpımının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ B) $4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
 C) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ D) $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
 E) $4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

13. $Z_1 = \sqrt{3} \cdot \text{cis} 10^\circ$ ve $Z_2 = 2 \cdot \text{cis} 20^\circ$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, $|Z_1 \cdot Z_2|$ nin değeri kaçtır?
 A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

14. $Z = \cos 15^\circ - i \sin 15^\circ$ karmaşık sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $1 + i$ B) $1 - i$ C) $1 - \frac{i}{2}$
 D) $\sqrt{1 - \frac{i}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$

15. $Z = (\sqrt{3} + i)^3$ sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\text{cis} \frac{\pi}{2}$ B) $2 \text{cis} \frac{\pi}{2}$ C) $4 \text{cis} \frac{\pi}{2}$
 D) $8 \text{cis} \frac{\pi}{2}$ E) $\text{cis} \pi$

16. $Z = \frac{1}{(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)^{18}}$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, $|\bar{Z}|$ nin değeri kaçtır?
 A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

17. θ dar açı olmak üzere, $Z_1 = 1 + i \sin 2\theta$ ve $Z_2 = \cos 2\theta$ şeklinde tanımlanıyor. $Z_1 + Z_2$ bu toplam noktasının orijine uzaklığı aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\cos 2\theta$ B) $-\cos 2\theta$ C) $2 \cos \theta$
 D) $-2 \cos \theta$ E) $-2 \cos 2\theta$



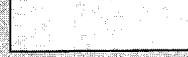
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 8**KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ**

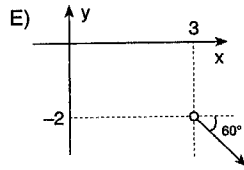
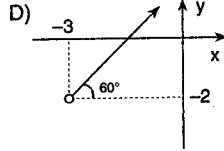
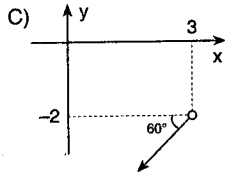
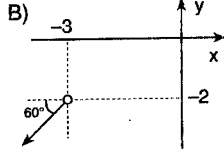
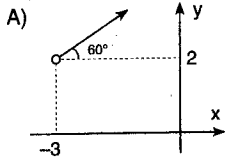
1. $Z = \cos 70^\circ - i \sin 70^\circ$ sayısının esas argümenti kaç derecedir?
A) 270 B) 280 C) 290 D) 300 E) 310
2. $Z = 2a + 1 + (\sqrt{3}a)i$ karmaşık sayısının argümentinin 240° olması için a değeri kaç olmalıdır?
A) -1 B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3
3. $\text{Arg}(Z + 2) = 240^\circ$
 $\text{Arg}(Z + 2\sqrt{3}i) = 150^\circ$
koşullarını sağlayan Z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?
A) -6 B) -3 C) $-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$
4. $Z = -\frac{1}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$
karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?
A) 50 B) 80 C) 90 D) 110 E) 140
5. $Z = i^{123} + i^{18}$ sayısının esas argümenti kaç derecedir?
A) 45 B) 105 C) 175 D) 225 E) 315
6. Z karmaşık sayısı;
 $|Z + 1| = |Z - i|$ eşitliğini sağlıyorsa bu sayının esas argümenti aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$
7. $Z = 5 + 2i + \frac{10-4i}{1-i}$ karmaşık sayısının esas argümenti θ olduğuna göre, $\sin \theta$ nın değeri kaçtır?
A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{1}{3}$
8. $\text{Arg}(Z_1) = 30^\circ$, $\text{Arg}(Z_2) = 20^\circ$ ve $\text{Arg}(Z_1^3 Z_2^2 Z_3) = 170^\circ$ olduğuna göre, Z_3 ün esas argümenti kaç derecedir?
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
9. $\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre, Z^{-5} sayısının esas argümenti nedir?
A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) π
10. $\text{Arg}(Z-i) = \frac{\pi}{4}$
 $\text{Arg}(Z-1) = \frac{\pi}{2}$
koşullarını sağlayan Z sayısı için, $\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$ kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3
11. $Z = 1 + \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?
A) 8 B) 24 C) 36 D) 48 E) 54
12. $Z = 2 + i$ sayısının esas argümenti α olduğuna göre, $\cos 2\alpha$ nın değeri kaçtır?
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

13. $Z = \frac{1-i}{i}$ karmaşık sayısı veriliyor.

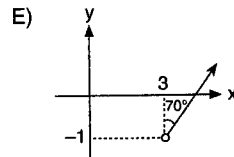
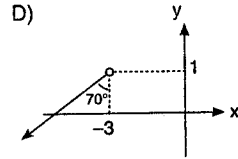
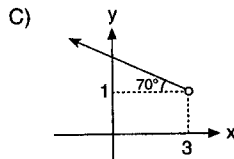
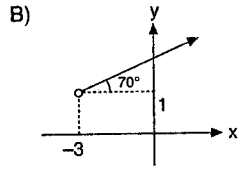
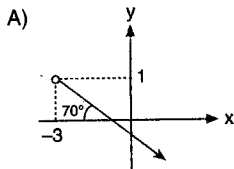
Buna göre, $(i^5 \cdot Z)$ sayısının esas argümenti kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) π E) $\frac{7\pi}{4}$

14. $\text{Arg}(Z - 3 + 2i) = \frac{4\pi}{3}$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?



15. $\text{Arg}(Z + 3 - i) = 70^\circ$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayısının görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?



16. $Z = \sqrt{3} - i$ sayısının kompleks düzlemde belirttiği noktanın orijine uzaklığı değişmeden pozitif yönde 90° döndürüldüğünde elde edilen karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{3} + i$ B) $1 + \sqrt{3}i$ C) $\sqrt{3} - i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $-1 - \sqrt{3}i$

17. $Z_1 = 3 - 3\sqrt{2}i$ karmaşık sayısının kompleks düzlemde, saat yönünün tersinde 120° döndürülmesiyle elde edilen sayı Z_2 olduğuna göre, $|Z_1 - Z_2|$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $6\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$ D) 9 E) 12

18. $Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ sayısı karmaşık düzlemde pozitif yönde 30° döndürüldüğünde, Z_2 sayısı elde ediliyor. Buna göre, oluşan $Z_1 O Z_2$ üçgeninin alanı kaç birimkaredir? (O orijin noktasıdır.)

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

19. $z = -4\sqrt{3} - 4i$ karmaşık sayısının pozitif yönde $\frac{4\pi}{3}$ döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4\sqrt{3} - 4i$ B) $4 - 4\sqrt{3}i$ C) $4 + 4\sqrt{3}i$
D) $-8i$ E) 8i



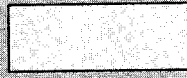
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KASESİ

TEST 9**KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ**

1. $Z = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$ olduğuna göre, $|Z^{25}|$ ifadesinin eşiti kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
2. $Z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$ olduğuna göre, Z^{12} sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
A) $2^{12} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$
B) $2^{12} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
C) $2^{12} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
D) $2^{10} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
E) $2^{12} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
3. $i^2 = -1$ olmak üzere;
 $Z = \sqrt{3} + i$ sayısının 15. kuvveti aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $(2\sqrt{3})^{15}i$ B) $(2\sqrt{3})^{15}$ C) $(\sqrt{3})^{15}$
D) $2^{15}i$ E) 2^{15}
4. $Z = \cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14}$ karmaşık sayısı veriliyor.
 $(i^2 \cdot Z)^7$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) -1 B) -i C) 0 D) 1 E) i
5. $Z = \sqrt{3} - i$ olduğuna göre, Z^{21} sayısının esas argümenti kaç derecedir?
A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 90
6. $Z = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$ olduğuna göre, $(\bar{Z})^6$ ifadesinin eşiti nedir?
A) -i B) -1 C) 0 D) 1 E) i
7. $Z = 8 + 6i$ sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?
A) $2 + i$ B) $4 + 3i$ C) $3 + i$
D) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ E) $2\sqrt{2} + \sqrt{6}i$
8. $\sqrt{4 + 3i}$ karmaşık sayısının sanal kısmı aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) -1
9. $Z = 5 - 12i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?
A) $13 + i$ B) $-3 - 2i$ C) $3 - 2i$
D) $-2 + 3i$ E) $-5 + 12i$
10. $x^3 = 8i$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?
A) -2 B) $1 + 2i$ C) $-\sqrt{3} + i$
D) $2 - i$ E) $-1 + \sqrt{3}i$

11. $Z = -1 - \sqrt{3}i$ karmaşık sayısının kareköklerinden birisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ B) $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ C) $-\sqrt{3} - i$
D) $-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

12. $Z = 15 - 8i$ sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4 - i$ B) $1 - 4i$ C) $-1 - 4i$
D) $-4 + i$ E) $4 + i$

13. $Z = -64$ sayısının küpköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2(1 + \sqrt{3}i)$ B) $2(\sqrt{3} - i)$ C) $3(\sqrt{3} + 1)$
D) 2 E) 3

14. $Z^3 + 1 = 0$ denkleminin kökleri W_1, W_2, W_3 olduğuna göre, $\text{Arg}(W_1 \cdot W_2 \cdot W_3)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) π E) 2π

15. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $-1, (2 - i)$ ve $(2 + i)$ olduğuna göre, $(a+c)$ toplamı kaçtır?

A) -8 B) -3 C) -2 D) 2 E) 8

16. $Z^2 + (5i - 4)Z + 2i + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{Z_1, Z_2\}$ olduğuna göre, $Z_1 + Z_2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $7i + 3$ B) $2i + 7$ C) $5i - 4$
D) $5 - 4i$ E) $4 - 5i$

17. $Z = x + iy$ karmaşık sayısının 4. dereceden köklerinden biri $2\text{cis}140^\circ$ olduğuna göre, diğer köklerinden birisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\text{cis}40^\circ$ B) $2\text{cis}200^\circ$ C) $2\text{cis}240^\circ$
D) $2\text{cis}320^\circ$ E) $2\text{cis}340^\circ$

18. $4\sqrt{3} - 4i$ karmaşık sayısının kareköklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4\sqrt{3}$ B) -4 C) 0 D) 4 E) $4\sqrt{3}i$

19. $\frac{4}{i}$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ B) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ C) $2 - 2i$
D) $-2 - 2i$ E) $2 + 2i$

20. $12 - 5i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{5-i}{2}$ B) $\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$ C) $\frac{5+i}{2}$
D) $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$ E) $2 + 3i$



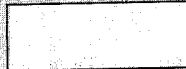
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

1. $(2 + i) \cdot Z = 2\bar{Z} - 4i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -4i C) 0 D) 4i E) 4

2. $|\bar{Z}| - Z = 4 - 8i$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

A) -6 B) -5 C) 3 D) 5 E) 6

3. $P(x) = (x + 3)^3 + 3(x + 3)^2 + 3(x + 3) + 1$ olduğuna göre, $P(2i - 4)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -8i B) -4 C) -4i D) 4i E) 8i

4. $Z = \sqrt{3} - i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre terinin reel kısmı kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

5. $Z_1 = 5 - ai$ ve $Z_2 = -3 - 2i$ sayıları arasındaki uzaklık 10 br olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -8 B) -6 C) 8 D) 10 E) 16

6. $i^{41} + i^{42} + i^{43} + i^{44} + \dots + i^{65}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -i B) -1 C) 0 D) 1 E) i

7. $|Z| \leq 3$ olduğuna göre, $|Z - 3 + 4i|$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 8 E) 13

8. $Z = x + iy$ olmak üzere;

$|Z + 2i| - |Z| = 2$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

E) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$

9. Karmaşık düzlemde; $|Z - 3i| = |Z + 1 + 2i|$ eşitliğini sağlayan karmaşık sayıların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2y + x = 1$ B) $2x + y = -1$ C) $2x + y = 1$

D) $2y + x = -1$ E) $2x - y = 1$

10. $\text{Arg}(-\bar{Z}) = 120^\circ$ ve $\bar{Z} = 9Z^{-1}$ olduğuna göre, Z sayısının reel kısmı kaçtır?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

11. $Z_1 = \cos 20^\circ - i \sin 20^\circ$ ve $Z_2 = \sin 40^\circ - i \cos 40^\circ$ karmaşık sayıları veriliyor. $Z_1 \cdot Z_2$ sayısının esas argümenti kaç radyandır?

A) $\frac{17\pi}{9}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{29\pi}{18}$ D) $\frac{17\pi}{18}$ E) $\frac{13\pi}{18}$

12. $Z = \frac{(3 + 4i)^4 (x - iy)^5}{(x + iy)^5}$ karmaşık sayısının modülü kaçtır?

A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) $5\sqrt{5}$ D) 25 E) 625

13. $Z = \frac{(1 - i)^{10} (1 + i)^{20}}{(\sqrt{7} + i)^{20}}$ karmaşık sayısının boyu kaçtır?

A) 2^{15} B) 2^{10} C) 2^5 D) 2^{-10} E) 2^{-15}

14. $\begin{cases} Z_1 = 12 + 12i \\ Z_2 = 5 - 12i \end{cases}$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 13 C) 20 D) 25 E) 30

15. $|Z - 1| = |Z + 2i|$ eşitliğinin karmaşık düzlemde belirttiği doğrunun eksenler ile oluşturduğu üçgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 9 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{9}{16}$

16. $Z = \cos \frac{7\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6}$ sayısının esas argümenti kaç radyandır?

A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) π

17. $3Z - i = \sqrt{2}$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının esas argümenti α olduğuna göre, $\cot \alpha$ kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

18. $Z = \sin 48^\circ - i \cos 48^\circ$ sayısının Ox- eksenine ile pozitif yönde yaptığı açının esas ölçüsü kaç derecedir?

A) 300 B) 306 C) 309 D) 312 E) 318

19. $\text{Arg}(Z_1) = \frac{\pi}{5}$ ve $\text{Arg}(Z_2) = \frac{7\pi}{18}$ veriliyor.

$\text{Arg}(Z_1^3 \cdot Z_2^6)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{7\pi}{15}$ B) $\frac{3\pi}{5}$ C) $\frac{11\pi}{15}$ D) $\frac{14\pi}{15}$ E) $\frac{16\pi}{15}$



DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 11**KARMAŞIK SAYILAR (KARMA)**

1. $(1+i)^{19} \cdot (1-i)^{20}$ çarpımının reel kısmı kaçtır?

A) -2^{19} B) -2^{18} C) 2^{18} D) 2^{19} E) 2^{20}

2. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$3x + xi + 2yi = 7 + 2y - 3i$ eşitliği veriliyor. Buna göre, (x, y) çarpımının değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

3. $3i(i-1) + (1-i)2i$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1+i$ B) $1+i$ C) $-1-i$
D) $-i$ E) i

4. $f(Z) = Z^2 - 1$ ve $g(Z) = Z + i$

olduğuna göre, $(g \circ f)(1-i)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-2i$ B) $1+2i$ C) $1-i$
D) $-1+i$ E) $-1-i$

5. $Z = x+iy$ karmaşık sayısı veriliyor. $\frac{1}{Z} + Z = 2-2i$ oldu-

ğuna göre, $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $Z_1 = 4 + 3i$ ve $Z_2 = -5 - 2i$ olduğuna göre, $Z_1 - 3\bar{Z}_2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $11 - 3i$ B) $19 - 3i$ C) $-19 - 3i$
D) $-11 - 3i$ E) $19 + 3i$

7. $Z = x + iy$ olduğuna göre,

$$|Z - 2i| = 2 \cdot |i - Z|$$

eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2 + y^2}{y - x} = \frac{3}{4}$

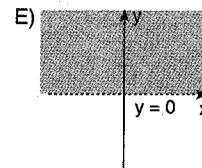
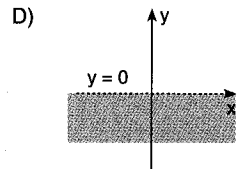
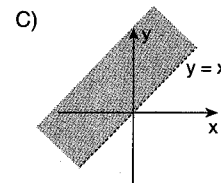
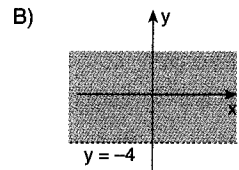
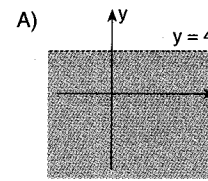
B) $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{3}{4}$

C) $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{4}{3}$

D) $\frac{x^2 + y^2}{2y - x} = \frac{4}{3}$

E) $\frac{x^2 + y^2}{-x - y} = \frac{3}{4}$

8. $A = \{Z: Z \in \mathbb{C}, |Z - 1 + i| < |Z - 1 - i|\}$ şeklinde tanımlı A b-
ğının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9. $Z = -x + 1 + x.i$ şeklinde tanımlanıyor.

$|Z - \bar{Z}| = 6$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 0 E) 2

10. Karmaşık düzlemde köşelerinden iki tanesi $A(-1 + i)$ ve $C(-2i)$ olan ABCD karesinin alanı kaç birimkaredir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $Z_1 = 1 - 3i$ ve $Z_2 = 5 - i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık 4 birim olduğuna göre, y aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

12. $Z = x + iy$ şeklinde tanımlanıyor.

$|Z + 1| = |\bar{Z} - i|$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayısının geometrik yer denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = -x$ B) $y = x$ C) $y = -x - 1$
D) $y = x + 1$ E) $y = x - 1$

13. $Z = x + iy$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $|Z - 1 + 2i| \leq 1$ ifadesinin karmaşık düzlemde belirttiği bölgenin alanı kaç π birimkaredir?

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

14. Karmaşık düzlemde $Z = 3 - i$ olduğuna göre, $|Z^{-1}|$ in değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{20}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{20}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{30}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

15. Karmaşık düzlemde,

$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x + i \sin^2 x$ olduğuna göre, x in alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

16. $|Z - 5 + 12i| \leq 4$ koşuluna uygun Z karmaşık sayılarından başlangıç noktasına en uzak olanının orijine olan uzaklığı kaç birimdir?

- A) 5 B) 9 C) 12 D) 16 E) 17

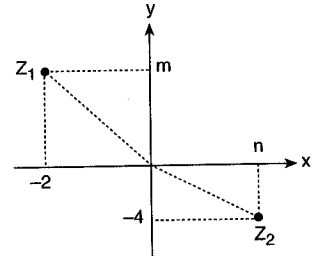
17. $Z = a + i.b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) veriliyor.

$$Z = \frac{(\cos 160^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot (-\cos 140^\circ + i \sin 40^\circ)}{(\cos 220^\circ - i \sin 220^\circ)}$$

olduğuna göre, $(\operatorname{Re}(Z) \cdot \operatorname{Im}(Z))$ çarpımının sonucu kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

18. Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıların görüntüleri şekildeki gibidir. $Z_1 + \bar{Z}_2 = 2$ olduğuna göre, $m.n$ çarpımının değeri kaçtır?



- A) -16 B) -8 C) 0 D) 8 E) 16

19. $a^2 + 1 = 0$ olmak üzere, $(a - i)^{10} = x$ eşitliğinde x in alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

- A) -2^{10} B) -2^8 C) -2^5 D) 2^8 E) 2^9



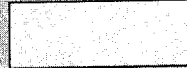
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 12

KARMAŞIK SAYILAR (KARMA)

1. $P(x) = 2x^{36} - 3x^{28} + 2x^5 + 3x$ polinomunun $(x^2 - i)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $2 + ix$ B) $x + 1$ C) $-1 + ix$
D) $x - 2$ E) $x - 1$

2. $i = \sqrt{-1}$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,
 $\frac{i^{8n-1} + i^{4n}}{i^{4n-1}}$ ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) i B) $i + 1$ C) $i - 1$ D) 1 E) 2

3. $Z = \sqrt{2 - \sqrt{5}i}$ şeklinde tanımlanıyor.
Buna göre, $\text{Re}(Z)$ nin alacağı değer aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ E) $\sqrt{5}$

4. $|Z - i| = |Z + 2 + 3i|$ eşitliğini sağlayan Z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - y = 13$ B) $2y + 3x = 4$
C) $-2x + y = -2$ D) $x + 2y = -3$
E) $x - 2y = 4$

5. $|Z + 1 - i| = 1$, $Z \in \mathbb{C}$ olduğuna göre, $|Z|$ nin maksimum değeri kaçtır?

A) $\sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{2} + 2$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2} + 1$ E) $2\sqrt{2}$

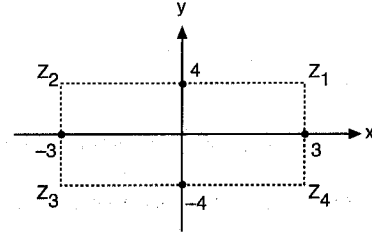
6. $Z_1 = 3x - 3 + 4i$
 $Z_2 = 3 + (4 - y)i$ karmaşık sayıları için $Z_1 - 2Z_2 = 0$ olduğuna göre, $(x + y)$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

7. $|Z + 2 - i| = 2$ olduğuna göre, $|Z - 2 + 2i|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 3 E) 1

8.

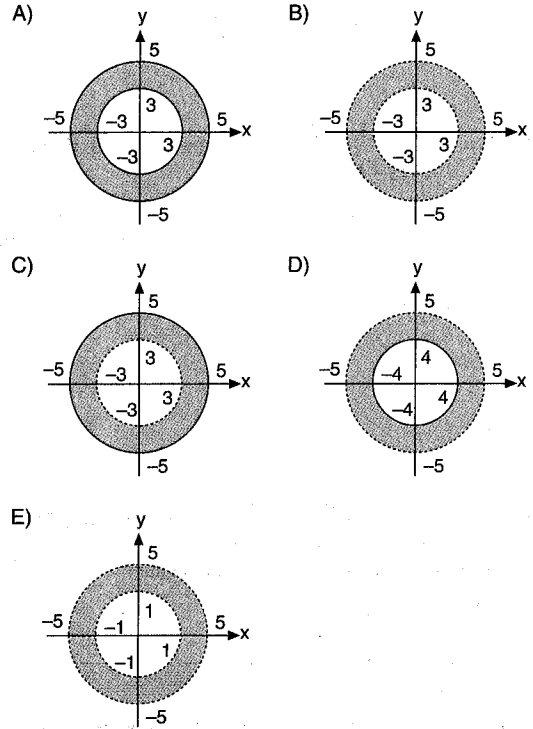


Şekildeki Z_1, Z_2, Z_3 ve Z_4 karmaşık sayıları için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $Z_2 = \bar{Z}_3$
II. $Z_3 = \bar{Z}_4$
III. $Z_2 = \bar{Z}_4$
IV. $|Z_1| = |Z_2|$
V. $Z_2 + Z_3 = Z_1 + Z_4$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9. $9 < Z \cdot \bar{Z} \leq 25$ eşitsizliğinin karmaşık düzlemde belirttiği bölge aşağıdakilerden hangisidir?



10. Z karmaşık sayı olmak üzere;

$|Z| = 2$, $\text{Arg}(Z) = \frac{2\pi}{3}$ olduğuna göre, Z sayısının sanal kısmı kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 2

11. $Z = x + iy$ olmak üzere, $Z^{-1} = \frac{1}{3} \text{cis} 210^\circ$ olduğuna göre,

$\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sqrt{3} + 1$ B) $\frac{\sqrt{3} + 3}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$
D) $3 + \sqrt{3}$ E) $\frac{-3\sqrt{3} + 3}{2}$

12. $Z = (1 - i)^4 \cdot (1 + i)^6$ olduğuna göre $\text{Re}(Z \cdot i)$ değeri kaçtır?

- A) -32 B) -16 C) 0 D) 16 E) 32

13. $Z = \frac{(3 - i)^2 \cdot (1 + \sqrt{2}i)^4}{(3 - 4i)^2}$ olduğuna göre, $|\bar{Z}|$ değeri kaçtır?

- A) 3 B) $\frac{18}{5}$ C) 5 D) 18 E) 45

14. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $Z = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta + i \cos \theta}$ olduğuna göre, Z^{50} nin değeri aşağıdakilerden hangisinde eşittir?

- A) $-i$ B) -1 C) 1 D) i E) $2i$

15. $\bar{Z} = 16Z^{-1}$ ve $\text{Arg}(\bar{Z}) = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre, Z^{20} karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) -2^{40} B) $-2^{40}i$ C) -2^{20} D) $-2^{20}i$ E) $2^{20}i$

16. $\text{Arg}(Z - 1) = \frac{5\pi}{4}$ ve $\text{Arg}(Z + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{6}$ olduğuna göre, $\text{Im}(Z)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-1 - \sqrt{3}$ B) $3 - 2\sqrt{3}$ C) $1 + \sqrt{3}$
D) $-1 + 2\sqrt{3}$ E) $-1 + \sqrt{3}$

17. $Z = 5 - 12i$ karmaşık sayısının kareköklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 13 B) $13i$ C) $12 - 5i$
D) $-5 + 12i$ E) $5 + 12i$

18. $Z = \frac{(\sin 100^\circ + i \cos 100^\circ)(\cos 70^\circ - i \sin 70^\circ)}{(\sin 220^\circ + i \cos 220^\circ)}$ olduğuna göre, Z sayısının esas argümenti kaç derecedir?

- A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 100

19. $Z = \sqrt{3} - i$ karmaşık sayısı orijin etrafında negatif yönde ne kadar döndürülürse $-\sqrt{3} - i$ karmaşık sayısı elde edilir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{7\pi}{6}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$



DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 13

KARMAŞIK SAYILAR (KARMA)

1. $i^{-6} + i^{-7} + i^{-8} + i^{-9} + i^{-10}$ toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2i$ B) -1 C) i D) 0 E) 1

2. $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f(Z) = Z - 2i$$

$$g(Z) = |Z + 2 + 3i|.i \text{ fonksiyonları veriliyor.}$$

Buna göre, $(g \circ f)(1 + 3i)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{5}i$ B) $5i$ C) $\sqrt{3}i$ D) $3i$ E) $5\sqrt{5}i$

3. $P(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$ olduğuna göre, $P(3i + 2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $12 + 27i$ B) $12 + 81i$ C) $-12 + 8i$
D) $81i$ E) $-81i$

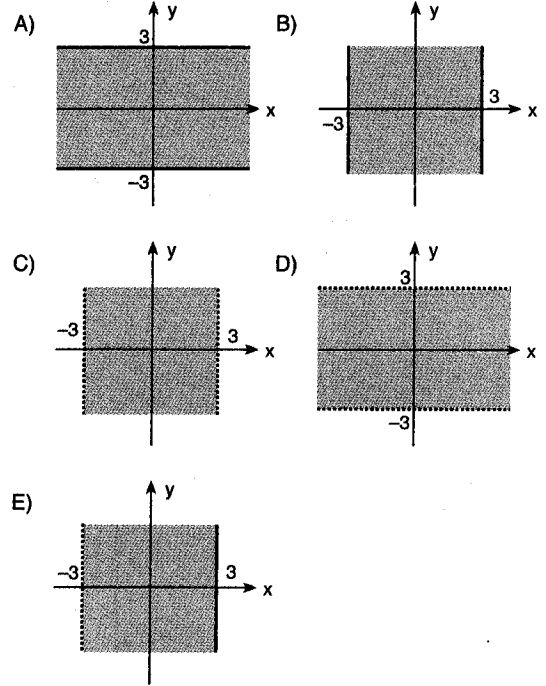
4. $Z = \frac{i^{-39} + i^{-41}}{i^{-41} - i^{-43}}$ olduğuna göre, Z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

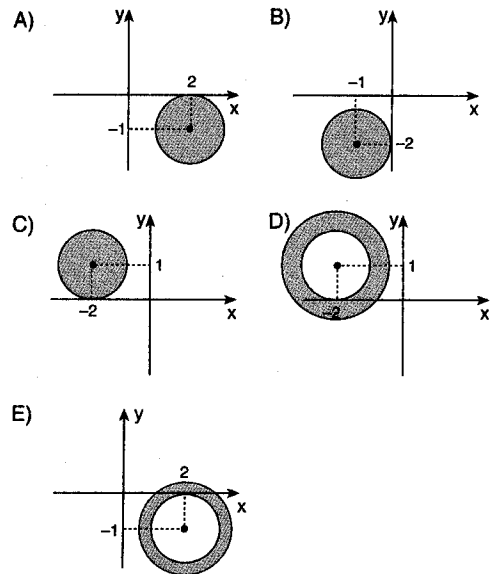
5. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{18}{25} - \frac{24}{25}i$ B) $\frac{3}{16} + \frac{12}{16}i$ C) $\frac{11}{9} - \frac{3}{19}i$
D) $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}i$ E) $\frac{9}{11} - \frac{4}{11}i$

6. $|\operatorname{Re}(Z)| \leq 3$ koşuluna uygun Z karmaşık sayılarının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



7. $|Z - i + 2| \leq 1$ koşulunu sağlayan Z karmaşık sayılarının görüntüleri aşağıdakilerden hangisidir?



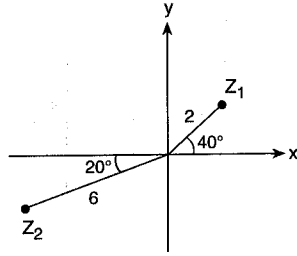
8. $Z = \sqrt{3} + i$ karmaşık sayısı orijin etrafında pozitif yönde 210° döndürüldüğünde aşağıdaki karmaşık sayılardan hangisi elde edilir?

A) $-\sqrt{3} - i$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $1 - \sqrt{3}i$
D) $-1 - \sqrt{3}i$ E) $1 + \sqrt{3}i$

9. $Z_1 = 6\text{cis}110^\circ$ ve $Z_2 = 3\text{cis}50^\circ$ olduğuna göre, $\frac{Z_1}{Z_2}$ nin reel kısmı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

10. $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $-6 - 6\sqrt{3}i$ B) $6\sqrt{3} - 6i$ C) $6\sqrt{3} + 6i$
D) $6 + 6\sqrt{3}i$ E) $12 - 12\sqrt{3}i$

11. $\text{Arg}(Z - 1) = \frac{2\pi}{3}$ denklemini sağlayan Z karmaşık sayılardan biri sanal eksen üzerinde olduğuna göre, bu sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{3}i$ B) $-i$ C) i D) $\sqrt{3}i$ E) $2\sqrt{3}i$

12. $Z = 2\sqrt{3} - 2i$ sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\text{cis}105^\circ$ B) $2\text{cis}210^\circ$ C) $4\text{cis}165^\circ$
D) $4\text{cis}210^\circ$ E) $2\text{cis}345^\circ$

13. $Z = -8$ sayısının küpköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 - \sqrt{3}i$ B) $2i$ C) $\sqrt{3} - i$ D) 2 E) $-2i$

14. $|Z_1 + 1 - 3i| \leq 2$ ve $|Z_2 - 3 - 3i| \leq 3$ eşitsizliklerini sağlayan Z_1 ve Z_2 karmaşık sayıları için $|Z_1 - Z_2|$ nin en büyük değeri kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

15. $|Z - 2 + 2i| \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan Z karmaşık sayılarından orijine en uzak olanının esas argümenti kaç derecedir?

A) 300 B) 315 C) 320 D) 330 E) 345

16. $Z = 1 - \cos 220^\circ + i \sin 220^\circ$ karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?

A) 110 B) 220 C) 290 D) 320 E) 340

17. $Z_1 = 8\text{cis}170^\circ$ ile $Z_2 = 15\text{cis}260^\circ$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 17 B) 15 C) $10\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{6}$ E) 12

18. $Z = 5\text{cis}50^\circ$ olduğuna göre, $\text{Arg}(Z^{-1})$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 310 B) 250 C) 210 D) 150 E) 110



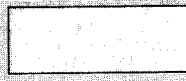
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

MATEMATİK ÇKS - KARMAŞIK SAYILAR - ÖDEV TESTLERİ YANIT ANAHTARI

Test - 1	1.B	2.C	3.D	4.E	5.A	6.C	7.B	8.C	9.B	10.E	11.A	12.E	13.B	14.D	15.D	16.D	17.B	18.E	19.C	20.B
Test - 2	1.C	2.B	3.C	4.C	5.A	6.D	7.A	8.C	9.C	10.C	11.D	12.D	13.C	14.D	15.C	16.A	17.E	18.A	19.B	20.D
Test - 3	1.D	2.E	3.A	4.B	5.B	6.B	7.A	8.C	9.D	10.C	11.A	12.D	13.A	14.A	15.D	16.E	17.E	18.D	19.A	20.D
Test - 4	1.D	2.C	3.E	4.D	5.B	6.C	7.D	8.C	9.C	10.B	11.A	12.D	13.D	14.A	15.D	16.B	17.A	18.C	19.B	20.E
Test - 5	1.C	2.E	3.A	4.B	5.B	6.C	7.C	8.B	9.D	10.B	11.B	12.B	13.D	14.B	15.C	16.E	17.C			
Test - 6	1.C	2.C	3.A	4.D	5.B	6.C	7.B	8.E	9.C	10.C	11.A	12.B	13.E	14.E	15.E	16.D	17.C			
Test - 7	1.D	2.C	3.C	4.A	5.C	6.C	7.D	8.E	9.A	10.C	11.A	12.A	13.C	14.E	15.D	16.A	17.C			
Test - 8	1.C	2.A	3.B	4.E	5.D	6.A	7.B	8.D	9.B	10.E	11.C	12.C	13.E	14.C	15.B	16.B	17.D	18.A	19.E	
Test - 9	1.A	2.E	3.D	4.E	5.E	6.A	7.C	8.D	9.C	10.C	11.E	12.D	13.A	14.D	15.D	16.E	17.D	18.C	19.A	20.B
Test - 10	1.A	2.E	3.A	4.A	5.C	6.E	7.D	8.C	9.C	10.C	11.C	12.E	13.E	14.D	15.E	16.A	17.B	18.E	19.D	
Test - 11	1.D	2.A	3.C	4.E	5.B	6.B	7.D	8.D	9.B	10.E	11.E	12.B	13.A	14.A	15.E	16.E	17.A	18.A	19.A	
Test - 12	1.B	2.B	3.D	4.D	5.D	6.C	7.D	8.D	9.C	10.D	11.E	12.A	13.B	14.B	15.A	16.A	17.D	18.A	19.B	
Test - 13	1.B	2.B	3.E	4.C	5.A	6.B	7.C	8.D	9.D	10.A	11.D	12.E	13.A	14.D	15.B	16.E	17.A	18.A		