% 100 YGS

Matematik

Konu Anlatım Seti

3

Mantık
Kümeler
Kartezyen Çarpım, Bağıntı
Fonksiyon
İşlem
Modüler Aritmetik
Permütasyon, Kombinasyon, Olasılık

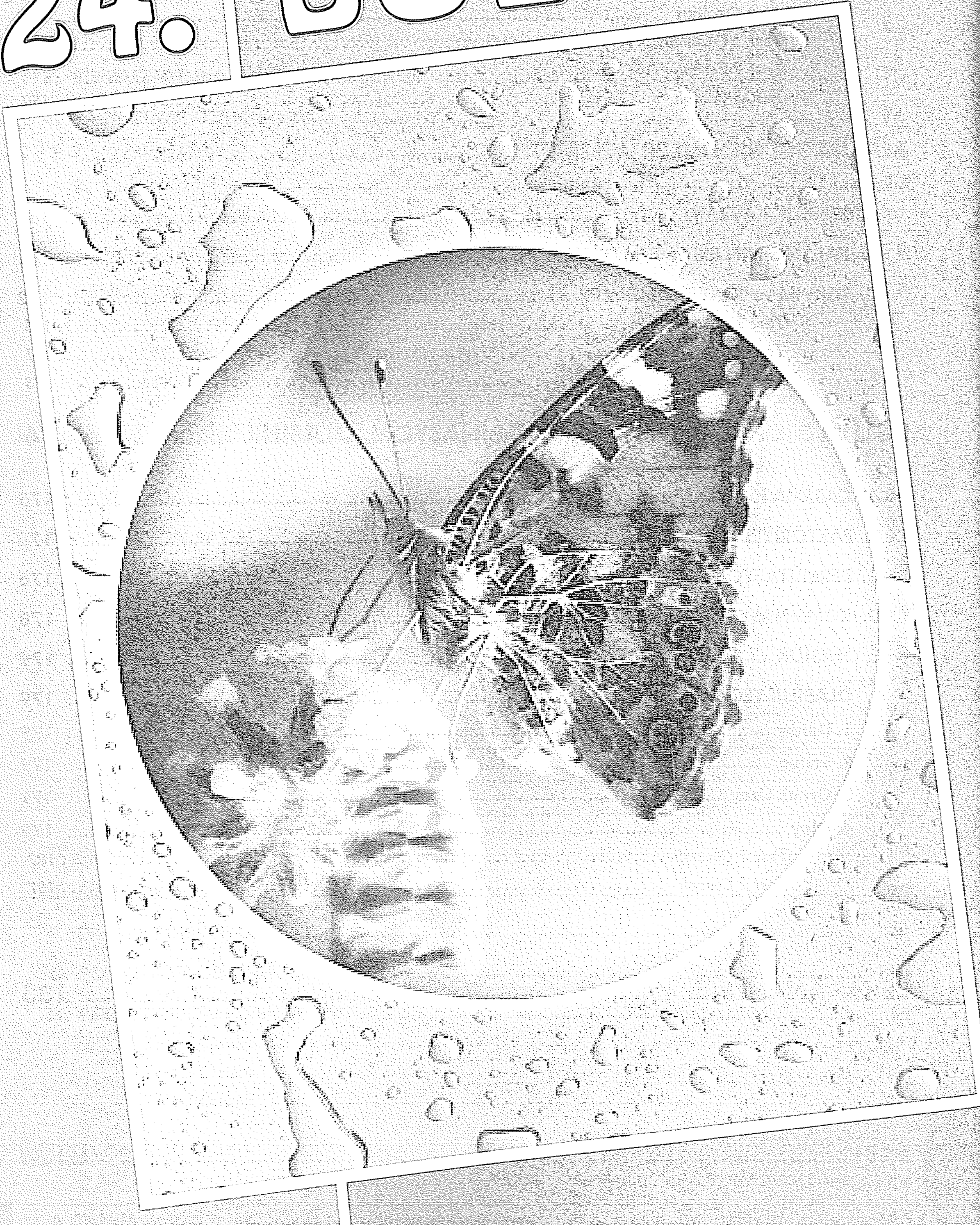
BASKI - BASKI
GÜNCELLENMİŞ
BASKI - BASKI

Hüseyin TOBİ
Bekir TANFER
İbrahim TOKAR
Mehmet TÜRKKAN
Hüseyin KÖSE
Hüseyin TUNÇ
Mustafa KIRIKÇI
Ali ÇAKMAK
Alparslan ERDEL
Erman DEĞİRMENCİ

GÜVENDER
YAYINLARI

İÇİNDEKİLER

24. BÖLÜM



Mantık

A. ÖNERMELER MANTIĞI

1. Önermeler

Matematikte doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir. Önermeler p, q, r, s, t ... gibi harflerle isimlendirilir.

Örneğin, p : "2 + 3 = 5" ifadesi doğru bir hüküm bildirdiğinden önermedir.

"Bugün nasılsınız?" ifadesi bir hüküm bildirmediğinden önerme değildir.

2. Önermenin Doğruluk Değeri

Bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunu ifade eden 1 ve 0 sembollerine o önermenin doğruluk değeri; doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya doğruluk tablosu denir.

Bir önerme doğru hüküm bildiriyorsa bu önermenin doğruluk değeri 1 veya D ile; yanlış hüküm bildiriyorsa doğruluk değeri 0 veya Y ile gösterilir.

Örneğin, p : "12 doğal sayıdır. " önermesi doğru hüküm bildirdiğinden p önermesinin doğruluk değeri 1 dir.

Örneğin, q : "Bir hafta 4 gündür. " önermesi yanlış hüküm bildirdiğinden q önermesinin doğruluk değeri 0 dır.

Kural

Bir önerme için 2^1, iki önerme için 2^2, üç önerme için 2^3, ..., n önerme için 2^n farklı doğruluk durumu vardır.

Uygulama

Herhangi iki p ve q önermesi için kaç doğruluk değeri olduğunu bulup doğruluk tablosunu yapalım.

p	q	
		p ve q önermeleri için;
1	1	p doğru iken q doğru,
1	0	p doğru iken q yanlıştır.
0	1	p yanlış iken q doğru,
0	0	p yanlış iken q yanlıştır.

Buna göre, p ve q ile gösterilen iki önermenin doğruluk değerinin birbirine göre alabileceği 4 farklı durum vardır.

3. İki Önermenin Denkliği

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk önermeler denir. p ve q önermelerinin birbirine denk olması $p \equiv q$ şeklinde gösterilir. Denk olmaması $p \not\equiv q$ şeklinde gösterilir.

Örnek .. 1

p : "$5^3 = 15$"

q : "$12 - 2 = 10$"

r : "Türkiye'nin başkenti İstanbul'dur."

önermelerinin denkliğini inceleyelim.

Çözüm

p, q ve r önermelerinden; p ve r önermeleri yanlış olduğundan $p \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ dır.

q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir.

$p \equiv 0$, $r \equiv 0$ olduğundan $p \equiv r$

$p \equiv 0$, $q \equiv 1$ olduğundan $p \not\equiv q$

$r \equiv 0$, $q \equiv 1$ olduğundan $r \not\equiv q$ dur.

4. Önermenin Olumsuzu (Değili)

Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak oluşturulan yeni önermeye bu önermenin olumsuzu (değili) denir.

Bir p önermesinin olumsuzu p' şeklinde gösterilir.

- Herhangi bir p önermesi için $p \equiv 1$ iken $p' \equiv 0$,
  $p \equiv 0$ iken $p' \equiv 1$ dir.
- Bir p önermesinin değilinin değili kendisine denktir. Sembolik olarak $(p')' \equiv p$ biçiminde gösterilir.

Uygulama

p : "$3 + 4 = 7$"

önermesinin olumsuzu p' : "$3 + 4 \neq 7$" olur. p' önermesi yanlış olduğundan $p' \equiv 0$ dır.

Uygulama

p : "$5 > 10$"

önermesinin olumsuzu p' : "$5 \leq 10$" olur. p' önermesi doğru olduğundan $p' \equiv 1$ dir.

B. BİLEŞİK ÖNERMELER

En az iki önermenin "veya", "ve", "ise", "ancak ve ancak" gibi işlemlerle (bağlaçlarla) birbirlerine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermelere bileşik önermeler denir.

Uygulama

p : "$3 + 2 < 4$"

q : "$1 = 2$"

olduğuna göre,

(p veya q) : "$3 + 2 < 4$ veya $1 = 2$"

(p ve q) : "$3 + 2 < 4$ ve $1 = 2$"

(p ise q) : "$3 + 2 < 4$ ise $1 = 2$"

(p ancak ve ancak q) : "$3 + 2 < 4$ ancak ve ancak $1 = 2$" olur.

1. Veya Bağlacı (∨ Bağlacı)

p ile q önermesinin veya bağlacıyla bağlanmış p veya q bileşik önermesi $p \vee q$ biçiminde gösterilir.

$p \vee q$ bileşik önermesi, bileşenlerden en az birisi doğru iken doğru, her ikisi yanlış iken yanlıştır.

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$1 \vee 1 \equiv 1$

$1 \vee 0 \equiv 1$

$0 \vee 1 \equiv 1$

$0 \vee 0 \equiv 0$ dır.

Uygulama

p : "$3 + 2 < 4$"

q : "$3 = 3$"

olduğuna göre,

p önermesi yanlış olduğundan $p \equiv 0$ dır.

q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir.

(p veya q) : "$3 + 2 < 4$ veya $3 = 3$"

$(p \vee q)$: "$3 + 2 < 4 \vee 3 = 3$"

$p \vee q \equiv 0 \vee 1$

$\equiv 1$ dir.

2. Ve Bağlacı (∧ Bağlacı)

p ile q önermesi ve bağlacıyla bağlanmış ise p ve q bileşik önermesi $p \wedge q$ biçiminde gösterilir.

$p \wedge q$ bileşik önermesi, bileşenlerin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$1 \wedge 1 \equiv 1$

$1 \wedge 0 \equiv 0$

$0 \wedge 1 \equiv 0$

$0 \wedge 0 \equiv 0$ dır.

Örnek .. 2

$p \wedge q' \equiv 1$

olduğuna göre, p ile q önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$p \wedge q'$ bileşik önermesi her iki önerme doğru iken doğrudur.

Buna göre, $p \wedge q' \equiv 1$ ise $p \equiv 1$, $q' \equiv 1$ olmalıdır.

$q' \equiv 1$ ise $q \equiv 0$ dır.

Buna göre, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ dır.

3. ∨ İle ∧ Bağlaçlarının Özellikleri

- $p \vee p \equiv p$ (Tek kuvvet özelliği)
- $p \wedge p \equiv p$ (Tek kuvvet özelliği)
- $p \vee q \equiv q \vee p$ (∨ nın değişme özelliği)
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (∧ nin değişme özelliği)
- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (∨ nın birleşme özelliği)
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (∧ nin birleşme özelliği)

∧ nin ∨ üzerine dağılma özelliği:

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$

∨ nın ∧ üzerine dağılma özelliği:

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$

Uygulama

△ $p \vee 1 \equiv 1$

△ $p \wedge 1 \equiv p$

$p \vee 0 \equiv p$

$p \wedge 0 \equiv 0$

Örnek .. 3

$p \vee [(p \vee 1) \vee (p \wedge 0)]$

önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

∨ ve ∧ bağlacının özelliklerinden

$p \vee 1 \equiv 1$ ve $p \wedge 0 \equiv 0$ dır.

Buna göre,

$p \vee [(p \vee 1) \vee (p \wedge 0)] \equiv p \vee [1 \vee 0]$

$\equiv p \vee 1$

$\equiv 1$ olur.

4. De Morgan Kuralları

p ve q önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

Bu kurallara De Morgan kuralları denir.

Uygulama

p	q	p'	q'	p ∨ q	(p ∨ q)'	p' ∧ q'
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Yukarıdaki tabloya göre, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğu görülmektedir.

Örnek .. 4

$(p \wedge q) \vee (1 \wedge q)$

bileşik önermesinin olumsuzunu (değilini) **bulalım.**

Çözüm

$[(p \wedge q) \vee (1 \wedge q)]' \equiv (p \wedge q)' \wedge (1 \wedge q)'$

$\equiv (p' \vee q') \wedge (0 \vee q')$

$\equiv (p' \wedge 0) \vee q'$

$\equiv 0 \vee q'$

$\equiv q'$ olur.

C. KOŞULLU ÖNERME

İse Bağlacı ($\Rightarrow$)

p ve q önermeleri için, ise bağlacı ile bağlanmış iki önerme $p \Rightarrow q$ biçiminde gösterilir ve bu bileşik önermeye koşullu önerme denir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesi, bileşenlerden birincisi (p) doğru, ikincisi (q) yanlış olduğunda yanlış; diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$

$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$

$0 \Rightarrow 1 \equiv 1$

$0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ dir.

Uygulama

"Bugün pazartesi ise yarın salıdır."

bileşik önermesi bir koşullu önermedir.

Örnek .. 5

p : "2 = 1"

q : "$3^3 = 27$"

önermeleri için $p \Rightarrow q$ bileşik önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \Rightarrow q$: "2 = 1 ise $3^3 = 27$" olur.

p önermesi yanlış olduğundan $p \equiv 0$ dır.

q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir.

Buna göre,

$p \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 1$

$\equiv 1$ dir.

a. Koşullu Önermenin Karşıtı

$p \Rightarrow q$ önermesinde p ve q önermelerinin yerleri değiştirilerek elde edilen önermeye $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı denir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$ olarak gösterilir.

Uygulama

"Yağmur yağıyor ise hava soğuktur." önermesinde

p : "Yağmur yağıyor."

q : "Hava soğuktur."

olsun.

Bu durumda, $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıtı olan $q \Rightarrow p$ önermesi

"Hava soğuk ise yağmur yağıyordur." olur.

b. Koşullu Önermenin Tersi

$p \Rightarrow q$ önermesinde p ve q önermelerinin olumsuzları alınarak elde edilen önermeye $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi denir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ olarak gösterilir.

Uygulama

"Yağmur yağıyor ise hava soğuktur." önermesinde

p : "Yağmur yağıyor."

q : "Hava soğuktur."

olsun.

p : "Yağmur yağıyor."

p' : "Yağmur yağmıyor."

q : "Hava soğuktur."

q' : "Hava soğuk değildir."

Bu durumda, $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin tersi

$p' \Rightarrow q'$: "Yağmur yağmıyor ise hava soğuk değildir." olur.

c. Koşullu Önermenin Karşıt Tersi

$p \Rightarrow q$ önermesinde p ve q önermelerinin hem olumsuzları alınıp hem de yerleri değiştirildiğinde elde edilen önermeye $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi denir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ olarak gösterilir.

Uygulama

"Yağmur yağıyor ise hava soğuktur." önermesinde

p : "Yağmur yağıyor."

q : "Hava soğuktur."

olsun.

p : "Yağmur yağıyor."

p' : "Yağmur yağmıyor."

q : "Hava soğuktur."

q' : "Hava soğuk değildir."

Bu durumda, $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıt tersi olan $q' \Rightarrow p'$ önermesi "Hava soğuk değil ise yağmur yağmıyordur." olur.

Uygulama

$p \Rightarrow q$ ve $q' \Rightarrow p'$ nün doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ dür.

Sonuç

p ve q önermeleri için,

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ dür.

Yani, koşullu önermenin doğruluk değeri daima karşıt tersinin doğruluk değerine eşittir.

Uygulama

Aşağıdaki doğruluk tablosunu inceleyiniz.

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ dur.

Sonuç

Her p ve q önermesi için $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ dur.

Uygulama

$(p \Rightarrow q) \vee p \equiv (p' \vee q) \vee p$

$\equiv (p' \vee p) \vee q$

$\equiv 1 \vee q$

$\equiv 1$

Uygulama

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$

$\equiv (p')' \wedge q'$

$\equiv p \wedge q'$

Örnek .. 6

p, q ve r önermelerinin değilleri sırasıyla p', q', r' ile gösterildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi

$p \vee q \Rightarrow q \wedge r$

önermesine denktir?

A) $p' \wedge q' \Rightarrow q' \vee r'$

B) $p' \wedge q' \Rightarrow q' \wedge r'$

C) $p' \vee q' \Rightarrow q' \wedge r'$

D) $q' \wedge r' \Rightarrow p' \vee q'$

E) $q' \vee r' \Rightarrow p' \wedge q'$

(YGS 2010)

Çözüm

1. Yol

$(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \vee q)' \vee (q \wedge r)$

$\equiv (p' \wedge q') \vee (q \wedge r)$

$\equiv (q \wedge r) \vee (p' \wedge q')$

$\equiv (q' \vee r')' \vee (p' \wedge q')$

$\equiv (q' \vee r') \Rightarrow (p' \wedge q')$

2. Yol

Koşullu önerme daima karşıt tersine denktir. Buna göre, verilen önermenin karşıt tersini bulalım:

$(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (q \wedge r)' \Rightarrow (p \vee q)'$

$\equiv (q' \vee r') \Rightarrow (p' \wedge q')$

Cevap E

D. İKİ YÖNLÜ KOŞULLU ÖNERME

1. Ancak ve Ancak Bağlacı ($\Leftrightarrow$)

p ve q önermeleri için, ancak ve ancak bağlacı ile bağlanmış iki önerme $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterilir ve bu bileşik önermeye iki yönlü koşullu önerme denir.

$p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesi, bileşenlerden biri doğru, diğeri yanlış olduğunda yanlış; diğer durumlarda doğrudur.

Buna göre, $p \Leftrightarrow q$ nun tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$

$1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$

$0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$

$0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$ dir.

Uygulama

"7 = 7 ancak ve ancak 2 < 3 "

"7 = 7" $\Leftrightarrow$ "2 < 3 "

bileşik önermesi iki yönlü koşullu önermedir.

Uygulama

p : "1 – 2 = 0", q : "–2 tam sayıdır."

olsun.

$p \Leftrightarrow q$: "1 – 2 = 0 ancak ve ancak –2 tam sayıdır."

olur.

p önermesi yanlış olduğundan $p \equiv 0$ dır.

q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir.

Buna göre, $p \Leftrightarrow q \equiv 0 \Leftrightarrow 1$

$\equiv 0$ dır.

Uygulama

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Tablodan anlaşılacağı üzere,

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ dur.

Sonuç

$p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerinin $\wedge$ bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önerme $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterilir.

- $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ dur.

Uygulama

$p \Leftrightarrow p$ ile $p \Leftrightarrow 0$ ın doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	p'	0	$p \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow 0$
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

Sonuç

p, herhangi bir önerme olmak üzere,

- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$

olur.

2. Gerektirme

$p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri 1 ise, bu koşullu önermeye gerektirme denir.

$p \Rightarrow q \equiv 1$ olduğunda p önermesi q önermesini gerektiriyor denir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinde,

p önermesi q önermesi için yeter koşul,

q önermesi p önermesi için gerek koşuldur.

Uygulama

$(p \wedge q') \Rightarrow p \equiv (p \wedge q')' \vee p$

$\equiv [p' \vee (q')'] \vee p$

$\equiv (p' \vee q) \vee p$

$\equiv (p' \vee p) \vee q$

$\equiv 1 \vee q$

$\equiv 1$

olduğuna göre, $(p \wedge q') \Rightarrow p$ önermesi bir gerektirmedir.

3. Çift Gerektirme

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri 1 ise, bu koşullu önermeye çift gerektirme denir.

$p \Leftrightarrow q$ çift gerektirmesinde p ile q birbirinin gerek ve yeter koşuludur.

Uygulama

p	q	p'	$p' \Leftrightarrow q$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

olduğuna göre, $p' \Leftrightarrow q$ nün doğruluk değeri daima 1 değildir. Bu durumda $p' \Leftrightarrow q$ çift gerektirme değildir.

E. TOTOLOJİ ve ÇELİŞKİ

1. Totoloji

Doğruluk değeri daima 1 olan önermelere totoloji denir.

Uygulama

$p \vee p'$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

Buna göre, $p \vee p' \equiv 1$ olur. Bu durumda $p \vee p'$ önermesi bir totolojidir.

2. Çelişki

Doğruluk değeri daima 0 olan önermelere çelişki denir.

Uygulama

$p \wedge p'$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

Buna göre, $p \wedge p' \equiv 0$ olur. Bu durumda $p \wedge p'$ önermesi bir çelişkidir.

F. AÇIK ÖNERMELER

1. Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkenin aldığı değerlere göre doğru ya da yanlış hüküm bildiren önermelere açık önerme denir.

İçinde x değişkeni olan açık önermeler p(x) sembolü ile, içinde x ve y değişkeni olan önermeler p(x, y) sembolü ile gösterilir.

Uygulama

p(x) : "x + 4 = 12, $x \in \mathbb{Z}$" bir değişkenli,

p(x, y) : "x + y = 20 ve x, $y \in \mathbb{N}$" iki değişkenli açık önermedir.

Uygulama

p(x) : "x – 1 = 20" olduğuna göre,

x = 1 için, p(1) : "1 – 1 = 20" olur. $1 - 1 \neq 20$

olduğundan p(1) yanlıştır ve doğruluk değeri 0 dır.

$P(1) \equiv 0$

x = 21 için, p(21) : "21 – 1 = 20" olur. 21 – 1 = 20

olduğundan p(21) doğrudur ve doğruluk değeri 1 dir.

$P(21) \equiv 1$

2. Doğruluk Kümesi

Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine açık önermenin doğruluk kümesi denir.

Doğruluk kümesi genellikle D sembolü ile gösterilir.

Uygulama

$p(x)$: "$x < 3,\ x \in \mathbb{N}$"

açık önermesi x in 3 ten küçük doğal sayı sayı değerleri için doğrudur. Bu durumda, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ değerleri için doğruluk değeri 1 dir.

Buna göre, doğruluk kümesi, $D = \{0, 1, 2\}$ olur.

Uygulama

$p(x, y)$: "$x + y = 3,\ x, y \in \mathbb{N}$"

olmak üzere, toplamı 3 olan doğal sayı ikilileri verilen iki değişkenli açık önermeyi sağlar.

(0, 3), (3, 0), (2, 1), (1, 2) ikililerinden herbirinin birinci eleman ile ikinci elemanı toplamı 3 tür.

Buna göre, $p(x, y)$ açık önermesinin doğruluk kümesi, $D = \{(0, 3), (3, 0), (2, 1), (1, 2)\}$ olur.

G. NİCELEYİCİLER

Önüne geldiği elemanların çokluğunu (niceliğini) gösteren bazı ve her sözcüklerine niceleyiciler denir.

"Bazı" niceleyicisi, en az bir tane anlamına gelir. $\exists$ sembolü ile gösterilir. Bu niceleyiciye varlıksal niceleyici denir.

"Her" niceleyicisi, bütün anlamına gelir. $\forall$ sembolü ile gösterilir. Bu niceleyiciye evrensel niceleyici denir.

Uygulama

"Bazı doğal sayılar 2 den küçüktür."

"$\exists x \in \mathbb{R}$ için, $3 \cdot x < 6$"

önermeleri birer varlıksal niceleyici içerir.

Uygulama

"Her doğal sayı –1 den büyüktür."

"$\forall x \in \mathbb{R}$ için, $x^2 < 0$"

önermeleri birer evrensel niceleyici içerir.

Uygulama

$p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 < 16$" önermesinde

karesi 16 dan küçük olan doğal sayılar 0, 1, 2 ve 3 tür.

Bu önermeyi sağlayan en az bir x değeri vardır.

Bu önerme varlıksal niceleyici ($\exists$) sembolü ile ifade edildiğinden doğru bir önermedir.

Buna göre, $p(x) \equiv 1$ dir.

Uygulama

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 < 16$"

olmak üzere, bu önermeyi her doğal sayı sağlamaz.

Bu önerme evrensel niceleyici ($\forall$) sembolü ile ifade edildiğinden doğru bir önerme değildir.

Buna göre, $p(x) \equiv 0$ dır.

Niceleyicinin olumsuzu

Bazı niceleyicisinin olumsuzu her niceleyicisi,

her niceleyicisinin olumsuzu bazı niceleyicisidir.

Sembolik olarak ifade edilirse

$[\forall x,\ P(x)]' \equiv \exists x,\ P'(x)$

$[\exists x,\ P(x)]' \equiv \forall x,\ P'(x)$ olur.

Uygulama

"Bazı tam sayılar negatiftir." önermesinin olumsuzu "Her tam sayı negatif değildir." önermesidir.

Uygulama

"Her pazartesi günü okula giderim." önermesinin olumsuzu "Bazı pazartesi günleri okula gitmem." önermesidir.

Uygulama

"$\exists x \in \mathbb{N},\ 2x < 4$" önermesinin olumsuzu,

"$\forall x \in \mathbb{N},\ 2x \geq 4$" önermesidir.

Uygulama

Bazı sembollerin olumsuzunu aşağıda tablo ile gösterilmiştir.

Sembol	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	$=$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
Olumsuzu	$\exists$	$\forall$	$\vee$	$\wedge$	$\neq$	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$

H. TANIM, AKSİYOM, TEOREM ve İSPAT

1. Tanım

Tanımlı ya da tanımsız terimler yardımıyla yeni bir terimin açıklanmasına o terimi tanımlamak denir.

Örneğin; "doğal sayılar kümesi; 0, 1, 2, 3 .... elemanlarından oluşan kümedir."

"Bir aracın belirli bir sürede aldığı yola o aracın hızı denir."

ifadeleri tanımlanmış birer terimdir.

2. Aksiyom

Doğruluğu ispat etmeye gerek duyulmadan kabul edilen önermelere aksiyom denir.

Örneğin; "Her x gerçek sayısı için $x = x$ tir."

"Farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer."

"$x = y$ ise $y = x$ tir."

önermeleri birer aksiyomdur.

3. Teorem ve İspat

Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere teorem denir.

Bir teorem, hipotez ve hükümden oluşur.

Teoremin verilen kısmına hipotez, ispatlanacak olan kısmına hüküm denir.

Diğer bir ifadeyle, $p \Rightarrow q$ teoreminde p ye hipotez q ya hüküm denir.

➩ Bir teoremde hem hipotezin hem de hükmün doğru olması gerekir.

Bir teoremin hipotezi (p) doğru iken, hükmünün de (q) doğru olduğunu göstermeye teoremin ispatı denir.

I. İSPAT YÖNTEMLERİ

Teoremleri ispatlamanın çeşitli yöntemleri vardır.

Bir teorem en genel anlamda tümdengelim veya tümevarım yöntemleriyle ispatlanır.

1. Doğrudan İspat Yöntemi

$p \Rightarrow q$ teoreminde p nin doğruluğundan hareket ederek q nun doğruluğunu elde etmeye yarayan ispat yöntemine doğrudan ispat yöntemi denir.

2. Olmayana Ergi Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoremini doğrudan ispat yöntemi ile ispat yerine, teoremin karşıt tersini ispatlamaya dayanan ispat yöntemine olmayana ergi yöntemi ile ispat denir.

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden yararlanarak $p \Rightarrow q$ yerine $q' \Rightarrow p'$ teoremi ispatlanır.

3. Çelişki Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoreminin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$ nun değilinin yanlış olduğunu göstermeye dayanan ispat yöntemine çelişki yöntemi ile ispat denir.

$p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$

$\equiv p \wedge q'$

$\equiv 0$ dır.

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $p \wedge q' \equiv 0$ (önermenin değili) olduğu gösterilmelidir.

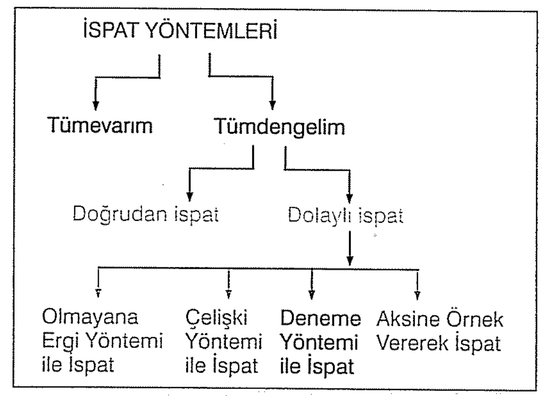
4. Deneme Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoremi, değişkenin farklı değerleri için yerine yazılarak doğruluğuna bakılmasına deneme yöntemi ile ispat denir.

5. Aksine Örnek Vererek İspat

Verilen önermenin doğru olmadığını gösteren en az bir örnek varsa bu önermenin yanlış olduğu ispatlanmış olur. Bu şekilde yapılan ispatlamaya aksine örnek vererek ispat yöntemi denir.

Teoremleri ispatlama yöntemleri aşağıdaki şemada gösterilmiştir.



1.

p : "2 + 10 = 3"

q : "5 + 8 < 15"

önermelerinin değilleri (olumsuzları) **aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?**

A) p' : "2 + 10 = 13", q' : "5 + 8 ≤ 15"

B) p' : "2 + 10 = 13", q' : "5 + 8 < 15"

C) p' : "2 + 10 = 13", q' : "5 + 8 ≥ 15"

D) p' : "2 + 10 ≠ 3", q' : "5 + 8 ≥ 15"

E) p' : "2 + 10 ≠ 3", q' : "5 + 8 > 15"

2.

p : "5 + 4 ≤ 9"

q : "7 + 8 < 15"

r : "En küçük asal sayı 2 dir."

önermelerinin doğruluk değerleri aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) p ≡ 1, q ≡ 0, r ≡ 1

B) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 1

C) p ≡ 0, q ≡ 1, r ≡ 0

D) p ≡ 1, q ≡ 1, r ≡ 1

E) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 0

3.

$p \wedge q \equiv 1$

$s' \vee r' \equiv 0$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangi doğrudur?

A) p ≡ 0, q ≡ 1, r ≡ 1, s ≡ 1

B) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 1, s ≡ 1

C) p ≡ 1, q ≡ 0, r ≡ 0, s ≡ 1

D) $[p \wedge (q' \wedge r')] \vee [s \vee (r \wedge p')] \equiv 0$

E) $[p \wedge (q' \wedge r')] \vee [s \vee (r \wedge p')] \equiv 1$

4.

$p \vee (p \wedge q)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine daima denktir?

A) 1 B) 0 C) p D) q E) q'

5.

$p \wedge (p \vee q)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine daima denktir?

A) 1 B) 0 C) p D) q E) q'

6.

p : "4 < 7 ⇒ 9 < 12"

q : "$2^3 = 8 \Rightarrow 2 = 3$"

r : "5 = 8 ⇒ 13 = 13"

önermeleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) p ≡ 1, q ≡ 0, r ≡ 1

B) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 1

C) p ≡ 0, q ≡ 1, r ≡ 0

D) p ≡ 1, q ≡ 1, r ≡ 1

E) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 0

7.

$(p' \vee q') \wedge (p \vee q')$

ifadesinin <u>değili</u> aşağıdakilerden hangisine <u>daima</u> denktir?

A) 1 B) 0 C) p D) q E) q'

8.

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangi doğrudur?

A) p ≡ 0, q ≡ 1, r ≡ 1

B) p ≡ 0, q ≡ 0, r ≡ 1

C) p ≡ 1, q ≡ 0, r ≡ 1

D) $(p' \vee q) \Rightarrow [r \wedge (q' \vee p)] \equiv 0$

E) $(p' \vee q) \Rightarrow [r \wedge (q' \vee p)] \equiv 1$

9.

2 tam sayı ise 2^7 bir tam sayıdır.

önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^7 bir tam sayı değil ise 2 tam sayı değildir.

B) 2^7 bir tam sayı ise 2 tam sayı değildir.

C) 2^7 bir tam sayı değil ise 2 tam sayıdır.

D) 2 tam sayı ise 2^7 bir tam sayıdır.

E) 2 tam sayı değil ise 2^7 bir tam sayıdır.

10.

p : "$x^2 = 9$ ise (x = 3 ve x = –3)"

q : "$x^2 = 9$ ise (x = 3 veya x = –3)"

r : "$x^2 = 9$ ise x = –3"

önermelerinden hangileri gerektirmedir?

A) Yalnız p B) Yalnız q

C) Yalnız r D) p ve r

E) q ve r

11. **Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $(p \wedge q') \wedge p'$ totolojidir.

B) $(p \wedge q') \wedge p'$ çelişkidir.

C) $p \wedge q$ çelişkidir.

D) $p \vee p$ çelişkidir.

E) $p \wedge p$ totolojidir.

12.

p(x) : "$x \in \mathbb{N}$, $3 < x^2 < 50$"

açık önermesinin doğruluk kümesi D olmak üzere, s(D) kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13.

q(x, y) : "x, y ∈ $\mathbb{N}$, x + y = 4"

açık önermesinin doğruluk kümesi D olmak üzere, s(D) kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14.

p(x) : "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$"

q(x) : "$\forall x \in \mathbb{Z}_T$, $x^3 \in \mathbb{Z}_T$"

r(x) : "$\forall x \in \mathbb{A}$, $x \in \mathbb{Z}_T$"

önermelerinden hangilerinin doğruluk değeri 1 dir?($\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi, $\mathbb{Z}_T$: Tek sayılar kümesi, $\mathbb{A}$: Asal sayılar kümesi)

A) Yalnız p B) Yalnız q

C) Yalnız r D) p ve q

E) q ve r

15. p(x) : "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$", q(x) : "$\forall x \in \mathbb{Z}_T$, $x^3 \in \mathbb{Z}_T$", r(x) : "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0$" olmak üzere,

I. p'(x) : "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$"

II. q'(x) : "$\exists x \in \mathbb{Z}_T$, $x^3 \notin \mathbb{Z}_T$"

III. r'(x) : "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$"

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II

C) I ve II D) I ve III

E) I, II ve III

1.

Sembol	$=$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
Olumsuzu	$\neq$	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$

Yukarıdaki tablodan da anlaşılacağı üzere,

p : "$2 + 10 = 3$" ise p' : "$2 + 10 \neq 3$"

q : "$5 + 8 < 15$" ise q' : "$5 + 8 \geq 15$"

olur.

Cevap D

2.

$5 + 4 = 9$ ve $9 \leq 9$ olduğundan $5 + 4 \leq 9$ ifadesi doğrudur. Bu durumda $p \equiv 1$ dir.

$7 + 8 = 15$ olduğundan $15 < 15$ ifadesi yanlıştır. Bu durumda $q \equiv 0$ dır.

Asal sayılar kümesinindeki en küçük sayı 2 dir. Buna göre, "En küçük asal sayı 2 dir." ifadesi doğrudur. Bu durumda $r \equiv 1$ dir.

Cevap A

3.

$p \wedge q \equiv 1$ ise $(p \equiv 1$ ve $q \equiv 1)$ dir.

Öyleyse $p' \equiv 0$ ve $q' \equiv 0$ dır.

$s' \vee r' \equiv 0$ ise $(s' \equiv 0$ ve $r' \equiv 0)$ dır.

Öyleyse $s \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ dir.

Buna göre, A, B, C seçenekleri doğru cevap olamaz.

D ve E seçeneklerinde verilen bileşik önermeler aynı, doğruluk değerleri farklıdır. Bulduğumuz p, q, r, s değerlerini D - E seçeneğinde verilen bileşik önermede yerine yazarsak;

$[(p \wedge (q' \wedge r')] \vee [s \vee (r \wedge p')]$

$\equiv [1 \wedge (0 \wedge 0)] \vee [1 \vee (1 \wedge 0)]$

$\equiv (1 \wedge 0) \vee (1 \vee 0)$

$\equiv 0 \vee 1$

$\equiv 1$ olur.

Bu durumda E seçeneğinde verilen ifade doğrudur.

Cevap E

4.

$p \equiv p \wedge 1$ denkliğini kullanırsak,

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge 1) \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \wedge (1 \vee q)$

$\equiv p \wedge 1$

$\equiv p$ elde edilir.

Cevap C

5.

$p \equiv p \vee 0$ denkliğini kullanırsak,

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee 0) \wedge (p \vee q)$

$\equiv p \vee (0 \wedge q)$

$\equiv p \vee 0$

$\equiv p$ elde edilir.

Cevap C

6.

$4 < 7$ ifadesi doğru olduğundan doğruluk değeri 1 dir.

$9 < 12$ ifadesi doğru olduğundan doğruluk değeri 1 dir.

Buna göre, p : "$4 < 7 \Rightarrow 9 < 12$" nin doğruluk değeri

$(1 \Rightarrow 1) \equiv 1$ dir.

$2^3 = 8$ ifadesi doğru olduğundan doğruluk değeri 1 dir.

$2 = 3$ ifadesi yanlış olduğundan doğruluk değeri 0 dır.

Buna göre, q : "$2^3 = 8 \Rightarrow 2 = 3$" ün doğruluk değeri

$(1 \Rightarrow 0) \equiv 0$ dır.

$5 = 8$ ifadesi yanlış olduğundan doğruluk değeri 0 dır.

$13 = 13$ ifadesi doğru olduğundan doğruluk değeri 1 dir.

Buna göre, r : "$5 = 8 \Rightarrow 13 = 13$" ün doğruluk değeri

$(0 \Rightarrow 1) \equiv 1$ dir.

Bu durumda, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ dir.

Cevap A

7.

$(p' \vee q') \wedge (p \vee q')$ ifadesinin değili,

$[(p' \vee q') \wedge (p \vee q')]'$

$\equiv (p' \vee q')' \vee (p \vee q')'$ (De Morgan kuralı)

$\equiv (p \wedge q) \vee (p' \wedge q)$

$\equiv (p \vee p') \wedge q$

$\equiv 1 \wedge q$

$\equiv q$ dur.

Cevap D

8.

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ ise $[p \equiv 1$ ve $(q \vee r) \equiv 0]$ dır.

Bu durumda, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ dır.

Buna göre, A, B, C seçenekleri doğru cevap olamaz.

$p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$, $q \equiv 0$ ise $q' \equiv 1$ dir.

D ve E seçeneklerinde verilen bileşik önermeler aynı, doğruluk değerleri farklıdır. Bulduğumuz p, q, r değerlerini D - E seçeneğinde verilen bileşik önermede yerine yazarsak;

$(p' \vee q) \Rightarrow [r \wedge (q' \vee p)] \equiv (0 \vee 0) \Rightarrow [0 \wedge (1 \vee 1)]$

$\equiv 0 \Rightarrow [0 \wedge 1]$

$\equiv 0 \Rightarrow 0$

$\equiv 1$ olur.

Bu durumda E seçeneğinde verilen ifade doğrudur.

Cevap E

9.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin **karşıt tersi** $q' \Rightarrow p'$ koşullu önermesidir.

Buna göre,

2 tam sayı ise 2^7 bir tam sayıdır.

önermesinin karşıt tersi

2^7 bir tam sayı değil ise 2 tam sayı değildir.

olur.

Cevap A

10.

$r \Rightarrow s$ önermesinin doğruluk değeri daima 1 ise, bu koşullu önermeye **gerektirme** denir. Buna göre,

$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$, $0 \Rightarrow 1 \equiv 1$, $0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ denklikleri birer gerektirmedir.

I. p : "$x^2 = 9$ ise $(x = 3$ ve $x = -3)$" olmak üzere,

$x = 3$ olduğunda

$x^2 = 9$ doğru, $(x = 3$ ve $x = -3)$ yanlış olur.

$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olduğundan p gerektirme değildir.

II. q : "$x^2 = 9$ ise $(x = 3$ veya $x = -3)$" olmak üzere,

$x \neq \pm 3$ olduğunda

$x^2 = 9$ yanlış, $(x = 3$ veya $x = -3)$ yanlış olur.

$0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olduğundan $q \equiv 1$ dir.

$x = \pm 3$ olduğunda

$x^2 = 9$ doğru, $(x = 3$ veya $x = -3)$ doğru olur.

$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olduğundan $q \equiv 1$ dir.

q önermesinin doğruluk değeri daima 1 olduğundan bir gerektirmedir.

III. r : "$x^2 = 9$ ise $x = -3$" olmak üzere,

$x = 3$ olduğunda

$x^2 = 9$ doğru, $x = -3$ yanlış olur.

$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olduğundan r gerektirme değildir.

Buna göre, verilenlerden yalnız q gerektirmedir.

Cevap B

11.

Kendisini oluşturan önermelerin bütün doğruluk değerlerine karşılık daima doğru (1) olan bileşik önermeye **totoloji**, daima yanlış (0) olan bileşik önermeye ise **çelişki** denir.

B seçeneğinde verilen ifadeyi inceleyelim:

$(p \wedge q') \wedge p' \equiv (p \wedge p') \wedge q'$

$\equiv 0 \wedge q'$

$\equiv 0$

olduğuna göre, $(p \wedge q') \wedge p'$ çelişkidir.

$p \wedge q$, $p \vee p$, $p \wedge p$ önermelerine daima doğru ya da daima yanlış denilemeyeceği için bunlar totoloji ya da çelişki değillerdir.

Cevap B

12.

x doğal sayı ve $3 < x^2 < 50$ ise x; 2, 3, 4, 5, 6, 7 dir.

Buna göre,

$p(x)$: "$x \in \mathbb{N},\ 3 < x^2 < 50$"

ise

$p(0) \equiv 0,$

$p(1) \equiv 0,$

$p(2) \equiv 1,$

$p(3) \equiv 1,$

$p(4) \equiv 1,$

$p(5) \equiv 1,$

$p(6) \equiv 1,$

$p(7) \equiv 1,$

$p(8) \equiv 0,$

$p(9) \equiv 0,$

...

olur.

Bu durumda p açık önermesinin doğruluk kümesi

$D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $s(D) = 6$ dır.

Cevap B

13.

$q(x, y)$: "$x, y \in \mathbb{N},\ x + y = 4$"

olmak üzere, toplamları 4 olan doğal sayı ikilileri verilen iki değişkenli açık önermeyi sağlar.

$0 + 4,\ 1 + 3,\ 2 + 2,\ 3 + 1,\ 4 + 0$ toplamlarının her biri 4 e eşit olduğundan

$q(0, 4) \equiv q(1, 3) \equiv q(2, 2) \equiv q(3, 1) \equiv q(4, 0) \equiv 1$

olur. Buna göre, q açık önermesinin doğruluk kümesi

$D = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ ve $s(D) = 5$ olur.

Cevap A

14.

"$\forall x$, p(x)" önermesinin doğru olması için, kümedeki bütün x değerlerinin p(x) önermesini doğrulaması gerekir. p(x) i doğrulamayan en az bir x varsa "$\forall x$, p(x)" önermesi yanlış olur.

Buna göre,

Her reel sayının karesi sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür. Bu durumda

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$", $p(x) \equiv 1$ dir.

Bütün tek sayıların küpü tektir. Bu durumda

$q(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}_T,\ x^3 \in \mathbb{Z}_T$", $q(x) \equiv 1$ dir.

2 hem çift (tek sayı değil) hem de asal sayıdır. Bu durumda

$r(x)$: "$\forall x \in \mathbb{A},\ x \in \mathbb{Z}_T$", $r(x) \equiv 0$ dır.

Cevap D

15.

Bazı sembollerin olumsuzu aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir.

Sembol	$\forall$	$\exists$	$=$	$\neq$	$\geq$
Olumsuzu	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$=$	$<$

Buna göre,

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$" ve $p'(x)$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$"

olduğuna göre, soruda verilen I. ifade doğrudur.

$q(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}_T,\ x^3 \in \mathbb{Z}_T$" ve $q'(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}_T,\ x^3 \notin \mathbb{Z}_T$"

olduğuna göre, soruda verilen II. ifade doğrudur.

$r(x)$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$" ve $r'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \neq 0$"

olduğuna göre, soruda verilen III. ifade doğrudur.

Cevap E

1.

$p \equiv 1$

$q \equiv 0$

olduğuna göre, aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0 dır?

A) $(p')'$ B) $p' \vee q'$ C) $p \wedge q'$ D) $p' \vee q$ E) $q' \vee p$

2. Aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi totolojidir?

A) $p \wedge p'$ B) $p' \vee q'$ C) $p \vee q$ D) $p \vee p'$ E) $p' \wedge q'$

3.

$p \vee (q \wedge p')$

önermesinin olumsuzu (değili) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $p' \wedge q'$ B) $p' \vee q'$ C) $p' \wedge q$ D) $p \wedge q'$ E) 0

4. Aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi çelişkidir?

A) $p \Rightarrow p$ B) $p \Rightarrow p'$ C) $p \vee p$ D) $p \wedge p$ E) $p \wedge p'$

5.

$(p' \wedge q)' \equiv 0$

olduğuna göre, aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

A) p B) $p' \vee q$ C) $p' \wedge q'$ D) $q \wedge p$ E) $q' \vee p$

6.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q' \wedge (p \Rightarrow q)$
1	0	A	
1	1		B
0	1	C	
0	0		D

Yukarıdaki tablo doğru olarak doldurulduğunda A, B, C, D yerine sırasıyla aşağıdakilerden hangisi gelir?

A) 0, 1, 1, 1 B) 0, 0, 0, 1 C) 0, 1, 0, 1 D) 0, 0, 1, 1 E) 0, 0, 1, 0

7. "Topkapı sarayına gidersem hünkar mahfilini ziyaret ederim."

koşullu önermesinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Topkapı sarayına gitmezsem hünkar mahfilini ziyaret etmem.

B) Topkapı sarayına gider, hünkar mahfilini ziyaret ederim.

C) Hünkar mahfilini ziyaret edersem Topkapı sarayına giderim.

D) Hünkar mahfilini ziyarete gitmezsem Topkapı sarayına gitmem.

E) Topkapı sarayına gidersem hünkar mahfilini ziyaret etmem.

1. **Aşağıdakilerden hangisi bir önerme <u>değildir</u>?**

A) Ay, dünyamızın bir uydusudur.

B) 1 saat 60 dakikadır.

C) Ayağa kalkınız, lütfen!

D) 5 asal sayıdır.

E) $2 + 2 > 3 + 4$

2.

p : "$2 \leq 3$"

q : "$(-3)^2 = -9$"

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) p': "$2 > 3$"   B) q': "$(-3)^2 \neq -9$"

C) $p \wedge q \equiv 1$ D) $p \vee q \equiv 1$

E) $q' \equiv 1$

3.

$p(x)$: "$x \cdot (x^2 - 9) = 0, x \in \mathbb{Z}$"

açık önermesinin doğruluk kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$ B) $\{-3, 1\}$ C) $\{-3, 0\}$

D) $\{-3, -1, 0\}$ E) $\{-3, 0, 3\}$

4.

$(x+1=3) \Rightarrow (x^2 = 4)$

koşullu önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $(x^2 = 4) \vee (x + 1 = 3)$

B) $(x^2 \neq 4) \vee (x + 1 = 3)$

C) $(x^2 = 4) \vee (x + 1 \neq 3)$

D) $(x^2 \neq 4) \Rightarrow (x + 1 = 3)$

E) $(x + 1 \neq 3) \Leftrightarrow (x^2 \neq 4)$

5.

$[(p \wedge q) \vee p]'$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1   B) q   C) p

D) 0   E) p'

6.

$(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow (p \Rightarrow 1)$

koşullu önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) p'   B) p   C) 0

D) 1   E) $p' \Rightarrow p$

7.

$p(x, y, z)$: "$x + y + z = 0$"

$p(1, -2, a) \equiv 1$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0   B) 1   C) 2   D) 3   E) 4

8.

I. $(x^2 = 9) \Rightarrow (x = -3)$

II. $(x = -2) \Rightarrow (x^2 = 4)$

III. $(x^2 = 16) \Leftrightarrow (x = 4 \ \vee x = -4)$

Yukarıdakilerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?

A) Yalnız I   B) Yalnız II   C) Yalnız III

D) I ve II   E) II ve III

9.

$p' \Rightarrow (p' \vee q)$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) p   B) 0   C) p'

D) 1   E) q'

10.

$(\exists x, x + 1 \geq 0) \Rightarrow (\forall x, x^2 + 4 > 0)$

koşullu önermesinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\exists x, x^2 + 4 \leq 0) \Rightarrow (\exists x, x + 1 \geq 0)$

B) $(\forall x, x + 1 < 0) \Rightarrow (\exists x, x^2 + 4 \leq 0)$

C) $(\exists x, x + 1 \geq 0) \Rightarrow (\forall x, x^2 + 4 \leq 0)$

D) $(\forall x, x + 1 < 0) \Rightarrow (\exists x, x^2 + 4 > 0)$

E) $(\exists x, x^2 + 4 > 0) \Rightarrow (\exists x, x + 1 \geq 0)$

11.

p : "Barış başarılıdır."

q : "Barış sağlıklıdır."

önermeleri veriliyor.

Buna göre, $q' \Rightarrow p$ önermesi aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) Barış başarılı değildir ve Barış sağlıklı değildir.

B) Barış başarılı değildir veya Barış sağlıklıdır.

C) Barış başarılı değildir veya Barış sağlıklı değildir.

D) Barış başarılıdır veya Barış sağlıklı değildir.

E) Barış başarılı veya sağlıklıdır.

12.

$[(p' \Leftrightarrow q') \vee (p \Leftrightarrow q)]$

bileşik önermesinin doğruluk değerini bulmak için başka bir bilgiye gerek var mıdır, varsa bu bilgi aşağıdakilerden hangisidir?

A) p nin doğruluk değerinin verilmesi gerekir.

B) Başka bir bilgiye gerek yoktur.

C) q nun doğruluk değerinin verilmesi gerekir.

D) $p \vee p$ nin doğruluk değerinin verilmesi gerekir.

E) $p \Leftrightarrow q$ nun doğruluk değerinin verilmesi gerekir.

13.

p : "Sevgi spor yapar"

q : "Sevgi çalışkandır."

önermeleri veriliyor.

Buna göre, $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) Sevgi spor yapmaz ise çalışkan değildir.

B) Sevgi spor yapmaz ise çalışkandır.

C) Sevgi çalışkan ise spor yapar.

D) Sevgi çalışkan değilse spor yapmaz.

E) Sevgi çalışkan değilse spor yapar.

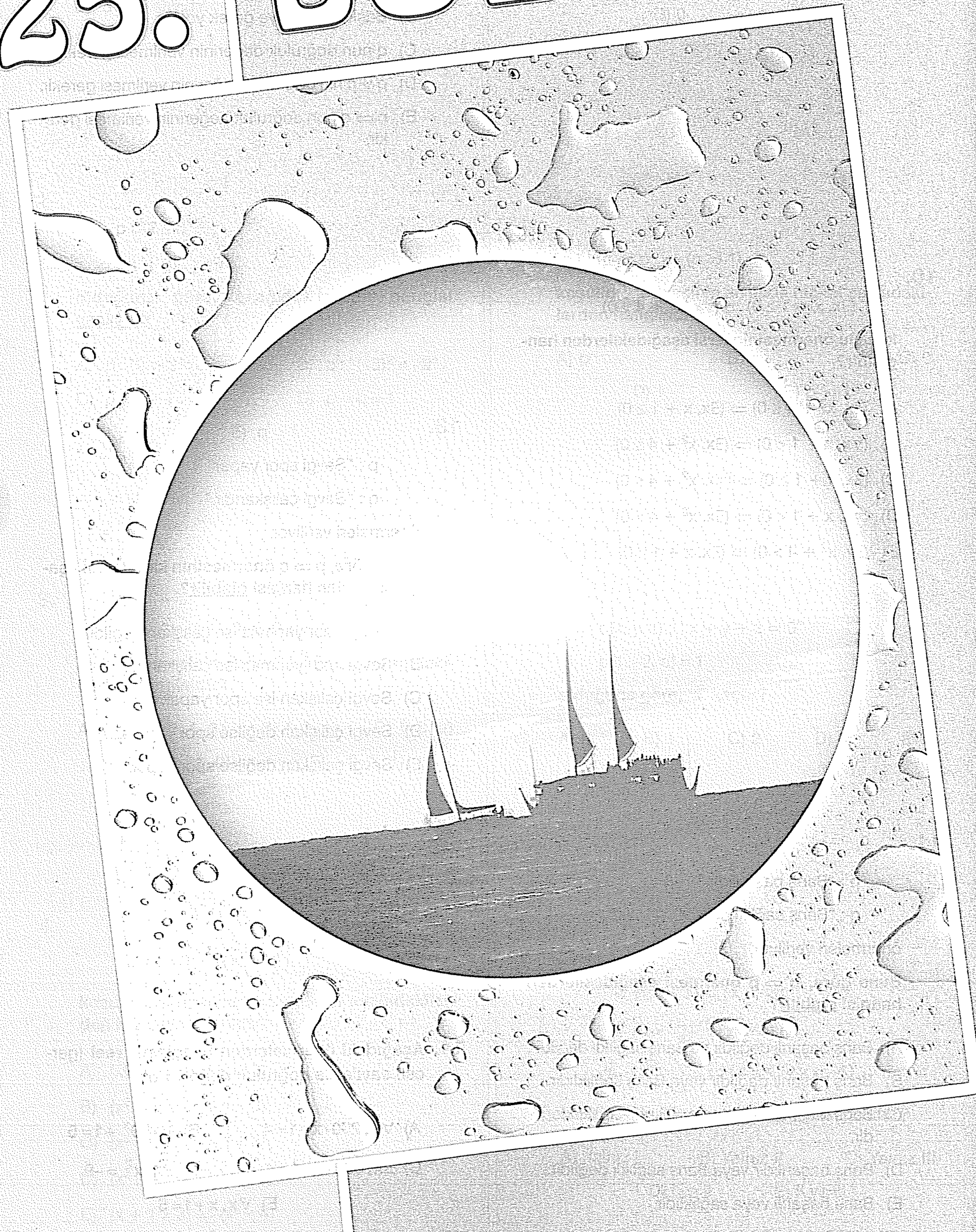
14. **Aşağıdaki önermelerden hangisinin reel (gerçel) sayılarda doğruluk değeri 1 dir?**

A) $\forall x, 200 \cdot x + 1 = 4$ B) $\forall x, 9^x + 1 = 5$

C) $\exists x, 300 \cdot x - 1 = 4$ D) $\exists x, x^2 = -9$

E) $\forall x, x + 1 = 5$

25. BÖLÜM



Kümeler

A. TANIM

Nesnelerin iyi tanımlanmış bir listesine küme denir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine eleman denir.

Küme; A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösterilir.

Kümenin elemanları;

a, b, c gibi küçük harflerle, 1, 2, 3 gibi sayılarla, △, ☐, ○, ☆ gibi sembollerle, Ali, Veli, Cem gibi isimlerle gösterilir.

A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

x nesnesi A kümesinin elemanı ise $x \in A$ biçiminde gösterilir ve "x, A kümesinin elemanıdır." diye okunur.

x nesnesi A kümesinin elemanı değil ise $x \notin A$ biçiminde gösterilir ve "x, A kümesinin elemanı değildir." diye okunur.

Uyarı

Kümenin elamanlarının yerini değiştirmek, kümeyi değiştirmez. Kümede bir eleman bir defa yazılır.

Uygulama

A = {a, ▽, Ali, 9, 10}

kümesini inceleyelim:

A = {a, ▽, Ali, 9, 10}

A kümesinin elemanlarından biri a dır. Bu durumda

$a \in A$ dır.

A kümesinin elemanları içinde 5 yoktur. Bu durumda

$5 \notin A$ dır.

A kümesinin elemanları a, ▽, Ali, 9, 10 olup beş tanedir. Bu durumda,

s(A) = 5 tir.

B. KÜMENİN GÖSTERİLİŞİ

10 dan küçük olan pozitif çift sayıların kümesini üç ayrı yöntemle gösterelim. Göstereceğimiz küme A olsun.

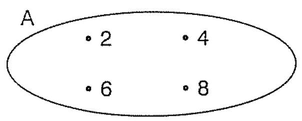
1. Liste Yöntemi

10 dan küçük olan pozitif çift sayılar, 2, 4, 6, 8 dir. Buna göre, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dir.

2. Ortak Özellik (Genelleme) Yöntemi

$A = \{x \mid x$, 10 dan küçük pozitif çift sayı$\}$

3. Şema Yöntemi



Bu temsil biçimi bulucusunun adıyla, Venn gösterimi olarak adlandırılır.

Örnek .. 1

$$M = \{x \mid 3x < 25 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$$

olduğuna göre, s(M) kaçtır?

Çözüm

M kümesi, 3 katı 25 ten küçük olan doğal sayılardan oluşmaktadır.

Bu koşula uyan doğal sayılar; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dir.

Yani, $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ olur.

Buna göre, $s(M) = 9$ dur.

C. EŞİT KÜMELER

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir.

A kümesinin B kümesine eşitliği $A = B$ biçiminde gösterilir.

Örnek .. 2

$A = \{x : |x| \leq 2 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x^2 \leq 4 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

kümelerinin eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm

$x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$|x| \leq 2$ ise, $-2 \leq x \leq 2$ olduğu için,

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir.

$x^2 \leq 4$ ise, $-2 \leq x \leq 2$ olduğu için,

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir.

Buna göre, A ile B kümesi eşittir. Yani $A = B$ dir.

D. DENK KÜME

Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir.

A kümesinin B kümesine denkliği $A \equiv B$ biçiminde gösterilir.

Uyarı

Eşit olan kümeler denktir. Fakat denk olan kümeler eşit olmayabilir.

Örnek .. 3

$P = \{0, 2, 4, 6\}$

$Q = \{x \mid x$, 7 den küçük çift doğal sayılar$\}$

$R = \{x \mid 1 < x < 7,\ x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $P = R$ B) $P = Q$ C) $Q \equiv R$

D) $s(Q) = 6$ E) $s(Q) = s(R)$

Çözüm

$P = \{0, 2, 4, 6\}$ ve $s(P) = 4$,

$Q = \{0, 2, 4, 6\}$ ve $s(Q) = 4$,

$R = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(R) = 5$

olduğuna göre, P kümesi Q kümesine eşittir. Bu durumda $P = Q$ dur.

Cevap B

E. SONLU KÜME, SONSUZ KÜME

Eleman sayısı bir doğal sayıya eşit olan küme sonludur.

Eleman sayısı bir doğal sayıyla gösterilemeyen küme sonsuzdur.

Uygulama

$T = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$s(T) = 8 \in \mathbb{N}$

olmak üzere, T kümesinin elemanları sayısı bir doğal sayıya eşittir.

Bu durumda, T kümesi sonlu bir kümedir.

Uygulama

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi sonlu bir kümedir.

$s(A) = 4 \in \mathbb{N}$ dir.

Uygulama

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ kümesinin elemanları sayısı bir doğal sayı ile gösterilemez.

Bunun için, $\mathbb{Z}$ sonsuz bir kümedir.

Uygulama

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesi sonsuz kümedir.

$s(\mathbb{Z}^+) = \infty \notin \mathbb{N}$ dir.

F. BOŞ KÜME

Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme { } veya $\varnothing$ şeklinde gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı 0 (sıfır) dır.

Örnek .. 4

$A = \{x \mid x^2 = -5,\ x \in \mathbb{R}\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım:

$x \in \mathbb{R}$ için, $x^2 \geq 0$ olduğundan, $x^2 = -5$ denklemini sağlayan hiçbir reel sayı yoktur. Buna göre, $A = \varnothing$ dir.

A kümesi boş küme olduğu için, $s(A) = 0$ dır.

Uyarı

$A = \{\varnothing\}$ ise, $s(A) = 1$ dir. Bu küme boş küme değildir.

Örnek .. 5

Aşağıdaki kümelerden hangisi boş kümedir?

A) $\{\varnothing\}$

B) $\{x \mid x$ asal sayı ve x çift sayı$\}$

C) $\{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

D) $\{x \mid 7x - 21 = 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$

E) $\{x \mid 5x - 19 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm

Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan $x^2 + 1 > 0$ dır.

Bunun için $x^2 + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan hiçbir reel sayı yoktur.

Buna göre, C seçeneğindeki küme $\varnothing$ dir.

Cevap C

Örnek .. 6

$A = \{x : 25 < x^2 < 32 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x : x^2 + 4 = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$

$C = \{x : |x| = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

kümelerinden hangileri boş kümedir?

A) Yalnız A B) A ile B C) B ile C

D) Yalnız B E) A ile C

Çözüm

$A = \{x : 25 < x^2 < 32 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x : x^2 + 4 = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$

$C = \{x : |x| = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

kümelerini inceleyelim:

Karesi 25 ten büyük 32 den küçük olan doğal sayı yoktur. Yani, $A = \{\ \} = \varnothing$ dir.

$x^2 + 4 = 0$ ise $x^2 = -4$ tür.

Hiç bir gerçel sayının karesi negatif olamaz. Bunun için, $x^2 = -4$ koşuluna uygun gerçel sayı yoktur.

Buna göre, $B = \{\ \} = \varnothing$ dir.

$|x| = 0$ ise $x = 0$ dır.

Buna göre, $C = \{0\}$ olur. Bu durumda A ile B boş kümedir.

Cevap B

G. ALT KÜME

Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir.

B kümesinde olup A kümesinde olmayan en az bir eleman varsa "B kümesi A kümesinin alt kümesi değildir" denir. B kümesinin A kümesinin alt kümesi değilse $B \not\subset A$ biçiminde gösterilir ve "A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir." diye okunur.

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise, "B kümesi A kümesini kapsar" denir ve $B \supset A$ biçiminde gösterilir.

Örnek .. 7

$A = \{1, 2, 3\}$

kümesinin alt kümelerini bulalım:

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümeleri,

$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ olmak üzere 8 tanedir.

Uyarı

1) Her küme kendisinin alt kümesidir. $(A \subset A)$
2) Boş küme her kümenin alt kümesidir. $(\varnothing \subset A)$

Örnek .. 8

$A = \{a, b, c, \{ad\}, \{abd\}\}$ kümesi veriliyor.

I. $s(A) = 5$

II. $\{ad\} \in A$

III. $\{a, c\} \subset A$

olduğuna göre, yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız III D) I, II ve III E) Yalnız II

Çözüm

A kümesi; $a, b, c, \{ad\}, \{abd\}$ elemanlarından oluşmaktadır. Buna göre,

✓ $s(A) = 5$ tir.

✓ $\{ad\} \in A$ dır.

✓ $\{a, c\} \subset A$ dır.

Bu durumda, verilenlerden, I, II ve III doğrudur.

Cevap D

Uyarı

$\subseteq$ sembolü ilköğretim ve ortaöğretim müfredatında yer almamaktadır. Bu sembol yabancı kaynaklarda, akademik kitaplarda yer almakta ve üniversitelerin matematik bölümlerinde öğretilmektedir.

Bu sembolün kullanıldığı kaynaklarda, "$A \subset A$" yanlış, "$A \subseteq A$" doğru bir gösterimdir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

✓ $\{1, 2, 3\} \subset A$ dır.

✓ $\{1, 2, 3\} \subseteq A$ dır.

✓ $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$ dır.

Uygulama

$\{1\} \subseteq K \subseteq \{1, 2, 3\}$

koşulunu sağlayan 4 tane K kümesi yazılabilir. Bunlar,

$K = \{1\}, K = \{1, 2\}, K = \{1, 3\}, K = \{1, 2, 3\}$ olabilir.

Uyarı

Yukarıdaki uyarı ve iki uygulamada verilenler ilköğretim ve ortaöğretim müfredatında yer almamaktadır.

Biz, bu bilgiye değil müfredata bağlı kalacağız. Yani, $A \subset A$ bilgisinin doğru olduğunu kabul edeceğiz.

Alt Kümeye Ait Bazı Özellikler

1) $(A \subset B$ ve $B \subset A)$ ise, $A = B$ dir.
2) $(A \subset B$ ve $B \subset C)$ ise, $A \subset C$ dir.
3) n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı, 2^n dir.
4) $n \geq r$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}^{r\text{ tane çarpan}}}{r!} \text{ dir.}$$

Örnek .. 9

$A = \{\varnothing, a, \{b\}, c, \{dc\}\}$

kümesinin alt küme sayısını bulalım.

Çözüm

A kümesinin eleman sayısı 5 olduğu için,

A kümesinin alt kümelerinin sayısı, $2^5 = 32$ dir.

Örnek .. 10

Bir basamaklı asal sayılardan oluşan kümenin alt küme sayısı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm

Bir basamaklı asal sayıların kümesi:

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ dir.

$s(A) = 4$ olduğuna göre, bu kümenin alt küme sayısı;

$2^4 = 16$ dır.

Cevap D

Örnek .. 11

$A = \{x : x \leq 4$ ve $x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x : x^2 = 4$ ve $x \in \mathbb{R}\}$

$C = \{x : |x| < 3$ ve $x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $B \subset A$ B) $C \subset B$ C) $B \subset C$ D) $A \subset C$ E) $C \subset A$

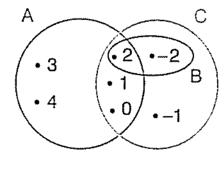
Çözüm

Verilen kümeleri liste yöntemiyle yazıp, Venn şemasıyla gösterelim:

$A = \{x : x \leq 4$ ve $x \in \mathbb{N}\}$ ise $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.

$B = \{x : x^2 = 4$ ve $x \in \mathbb{R}\}$ ise $B = \{-2, 2\}$ olur.

$C = \{x : |x| < 3$ ve $x \in \mathbb{Z}\}$ ise $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olur.



Görüldüğü gibi, B nin her elemanı C nin de elemanıdır. Buna göre, $B \subset C$ dir.

Cevap C

Örnek .. 12

$A = \{1, 2, \triangle, 4, 5\}$

kümesinin, alt kümelerinin kaç tanesinde $\triangle$ elemanı olabileceğini bulalım.

Çözüm

Alt kümelerde $\triangle$ elemanı bulunacağı için diğer elemanlardan oluşan $\{1, 2, 4, 5\}$ kümesinin elemanları ile $2^4 = 16$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin herbirine $\triangle$ elemanı eklenerek, istenen şartlarda 16 tane alt küme yazılabilir.

$\{1, 2, 4, 5\}$ kümesinin alt kümeleri,

$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, 2, 4, 5\}$ olur.

Bunların her birine $\triangle$ yazılırsa:

$\{\triangle\}, \{1, \triangle\}, \{2, \triangle\}, \ldots, \{1, 2, \triangle, 4, 5\}$ kümeleri elde edilir. Bunlar, $\{1, 2, \triangle, 4, 5\}$ kümesinin $\triangle$ elemanına sahip olan alt kümeleridir. Bunların sayısı, $\{1, 2, 4, 5\}$ kümesinin alt küme sayısına yani 16 ya eşittir.

Örnek .. 13

6 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısını bulalım.

Çözüm

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 2\cdot 1} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ tir.}$$

Örnek .. 14

A = {a, b, c, d, e, f}

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunur?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 16

Çözüm

A kümesinden a elemanını atarsak, {b, c, d, e, f} kümesini elde ederiz.

5 elemanı olan {b, c, d, e, f} kümesiyle 3 elemanlı alt kümeler oluşturup, sonra da bu alt kümelere a elemanını dahil etmeliyiz.

5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı,

$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10 \text{ dur.}$$

Bu alt kümelerin herbirine a elemanını dahil edelim.

Böylece istenen koşula uygun 10 değişik alt küme yazabiliriz.

Cevap D

Örnek .. 15

K = {a, b, c, d, e, f, g, h}

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde g bulunur; ama h bulunmaz?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 20

Çözüm

İstenen koşullara uygun 4 elemanlı alt kümeleri oluşturmak için K kümesinden g ile h elemanlarını atıp, kalan elemanlarla üç elemanlı alt kümeler oluşturmalıyız. Oluşan alt kümelerin hepsine g elemanı yazılırsa istenen koşulları sağlayan alt kümeler elde edilir.

g ile h elemanı dışında 6 eleman olduğuna göre, 6 elemanlı kümenin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı istenen cevap olacaktır.

Buna göre, K kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin,

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{(6-3)!\cdot3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=20$$

tanesinde g bulunur, fakat h bulunmaz.

Cevap E

Kural

n elemanlı bir kümenin x elemanlı alt kümelerinin sayısı, y elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit ise,

x + y = n dir.

Örnek .. 16

Bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir.

Buna göre, bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

5 elemanlı alt kümelerinin sayısı 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olduğuna göre, bu kümenin eleman sayısı, 5 + 3 = 8 dir.

H. ÖZ ALT KÜME

Bir kümenin kendisinden farklı alt kümelerine bu kümenin öz alt kümeleri denir.

Örnek .. 17

B = {a, b, c}

kümesinin alt kümelerini ve özalt kümelerini yazalım.

Çözüm

B nin alt kümeleri:

{ }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} dir.

B nin özalt kümeleri:

{ }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c} dir.

Örnek .. 18

A = {1, 2}

kümesinin öz alt kümelerini bulalım.

Çözüm

A = {1, 2} kümesinin öz alt kümeleri,

∅, {1}, {2}

olmak üzere 3 tanedir.

Sonuç

n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı,

$2^n - 1$ dir.

Örnek .. 19

63 tane öz alt kümesi olan bir kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Bu kümenin eleman sayısı n olsun. Buna göre,

$2^n - 1 = 63$

$2^n = 64$

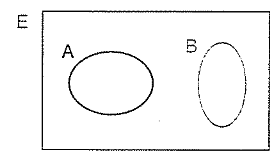
$2^n = 2^6$ ise,

$n = 6$ dır.

I. EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan, bütün kümeleri kapsayan kümeye evrensel küme denir.

Evrensel küme genellikle E harfi ile gösterilir.



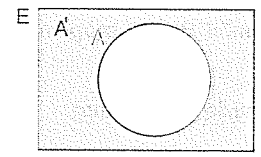
A ve B kümelerini kapsayan E kümesi, bu iki küme için evrensel kümedir. Şekilde verilenlere göre,

$A \subset E$ ve $B \subset E$ dir.

J. BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ

$A \subset E$ olsun, E evrensel kümesinde olup da A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir. A' ile ya da $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$A' = \overline{A} = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$$



Taralı (boyalı) bölge A kümesinin tümleyenidir.

Örnek .. 20

E, evrensel küme olmak üzere,

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

A = {1, 3, 5, 7}

olduğuna göre, A' kümesini bulalım.

Çözüm

Evrensel kümede olup, A kümesinde olmayan elemanlar, 2, 4, 6, 8 dir.

Buna göre, A kümesinin tümleyeni, A' = {2, 4, 6, 8} dir.

Tümlemenin Bazı Özellikleri

1) Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisidir. Buna göre, $(A')' = A$ olur.
2) Evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir. Buna göre, $E' = \emptyset$ olur.
3) Boş kümenin tümleyeni evrensel kümedir. Buna göre, $\emptyset' = E$ olur.
4) Bir kümenin eleman sayısı ile o kümenin tümleyeninin eleman sayısı toplamı evrensel kümenin eleman sayısına eşittir. Buna göre, $s(A) + s(A') = s(E)$ olur.
5) $A \subset B$ ise, $B' \subset A'$ dır.
6) $B' \subset A'$ ise, $A \subset B$ dir.

Örnek .. 21

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

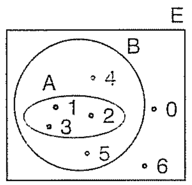
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

olduğuna göre, $B' \subset A'$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

Bu kümeleri şema yöntemi ile gösterelim:



Verilenlere (Şemaya) göre,

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A' = \{0, 4, 5, 6\}$

$B' = \{0, 6\}$ dır.

B' kümesindeki her eleman A' kümesinde olduğu için B' kümesi A' kümesinin alt kümesidir.

Bu durumda, $B' \subset A'$ dir.

$B' \subset A'$ ise, $A \subset B$ dir.

$A \subset B$ ise, $B' \subset A'$ dir.

Örnek .. 22

Evrensel küme gerçel sayılar kümesi olmak üzere,

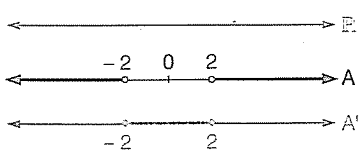
$A = \{x : |x| > 2, x \in \mathbb{R}\}$

olduğuna göre, A' kümesini bulalım.

Çözüm

$|x| > 2$ ise, $(x > 2$ veya $x < -2)$ dir.

A kümesi ve A' kümesi aşağıdaki sayı doğrularında koyu ve kalın çizgi ile gösterilmiştir.



Buna göre,

$A = \{x : |x| > 2, x \in \mathbb{R}\}$ ise,

$A' = \{x : |x| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$

olur.

Örnek .. 23

E, bir evrensel küme ve $A \subset E$, $B \subset E$ olmak üzere,

$s(A) + s(B') = 19$

$s(A') + s(B) = 13$

olduğuna göre, s(E) yi bulalım.

Çözüm

Verilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{array}{rl} & s(A)+s(B')=19 \\ + & s(A')+s(B)=13 \\ \hline & \underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)}+\underbrace{s(B)+s(B')}_{s(E)}=19+13 \end{array}$$

$2s(E)=32$

$s(E)=16$ olur.

Örnek .. 24

A, B ve C kümeleri için evrensel küme E olmak üzere,

$s(A) + s(B') = 8$

$s(A') + s(B) = 10$

$s(C') = 5$

olduğuna göre, s(C) kaçtır?

A) 4 B) 9 C) 13 D) 18 E) 23

Çözüm

Verilen ilk iki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rl} & s(A)+s(B')=8 \\ + & s(A')+s(B)=10 \\ \hline & \underbrace{s(A)+s(A')}_{s(E)}+\underbrace{s(B)+s(B')}_{s(E)}=18 \end{array}$$

$2 \cdot s(E)=18$

$s(E)=9 ...(\bigstar)$ dır.

$s(C) + s(C') = s(E)$ olduğuna göre,

$s(C) + 5 = 9$ ise, $s(C) = 4$ olur.

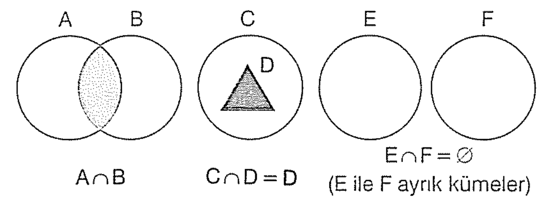
Cevap A

K. KÜMELER ÜZERİNDE YAPILAN İŞLEMLER

1. Kümelerin Kesişimi

A ile B kümelerindeki ortak elemanlardan meydana gelen kümeye A kesişim B kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ ve $x \in B\}$ dir.



Yukarıdaki şekillerde, $A \cap B$, $C \cap D$ kümeleri taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.

Örnek .. 25

$A = \{a, b, c, d\}$,

$B = \{b, d, e\}$

olduğuna göre, $A \cap B$ kümesini bulalım:

Hem A kümesinde, hem de B kümesinde bulunan elemanlar b, d dir. Buna göre, A kesişim B kümesi,

$A \cap B = \{b, d\}$ dir.

Örnek .. 26

$B = \{b, d, e\}$

$C = \{a, f\}$

olduğuna göre, $B \cap C$ kümesini bulalım:

B ile C kümesinin ortak elemanı yoktur. Bu durumda B ile C kümesinin kesişimi boş kümedir.

Buna göre, $B \cap C = \{\ \}$ dir.

Kesişimi boş küme olan kümelere "ayrık kümeler" dendiğine göre, B ile C kümeleri ayrıktır.

Örnek .. 27

A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere,

$E = \{x : x = 3k, x < 12, k \in \mathbb{N}\}$,

$A = \{3, 6\}$

$B' = \{6, 9\}$

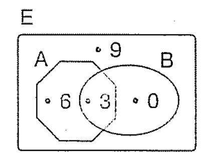
olduğuna göre, $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) { } B) {6} C) {0, 3} D) {0} E) {3}

Çözüm

$(x = 3k, k \in \mathbb{N}$ ve $x < 12)$ ise,

k nin 0, 1, 2, 3 değerlerine karşın x in alacağı değerler sırasıyla 0, 3, 6, 9 dur. Buna göre, $E = \{0, 3, 6, 9\}$ dur.



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir.

Buna göre, $A \cap B = \{3\}$ olur.

Cevap E

Örnek .. 28

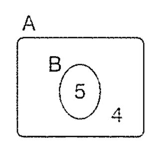
$s(A) = 9$

$s(B) = 5$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ nin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm



$B \subset A$ iken $s(A \cap B)$ en büyük olur.

Bunun için

$s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer 5 tir.

Cevap D

Örnek .. 29

$A=\{x \mid x<200,\ x=2n \text{ ve } n\in\mathbb{Z}^+\}$

$B=\{x \mid x<180,\ x=5n \text{ ve } n\in\mathbb{Z}^+\}$

olduğuna göre, $A\cap B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

Çözüm

A kümesi, 200 den küçük ve 2 nin katı olan pozitif tam sayılardan oluşmaktadır.

B kümesi, 180 den küçük ve 5 in katı olan pozitif tam sayılardan oluşmaktadır.

EKOK(2, 5) = 10 olduğu için, A da ve B de bulunan elemanlar 180 den küçük ve 10 un katı olan pozitif tam sayılardan oluşmaktadır.

Buna göre,

$A\cap B = \{10, 20, 30, ..., 170\}$ ise $s(A\cap B) = 17$ olur.

Cevap C

Örnek .. 30

$A = \{x \mid x < 300,\ x = 4k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$

$B = \{x \mid x < 350,\ x = 6k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s(A\cap B)$ kaçtır?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 25

Çözüm

$A = \{x \mid x < 300,\ x = 4k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$

$B = \{x \mid x < 350,\ x = 6k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$

A kümesindeki elemanlar 300 den küçük 4 ün katı olan pozitif tam sayılar,

B kümesindeki elemanlar 350 den küçük 6 nın katı olan pozitif tam sayılardır.

4 ile 6 nın EKOK u 12 olduğuna göre, $A\cap B$ kümesindeki elemanlar 300 den küçük 12 nin katı olan pozitif tam sayılardır.

$A\cap B = \{x \mid x < 300,\ x = 12k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 299 & 12 \\ \cline{2-2} -24 & \boxed{24} \\ \hline 59 & \\ -48 & \\ \hline 11 & \end{array}$$

olduğuna göre, 300 den küçük (300 hariç) 12 nin katı olan pozitif tam sayılar, 24 tanedir.

Cevap D

2. Kesişim İle İlgili Bazı Özellikler

1) Kesişim işleminin değişme özeliği vardır.

$A\cap B = B\cap A$

2) Kesişim işleminin birleşme özeliği vardır.

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$

3) A, E evrensel kümesinin bir alt kümesi olmak üzere,

$A\cap A = A,$

$A\cap A' = \varnothing,$

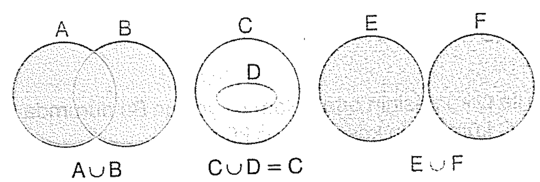
$A\cap\varnothing = \varnothing,$

$A\cap E = A$ dır.

3. Kümelerin Birleşimi

A ile B kümelerindeki bütün elemanlardan meydana gelen kümeye A birleşim B kümesi denir ve $A\cup B$ şeklinde gösterilir.

$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ veya } x\in B\}$ dir.



Yukarıdaki şekillerde, $A\cup B$, $C\cup D$, $E\cup F$ kümeleri taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.

Örnek .. 31

$A = \{a, b, c, d\},$

$B = \{b, d, e\}$

olduğuna göre, A birleşim B kümesini bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre, A kümesinde veya B kümesinde bulunan elemanlar a, b, c, d, e dir. Buna göre, A birleşim B kümesi,

$A\cup B = \{a, b, c, d, e\}$ dir.

Örnek .. 32

$B = \{b, d, e\}$

$C = \{a, f\}$

olduğuna göre, B birleşim C kümesini bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre, B kümesinde veya C kümesinde bulunan elemanlar b, d, e, a, f dir. Buna göre, B birleşim C kümesi,

$B\cup C = \{b, d, e, a, f\}$ dir.

Örnek .. 33

$K = \{b, d, e\}$

$L = \{d, e\}$

olduğuna göre, K birleşim L kümesini bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre, K kümesinde veya L kümesinde bulunan elemanlar b, d, e dir. Buna göre, K birleşim L kümesi,

$K\cup L = \{b, d, e\}$ dir.

$L\subset K$ olduğu için, $K\cup L = K$ dir.

4. Kesişim ve Birleşim İle İlgili Bazı Özellikler

1) Birleşim işleminin değişme özelliği vardır.

$A\cup B = B\cup A$

2) Birleşim işleminin birleşme özelliği vardır.

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$

3) Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

4) De Morgan kuralları:

➢ $(A\cap B)' = A'\cup B'$

➢ $(A\cup B)' = A'\cap B'$

5) A, E evrensel kümesinin bir alt kümesi olmak üzere,

$A\cup A = A,\ A\cup A' = E,\ A\cup\varnothing = A,\ A\cup E = E$ dir.

6) $s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$

7) $s(A\cup B\cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A\cap B)$
$- s(A\cap C) - s(B\cap C) + s(A\cap B\cap C)$

Örnek .. 34

A, B, C kümelerinin evrensel kümesi E olmak üzere,

$(A\cap B)\cup(A\cap C) = \varnothing$

$s(B'\cap C') = 8$

$s[(A\cup B\cup C)'] = 5$

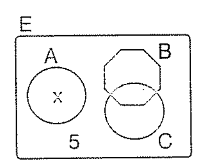
olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 13

Çözüm

E, evrensel küme ve $s(A) = x$ olsun.

$(A\cap B)\cup(A\cap C) = A\cap(B\cup C) = \varnothing$ olacak şekilde verilenlere uygun şema aşağıda verilmiştir.



$s(B'\cap C') = s[(B\cup C)']$

$= x + 5$ tir.

$s(B'\cap C') = 8$

$5 + x = 8$

ise, $x = 3$ olur.

Buradan $s(A) = x = 3$ olur.

Cevap A

Örnek .. 35

A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere,

$s(A' \cap B') = 3$

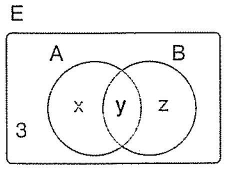
$s(A' \cup B') = 30$

$s(A) + s(B) = 47$

olduğuna göre, s(E) kaçtır?

A) 30 B) 33 C) 37 D) 40 E) 44

Çözüm



$s(A' \cap B') = s[(A \cup B)'] = 3,$

$s(A' \cup B') = s[(A \cap B)'] = 30$ dur.

Yukarıdaki şemada verilenlere göre,

$s[(A \cap B)'] = 30$

$x + z + 3 = 30$

$x + z = 27$ dir. ... (☆)

$s(A) + s(B) = 47$

$x + y + y + z = 47$

$x + z + 2y = 47$

$27 + 2y = 47$

$y = 10$ dur. ... (☆☆)

Buna göre,

$s(E) = x + z + y + 3 = 27 + 10 + 3 = 40$ tır.

Cevap D

Örnek .. 36

$s(A) = x + 2$

$s(B) = 3x - 1$

$s(A \cup B) = 2x + 5$

$A \cap B \neq \varnothing$

olduğuna göre, s(A ∪ B) <u>en az</u> kaçtır?

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

Çözüm

Verilenlere göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$2x + 5 = x + 2 + 3x - 1 - s(A \cap B)$

$s(A \cap B) = 4x + 1 - (2x + 5)$

$s(A \cap B) = 2x - 4$ ... (☆) olur.

$A \cap B \neq \varnothing$ ise, $s(A \cap B) > 0$ dır.

$2x - 4 > 0$

$x > 2$ dir.

Buradan, x en az 3 tür.

Buna göre, $s(A \cup B) = 2x + 5$ in en küçük değeri,

$s(A \cup B) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$ dir.

Cevap C

Örnek .. 37

A ve B kümeleri için evrensel küme E olmak üzere,

$(A \cup B') \cap [A \cup (A \cup B')']$

kümesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A \cup B$ B) A C) B D) A' E) E

Çözüm

1. Yol

$(A \cup B') \cap [A \cup (A \cup B')']$

$= (A \cup B') \cap [A \cup (A' \cap (B')')]$

$= (A \cup B') \cap [A \cup (A' \cap B)]$

$= (A \cup B') \cap [(A \cup A') \cap (A \cup B)]$

$= (A \cup B') \cap [E \cap (A \cup B)]$

$= (A \cup B') \cap (A \cup B)$

$= A \cup (B' \cap B)$

$= A \cup \varnothing$

$= A$ dır.

2. Yol

$E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ olsun.

$A \cup B' = \{1, 2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$ tür.

$(A \cup B')' = \{3\}$ tür.

$A \cup (A \cup B')' = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$ tür.

$(A \cup B') \cap [A \cup (A \cup B')'] = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 2, 3\}$

$= \{1, 2\}$

$= A$ dır.

Cevap B

Örnek .. 38

$A \cup (A \cup B')'$

kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

1. Yol

De Morgan kuralını ve birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliğini kullanarak çözüm yapılırsa,

$A \cup (A \cup B')' = A \cup (A' \cap B)$

$= (A \cup A') \cap (A \cup B)$

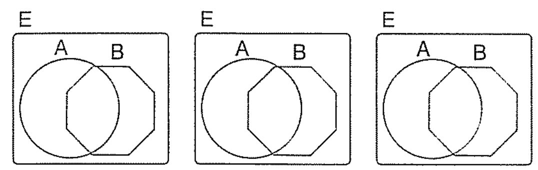
$= E \cap (A \cup B)$

$= A \cup B$ bulunur.

2. Yol

Aşağıdaki 1. şekilde,

$A \cup B'$ kümesi, 2. şekilde $(A \cup B')'$ kümesi, 3. şekilde de $A \cup (A \cup B')'$ kümesi taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.



1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil

Buna göre, $A \cup (A \cup B')' = A \cup B$ dir.

3. Yol

E evrensel küme olmak üzere,

$E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ olsun. Bu durumda,

$B' = \{1, 4\}$

$A \cup B' = \{1, 2, 4\}$

$(A \cup B')' = \{3\}$

$A \cup (A \cup B')' = \{1, 2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$

olduğuna göre, $A \cup (A \cup B')' = A \cup B$ dir.

Örnek .. 39

$s(A) = 5$

$s(B) = 3$

$s[(A' \cup B')'] = 2$

olduğuna göre, A ∪ B kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$(A' \cup B')' = [(A \cap B)']' = A \cap B$ dir.

$s[(A' \cup B')'] = 2$ ise, $s(A \cap B) = 2$ dir.

$s(A) = 5$ ve $s(B) = 3$ olduğu için,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 5 + 3 - 2$

$s(A \cup B) = 6$ dır.

Örnek .. 40

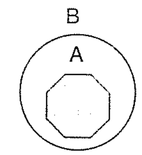
$s(A) = 3$

$s(B) = 5$

olduğuna göre, s(A∪B) nin <u>en küçük</u> değerini bulalım.

Çözüm

$s(A) < s(B)$ olduğuna göre $A \subset B$ alınırsa $s(A \cup B)$ en küçük değerini alır.



Yukarıdaki şemaya göre,

$s(A \cap B) = s(A) = 3$ tür.

Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$= 3 + 5 - 3$

$= 5$ tir.

Kısaca, $s(A \cup B) = s(B) = 5$ diyebiliriz.

Bu durumda $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri 5 tir.

Örnek .. 41

$s(A) = 7$

$s(B) = 4$

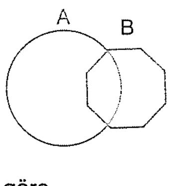
$A \cap B \neq \varnothing$

olduğuna göre, s(A ∪ B) nin alabileceği <u>en büyük</u> değeri bulalım.

Çözüm

$s(A \cap B)$ en küçük iken $s(A \cup B)$ en büyük değeri alır.

$A \cap B \neq \emptyset$ olduğu için $s(A \cap B)$ en az 1 olur.



Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 7 + 4 - 1$

$s(A \cup B) = 10$ olur.

Örnek .. 42

$s(A) = 3$

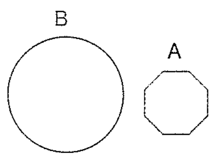
$s(B) = 5$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ nin en büyük değerini bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

olduğu için $s(A \cap B)$ en küçük değerini aldığında $s(A \cup B)$ en büyük değerini alır. $s(A \cap B)$ en büyük değerini aldığında $s(A \cup B)$ en küçük değerini alır.



$A \cap B = \emptyset$

$s(A \cap B) = 0$ dır.

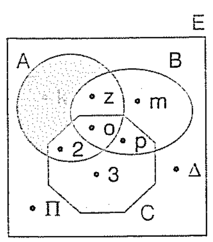
Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$= 3 + 5 - 0$

$= 8$ dir.

Örnek .. 43



E, evrensel küme olmak üzere, yandaki şemada verilenlere göre,

$(A' \cup B') \cap C'$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

1. Yol

$(A' \cup B') \cap C' = (A \cap B)' \cap C'$

$= [(A \cap B) \cup C]'$ dir.

$A \cap B = \{o, z\}$ ve $C = \{2, o, p, 3\}$

$(A \cap B) \cup C = \{o, z, 2, p, 3\}$ olur.

$((A \cap B) \cup C)' = \{k, m, \Delta, \Pi\}$

olduğuna göre,

$s[((A \cap B) \cup C)'] = 4$ tür.

2. Yol

Aşağıdaki

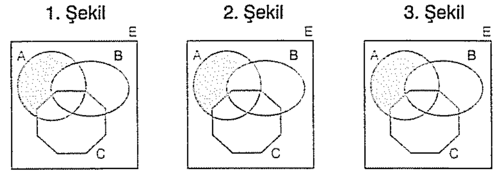
1. şekilde, $A' \cup B'$ kümesi,

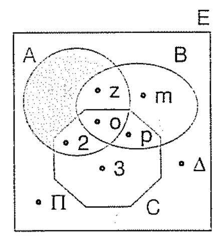
2. şekilde C' kümesi,

3. şekilde de $(A' \cup B') \cap C'$ kümesi

taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.

1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil





Buna göre,

$(A' \cup B') \cap C' = \{k, m, \Pi, \Delta\}$

$s[(A' \cup B') \cap C'] = 4$ tür.

3. Yol

Şemada verilenlere göre,

$E = \{k, z, m, 2, o, p, 3, \Delta, \Pi\}$

$A' = \{m, p, 3, \Delta, \Pi\}$

$B' = \{k, 2, 3, \Delta, \Pi\}$

$C' = \{k, z, m, \Delta, \Pi\}$

$A' \cup B' = \{m, p, 3, \Delta, \Pi, k, 2\}$

$(A' \cup B') \cap C' = \{k, m, \Delta, \Pi\}$

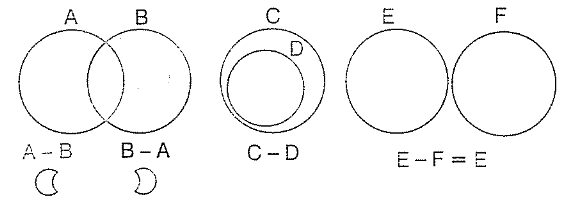
ise,

$s[(A' \cup B') \cap C'] = 4$ tür.

5. İki Kümenin Farkı

A ve B aynı evrensel kümeye ait iki küme olmak üzere, A ya ait olupta B ye ait olmayan elemanlardan oluşan kümeye A fark B kümesi denir ve $A \setminus B$ veya $A - B$ şeklinde gösterilir.

$A - B = \{x \mid x \in A$ ve $x \notin B\}$ dir.



Yukarıdaki şekillerde sırasıyla,

$A - B$, $B - A$, $C - D$, $E - F$ kümeleri taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.

Sonuç

➢ E ile F kümeleri ayrık kümeler ise,

$E - F = E$ dir.

➢ $D \subset C$ ise, $D - C = \emptyset$ dir.

Örnek .. 44

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 5, 6\}$

olduğuna göre, A – B kümesini bulalım.

Çözüm

A kümesinde olup, B kümesinde olmayan elemanlar 1, 2, 4 tür. Buna göre, $A - B = \{1, 2, 4\}$ olur.

Örnek .. 45

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 5, 6\}$

olduğuna göre, B – A kümesini bulalım.

Çözüm

B kümesinde olup, A kümesinde olmayan eleman 6 dır. Buna göre, $B - A = \{6\}$ olur.

Örnek .. 46

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{3, 5\}$

olduğuna göre, C – A kümesini bulalım.

Çözüm

C kümesinde olup, A kümesinde olmayan eleman yoktur. Buna göre, $C - A = \{\ \} = \emptyset$ dir.

6. Fark ile İlgili Bazı Özellikler

E, evrensel küme olmak üzere,

1) $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$
2) $E - A = A'$, $E - A' = A$
3) $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$
4) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ (Bu eşitliğe simetrik fark denir.)

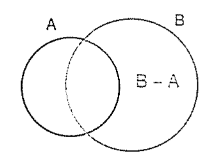
Örnek .. 47

$s(A) = 15$

$s(B - A) = 7$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm



$s(A) = 15$,

$s(B - A) = 7$

olduğuna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B - A)$

$= 15 + 7$

$= 22$ dir.

Örnek .. 48

A ve B kümeleri için,

$A \not\subset B$

$B \not\subset A$

$s(A \cup B) = 8$

$s(A \cap B) = 2$

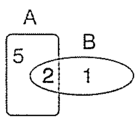
olduğuna göre, A kümesinde <u>en çok</u> kaç eleman olabilir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm

$B \not\subset A$ ise A nın eleman sayısının en çok olabilmesi için $s(B - A) = 1$ olmalıdır.

$s(A \cup B) = 8$ olduğuna göre, $s(A) = 7$ olur.



Verilenlere uygun şema yanda verilmiştir. Şemadaki sayılar bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarıdır.

Cevap B

Örnek .. 49

$s(A \cap B') = s(A \cap B) = s(B \cap A')$

$s(B') = 7$

$s(A' \cap B') = 4$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

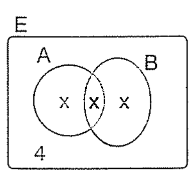
A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Çözüm

$s(A \cap B') = s(A - B)$ ve $s(B \cap A') = s(B - A)$ dır.

$s(A - B) = s(A \cap B) = s(B - A) = x$ olsun.

$s(A' \cap B') = [(A \cup B)'] = 4$



$s(B') = x + 4 = 7$ ise, $x = 3$ tür.

Buna göre,

$s(A \cup B) = 3x = 3 \cdot 3 = 9$ dur.

Cevap C

Örnek .. 50

En az birer elemanı bulunan farklı A ve B kümeleri için,

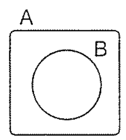
$(A - B) \cup B = A$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?

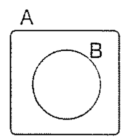
A) $B \subset A$ B) $A \subset B$ C) $A \cap B = \varnothing$

D) $A \cup B = B$ E) $(A \cap B)' = B$

Çözüm

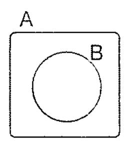


1. Şekil



2. Şekil

Yanda verilen 1. şekildeki taralı (boyalı) bölge $A - B$, 2. şekildeki taralı (boyalı) bölge $(A - B) \cup B$ dir.



Bu durumda yandaki şema $(A - B) \cup B = A$ koşuluna uygundur.

Buna göre,

$(A - B) \cup B = A$ ise $B \subset A$ dır.

Cevap A

Örnek .. 51

$(A - B) \cup (A \cap B)$

kümesinin eşitini bulalım.

Çözüm

1. Yol

$A - B = A \cap B'$ olduğu için,

$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

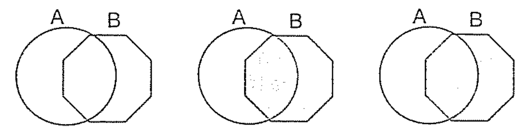
$= A \cap (B' \cup B)$

$= A \cap E$

$= A$ dır.

2. Yol

Aşağıdaki 1. şekilde, $A - B$ kümesi, 2. şekilde $A \cap B$ kümesi, 3. şekilde de $(A - B) \cup (A \cap B)$ kümesi taralı (boyalı) olarak gösterilmiştir.



1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil

Buna göre, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ dır.

3. Yol

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ olsun. Bu durumda,

$A - B = \{1\}$

$A \cap B = \{2\}$

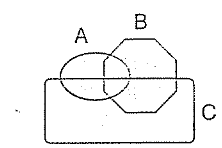
$(A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 2\}$

olduğuna göre, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ dır.

Uygulama

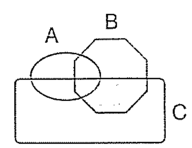
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Örnek .. 52

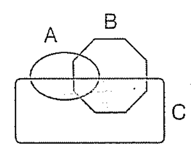


Şekildeki taralı (boyalı) **bölgeyi küme sembolleriyle ifade edelim.**

Çözüm



1. Şekil



2. Şekil

Yukarıdaki 1. şekilde, $B - A$ kümesi, 2. şekilde $(A \cup B) \cap C$ kümesi verilmiştir. Bu iki şekildeki taralı bölgelerin birleşimi soruda verilen taralı bölgeye karşılık gelir.

Buna göre, taralı bölge $(B - A) \cup ((A \cup B) \cap C)$ dir.

Verilen taralı bölgeyi ifade edebileceğimiz birden fazla biçim vardır. Bunlardan birini yukarıda verdik. Diğer bir ifade biçimi $B \cup (A \cap C)$ dir. Bunun gibi başka ifade biçimleri de vardır.

Örnek .. 53

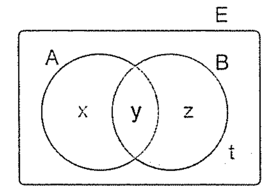
$s(A') = 7$

$s(A' \cup B') = 15$

olduğuna göre, A – B nin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Aşağıda şemadaki x, y, z, t bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir.



Yukarıda verilenlere ve şemada gösterilenlere göre,

$s(A') = z + t = 7$

$s(A' \cup B') = s[(A \cap B)'] = x + z + t = 15$

$s(A - B) = x$ olur.

Buna göre,

$(z + t = 7$ ve $x + z + t = 15)$ ise, $x + 7 = 15$

ise, $x = 8$

ise, $s(A - B) = 8$ dir.

Örnek .. 54

$s(A \cup B) = 33$

$s(A \cap B') = 2 \cdot s(A \cap B) = 3 \cdot s(B - A)$

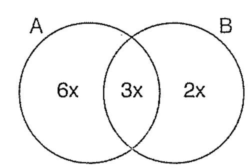
olduğuna göre, s(B) nin değerini bulalım.

Çözüm

$s(A \cap B') = s(A - B) = 6x$ ise

$s(A \cap B) = 3x$ ve $s(B - A) = 2x$ olur.

Verilenlere uygun şema aşağıda gösterilmiştir.



Şemada 2x, 3x, 6x sayıları bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir.

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$

$33 = 6x + 2x + 3x$

$33 = 11x$

$x = 3$ tür.

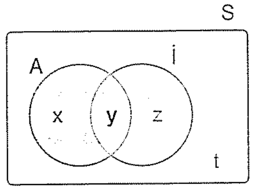
Buna göre,

$s(B) = 3x + 2x = 5x = 5 \cdot 3 = 15$ tir.

L. KÜME BİLGİSİ İLE ÇÖZÜLEN PROBLEMLER

Küme problemlerinde aşağıdaki pratik şema yöntemini kullanabiliriz.

Şemadaki x, y, z, t bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir. İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A ve sınıftaki bütün öğrencilerin kümesi S olsun.



Sadece Almanca bilenlerin sayısı, $s(A - \dot{I}) = x$ tir.

Sadece İngilizce bilenlerin sayısı, $s(\dot{I} - A) = z$ dir.

- ✓ Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı,

  $s(A \cap \dot{I}) = y$ dir.

- ✓ Almanca bilenlerin sayısı, $s(A) = x + y$ dir.

- ✓ Almanca bilmeyenlerin sayısı, $s(A') = z + t$ dir.

- ✓ Almanca veya İngilizce bilenlerin sayısı,

  $s(A \cup \dot{I}) = x + y + z$ dir.

- ✓ Almanca veya İngilizce dillerinden en az birini bilenlerin sayısı,

  $s(A \cup \dot{I}) = x + y + z$ dir.

- ✓ Bu sınıfta en çok bir dil bilenlerin sayısı,

  $x + z + t$ dir.

Örnek .. 55

30 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden 18 tanesi İngilizce ve 20 tanesi de bilgisayar kursuna gitmektedir.

Bu iki kurstan hiçbirine gitmeyen öğrenci olmadığına göre, bu sınıfta hem İngilizce hem de bilgisayar kursuna gidenlerin sayısını bulalım.

Çözüm

İngilizce kursuna gidenlerin kümesi İ, bilgisayar kursuna gidenlerin kümesi B ve hem İngilizce hem de bilgisayar kursuna gidenlerin kümesi $\dot{I} \cap B$ olsun.

Sınıftaki öğrenciler, İngilizce veya bilgisayar kurslarından en az birine katıldığına göre $s(\dot{I} \cup B) = 30$ olur.

Soruda verilenler

$s(\dot{I} \cup B) = 30$, $s(\dot{I}) = 18$ ve $s(B) = 20$ dir.

Soruda istenen

$s(\dot{I} \cap B)$ dir.

Buna göre,

$s(\dot{I} \cup B) = s(\dot{I}) + s(B) - s(\dot{I} \cap B)$

$30 = 18 + 20 - s(\dot{I} \cap B)$

$s(\dot{I} \cap B) = 38 - 30$

$s(\dot{I} \cap B) = 8$ dir.

Örnek .. 56

Almanca, İngilizce ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin bulunduğu bir toplulukta; Almanca bilenlerin sayısı 10, İngilizce bilenlerin sayısı 15, Fransızca bilenlerin sayısı 10, Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı 5, İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 7, Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı 4, üç dili de bilenlerin sayısı 3 tür.

Buna göre bu toplulukta kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

1. Yol

Almanca bilenlerin kümesi A, İngilizce bilenlerin kümesi İ, Fransızca bilenlerin kümesi F olsun.

Soruda verilenler

$s(A) = 10$, $s(\dot{I}) = 15$, $s(F) = 10$, $s(A \cap \dot{I}) = 5$,

$s(\dot{I} \cap F) = 7$, $s(F \cap A) = 4$, $s(A \cap F \cap \dot{I}) = 3$ tür.

Soruda istenen $s(A \cup F \cup \dot{I})$ dir.

Buna göre,

$s(A \cup \dot{I} \cup F) = s(A) + s(\dot{I}) + s(F) - s(A \cap \dot{I}) - s(\dot{I} \cap F)$

$- s(F \cap A) + s(A \cap F \cap \dot{I})$

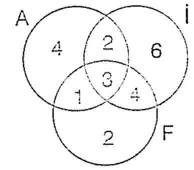
$= 10 + 15 + 10 - 5 - 7 - 4 + 3$

$= 22$ dir.

2. Yol

Almanca bilenlerin sayısı 10, İngilizce bilenlerin sayısı 15, Fransızca bilenlerin sayısı 10, Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı 5, İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 7, Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı 4, üç dili de bilenlerin sayısı 3 tür.

Verilen eleman sayılarını sondan başlayarak başa doğru aşağıdaki şemada yazalım. (Şemadaki sayılar bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir.)



Bu sayıların toplamı, topluluktakilerin sayısına eşittir.

$4 + 6 + 2 + 2 + 4 + 1 + 3 = 22$

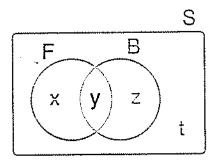
Örnek .. 57

Bir sınıfta; futbol veya basketbol oyunlarından sadece birini oynayan 12, en az birini oynayan 18 ve en çok birini oynayan 16 öğrenci vardır.

Buna göre, bu sınıfın mevcudunu bulalım.

Çözüm

1. Yol



Sınıfta, futbol oynayanların kümesi F, basketbol oynayanların kümesi B olsun.

Sadece bir oyun oynayanların sayısı, $x + z = 12$

En az bir oyun oynayanların sayısı, $x + y + z = 18$

En çok bir oyun oynayanların sayısı, $x + z + t = 16$ dır.

$(x + z = 12$ ve $x + z + t = 16)$ ise, $12 + t = 16$

ise, $t = 4$ dür.

Buna göre, bu sınıfın mevcudu:

$x + y + z + t = 18 + 4 = 22$ dir.

2. Yol

Bu sınıfta oyun oynamayanlar A kişi, yalnız bir oyun oynayanlar B kişi ve iki oyunuda oynayanlar C kişi olsun. Verilenlere göre, $B = 12$, $B + C = 18$, $A + B = 16$ dır. Bu denklemlerden, $A = 4$, $B = 12$, $C = 6$ bulunur. Buna göre, $A + B + C = 22$ dir.

Örnek .. 58

$A = \{$Sınıftaki gözlüklü öğrenciler$\}$

$B = \{$Sınıftaki ceketli öğrenciler$\}$

$C = \{$Sınıftaki erkek öğrenciler$\}$

$D = \{$Sınıftaki kız öğrenciler$\}$

olduğuna göre, $(C \cap A) - (B \cup D)$ kümesini bulalım.

Çözüm

$C \cap A = \{$Sınıftaki gözlüklü erkek öğrenciler$\}$

$B \cup D = \{$Sınıftaki ceketli veya kız öğrenciler$\}$

$(C \cap A) - (B \cup D) = \{$Sınıftaki ceketli olmayan gözlüklü erkek öğrenciler$\}$ olur.

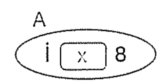
Örnek .. 59

İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu 13 kişilik bir grupta İngilizce bilenlerin hepsi Almanca da bilmektedir.

Yalnız Almanca bilenlerin 8 kişi olduğu bu grupta İngilizce bilenlerin kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

Verilenlere uygun şema aşağıda verilmiştir.



$x + 8 = 13$ ise, $x = 5$ tir.

Buna göre, bu grupta İngilizce bilenlerin sayısı 5 tir.

Uyarı

Kümeyle ilgili problem tipi soruların çözümünde;

a) Soru ifadesi en az, en çok, sadece gibi kelimeleri içeriyorsa şema yapıp, değişkenler kullanılarak çözüme gidilir.

b) Soru ifadesinde kümelerin kesişimlerine ve birleşimlerine ait bilgiler olumlu cümlelerle verilmişse, kümeler şema ile gösterilir. Bilgiler sondan başa doğru şemada yazılarak çözüme gidilir.

c) b şıkkına uyan sorular ve kümelerin eleman sayıları arasında bağıntılar verilen soruların çözümünde formülden yararlanılır.

1. $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olmak üzere,

$s(A \cap B) = 14$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

2. **$C = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

3. 46 kişilik bir sınıfta Ankara'yı görenlerin kümesi A, Bursa'yı görenlerin kümesi B dir.

$s(A') = 28$

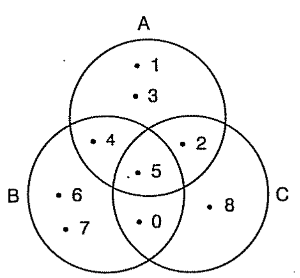
$s(A' \cap B') = 10$

$s(A - B) = 12$

olduğuna göre, $s(A) + s(B)$ kaçtır?

A) 45 B) 42 C) 40 D) 38 E) 36

4.



Yukarıdaki şemaya göre, $(A \cup B) - C'$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0, 2, 6, 7, 8} B) {5, 6, 7, 8}
C) {0, 2, 5} D) {1, 2, 5, 8}
E) {0, 1, 2, 4}

5. K = {a, b, {a}, {ab}} kümesi veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\{a\} \subset K$ B) $\{a\} \in K$ C) $\{b\} \in K$
D) $\{a, b\} \subset K$ E) $\{ab\} \in K$

6. **A, $A \cap B$, B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 64, 8, 32 olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?**

A) 512 B) 256 C) 128 D) 64 E) 32

7.

A = {0, 2, 4, 6}

B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

kümeleri veriliyor.

$A \subset F \subset B$ koşuluna uygun kaç değişik F kümesi yazılabilir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

8. Bir sınıfta matematik dersinde başarı gösterenlerin sayısı sınıf mevcudunun % 80 i, matematik dersinden 3 ün üzerinde not alanların sayısı, matematikten başarı gösterenlerin sayısının % 20 sidir. Aynı sınıfta, fizik dersinde başarı gösterenlerin sayısı sınıf mevcudunun % 90 ı dır.

Bu sınıfta fizik dersinde başarı gösterenlerden matematik notu 3 ün üzerinde olanların sayısı, sınıf mevcudunun en az yüzde kaçıdır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

9.

A = {a, b, c, d, e, f}

kümesinin alt kümelerinin kaçında a bulunur, f bulunmaz?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 16

10.

$B \not\subset A$

$s(A) = 3x + 2$

$s(B) = x$

olmak üzere,

$s(A \cap B)$ nin alabileceği en büyük değer 5 olduğuna göre, $s(A - B)$ kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

11. Bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir.

Buna göre, bu kümenin en az 6 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 37 E) 40

12.

$A = \{x \mid x \leq 100,\ x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$

$B = \{x \mid x \leq 150,\ x = 5k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 30 B) 33 C) 57 D) 63 E) 69

13. **30 kişilik bir sınıfta İngilizce kursuna giden 16 öğrenci, Almanca kursuna gitmeyen 15 öğrenci ve hem İngilizce hem de Almanca kursuna giden 5 öğrenci olduğuna göre, sadece Almanca kursuna giden kaç öğrenci vardır?**

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

14. Futbol, basketbol ve voleybol oynayanlardan oluşan bir sporcu kafilesinde futbol oynayanlar 22, basketbol oynayanlar 16, voleybol oynayanlar 15, futbol ve basketbol oynayanlar 9, futbol ve voleybol oynayanlar 8, basketbol ve voleybol oynayanlar 7, üç oyunu da oynayanlar 3 kişidir.

Buna göre, bu kafilede kaç kişi vardır?

A) 30 B) 32 C) 36 D) 42 E) 48

15. **Alt küme sayısı ile öz alt küme sayısının toplamı 127 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?**

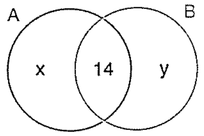
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16. En az bir yabancı dil bilenlerin bulunduğu bir sınıfta, Fransızca bilenlerin hepsi Almanca, Almanca bilenlerin hepsi İngilizce de bilmektedir.

Almanca bilenler 9, Fransızca bilmeyenler 8, Fransızca bilenlerle sadece İngilizce bilenler toplam 5 kişi olduğuna göre, bu sınıfın mevcudu kaçtır?

A) 9 B) 11 C) 14 D) 18 E) 22

1.



$A \not\subset B$ ise $x > 0$ dır.

$B \not\subset A$ ise $y > 0$ dır.

$s(A \cup B) = s(A-B) + s(B-A) + s(A \cap B)$

$= x + y + 14$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının en az olabilmesi için, $x = 1$ ve $y = 1$ alınmalıdır.

Bu durumda,

$s(A \cup B) = 1 + 1 + 14 = 16$ olur.

Cevap C

2.

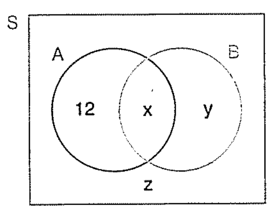
C kümesi 5 elemanlı olduğu için 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı:

$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ dur.

Cevap B

3.

Hem Ankara'yı hem de Bursa'yı görenlerin sayısı x olsun. Verilenlere uygun şemayı oluşturalım.



$s(A' \cap B') = s[(A \cup B)'] = 10$ ise $z = 10$ dur.

$s(A') = 28$ ise $y + z = 28$

ise $y + 10 = 28$

ise $y = 18$ dir.

$12 + x + y + z = 46$

$12 + x + 18 + 10 = 46$

$x = 6$ olur.

$s(A) + s(B) = (12 + x) + (x + y)$

$= 12 + 2x + y$

$= 12 + 12 + 18$

$= 42$ bulunur.

Cevap B

4.

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C' = \{1,3,4,6,7\}$

$(A \cup B) - C' = \{0,2,5\}$

Cevap C

5.

$K = \{a, b, \{a\}, \{ab\}\}$

kümesinin $\{b\}$ şeklinde bir elemanı olmadığı için

$\{b\} \notin K$ dir. Yani $\{b\} \in K$ ifadesi yanlıştır.

Cevap C

6.

A, $A \cap B$, B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 64, 8 ve 32 olduğu için,

$2^{s(A)} = 64 = 2^6$ ise, $s(A) = 6$ dır.

$2^{s(A \cap B)} = 8 = 2^3$ ise, $s(A \cap B) = 3$ tür.

$2^{s(B)} = 32 = 2^5$ ise, $s(B) = 5$ tir.

Buna göre,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 6 + 5 - 3$

$s(A \cup B) = 8$ dir.

Buna göre, $A \cup B$ kümesinin alt küme sayısı,

$2^{s(A \cup B)} = 2^8 = 256$ dır.

Cevap B

7.

B kümesinden A kümesinin elemanlarını ayırırsak, {1, 3, 5} kümesini elde ederiz.

3 elemanı olan bu kümeyle $2^3 = 8$ değişik alt küme oluşturulabilir. Bu alt kümelerin herbirine A kümesinin elemanlarını yazalım.

Böylece istenen koşula uygun 8 değişik F kümesi yazabiliriz.

Cevap C

8.

Sınıfta 100 öğrenci bulunduğunu kabul edersek matematik dersinden başarı gösterenlerin sayısı,

$\frac{80}{100} \cdot 100 = 80$ olur.

Bu dersten 3 ün üzerinde not alanların sayısı,

$\frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ olur.

Fizik dersinden başarılı olanların sayısı,

$\frac{90}{100} \cdot 100 = 90$ dır.

Fizik dersinden başarı gösterenlerden matematik notu 3 ün üzerinde olanların sayısının en az olması için matematikten 3 ün üzerinde not alan 16 kişinin en çoğunun fizikten başarısız olmasını düşünmeliyiz. 100 kişilik sınıfta fizikten başarısız 10 kişi olduğuna göre, matematik notu 3 ün üzerinde olan 16 kişiden 10 tanesi fizikten başarısız olmuş olsa en az $16 - 10 = 6$ tanesi hem fizikten başarılı olup hem de matematikten 3 ün üzerinde not almış olacaktır. Buna göre istenen cevap % 6 dır.

Cevap C

9.

A kümesinden a ve f elemanlarını atarsak, {b, c, d, e} kümesini elde ederiz.

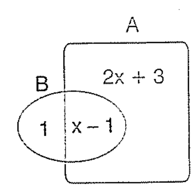
4 elemanı olan bu kümenin $2^4 = 16$ farklı alt kümesi vardır.

Bu alt kümelerin herbirine a elemanını yazıp; f elemanını yazmayalım. Böylece istenen koşula uygun 16 değişik alt küme yazabiliriz.

Cevap E

10.

$B \not\subset A$, $s(A) = 3x + 2$, $s(B) = x$ olmak üzere, aşağıdaki şemayı yapabiliriz.



$B \subset A$ iken $s(A \cap B)$ en büyük olur. Ancak soruda $B \not\subset A$ olduğu verildiği için $B - A$ nın eleman sayısı en az 1 olmalıdır.

$s(A \cap B)$ nin alabileceği <u>en büyük</u> değer 5 olduğuna göre,

$x - 1 = 5$ ise, $x = 6$ dır.

Buna göre, $s(A - B) = 2x + 3 = 2 \cdot 6 + 3 = 15$ tir.

Cevap D

11.

5 elemanlı alt kümelerinin sayısı 3 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olduğuna göre, bu kümenin eleman sayısı: $5 + 3 = 8$ dir.

Bu durumda bizden istenen; 8 elemanlı kümenin; 6 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 7 elemanlı alt kümelerinin sayısı ve 8 elemanlı alt kümelerinin sayısının toplamıdır.

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} + \frac{8!}{(8-7)! \cdot 7!} + \frac{8!}{(8-8)! \cdot 8!}$$

$$= \frac{8!}{2! \cdot 6!} + \frac{8!}{1! \cdot 7!} + \frac{8!}{0! \cdot 8!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} + \frac{8 \cdot 7!}{1 \cdot 7!} + \frac{8!}{1 \cdot 8!}$$

$$= 28 + 8 + 1$$

$$= 37$$

Cevap D

12.

A kümesinin eleman sayısı: [1, 100] aralığındaki 3 ün katı olan pozitif tam sayılardır.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ -\ 99 & 33 \\ \hline 1 & \end{array}$$ olduğu için $s(A) = 33$ tür.

B kümesinin eleman sayısı: [1, 150] aralığındaki 5 in katı olan pozitif tam sayılar

$$\begin{array}{r|l} 150 & 5 \\ -\ 150 & 30 \\ \hline 0 & \end{array}$$ olduğu için $s(B) = 30$ dur.

$A = \{x \mid x \leq 100,\ x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$ ve

$B = \{x \mid x \leq 150,\ x = 5k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$ ise

$A \cap B = \{x \mid x \leq 100,\ x = 15k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$ dir.

$A \cap B$ kümesinin eleman sayısı: [1, 100] aralığındaki 15 in katı olan pozitif tam sayılardır.

Buna göre,

$$\begin{array}{r|l} 100 & 15 \\ -\ 90 & 6 \\ \hline 10 & \end{array}$$ olduğu için $s(A \cap B) = 6$ dır.

Bu durumda $A \cup B$ nin eleman sayısı,

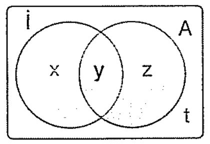
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$s(A \cup B) = 33 + 30 - 6$

$s(A \cup B) = 57$ dir.

Cevap C

13.



Verilenlere uygun şema yukarıda verilmiştir. Şemadaki harfler bulundukları bölgenin (kümelerin) eleman sayılarıdır.

Buna göre,

Sınıf mevcudu, $x + y + z + t = 30$ dur.

İngilizce kursuna giden öğrenci sayısı, $x + y = 16$ dır.

Almanca kursuna gitmeyen öğrenci sayısı, $x + t = 15$ tir.

İngilizce ve Almanca kursuna giden öğrenci sayısı,

$y = 5$ tir.

$(x + t = 15,\ y = 5$ ve $x + y + z + t = 30)$ ise,

$z = 10$ olur.

Buna göre, sadece Almanca kursuna giden $z = 10$ öğrenci vardır.

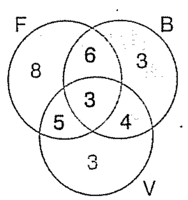
Cevap E

14.

1. Yol

$$\begin{aligned} s(F \cup B \cup V) &= s(F) + s(B) + s(V) - s(F \cap B) \\ &\quad - s(F \cap V) - s(B \cap V) + s(F \cap B \cap V) \\ &= 22 + 16 + 15 - 9 - 8 - 7 + 3 \\ &= 53 - 24 + 3 \\ &= 32 \text{ kişidir.} \end{aligned}$$

2. Yol



Verilenlere uygun şema yukarıda verilmiştir. Şemadaki sayılar bulundukları bölgenin (kümelerin) eleman sayılarıdır.

Buna göre, kafilede;

$s(F \cup B \cup V) = 8 + 6 + 3 + 5 + 3 + 4 + 3 = 32$ kişi vardır.

Cevap B

15.

Bu kümenin eleman sayısı n olsun.

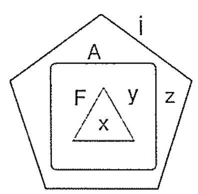
n elemanlı kümenin alt küme sayısı 2^n ve öz alt küme sayısı $2^n - 1$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} 2^n + 2^n - 1 &= 127 \\ 2 \cdot 2^n &= 128 \\ 2^n &= 64 \\ 2^n &= 2^6 \text{ ise,} \\ n &= 6 \text{ dır.} \end{aligned}$$

Cevap D

16.

Fransızca bilenlerin kümesini F, Almanca bilenlerin kümesini A, İngilizce bilenlerin kümesini İ ile gösterelim. Yabancı dil bilmeyen olmadığı için $F \cup A \cup İ$ kümesi evrensel kümedir. Fransızca bilenlerin hepsi Almanca, Almanca bilenlerin hepsi İngilizce bildiğine göre, $F \subset A \subset İ$ dir.



Almanca bilenlerin sayısı,

$x + y = 9$

Fransızca bilmeyenlerin sayısı,

$y + z = 8$

Fransızca ve sadece İngilizce bilenlerin sayısı,

$x + z = 5$ tir.

Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{array}{rl} & x+y=9 \\ & y+z=8 \\ + & x+z=5 \\ \hline & 2(x+y+z)=22 \\ & x+y+z=11 \end{array}$$

Buna göre sınıf mevcudu $x + y + z = 11$ dir.

Cevap B

1.

$A = \{3, 5, 7, a, b, c, x\}$

$B = \{4, 6, 8, x, y, z, a\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2.

$s(A-B)=6$

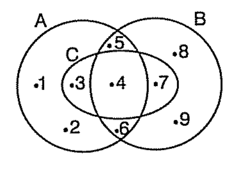
$s(B-A)=3$

$s(A \cup B)=11$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.



Yandaki şemada verilenlere göre, {5, 6} kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(A \cap B) - C$

B) $(B \cap C) \cap B$

C) $(A \cap C) \cup B$

D) $(B \cap C) \cup A$

E) $B \cup (A - C)$

4. Alt küme sayısı 128 olan küme kaç elemanlıdır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

5.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

olduğuna göre, $s[(A' \cap B) \cup (B' \cap A)]$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

6.

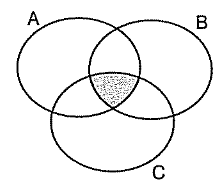
$A = \{x : -3 < x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : 0 \le x < 4,\ x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.



Yandaki şemada verilen taralı küme aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $A \cap B$

B) $(A \cap B) \cap C$

C) $(A \cup B) \cap C$

D) $(A \cap B) - C$

E) $B - (A \cup C)$

8. A ve B birer küme olmak üzere;

$s(A)=12$

$s(B)=18$

$s(B-A)=7$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 30 B) 28 C) 23 D) 20 E) 19

9. **Herkesin Türkçe veya İngilizce derslerinin en az birisinden başarılı olduğu 54 kişilik bir sınıfta yalnız Türkçe dersinden başarılı olanlar 20 kişi ve yalnız İngilizce dersinden başarılı olanların sayısı Türkçe dersinden başarılı olanların sayısına eşit olduğuna göre, Türkçe ve İngilizce dersinden başarılı olanlar kaç kişidir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.

$A = \{a, \{b\}, c\}$

$B = \{b, c, d\}$

$A \subset C$

$B \subset C$

olduğuna göre, C kümesinin eleman sayısı <u>en az</u> kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11.

$A = \{1, 9, 25, 36, 81, 169\}$

$B = \left\{x \mid x \in A : \sqrt{x} \text{ asal sayı}\right\}$

olduğuna göre, s(B) kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. 350 kişilik bir topluluk içerisinden % 20 si futbol, % 66 sı ise voleybol oynuyor.

Bu toplulukta iki sporu da yapmayan <u>en fazla</u> kaç kişi vardır?

A) 120 B) 119 C) 72 D) 55 E) 49

13. A, B ve (B – A) kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 32, 64 ve 32 dir.

Buna göre, s(A – B) kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14.

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, c, d, e, f\}$

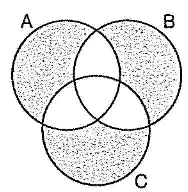
olduğuna göre, $K \subset A$ ve $K \subset B$ koşulunu sağlayan kaç tane K kümesi yazılabilir?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

15. **n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısının alt küme sayısına oranı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1-\frac{1}{2^n}$ B) $1+\frac{1}{2^n}$ C) $\frac{1}{2^n}$ D) 1 E) $\frac{1}{2^{2n}}$

16.



Yandaki şemada verilen taralı küme aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

B) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$

C) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$

D) $[A - (B \cup C)] \cup [B - (A \cup C)] \cup [C - (A \cup B)]$

E) $(A \cup B \cup C) - (C - B)$

1.

$s(A - B) = 2$

$s(A \cup B) = 10$

olduğuna göre, s(B) kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

2. A kümesi B ve C kümelerinin alt kümesidir.

$s(A) = 2$

$s(B \cap C) = 5$

olduğuna göre; A, B ve C kümelerinden sadece ikisine ait olan kaç eleman vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.

$(A' \cup B)'$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine <u>daima</u> eşittir?

A) $A \setminus B$ B) $B \setminus A$ C) $A \cap B$ D) $A' \cap B$ E) $A \cup B$

4. A boş kümeden farklı birer küme olmak üzere, A kümesindeki her eleman B kümesinde de vardır.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

olduğuna göre, birbirinden farklı kaç A kümesi vardır?

A) 4 B) 7 C) 11 D) 13 E) 15

5. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve a bir doğal sayı olmak üzere,

$a\mathbb{N} = \{ak : k \in \mathbb{N}\}$

kümesini göstersin.

Buna göre, $(15\mathbb{N}) \cap (6\mathbb{N})$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $90\mathbb{N}$ B) $60\mathbb{N}$ C) $30\mathbb{N}$ D) $6\mathbb{N}$ E) $3\mathbb{N}$

6.

$s(A \setminus B) = 9$

$s(B \setminus A) = 7$

$s(A \cap B) = 6$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 16 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

7. A, B, C birbirinden farklı üç küme olmak üzere,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$(C \setminus B) \subset A$

olduğuna göre, s(C) <u>en çok</u> kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.

$K = \{(x, y) : 2x - y + 1 = a\}$

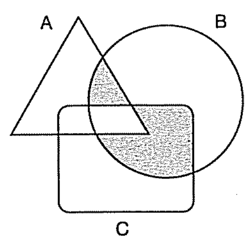
$L = \{(x, y) : x - y - b = 3\}$

$K \cap L = \{(1, 4)\}$

olduğuna göre, a + b kaçtır?

A) –5 B) –6 C) –7 D) –8 E) –9

9.



Yukarıdaki şemada verilen taralı küme aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $(A \cup B) - C$

B) $(A \cap B) \cup C$

C) $A \cap (B - C)$

D) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C)$

E) $[(A \cup C) \cap B] - (A \cap B \cap C)$

10. $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

olduğuna göre, $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ nin alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?

A) 88 B) 89 C) 90 D) 92 E) 94

11. Elemanları pozitif tam sayı olan A kümesinin 8 tane alt kümesi vardır.

Buna göre, A kümesindeki elemanların toplamı en az kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 15 E) 21

12. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi verildiğinde X in boş olmayan her A alt kümesi için T(A), A kümesinin elemanlarının toplamı olarak tanımlanıyor.

ÖRNEK:

$T(\{5\}) = 5$ ve $T(\{1, 3, 5\}) = 1 + 3 + 5 = 9$ dur.

A kümesi X in bir alt kümesi ve

$$T(\{2, 3\}) + T(A) = T(\{2, 3, 4, 5\})$$

olduğuna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) {4, 5} B) {3, 6} C) {2, 3, 4} D) {1, 2, 6} E) {1, 3, 6}

13. 34 kişilik bir sınıfta, yalnız müzik dersinden kalan öğrencilerin sayısı ile yalnız resim dersinden kalan öğrenci sayısının toplamı 5 tir.

Her iki dersten geçen öğrenci sayısı 21 olduğuna göre, hem müzik hem de resim dersinden kalan kaç öğrenci vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14. Bir sınıftaki 35 öğrenciden her biri matematik veya fen bilgisi kurslarından en az birisine katılmaktadır.

Bu sınıftaki öğrencilerin 18 i matematik, 19 u fen bilgisi kursuna katıldığına göre, matematik ve fen bilgisi kursuna katılan kaç öğrenci vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15.

$s(A) + s(B) = 40$

$s(A \cup B) = 32$

olduğuna göre, $s(A - B) + s(B - A)$ kaçtır?

A) 24 B) 26 C) 30 D) 32 E) 34

16.

$s(A - B) = 9$

$s(A \cup B) = 24$

$s(A \cap B) = 7$

olduğuna göre, s(B) kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

17. A ve B birbirine denk iki kümedir.

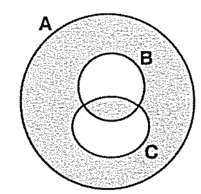
$s(A \cap B) = 4$

$s(A \cup B) = 18$

olduğuna göre, s(B) kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

18.



Yandaki şemada taralı küme aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $[A - (B \cup C)] \cup (B \cap C)$

B) $[A - (B \cap C)] \cap (B \cup C)$

C) $A - (B \cap C)$

D) $A - (B - C)$

E) $C \cap (A \cup B)'$

19. 41 kişilik bir sporcu kafilesinde 17 kişi futbol, 20 kişi voleybol, 22 kişi basketbol oynamasını biliyor. Bunlardan 8 i futbol ve basketbol, 7 si futbol ve voleybol, 5 i voleybol ve basketbol oynamaktadır.

Her üç oyunu oynayanlar ile bu üç oyundan hiçbirini oynamayanlar eşit sayıda olduğuna göre, yalnız basketbol oynayan kaç kişi vardır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 10

20. 50 kişilik bir grupta İngilizce ve Fransızca bilenler ile ikisini de bilmeyenlerin sayıları birbirine eşittir.

İngilizce veya Fransızca bilen 32 kişi olduğuna göre, her iki dili de bilen kaç kişi vardır?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

21. 35 kişilik bir toplulukta İngilizce bilenlerin sayısı sadece Fransızca bilenlerin sayısının 2 katıdır.

En az bir dil bilenlerin sayısı 15 olduğuna göre, İngilizce bilmeyenlerin sayısı kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

22. Bir topluluk, İngilizce ile Fransızca dilini bilenlerden oluşmuştur. İngilizce bilenlerin sayısı, Fransızca bilenlerin sayısının iki katıdır.

Yalnız bir dil bilenlerin sayısı 13 ve her iki dili birden bilenlerin sayısı 7 olduğuna göre, yalnız İngilizce bilen kaç kişi vardır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

26. BÖLÜM

Kartezyen Çarpım

A. SIRALI İKİLİ

Herhangi iki nesne, belli bir öncelik sırasına göre bir eleman gibi düşünülürse bu elemana sıralı ikili ya da ikili denir.

İkilinin birinci sıradaki elemanına birinci bileşen, ikinci sıradaki elemanına da ikinci bileşen denir.

(a, b) ifadesi sıralı ikili

(a, b, c) ifadesi sıralı üçlü

(a, b, c, d) ifadesi sıralı dörtlü

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ifadesi sıralı n li dir.

(a, b) sıralı ikilisinde a ya birinci bileşen, b ye ikinci bileşen denir.

İkilide sıra önemli olduğu için $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ dır.

Kural

(a, b) = (c, d) ise, (a = c ve b = d) dir.

Örnek .. 1

$(a, 4) = (7, b)$

olduğuna göre, a + b değerini bulalım.

Çözüm

(a, 4) = (7, b) ise, (a = 7 ve 4 = b) dir.

Buna göre,

(a = 7 ve b = 4) ise,

a + b = 7 + 4 = 11 dir.

Örnek .. 2

$\left(\sqrt[3]{x}, 2^x\right) = (2, 4 \cdot y)$

olduğuna göre, y değerini bulalım.

Çözüm

$\left(\sqrt[3]{x},\ 2^x\right) = (2,\ 4 \cdot y)$ ise $\left(\sqrt[3]{x} = 2 \text{ ve } 2^x = 4 \cdot y\right)$ dir.

$\sqrt[3]{x} = 2$ ise $x = 2^3$

ise $x = 8$ dir. ... (☆)

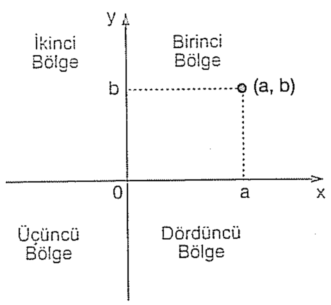
$\left(x = 8 \text{ ve } 2^x = 4 \cdot y\right)$ ise $2^8 = 4 \cdot y$

ise $256 = 4 \cdot y$

ise $y = 64$ tür.

B. İKİLİNİN ANALİTİK DÜZLEMDEKİ GÖRÜNTÜSÜ

✓ (a, b) ikilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü bir noktadır. a > 0, b > 0 için (a, b) noktası aşağıda gösterilmiştir.



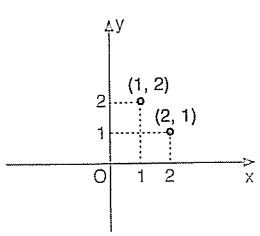
✓ a ya noktanın apsisi, b ye noktanın ordinatı denir.

Örnek .. 3

(1, 2) ve (2, 1) noktasını düzlemde gösterelim.

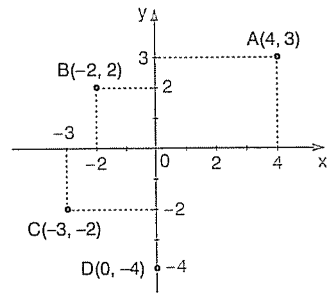
Çözüm

(1, 2) ve (2 ,1) noktaları aşağıdaki analitik düzlemde gösterilmiştir.



Örnek .. 4

A(4, 3), B(– 2, 2), C(– 3, – 2), D(0, – 4) noktalarını analitik düzlemde gösterelim:



C. KARTEZYEN ÇARPIM

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak şartıyla birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak elde edilen tüm sıralı ikililerin kümesine, A ile B nin kartezyen çarpımı denir ve A×B şeklinde gösterilir.

$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B\}$ dir.

Örnek .. 5

A = {1, 2}

B = {2, 3}

olduğuna göre, A × B yi liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm

Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alarak A × B kümesini oluşturalım.

$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B\}$

A × B = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)} olur.

Örnek .. 6

A = {1, 2}

B = {2, 3}

olduğuna göre, B × A yı liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm

Birinci bileşeni B kümesinden, ikinci bileşeni A kümesinden alarak B × A kümesini oluşturalım.

$B \times A = \{(x, y) : x \in B \text{ ve } y \in A\}$

B×A = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}

Örnek .. 7

A = {0, 1, 2}

olduğuna göre, A × A yı bulalım.

Çözüm

Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni de A kümesinden alarak A × A kümesini oluşturalım.

A × A = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)}

Örnek .. 8

A = {1, 5}

B = {0, 1, 2}

olmak üzere, A × B yi ve B × A yı bulalım.

Çözüm

Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alarak A × B kümesini oluşturalım.

A × B = {(1, 0), (1, 1), (1, 2), (5, 0), (5, 1), (5, 2)}

Birinci bileşeni B kümesinden, ikinci bileşeni A kümesinden alarak B × A kümesini oluşturalım.

B × A = {(0, 1), (0, 5), (1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5)}

Uyarı

a ≠ b olmak üzere,

(a, b) ≠ (b, a) olduğu için A×B ≠ B×A dır.

Kartezyen Çarpımın Grafiği

Kartezyen çarpımın grafiğini örneklerle gösterelim.

Örnek .. 9

A = {1, 2}

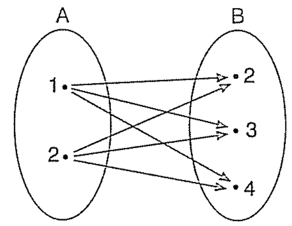
B = {2, 3, 4}

kümeleri için, A×B yi üç farklı yöntemle gösterelim.

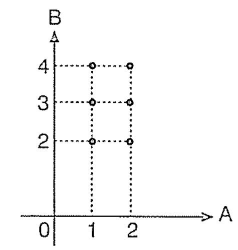
Çözüm

Liste yöntemiyle gösterimi,

A × B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)} olur.



A × B nin şeması



A × B nin grafiği

Örnek .. 10

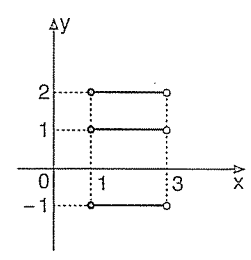
$A = \{x : 1 \le x < 3,\ x \in \mathbb{R}\}$

B = {–1, 1, 2}

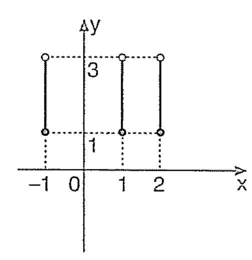
kümeleri için A × B ve B × A nın grafiğini analitik (koordinat) **düzlemde gösterelim.**

Çözüm

$A = \{x : 1 \le x < 3,\ x \in \mathbb{R}\}$ ve B = {–1, 1, 2} olduğuna göre, A × B nin grafiği Ox eksenine paralel üç doğru parçası ve B × A nın grafiği Oy eksenine paralel üç doğru parçasıdır.



A × B nin grafiği



B × A nın grafiği

Örnek .. 11

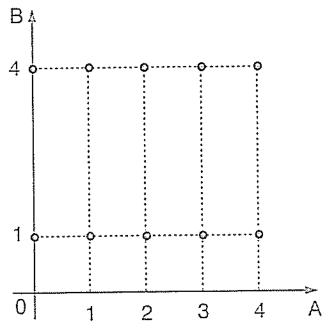
$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 4\}$

olduğuna göre, A × B nin grafiğini çizelim.

Çözüm

$A \times B = \{(0, 1), (0, 4), (1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$



A × B nin grafiği

A × B nin elemanları şekilde gösterilen on noktadır.

Örnek .. 12

$A = \{x \mid -2 \le x < 4 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$

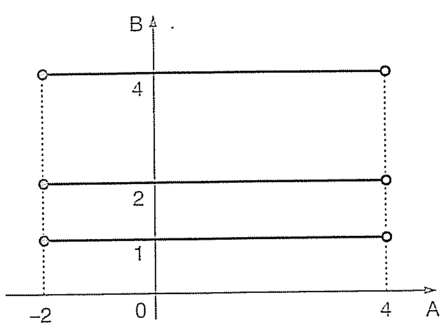
$B = \{1, 2, 4\}$

olduğuna göre, A × B nin grafiğini çizelim.

Çözüm

A kümesi, [–2, 4) aralığındaki tüm reel sayıları kapsamaktadır. B kümesinin elemanları ise 1, 2 ve 4 tür.

Bu durumda, A × B (kartezyen çarpımın) kümesi şekildeki üç yarı doğru parçasıdır.



A × B nin grafiği

Örnek .. 13

$A = \{x : -1 \le x < 2, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x : -2 < x \le 3, x \in \mathbb{R}\}$

kümeleri için A × B nin grafiğini analitik (koordinat) **düzlemde gösterelim.**

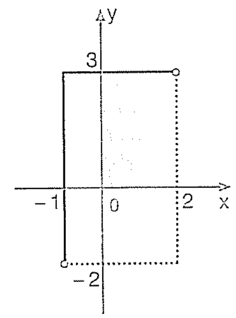
Çözüm

A × B nin grafiği, köşeleri (–1, –2), (2, –2), (2, 3), (–1, 3) olan dikdörtgensel bölgedir.

Aşağıda verilen şekildeki taralı bölgede bulunan tüm noktalar A × B ye aittir. x = 2 ve y = –2 doğruları üzerindeki noktalar A × B ye ait olmadığı için kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

Dikdörtgenin köşelerindeki noktalardan sadece (–1, 3) noktası A × B ye aittir.

(–1, –2), (2, –2), (2, 3) noktaları A × B ye ait değildir.



A × B nin grafiği

Örnek .. 14

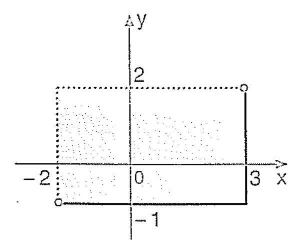
$A = \{x : -1 \le x < 2, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x : -2 < x \le 3, x \in \mathbb{R}\}$

kümeleri için B×A nın grafiğini analitik (koordinat) **düzlemde gösterelim.**

Çözüm

Aşağıda verilen şekildeki taralı bölgede bulunan tüm noktalar B × A ya aittir. x = –2 ve y = 2 doğruları üzerindeki noktalar A × B ye ait olmadığı için kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Dikdörtgenin köşelerindeki noktalardan sadece (–1, 3) noktası B × A ya aittir.



B×A nın grafiği

Örnek .. 15

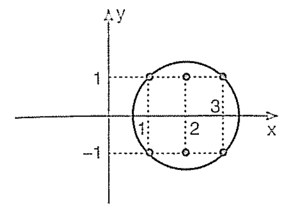
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{-1, 1\}$

olmak üzere, A × B kümesinin noktalarını dışarda bırakmayan en küçük çemberi düzlemde gösterelim.

Çözüm

$A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1), (3, -1), (3, 1)\}$ dir. Bu noktaları dışarda bırakmayan en küçük çember, aşağıda verilmiştir.



Kural

s(A × B) = s(A) · s(B) dir.

s(B × A) = s(B) · s(A) dır.

Bu durumda, s(A × B) = s(B × A) dır.

Örnek .. 16

$M = \{0, 1, 2, 3\}$

$N = \{7, 8, 9, 10, 11\}$

olduğuna göre, N×M kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

s(M) = 4 ve s(N) = 5 olduğu için,

$s(N \times M) = s(N) \cdot s(M) = 5 \cdot 4 = 20$ dir.

Örnek .. 17

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$s(A \times B) = 24$

olduğuna göre, s(B) yi bulalım.

Çözüm

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ ise $s(A) = 4$ tür.

$s(A \times B) = 24$

$s(A) \cdot s(B) = 24$

$4 \cdot s(B) = 24$

$s(B) = 6$ olur.

D. KARTEZYEN ÇARPIMIN BAZI ÖZELLİKLERİ

1) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

4) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

5) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

6) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Örnek .. 18

s(A) = 4

s(B ∪ C) = 7

olduğuna göre, (A×B) ∪ (A×C) kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s[(A \times B) \cup (A \times C)] = s[A \times (B \cup C)]$

$= s(A) \cdot s(B \cup C)$

$= 4 \cdot 7$

$= 28$

1.

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$

$B \cup C=\{x,\ y,\ z\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s[(A \times B) \cup (A \times C)]$ kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 12

2. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$(a^b, 9) = (8, a + b)$

olduğuna göre, $a \cdot b$ kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 3 E) 2

3.

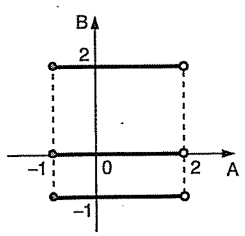
$A = \{x: x^2 < 17, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{y: (y^2 - 1)(y + 3) = 0, y \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, $s(A \times B)$ kaçtır?

A) 36 B) 27 C) 18 D) 9 E) 3

4.



Yukarıdaki şekil, $A \times B$ nin grafiğinin analitik düzlemdeki gösterimidir.

Buna göre, $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1, 2)$ B) $\{-1, 0, 2\}$ C) $\{-1, 0\}$ D) $[-1, 1)$ E) $[-2, 1)$

5.

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$

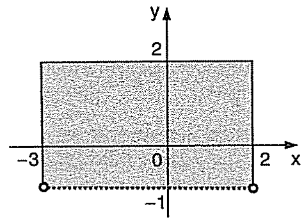
$B = \{x: |x| \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{x: x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, $s[(A \cup B) \times (B - C)]$ kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

6.



Yukarıda grafiği verilen kartezyen çarpım aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1, 2] \times [-2, 3)$ B) $[-1, 2] \times (-3, 2)$

C) $\{-3, 2\} \times [-2, 3)$ D) $[-3, 2] \times (-1, 2]$

E) $\{-1, 2\} \times \{-2, 3\}$

7.

$A = \{1, b, c, 4\}$

$B = \{b, c, 4, e, f, g, k, l\}$

$C = \{c, 4, e, r\}$

olduğuna göre, kartezyen çarpımların kesişimi olan $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 1 B) 12 C) 24 D) 31 E) 57

8.

$A = \{x: |x| \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x: -2 \leq x < 1, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 18 D) 14 E) 12

9.

$A=\{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$

olduğuna göre, $A \times A$ nın elemanlarından oluşan bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 4 B) 9 C) 16 D) 25 E) 36

10.

$A = \{x: -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x: 2 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$

olduğuna göre, $A \times B$ kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsünün belirttiği alan kaç birim karedir?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

11.

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$

$C = \{1, 5\}$

olduğuna göre, $B \times (A \cap C)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12.

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = 30$

$s(B \cap C) = 6$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13.

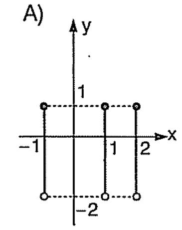
$M = \{-1, 2, 3\}$ ve

$N = \{x: -2 < x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$

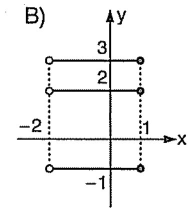
kümeleri veriliyor.

$N \times M$ kümesinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

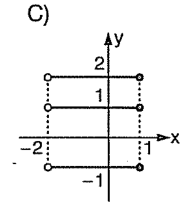
A)



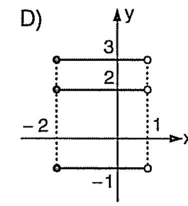
B)



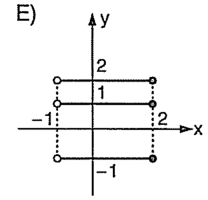
C)



D)



E)



14.

$A=\{-1, 0, 1, 2\}$

$B=\{1, 2, 3\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \times B$ kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsü olan noktaları dışarıda bırakmayan en küçük çemberin çapı kaç birimdir?

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{15}$

1.

s(A) = 3 ve $s(B \cup C) = 3$ tür.

$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ dir.

Buna göre,

$s[(A \times B) \cup (A \times C)] = s[A \times (B \cup C)]$

$= s(A) \cdot s(B \cup C)$

$= 3 \cdot 3$

$= 9$ olur.

Cevap D

2.

$(a^b, 9) = (8, a + b)$ ise ($a^b = 8$ ve $9 = a + b$) dir.

$a^b = 8$ ise $a^b = 8^1 = 2^3$ olmalıdır.

Buradan, (a = 8 ve b = 1) veya (a = 2 ve b = 3) tür.

$9 = a + b$ olduğundan a = 8 ve b = 1 dir.

Buna göre, $a \cdot b = 8 \cdot 1 = 8$ olur.

Cevap A

3.

$A = \{x: x^2 < 17, x \in \mathbb{Z}\}$ ise

x^2 sayısı 0, 1, 4, 9,ve 16 değerlerini alır.

x sayısı tam sayı olduğundan,

$x \in \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4\}$ olur.

Buna göre, s(A) = 9 dur.

$B = \{y: (y^2 - 1)(y + 3) = 0, y \in \mathbb{Z}\}$ ise

$y^2 - 1 = 0$ veya $y + 3 = 0$

$(y - 1)(y + 1) = 0$ veya $y + 3 = 0$

y = 1 veya y = −1 veya y = −3 tür.

Bu durumda $B = \{1, -1, -3\}$ olur.

Buna göre, s(B) = 3 tür.

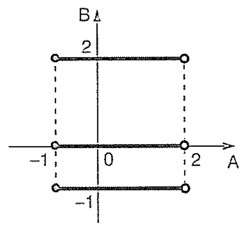
$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

$= 9 \cdot 3$

$= 27$ olur.

Cevap B

4.



Şekilde verilen $A \times B$ nin grafiğine göre,

A kümesi, [−1, 2) ve B kümesi, {−1, 0, 2} dir.

A kümesi, $A = \{x: -1 \leq x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ biçiminde de yazılabilir.

Buna göre, $A \cap B = \{-1, 0\}$ dır. 2 elemanı B kümesinin elemanı olmasına rağmen A kümesinin elemanı olmadığından kesişim kümesine alınmadı.

Cevap C

5.

A = {−1, 0, 1, 2}

$B = \{x: |x| \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$|x| \leq 1$ ise $-1 \leq x \leq 1$ dir.

Bu durumda, B = {−1, 0, 1}

$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$

$s(A \cup B) = 4$ tür.

$C = \{x: x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$ ise

$x^2 - 1 = 0$ ise $(x - 1)(x + 1) = 0$

ise x = −1 veya x = 1 dir.

Bu durumda, C = {−1, 1} dir.

$B - C = \{-1, 0, 1\} - \{-1, 1\} = \{0\}$ dır.

$s(B - C) = 1$ dir.

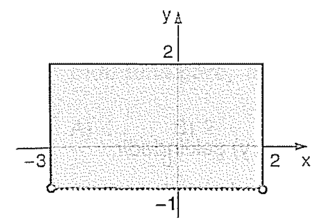
$s[(A \cup B) \times (B - C)] = s(A \cup B) \cdot s(B - C)$

$= 4 \cdot 1$

$= 4$ olur.

Cevap E

6.



Grafiği verilen kartezyen çarpımın birinci bileşeni A kümesi, ikinci bileşeni B kümesi olsun.

Bu durumda, A kümesi x eksenini −3 ve 2 noktalarında kesen düşey doğru ve arasındaki sayılamayan çokluktaki elemanları içerir.

Buna göre, A = [−3, 2] dir.

B kümesi y eksenini −1 ve 2 noktalarında kesen yatay doğru ve arasındaki sayılamayan çokluktaki elemanları içerir. y = −1 doğrusu kesik çizgilerle gösterildiğinden B kümesinin elemanı değildir.

Buna göre, B = (−1, 2] dir.

Bu durumda, grafiği verilen kartezyen çarpım,

$A \times B = [-3, 2] \times (-1, 2]$ olur.

Cevap D

7.

A = {1, b, c, 4}

B = {b, c, 4, e, f, g, k, l}

C = {c, 4, e, r} olduğuna göre,

$B \cap C = \{c, 4, e\}$ olur. Buna göre,

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[A \times (B \cap C)]$

$= s(A) \cdot s(B \cap C)$

$= 4 \cdot 3$

$= 12$ olur.

Cevap B

8.

$A = \{x: |x| \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{x: -3 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

olduğuna göre, s(A) = 7 dir.

$B = \{x: -2 \leq x < 1, x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{-2, -1, 0\}$

olduğuna göre, s(B) = 3 tür.

Buna göre,

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

$= 7 \cdot 3$

$= 21$ olur.

Cevap A

9.

$A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\} = [-1, 3]$

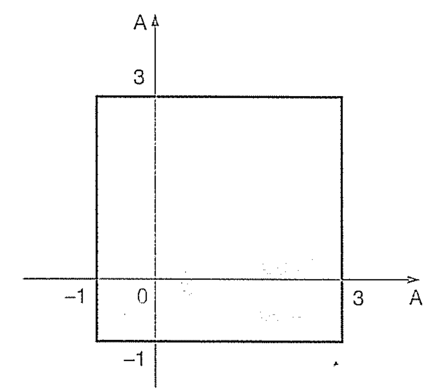
olduğuna göre,

A kümesi, [−1, 3] aralığındaki tüm reel sayıları kapsamaktadır.

$A \times A$ kümesinin grafiği çizilirken A kümesinin elemanları hem x değerlerini, hem de y değerlerini oluşturur. Grafik çizilirken x = −1 ile x = 3 ve y = −1 ile y = 3 doğruları çizilir.

Oluşan dikdörtgenin alanı bize $A \times A$ nın grafiğini verir.

Bu durumda, $A \times A$ nın grafiği bir kenarının uzunluğu 4 birim olan aşağıdaki gibi bir karedir.



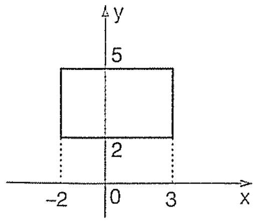
Buna göre, bu bölgenin alanı:

$4^2 = 16$ birim karedir.

Cevap C

10.

A = [– 2, 3] ve B = [2, 5] olmak üzere, A×B kümesini oluşturan noktalar aşağıdaki taralı bölgedir.



Şekildeki taralı alan

$3 \cdot 5 = 15$ br^2 olduğuna göre, A × B kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsünün belirttiği alan 15 br^2 dir.

Cevap E

11.

A = {1, 2}, C = {1, 5} ise

A ∩ C = {1} ve s(A ∩ C) = 1 dir.

B = {2, 3} ise s(B) = 2 dir.

Buna göre,

$s[B\times(A\cap C)] = s(B)\cdot s(A\cap C)$

$= 2 \cdot 1$

$= 2$ dir.

Cevap D

12.

$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ ... (☆)

$s(B\cap C) = 6$

olduğuna göre,

$s[(A\times B)\cap(A\times C)] = 30$

$s[A\times(B\cap C)] = 30$

$s(A)\cdot s(B\cap C) = 30$

$s(A)\cdot 6 = 30$

$s(A) = 5$ olur.

Cevap A

13.

M = {–1, 2, 3} ve

N = {x : –2 < x ≤ 1, x ∈ ℝ}

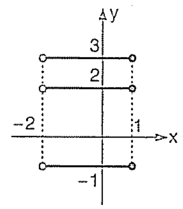
kümeleri veriliyor.

N×M kümesinin elemanları (x, y) şeklindedir.

–2 < x ≤ 1 ve y, –1, 2, 3 değerlerini alıyor.

y = –1, y = 2, y = 3 doğruları çizilir ve x = –2 ile x = 1 doğruları arasında kalan bölgedeki kısmı alınır.

Buna göre, N×M nin grafiği aşağıdaki gibidir.



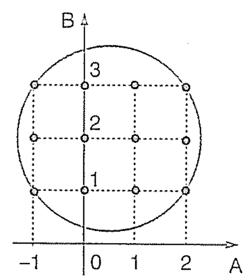
Cevap B

14.

A = {–1, 0, 1, 2}

B = {1, 2, 3}

kümelerinin kartezyen çarpım kümesi olan A × B nin grafiği aşağıdaki on iki noktadır.



Görüldüğü gibi kümenin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çember;

(– 1, 1), (– 1, 3), (2, 1), (2, 3) noktalarından geçen çemberdir.

Bu dört nokta; eni 3 birim ve boyu 2 birim olan bir dikdörtgenin köşeleri gibi düşünülebilir. Bu dikdörtgenin köşegeni, istenen çemberin çapıdır.

Buna göre, kümenin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin çapı, pisagor bağıntısından:

$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ birimdir.

Cevap D

1.

(3a – 1, b + 5) = (–7, 9)

olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

A) 4 B) 2 C) –2 D) –3 E) –6

2.

A×B = {(2, 0), (4, 0), (2, 2), (4, 2), (2, 4), (4, 4)}

olduğuna göre, s(B) kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.

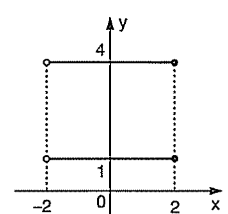
A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {1, 2, 3}

olduğuna göre, s(A × B) kaçtır?

A) 7 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

4.



Yukarıdaki şekilde A × B nin grafiği verilmiştir.

Buna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [1, 4] B) (1, 4) C) (–2, 2) D) (–2, 2] E) {1, 4}

5.

A × B = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

olduğuna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1, 2} B) {1, 3} C) {1, 2, 3} D) {2, 3} E) {1, 4}

6.

s(B∩C) = 2

s[(A×B)∩(A×C)] = 10

olduğuna göre, s(A) kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

A = {x : x^2 < 10 ve x doğal sayı}

A ⊂ B

olduğuna göre, aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi A × B nin elemanı __olabilir__?

A) (1, 4) B) (–1, 1) C) (5, 1) D) (5, 6) E) (6, 1)

8. A ⊂ B olmak üzere,

s[(A × B) ∪ (A × C)] = 48

olduğuna göre, s(B ∪ C) nin alabileceği __en küçük__ değer kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 16 D) 18 E) 24

9.

$$A = \left\{x : \left|\frac{x-1}{2}\right| \leq 2,\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

olduğuna göre, A × A (kartezyen çarpım) **kümesinin koordinat sisteminde oluşturduğu yüzeyin alanı kaç birim karedir?**

A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

10.

s(A × B) = 3

s(B × C) = 5

olduğuna göre, s(A × C) kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 8 E) 15

11.

s(A) = 4

s(A ∪ B) = 7

olduğuna göre, (A × B) kümesinin eleman sayısı <u>en çok</u> kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

12.

A × B = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1),(1, 2), (1, 3)}

B × C = {(1, 2), (2, 2), (3, 2)}

kümeleri veriliyor.

Buna göre, (A ∪ C) ∩ (B ∪ C) kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0, 3} B) {2, 3} C) {1} D) {1, 2} E) {0, 1, 2}

13.

A = [6, 10]

B = [8, 12]

olduğuna göre, (A × B) ∩ (B × A) kartezyen çarpımının sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

14.

A = {0, 1, 8}

B = {–1, –7}

kümeleri veriliyor.

A × B kümesinin elemanlarını dışarıda bırakmayan <u>en küçük</u> çemberin yarıçapı kaç birimdir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) 3 E) 5

15. A, B, C birbirinden farklı birer küme olmak üzere,

s(A × B × C) = 24

olduğuna göre, s(A ∪ B ∪ C) <u>en çok</u> kaçtır?

A) 13 B) 19 C) 23 D) 25 E) 26

16.

$$\frac{s(A)}{s(A \times B)}$$

ifadesi bir tam sayı belirttiğine göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) {0, 1} B) {1} C) {1, 2} D) {0, 1, 2} E) {0, 1, 2, 3}

1.

A × B = {(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)}

olduğuna göre, A ∩ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

video çözümü

2.

A = {3, 5, 6, 10}

B = {x : 3 < x < 10 ve x ∈ ℤ}

olduğuna göre, s(A × B) kaçtır?

A) 0 B) 8 C) 16 D) 20 E) 24

video çözümü

3.

A = {a, b, c}

B = {c, d}

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi A × B nin bir elemanıdır?

A) (d, a) B) (c, b) C) (c, d) D) (a, b) E) (d, b)

4.

A = {5, 7, 9}

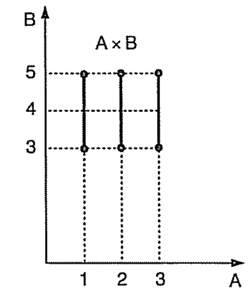
B = {m, n}

C = {k, m, t}

olduğuna göre, (A × B) ∪ (A × C) kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

5.



Yukarıda A × B nin grafiği verilmiştir.

Buna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {x | 1 ≤ x < 4, x ∈ ℕ}

B) {x | 1 ≤ x < 4, x ∈ ℝ}

C) {x | 1 < x < 5, x ∈ ℕ}

D) {x | 3 ≤ x ≤ 5, x ∈ ℤ}

E) {x | 3 ≤ x ≤ 5, x ∈ ℝ}

6.

A = {x | –3 < x < 3, x ∈ ℕ}

B = {x | 4 < x < 6, x ∈ ℤ}

olduğuna göre, A × B aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) {(0, 5), (1, 5), (2, 5)}

B) {(0, 5), (1, 5), (2, 5), (3, 5)}

C) {(5, 0), (5, 2), (5, 1)}

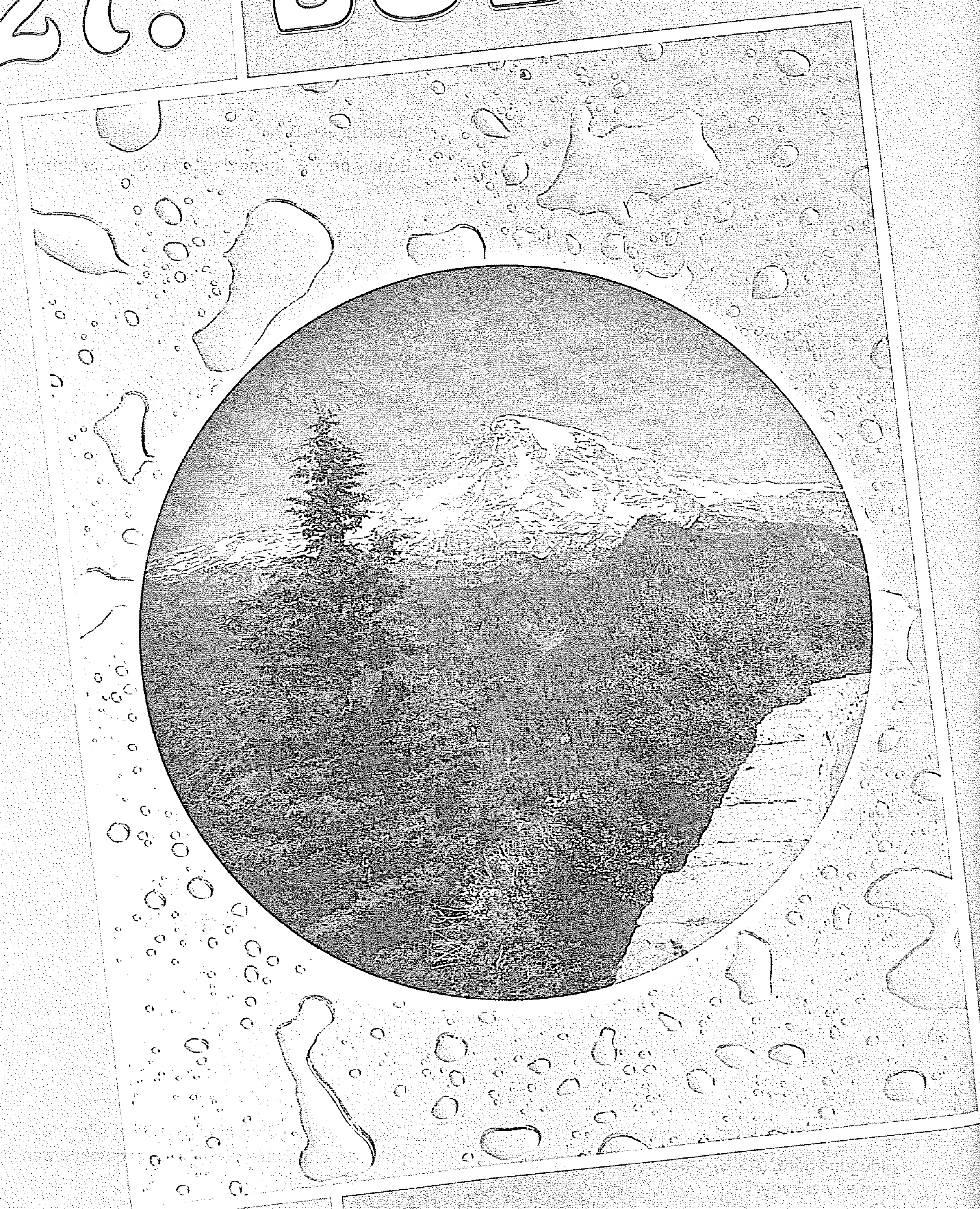
D) {(5, 3), (5, 2), (5, 1), (5, 0)}

E) {(0, 5), (1, 5), (2, 5), (5, 0), (5, 2), (5, 1)}

7. **K(2p + 10, p + 3) noktası analitik düzlemde 4. bölgede olduğuna göre, p aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?**

A) –3 B) –4 C) –5 D) –6 E) –7

27. BÖLÜM



Bağıntı

A. TANIM

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere, $A \times B$ nin β gibi herhangi bir alt kümesine, A dan B ye bağıntı denir.

Uygulama

$A = \{1, 3\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$ kümeleri için,

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$ olur.

Kartezyen çarpım kümesinin her bir alt kümesi A dan B ye bir bağıntıdır. $A \times B$ nin eleman sayısı 6 (ve 6 elemanlı bir kümenin alt küme sayısı $2^6 = 64$) olduğu için, A dan B ye tanımlı $2^6 = 64$ tane bağıntı vardır.

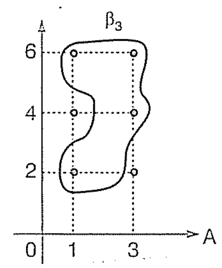
Bu bağıntılardan üçünü yazalım.

$\beta_1 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 6)\}$

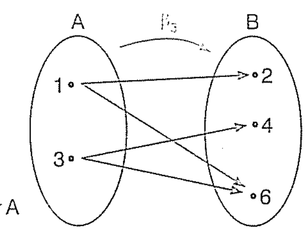
$\beta_2 = \{(1, 4)\}$

$\beta_3 = \{(1, 2), (1, 6), (3, 4), (3, 6)\}$

β_3 bağıntısının grafiği ve şeması aşağıda gösterilmiştir.



β_3 ün grafiği



β_3.ün şeması

Sonuç

$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A dan B ye bağıntı sayısı 2^{mn} dir.

Örnek .. 1

s(A) = 2

s(B) = 3

olduğuna göre, A dan B ye tanımlanabilecek tüm bağıntıların sayısını bulalım.

Çözüm

s(A) = 2 ve s(B) = 3 ise,

$s(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$ dır.

Bu durumda A dan B ye tanımlanabilecek tüm bağıntıların sayısı, 2^6 dır.

Uygulama

$s(B \times A) = 3 \cdot 2 = 6$ olmak üzere, B den A ya tanımlanabilecek tüm bağıntıların sayısı, 2^6 dır.

Örnek .. 2

$\beta = \{(x, y) : |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

bağıntısının grafiğini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm

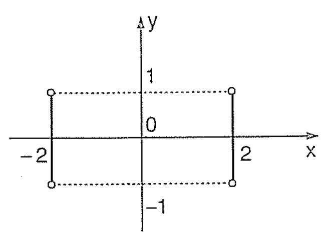
$\beta = \{(x, y) : |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

bağıntısının elemanları $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin alt kümesi olan (x, y) şeklindeki ikililerden oluştuğuna göre,

$|x| = 2$ ise, $(x = 2$ veya $x = -2)$ dir.

$|y| < 1$ ise, $-1 < y < 1$ dir.

$\beta = \{(x, y) : |x| = 2 \text{ ve } |y| < 1, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ olmak üzere, β bağıntısının grafiği Ox eksenine dik iki doğru parçasıdır.



β nın grafiği

Örnek .. 3

$A = \{x : x^2 < 10,\ x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \left\{x : \frac{15}{x} = k,\ x \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

olduğuna göre, A dan B ye tanımlanabilecek tüm bağıntıların sayısını bulalım.

Çözüm

$A = \{x : x^2 < 10, x \in \mathbb{Z}\}$ olduğu için, karesi 10 dan küçük x tam sayıları −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 tür.

Buna göre,

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ve $s(A) = 7$ dir. ... (★)

$B = \left\{x : \frac{15}{x} = k,\ x \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olduğu için, 15 i tam bölen pozitif x tam sayıları 1, 3, 5 ve 15 tir. Buna göre,

$B = \{1, 3, 5, 15\}$ ve $s(B) = 4$ tür. ... (★★)

s(A) = 7 ve s(B) = 4 olduğuna göre, A dan B ye tanımlanacak bağıntı sayısı,

$2^{s(A \times B)} = 2^{s(A) \cdot s(B)} = 2^{7 \cdot 4} = 2^{28}$ dir.

Örnek .. 4

s(A) = 3

s(B) = 4

olduğuna göre, A dan B ye tanımlanacak tüm bağıntılardan kaç tanesinin 3 elemanlı olduğunu bulalım.

Çözüm

s(A) = 3 ve s(B) = 4 ise, $s(A \times B) = 12$ dir.

Bizden istenen 12 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümeleri sayısıdır.

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220$$

olduğuna göre, A dan B ye tanımlanacak tüm bağıntılardan 220 tanesi 3 elemanlıdır.

Tanım

A × A nın herhangi bir alt kümesine, **A dan A ya bir bağıntı** ya da A da bir **bağıntı** denir.

Örnek .. 5

A = {2, 3, 4, 5} da tanımlı

$\beta = \{(x, y) : x = y\}$

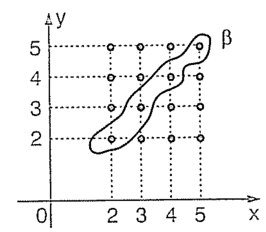
bağıntısını liste yöntemiyle ve analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm

β bağıntısının elemanlarını oluşturan ikililerin birinci bileşeni ile ikinci bileşenlerinin eşit olması isteniyor.

Buna göre, $\beta = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ olur.

Şimdi de ikilileri analitik (koordinat) düzlemde gösterelim.



β bağıntısının grafiği

Kural

(x, y) ∈ β ise, β(x) = y dir.

Uygulama

$\beta = \{(1, 2), (2, 5)\}$

ise, β(1) = 2, β(2) = 5 tir.

B. BİR BAĞINTININ TERSİ

$\beta = \{(x, y) : x \in \mathbb{A} \text{ ve } y \in \mathbb{B}\}$ bağıntısının tersi,

$\beta^{-1} = \{(y, x) : x \in \mathbb{A} \text{ ve } y \in \mathbb{B}\}$ dir.

β^{-1} aşağıdaki biçimde de gösterilebilir.

$\beta^{-1} = \{(x, y) : x \in \mathbb{B} \text{ ve } y \in \mathbb{A}\}$

Uygulama

$\beta = \{(1, 2), (3, 5)\}$

ise, $\beta(1) = 2$, $\beta^{-1}(2) = 1$ dir.

Örnek .. 6

$\beta = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$

bağıntısının tersini bulalım.

Çözüm

Yapacağımız iş β daki ikililerin birinci bileşenleri ile ikinci bileşenlerinin yerlerini değiştirmektir.

Buna göre,

$\beta = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ ise,

$\beta^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (7, 3)\}$ olur.

Örnek .. 7

$\beta = \{(x, y) : 3x + 2y = 11\}$

$\alpha = \{(x, y) : x + y = 4\}$

olduğuna göre, $\beta^{-1} \cap \alpha$ yı bulalım.

Çözüm

$\beta = \{(x, y) : 3x + 2y = 11\}$ ise,

$\beta^{-1} = \{(x, y) : 3y + 2x = 11\}$ dir.

$(3y + 2x = 11$ ve $x + y = 4)$ ise, $(x = 1$ ve $y = 3)$ olur.

Buna göre, $(1, 3) \in \beta^{-1}$ ve $(1, 3) \in \alpha$ dır.

Bu durumda, $\beta^{-1} \cap \alpha = \{(1, 3)\}$ olur.

Sonuç

1) $\beta \subset A \times B$ ise $\beta^{-1} \subset B \times A$ dır.
2) $\beta(x) = y$ ise $\beta^{-1}(y) = x$ tir.
3) $s(\beta) = s(\beta^{-1})$ dir.

C. BAĞINTININ ÖZELLİKLERİ

Buraya kadar, A dan B ye veya A dan A ya tanımlanan bağıntıları inceledik. Şimdi A da tanımlanan bağıntılara ait özellikleri inceleyeceğiz.

1. Yansıma Özelliği

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun.

Her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise,

β bağıntısının yansıma özelliği vardır, diğer bir ifadeyle β yansıyandır denir.

Uygulama

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

bağıntısı yansıyan değildir.

Çünkü, $d \in A$ olduğu hâlde $(d, d) \notin \beta$ dır.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

bağıntısı yansıyandır.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı,

✓ $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ bağıntısı yansıyan değildir. Çünkü $3 \in A$ olduğu hâlde $(3, 3) \notin \beta_1$ dir.

✓ $\beta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ bağıntısı yansıyandır.

✓ $\beta_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$ bağıntısı da yansıyandır.

Örnek .. 8

$A = \{3, 7, 9\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı yansıyandır.

Buna göre, kaç farklı β bağıntısı tanımlanabileceğini bulalım.

Çözüm

$A \times A = \{(3, 3), (7, 7), (9, 9), (3, 7), (3, 9), ...\}$ olmak üzere,

$s(A \times A) = 3 \cdot 3 = 9$ dur.

Yazılacak β da bu 9 elemandan $(3, 3), (7, 7), (9, 9)$ kesinlikle olmalıdır. Geriye kalan

$9 - 3 = 6$ elemanla

$2^6 = 64$ tane bağıntı (alt küme) yazılır. Bu 64 tane bağıntının her birine $(3, 3), (7, 7), (9, 9)$ elemanları yazılırsa 64 tane bağıntının her biri yansıyan olur.

Bu 64 tane bağıntıdan üçü aşağıda verilmiştir.

$\{(3, 3), (7, 7), (9, 9)\}$,

$\{(3, 3), (7, 7), (9, 9), (3, 7)\}$,

$\{(3, 3), (7, 7), (9, 9), (3, 9), (7, 3)\}$

Buna göre $A = \{3, 7, 9\}$ kümesinde, yansıyan 64 tane bağıntı tanımlanabilir.

2. Simetri Özelliği

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise

β bağıntısının simetri özelliği vardır, diğer bir ifadeyle β simetriktir denir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

bağıntısı simetrik değildir.

Çünkü $(1, 3) \in \beta$ olduğu hâlde $(3, 1) \notin \beta$ dır.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(3, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

bağıntısı simetriktir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(3, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$

bağıntısı hem yansıyandır hem de simetriktir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

bağıntısı yansıyan değildir; ama simetriktir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ bağıntısı simetrik değildir. Çünkü $(2, 3) \in \beta_1$ olduğu hâlde $(3, 2) \notin \beta_1$ dir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı,

✓ $\beta_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ bağıntısı simetrik değildir. Çünkü $(1, 3) \in \beta_2$ olduğu hâlde $(3, 1) \notin \beta_2$ dir.

✓ $\beta_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$ bağıntısı simetriktir.

Örnek .. 9

$K = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı yansıyandır; ama simetrik değildir.

Buna göre, β nın eleman sayısının <u>en küçük</u> değerini bulalım.

Çözüm

$K \times K = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), ...\}$ dır.

β yansıyansa, β da $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ elemanları kesinlikle olmalıdır.

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ bağıntısı hem yansıyandır, hem de simetriktir.

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ bağıntısı yansıyandır; ama simetrik değildir.

Buna göre, K kümesinde tanımlı, yansıyan ama simetrik olmayan bir bağıntının eleman sayısı en az 4 tür.

3. Ters Simetri Özelliği

β, A da tanımlı bir bağıntı olsun.

$x \neq y$ iken her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise

β bağıntısının ters simetri özelliği vardır; diğer bir ifadeyle β bağıntısı ters simetriktir denir.

Uyarı

β bağıntısında (x, x) şeklindeki ikililerin bulunması β nın ters simetri özelliğini bozmaz.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$

bağıntısı ters simetrik değildir.

Çünkü $(1, 2) \in \beta$ olduğu hâlde $(2, 1) \in \beta$ dır.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(3, 3), (2, 1), (1, 3)\}$

bağıntısı ters simetriktir.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

bağıntısında; yansıma, simetri, ters simetri özellikleri vardır.

Uygulama

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

bağıntısı ters simetrik değildir. Çünkü $(1, 3) \in \beta$ olduğu hâlde $(3, 1) \in \beta$ dır.

Bu bağıntı simetrik de değildir. Çünkü $(2, 1) \in \beta$ olduğu hâlde $(1, 2) \notin \beta$ dır.

Uyarı

Simetrik olmayan bir bağıntının ters simetrik olacağı veya ters simetrik olmayan bir bağıntının simetrik olacağı sonucu çıkarılmamalıdır.

Bu iki özelliğin ikisini aynı anda sağlayan bağıntılar olabileceği gibi iki özelliğin ikisini de sağlamayan bağıntılar olabilir.

4. Geçişme Özelliği

β, bir bağıntı olsun.

Her $[(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta]$ iken, $(x,z)\in\beta$ ise

β bağıntısının geçişme özelliği vardır veya β, geçişkendir denir.

Uygulama

$A=\{1, 3, 5\}$ kümesinde tanımlı

$\beta=\{(1, 3), (3, 5), (3, 3)\}$

bağıntısının geçişme özelliği yoktur.

Çünkü, $(1, 3)\in\beta$ ve $(3, 5)\in\beta$ iken, $(1, 5)\notin\beta$ dır.

Uygulama

$A=\{1, 3, 5\}$ kümesinden tanımlı

$\beta=\{(1, 3), (3, 5), (3, 3), (1, 5)\}$

bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Uygulama

$A=\{2, 4, 6, 8\}$ kümesinden tanımlı

$\beta=\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$

bağıntısının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinin hepsi vardır.

Uygulama

$A=\{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$ bağıntısının geçişme özelliği yoktur. Çünkü,

$(3, 2)\in\beta_1$ ve $(2, 3)\in\beta_1$ iken $(3, 3)\notin\beta_1$ dir.

Uygulama

$A=\{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta_3=\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 2)\}$ bağıntısının geçişme özelliği yoktur. Çünkü,

$(3, 2)\in\beta_3$ ve $(2, 3)\in\beta_3$ iken $(3, 3)\notin\beta_3$ tür.

Uygulama

$A=\{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta_2=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ bağıntısı geçişkendir.

Uygulama

$A=\{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı $\beta=\{(1, 2)\}$ bağıntısı geçişkendir.

Örnek .. 10

Gerçel sayılar kümesinde tanımlanan,

$\beta=\{(x, y): x+1=y\}$

bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri, geçişme özelliklerinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

$\beta=\{(x, y): x+1=y\}$ ise, β bağıntısındaki ikililerin apsislerinin 1 fazlası ordinatına eşittir. β daki ikililerden bazıları, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ dir.

β da yansıma özelliği yoktur. Çünkü

her $x\in A$ için $(x,x)\in\beta$ değildir.

β da simetri özelliği yoktur. Çünkü

her $(x,y)\in\beta$ için $(y,x)\in\beta$ değildir.

β da ters simetri özelliği vardır. Çünkü

$x\neq y$ iken her $(x,y)\in\beta$ için $(y,x)\notin\beta$ dır.

β da geçişme özelliği yoktur. Çünkü

her $[(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta]$ iken, $(x,z)\in\beta$ değildir.

Örnek .. 11

$A=\{1, 2, 4\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta=\left\{(x,y):\frac{y}{x}=n \text{ ve } x,y\in A \text{ ve } n \text{ tam sayı}\right\}$$

bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri, geçişme özelliklerinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

β bağıntısına ait (x, y) ikilisindeki x sayısı y sayısını tam böldüğüne ve $A=\{1, 2, 4\}$ olduğuna göre,

$\beta=\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (4, 4)\}$ olur.

Her $x\in A$ için $(x, x)\in\beta$ olduğundan β bağıntısının yansıma özelliği vardır.

Her $(x, y)\in\beta$ için $(y, x)\notin\beta$ olduğundan β bağıntısının ters simetri özelliği vardır.

Her $[(x, y)\in\beta$ ve $(y, z)\in\beta]$ için $(x, z)\in\beta$ olduğundan β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

D. DENKLİK BAĞINTISI

Herhangi bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı; yansıma, simetri ve geçişme özelliğini sağlıyorsa denklik bağıntısı adını alır.

β, A kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun.

$(x, y)\in\beta$ ise x ve y elemanları β bağıntısına göre denktir denir ve $x\equiv y$ şeklinde yazılır.

β, A kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. A da x elemanına denk olan bütün elemanların kümesine x in denklik sınıfı denir ve $\overline{x}$ şeklinde gösterilir.

$\overline{x}=\{y:\ y\in A \text{ ve } (x,y)\in\beta\}$ olur.

Örnek .. 12

$A=\{1, 5, 7\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta=\{(1, 1), (1, 5), (5, 5), (7, 7), (5, 1)\}$

bağıntısını inceleyelim.

Çözüm

β bağıntısında; yansıma, simetri ve geçişme özelliği olduğundan β denklik bağıntısıdır.

$(1, 1)\in\beta$ ve $(1, 5)\in\beta$ olduğundan $\overline{1}=\{1, 5\}$ olur.

Benzer düşünceyle,

$\overline{5}=\{1, 5\}$, $\overline{7}=\{7\}$ olur.

β da $\overline{1}=\{1, 5\}$ ise $1\equiv1$ ve $1\equiv5$ tir.

Örnek .. 13

Tam sayılar kümesinde tanımlı,

$$\beta=\left\{(x,y):\frac{x-y}{5}=n \text{ ve } n,x,y \text{ tam sayı}\right\}$$

bağıntısı verilmiştir.

3 ün denklik sınıfını bulalım.

Çözüm

β bağıntısında; yansıma, simetri ve geçişme özelliği olduğundan β denklik bağıntısıdır.

$x=3$ için,

$\frac{x-y}{5}=\frac{3-y}{5}$ in tam sayı olması için, y tam sayısı,

... $-7, -2, 3, 8,$ ... dır.

Buna göre, β daki bazı elemanlar,

$(3, -7)$, $(3, -2)$, $(3, 3)$, $(3, 8)$ dir.

Buna göre,

$\overline{3}=\{\ldots,-7, -2, 3, 8, \ldots\}$ dır.

β da $-7\equiv3$, $-2\equiv3$, $3\equiv3$, $8\equiv3$ olur.

Benzer düşünceyle, aşağıdakileri yazabiliriz.

$\overline{0}=\{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$\overline{1}=\{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

$\overline{2}=\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$\overline{4}=\{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

1.

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi A dan B ye bir bağıntıdır?

A) $\{(a, 1), (2, b)\}$

B) $\{(1, 1), (2, a)\}$

C) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

D) $\{(a, 1), (a, 2), (3, c)\}$

E) $\{(b, 2), (c, 3)\}$

2.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi A dan B ye bir bağıntı <u>değildir</u>?

A) $\beta = \{(1, a)\}$

B) $\beta = \{(2, b), (2, c)\}$

C) $\beta = \{(3, a), (3, b), (3, c)\}$

D) $\beta = \{(1, a), (1, b), (1, 2)\}$

E) $\beta = \{(2, a), (3, b)\}$

3.

$A = \{\Delta, 1, 2\}$

$B = \{-2, 5, 7\}$

olduğuna göre, B den A ya bağıntı sayısı kaçtır?

A) 2^9 B) 2^8 C) 2^7 D) 2^6 E) 2^5

4.

$A = \{3, 5\}$

kümesi veriliyor.

A dan B ye tanımlanan bağıntı sayısı 64 olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$\alpha = \{(3, 7), (2, 8), (-1, 1), (2, 0), (4, 3)\}$

bağıntısı veriliyor.

Aşağıdakilerden hangisi α^{-1} in (α nın tersinin) **bir elemanıdır?**

A) $(1, -1)$ B) $(8, 3)$ C) $(4, 3)$ D) $(1, 1)$ E) $(2, 1)$

6.

$\beta_1 = \{(x, y) \mid x + y = 10, x, y \in \mathbb{R}\}$

$\beta_2 = \{(x, y) \mid 3y = x + 2, x, y \in \mathbb{R}\}$

olduğuna göre, $\beta_1 \cap \beta_2^{-1}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(2, 4)\}$ B) $\{(3, 7)\}$ C) $\{(4, 2)\}$ D) $\{(6, 3)\}$ E) $\{(7, 3)\}$

7. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x, y) \mid y > x\}$

bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Ters simetrik değildir. B) Simetriktir.

C) Yansıyandır. D) Geçişkendir.

E) $s(\beta) = 4$

8. β, üçgenler kümesinde tanımlanan benzerlik bağıntısı olmak üzere,

I. β, yansıyandır.

II. β, simetriktir.

III. β, Ters simetriktir.

IV. β, geçişkendir.

Buna göre, bu yargılardan hangileri doğrudur?

A) I ve II B) I, II ve IV C) I, III ve IV D) Yalnız I E) Yalnız III

9.

$A = \{x: |x - 2| \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x: x < 7, x \text{ asal sayı}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, B den A ya tanımlanan bağıntı sayısı kaçtır?

A) 7^3 B) 3^7 C) 2^{21} D) 2^{25} E) 2^{42}

10. $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\beta = \{(x, y): x + 3y = 12, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

bağıntısı tanımlanıyor.

Buna göre, $\beta \cap \beta^{-1}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(3, 3)\}$ B) $\{(1, 2)\}$ C) $\{(2, 2)\}$ D) $\{(2, 4)\}$ E) $\{(5, -1)\}$

11. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(x, y): (x - y)(x + y - 3) = 0\}$

bağıntısı veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Ters simetrik değildir. B) Simetriktir.

C) $s(\beta) = 8$ D) Geçişkendir.

E) Yansıma özelliği yoktur.

12. Tam sayılar kümesinde tanımlı,

$\beta = \{(x, y): mx + 4y = 5, x \neq y\}$

bağıntısı veriliyor.

β bağıntısı simetrik olduğuna göre, m kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

13.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

kümesinde tanımlı ters bağıntı sayısı kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 2^5 E) 2^{25}

14.

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

kümesinde tanımlanabilecek yansıyan bağıntı sayısı kaçtır?

A) 2^{12} B) 2^{10} C) 2^9 D) 2^8 E) 2^6

15.

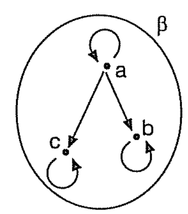
$\mathbb{R}$ de $\beta = \{(x, y) \mid ax - y = 6\}$

bağıntısı tanımlanıyor.

$(1, 6) \in \beta$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 15 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

16. $A = \{a, b, c\}$ kümesinde β bağıntısı şekildeki gibi tanımlanmıştır.



Buna göre, β bağıntısında,

I. yansıma özelliği vardır.

II. simetri özelliği vardır.

III. ters simetri özelliği vardır.

IV. geçişme özelliği vardır.

Yargılarından hangileri doğrudur?

A) I ve II B) II, III ve IV C) I, III ve IV D) Yalnız I E) Yalnız III

1.

A dan B ye bir bağıntı demek A×B nin bir alt kümesi demektir. Yani birinci bileşenler A kümesinin, ikinci bileşenler B kümesinin elemanı olmalıdır.

(b, 2) ve (c, 3) ikilileri için b ve c, A nın

2 ve 3 de B nin elemanı olduğundan,

{(b, 2), (c, 3)} kümesi A dan B ye bir bağıntıdır.

Cevap E

2.

A, B, C ve E seçeneklerindeki β kümesinin tüm elemanlarının birinci bileşeni, A kümesinin ikinci bileşenleri de B kümesinin elemanı olduğundan β kümesi A dan B ye bir bağıntıdır. Fakat D seçeneğindeki β kümesinin elemanı olan (1, 2) ikilisinde $2 \notin B$ olduğundan β kümesi A dan B ye bir bağıntı değildir.

Cevap D

3.

$A = \{\Delta, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, 5, 7\}$ olmak üzere,

$s(A) = 3$, $s(B) = 3$ tür.

B den A ya bağıntı sayısı demek; B×A nın alt küme sayısı demektir.

Buna göre,

$2^{s(B \times A)} = 2^{s(B) \cdot s(A)}$

$= 2^{3 \cdot 3}$

$= 2^9$ olur.

Bu durumda, B den A ya 2^9 tane bağıntı tanımlanabilir.

Cevap A

4.

A dan B ye tanımlanan bağıntı sayısı demek A × B nin alt küme sayısı demektir.

$A = \{3, 5\}$ ise $s(A) = 2$ dir.

$s(B) = b$ olsun.

$s(A \times B) = 2 \cdot b$ dir.

A × B kümesinin alt küme sayısı,

$2^{s(A \times B)} = 2^{2 \cdot b}$ dir.

A dan B ye tanımlanan bağıntı sayısı (alt küme sayısı) 64 olduğuna göre,

$64 = 2^{2 \cdot b}$

$2^6 = 2^{2 \cdot b}$ ise $6 = 2 \cdot b$

ise $b = 3$ tür.

Cevap C

5.

$\alpha = \{(3, 7), (2, 8), (-1, 1), (2, 0), (4, 3)\}$

olduğundan

$\alpha^{-1} = \{(7, 3), (8, 2), (1, -1), (0, 2), (3, 4)\}$ olur.

Buna göre, $(1, -1) \in \alpha^{-1}$ dir.

Cevap A

6.

$\beta_1 = \{(x, y) \mid x + y = 10, x, y \in \mathbb{R}\}$

$\beta_2 = \{(x, y) \mid 3y = x + 2, x, y \in \mathbb{R}\}$

$\beta_2^{-1} = \{(x, y) \mid 3x = y + 2, x, y \in \mathbb{R}\}$

$\beta_1 \cap \beta_2^{-1}$ bulmak için ($x + y = 10$ ve $3x = y + 2$) denklemlerinin ortak çözümü yapılır.

($x + y = 10$ ve $y = 3x - 2$) ise, $x + 3x - 2 = 10$

ise, $4x = 12$

ise, $x = 3$ tür. ... (☆)

($y = 3x - 2$ ve $x = 3$) ise, $y = 3 \cdot 3 - 2$

ise, $y = 7$ dir. ... (☆☆)

Buna göre, $\beta_1 \cap \beta_2^{-1} = \{(3, 7)\}$ dir.

Cevap B

7.

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x, y) \mid y > x\}$

$= \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\}$

olur. Bu durumda $s(\beta) = 6$ dır.

Her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ olmadığından β bağıntısının yansıma özelliği yoktur.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısının ters simetri özelliği vardır.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ olmadığından β bağıntısının simetri özelliği yoktur.

Her $[(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta]$ iken $(x, z) \in \beta$ olduğundan β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Örneğin $[(3, 5) \in \beta$ ve $(5, 7) \in \beta]$ iken $(3, 7) \in \beta$ dır.

Buna göre, D seçeneğinde verilen ifade doğrudur.

Cevap D

8.

Her üçgen kendine benzerdir. ($\widehat{ABC} \approx \widehat{ABC}$ dir.) Bu durumda β bağıntısının yansıma özelliği vardır.

$\widehat{ABC} \approx \widehat{DEF}$ iken $\widehat{DEF} \approx \widehat{ABC}$ dir. Bu durumda, β bağıntısının simetri özelliği vardır.

($\widehat{ABC} \approx \widehat{DEF}$ ve $\widehat{DEF} \approx \widehat{KLN}$) iken $\widehat{ABC} \approx \widehat{KLN}$ olduğundan β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Buna göre, verilenlerden I, II ve IV deki ifadeler doğrudur.

Cevap B

9.

$A = \{x : |x - 2| \le 3, x \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere,

$|x - 2| \le 3$ ise $-3 \le x - 2 \le 3$

ise $-1 \le x \le 5$ tir.

$A = \{x : |x - 2| \le 3, x \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tir.

Bu durumda, $s(A) = 7$ dir.

$B = \{x : x < 7, x$ asal sayı$\} = \{2, 3, 5\}$ tir.

Bu durumda, $s(B) = 3$ tür.

B den A ya tanımlanan bağıntı sayısı $2^{s(B) \cdot s(A)}$ dır.

Buna göre, $2^{s(B) \cdot s(A)} = 2^{3 \cdot 7} = 2^{21}$ olur.

Cevap C

10.

1. Yol

$\beta = \{(x, y) : x + 3y = 12, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ ise

$\beta^{-1} = \{(x, y) : y + 3x = 12, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ dir.

$x + 3y = 12$ ... (☆)

$y + 3x = 12$ ... (☆☆)

denklem sisteminin çözüm kümesi $\beta \cap \beta^{-1}$ dir.

(☆) daki denklemi –3 ile çarpıp elde edilen denklemle (☆☆) daki denklem taraf tarafa toplanırsa, $y = 3$ bulunur. y nin bu değeri (☆) daki denklemde ya da (☆☆) daki denklemde yerine yazılırsa $x = 3$ bulunur.

Bu durumda, $\beta \cap \beta^{-1} = \{(3, 3)\}$ olur.

2. Yol

Verilenlere göre, $\beta \cap \beta^{-1} = \{(x, x)\}$ tir.

($x + 3y = 12$ ve $y = x$) ise $x + 3x = 12$

ise $4x = 12$

ise $x = 3$ tür.

Bu durumda, $\beta \cap \beta^{-1} = \{(x, x)\} = \{(3, 3)\}$ olur.

Cevap A

11.

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x, y) : (x - y)(x + y - 3) = 0\}$ bağıntısı için,

$\beta = \{(x, y) : x - y = 0$ veya $x + y - 3 = 0\}$

$\beta = \{(x, y) : x = y$ veya $x + y = 3\}$

$\beta = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 3), (3, 0), (1, 2),$

$(2, 1)\}$ olur. Bu durumda, $s(\beta) = 8$ dir.

$\forall x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ olduğundan β bağıntısının yansıma özelliği vardır.

$\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ olduğundan β bağıntısının simetri özelliği vardır.

$\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ olmadığından β bağıntısının ters simetrik özelliği yoktur.

$\forall [(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta]$ için $(x, z) \in \beta$ olduğundan β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Örneğin, $[(0, 3) \in \beta$ ve $(3, 0) \in \beta]$ için $(0, 0) \in \beta$ dır.

Buna göre, E seçeneğinde verilen ifade yanlıştır.

Cevap E

12.

1. Yol

$\beta = \{(x, y): mx + 4y = 5, x \neq y\}$ ise

$\beta^{-1} = \{(x, y): my + 4x = 5, x \neq y\}$ dir.

$\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ olduğunda β bağıntısının simetri özelliği vardır. Bu durumda,

$mx + 4y = 5$ ... (☆)

$my + 4x = 5$ ... (☆☆)

denklem sisteminin çözüm kümesi $\beta \cap \beta^{-1}$ dir.

(☆) daki denklem ile (☆☆) daki denklemin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Buna göre,

$mx + 4y = my + 4x$

$mx - my = 4x - 4y$

$m(x - y) = 4(x - y)$

$m = 4$ tür. $(x \neq y)$

2. Yol

Verilenlere göre, β simetrik ise hem (x, y) hem de (y, x) β nın elemanı olmalı.

β yı oluşturan ikililer $mx + 4y = 5$ eşitliğini sağlayacağına göre, bu eşitlikte x ile y nin yeri değiştirildiğinde (simetri özelliğinden) elde edilecek denklem β yı oluşturan ikililer için doğru olmalı. Bunun için

$mx + 4y = 5$ eşitliğindeki x ile y nin kat sayısı eşit olmalıdır.

Buna göre, $m = 4$ olmalıdır.

Cevap B

13.

A da tanımlı ters bağıntı sayısı, bağıntı sayısına eşittir.

$s(A) = 5$

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = 5 \cdot 5 = 25$

olduğu için $A \times A$ nın alt küme sayısı (A da tanımlı bağıntı, diğer bir ifadeyle $A \times A$ da tanımlı bağıntı sayısı) 2^{25} olur.

Buna göre, A kümesinde tanımlı ters bağıntı sayısı da 2^{25} olur.

Cevap E

14.

$A \times A$ kümesinin eleman sayısı:

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = 4 \cdot 4 = 16$ dır.

$A \times A$ nın elemanları arasından

(0, 0), (1, 1), (2, 2) ve (3, 3) ü ayırırsak, kalanlarla 2^{12} tane alt küme (bağıntı) yazılır.

Bu alt kümelerin her birine (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) elemanları yazılırsa, 2^{12} tane yansıma özelliğine sahip bağıntı elde edilir.

Cevap A

15.

$(1, 6) \in \beta$ olduğuna göre, bu ikili $ax - y = 6$ eşitliğini sağlar.

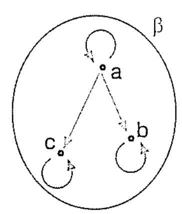
Buna göre,

$a \cdot 1 - 6 = 6$

$a = 12$ olur.

Cevap B

16.



Verilen şemaya göre,

$\beta = \{(a, a), (a, c), (a, b), (c, c), (b, b)\}$ dir.

Her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ olduğundan β bağıntısının yansıma özelliği vardır.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısının ters simetri özelliği vardır.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ olmadığından β bağıntısının simetri özelliği yoktur.

Her $[(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta]$ iken $(x, z) \notin \beta$ olduğu gösterilemediği için β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Buna göre, verilenlerden I., III. ve IV. doğrudur.

Cevap C

1. $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi B den A ya bir bağıntı <u>değildir</u>?

A) {(1, a)} B) {(1, a), (1, b)}

C) {(1, c), (2, c)} D) {(2, b), (b, 2)}

E) {(1, a), (2, a), (3, a)}

2. $A = \{-1, 1, 3\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(a, b) \mid 2a > b,\ a, b \in A\}$

bağıntısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) {(–1, 1), (1, 1), (3, 1)}

B) {(–1, –1), (–1, 1), (–1, 3)}

C) {(1, –1), (1, 1), (3, –1), (3, 1), (3, 3)}

D) {(3, –1), (3, 1), (3, 3)}

E) {(–1, –1), (1, 1), (3, 3)}

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde,

$\beta = \{(x, y) \mid x \leq y\}$

bağıntısı tanımlanıyor.

Buna göre, s(β) kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

4. $\beta = \{(2, 6), (3, 1), (4, 8), (5, 2), (6, 4), (7, 9)\}$

olduğuna göre, β(4) + β(2) kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde,

$\beta = \{(x, y) \mid x + 3y = 8\}$

bağıntısı tanımlanıyor.

Buna göre, $\beta \cap \beta^{-1}$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {(1, 5), (2, 2)} B) {(2, 2)}

C) {(2, 2), (3, 2)} D) {(1, 3), (2, 2)}

E) {(1, 3), (2, 3)}

6. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x, y) : x > y,\ x, y \in A\}$

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7. $\beta = \{(x, y) \mid 5x + 2y = -11$ ve $x, y \in \mathbb{Z}\}$

$(2, m) \in \beta^{-1}$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) –6 B) –5 C) –4 D) –3 E) –2

8. $\beta^{-1} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$

olduğuna göre, $\beta \cap \beta^{-1}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) {(a, a), (b, a), (c, a), (a, b), (b, b), (c, b)}

B) {(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)}

C) {(a, a), (b, b), (c, c)}

D) {(a, c), (b, c)}

E) {(c, a), (c, b)}

1.

$\beta = \{(x, y) : 2x + y = 12, x, y \in \mathbb{N}\}$

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. A kümesinden B kümesine tanımlı α bağıntısı ve B kümesinden A kümesine tanımlı β bağıntısı,

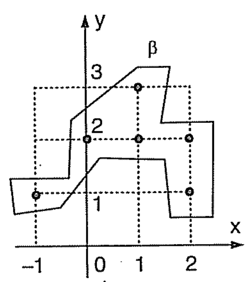
$\alpha = \{(1, 2), (1, 3)\}$

$\beta = \{(2, 4)\}$

olduğuna göre, s(A ∩ B) <u>en az</u> kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.



Yukarıda β bağıntısının grafiği verilmiştir.

Buna göre, β^{-1} bağıntısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) {(–1, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)}

B) {(1, –1), (3, –1), (0, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

C) {(–1, 1), (3, –1), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

D) {(1, –1), (2, 0), (3, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2)}

E) {(2, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 0), (3, –1), (1, –1)}

4.

$\beta = \{(a, b) \mid a - 5b = 30 \text{ ve } a, b \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi bu bağıntının bir elemanı <u>değildir</u>?

A) (5, –5) B) (0, –6) C) (10, 4) D) (60, 6) E) (–20, –10)

5. $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\beta = \{(x, y): 3x + ay = 0\}$

olarak tanımlanıyor.

$(3, -2) \in \beta^{-1}$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) 1 E) 2

6.

A = {5, 6, 7, 8}

B = {3}

olduğuna göre, A kümesinden B kümesine tanımlanabilecek 2 elemanlı bağıntı sayısı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

7.

A = {a, b, c, d}

kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi simetriktir?

A) {(a, a), (b, a), (a, b), (c, d), (b, c)}

B) {(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (b, c)}

C) {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, c)}

D) {(a, a), (a, d), (d, c)}

E) {(a, d)}

8. A = {a, b, c, d} kümesinde tanımlı,

Q = {(a, a), (b, c), (c, b), (a, d)}

bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden kaç tanesi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

K = {a, b, c}

L = {1, 2}

olduğuna göre, K kümesinden L kümesine tanımlanan üç elemanlı bağıntı sayısı kaçtır?

A) 56 B) 35 C) 24 D) 21 E) 20

10.

A = {1, 2, 3, 4}

kümesinde tanımlı β bağıntısı,

I. yansıyandır.

II. simetrik değildir.

III. ters simetrik değildir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan β bağıntısı <u>en az</u> kaç elemanlıdır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı β bağıntısı,

β = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

şeklinde verilmiştir.

Buna göre, β bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangileri vardır?

A) Yansıma, simetri, ters simetri, geçişme

B) Simetri, geçişme

C) Yansıma, simetri, geçişme

D) Simetri, ters simetri

E) Yalnız simetri

12.

A = {m, n, p, r, s}

kümesinde tanımlı yansıyan bağıntıların kaç tanesinde (p, s) elemanı vardır?

A) 2^{5} B) 2^{11} C) 2^{15} D) 2^{19} E) 2^{20}

13.

β = {(1, 3), (3, 1)}

bağıntısına <u>en az</u> kaç eleman daha eklenirse elde edilen bağıntının geçişme özelliği olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlanan,

β = {(2, 2), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

bağıntısından aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi çıkarılırsa oluşan yeni bağıntı ters simetrik olur?

A) (2, 2) B) (2, 1) C) (3, 1) D) (3, 2) E) (3, 3)

15. A = {1, 3, 5, 7, 9} kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(x, y) : x + 2y = 9\}$

bağıntısı veriliyor.

Buna göre, β bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Yansıyandır.

B) Simetriktir.

C) $(5, 2) \in \beta$

D) $s(\beta) = 2$ dir.

E) $(7, 1) \in \beta^{-1}$

28. BÖLÜM

Fonksiyon

A. TANIM

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A dan B ye bir f bağıntısı tanımlansın.

Eğer, A nın her elemanı en az bir kez ve en çok bir kez B nin bir elemanı ile eşleniyor ise f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir ve

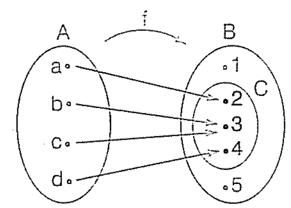
$f: A \rightarrow B$ veya $A \xrightarrow{f} B$

şeklinde gösterilir.

A ya fonksiyonun tanım kümesi, B ye de değer kümesi denir.

A kümesinin elemanlarının B kümesindeki eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir ve f(A) ile gösterilir.

Uygulama



Yukarıdaki şekilde,

$A = \{a, b, c, d\}$ tanım kümesi,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ değer kümesi,

$f(A) = C = \{2, 3, 4\}$ görüntü kümesi ve

$f(A) \subset B$ dir.

Tanım

$f: A \rightarrow B$ ve $(x, y) \in f$ ise

$f: x \rightarrow y$ veya $f(x) = y$

şeklinde gösterilir ve "x in f fonksiyonu altındaki görüntüsü y dir" denir.

Örnek .. 1

A = {2, 3, 4}

B = {1, 4, 5, 6, 8}

f : A → B

f = {(2, 1), (3, 1), (4, 6)}

olduğuna göre, f(2) + f(3) + f(4) ün değerini bulalım.

Çözüm

(2, 1) ∈ f olduğuna göre, f(2) = 1 dir.

(3, 1) ∈ f olduğuna göre, f(3) = 1 dir.

(4, 6) ∈ f olduğuna göre, f(4) = 6 dır.

Buna göre, f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 1 + 6 = 8 dir.

Örnek .. 2

A = {–1, 0, 1}

B = {0, 1}

f : A → B

$f(x) = x^2$

olduğuna göre, f(0) + f(1) in değerini bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^2$ ise,

x = 0 için, $f(0) = 0^2 = 0$ dır.

x = 1 için, $f(1) = 1^2 = 1$ dir.

Buna göre, f(0) + f(1) = 0 + 1 = 1 dir.

Örnek .. 3

A = {–2, –1, 0, 1}

B = {1, 2, 3, 4, 5}

kümeleri veriliyor.

A dan B ye f fonksiyonu

$f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$

biçiminde tanımlansın.

Bu fonksiyonu inceleyelim.

Çözüm

$f(x) = x^2 + 1$ ise,

x = –2 için, $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

x = –1 için, $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

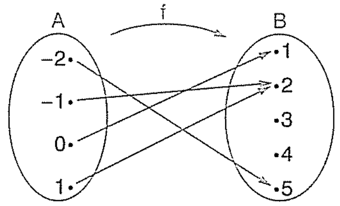
x = 0 için, $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

x = 1 için, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ dir.

Bu fonksiyonun liste yöntemiyle gösterimi aşağıda verilmiştir.

f = {(–2, 5), (–1, 2), (0, 1), (1, 2)} dir.

Bu fonksiyonun şema ile gösterimi aşağıda verilmiştir.



f fonksiyonunun tanım kümesi, A = {– 2, – 1, 0, 1} dir.

f fonksiyonunun değer kümesi, B = {1, 2, 3, 4, 5} tir.

f fonksiyonunun görüntü kümesi, f(A) = {1, 2, 5} tir.

Sonuç

A dan B ye tanımlanan f bağıntısının fonksiyon olması için; aşağıdaki iki koşulun birlikte sağlanması gerekir.

1) Tanım kümesinde (A da) görüntüsü olmayan (açıkta) eleman kalmamalı. Fakat, değer kümesinde (B de) açıkta (eşlenmeyen) eleman kalabilir.
2) Tanım kümesindeki her bir elemanın birden fazla görüntüsü olmamalıdır.

Uygulama

A = {2, 3, 4}

B = {a, b, c, d}

f : A → B

f = {(2, a), (2, b), (3, c), (4, d)}

bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü

f(2) = a ve f(2) = b olmak üzere, f(2) iki ayrı değer almıştır. Halbuki, x ∈ A olmak üzere, f(x) en az bir ve en çok bir değer almalıydı.

Uygulama

A = {2, 3, 4}

B = {a, b, c, d}

f : A → B

f = {(2, b), (3, d)}

Bu bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü,

y ∈ B olmak üzere, f nin elemanları arasında (4, y) şeklinde bir ikili yoktur. Yani tanım kümesindeki 4 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmemiştir.

Uygulama

A = {2, 3, 4}

B = {a, b, c, d}

f : A → B

f = {(2, c), (3, a), (4, d)}

bağıntısı bir fonksiyondur.

Son verdiğimiz sonuçtaki her iki koşul da sağlanmaktadır.

Uygulama

A = {2, 3, 4}

B = {a, b, c, d}

f : A → B

f = {(2, c), (3, c), (4, c)}

Bu bağıntı bir fonksiyondur. Fonksiyonda değer kümesinde açıkta (eşlenmemiş) eleman olabilir.

Uygulama

A = {a, b, c, d}

B = {x, y, z, t, p, r, s}

kümeleri verilsin. A dan B ye tanımlanan,

f_1 = {(a, x), (b, y), (b, t)}

bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü, hem birinci özellik hem de ikinci özellik sağlanmamaktadır. A daki elemanlardan c ve d, B deki elemanlarla eşlenmediği için birinci özellik; A daki b elemanı birden fazla elemanla eşlendiği için, yani y ve t ile eşlendiği için ikinci özellik sağlanmamaktadır.

Uygulama

A = {a, b, c, d}

B = {x, y, z, t, p, r, s}

kümeleri verilsin. A dan B ye tanımlanan,

f_2 = {(a, x), (b, y)}

bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü, A daki c ve d, B deki elemanlarla eşlenmediği için birinci özellik sağlanmamaktadır.

Uygulama

A = {a, b, c, d}

B = {x, y, z, t, p, r, s}

kümeleri verilsin. A dan B ye tanımlanan,

f_3 = {(a, x), (b, y), (b, t), (c, z), (d, s)}

bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü, A daki b elemanı birden fazla elemanla eşlendiği için, yani y ve t ile eşlendiği için ikinci özellik sağlanmamaktadır.

Uygulama

A = {a, b, c, d}

B = {x, y, z, t, p, r, s}

kümeleri verilsin. A dan B ye tanımlanan,

✓ f_1 = {(a, x), (b, y), (c, z), (d, s)}

bağıntısı fonksiyondur.

✓ f_2 = {(a, x), (b, x), (c, x), (d, x)}

bağıntısı fonksiyondur.

✓ f_3 = {(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)}

bağıntısı fonksiyondur.

Uygulama

$A = \{0, 1, 3\}$ olmak üzere,

$f: A \to \mathbb{R}$, $f: x \to y$

$f(x) = 3 \cdot x - 1$

fonksiyonu verilsin.

$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

olduğuna göre, 0 ın görüntüsü –1 dir.

$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

olduğuna göre, 1 in görüntüsü 2 dir.

$f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$

olduğuna göre, 3 ün görüntüsü 8 dir.

Bu durumda f nin görüntü kümesi,

$f(A) = \{-1, 2, 8\}$ olur.

Bu kümenin, değer kümesinin ($\mathbb{R}$ nin) bir alt kümesi olduğuna dikkat ediniz.

f fonksiyonunu 3 farklı yöntemle gösterebiliriz:

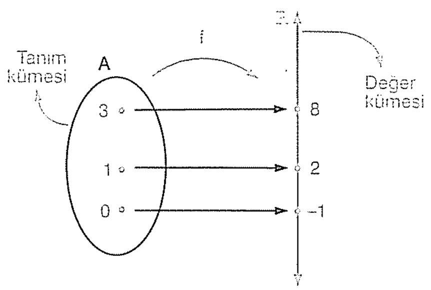
1. f nin listeyle gösterimi

$f(0) = -1$, $f(1) = 2$ ve $f(3) = 8$ olduğundan,

$f = \{(0, -1), (1, 2), (3, 8)\}$

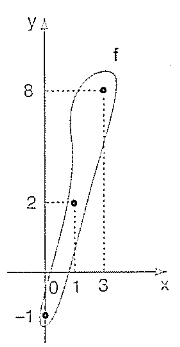
şeklindedir.

2. f nin şemayla gösterimi



Görüntü kümesi: $B = \{-1, 2, 8\}$ dir.

3. f nin grafikle gösterimi



Uygulama

$f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f = \left\{ (x,y) \mid y = \frac{2x+1}{x^2-4},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

bağıntısını inceleyelim:

$y = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ bağıntısında $x = 2$ ve $x = -2$ için payda sıfır olacağından $\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ ifadesi tanımsız olur. Yani, tanım kümesindeki –2 ve 2 elemanları değer kümesindeki bir eleman ile eşlenmediği için, (tanım kümesinde açıkta eleman kaldığı için) f bağıntısı fonksiyon değildir.

Uygulama

$f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f = \{(x, y) : \ |y| = x^2 + 3\}$

bağıntısını inceleyelim:

$|y| = x^2 + 3$ bağıntısında,

tanım kümesindeki her elemanın iki görüntüsü vardır.

$x = 1$ için, ($y = 4$ ve $y = -4$) gibi. Bu durumda, f bağıntısı fonksiyon değildir.

Uygulama

$f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere,

$f = \{(x, y) \mid y = x - 5\}$

bağıntısını inceleyelim:

$y = x - 5$ bağıntısında, tanım kümesindeki 0, 1, 2, 3, 4 elemanlarının görüntüsü yoktur. Örneğin, $x = 1$ için $f(1) = 1 - 5 = -4 \notin \mathbb{N}$ dir. Bu durumda, f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek .. 4

$f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olmak üzere,

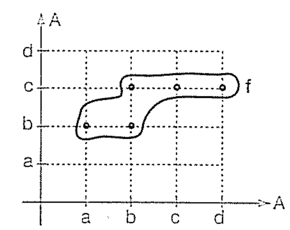
$$f = \left\{ (x,y) \mid y = \frac{2x+1}{3} \right\}$$

bağıntısını inceleyelim:

$y = \dfrac{2x+1}{3}$ bağıntısında tanım kümesindeki bazı elemanların görüntüsü yoktur. Örneğin $x = 2$ için $f(2) = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{3} = \dfrac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$ dir. Bu durumda, f bağıntısı fonksiyon değildir.

Uygulama

$A = \{a, b, c, d\}$, $f \subset A \times A$ olmak üzere, f bağıntısının grafiği aşağıda verilmiştir.



f bağıntısını inceleyelim:

f bağıntısını liste yöntemiyle gösterelim:

Yatay eksendeki a sayısı düşey eksende b ile eşlenmiş. Bu durumda $f(a) = b$ ve ($(a, b) \in f$ dir.)

...

Buna göre,

$f = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (d, c)\}$ olur.

f bağıntısında tanım kümesindeki b elemanının b ve c gibi farklı iki görüntüsü vardır. Bu durumda, f bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek .. 5

$f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$f = \{(x, y) : \ y = x^2 + 1\}$

bağıntısını inceleyelim:

$x = -1$ için, $y = (-1)^2 + 1 = 2$ dir. ($(-1, 2) \in f$ dir.)

$x = 1$ için, $y = 1^2 + 1 = 2$ dir. ($(1, 2) \in f$ dir.)

...

f bağıntısı fonksiyondur. Çünkü, tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü bir tam sayıdır.

B. FONKSİYON SAYISI

$s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olmak üzere,

➢ A dan B ye tanımlanabilecek fonksiyon sayısı,

$s(B)^{s(A)} = m^n$ dir.

➢ B den A ya tanımlanabilecek fonksiyon sayısı,

$s(A)^{s(B)} = n^m$ dir.

Uygulama

$s(A) = 2$, $s(B) = 3$ ise

A dan B ye $3^2 = 9$ tane fonksiyon,

B den A ya $2^3 = 8$ tane fonksiyon tanımlanabilir.

Örnek .. 6

$A = \{a, b, c\}$ ve

$B = \{1, 2\}$

olmak üzere, A dan B ye kaç tane fonksiyon olmayan bağıntı tanımlanabilir?

Çözüm

A dan B ye tanımlanabilecek bağıntı sayısı,

$2^{s(A \times B)} = 2^{s(A) \cdot s(B)} = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$ tür.

A dan B ye tanımlanabilecek fonksiyon sayısı,

$s(B)^{s(A)} = 2^3 = 8$ dir.

Buna göre,

A dan B ye tanımlanabilecek fonksiyon olmayan bağıntı sayısı,

$64 - 8 = 56$ dır.

C. FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

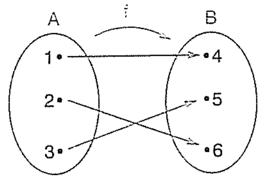
1. Bire Bir (1 – 1) Fonksiyon

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun.

A nın her elemanının görüntüsü farklı ise f bire bir (1 – 1) fonksiyondur.

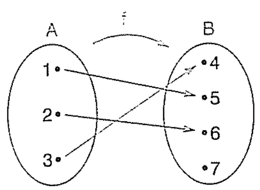
Yani, $\forall x_1, x_2 \in A$ için, $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa, f bire bir fonksiyondur.

Uygulama



Yukarıda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklıdır. Bu durumda, f fonksiyonu bire birdir.

Uygulama



Yukarıda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklıdır. Bu durumda, f fonksiyonu bire birdir.

Uygulama

$f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 2x + 1$

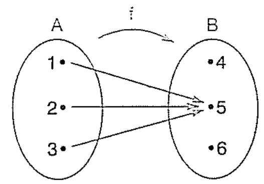
olmak üzere,

$f(x_1) = 2x_1 + 1$ ve $f(x_2) = 2x_2 + 1$ dir.

Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 \neq x_2$ iken, $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

Bu durumda, f fonksiyonu bire birdir.

Uygulama



Yukarıda şema ile gösterilmiş olan f fonksiyonunda, A nın her elemanının görüntüsü farklı olmadığı (aynı olduğu) için, f fonksiyonu bire bir değildir.

Uygulama

$f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 1$

olmak üzere,

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ dir.

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ dir.

$f(-1) = f(1)$

olduğu için, f fonksiyonu bire bir değildir.

Uygulama

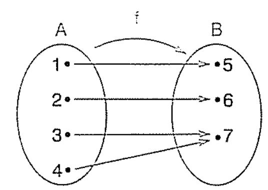
$f \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu bire birdir.

2. Örten Fonksiyon

Değer kümesinde boşta eleman kalmıyorsa f örten fonksiyondur.

Bu durumda $f : A \to B$ örten ise, $f(A) = B$ dir.

Uygulama

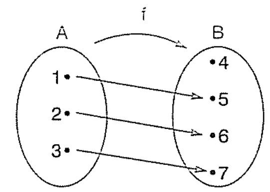


Yukarıda şema ile verilmiş olan f fonksiyonu örtendir.

Çünkü değer kümesinde (B de) eşlenmemiş (açıkta) eleman yoktur. Diğer bir ifadeyle değer kümesi görüntü kümesine eşit olduğu için f fonksiyonu örtendir.

Bu fonksiyon bire bir değildir.

Uygulama



Yukarıda şema ile verilmiş olan f fonksiyonu örten değildir.

Çünkü değer kümesinde (B de) eşlenmemiş (açıkta) eleman vardır. Diğer bir ifadeyle değer kümesi görüntü kümesine eşit olmadığı için f fonksiyonu örten değildir.

Bu fonksiyon bire birdir.

Uygulama

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 3$

olmak üzere, f fonksiyonu örten değildir.

Çünkü değer kümesinde eşlenmemiş (açıkta) eleman vardır. Örneğin, x yerine hangi doğal sayı yazılırsa yazılsın sonuç sıfır olamaz. Bu durumda değer kümesinde bulunan 0 (sıfır) sayısı eşlenmemiştir.

Bu fonksiyon bire birdir.

Uygulama

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 3$

olmak üzere, f fonksiyonu örtendir.

Çünkü değer kümesinde eşlenmemiş (açıkta) eleman yoktur.

Bu fonksiyon bire birdir.

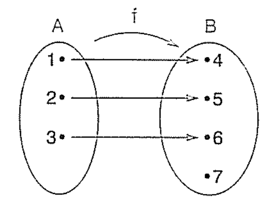
Tanım

Hem bire bir hem de örten fonksiyona, **bire bir örten fonksiyon** denir.

3. İçine Fonksiyon

Değer kümesinde (B de) boşta eleman kalıyorsa, **f içine fonksiyondur**. Kısaca örten olmayan fonksiyona içine fonksiyon denir.

Uygulama

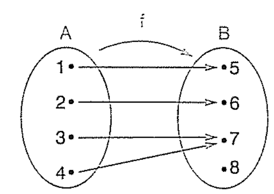


Yanda, şema ile verilmiş olan f fonksiyonu içinedir.

Çünkü değer kümesinde B de 7 elemanı eşlenmemiştir (boşta kalmıştır).

Bu fonksiyon hem içine hem de bire birdir.

Uygulama



Yanda şema ile verilmiş olan f fonksiyonu içinedir.

Çünkü değer kümesinde B de 8 elemanı eşlenmemiştir (boşta kalmıştır).

Bu fonksiyon bire bir değildir.

Uygulama

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 2$

fonksiyonu tanımlanmış olsun.

f, her x doğal sayısını farklı bir y doğal sayısına eşler. Yani, f bire bir fonksiyondur.

Ancak, x + 2 ifadesiyle değer kümesindeki bütün doğal sayılar örtülmez. Sözgelimi; tanım kümesinde, değer kümesindeki 0 ve 1 elemanı ile eşlenen değer yoktur. Bunun anlamı; değer kümesinde bazı elemanlar açıkta kalır. Yani, f içine fonksiyondur.

f, hem bire bir hem de içine olduğu için, bire bir ve içine fonksiyon adını alır.

Uygulama

$f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olmak üzere, $f(x) = 2x$ fonksiyonu içinedir. Çünkü değer kümesi olan tam sayılar kümesindeki tek sayılar eşlenmemiştir. Örneğin $f(x) = 3$ olacak şekilde x tam sayısı yoktur.

4. Sabit Fonksiyon

A nın her elemanının B deki görüntüsü aynı ise f sabit fonksiyondur. Yani, $c \in B$ olmak üzere, her $x \in A$ için $f(x) = c$ ise, f sabit fonksiyondur.

Örnek .. 7

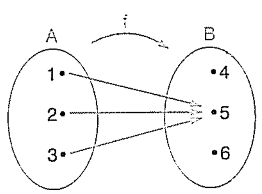
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

olmak üzere, $f : A \to B$, $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$ fonksiyonunu inceleyelim.

Çözüm

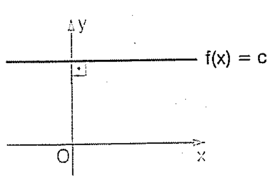
Liste yöntemiyle verilen f fonksiyonunu şema ile gösterelim:



A daki her elemanın görüntüsü B deki 5 elemanı (aynı eleman) olduğu için f, sabit fonksiyondur.

Sabit Fonksiyonun Grafiği

$c > 0$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Uygulama

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 5$

fonksiyonu, görüntü kümesi 5 olan sabit fonksiyondur.

5. Özdeşlik (Birim) Fonksiyonu

$f : A \to A$ fonksiyonunda A nın her elemanının görüntüsü yine kendisi ise f özdeşlik (birim) fonksiyonudur.

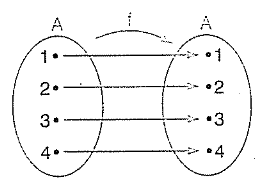
Yani, her $x \in A$ için, $f(x) = x$ ise f birim fonksiyondur. Birim fonksiyon I ile gösterilir.

Örnek .. 8

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

olmak üzere, $f : A \to A$, $f(x) = x$ fonksiyonunu inceleyelim.

Çözüm



$f(x) = x$ olduğu için,

$x = 1$ için, $f(1) = 1$

$x = 2$ için, $f(2) = 2$

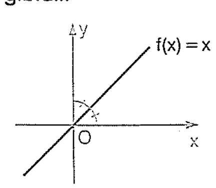
$x = 3$ için, $f(3) = 3$

$x = 4$ için, $f(4) = 4$ tür.

A nın her elemanın görüntüsü yine kendisi olduğu için f, birim fonksiyondur.

Birim Fonksiyonun Grafiği

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Örnek .. 9

$A = \{-1, 0, 1\}$

olmak üzere, $f : A \to A$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun birim fonksiyon olduğunu gösterelim.

Çözüm

$f(x) = x^3$ olduğu için,

$x = -1$ için, $f(-1) = (-1)^3 = -1$

$x = 0$ için, $f(0) = 0^3 = 0$,

$x = 1$ için, $f(1) = 1^3 = 1$ dir.

A nın her elemanın görüntüsü yine kendisi olduğu için f, birim fonksiyondur.

Sonuç

f, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir birim fonksiyon ise,

$f(x) = x$ tir.

Uygulama

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

fonksiyonu birim fonksiyon ise, $a = 0$, $b = 1$ ve $c = 0$ dır.

6. Eşit Fonksiyonlar

$f : A \to B$ ve $g : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere,

her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir.

Örnek .. 10

$A = \{0, 2\}$ kümesinden $B = \{1, 9\}$ kümesine tanımlı,

$f(x) = 2x^2 + 1$

$g(x) = x^3 + 1$

fonksiyonlarının eşit olup olmadıklarını araştıralım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1 \\ g(0) = 0^3 + 1 = 1 \end{array}\right\} \text{ ise, } f(0) = g(0) \text{ dır.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \\ g(2) = 2^3 + 1 = 9 \end{array}\right\} \text{ ise, } f(2) = g(2) \text{ dir.}$$

Her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olduğu için, f ve g eşit fonksiyonlardır.

Örnek .. 11

$A = \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere,

$f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g: A \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

biçiminde tanımlandığına göre, f = g olduğunu gösterelim.

Çözüm

Tanım kümesinin (A nın) elemanlarının f ve g fonksiyonları altındaki görüntülerini bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ g(1) = |1| = 1 \end{array}\right\} \text{ ise } f(1) = g(1) \\ \left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2 = 0 \\ g(0) = |0| = 0 \end{array}\right\} \text{ ise } f(0) = g(0) \\ \left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ g(-1) = |-1| = 1 \end{array}\right\} \text{ ise } f(-1) = g(-1) \end{array}\right\} \text{ ise } f = g \text{ dir.}$$

7. Doğrusal Fonksiyon

$m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = mx + n$ şeklinde tanımlanan fonksiyona doğrusal fonksiyon (lineer) denir. Doğrusal fonksiyonun grafiği doğrudur.

Uygulama

$f(x) = 2x$, doğrusal fonksiyondur.

Uygulama

$f(x) = ax^2 + 2x + 3$, doğrusal fonksiyon ise $a = 0$ dır.

D. FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM

$A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları tanımlansın.

1) $(f + g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f - g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \cdot g) : A \cap B \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $\forall x \in A \cap B$ için, $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{f}{g} : A \cap B \to \mathbb{R},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

5) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(c \cdot f) : A \to \mathbb{R}$, $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ tir.

Örnek .. 12

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı

$f(x) = x^2 - 3x$

$g(x) = x - 3$

fonksiyonları veriliyor.

$(f + g)(x)$

fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

Örnek .. 13

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı

$f(x) = x^2 - 3x$

$g(x) = x - 3$

fonksiyonları veriliyor.

$(2f - g)(3)$

ün değerini bulalım.

Çözüm

1. Yol

$$\begin{aligned}(2f - g)(x) &= (2f)(x) - g(x)\\ &= 2 \cdot f(x) - g(x)\\ &= 2(x^2 - 3x) - (x - 3)\\ &= 2x^2 - 6x - x + 3\\ &= 2x^2 - 7x + 3 \text{ tür.}\end{aligned}$$

Buna göre,

$(2f - g)(x) = 2x^2 - 7x + 3$ ise,

$$\begin{aligned}(2f - g)(3) &= 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3\\ &= 18 - 21 + 3\\ &= 0 \text{ dır.}\end{aligned}$$

2. Yol

$f(x) = x^2 - 3x$ ise, $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$ dır.

$g(x) = x - 3$ ise, $g(3) = 3 - 3 = 0$ dır.

Buna göre,

$(2f - g)(3) = 2 \cdot f(3) - g(3) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$ dır.

Örnek .. 14

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı

$f(x) = x^2 - 3x$

$g(x) = x - 3$

fonksiyonları veriliyor.

$(f \cdot g)(x)$

fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^2 - 3x) \cdot (x - 3)\\ &= x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-3) - 3x \cdot x - 3x \cdot (-3)\\ &= x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x\\ &= x^3 - 6x^2 + 9x\end{aligned}$$

Örnek .. 15

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$

$g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$

$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

olduğuna göre, h fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} = x$$

Örnek .. 16

$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$

$g : \{-1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, f + 3g fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

$f + 3g$ fonksiyonu $\{1, 2, 3\} \cap \{-1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlıdır.

Buna göre,

$f(x) = x^2 + x$ ise, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ dir.

ise, $f(2) = 2^2 + 2 = 6$ dır.

$g(x) = 2x + 3$ ise, $g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ tir.

ise, $g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ dir.

$(f + 3g)(1) = f(1) + 3 \cdot g(1) = 2 + 3 \cdot 5 = 17$ dir.

$(f + 3g)(2) = f(2) + 3 \cdot g(2) = 6 + 3 \cdot 7 = 27$ dir.

Buna göre, $(f + 3g) = \{(1, 17), (2, 27)\}$ dir.

$(f + 3g)(\{1, 2\}) = \{17, 27\}$

Buna göre, $f + 3g$ nin,

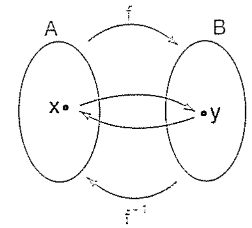
tanım kümesi $\{1, 2\}$,

görüntü kümesi $\{17, 27\}$ dir.

E. BİR FONKSİYONUN TERSİ

$f : A \to B$, $f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,

$f^{-1} : B \to A$, $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ fonksiyonuna f nin ters fonksiyonu denir.



$(x, y) \in f$ ise, $(y, x) \in f^{-1}$ olduğu için,

$y = f(x)$ ise, $x = f^{-1}(y)$ dir.

Ayrıca, $(f^{-1})^{-1} = f$ dir.

Uygulama

$f(5) = 7$ ise $f^{-1}(7) = 5$ tir.

Örnek .. 17

$A = \{a, b, c\}$ kümesinden $B = \{1, 2, 3\}$ kümesine tanımlı

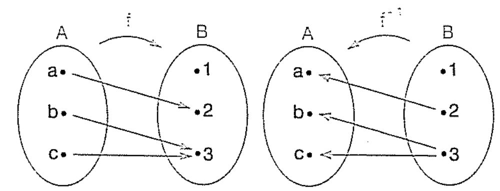
$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3)\}$

fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm

$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3)\}$ ise,

$f^{-1} = \{(2, a), (3, b), (3, c)\}$ olur.



f fonksiyonu hem bire bir hem de örten olmadığı için tersi olan f^{-1} bağıntısı fonksiyon değildir.

Sonuç

f, A dan B ye bire bir ve örten bir fonksiyon değilse f^{-1}, B den A ya bir fonksiyon olmayıp bir bağıntıdır.

Örnek .. 18

{a, b, c, d} kümesinden {1, 2, 3, 4} kümesine aşağıdaki fonksiyonlar tanımlanıyor.

Bu fonksiyonlardan hangisinin tersi de bir fonksiyondur?

A) {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)}

B) {(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)}

C) {(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)}

D) {(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 4)}

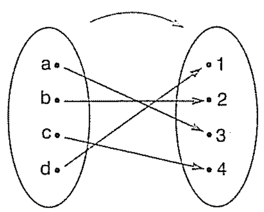
E) {(a, 3), (b, 2), (c, 4), (d, 1)}

Çözüm

Bire bir ve örten bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyondur.

E seçeneğinde verilen {(a, 3), (b, 2), (c, 4), (d, 1)} fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu gösterelim.

Liste yöntemiyle verilen bu fonksiyonun şemasını yapalım. Görüleceği gibi fonksiyon bire-bir ve örtendir.



Bu durumda {(a, 3), (b, 2), (c, 4), (d, 1)} fonksiyonunun tersi de fonksiyondur.

Cevap E

Ters Fonksiyonun Bulunması

$y = f(x)$ ise, $x = f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(x)$ i bulmak için x, y cinsinden bulunur ve x ile y nin yerleri değiştirilir.

Örnek .. 19

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x + 8$

fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x+8}{5}$ B) $\frac{x-8}{5}$ C) $\frac{x-5}{8}$

D) $\frac{x+5}{8}$ E) $5x-8$

Çözüm

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad ... (\star)$

$f(x) = 5x + 8$

$y = 5x + 8$

$x = \frac{y-8}{5}$

$f^{-1}(y) = \frac{y-8}{5}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-8}{5}$

Cevap B

Örnek .. 20

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{3x+2}{4}$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm

$f(x) = \frac{3x+2}{4}$

$y = \frac{3x+2}{4}$

$3x + 2 = 4y$

$3x = 4y - 2$

$x = \frac{4y-2}{3} ...(\bigstar)$

$f^{-1}(y) = \frac{4y-2}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3}$ olur.

Sonuç

1) $f(x) = ax + b$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dır.

2) $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

Uygulama

$f(x) = 3x + 10$ ise,

$f^{-1}(x) = \frac{x-10}{3}$ tür.

Uygulama

$f(x) = 4x$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ tür.

Uygulama

$f(x) = \frac{3x+2}{4} = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{2}{4}$ ise,

$f^{-1}(x) = \frac{x - \frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4x-2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4x-2}{3}$ tür.

Örnek .. 21

$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

olduğuna göre,

$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{-(-4)x+1}{3x+(-2)} = \frac{4x+1}{3x-2}$ dir.

Uygulama

$f(x) = \frac{3x+4}{5x+7}$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{-7x+4}{5x-3}$ tür.

Uygulama

$f(x) = \frac{3x+4}{8-5x} = \frac{3x+4}{-5x+8}$ ise,

$f^{-1}(x) = \frac{-8x+4}{-5x-3}$ tür.

Örnek .. 22

$f(x) = 2x + 3$

olduğuna göre, $f^{-1}(-1)$ in değerini bulalım.

Çözüm

1. Yol

$f(x) = 2x + 3$ ise, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

ise, $f^{-1}(-1) = \frac{-1-3}{2}$

ise, $f^{-1}(-1) = -2$ dir.

2. Yol

$f^{-1}(-1) = k$ olsun. Bu durumda, $f(k) = -1$ dir.

$f(x) = 2x + 3$ ise, $f(k) = 2k + 3$

ise, $-1 = 2k + 3$

ise, $k = -2$ dir.

Örnek .. 23

Uygun değerler için,

$$f(x)=\frac{4}{x-2}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(4)$ kaçtır?

Çözüm

1. Yol

$$f(x)=\frac{4}{x-2}=\frac{0\cdot x+4}{x+(-2)} \text{ ise}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x+(-0)}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x}$$

$$f^{-1}(4)=\frac{2\cdot 4+4}{4}$$

$$f^{-1}(4)=3$$

2. Yol

$f^{-1}(4)=x$ ise $f(x)=4$

ise $\frac{4}{x-2}=4$

ise $x-2=1$

ise $x=3$

ise $f^{-1}(4)=3$ olur.

Örnek .. 24

$f(x) = 2^{x+1}$

olduğuna göre, $f^{-1}(16)$ nın değerini bulalım.

Çözüm

$f^{-1}(16) = k$ olsun. Buna göre, $f(k) = 16$ olur.

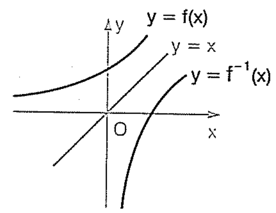
$f(k) = 2^{k+1} = 16$ ise, $2^{k+1} = 2^4$

ise, $k + 1 = 4$

ise, $k = 3$ tür.

Kural

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre birbirinin simetriğidir.



Uygulama

$f(x) = 2x$ in grafiği ile $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ nin grafiği $y = x$ doğrusuna göre birbirinin simetriğidir.

Örnek .. 25

f, doğrusal fonksiyon ve

$f^{-1}(4) = 5$

$f^{-1}(3) = 6$

olduğuna göre, $m\cdot n$ çarpımı kaçtır?

A) –9 B) –6 C) –3 D) 3 E) 6

Çözüm

$f^{-1}(4) = 5$ ise, $f(5) = 4$ tür. ... (★)

$f^{-1}(3) = 6$ ise, $f(6) = 3$ tür. ... (★★)

f, doğrusal fonksiyon ise $f(x) = mx + n$ olsun. Bu durumda,

$f(5) = 4$ ise, $f(5) = m\cdot 5 + n$

ise, $4 = m\cdot 5 + n$ dir. ... (1)

$f(6) = 3$ ise, $f(6) = m\cdot 6 + n$

ise, $3 = m\cdot 6 + n$ dir. ... (2)

(1) deki eşitlikten (2) deki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{array}{r} 4=m\cdot 5+n \\ -\ 3=m\cdot 6+n \\ \hline 1=-m \end{array}$$

$m=-1$ olur....(★)

($m = -1$ ve $4 = m\cdot 5 + n$) ise, $n = 9$ dur. ... (★★)

Buna göre, $m\cdot n = (-1)\cdot 9 = -9$ olur.

Cevap A

Örnek .. 26

$f(x - 1) = x^2 + 3x + a$

$f^{-1}(2) = 3$

olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

A) –20 B) –24 C) –26 D) –27 E) –30

Çözüm

$f^{-1}(2) = 3$ ise, $f(3) = 2$ dir. ... (★)

$f(x - 1) = x^2 + 3x + a$

$f(4 - 1) = 4^2 + 3\cdot 4 + a$

$f(3) = 16 + 12 + a$

$2 = 28 + a$ ise, $a = -26$ dır.

Cevap C

Örnek .. 27

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x+2}-1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x + 1)^3 - 2$ B) $(x + 1)^3 - 1$ C) $(x - 1)^3 - 2$

D) $(x + 2)^3 - 2$ E) $(x + 1)^3 + 2$

Çözüm

1. Yol

$$f(x)=\sqrt[3]{x+2}-1$$

$$y=\sqrt[3]{x+2}-1$$

$$\sqrt[3]{x+2}=y+1$$

$$x+2=(y+1)^3$$

$$x=(y+1)^3-2$$

$$f^{-1}(y)=(y+1)^3-2$$

$$f^{-1}(x)=(x+1)^3-2 \text{ dir.}$$

2. Yol

$f(x)=\sqrt[3]{x+2}-1$ ise, $f(-2)=\sqrt[3]{-2+2}-1=-1$ dir.

$f(-2) = -1$ ise, $f^{-1}(-1) = -2$ dir. Buna göre, seçeneklerde x yerine –1 yazdığımızda sonucu –2 olmayan cevap olamaz.

Sadece A seçeneğinde,

$x = -1$ için, $(x + 1)^3 - 2 = (-1 + 1)^3 - 2 = 0 - 2 = -2$ olduğuna göre, doğru cevap A dır.

Cevap A

Örnek .. 28

$$f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=x+1$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{x^2-2x}$ B) $\frac{x+1}{x^2-2x+2}$ C) $\frac{x}{x^2-2x+2}$

D) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ E) $\frac{x+3}{x^2-2x+2}$

Çözüm

$f(x) = y$ ise, $x = f^{-1}(y)$ olduğu için,

$f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=x+1$ ise, $f^{-1}(x+1)=\frac{x+1}{x^2+1}$ olur.

Burada x yerine x – 1 yazılırsa,

$$f^{-1}(x+1)=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$f^{-1}(x-1+1)=\frac{x-1+1}{(x-1)^2+1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{x^2-2x+2} \text{ olur.}$$

Cevap C

Örnek .. 29

$$f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4}{5}(x^2-x+1)$ B) $\frac{4}{5}(x^2+x+1)$ C) $\frac{x^2+3}{5}$

D) $\frac{x^2+2x+13}{12}$ E) $\frac{x^2-2x+13}{20}$

Çözüm

$2x + 1$ in tersi $\frac{x-1}{2}$ olduğu için, $f(2x + 1)$ de x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazılırsa $f(x)$ bulunur.

$$f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$$

$$f\left(2\cdot\frac{x-1}{2}+1\right)=\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+3}{5}$$

$$f(x-1+1)=\frac{\frac{x^2-2x+1}{4}+3}{5}$$

$$f(x)=\frac{\frac{x^2-2x+1+12}{4}}{5}$$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+13}{20} \text{ olur.}$$

Cevap E

Örnek .. 30

$f(x) : \mathbb{R}-\{-1\} \to \mathbb{R}-\{3\}$

$$x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x-3}{x+1}$ B) $\frac{x+3}{x-2}$ C) $\frac{x+2}{3-x}$

D) $\frac{2x+1}{3-x}$ E) $\frac{2x+3}{3-x}$

Çözüm

$y = f(x)$ ise, $f^{-1}(y) = x$ olduğu için,

$$x=\frac{f(x)+2}{3-f(x)}$$

$$x=\frac{y+2}{3-y}$$

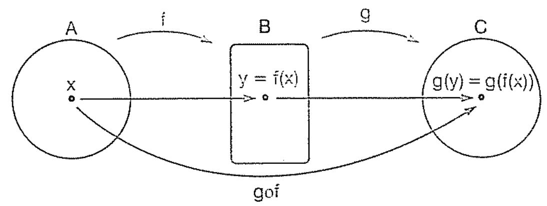
$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3-x} \text{ tir.}$$

Cevap C

F. BİLEŞKE FONKSİYON

$f : A \to B$, $g : B \to C$ fonksiyonları tanımlansın.

f ve g yi kullanarak A kümesinin elemanlarını C kümesinin elemanlarına eşleyen fonksiyona g ile f nin bileşke fonksiyonu denir.



$f : A \to B$, $f : x \to y$,

$f(x) = y$ ... (1)

$g : B \to C$, $g : y \to z$,

$g(y) = z$ ... (2)

y nin (1) deki değerini (2) de yerine yazalım:

$g(y) = z$

$g[f(x)] = z$

$(gof)(x) = z$ ... (☆)

$gof : A \to C$, $gof : x \to z$, $(gof)(x) = z$ olur ve gof, "g bileşke f" diye okunur.

Örnek .. 31

$f: A \to B$, $f: x \to y$

$f(x) = x^2 + 2x$

$g: B \to C$, $g: y \to z$

$g(y) = y + 3$

olduğuna göre, $(fog)(x)$ i bulalım.

Çözüm

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= f(x + 3)$

$= (x + 3)^2 + 2(x + 3)$

$= x^2 + 6x + 9 + 2x + 6$

$= x^2 + 8x + 15$

Örnek .. 32

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 4$

olduğuna göre, fog fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(5x + 4)$

$= 2(5x + 4) + 3$

$= 10x + 11$

Örnek .. 33

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 4$

olduğuna göre, gof fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x + 3)$

$= 5(2x + 3) + 4$

$= 10x + 19$

Sonuç

Son iki örnekten de anlaşılacağı üzere, $fog \neq gof$ tur.

Buna göre, fonksiyonlarda değişme özeliği yoktur.

Bazı f ve g fonksiyonları için $fog = gof$ olabilir. Ancak bu "fonksiyonlarda değişme özeliği yoktur." gerçeğini değiştirmez.

Örnek .. 34

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f : A \to A$

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

olduğuna göre, $(fofof)(3)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$(3, 5) \in f$ olduğuna göre, $f(3) = 5$ tir.

$(5, 1) \in f$ olduğuna göre, $f(5) = 1$ dir.

$(1, 2) \in f$ olduğuna göre, $f(1) = 2$ dir.

Buna göre,

$(fofof)(3) = (fof)(f(3)) = (fof)(5) = f(f(5)) = f(1) = 2$ dir.

Cevap B

Örnek .. 35

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = 3x$

$h(x) = x + 3$

olduğuna göre, $(fogoh)(2)$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$h(x) = x + 3$ ise, $h(2) = 2 + 3 = 5$ tir.

$g(x) = 3x$ ise, $g(5) = 3\cdot 5 = 15$ tir.

Buna göre,

$(fogoh)(2) = f[g(h(2))]$

$= f[g(5)]$

$= f(15)$

$= 15^2 + 1$

$= 226$ dır.

Özellik

1) Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özeliği vardır.

Bu durumda $(fog)oh = fo(goh) = fogoh$ olur.

2) I birim fonksiyon olmak üzere,

$foI = Iof = f$ ve

$f^{-1}of = fof^{-1} = I$ dır.

3) f, g ve h fonksiyonları bire bir ve örten olmak üzere,

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ ve

$(fogoh)^{-1} = h^{-1}og^{-1}of^{-1}$ dir.

4) $(fog)(x) = h(x)$ ise, $f(x) = (hog^{-1})(x)$ dir.

ise, $g(x) = (f^{-1}oh)(x)$ tir.

Örnek .. 36

$f(x) = 3x + 2$

$(fog)(x) = 6x + 11$

olduğuna göre, g(x) i bulalım.

Çözüm

1. Yol

$f(x) = 3x + 2$ olmak üzere,

$f(x)=3x+2$ ise, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$ tür.

$$(fog)(x)=6x+11$$

$$(f^{-1}o(fog)(x))=(f^{-1}o(6x+11))$$

$$(Io(g)(x))=f^{-1}(6x+11)$$

$$g(x)=\frac{6x+11-2}{3}$$

$$g(x)=\frac{6x+9}{3}$$

$$g(x)=2x+3 \text{ tür.}$$

2. Yol

$f(x) = 3x + 2$ olmak üzere,

$$(fog)(x)=6x+11$$

$$f(g(x))=6x+11$$

$$3\cdot g(x)+2=6x+11$$

$$3\cdot g(x)=6x+9$$

$$g(x)=\frac{6x+9}{3}$$

$$g(x)=2x+3 \text{ tür.}$$

Örnek .. 37

$(fog)(x) = 3x + 4$

$g(x) = 5x - 2$

olduğuna göre, f(x) i bulalım.

Çözüm

1. Yol

$(fog)og^{-1} = fo(gog^{-1}) = foI = f$ dir. ... (1)

$g(x)=5x-2$ ise, $g^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{5}$ tir. ... (2)

$$f(x)=[(fog)og^{-1}](x)$$

$$=(fog)[g^{-1}(x)]$$

$$=(fog)\left(\frac{x+2}{5}\right)$$

$$=3\cdot\frac{x+2}{5}+4$$

$$=\frac{3x+26}{5} \text{ olur.}$$

2. Yol

2. yol olarak anlatacağımız çözüm yolu, 1. yolun kısaltılmış biçimidir.

$$(fog)(x)=3x+4$$

$$f(g(x))=3x+4$$

$$f(5x-2)=3x+4 \quad \dots (\star)$$

$$f\left(5\cdot\frac{x+2}{5}-2\right)=3\cdot\frac{x+2}{5}+4$$

$$f(x)=\frac{3x+26}{5}$$

$(\star)$ da $5x-2$ nin x e eşit olması için x yerine $5x-2$ nin fonksiyonel tersi olan $\dfrac{x+2}{5}$ yazıldı.

Örnek .. 38

$(gof)(x) = 6x + 2$

$g(x) = -2x + 4$

olduğuna göre, f(x) in eşitini bulalım.

Çözüm

$$(gof)(x) = 6x + 2$$

$$g[f(x)] = 6x + 2$$

$$-2[f(x)] + 4 = 6x + 2$$

$$-2[f(x)] = 6x - 2$$

$$f(x) = -3x + 1$$

Örnek .. 39

$f(x) = x + 2$

$(gof)(x) = 2x + 11$

olduğuna göre, g(3) ü bulalım.

Çözüm

$$(gof)(x) = 2x + 11$$

$$g(f(x)) = 2x + 11$$

$$g(x + 2) = 2x + 11$$

$$g(1 + 2) = 2\cdot 1 + 11$$

$$g(3) = 2 + 11$$

$$g(3) = 13$$

Örnek .. 40

$f(x + 2) = 5x + 3$

$g(x - 3) = 3x + 1$

olduğuna göre, (gof)(3) ün değeri kaçtır?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Çözüm

$f(x + 2) = 5x + 3$ ise,

$f(1 + 2) = 5\cdot 1 + 3$

$f(3) = 8$ dir.

$g(x - 3) = 3x + 1$ ise,

$g(11 - 3) = 3\cdot 11 + 1$

$g(8) = 34$ tür.

Buna göre,

$(gof)(3) = g[f(3)]$

$= g(8)$

$= 34$ olur.

Cevap E

Örnek .. 41

$f(x) = x^{207} + x^{208} + 5$

$g(x) = x^2 - 2x - 9$

olduğuna göre, (fog)(4) ün değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm

$g(x) = x^2 - 2x - 9$ ise, $g(4) = 4^2 - 2\cdot 4 - 9$

ise, $g(4) = -1$ dir.

$f(x) = x^{207} + x^{208} + 5$ ise,

$f(-1) = (-1)^{207} + (-1)^{208} + 5$

$f(-1) = 5$ tir.

Buna göre,

$(fog)(4) = f[g(4)]$

$= f(-1)$

$= 5$ tir.

Cevap B

Örnek .. 42

$f(x) = 5^{x+2}$

$g(x) = x^2 + 4$

olduğuna göre, $(f^{-1}ogof)(-2)$ nin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm

$f(x) = 5^{x+2}$ ise, $f(-2) = 5^{-2+2} = 5^0 = 1$ dir.

$g(x) = x^2 + 4$ ise, $g(1) = 1^2 + 4 = 5$ tir.

$f(x) = 5^{x+2}$ ise, $f(-1) = 5^{-1+2} = 5^1 = 5$ tir.

$f(-1) = 5$ ise, $f^{-1}(5) = -1$ dir.

Buna göre,

$$\begin{aligned}(f^{-1}ogof)(-2) &= f^{-1}[g(f(-2))]\\ &= f^{-1}[g(1)]\\ &= f^{-1}[5]\\ &= -1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Cevap B

Örnek .. 43

$g(x)=3x-1$

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+5}$

$(g^{-1}of)(a)=2$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 5 B) 2 C) –2 D) –6 E) –8

Çözüm

$g(x) = 3x - 1$ ise, $g(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ tir. ... (★)

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+5}$ ise, $f(a)=\dfrac{2a+1}{a+5}$ olur.... (★★)

$$\begin{aligned}(g^{-1}of)(a)&=2\\ g^{-1}[f(a)]&=2\\ g(2)&=f(a)\\ 5&=\frac{2a+1}{a+5}\\ 5a+25&=2a+1\\ 5a-2a&=-25+1\\ 3a&=-24\\ a&=-8 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Cevap E

Örnek .. 44

$f^{-1}(3) = 0$

$g^{-1}(2) = 3$

$h^{-1}(0) = 1$

olduğuna göre, $(gofoh)^{-1}(2)$ nin değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm

$(gofoh)^{-1} = h^{-1}of^{-1}og^{-1}$ olduğu için,

$$\begin{aligned}(gofoh)^{-1}(2) &= (h^{-1}of^{-1}og^{-1})(2)\\ &= (h^{-1}of^{-1}(g^{-1}(2))\\ &= (h^{-1}of^{-1})(3)\\ &= (h^{-1}(f^{-1}(3))\\ &= h^{-1}(0)\\ &= 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Cevap C

Örnek .. 45

$f(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-2}{3}$

olduğuna göre, (fof)(2) nin değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm

$f(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-2}{3}$

eşitliğinde x yerine f(x) yazılırsa,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{f^{-1}(x)-2}{3}\\ f(f(x))&=\frac{f^{-1}(f(x))-2}{3}\\ (fof)(x)&=\frac{(f^{-1}of)(x)-2}{3}\\ (fof)(x)&=\frac{x-2}{3}\\ (fof)(2)&=\frac{2-2}{3}\\ (fof)(2)&=0\end{aligned}$$

Cevap C

Örnek .. 46

$f^{-1}(2x + 1) = g(3x - 4)$

olduğuna göre, (fog)(5) in değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm

$f^{-1}(a) = b$ ise, $f(b) = a$ dır.

Buna göre,

$f^{-1}(2x + 1) = g(3x - 4)$

$f(g(3x - 4)) = 2x + 1$

$(fog)(3x - 4) = 2x + 1$ olur.

Bu eşitlikte x yerine 3 yazılırsa,

$$\begin{aligned}(fog)(3x - 4) &= 2x + 1\\ (fog)(3 \cdot 3 - 4) &= 2 \cdot 3 + 1\\ (fog)(5) &= 7 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Cevap E

Örnek .. 47

f, birinci dereceden (doğrusal) fonksiyondur.

$(fof)(x) = 9x + 4$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) $-2x + 3$ B) $4x - 5$ C) $3x + 1$ D) $4x + 5$ E) $-x - 5$

Çözüm

$(fof)(x) = 9x + 4$ olmak üzere, $f(x) = ax + b$ biçiminde birinci dereceden (doğrusal) bir fonksiyon olsun.

$f(x) = ax + b$ ise,

$(fof)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$ dir. ... (☆)

$(fof)(x) = 9x + 4$ olduğu verilmişti.

Bu durumda, $a^2x + ab + b = 9x + 4$ olmalıdır.

$a^2x + ab + b = 9x + 4$ ise,

$(a^2 = 9$ ve $ab + b = 4)$ tür.

$a^2 = 9$ ise $(a = -3$ veya $a = 3)$ tür.

a = –3 iken $ab + b = 4$

$$\begin{aligned}-3b + b &= 4\\ -2b &= 4\\ b &= -2 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu değerler için, $f(x) = ax + b = -3x - 2$ olur.

a = 3 iken $ab + b = 4$

$$\begin{aligned}3b + b &= 4\\ 4b &= 4\\ b &= 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu değerler için, $f(x) = ax + b = 3x + 1$ olur.

Cevap C

Örnek .. 48

$f(x)=\dfrac{2x+u}{x+1}$

$(fof)(x)=\dfrac{x-9}{3x-2}$

olduğuna göre, u kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

Çözüm

$(fof)(x)=f[f(x)]=\dfrac{x-9}{3x-2}$ ise

$x=0$ için, $f[f(0)]=\dfrac{9}{2}$ dir.... (1)

$f(x)=\dfrac{2x+u}{x+1}$ ise

$x = 0$ için, $f(0) = u$ ... (2)

(1) ve (2) den

$f[f(0)]=\dfrac{9}{2}$

$f(u)=\dfrac{9}{2}$...(★)

$x=u$ için, $f(u)=\dfrac{2\cdot u+u}{u+1}=\dfrac{3u}{u+1}$...(★★)

(★) ve (★★) den

$f[f(0)] = \frac{9}{2}$ ise, $f(u) = \frac{9}{2}$

$$\frac{3u}{u+1} = \frac{9}{2}$$

$$6u = 9u + 9$$

$$3u = -9$$

$u = -3$ tür.

Cevap A

Örnek .. 49

$f(x) = x + 3$

$g(x) = x^2 - 1$

$h(x) = x^3 + 2$

olduğuna göre, $\frac{(f \cdot g - h)(-1)}{(fogoh)(1)}$ kaçtır?

A) $-\frac{3}{11}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) $-\frac{1}{11}$ D) $\frac{1}{11}$ E) $\frac{3}{11}$

Çözüm

$f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$ ve $h(x) = x^3 + 2$

olduğu için,

$f(-1) = -1 + 3 = 2$,

$g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$,

$h(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$,

$h(1) = 1^3 + 2 = 3$,

$g(3) = (3)^2 - 1 = 8$,

$f(8) = 8 + 3 = 11$ dir.

Buna göre,

$$\frac{(f \cdot g - h)(-1)}{(fogoh)(1)} = \frac{f(-1) \cdot g(-1) - h(-1)}{f[g(h(1))]}$$

$$= \frac{2 \cdot 0 - 1}{f[g(3)]}$$

$$= \frac{-1}{f(8)}$$

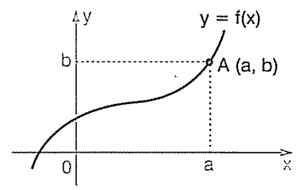
$= \frac{-1}{11}$ dir.

Cevap C

G. FONKSİYON GRAFİĞİ

Bir fonksiyonun elemanlarına analitik düzlemde karşılık gelen noktaların kümesine bu fonksiyonun grafiği denir.

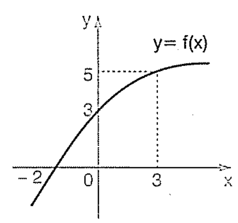
$f : A \to B$, $f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B,\ y = f(x)\}$



$(a, b) \in f$ olduğundan $f(a) = b$ dir.

Ayrıca, $f^{-1}(b) = a$ dır.

Uygulama



Şekilde verilen $y = f(x)$ in grafiğinin geçtiği noktalar:

$(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 5)$ tir.

Buna göre,

$f(-2) = 0$

$f(0) = 3$

$f(3) = 5$ tir.

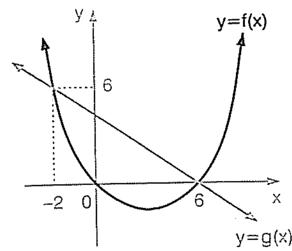
Bu durumda,

$f(-2) = 0$ ise $f^{-1}(0) = -2$ dir.

$f(0) = 3$ ise $f^{-1}(3) = 0$ dır.

$f(3) = 5$ ise $f^{-1}(5) = 3$ tür.

Uygulama



Yanda g doğrusal fonksiyonu ile f parabolik fonksiyonunun grafikleri verilmiştir. Şekilde verilenlere göre,

$f(-2) = g(-2) = 6$

$f(0) = 0$

$f(6) = g(6) = 0$ dır.

Ayrıca, şekildeki veriler kullanılarak doğrunun ve parabolün denklemi bulunabilir; Böylece f nin ve g nin altında bütün reel sayıların alacağı değerler bulunabilir.

Örnek .. 50

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$

$f : A \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$x = -1$ için, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ dir.

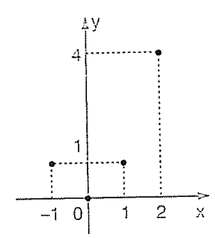
$x = 0$ için, $f(0) = 0^2 = 0$ dır.

$x = 1$ için, $f(1) = 1^2 = 1$ dir.

$x = 2$ için, $f(2) = 2^2 = 4$ tür.

Buna göre, $f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ olur.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki dört noktadır.



Örnek .. 51

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = -x + 3$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$x = -1$ için, $f(-1) = -(-1) + 3 = 4$ tür.

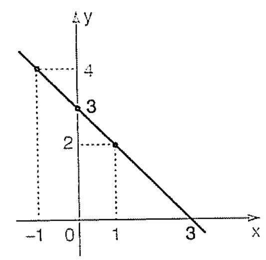
$x = 0$ için, $f(0) = -0 + 3 = 3$ tür.

$x = 1$ için, $f(1) = -1 + 3 = 2$ dir.

Buna göre, $f = \{\ldots, (-1, 4), (0, 3), (1, 2), \ldots\}$

Aşağıdaki tabloda x in bazı değerlerine karşın f(x) in (y nin) aldığı değerler verilmiştir.

x	...	−1	0	1	...
y = −x + 3	...	4	3	2	...

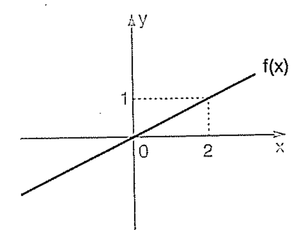


Bir önceki örnekte fonksiyonun tanım kümesi 4 elemanlı olduğu için, f in grafiği 4 tane noktadan oluştu. Bu örnekte ise; tanım kümesi tüm reel sayılar olduğu için, f nin grafiği sonsuz tane noktadan oluşmaktadır.

Fonksiyonun tanımından dolayı, bu noktalar bir doğru belirtmektedir.

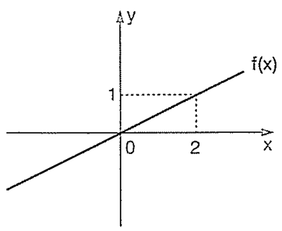
Örnek .. 52

Aşağıdaki doğru f(x) fonksiyonunun grafiğidir.



Buna göre, $2f(x + 1)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm



Şekilde verilen grafiğe göre,

f(x) in grafiği (0, 0) noktasından geçtiği için,

$x = 0$ için, $f(0) = 0$ dır.

f(x) in grafiği (2, 1) noktasından geçtiği için,

$x = 2$ için, $f(2) = 1$ dir.

$y = 2f(x + 1)$ de,

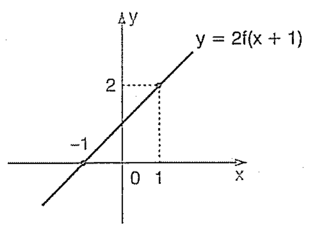
$x = -1$ için, $y = 2f(-1 + 1) = 2f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ dır.

$x = 1$ için, $y = 2f(1 + 1) = 2f(2) = 2 \cdot 1 = 2$ dir.

Buna göre, $y = 2f(x + 1)$ doğrusu (–1, 0) ve (1, 2) noktalarından geçecektir.

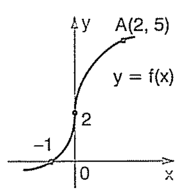
$y = f(x)$ doğrusal olduğu için, $y = 2f(x + 1)$ fonksiyonunun garafiği (–1, 0) ve (1, 2) noktalarından geçen doğrusal bir grafiktir.

Buna göre, $y = 2f(x + 1)$ in grafiği aşağıda çizilmiştir.



Örnek .. 53

Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $f(-1) + f^{-1}(2) + f(2)$ toplamını bulalım.

Çözüm

Grafikte;

$f(-1) = 0$,

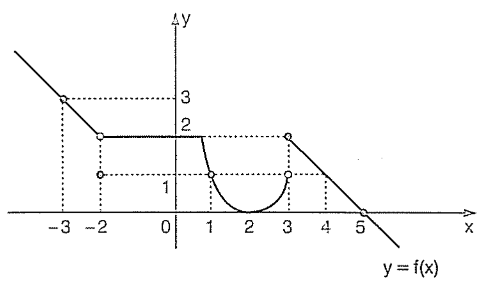
$f(0) = 2$ ve $f^{-1}(2) = 0$,

$f(2) = 5$

olduğuna göre,

$f(-1) + f^{-1}(2) + f(2) = 0 + 0 + 5 = 5$ tir.

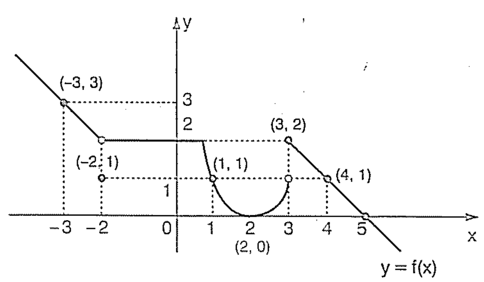
Örnek .. 54



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\dfrac{f(-2)+f(-1)}{f(3)+f(5)}$ değerini bulalım.

Çözüm

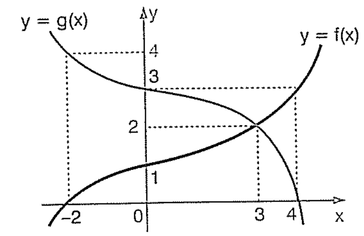


Grafikten, $f(-2) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(3) = 2$ ve $f(5) = 0$ olduğu görülür.

Buradan $\dfrac{f(-2)+f(-1)}{f(3)+f(5)} = \dfrac{1+2}{2+0} = \dfrac{3}{2}$ olur.

Örnek .. 55

Aşağıdaki şekilde, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



Buna göre, $(fog^{-1}of)(4)$ değerini bulalım.

Çözüm

f(x) te, $x = 4$ için, $y = 3$ olduğu için,

$f(4) = 3$ tür.

f(x) te, $x = 0$ için, $y = 1$ olduğu için,

$f(0) = 1$ dir.

g(x) te, $x = 0$ için, $y = 3$ olduğu için,

$g(0) = 3$ ve $g^{-1}(3) = 0$ dır.

$(fog^{-1}of)(4) = f[g^{-1}(f(4))]$ tür.

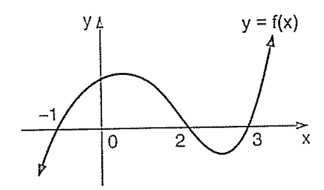
$= f[g^{-1}(3)]$

$= f(0)$

$= 1$ dir.

Örnek .. 56

Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$f(3 - m) = 0$

olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) –9 B) –5 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

$y = f(x)$ in grafiği (–1, 0), (2, 0) ve (3, 0) noktalarından geçtiği için,

$f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ ve $f(3) = 0$ dır.

$f(3 - m) = 0$ olduğuna göre,

$3 - m = -1$ veya $3 - m = 2$ veya $3 - m = 3$ tür.

Bu durumda,

$3 - m = -1$ ise $m = 4$ tür.

$3 - m = 2$ ise $m = 1$ dir.

$3 - m = 3$ ise $m = 0$ dır.

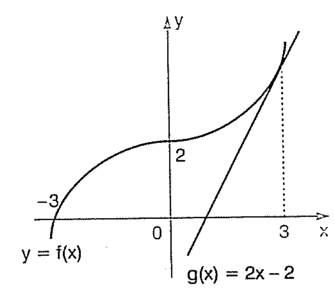
Buna göre, m nin alabileceği değerlerin toplamı,

$4 + 1 + 0 = 5$ tir.

Cevap D

Örnek .. 57

Aşağıdaki şekilde, $y = f(x)$ eğrisinin grafiği Ox eksenini –3 te, Oy eksenini 2 de kesmektedir. $g(x) = 2x - 2$ fonksiyonunun grafiğinin f(x) eğrisine teğet olduğu noktanın apsisi 3 tür.



Buna göre, $\dfrac{(gof^{-1})(2)}{(f^{-1}og)(3)}$ kaçtır?

A) $-\dfrac{2}{3}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) 1

Çözüm

Verilenlere göre,

$f(0) = 2$ ise, $f^{-1}(2) = 0$,

$g(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$,

$g(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$,

$f(3) = g(3) = 4$ ise, $f^{-1}(4) = 3$ tür.

Buna göre,

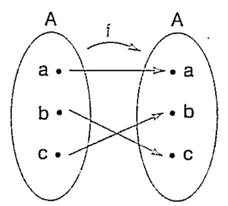
$$\frac{(gof^{-1})(2)}{(f^{-1}og)(3)} = \frac{g[f^{-1}(2)]}{f^{-1}[g(3)]} = \frac{g(0)}{f^{-1}(4)} = \frac{-2}{3} \text{ olur.}$$

Cevap A

H. PERMÜTASYON FONKSİYONU

A sonlu bir küme olsun. A dan A ya tanımlanan bire bir ve örten her fonksiyona A nın bir permütasyon fonksiyonu veya kısaca permütasyonu denir.

Örnek .. 58



f, bire bir örten fonksiyon
f, permütasyon fonksiyondur.

$f : A \to A$ fonksiyonu yukarıdaki şema ile tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu,

$f = \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$ veya, $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ biçiminde gösterilir.

Bu durumda,

$f(a) = a$

$f(b) = c$

$f(c) = b$ dir.

Örnek .. 59

$A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere, $f : A \to A$ ya tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm

Yukarıda verilenlere göre,

$f(1) = 1$ ve $f^{-1}(1) = 1$ dir.

$f(2) = 3$ ve $f^{-1}(3) = 2$ dir.

$f(3) = 2$ ve $f^{-1}(2) = 3$ tür.

Bu durumda aşağıdaki şema yapılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ise } f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek .. 60

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları A dan A ya tanımlı iki permütasyon fonksiyonu olsun.

Buna göre, gof bileşke fonksiyonunu bulalım.

Çözüm

$(gof)(1) = g[f(1)] = g(1) = 4$

$(gof)(2) = g[f(2)] = g(4) = 1$

$(gof)(3) = g[f(3)] = g(2) = 3$

$(gof)(4) = g[f(4)] = g(3) = 2$ olduğuna göre,

$$gof = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. gof bileşke fonksiyonu da A kümesinin bir permütasyonudur.

1. $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$,

$f : A \to \mathbb{R}$

$f = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 4), (3, 1)\}$

olduğuna göre, $f(-2) + f(0) + f(3)$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. $f(2x + 3) = 3x + 2$

olduğuna göre, $f(0)$ kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{2}{3}$

3. $f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right) = 2x - 3$

olduğuna göre, $f(2)$ değeri kaçtır?

A) −9 B) −6 C) −3 D) 3 E) 6

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x + 1) = x \cdot f(x)$

$f(2) = 5$

olduğuna göre, $f(4)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 10 D) 20 E) 30

5. $f(x) = x^2 + 4x + 5$

olduğuna göre, $f(x - 2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 1$ B) x^2 C) $x^2 - 4x + 5$ D) $x^2 - 2x + 3$ E) $x^2 + 8x + 17$

6. $a \neq b$ olmak üzere,

$f(x) = a^x - b^x$

olduğuna göre, $\frac{f(2)}{f(1)}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) a + b B) a − b C) a D) b E) 1

7. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

olduğuna göre, $f(x - 1)$ in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3x B) x^2 C) 2x D) x^3 E) $x^3 + 1$

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$

olduğuna göre, $f(1)$ in değeri kaçtır?

A) −m B) −n C) −1 D) 1 E) m·n

9. Bütün a, b gerçel sayıları için,

$f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$

olduğu veriliyor.

Buna göre, f(4) ün f(1) türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[f(1)]^4$ B) 4f(1) C) $2[f(1)]^2$ D) f(1) + 4 E) 4

10. $f(x + 2) + f(x - 1) = 3x + 1$

olduğuna göre, $f(3) - f(-3)$ değeri kaçtır?

A) −5 B) −4 C) 4 D) 5 E) 9

11.

$\mathbb{A} = [2, 3)$

$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$,

$f(x) = 2x + 3$

fonksiyonu bire bir ve örtendir.

Buna göre, B aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $[7, 9)$ B) $[7, 9]$ C) $(0, 9)$ D) $(0, 9]$ E) $[3, 9)$

12. f, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan doğrusal bir fonksiyondur.

$f(1) = 8$

$f^{-1}(2) = -2$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

13.

$(fog)(x) = 2x - 5$

$f(x) = x + 2$

olduğuna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - 7$ B) $2x + 7$ C) $2x$ D) $2x - 5$ E) $7x$

14.

$f(x) = 3^{2x-1}$

olduğuna göre, f(3x) in f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $27 \cdot f^3(x)$ B) $9 \cdot f^3(x)$ C) $3 \cdot f^3(x)$

D) $3 + f^3(x)$ E) $9 + f^3(x)$

15.

$$f^{-1}(x) = \frac{1+f(x)}{3}$$

olduğuna göre, (fof)(–1) nin değeri kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) –1 E) –4

16.

$f : (-\infty, -1] \rightarrow [3, \infty)$

$f(x) = x^2 + 2x + 4$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1+\sqrt{x+1}$ B) $-1-\sqrt{x-3}$

C) $-1-\sqrt{x+3}$ D) $-1+\sqrt{x+3}$

E) $-1+\sqrt{x-3}$

17.

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{x+a}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –15 B) –12 C) –9 D) –6 E) –4

18.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x + f(x-1)$

$f(10) = 70$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

1.

$f = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 4), (3, 1)\}$ olmak üzere,

$(-2, 4) \in f$ olduğuna göre, $f(-2) = 4$ tür.

$(0, 2) \in f$ olduğuna göre, $f(0) = 2$ dir.

$(3, 1) \in f$ olduğuna göre, $f(3) = 1$ dir.

Buna göre,

$f(-2) + f(0) + f(3) = 4 + 2 + 1 = 7$ olur.

Cevap D

2.

$f(2x + 3) = 3x + 2$

olmak üzere,

$2x + 3 = 0$ ise $x = -\frac{3}{2}$ dir.

Buna göre, $f(2x + 3) = 3x + 2$ fonksiyonunda x görülen her yere $-\frac{3}{2}$ yazılırsa f(0) bulunur.

Buna göre,

$$f\left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2$$

$$f(-3+3) = -\frac{9}{2}+2$$

$$f(0) = -\frac{5}{2} \text{ olur.}$$

Cevap A

3.

$$f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right) = 2x-3$$

olmak üzere,

$\frac{3x-1}{2x+1} = 2$ ise, $3x - 1 = 4x + 2$

ise, $x = -3$ tür.

Buna göre, verilen fonksiyonda x görülen her yere –3 yazılırsa f(2) bulunur.

Buna göre,

$$f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right) = 2x-3$$

$$f\left(\frac{3\cdot(-3)-1}{2\cdot(-3)+1}\right) = 2\cdot(-3)-3$$

$$f\left(\frac{-10}{-5}\right) = -6-3$$

$$f(2) = -9 \text{ olur.}$$

Cevap A

4.

$f(x + 1) = x \cdot f(x)$ ve $f(2) = 5$ olduğuna göre,

$x = 2$ için, $f(3) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 5 = 10$ dur. ... (★)

$x = 3$ için, $f(4) = 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 10 = 30$ olur.

Cevap E

5.

$f(x) = x^2 + 4x + 5$ ise, $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ dir. ... (★)

Bu ifade de x gördüğümüz her yere $x - 2$ yazalım.

$f(x) = (x + 2)^2 + 1$

$f(x - 2) = (x - 2 + 2)^2 + 1$

$f(x - 2) = x^2 + 1$

olur.

Cevap A

6.

$f(x) = a^x - b^x$ fonksiyonu,

$x = 2$ için, $f(2) = a^2 - b^2$,

$x = 1$ için, $f(1) = a^1 - b^1$ dir.

Buna göre,

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = a+b \text{ olur.}$$

Cevap A

7.

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$f(x) = (x + 1)^3$

$f(x - 1) = (x - 1 + 1)^3$

$f(x - 1) = x^3$ tür.

Cevap D

8.

$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ ifadesinde $n = 1$ alınırsa,

$f(m \cdot 1) = f(m) \cdot f(1)$

$f(m) \in \mathbb{R}^+$ olduğu için, $\frac{f(\cancel{m})}{f(\cancel{m})} = \frac{f(\cancel{m}) \cdot f(1)}{f(\cancel{m})}$

$f(1) = 1$ olur.

Cevap D

9.

$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ ... (☆)

$f(4)=f(1+3)$

$=f(1)\cdot f(3)$

$=f(1)\cdot f(1+2)$

$=f(1)\cdot f(1)\cdot f(2)$

$=f(1)\cdot f(1)\cdot f(1+1)$

$=f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)$

$=[f(1)]^4$

Cevap A

10.

$f(x+2)+f(x-1)=3x+1$ fonksiyonu veriliyor.

$x=1$ için, $f(3)+f(0)=3\cdot 1+1$

$f(3)+f(0)=4$ tür. ... (★)

$x=-2$ için, $f(0)+f(-3)=3\cdot(-2)+1$

$f(0)+f(-3)=-5$ tir. ... (★★)

(★) daki denklem ile (★★) daki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{array}{r} f(3)+f(0)=4 \\ -\ f(0)+f(-3)=-5 \\ \hline f(3)-f(-3)=4-(-5) \\ =9 \text{ olur.} \end{array}$$

Cevap E

11.

$y=f(x)=2x+3$ ve $A=[2,3)$ ise,

$A=\{x \mid 2\le x<3, x\in\mathbb{R}\}$ olduğu için,

$2\le x<3$ ise, $2\cdot 2\le 2\cdot x<3\cdot 2$

ise, $4\le 2x<6$

ise, $4+3\le 2x+3<6+3$

ise, $7\le 2x+3<9$

ise, $7\le f(x)<9$ dur. ... (☆)

Buna göre,

$B=\{y \mid 7\le y<9, y\in\mathbb{R}\}$ olduğu için, $B=[7,9)$ olur.

Cevap A

12.

f fonksiyonu doğrusal olduğuna göre,

$f(x)=ax+b$

biçimindedir.

$f^{-1}(2)=-2$ ise $f(-2)=2$ olur. ... (☆)

$f(-2)=2$ ise $-2a+b=2$ dir. ... (1)

$f(1)=8$ ise $a+b=8$ dir. ... (2)

(1) ve (2) denklemlerinin ortak çözümünden

$a=2$, $b=6$ ve $f(x)=2x+6$ bulunur.

Buna göre, $f(0)=6$ olur.

Cevap D

13.

$(fog)(x)=2x-5$ ve $f(x)=x+2$ olduğuna göre, f fonksiyonunda x lerin yerine g(x) yazılırsa,

$f(g(x))=g(x)+2$

$(fog)(x)=g(x)+2$

$2x-5=g(x)+2$

$g(x)=2x-7$ olur.

Cevap A

14.

$f(x)=3^{2x-1}$

$f(x)=\dfrac{3^{2x}}{3}$

$3^{2x}=3\cdot f(x)$ tir.... (★)

$f(x)=3^{2x-1}$

$f(3x)=3^{2(3x)-1}$

$f(3x)=\dfrac{3^{2(3x)}}{3}$

$f(3x)=\dfrac{(3^2)^{3x}}{3}$

$f(3x)=\dfrac{(3^{2x})^3}{3}$, ((★) da $3^{2x}=3\cdot f(x)$ idi.)

$f(3x)=\dfrac{[3\cdot f(x)]^3}{3}$

$f(3x)=\dfrac{27\cdot f^3(x)}{3}$

$f(3x)=9\cdot f^3(x)$ tir.

Cevap B

15.

$f^{-1}(x)=\dfrac{1+f(x)}{3}$

$3f^{-1}(x)=1+f(x)$

$f(x)=3f^{-1}(x)-1$ dir.

Elde edilen eşitlikte x lerin yerine f(x) yazılırsa,

$f(x)=3f^{-1}(x)-1$

$f[f(x)]=3f^{-1}[f(x)]-1$

$(fof)(x)=3(f^{-1}of)(x)-1$, $((f^{-1}of)(x)=x$ tir.)

$(fof)(x)=3x-1$

$(fof)(-1)=3\cdot(-1)-1$

$(fof)(-1)=-4$ olur.

Cevap E

16.

1. Yol

$f(x)=x^2+2x+4$

$y=x^2+2x+4$

$y=(x+1)^2+3$

$(x+1)^2=y-3$

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{y-3}$

$|x+1|=\sqrt{y-3}$ ... (☆)

$-(x+1)=\sqrt{y-3}$

$x+1=-\sqrt{y-3}$

$x=-1-\sqrt{y-3}$

$f^{-1}(y)=-1-\sqrt{y-3}$

$f^{-1}(x)=-1-\sqrt{x-3}$

(☆): $x\in(-\infty,-1]$ olduğundan

$|x+1|=-(x+1)$ dir.

2. Yol

Verilenler uygun herhangi bir x değeri için f(x) in değerini bulalım.

$x=-2$ için,

$f(x)=x^2+2x+4$

$f(-2)=(-2)^2+2\cdot(-2)+4$

$f(-2)=4$ ise

$f^{-1}(4)=-2$ dir.

Bizden, $f^{-1}(x)$ istenmiştir. Seçeneklerde x yerine 4 yazdığımızda sonucu -2 olmayan cevap olamaz.

A) $-1+\sqrt{4+1}\ne -2$ B) $-1-\sqrt{4-3}=-2$

C) $-1-\sqrt{4+3}\ne -2$ D) $-1+\sqrt{4+3}\ne -2$

E) $-1+\sqrt{4-3}\ne -2$

Cevap B

17.

$f\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)=\dfrac{x+a}{x}$ ve $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2$ olarak verildiğine göre,

$\left(\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{1}{3}\right.$ ve $\left.\dfrac{x+a}{x}=2\right)$ dir.

$\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{1}{3}$ ise $x=-4$ tür. ... (☆)

$\dfrac{x+a}{x}=2$ ise $\dfrac{-4+a}{-4}=2$

$a=-4$ olur.

Cevap E

18.

$f(10)=70$ ... (☆)

$$\begin{array}{l} f(1)=1+f(0) \\ f(2)=2+f(1) \\ f(3)=3+f(2) \\ \quad\ldots \\ +\quad f(10)=10+f(9) \\ \hline f(1)+\ldots+f(9)+f(10)=1+2+\ldots+10+f(0)+f(1)+\ldots+f(9) \end{array}$$

$f(10)=\dfrac{10\cdot 11}{2}+f(0)$

$70=55+f(0)$

$f(0)=15$

Cevap C

1. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi A kümesinden B kümesine bir fonksiyon değildir?

A) $\{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 4)\}$

B) $\{(2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$

C) $\{(2, 7), (3, 4), (4, 5), (5, 5)\}$

D) $\{(2, 6), (3, 6), (4, 5), (5, 5)\}$

E) $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (7, 6)\}$

2. $f(4x + 1) = 7x - 3$

olduğuna göre, f(–7) kaçtır?

A) –13 B) –14 C) –15 D) –16 E) –17

3. $f : A \to B$ olmak üzere,

$A = \{6, 7, 8, 9\}$

$B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$f(x) = 2x - 1$

olduğuna göre, f(A) görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{6\}$

B) $\{12, 14, 16, 18\}$

C) $\{11, 13, 15, 17\}$

D) $\{10, 12, 14, 16, 18\}$

E) $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x + f(x + 1)$

$f(5) = 11$

olduğuna göre, f(7) kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{3x-2}{4}$$

olduğuna göre, f(2) + f(–2) kaçtır?

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) –1

6. f, sabit fonksiyondur.

$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{5x+a}{4x+8}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 4 E) 1

7. f, birim fonksiyondur.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = (m + 7)x - 4 + n$

olduğuna göre, m + n kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 9

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 3x + 1$

$g(x) = 2 - 5x$

$f(a) = 2 \cdot g(a)$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

9. $f(x) = ax + b$

$f^{-1}(3) = 4$

$f(5) = 2$

olduğuna göre, a · b çarpımı kaçtır?

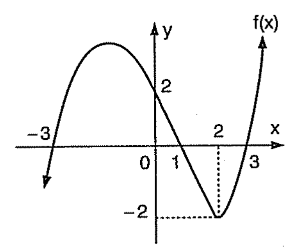
A) –7 B) –6 C) –5 D) 3 E) 6

10. $$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

olduğuna göre, f(x + 1) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x-1}{x+2}$ B) $\frac{1}{x-1}$ C) $\frac{x+2}{x}$ D) $\frac{x+2}{x-1}$ E) $\frac{x+1}{x+2}$

11.



f(x) fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

Buna göre, $\frac{f(-3)+f(0)}{f(2)}$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) –1 E) $-\frac{1}{2}$

12. $f(x) = \sqrt{x+19}$

$g(x) = x + 1$

$$\underbrace{(gofogofogofogofogofogofogofog)}_{14 \text{ tane o işlemi}}(5) = A$$

olduğuna göre, A kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 14

13. $f(x) = x + 2$

$g(x) = 3 + 4x$

$h(x) = 1 - x$

olduğuna göre, (fogoh)(1) kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14. $A = \{3, 4, 5, 6\}$ kümesinde tanımlı,

$f = \{(3, 5), (4, 6), (5, 3), (6, 4)\}$

$g = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

fonksiyonlarına göre, (fog) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

B) $\{(3, 5), (4, 6), (5, 3), (6, 4)\}$

C) $\{(3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$

D) $\{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

E) $\{(3, 4), (4, 5), (5, 3), (6, 6)\}$

1.

$$f(x+1)=\frac{x}{2}+2$$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) $\frac{-3}{2}$ B) −1 C) $\frac{-1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

2. A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı 64 tür.

Buna göre, A kümesinden A kümesine tanımlı sabit fonksiyon sayısı <u>en çok</u> kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) 64

3.

$$f\left(2x,\frac{y}{3}\right)=\frac{x+y}{2}$$

$$f(2,1)=f(-4,k)$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 4

4. f fonksiyonu bire bir olmak üzere,

$(fog)(2x-9) = f(40-6x)$

olduğuna göre, $g^{-1}(1)$ kaçtır?

A) −3 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

5. A iki basamaklı doğal sayılar kümesi olmak üzere,

"$f: A \to B$

f(x) : x in rakamları toplamıdır."

biçiminde tanımlanıyor.

f fonksiyonu örten olduğuna göre, B kümesi kaç elemanlıdır?

A) 10 B) 15 C) 17 D) 18 E) 19

6. Pozitif tam sayılar kümesinde f fonksiyonu,

f(x) = "x in rakamlarının toplamı"

biçiminde tanımlanmıştır.

$f(a) + 3 \cdot a = 78$

olduğuna göre, a doğal sayısının rakamları çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

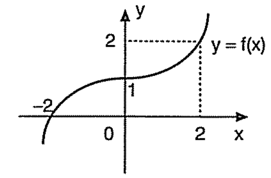
7.

$xf(x) - 6 = 7x + 3f(x)$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3x+7}{x-2}$ B) $\frac{-3x+6}{x+7}$ C) $\frac{3x-6}{x+7}$ D) $\frac{-3x+6}{x-7}$ E) $\frac{3x+6}{x-7}$

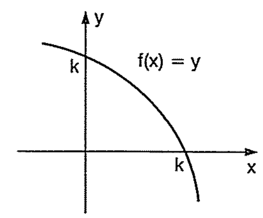
8. Aşağıdaki şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $f(-2) + f^{-1}(2)$ kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

9. f(x) = y fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.

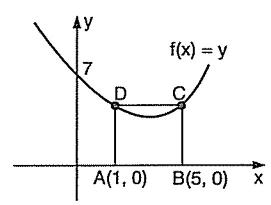


$$f(x) - f(x+k) = x^2 + 1$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. f(x) = y fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



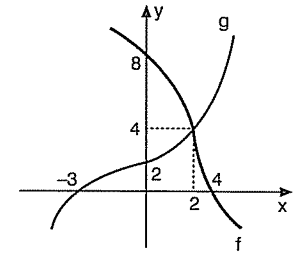
A(1, 0) ve B(5, 0) olmak üzere, ABCD karesinin iki köşesi grafik üzerindedir.

Grafiğin y eksenini kestiği noktanın ordinatı 7 dir.

Buna göre, $0 < x < 1$ için f(x) in birbirinden farklı kaç tam sayı değeri vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. Aşağıdaki şekilde; f fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar (0, 8) ile (4, 0) ve g fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar (−3, 0) ile (0, 2) dir.



Buna göre, $(fog^{-1})(4) + (gof)(4)$ toplamı kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

12. A = {1, 3, 5, 7, 9} kümesinde,

$$f=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\5&9&3&1&7\end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\3&5&1&9&7\end{pmatrix}$$

fonksiyonları tanımlanmıştır.

$(f \circ h)(x) = g(x)$

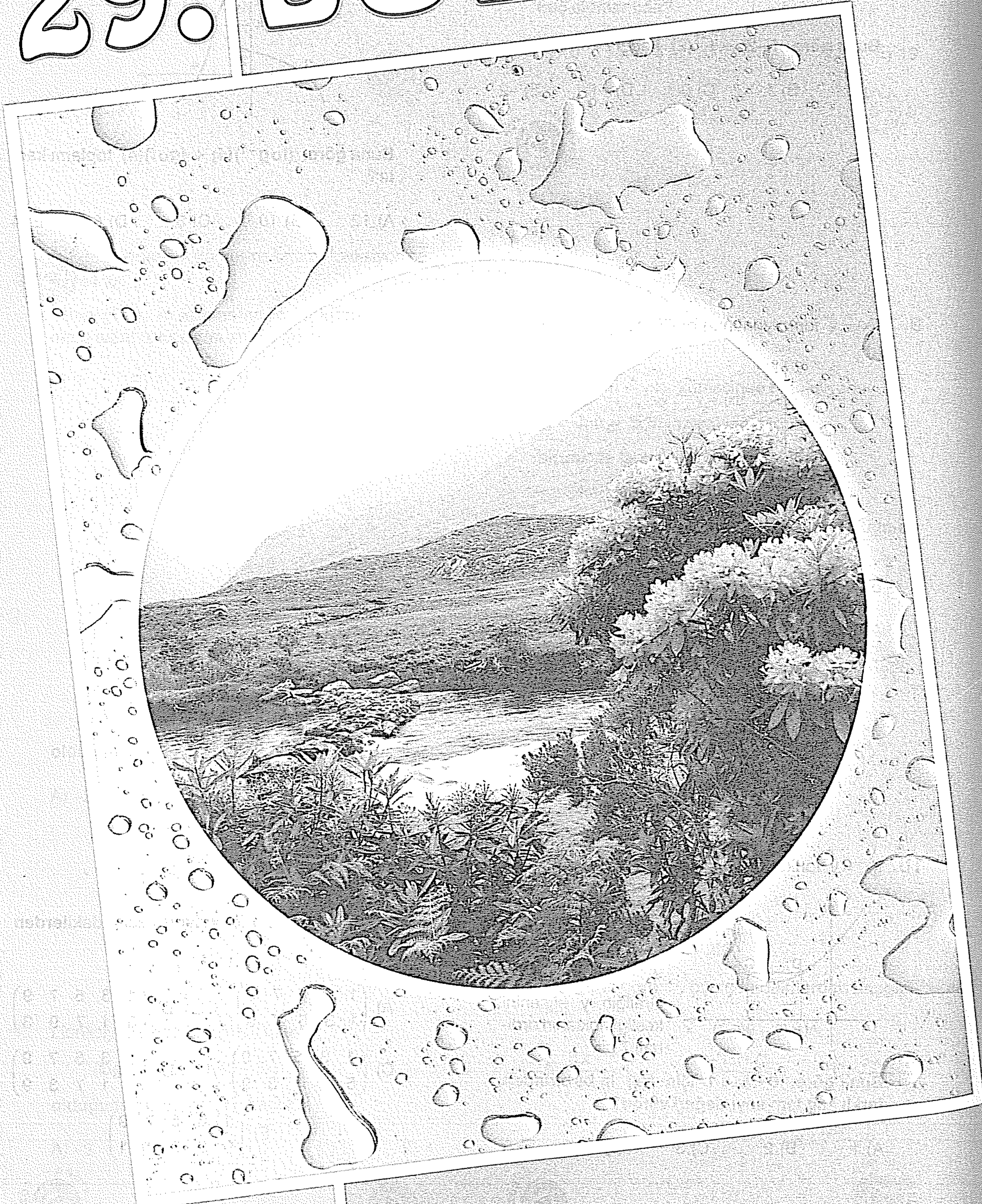
olduğuna göre, h fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\1&3&5&7&9\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\5&1&7&9&3\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\5&7&1&3&9\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\5&1&7&3&9\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\9&3&5&7&1\end{pmatrix}$

29. BÖLÜM



İşlem

A. TANIM

- Bir A kümesinden B kümesine tanımlanan her fonksiyona birli işlem denir.
- A boş olmayan bir küme ve $A \subset B$ olsun. Her

$$f : A \times A \rightarrow B$$

fonksiyonuna A üzerinde ikili işlem veya kısaca işlem denir.

- İşlem için genellikle $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, Δ, O, $\bigstar$ sembolleri kullanılır.

Uygulama

$(5,6) \xrightarrow{+} 11 \ldots\ldots\ldots\ldots 5+6=11$

Uygulama

$(6,4) \xrightarrow{\cdot} 24 \ldots\ldots\ldots\ldots 6\cdot4=24$

Uygulama

$(a,b) \xrightarrow{\Delta} c \ldots\ldots\ldots\ldots a\Delta b=c$

Örnek .. 1

Tam sayılar kümesinde

$$x \bigstar y = 2x + 5y$$

biçiminde $\bigstar$ işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $5 \bigstar (-1)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$x \bigstar y = 2x + 5y$$
$$5 \bigstar (-1) = 2\cdot 5 + 5\cdot(-1)$$
$$= 10 - 5$$
$$= 5$$

Örnek .. 2

Reel (gerçel) sayılar kümesi üzerindeki her a, b için,

$a \star b = a + a \cdot b + b$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $2 \star 3$ ün değeri kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm

$a \star b = a + a \cdot b + b$ olmak üzere,

$2 \star 3$ ün değerini bulmak için verilen işlemde a yerine 2, b yerine 3 yazılır.

Bu durumda,

$2 \star 3 = 2 + 2 \cdot 3 + 3$

$= 2 + 6 + 3$

$= 11$ olur.

Cevap B

Örnek .. 3

Pozitif gerçel (reel) sayılar kümesi üzerinde her a, b için,

$\dfrac{1}{a \star b} = a + \dfrac{1}{b}$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $4 \star 10$ un değeri kaçtır?

A) $\dfrac{10}{41}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{10}{39}$ D) $\dfrac{5}{19}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Çözüm

Verilen işlemde a yerine 4, b yerine 10 yazılırsa,

$\dfrac{1}{a \star b} = a + \dfrac{1}{b}$

$\dfrac{1}{4 \star 10} = 4 + \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{1}{4 \star 10} = \dfrac{41}{10}$ ise

$4 \star 10 = \dfrac{10}{41}$ olur.

Cevap A

Örnek .. 4

Sıfırdan ve birbirinden farklı reel sayılar kümesinde Δ işlemi,

$\dfrac{3}{a \Delta b} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$

olduğuna göre, $5 \Delta 2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Verilen işlemi düzenleyerek $5 \Delta 2$ işleminin sonucunu bulalım:

$\dfrac{3}{a \Delta b} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$

$\dfrac{3}{a \Delta b} = \dfrac{a-b}{a \cdot b}$ ise $a \Delta b = \dfrac{3 \cdot a \cdot b}{a-b}$ dir.

Buna göre, $a = 5$ ve $b = 2$ için,

$a \Delta b = \dfrac{3 \cdot a \cdot b}{a-b}$

$5 \Delta 2 = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 2}{5-2}$

$= \dfrac{30}{3}$

$= 10$ olur.

Örnek .. 5

Tam sayılar kümesi üzerinde,

$a \star b = 2 \cdot a - b$

işlemi tanımlanmıştır.

$k \star 7 = 5 \star 13$

olduğuna göre, k nin değerini bulalım.

Çözüm

$a \star b = 2 \cdot a - b$ olduğuna göre,

$k \star 7 = 5 \star 13$

$2 \cdot k - 7 = 2 \cdot 5 - 13$

$2 \cdot k = 10 - 13 + 7$

$2 \cdot k = 4$

$k = 2$

olur.

Örnek .. 6

Reel sayılarda $\star$ işlemi,

$a \star b = \sqrt{a^2 + b^2}$

olduğuna göre, $(3 \star 4) \star 12$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$a \star b = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğuna göre,

$a = 3$ ve $b = 4$ için,

$3 \star 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ tir. ... ($\star$)

$a = 5$ ve $b = 12$ için,

$5 \star 12 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ tür. ... ($\star\star$)

Buna göre, ($\star$) ve ($\star\star$) den,

$(3 \star 4) \star 12 = 5 \star 12$

$= 13$

olur.

Örnek .. 7

Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde $\star$ ve Δ işlemleri,

$x \star y = x + y$

$x \Delta y = x^{(x \star y)}$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $10 \Delta 5$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Çözüm

$x \Delta y = x^{(x \star y)}$

$x \Delta y = x^{(x + y)}$

$10 \Delta 5 = 10^{(10 + 5)}$

$10 \Delta 5 = 10^{15}$ olur.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, 10^n sayısı $(n + 1)$ basamaklıdır.

Bu durumda, 10^{15} sayısı 16 basamaklıdır.

Cevap B

Örnek .. 8

Reel sayılar kümesi üzerindeki her x, y için,

$(x + 1) \star y = 3 \cdot x - y$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $(5 \star 6) \star 8$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$(x + 1) \star y = 3 \cdot x - y$ olduğuna göre,

$x + 1 = 5$ ise $x = 4$ tür. Buna göre,

$(x + 1) \star y = 3 \cdot x - y$

$(4 + 1) \star 6 = 3 \cdot 4 - 6$

$5 \star 6 = 12 - 6$

$5 \star 6 = 6$ ... (1)

$x + 1 = 6$ ise $x = 5$ tir.

Buna göre,

$(x + 1) \star y = 3 \cdot x - y$

$(5 + 1) \star 8 = 3 \cdot 5 - 8$

$6 \star 8 = 15 - 8$

$6 \star 8 = 7$ dir. ... (2)

(1) ve (2) den

$(5 \star 6) \star 8 = 6 \star 8$

$= 7$

olur.

Örnek .. 9

Gerçel sayılar üzerinde ✣ işlemi,

$(a - 1)$ ✣ $b = a + b - a \cdot b$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, a ✣ $(b + 2)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + ab$ B) $a + b + ab$

C) $1 + a + ab$ D) $-a - ab + 1$

E) $1 - a + b + ab$

Çözüm

$(a-1) ✣ b = a + b - a \cdot b$

eşitliğinin her iki tarafında a yerine (a + 1), b yerine (b + 2) yazılırsa istenilen ifade bulunur.

$[(a+1)-1] ✣ (b+2)$

$= (a+1) + (b+2) - (a+1) \cdot (b+2)$

$a ✣ (b+2) = a + 1 + b + 2 - ab - 2a - b - 2$

$= -a - ab + 1$ dir.

Cevap D

Örnek .. 10

Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde, ✣ ve ☆ işlemleri,

$x ✣ y = 2y + x$

$x ☆ y = x - 3y$

biçiminde tanımlanmıştır.

$(206 ✣ 207) ☆ 205$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

İlk önce parantez içindeki işlemin sonucunu bulalım.

$x ✣ y = 2y + x$

$206 ✣ 207 = 2 \cdot 207 + 206$

$= 414 + 206$

$= 620$ olur.

602 ☆ 205 işleminin sonucunu bulalım.

$x ☆ y = x - 3y$ ise,

$620 ☆ 205 = 620 - 3 \cdot (205)$

$= 620 - 615$

$= 5$ tir.

Buna göre,

$(206 ✣ 207) ☆ 205 = 620 ☆ 205$

$= 5$

olur.

Örnek .. 11

Tam sayılar kümesinde, Δ işlemi

a Δ b = (a ve b nin küçük olmayanı)

olarak tanımlanmıştır.

Buna göre, (–2) Δ (3 Δ 5) işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

"a ve b nin küçük olmayanı" ifadesinin, "a ve b nin büyük veya eşit olanı" ifadesine denk olduğunu göz önüne alalım. Önce parantez içini sonuçlandıralım:

3 Δ 5 = (3 ve 5 in küçük olmayanı) = 5

olur. Buna göre,

(–2) Δ (3 Δ 5) = (–2) Δ 5

= (–2 ve 5 in küçük olmayanı)

= 5 olur.

Örnek .. 12

ℝ de ✯ işlemi,

x ✯ y = "x ile y den küçük olmayanı"

şeklinde tanımlanıyor.

6 ✯ (a ✯ b) = 9

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm

Verilen tanımdan,

6 ✯ (a ✯ b) = 9 ise (a ✯ b) işleminin sonucu 9 olmalıdır.

a ✯ b = 9 ise a ile b nin alabileceği en büyük değer 9 olur.

Buna göre, a sayısı 9 olabilir.

Cevap A

Örnek .. 13

Tam sayılar kümesi üzerinde her x, y için,

$$x \star y = \begin{cases} x \cdot y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \end{cases}$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, 4 ★ (5 ★ 1) işleminin sonucu kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 6 E) 5

Çözüm

Önce parantez içini sonuçlandıralım:

$x \geq y$ olduğunda $x \star y = x \cdot y$ dir.

$5 > 1$ olduğu için,

$5 \star 1 = 5 \cdot 1 = 5$ olur. ... (☆)

$x < y$ olduğunda $x \star y = x + y$ dir.

$4 < 5$ olduğu için,

$4 \star 5 = 4 + 5 = 9$ olur. ... (☆☆)

Buna göre,

$4 \star (5 \star 1) = 4 \star 5 = 9$ bulunur.

Cevap C

Örnek .. 14

Tam sayılar kümesi üzerinde her x, y için,

$$x \star y = \begin{cases} x + y, & x \geq y \\ 2x - y, & x < y \end{cases}$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, 2 ★ (4 ★ 3) işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Önce parantez içini sonuçlandıralım:

4 > 3 olduğu için,

$x \star y = x + y$

$4 \star 3 = 4 + 3$

$= 7$ olur.

2 < 7 olduğu için,

$x \star y = 2x - y$

$2 \star 7 = 2 \cdot 2 - 7$

$= 4 - 7$

$= -3$ olur.

Buna göre,

$2 \star (4 \star 3) = 2 \star 7$

$= -3$

bulunur.

Örnek .. 15

Her a, b gerçel sayısı için,

$$a \star b = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}, & a + b \geq 0 \text{ ise} \\ \dfrac{a+b}{3}, & a + b < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $\left(\frac{3}{4} \star \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \star \left(-\frac{5}{4}\right)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) 0 E) $\frac{1}{6}$

Çözüm

$\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan,

$\frac{3}{4} \star \left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ tür. ... (1)

$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{-4}{4} = -1 < 0$ olduğundan,

$\frac{1}{4} \star \left(-\frac{5}{4}\right) = \dfrac{\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right)}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ tür. ... (2)

(1) ve (2) den

$\left(\frac{3}{4} \star \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \star \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \star \left(-\frac{5}{4}\right)$

$= -\frac{1}{3}$ olur.

Cevap A

Örnek .. 16

$\mathbb{R}$ de ✣ işlemi,

$$a ✣ b = \begin{cases} a+1, & \text{a çift sayı ise} \\ b-1, & \text{a tek sayı ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre,

$(5 ✣ a) + (6 ✣ a) + (7 ✣ a) + (8 ✣ a) = 120$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 65 B) 62 C) 58 D) 53 E) 51

Çözüm

İşlemin tanımından,

$5 ✣ a = a - 1$

$6 ✣ a = 6 + 1 = 7$

$7 ✣ a = a - 1$

$8 ✣ a = 8 + 1 = 9$ olur.

Buna göre,

$(5 ✣ a) + (6 ✣ a) + (7 ✣ a) + (8 ✣ a) = 120$

$a - 1 + 7 + a - 1 + 9 = 120$

$2a + 14 = 120$

$2a = 106$

$a = 53$ tür.

Cevap D

Örnek .. 17

Reel sayılar kümesi üzerindeki her x, y için,

$x \Delta y = 2x - y + 2(y \Delta x)$

işlemleri tanımlanmıştır.

$6 \Delta 4$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x \Delta y = 2x - y + 2(y \Delta x)$ olduğuna göre,

$x = 6$ ve $y = 4$ için,

$x \Delta y = 2x - y + 2(y \Delta x)$

$6 \Delta 4 = 2 \cdot 6 - 4 + 2(4 \Delta 6)$

$6 \Delta 4 = 12 - 4 + 2(4 \Delta 6)$

$6 \Delta 4 = 8 + 2(4 \Delta 6)$ dır. ... $(\star)$

$x = 4$ ve $y = 6$ için,

$x \Delta y = 2x - y + 2(y \Delta x)$

$4 \Delta 6 = 2 \cdot 4 - 6 + 2(6 \Delta 4)$

$4 \Delta 6 = 8 - 6 + 2(6 \Delta 4)$

$4 \Delta 6 = 2 + 2(6 \Delta 4)$ tür. ... $(\star\star)$

$(\star\star)$ daki $4 \Delta 6$ nın değeri $(\star)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$6 \Delta 4 = 8 + 2(4 \Delta 6)$

$6 \Delta 4 = 8 + 2[2 + 2(6 \Delta 4)]$

$6 \Delta 4 = 8 + 4 + 4(6 \Delta 4)$

$6 \Delta 4 = 12 + 4(6 \Delta 4)$

$(6 \Delta 4) - 4(6 \Delta 4) = 12$

$-3(6 \Delta 4) = 12$

$(6 \Delta 4) = -4$

olur.

Örnek .. 18

n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$x^{\boxed{n}} = x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}$$

$$x_{\boxed{n}} = x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \ldots \cdot x^{2n}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $\dfrac{2^{\boxed{25}}}{2_{\boxed{25}}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$2^{\boxed{25}} = \underbrace{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{49}}_{25 \text{ tane}} \ldots (\star)$$

$$2_{\boxed{25}} = \underbrace{2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \ldots \cdot 2^{50}}_{25 \text{ tane}} \ldots (\star\star)$$

$$\frac{2^{\boxed{25}}}{2_{\boxed{25}}} = \frac{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{49}}{2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \ldots \cdot 2^{50}}$$

$$= \frac{2}{2^2} \cdot \frac{2^3}{2^4} \cdot \frac{2^5}{2^6} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{49}}{2^{50}}$$

$$= \underbrace{2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot \ldots \cdot 2^{-1}}_{25 \text{ tane}}$$

$$= \left(2^{-1}\right)^{25}$$

$$= 2^{-25}$$

$$= \frac{1}{2^{25}}$$

Örnek .. 19

Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir Δ işlemi,

$(a, b) \Delta (c, d) = (ac - bd, ad - bc)$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre,

$(m, n) \Delta (-2, 3) = (6, 1)$

eşitliğini sağlayan (m, n) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, –4) B) (3, –1) C) (1, –4) D) (–1, –4) E) (–1, 0)

Çözüm

$(a, b) \Delta (c, d) = (ac - bd, ad - bc)$

olduğuna göre,

$(m, n) \Delta (-2, 3) = (m \cdot (-2) - n \cdot 3,\ m \cdot 3 - n \cdot (-2))$

$= (-2m - 3n, 3m + 2n)$

olur. Bu durumda,

$(m, n) \Delta (-2, 3) = (6, 1)$

$(-2m - 3n, 3m + 2n) = (6, 1)$

olduğuna göre,

$-2m - 3n = 6$ ve $3m + 2n = 1$ dir.

Bu iki denklemin ortak çözümünden, $m = 3$ ve $n = -4$ bulunur.

Bu durumda, (m, n) ikilisi (3, –4) tür.

Cevap A

Örnek .. 20

Dik koordinat düzleminin noktaları üzerinde bir $\star$ işlemi,

$(a, b) \star (c, d) = (a + c, b \cdot d)$

şeklinde tanımlanıyor.

$(m, -3) \star (4, n + m) = (1, 21)$

olduğuna göre, m – n işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$(a, b) \star (c, d) = (a + c, b \cdot d)$

olduğuna göre,

$(m, -3) \star (4, n + m) = (m + 4, (-3) \cdot (n + m))$

$= (m + 4, -3n - 3m)$

olur. Bu durumda,

$(m, -3) \star (4, n + m) = (1, 21)$

$(m + 4, -3n - 3m) = (1, 21)$

olduğuna göre,

$(m + 4 = 1$ ve $-3n - 3m = 21)$ dir.

$m + 4 = 1$ ise $m = -3$ tür.

$-3n - 3m = 21$ ise $-3n - 3(-3) = 21$

$-3n + 9 = 21$

$-3n = 21 - 9$

$-3n = 12$

$n = -4$

bulunur. Buna göre,

$m - n = -3 - (-4)$

$= 1$

olur.

Uygulama

$\diamond$	1	2
1	2	1
2	3	2

A = {1, 2} kümesi üzerinde yandaki tablo ile tanımlanan $\diamond$ işlemine göre,

$1 \diamond 2 = 1$

$2 \diamond 1 = 3$ tür.

Örnek .. 21

$\star$	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

A = {x, y, z} kümesi üzerinde $\star$ işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

Bu işleme göre, $z \star y$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\star$	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

Yandaki şekile dikkat edilirse,

$z \star y = y$

olduğu görülür.

Örnek .. 22

A = {S, E, Ç, İ, L} kümesi üzerinde △ işlemi aşağıdaki tabloya göre tanımlanıyor.

△	S	E	Ç	İ	L
S	E	Ç	İ	L	S
E	Ç	İ	L	S	E
Ç	İ	L	S	E	Ç
İ	L	S	E	Ç	İ
L	S	E	Ç	İ	L

Buna göre,

S △ (Ç △ L)

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

△	S	E	Ç	İ	L
S	E	Ç	İ	L	S
E	Ç	İ	L	S	E
Ç	İ	L	S	E	Ç
İ	L	S	E	Ç	İ
L	S	E	Ç	İ	L

Ç △ L = Ç

dir.

Buna göre,

S △ (Ç △ L) = S △ (Ç)

= İ

olur.

Örnek .. 23

A = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde ✻ işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanmıştır.

✻	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	c	d	e	a	b

Tabloya göre, c ✻ (a ✻ d) = b ✻ x eşitliğini sağlayan x in eşitini bulalım.

Çözüm

c ✻ (a ✻ d) = b ✻ x

c ✻ b = b ✻ x

b = b ✻ x ... (1)

b = b ✻ c dir. ... (2)

(1) ve (2) den,

x = c

olur.

Örnek .. 24

A = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde △ işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanmıştır.

△	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Buna göre, d △ (e △ b) = c △ (x △ a) eşitliğini sağlayan x aşağıdakilerden hangisidir?

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm

d △ (e △ b) = c △ (x △ a)

d △ c = c △ (x △ a)

c = c △ (x △ a) ise,

x △ a = d

x = b dir.

Cevap B

Örnek .. 25

☆	M	A	R	T	I
M	A	R	T	I	M
A	R	T	I	M	A
R	T	I	M	A	R
T	I	M	A	R	T
I	M	A	R	T	I

Yandaki tabloda verilen ☆ işlemine göre,

$x^n = \underbrace{x ☆ x ☆ ..... ☆ x}_{n \text{ tane } x}$ tir.

Buna göre, M^2 ☆ (R ☆ T) işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) M B) A C) R D) T E) I

Çözüm

☆	M	A	R	T	I
M	A	R	T	I	M
A	R	T	I	M	A
R	T	I	M	A	R
T	I	M	A	R	T
I	M	A	R	T	I

M^2 = M ☆ M

= A dır. ... (1)

R ☆ T = A dır. ... (2)

(1) ve (2) den

M^2 ☆ (R ☆ T) = A ☆ A

= T

olur.

Cevap D

B. İŞLEMİN ÖZELLİKLERİ

1. Kapalılık Özelliği

A boş olmayan bir küme ve ☆, A da tanımlı bir işlem olsun.

Her a, b ∈ A için a ☆ b ∈ A ise, A kümesi ☆ işlemine göre kapalıdır denir.

Uygulama

ℕ (Doğal Sayılar Kümesi), "+" (toplama) işlemine göre kapalıdır. Çünkü, herhangi iki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayıdır.

Uygulama

ℝ (Reel Sayılar Kümesi), "·" (çarpma) işlemine göre kapalıdır. Çünkü, herhangi iki reel sayının çarpımı yine bir reel sayıdır.

Uygulama

✧	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

A = {1, 2, 3} kümesi üzerinde yandaki tablo ile tanımlanan ✧ işlemine göre,

1 ✧ 1 = 2	2 ✧ 1 = 3	3 ✧ 1 = 1
1 ✧ 2 = 3	2 ✧ 2 = 1	3 ✧ 2 = 2
1 ✧ 3 = 1	2 ✧ 3 = 2	3 ✧ 3 = 3

Görüldüğü gibi, A kümesinden alınan herhangi iki elemanın ✧ işlemine göre sonucu yine A nın elemanıdır. Buna göre, A kümesi ✧ işlemine göre kapalıdır.

Tablodaki tüm elemanların A kümesine ait olduğuna dikkat ediniz.

Uygulama

a ★ b = a + a · b + b

biçiminde tanımlanan ★ işlemine göre doğal sayılar kümesi ve tam sayılar kümesi gerçel sayılar kümesi kapalıdır.

Uygulama

Toplama (+) işlemine göre tek sayılar kümesi kapalı değildir. Çünkü, herhangi iki tek sayının toplamı yine bir tek sayı değildir.

Uygulama

a ★ b = a − a · b + b

biçiminde tanımlanan ★ işlemine göre tam sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesi kapalı; doğal sayılar kümesi kapalı değildir.

(3 ∈ ℕ, 4 ∈ ℕ, 3 ★ 4 = −5 ∉ ℕ)

Uygulama

Toplama (+) işlemine göre; doğal sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, tam sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesi kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve ☆, A da tanımlı bir işlem olsun.

Her a, b ∈ A için,

a ☆ b = b ☆ a

ise "☆ işleminin değişme özelliği vardır" denir.

Örnek .. 26

Reel sayılar kümesinde + işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

İki reel sayının toplamında, sayıların yerlerinin değişmesi sonucu değiştirmemektedir. Bunun için, reel sayılar kümesinde + işleminin değişme özelliği vardır. Örneğin,

$2 + 3 \stackrel{?}{=} 3 + 2$

5 = 5 tir.

Örnek .. 27

Reel sayılar kümesinde tanımlanan

$x \triangle y = x + y - 2xy$

işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

$$x \triangle y \overset{?}{=} y \triangle x$$
$$x + y - 2 \cdot x \cdot y \overset{?}{=} y + x - 2 \cdot y \cdot x$$
$$0 = 0 \text{ olur.}$$

Görüldüğü gibi $\triangle$ işleminin değişme özelliği vardır.

Uygulama

Gerçel sayılar kümesinde her a, b için,

$a \maltese b = a - 5 \cdot b$

biçiminde tanımlanan $\maltese$ işleminin değişme özelliği yoktur.

Çünkü,

$a \maltese b = a - 5 \cdot b$

$b \maltese a = b - 5 \cdot a$

$a - 5 \cdot b \neq b - 5 \cdot a$

olduğu için, $a \maltese b \neq b \maltese a$ dır.

Uygulama

Gerçel sayılar kümesinde her a, b için

$a \bigstar b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

biçiminde tanımlanan $\bigstar$ işleminin değişme özelliği vardır.

Uygulama

Gerçel (reel) sayılar kümesinde, toplama (+) işlemi ve çarpma (·) işleminin değişme özelliği vardır.

Uygulama

Reel sayılar kümesinde, bölme ve çıkarma işlemlerinin değişme özelliği yoktur.

Örnek .. 28

Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan

$x \triangle y = x - y + 10$

işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

$$x \triangle y \overset{?}{=} y \triangle x$$
$$x - y + 10 \overset{?}{=} y - x + 10$$
$$x - y \overset{?}{=} y - x \text{ dir.}$$

$x - y = y - x$ ifadesi daima sağlanmadığı için $\triangle$ işleminin değişme özelliği yoktur.

Uygulama

K = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde $\divideontimes$ işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanmıştır.

$\divideontimes$	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

Tabloyla tanımlanan $\divideontimes$ işleminin değişme özelliği vardır. Çünkü, tablonun taralı (boyalı) kısmındaki elemanların hepsi işlemi gören köşegene göre simetriktir.

Örnek .. 29

$\mathbb{R}$ de tanımlı $\star$ işleminin değişme özelliği vardır.

$x \star y = x + y + 3(y \star x)$

olduğuna göre, 10 $\star$ 26 kaçtır?

A) –24 B) –18 C) –12 D) –10 E) –6

Çözüm

$\star$ işleminin değişme özelliği olduğu için,

$x \star y = y \star x$ olur. ... (1)

$x \star y = x + y + 3(y \star x)$

$x \star y = x + y + 3(x \star y)$

$-2(x \star y) = x + y$

$x \star y = \dfrac{x+y}{-2}$ dir. ... (2)

Buna göre,

$$10 \star 26 = \frac{10+26}{-2} = \frac{36}{-2} = -18 \text{ olur.}$$

Cevap B

3. Birleşme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve $\star$, A da tanımlı bir işlem olsun.

Her $a, b, c \in A$ için, $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ ise $\star$ işleminin birleşme özelliği vardır denir.

Uygulama

Toplama işleminin birleşme özelliği olup olmadığını örnekle gösterelim:

a = 2, b = 3 ve c = 4 olsun.

$a + (b + c) \overset{?}{=} (a + b) + c$ olup olmadığını görelim.

$$2 + (3 + 4) \overset{?}{=} (2 + 3) + 4$$
$$2 + 7 \overset{?}{=} 5 + 4$$
$$9 = 9$$

Görüldüğü gibi, parantezin yerinin değiştirilmesi sonucu etkilemedi. Bu eşitliği her sayı için gösterebiliriz. Bu durumda, toplama (+) işleminin birleşme özelliği vardır.

Uygulama

Çıkarma işleminin birleşme özelliği olup olmadığını örnekle gösterelim:

a = 10, b = 7 ve c = 2 olsun.

$a - (b - c) \overset{?}{=} (a - b) - c$ olup olmadığını görelim.

$$10 - (7 - 2) \overset{?}{=} (10 - 7) - 2$$
$$10 - 5 \overset{?}{=} 3 - 2$$
$$5 \neq 1 \text{ dir.}$$

Görüldüğü gibi, parantezin yerinin değiştirilmesi sonucu değiştirdi.

Yani çıkarma (–) işleminin birleşme özelliği yoktur.

Uygulama

Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan,

$a \diamond b = a + b - 3$

işleminin birleşme özelliği olup olmadığını örnekle gösterelim:

a = 2, b = 3 ve c = 5 olsun.

$$a \diamond (b \diamond c) \overset{?}{=} (a \diamond b) \diamond c$$
$$2 \diamond (3 \diamond 5) \overset{?}{=} (2 \diamond 3) \diamond 5$$
$$2 \diamond (3 + 5 - 3) \overset{?}{=} (2 + 3 - 3) \diamond 5$$
$$2 \diamond 5 \overset{?}{=} 2 \diamond 5$$
$$2 + 5 - 3 \overset{?}{=} 2 + 5 - 3$$
$$4 = 4 \text{ tür.}$$

Bu tür eşitliği her tam sayı için gösterebiliriz.

Buna göre, $\diamond$ işleminin tam sayılar kümesinde birleşme özelliği vardır.

4. Birim (Etkisiz) Eleman Özelliği

A boş olmayan bir küme ve $\star$, A da tanımlı bir işlem olsun.

$\forall a \in A$ için,

$a \star e = e \star a = a$

ise e ye $\star$ işleminin birim (etkisiz) elemanı denir.

$e \in A$ ise "A kümesi $\star$ işlemine göre birim (etkisiz eleman) özelliğine sahiptir" denir.

Bir işlemde etkisiz eleman varsa bir tanedir. Birden fazla etkisiz eleman bulunuyorsa, işlemin etkisiz (birim) elemanı yoktur.

Uygulama

$0 + 4 = 4 + 0 = 4$

$0 + 7 = 7 + 0 = 7$

Görüldüğü gibi, 0 ile hangi reel sayıyı toplarsak toplayalım sonuç daima topladığımız sayı çıkmaktadır.

Yani her $x \in \mathbb{R}$ için,

$0 + x = x + 0 = x$ dir.

Bu durumda, toplama (+) işleminin birim elemanı sıfırdır.

Uygulama

$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$

$1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$

Görüldüğü gibi, 1 ile hangi reel sayıyı çarparsak çarpalım sonuç daima çarptığımız reel sayı çıkıyor.

Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için,

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ dir.

Bu durumda, çarpma (·) işleminin birim elemanı 1 dir.

Uygulama

Toplama (+) işlemine göre etkisiz eleman 0 olduğunu biliyoruz.

0 doğal sayı olduğundan, $\mathbb{N}$ (Doğal sayılar kümesi) toplama (+) işlemine göre etkisiz eleman özelliğine sahiptir.

0 pozitif tam sayı olmadığından, $\mathbb{Z}^+$ (Pozitif tam sayılar kümesi) toplama (+) işlemine göre etkisiz eleman özelliğine sahip değildir.

Çıkarma (–) işleminin ve bölme (:) işleminin etkisiz elemanı yoktur.

Uyarı

★ işleminin değişme özelliği varsa,

x ★ e = x veya e ★ x = x

eşitliğinden sadece birine bakılarak ★ işleminin etkisiz elemanı bulunabilir.

Örnek .. 30

$\mathbb{R}$ de tanımlanan,

$x \Delta y = x + y + 2$

işleminin etkisiz (birim) **elemanını bulalım.**

Çözüm

Δ işleminin değişme özelliği olduğu için, $x \Delta e = x$ eşitliğini sağlayan e sayısını bulmalıyız.

$x \Delta e = x$

$x + e + 2 = x$

$e + 2 = 0$

$e = -2$ dir.

Buna göre, Δ işleminin etkisiz (birim) elemanı –2 dir.

Örnek .. 31

$\mathbb{R}$ de tanımlanan,

$x \Delta y = 2x - y + 3$

işleminin etkisiz (birim) **elemanını bulalım.**

Çözüm

$x \Delta e = x$

$2x - e + 3 = x$

$x + 3 = e$

$e = x + 3$ tür.

e elemanı x in değişen değerlerine göre farklı değerler alacağından Δ işleminin birim elemanı yoktur.

Verilen işlemin değişme özelliği olmadığı için yukarıdaki işlem yapılmadan etkisiz elemanın olmayacağı söylenebilirdi.

Sonuç

Bazı işlemlerin birim elemanı yoktur. Ancak, bir işlemin birim elemanı varsa bir tanedir.

Örnek .. 32

$\mathbb{Z}$ de tanımlı ✣ işlemi,

a ✣ b = a + b + 3

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, ✣ işleminin birim (etkisiz) **elemanı kaçtır?**

A) – 5 B) – 4 C) – 3 D) – 2 E) 0

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{Z}$ için,

x ✣ e = e ✣ x = x

olacak biçimde e yi bulalım. ✣ işleminin değişme özelliği olduğundan sadece

x ✣ e = x

eşitliğini sağlayan e elemanını bulmak yeterlidir.

x ✣ e = x

x + e + 3 = x

e + 3 = 0

e = –3 tür.

Cevap C

Örnek .. 33

✿	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

A = {a, b, c, d} kümesi üzerinde ✿ işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

✿ işleminin etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm

✿	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

✿ işleminin bulunduğu satırın aynen ortaya çıktığı satırı ve ✿ işleminin bulunduğu sütunun aynen ortaya çıktığı sütunu yandaki gibi tarayalım.

Taradığımız satırın ve taradığımız sütunun kesişiminde bulunan elemanı birim elemandır.

Buna göre, ✿ işleminin birim (etkisiz) elemanı c dir.

Tabloya dikkat edilirse,

a ✿ c = c ✿ a = a

b ✿ c = c ✿ b = b

c ✿ c = c ✿ c = c

d ✿ c = c ✿ d = d

eşitliklerinin doğru olduğu görülür.

Örnek .. 34

★	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

A = {x, y, z} kümesi üzerinde ★ işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

★ işleminin etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm

★	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

★ işleminin bulunduğu satırın aynen ortaya çıktığı satırı ve ★ işleminin bulunduğu sütunun aynen ortaya çıktığı sütunu yandaki gibi farklı renkli olarak yazalım.

Renkli olarak yazdığımız satırın ve sütunun ortak elemanı birim (etkisiz) elemandır.

Buna göre, ★ işleminin birim (etkisiz) elemanı z dir.

5. Ters Eleman Özelliği

A boş olmayan bir küme ve ✯, A da tanımlı bir işlem olsun. e, ✯ işleminin birim elemanı olsun.

$x \in A$ için, x ✯ y = y ✯ x = e

şartını sağlayan y elemanına ✯ işlemine göre, x in tersi denir ve $x^{-1} = y$ şeklinde gösterilir.

$y \in A$ ise "A kümesi ✯ işlemine göre ters eleman özelliğine sahiptir" denir.

✯ işlemine göre A kümesinin her elemanının tersi, yine A kümesinin bir elemanı ise A kümesi ✯ işlemine göre ters eleman özelliğine sahiptir.

Uygulama

Toplama (+) işlemine göre 7 nin tersi – 7 dir. Çünkü,

$7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$

olur. Yani 7 ile 7 nin tersinin + işlemine göre sonucu + işleminin etkisiz elemanına eşit olmaktadır.

Uygulama

Reel sayılarda toplama işleminin birim elemanı 0 dır.

Her $x \in \mathbb{R}$ için, $x + (-x) = (-x) + x = 0$

olduğundan, x in toplama işlemine göre tersi, –x tir.

Uygulama

Toplama (+) işlemine göre 0 ın tersi 0 dır.

Uygulama

Bütün reel sayıların + işlemine göre tersi reel sayı olduğu için, reel sayılar kümesi + işlemine göre ters eleman özelliğine sahiptir.

Uygulama

Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre 3 ün tersi $\frac{1}{3}$ tür.

Çünkü, çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 olmak üzere,

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ dir.}$$

Yani 3 ile 3 ün tersinin çarpma $(\cdot)$ işlemine göre sonucu çarpma $(\cdot)$ işleminin etkisiz elemanına eşit olmaktadır.

Uygulama

Reel sayılarda çarpma işleminin birim elemanı 1 dir.

Her $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için, $x \cdot x^{-1} = 1$ ise $x^{-1} = \frac{1}{x}$ tir.

Uygulama

Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre 0 ın tersi yoktur.

Uygulama

0 ın $\cdot$ (çarpma) işlemine göre tersi olmadığı için $\mathbb{R}, \cdot$ işlemine göre ters eleman özelliğine sahip değildir.

Ancak, $\mathbb{R} - \{0\}$ kümesi $\cdot$ işlemine göre ters eleman özelliğine sahiptir.

Örnek .. 35

Reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$x \star y = x + y - 6$$

işlemine göre, 3 ün tersini bulalım.

Çözüm

Bir elemanın tersinin bulunabilmesi için ilk olarak verilen işlemin birim elemanı bulunmalıdır.

$\star$ işleminin değişme özelliği olduğu için $x \star e = x$ eşitliğinden e yi bulmamız yeterlidir.

$x \star e = x$ den

$$\begin{aligned} x + e - 6 &= x \\ e - 6 &= 0 \\ e &= 6 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3 ün $\star$ işlemine göre tersi a olsun.

Bu durumda, 3 ile 3 ün tersi olan a işleme girdiğinde sonuç birim eleman yani 6 olmalıdır.

$$\begin{aligned} 3 \star a &= 6 \\ 3 + a - 6 &= 6 \\ a - 3 &= 6 \\ a &= 9 \text{ dur.} \end{aligned}$$

Buna göre, 3 ün $\star$ işlemine göre tersi 9 dur.

Bu ifadeyi, $3^{-1} = 9$ şeklinde gösterebiliriz.

Örnek .. 36

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde $\circledast$ işlemi,

$$a \circledast b = a + b - 2$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu işleme göre, 4 ün tersi kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 2 D) 5 E) 6

Çözüm

$\circledast$ işleminin değişme özelliği olduğu için, $a \circledast e = a$ eşitliğini sağlayan e sayısını bulmalıyız.

$\circledast$ işleminin etkisiz elemanı e olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} a \circledast e &= a \\ a + e - 2 &= a \\ e - 2 &= 0 \\ e &= 2 \text{ olur. } \ldots (1) \end{aligned}$$

4 ün tersi x olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 4 \circledast x &= e \\ 4 \circledast x &= 2 \\ 4 + x - 2 &= 2 \\ x &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Cevap B

Özellik

- Bir işlemin etkisiz elemanı yoksa ters elemanı da yoktur.
- Bir elemanın tersinin tersi kendisidir.
- Bir elemanın tersi varsa bir tanedir.
- Birim elemanın tersi kendisidir. Fakat tersi kendisine eşit olan her eleman birim eleman değildir.

Örnek .. 37

$\mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}\right)$ kümesindeki her a ve b için tanımlanan

$$a \star b = 3a + 3b + 2ab + 3$$

işlemine göre B nin tersi C dir.

Buna göre, $B \star C$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Değişme özelliği olan $\star$ işleminin etkisiz elemanı e ise, $x \star e = x$ olur.

$a \star b = 3a + 3b + 2ab + 3$ ve $x \star e = x$ ise,

$$\begin{aligned} 3x + 3e + 2xe + 3 &= x \\ 2x + 2xe + 3e + 3 &= 0 \\ 2x(1 + e) + 3(e + 1) &= 0 \\ (2x + 3)(e + 1) &= 0 \end{aligned}$$

ise $e = -1$ dir.

$\star$ işlemine göre B nin tersinin C olduğu verilmiş. Bu durumda, $B \star C$ nin sonucu $\star$ işleminin etkisiz elemanı olan –1 e eşittir.

Buna göre,

$$B \star C = -1 \text{ olur.}$$

Örnek .. 38

$\mathbb{R} - \left(-\frac{1}{4}\right)$ de $\diamond$ işlemi,

$$a \diamond b = a + b + 4 \cdot a \cdot b$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, 3 ün tersini bulalım.

Çözüm

İlk olarak $\diamond$ işleminin birim elemanı (varsa) bulalım.

Etkisiz eleman e olsun. $\diamond$ işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını $x \diamond e = x$ eşitliğinden bulabiliriz.

$x \diamond e = x$ ise $x + e + 4 \cdot x \cdot e = x$

$$\begin{aligned} e + 4 \cdot x \cdot e &= 0 \\ e(1 + 4x) &= 0 \end{aligned}$$

ise $e = 0$ olur. $\left(x \neq -\frac{1}{4}\right)$

$\diamond$ işlemine göre 3 ün tersi a olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} 3 \diamond a &= e \\ 3 + a + 4 \cdot 3 \cdot a &= 0 \\ 3 + a + 12a &= 0 \\ 13a &= -3 \\ a &= -\frac{3}{13} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek .. 39

$\mathbb{R} - \{-2\}$ de $\maltese$ işlemi,

$$a \maltese b = 2a + 2b + ab + 2$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, tersi kendisine eşit olan elemanların toplamını bulalım.

Çözüm

İlk olarak $\maltese$ işleminin birim elemanı (varsa) bulalım.

Etkisiz eleman e olsun. $\maltese$ işlemi değişmeli olduğu için, e elemanını $x \maltese e = x$ eşitliğinden bulabiliriz.

$x \maltese e = x$ ise $2x + 2e + xe + 2 = x$

$$\begin{aligned} x + 2 + 2e + xe &= 0 \\ (x + 2) + e(2 + x) &= 0 \\ (1 + e)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

ise $e + 1 = 0$

$$e = -1 \text{ olur. } (x \neq -2) \ \ldots (\bigstar)$$

Tersi kendisine eşit olan eleman m olsun.

Buna göre, $m = m^{-1}$ olur.

$$a ✣ b = 2a + 2b + ab + 2$$

$$m ✣ m^{-1} = 2m + 2m^{-1} + mm^{-1} + 2$$

$$e = 2m + 2m + mm + 2$$

$$-1 = 4m + m^2 + 2$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

$$(m + 1)(m + 3) = 0$$

ise $m = -1$ veya $m = -3$ olup bu değerlerin toplamı

$$-1 + (-3) = -4$$

olur.

Buna göre, verilen işleme göre, tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı –4 tür.

Örnek .. 40

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı

$$x ❀ y = -\frac{3xy}{4}$$

işlemine göre, 6 nın tersi kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm

❀ işleminin değişme özelliği olduğuna göre,

$x ❀ e = x$ ise

$$-\frac{3xe}{4} = x$$

$$e = -\frac{4}{3} \text{ tür.}$$

$x ❀ x^{-1} = e$ ise

$$6 ❀ 6^{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{3 \cdot 6 \cdot 6^{-1}}{4} = -\frac{4}{3}$$

$$6^{-1} = \frac{8}{27} \text{ olur.}$$

Cevap C

Örnek .. 41

$\mathbb{R}^2$ de tanımlı,

$$(a, b) \Delta (x, y) = (a + x, b \cdot y)$$

işlemine göre (0, 1) elemanının tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–1, 1) B) (1, –1) C) (1, 0) D) (1, 1) E) (0, 1)

Çözüm

Δ işleminin birim elemanı (e_1, e_2) olsun. Buna göre,

$(a, b) \Delta (e_1, e_2) = (a, b)$

$(a + e_1, b \cdot e_2) = (a, b)$ ise,

$(a + e_1 = a$ ve $b \cdot e_2 = b)$ dir.

$a + e_1 = a$ ise $e_1 = 0$ dır.

$b \cdot e_2 = b$ ise $e_2 = 1$ dir.

Buna göre, birim eleman $(e_1, e_2) = (0, 1)$ olur.

Birim (etkisiz) elemanın tersi kendisine eşittir. (0, 1) etkisiz eleman olduğuna göre, (0, 1) elemanının tersi de (0, 1) dir.

Cevap E

Örnek .. 42

❀	S	A	D	E
S	D	E	S	A
A	E	S	A	D
D	S	A	D	E
E	A	D	E	S

M = {S, A, D, E} kümesinde tanımlanan

❀ işlemine göre, elemanların tersini bulalım.

Çözüm

❀	S	A	D	E
S	D	E	S	A
A	E	S	A	D
D	S	A	D	E
E	A	D	E	S

❀ işleminin birim elemanı D dir.

$S ❀ S^{-1} = D$ ise $S^{-1} = S$ dir. Buna göre, S nin tersi S dir.

$A ❀ A^{-1} = D$ ise $A^{-1} = E$ dir. Buna göre, A nın tersi E dir.

$D ❀ D^{-1} = D$ ise $D^{-1} = D$ dir. Buna göre, D nin tersi D dir.

$E ❀ E^{-1} = D$ ise $E^{-1} = A$ dır. Buna göre, E nin tersi A dır.

Uygulama

Δ	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

A = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde Δ işlemi yukarıdaki tablo ile tanımlanmıştır.

Δ işleminin etkisiz elemanı b dir.

$a \Delta c = c \Delta a = b$

olduğu için, a nın Δ işlemine göre tersi c dir.

(a nın tersi c ise, c nin tersi de a dır.)

$b \Delta b = b$ olduğu için b nin tersi b,

$c \Delta a = a \Delta c = b$ olduğu için c nin tersi a,

$d \Delta e = e \Delta d = b$ olduğu için d nin tersi e,

$e \Delta d = d \Delta e = b$ olduğu için e nin tersi d dir.

Örnek .. 43

☆	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

Yandaki tablo, A = {a, b, c, d, e} kümesinde tanımlanan ☆ işlemine göre düzenlenmiştir.

Her $x \in A$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x^n = \underbrace{x ☆ x ☆ x \ldots ☆ x}_{n \text{ tane } x}$$

olduğuna göre, d^{-206} ifadesinin eşitini bulalım.

(x^{-1} : x in ☆ işlemine göre tersi)

Çözüm

☆	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

Tabloda görüldüğü gibi, etkisiz eleman b dir. b etkisiz eleman olduğu için,

$d ☆ d^{-1} = b$ ise $d^{-1} = e$ olur.

$e^1 = e,$

$e^2 = e ☆ e = c,$

$e^3 = e^1 ☆ e^2 = e ☆ c = a,$

$e^4 = e^1 ☆ e^3 = e ☆ a = d,$

$e^5 = e^1 ☆ e^4 = e ☆ d = b$ dir.

$$\begin{aligned} d^{-206} &= (d^{-1})^{206} \\ &= e^{206} \\ &= (e^5)^{41} ☆ e^1 \\ &= b^{205} ☆ e \quad \ldots (☆) \\ &= b ☆ e \\ &= e \end{aligned}$$

olur.

Etkisiz (birim) eleman b olduğundan b nin tüm kuvvetleri de b ye eşittir. Bu nedenle (☆) ın bulunduğu satırda b^{205} in yerine b yazıldı.

6. Yutan Eleman

A boş kümeden farklı bir küme ve ☆, A da tanımlı bir işlem olsun.

Her $x \in A$ için $x ☆ y = y ☆ x = y$ ise $y \in A$ ya ☆ işleminin yutan elemanı denir.

Uygulama

Reel sayılar kümesinde tanımlanan çarpma işlemine göre yutan eleman 0 dır.

Çünkü, her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ dır.

Uyarı

- Bazı işlemlerin yutan elemanı yoktur. Ancak, bir işlemin yutan elemanı varsa bir tanedir.
- Yutan eleman sabit bir sayıdır.
- Yutan elemanın tersi yoktur. Fakat tersi olmayan her eleman yutan eleman değildir.

Örnek .. 44

$\mathbb{R}$ de, $\blacklozenge$ işlemi

$$a \blacklozenge b = a + b - 2 \cdot a \cdot b$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, $\blacklozenge$ işleminin yutan elemanını bulalım.

Çözüm

$\blacklozenge$ işleminin yutan elemanı y olsun.

$\blacklozenge$ işlemi değişmelidir. Bu nedenle ($a \blacklozenge y = y$) ye bakmak yeterlidir.

$$a \blacklozenge y = y$$
$$a + y - 2 \cdot a \cdot y = y$$
$$a - 2 \cdot a \cdot y = 0$$
$$a(1 - 2y) = 0$$
$$1 - 2y = 0$$
$$y = \frac{1}{2}$$

olur.

Uygulama

☆	x	y	z
x	z	y	x
y	y	y	y
z	x	y	z

A = {x, y, z} kümesi üzerinde ☆ işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

☆ işleminin yutan elemanı y dir.

Uygulama

☆	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

A = {x, y, z} kümesi üzerinde ☆ işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

☆ işleminin yutan elemanı yoktur.

Örnek .. 45

Aşağıdaki tablo, P = {2, 4, 6, 8} kümesinde tanımlanan ☆ işlemine göre düzenlenmiştir.

☆	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	4	6	8
6	6	6	6	8
8	8	8	8	8

Buna göre, P kümesinde tanımlı ☆ işlemini inceleyelim.

Çözüm

➢ ☆ işlemine göre P kümesi kapalıdır. Çünkü, tablonun sonuç kısmındaki (taralı kısımdaki) elemanların hepsi P kümesine aittir.

➢ ☆ işlemi değişmelidir. Örneğin, 2 ☆ 4 = 4 ☆ 2, 6 ☆ 8 = 8 ☆ 6, ... dır. Tablonun sonuç kısmındaki elemanların hepsi işlemi gören köşegene göre simetriktir.

➢ ☆ işleminin etkisiz (birim) elemanı 2 dir.

➢ ☆ işlemine göre,

2 nin tersi 2 dir.

4 ün tersi yoktur.

6 nın tersi yoktur.

8 in tersi yoktur.

➢ ☆ işlemine göre, yutan eleman 8 dir. Çünkü 8 hangi elemanla işleme girerse girsin işlemin sonucu yine 8 olmaktadır.

4 ile 6 nın tersi olmamasına rağmen yutan eleman değildir. Çünkü 4 ile 6, 8 ile işleme girdiklerinde işlemin sonucu 8 olmaktadır.(yutan eleman hangi elemanla işleme girerse girsin işlemin sonucunun kendisi olması gerekir.)

7. Dağılma Özelliği

Boş olmayan bir E kümesinde, $*$ ve $\dotplus$ işlemleri tanımlansın.

Her a, b, c ∈ E için,

$$a * (b \dotplus c) = (a * b) \dotplus (a * c)$$

oluyorsa $*$ işleminin $\dotplus$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.

$$(b \dotplus c) * a = (b * a) \dotplus (c * a)$$

oluyorsa, $*$ işleminin $\dotplus$ işlemi üzerine, sağdan dağılma özelliği vardır.

$*$ işleminin $\dotplus$ işlemi üzerine hem soldan, hem sağdan dağılma özelliği varsa $*$ işleminin $\dotplus$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Uygulama

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Uygulama

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

1. Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde her a, b için,

$$a ☆ b = 1 + a^b$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, 7 ☆ (1 ☆ 8) işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 7 D) 8 E) 50

2. Reel sayılar kümesi üzerinde her a ve b için

$$a ☆ b = 2a + 3b$$

işlemi tanımlanmıştır.

$$k ☆ 4 = 3 ☆ 8$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 9 E) 12

3. Reel sayılar kümesinde sıfırdan farklı her a, b için

$$\frac{3}{a} ☆ \frac{2}{b} = a - b$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, 4 ☆ 3 kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{15}$

4. $\mathbb{R}$ de

$$x ☆ y = x + y + 1$$
$$a \Delta b = a - b - 1$$

işlemleri veriliyor.

$$2 ☆ (4 \Delta m) = 0$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5. Gerçel sayılar üzerinde Δ işlemi,

$$(a - 3) \Delta (b + 1) = 3a - 2b - ab$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, 5 Δ 4 işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) –6 B) –5 C) 0 D) 1 E) 3

6. Gerçel sayılar üzerinde $\circledast$ işlemi,

$$(a - 1) \circledast (b + 1) = 2 \cdot a \cdot b + 2$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, a $\circledast$ b işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2ab – 2a + 2b B) 2ab – 2a + b
C) 2ab – a + 3b D) 2ab + 2a + 4b
E) 2ab + 2a + b

7. $\mathbb{Z}$ de ✱ işlemi,

$$a ✱ b = \begin{cases} a + b, & \text{b çift sayı ise} \\ a - b, & \text{b tek sayı ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre,

$$(m ✱ 3) + (m ✱ 6) + (m ✱ 9) = 18$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

8. $\mathbb{R}$ de tanımlı ✱ işleminin değişme özelliği vardır.

$$x ✱ y = x \cdot y + x + y - 2(y ✱ x)$$

olduğuna göre, 2 ✱ 4 kaçtır?

A) $\frac{16}{3}$ B) 5 C) $\frac{14}{3}$ D) 4 E) $\frac{10}{3}$

9. $x \star y = x + y - mxy + 6$

işleminin birim (etkisiz) **elemanı 3 olduğuna göre, m kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

10. Gerçel (reel) sayılar kümesi üzerindeki her a, b için,

$a \bigstar b = a + b - m \cdot a \cdot b$

işlemi tanımlanmıştır.

$\bigstar$ işlemine göre, etkisiz eleman kaçtır?

A) –m B) –1 C) 0 D) 1 E) m

11. $\mathbb{R}$ de, Δ işlemi

$a \Delta b = a + b + 4 \cdot a \cdot b$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, Δ işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

12. $\mathbb{R}^2$ de tanımlı

$(a, b) \Delta (x, y) = (a \cdot x, b + y)$

işleminin birim (etkisiz) **elemanı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (2, 1) B) (1, 1) C) (1, 0) D) (1, 2) E) (0, 1)

13. Reel sayılar kümesi üzerinde,

$a \star b = 2ab + a + b$

işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $5^{-1} \star 5$ kaçtır?

(5^{-1}, $\star$ işlemine göre 5 in tersidir.)

A) – 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

14. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinde $\bigstar$ işlemi,

$p \bigstar q$ = (p ve q nun büyük olmayanı)

olarak tanımlanmıştır.

Buna göre, $\bigstar$ işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. Gerçel (reel) sayılar kümesi üzerindeki her a, b için,

$a \bigstar b = a + b - 8 \cdot a \cdot b$

işlemi tanımlanmıştır.

$\bigstar$ işlemine göre, 5 in tersi kaçtır?

A) $\frac{5}{39}$ B) $\frac{5}{34}$ C) $\frac{5}{29}$ D) $\frac{5}{24}$ E) $\frac{5}{19}$

16. Reel sayılar kümesinde tanımlı,

$x \Delta y = x + y - 2xy$

işlemine göre hangi reel sayının tersi yoktur?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

1.

$a \star b = 1 + a^b$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} 7 \star (1 \star 8) &= 7 \star (1 + 1^8) \\ &= 7 \star 2 \\ &= 1 + 7^2 \\ &= 1 + 49 \\ &= 50 \end{aligned}$$

olur.

Cevap E

2.

$\star$ işlemine göre,

$$a \star b = 2a + 3b$$
$$k \star 4 = 3 \star 8$$
$$2 \cdot k + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8$$
$$2k + 12 = 6 + 24$$
$$2k = 18$$
$$k = 9$$

olur.

Cevap D

3.

$\frac{3}{a} = 4$ ve $\frac{2}{b} = 3$ olmalıdır.

$a = \frac{3}{4}$ ve $b = \frac{2}{3}$ bulunur.

Buna göre, $\frac{3}{a} \star \frac{2}{b} = a - b$ işleminde

$a = \frac{3}{4}$ ve $b = \frac{2}{3}$ yazalım.

$$\frac{3}{\frac{3}{4}} \star \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$

$$4 \star 3 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{12}$$

bulunur.

Cevap D

4.

$x \star y = x + y + 1$ ve $a \Delta b = a - b - 1$

olduğuna göre,

$$2 \star (4 \Delta m) = 0$$
$$2 \star (4 - m - 1) = 0$$
$$2 \star (3 - m) = 0$$
$$2 + 3 - m + 1 = 0$$
$$6 - m = 0$$
$$m = 6$$

olur.

Cevap A

5.

Gerçel sayılar üzerinde Δ işlemi,

$(a - 3) \Delta (b + 1) = 3a - 2b - ab$ ... ($\star$)

biçiminde tanımlanıyor.

$a - 3 = 5$ ise $a = 8$ dir.

$b + 1 = 4$ ise $b = 3$ tür.

($\star$) denkleminde a yerine 8, b yerine 3 yazılırsa,

$$(a - 3) \Delta (b + 1) = 3a - 2b - ab$$
$$(8 - 3) \Delta (3 + 1) = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 - 8 \cdot 3$$
$$5 \Delta 4 = 24 - 6 - 24$$

$5 \Delta 4 = -6$ olur.

Cevap A

6.

1. Yol

$a - 1 = \mathbf{a}$ ise $a = \mathbf{a} + 1$ olur.

$b + 1 = \mathbf{b}$ ise $b = \mathbf{b} - 1$ olur.

Buna göre,

$(a - 1) ⊛ (b + 1) = 2 \cdot a \cdot b + 2$

eşitliğinin her iki tarafında a yerine a + 1, b yerine b – 1 yazılırsa istenilen ifade bulunur.

Verilen eşitliğin sol tarafında a yerine a + 1, b yerine b – 1 yazalım:

$$(a - 1) ⊛ (b + 1) = (\mathbf{a} + \mathbf{1} - 1) ⊛ (\mathbf{b} - \mathbf{1} + 1)$$
$$= a ⊛ b \text{ dir. } \quad ... (1)$$

$(a - 1) ⊛ (b + 1) = 2 \cdot a \cdot b + 2$

eşitliğinin sağ tarafında a yerine a + 1, b yerine b – 1 yazalım:

$2 \cdot a \cdot b - 1 = 2 \cdot (a + 1) \cdot (b - 1) + 2$

$= 2 \cdot (a \cdot b - a + b - 1) + 2$

$= 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 + 2$

$= 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a + 2 \cdot b$ dir. ... (2)

Verilen eşitliğin sol tarafında ve sağ tarafında; a yerine a + 1, b yerine b – 1 yazdığımız için (1) deki ve (2) deki ifadeler birbirine eşittir.

Buna göre,

$a \circledast b = 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a + 2 \cdot b$ olur.

2. Yol

$(a - 1) \circledast (b + 1) = 2 \cdot a \cdot b + 2$

ifadesinde a ile b yerine herhangi iki sayı yazalım. Örneğin, a = 1, b = 2 olsun.

$(a - 1) \circledast (b + 1) = 2 \cdot a \cdot b + 2$

$(1 - 1) \circledast (2 + 1) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2$

$0 \circledast 3 = 6$

dır.

$0 \circledast 3 = 6$ olduğuna göre, seçeneklerde a yerine 0, b yerine 3 yazıldığında sonucu 6 olmayan doğru cevap olamaz.

A) 2ab – 2a + 2b B) 2ab – 2a + b

C) 2ab – a + 3b D) 2ab + 2a + 4b

E) 2ab + 2a + b

Seçeneklerde sadece 2ab – 2a + 2b ifadesi, a yerine 0, b yerine 3 yazıldığında sonucu 6 olur.

Cevap A

7.

$\mathbb{Z}$ de $\circledast$ işlemi,

$$a \circledast b = \begin{cases} a+b, & \text{b çift sayı ise} \\ a-b, & \text{b tek sayı ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre,

3 tek sayı olduğundan,

$m \circledast 3 = m - 3$ tür. ... (☆)

6 çift sayı olduğundan,

$m \circledast 6 = m + 6$ dır. ... (☆☆)

9 tek sayı olduğundan,

$m \circledast 9 = m - 9$ dur. ... (☆☆☆)

Buna göre,

$(m \circledast 3) + (m \circledast 6) + (m \circledast 9) = 18$

$m - 3 + m + 6 + m - 9 = 18$

$3m - 6 = 18$

$3m = 24$

$m = 8$ dir.

Cevap C

8.

$\circledast$ işleminin değişme özelliği olduğu için,

$y \circledast x = x \circledast y$ olur. ... (1)

$x \circledast y = x \cdot y + x + y - 2(y \circledast x)$

$x \circledast y = x \cdot y + x + y - 2(x \circledast y)$

$3(x \circledast y) = x \cdot y + x + y$

$x \circledast y = \dfrac{x \cdot y + x + y}{3}$ olur. ... (2)

Buna göre,

$x \circledast y = \dfrac{x \cdot y + x + y}{3}$

$2 \circledast 4 = \dfrac{2 \cdot 4 + 2 + 4}{3}$

$= \dfrac{8 + 2 + 4}{3}$

$= \dfrac{14}{3}$ olur.

Cevap C

9.

Birim eleman, kendisi ile işleme girdiğinde işlemin sonucu birim elemana eşittir. e, birim eleman olmak üzere,

e ☆ e = e olur.

x ☆ y = x + y – mxy + 6

olduğuna göre,

3 ☆ 3 = 3 ise $3 + 3 - m \cdot 3 \cdot 3 + 6 = 3$

$12 - 9m = 3$

$9m = 9$

$m = 1$ dir.

Cevap B

10.

$\bigstar$ işlemine göre etkisiz eleman e olsun.

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \bigstar e = a$

olacak biçimde bir e elemanı arayacağız.

$\bigstar$ işleminin değişme özelliği olduğundan sadece

$a \bigstar e = a$

eşitliğini sağlayan e elemanını bulmak yeterlidir.

$a \bigstar e = a$

$a + e - m \cdot a \cdot e = a$

$e - m \cdot a \cdot e = 0$

$e \cdot (1 - m \cdot a) = 0$ ise $e = 0$ dır.

Cevap C

11.

Yutan eleman y olsun.

Δ işlemi değişmelidir. Bunun için sadece $(x \Delta y = y)$ ye bakmak yeterlidir.

$x \Delta y = y$

$x + y + 4xy = y$

$x + 4xy = 0$

$x(1 + 4y) = 0$

$1 + 4y = 0$

$y = -\dfrac{1}{4}$ olur.

Cevap C

12.

$(a, b) \Delta (x, y) = (a \cdot x, b + y)$

işleminin birim elemanı (e_1, e_2) olsun. Buna göre,

$(a, b) \Delta (e_1, e_2) = (a, b)$ olur.

$(a \cdot e_1, b + e_2) = (a, b)$ ise,

$(a \cdot e_1 = a$ ve $b + e_2 = b)$ dir.

$a \cdot e_1 = a$ ise $e_1 = 1$ dir.

$b + e_2 = b$ ise $e_2 = 0$ dır.

Buna göre, birim eleman (1, 0) olur.

Cevap C

13.

Reel sayılar kümesi üzerinde,

a ☆ b = 2ab + a + b

tanımlanan işlemin birim (etkisiz) elemanı e olsun.

☆ işlemine göre 5 in tersi 5^{-1} olmak üzere,

5^{-1} ☆ 5 = e olur. Buna göre,

x ☆ e = x ise $2xe + x + e = x$

$2xe + e = 0$

$e(2x + 1) = 0$

$e = 0$

bulunur.

Cevap B

14.

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinde tanımlanan,

$p \bigstar q$ = (p ve q nun büyük olmayanı)

işleminin tablosunu yapalım:

★	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

Tablodan da görüldüğü üzere, yutan elaman 1 dir.

Cevap A

15.

$a \bigstar b = a + b - 8 \cdot a \cdot b$

işlemine göre etkisiz eleman e olsun.

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \bigstar e = e \bigstar a = a$

olacak biçimde bir e elemanı arayacağız.

$\bigstar$ işleminin değişme özelliği olduğundan sadece

$a \bigstar e = a$

eşitliğini sağlayan e elemanını bulmak yeterlidir.

$a \bigstar e = a$

$a + e - 8 \cdot a \cdot e = a$

$e - 8 \cdot a \cdot e = 0$

$e \cdot (1 - 8 \cdot a) = 0$ ise $e = 0$ dır.

$\bigstar$ işlemine göre etkisiz eleman e = 0 dır.

$\bigstar$ işlemine göre 5 in tersi x olsun. Buna göre,

$5 \bigstar x = e$

$5 \bigstar x = 0$

$5 + x - 8 \cdot 5 \cdot x = 0$

$-39 \cdot x = -5$

$x = \dfrac{5}{39}$ olur.

Cevap A

16.

Yutan elemanın tersi yoktur. Yutan eleman y olsun. Buna göre,

Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \Delta y = y$

$x + y - 2xy = y$

$x - 2xy = 0$

$x(1 - 2y) = 0$

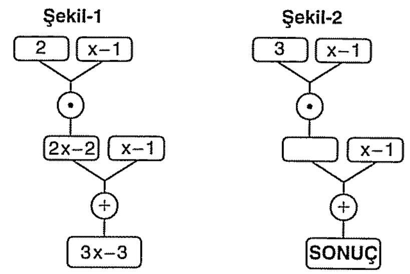
$1 - 2y = 0$

$y = \dfrac{1}{2}$

olur.

Cevap B

1. Aşağıda Şekil-1 deki işlem ağacını Betül sonuçlandırmıştır. Benzer şekilde Şekil-2 deki işlem ağacını da Aylin sonuçlandıracaktır.



Aylin işlemleri doğru yaptığında SONUÇ kısmına gelecek cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $3x + 3$ B) $4x - 4$ C) $4x - 3$ D) $3x + 4$ E) $4x - 2$

2. Uygun koşullarda tanımlı ✤ ve ☆ işlemleri,

$$a ✤ b = \frac{a}{2} ☆ \frac{b}{3}$$

$$x ☆ x = 2 \cdot x + 1$$

olduğuna göre, 4 ✤ 6 kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

3. Aşağıda ☆ işleminin tablosu verilmiştir.

☆	t	ü	r	e	v
t	e	v	ü	ü	t
ü	v	e	t	ü	v
r	ü	v	r	v	t
e	ü	r	v	t	e
v	t	v	v	r	e

$x \neq y$ olmak üzere, x ☆ t = y ☆ t dir.

Buna göre, x ☆ y işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) t B) ü C) r D) e E) v

4. Reel sayılarda ✤ işlemi,

$$a ✤ b = -a + b - ab - 1$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, (−3) ✤ (−2) işleminin sonucu kaçtır?

A) −8 B) −7 C) −6 D) −5 E) −4

5. Reel sayılarda tanımlanan ☆ işlemi,

$$a ☆ b = a^b - b^a$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, 2 ☆ (−2) işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{15}{4}$ C) $\frac{19}{2}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

6. Reel sayılar kümesinde ✤ işlemi, her x, y için,

$$x ✤ y = 2x - 3y + 2xy$$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, (2 ✤ 4) ✤ 3 işleminin sonucu kaçtır?

A) 56 B) 55 C) 1 D) −18 E) −56

7. Pozitif tam sayılar kümesinde,

$\boxed{n}$ = "n nin asal sayı bölenlerinin sayısı"

işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $\boxed{24}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

$$\beta(x, y) = 3x + 2y$$

$$\beta(2, 0) = \beta(0, a)$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 2 E) 3

9. Reel sayılar kümesi üzerinde

$$a \bigstar b = a + b + 5$$

işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, ★ işleminin etkisiz (birim) **elemanı kaçtır?**

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) 0 D) $-\frac{1}{5}$ E) −5

10. Reel sayılarda $\square$ işlemi,

$$a \square b = a - b - 1$$

olarak tanımlanıyor.

$2 \square x = -4$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11.

Δ	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

Yukarıdaki tabloda, A = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde tanımlanan Δ işlemi verilmiştir.

Buna göre, Δ işleminin birim (etkisiz) **elemanı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) a B) b C) c D) d E) e

12. Reel sayılar kümesinde;

$$x \Delta y = 2x - 3y - 2xy$$

olmak üzere, Δ işlemi tanımlanıyor.

$2 \Delta x = 18$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

13. Reel sayılar kümesinde; ✻ ve Δ işlemleri

$$y * x = 2x + 2y - 3xy$$

$$y \Delta x = x^2 + y^2 + xy$$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, (3 ✻ 2) Δ (2 ✻ 1) işleminin sonucu kaçtır?

A) 64 B) 48 C) 32 D) 16 E) 12

14. Reel sayılar kümesinde;

$$x \Delta y = x^{y-1} + y - 1$$

$$y * x = x + y^{x-1} - 1$$

olarak Δ ile ✻ işlemleri tanımlanmıştır.

Buna göre, (2 Δ 3) ✻ 1 işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

15.

☆	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

Yukarıdaki tabloya göre tanımlanan ☆ işleminde

$$2 ☆ 3 = x ☆ 1^{-1}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

(1^{-1}, 1 in ☆ işlemine göre tersidir.)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. a ile b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{2}{a} \bigstar \frac{3}{b} = a \cdot b + \frac{1}{a \cdot b}$$

işlemi veriliyor.

Buna göre, $\frac{3}{2} \bigstar \frac{2}{3}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{97}{36}$ B) $\frac{37}{6}$ C) $\frac{13}{6}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

2.

$$n^{n} = \begin{cases} \frac{n+4}{2}, & \text{n çift ise,} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{n tek ise,} \end{cases}$$

olduğuna göre, $0^0 + 1^1 + 2^2$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.

★	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

A = {a, b, c, d, e} kümesi üzerinde tanımlanan ★ işleminin tablosu yanda verilmiştir.

Her $x \in A$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$x^n = \underbrace{x \bigstar x \bigstar x \bigstar \ldots \bigstar x}_{\text{n tane x}}$$

olduğuna göre, $(a \bigstar b^{-1})^3$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

(b^{-1}: b nin ★ işlemine göre tersidir.)

A) a B) b C) c D) d E) e

4. Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde,

$$a \star (b + 2) = a^2 + b$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $(3 \star 4) \star 5$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 174 B) 172 C) 158 D) 142 E) 124

5. k bir reel sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}$ de tanımlı,

$$a \star b = a + b - k$$

$$2 \star 2^{-1} = 5$$

olduğuna göre, k kaçtır?

(a^{-1}: a elemanının ☆ işlemine göre tersidir.)

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinde tanımlı, bazı gözleri eksik olarak şekildeki tabloda verilen (A, ☆) sisteminde; kapalılık, değişme, birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman özellikleri vardır.

☆	1	2	3	4	5
1	3	4	5	1	2
2	4	•	•	•	•
3	5	•	Y	•	4
4	1	•	•	•	Z
5	2	X	•	5	•

X, Y ve Z nin bulunduğu gözlerdeki elemanlar sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3, 4, 1 B) 1, 4, 3 C) 5, 2, 1 D) 3, 2, 5 E) 5, 4, 2

7. Aşağıdaki tablo, A = {1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanan ⊗ işlemine göre düzenlenmiştir.

⊗	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) 1 ⊗ 3 = 3 tür.

B) 2 ⊗ 1 = 2 dir.

C) 3 ⊗ 4 = 1 dir.

D) ⊗ işleminin birim elemanı 1 dir.

E) ⊗ işleminin değişme özelliği vardır.

8. Değişme ve birleşme özellikleri olan ☆ işleminin etkisiz elemanı e dir.

$$3 \star (x \star 1) = 7$$

$$3^{-1} = 1$$

olduğuna göre, x kaçtır?

(3^{-1}; 3 ün ☆ işlemine göre tersidir.)

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

9. A = {1, 3, 4, 5, 6} kümesindeki her x, y için,

x ❒ y = (x ve y nin büyük olmayanı)

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, ❒ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. $\mathbb{R}$ de tanımlı ☆ işlemine göre, her elemanın tersi vardır.

$$x \star y = x + y - 2^{-1}$$

olduğuna göre, ☆ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

(2^{-1}, 2 nin ☆ işlemine göre tersidir.)

A) −2 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur.

11. n bir doğal sayı olmak üzere, doğal sayılar kümesinde tanımlı ★ işlemi,

$$a \bigstar b = a + b - 2n$$

olduğuna göre, 5 sayısının tersinin <u>en küçük</u> doğal sayı değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. Reel (gerçel) sayılar kümesinde

$$x ✤ y = 4x + 4y + 3xy + 4$$

işlemi tanımlanmıştır.

✤ işlemine göre hangi elemanın tersi yoktur?

A) −2 B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

13. Δ işlemi,

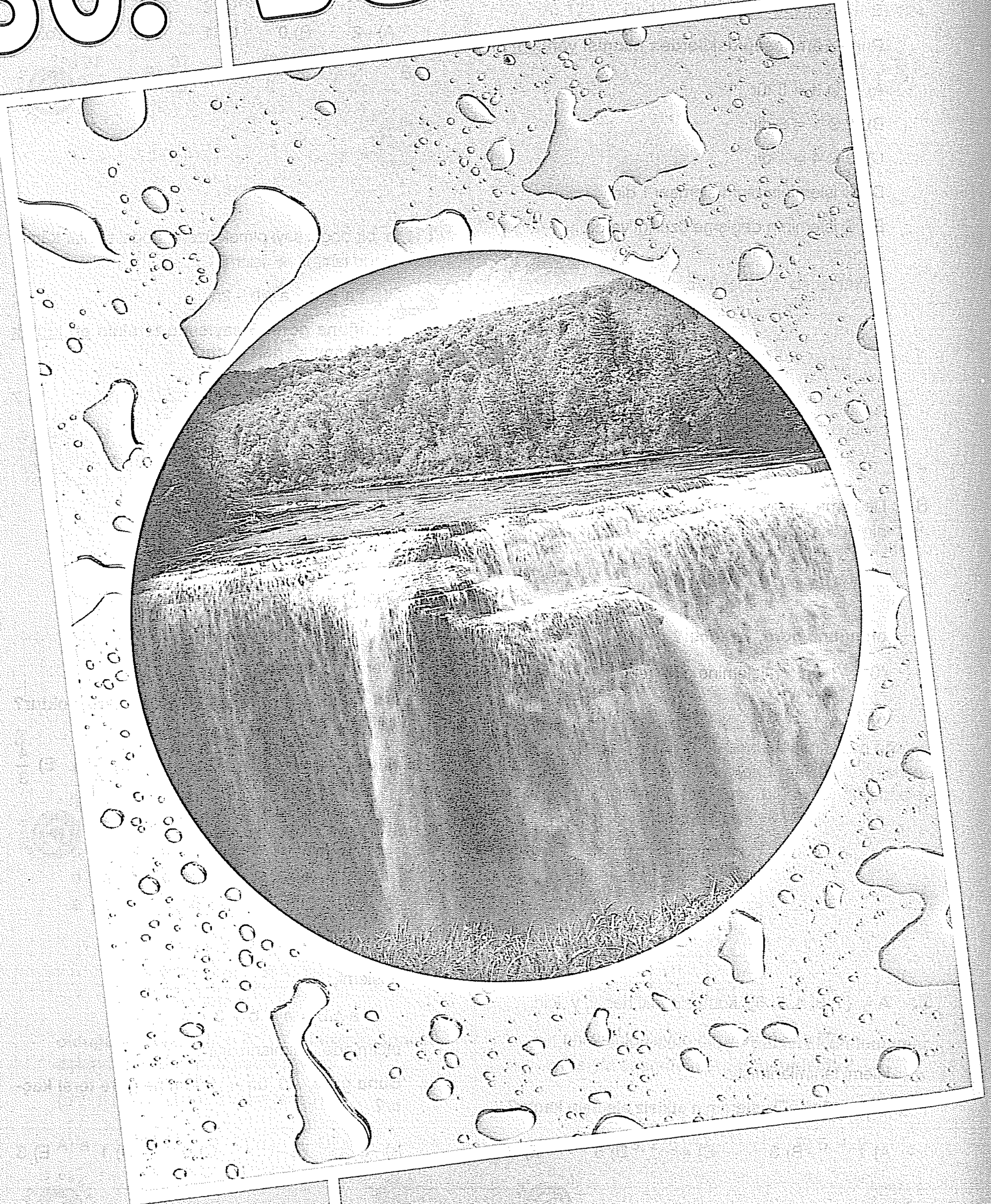
$$a \Delta b = a + b + 3$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Buna göre, −3 ün Δ işlemine göre tersi kaçtır?

A) −3 B) −1 C) 0 D) 1 E) 3

30. BÖLÜM



Modüler Aritmetik

Betül; sabah saat 9 da ilaç içtikten 8 saat sonra aynı ilaçtan içmesi gerekmektedir. Saat kadranı 12 bölmeli olduğu için, Betül öğleden sonra saat 5 te aynı ilaçtan bir daha içer.

Burada yapılan toplama, tam sayılardaki toplamadan farklıdır. Bu ve benzeri işlemler "Modüler Aritmetik" dalının konusudur.

A. DENKLİK KAVRAMI

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesinde tanımlı "apsisi ile ordinatı farkı m ile tam bölünen ikililerden oluşan β bağıntısı

$\beta = \{(x, y) : m \mid (x - y),\ m \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x, y \in \mathbb{Z}\}$

denklik bağıntısıdır. β, denklik bağıntısı olduğundan, her $(x, y) \in \beta$ için

$x \equiv y \pmod{m}$ dir.

Diğer bir ifadeyle, x in m ile bölümünden kalan y ise modül m ye göre x, y ye denktir denir ve $x \equiv y \pmod{m}$ şeklinde gösterilir. (Denklik bağıntısını "Bağıntı" konusunda verdik.)

Uygulama

25 in 7 ile bölümünden kalan 4 olduğu için,

$25 \equiv 4 \pmod{7}$ olur.

Uygulama

523 sayısının 10 ile bölümünden kalan 3 olduğu için,

$523 \equiv 3 \pmod{10}$ olur.

Uygulama

1231 sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğu için,

$1231 \equiv 3 \pmod{4}$ olur.

Uygulama

63 sayısının 7 ile bölümünden kalan 0 olduğu için,

$63 \equiv 0 \pmod{7}$ olur.

Uygulama

Tam sayılar kümesinde

$$\beta = \{(x, y) : 4 \mid (x - y)\}$$

denklik bağıntısıdır. β bağıntısı, birinci bileşeni ile ikinci bileşeninin farkı 4 ile bölünen sayılardan oluşmaktadır. Buna göre, (–21, –17), (–1, 3), (25, 1) ikilileri β nın elemanlarından bazılarıdır.

$(-21, -17) \in \beta$ olduğu için $-21 \equiv -17 \pmod 4$

$(-1, 3) \in \beta$ olduğu için $-1 \equiv 3 \pmod 4$

$(25, 1) \in \beta$ olduğu için $25 \equiv 1 \pmod 4$ olur.

Uygulama

38 in 9 ile bölümünden kalan 2 olduğu için,

$38 \equiv 2 \pmod 9$ olur.

56 nın 9 ile bölümünden kalan 2 olduğu için,

$56 \equiv 2 \pmod 9$ olur.

38 in de, 56 nın da 9 ile bölümünden kalanlar aynı olduğu için,

$38 \equiv 56 \pmod 9$ dur.

Sonuç

$A \equiv B \pmod m$ ve $C \equiv B \pmod m$ ise,

$A \equiv C \pmod m$ ve $C \equiv A \pmod m$ dir.

Uygulama

18 ve 27 sayısının 9 ile bölümünden kalan 0 dır.

Buna göre,

$18 \equiv 27 \pmod 9$ ve $27 \equiv 18 \pmod 9$ dur.

Uyarı

$A \equiv D \pmod m$ ise,

A ve D nin m ile bölümünden kalanlar eşittir.

Uygulama

$$\begin{array}{r|l} 127 & 5 \\ \hline -\ \bullet & 25 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 5 \\ \hline -\ \bullet & 8 \\ \hline 2 & \end{array}$$

127 nin ve 42 nin 5 ile bölümünden kalanlar eşit olduğu için,

$127 \equiv 42 \pmod 5$

yazılır.

Kural

$x \equiv y \pmod m$ ve $z \equiv t \pmod m$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1) $x + z \equiv y + t \pmod m$
2) $x - z \equiv y - t \pmod m$
3) $x \cdot z \equiv y \cdot t \pmod m$
4) $k \cdot x \equiv k \cdot y \pmod m$, $k \in \mathbb{Z}$
5) $x^n \equiv y^n \pmod m$, $n \in \mathbb{N}$

Uygulama

$18 \equiv 4 \pmod 7$, $26 \equiv 5 \pmod 7$ dir.

Buna göre,

$18 + 26 \equiv 4 + 5 \pmod 7$

$44 \equiv 9 \pmod 7$

$2 \equiv 2 \pmod 7$ dir.

Uygulama

$18 \equiv 4 \pmod 7$, $26 \equiv 5 \pmod 7$ dir.

Buna göre,

$18 \cdot 26 \equiv 4 \cdot 5 \pmod 7$

$468 \equiv 20 \pmod 7$

$6 \equiv 6 \pmod 7$ dir.

Uygulama

$18 \equiv 4 \pmod 7$ dir.

Buna göre,

$18^2 \equiv 4^2 \pmod 7$

$324 \equiv 16 \pmod 7$

$2 \equiv 2 \pmod 7$ dir.

Kural

k, tam sayı olmak üzere, $x \equiv y \pmod m$ ise,

$x = y + mk$ dir.

Örnek .. 1

$3x \equiv x \pmod 7$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> üç farklı doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm

$3x \equiv x \pmod 7$ ise, $3x = x + 7k$, (k tam sayı)

ise, $2x = 7k$ dir.

$k = 0$ ise, $x = 0$ dır.

$k = 2$ ise, $x = 7$ dir.

$k = 4$ ise, $x = 14$ tür.

Bu durumda verilen koşulları sağlayan en küçük üç farklı doğal sayı değeri 0, 7, 14 tür.

Örnek .. 2

$2 - x \equiv 4 \pmod 7$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> pozitif iki farklı tam sayının toplamı kaçtır?

Çözüm

$2 - x \equiv 4 \pmod 7$

$-x \equiv 4 - 2 \pmod 7$

$-x \equiv 2 \pmod 7$

$x \equiv -2 \pmod 7$

olduğuna göre, k tam sayı belirtmek üzere,

$x = -2 + 7 \cdot k$ dir. ... (☆)

$k = 1$ için $x = 5$ olur.

$k = 2$ için $x = 12$ olur.

Buna göre, x in alabileceği en küçük iki pozitif tam sayı değerinin toplamı, $5 + 12 = 17$ olur.

Örnek .. 3

$9293 - 6^8$

sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

9293 sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 tür. Bu durumda,

$9293 \equiv 3 \pmod 5$ olur.

6 nın 5 ile bölümünden kalan 1 dir. Bu durumda,

$6 \equiv 1 \pmod 5$

$6^8 \equiv 1^8 \pmod 5$

$6^8 \equiv 1 \pmod 5$ olur.

$9293 - 6^8 \equiv 3 - 1 \pmod 5$

$9293 - 6^8 \equiv 2 \pmod 5$

olduğuna göre, $9293 - 6^8$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 dir.

Örnek .. 4

$6^{18} - 10^8$

sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

$6^2 = 36$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 0 dır. Bu durumda,

$6^2 \equiv 0 \pmod 9$ ise, $(6^2)^9 \equiv 0^9 \pmod 9$

ise, $6^{18} \equiv 0 \pmod 9$ olur. ... (☆)

10 un 9 ile bölümünden kalan 1 dir. Bu durumda,

$10 \equiv 1 \pmod 9$

$10^8 \equiv 1^8 \pmod 9$

$10^8 \equiv 1 \pmod 9$ ... (☆☆)

olur.

$6^{18} - 10^8 \equiv 0 - 1 \pmod 9$

$6^{18} - 10^8 \equiv -1 \pmod 9$

dur.

$0 \equiv 9 \pmod 9$ olduğu için,

$$6^{18} - 10^8 \equiv -1 \pmod 9$$

$$6^{18} - 10^8 + 0 \equiv -1 + 9 \pmod 9$$

$$6^{18} - 10^8 \equiv 8 \pmod 9 \text{ olur.}$$

Buna göre, $6^{18} - 10^8$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 8 dir.

Örnek .. 5

2^{23} sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm

2^{23} sayısının 7 ile bölümünden kalan x olsun. Buna göre,

$2^{23} \equiv x \pmod 7$ dir.

$2^1 \equiv 2 \pmod 7$

$2^2 \equiv 4 \pmod 7$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$ dir.

Buna göre,

$2^{23} \equiv (2^3)^7 \cdot 2^2 \pmod 7$

$2^{23} \equiv 1^7 \cdot 4 \pmod 7$

$2^{23} \equiv 4 \pmod 7$ olur.

$2^{23} \equiv x \pmod 7$ olduğuna göre, $x = 4$ tür.

Cevap D

Örnek .. 6

2^{57} sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

2^{57} sayısının 5 ile bölümünden kalan x ise

$2^{57} \equiv x \pmod 5$ tir.

$2^1 \equiv 2 \pmod 5$

$2^2 \equiv 4 \pmod 5$

$2^3 \equiv 3 \pmod 5$

$2^4 \equiv 1 \pmod 5$ ... (☆)

$2^{57} \equiv 2^{4 \cdot 14 + 1} \pmod 5$

$2^{57} \equiv (2^4)^{14} \cdot 2^1 \pmod 5$

$\equiv 1^{14} \cdot 2^1 \pmod 5$

$\equiv 1 \cdot 2 \pmod 5$

$\equiv 2 \pmod 5$ olduğuna göre,

$x = 2$ dir.

Kısaca,

2 nin 4. kuvveti 1 olduğuna göre, 4 ün katı olan kuvvetleri de 1 dir. Bunun için üssün 4 ile bölümünden kalan bulunur. Buradan sonuca gidilir.

$$\begin{array}{r|l} 57 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 14 \\ \hline 17 & \\ -16 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Kalan 1 olduğuna göre; sonuç, 2^1 in 4 ile bölümünden kalandır.

2^1 nin 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre, 2^{57} nin 5 ile bölümünden kalan 2 dir.

Örnek .. 7

3^{34} sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm

Bir sayının 10 a bölümünden kalan rakam, o sayının birler basamağındaki rakamdır.

Buna göre,

$3^{34} \equiv x \pmod{10}$ ise x i bulmalıyız.

$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ ... (★)

Buna göre,

3 ün 4. kuvveti 1 olduğuna göre, 4 ün katı olan kuvvetleri de 1 dir. 3^{34} sayısındaki üssün (34 ün) 4 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre; sonuç, 3^2 nin 10 ile bölümünden kalandır.

3^2 nin 10 ile bölümünden kalan 9 olduğuna göre, 3^{34} ün 10 ile bölümünden kalan 9 dur.

Buna göre, 3^{34} sayısının birler basamağındaki rakam 9 dur.

Kural

x, m nin tam katı <u>olmayan</u> pozitif tam sayı (x ile m aralarında asal sayılar) ve m asal sayı ise

$$x^{m-1} \equiv 1 \pmod m \text{ dir.}$$

Uygulama

Son verdiğimiz kuraldan da anlaşılacağı üzere,

$2^4 \equiv 1 \pmod 5$ tir.

Uygulama

Son verdiğimiz kuraldan da anlaşılacağı üzere,

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ tir.

Uygulama

Son verdiğimiz kuraldan hareketle, 5^6 nın 7 ile bölümünden kalanın 1 olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre,

$5^6 \equiv 1 \pmod 7$ dir.

Uygulama

Son verdiğimiz kuraldan da anlaşılacağı üzere,

$5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ dir.

Örnek .. 8

$4^x \equiv 1 \pmod 5$

olduğuna göre, x pozitif tam sayısının alabileceği <u>en küçük</u> değeri bulalım.

Çözüm

$4^1 \equiv 4 \pmod 5$

$4^2 \equiv 1 \pmod 5$

olduğuna göre, $4^x \equiv 1 \pmod 5$ ifadesini doğrulayan en küçük pozitif tam sayı 2 dir.

Uyarı

x, m nin tam katı <u>olmayan</u> pozitif bir tam sayı ve m asal sayı ise, $x^{m-1} \equiv 1 \pmod m$ dir. Ancak x in m – 1 den daha küçük kuvvetleri için de denklik 1 e eşit olabilir. Örneğin, $4^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $4^2 \equiv 1 \pmod 5$ olur.

Örnek .. 9

$3^{208} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm

Son verdiğimiz kural gereği

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ tir. Buna göre,

3^{208} in üssü olan 208 in 4 ile bölümünden kalan 0 olduğu için,

$3^{208} \equiv 3^0 \pmod 5$

$\equiv 1 \pmod 5$ tir.

Buradan $x = 1$ olur.

Örnek .. 10

3^{134} sayısının 7 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm

3^{134} sayısının 7 ile bölümünden elde edilen kalan x ise, $3^{134} \equiv x \pmod 7$ dir.

Son verdiğimiz kural gereği

$3^6 \equiv 1 \pmod 7$ dir. Buna göre,

3^{134} ün üssü olan 134 ün 6 ile bölümünden kalan 2 olduğu için,

$3^{134} \equiv 3^2 \pmod 7$

$\equiv 2 \pmod 7$ olur.

Buradan $x = 2$ dir.

Örnek .. 11

$6^{75} \equiv a \pmod 8$

olduğuna göre, a nın alabileceği <u>en küçük</u> doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm

$6^1 \equiv 6 \pmod 8$

$6^2 \equiv 4 \pmod 8$

$6^3 \equiv 0 \pmod 8$

$(6^3)^{25} \equiv 0^{25} \pmod 8$

$6^{75} \equiv 0 \pmod 8$ olur.

$6^{75} \equiv a \pmod 8$ olmak üzere, $a = 0$ dır.

Örnek .. 12

$202^{205} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm

$202^1 \equiv 2 \pmod{10}$

$202^2 \equiv 202^1 \cdot 202^1 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{10}$

$202^3 \equiv 202^2 \cdot 202^1 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 8 \pmod{10}$

$202^4 \equiv 202^3 \cdot 202^1 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{10}$

$202^5 \equiv 202^4 \cdot 202^1 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{10}$

...

202^5 in 10 ile bölümünden kalan 202^1 in 10 ile bölümünden kalana eşittir.

Buna göre,

205 in 4 ile bölümünden kalan 1 olduğu için,

$202^{205} \equiv 202^1 \pmod{10}$

$202^{205} \equiv 2 \pmod{10}$ olur.

$202^{205} \equiv x \pmod{10}$ ise, $x = 2$ dir.

Örnek .. 13

$4^{27} \equiv x \pmod 3$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşit <u>olabilir</u>?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm

$4^1 \equiv 1 \pmod 3$

$4^{27} \equiv 1^{27} \pmod 3$

$4^{27} \equiv 1 \pmod 3$ olur.

$4^{27} \equiv x \pmod 3$ olduğuna göre, $x = 1$ bulunur.

Cevap B

Örnek .. 14

$(97)^{13} + (98)^5$

toplamının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$97 \equiv 1 \pmod 6$

$97^{13} \equiv 1^{13} \pmod 6$

$97^{13} \equiv 1 \pmod 6$ ... (★)

$98^1 \equiv 2 \pmod 6$

$98^2 \equiv 4 \pmod 6$

$98^3 \equiv 2 \pmod 6$

$98^4 \equiv 4 \pmod 6$

$98^5 \equiv 2 \pmod 6$ ... (★★)

olduğuna göre,

$97^{13} + 98^5 \equiv 1 + 2 \pmod 6$

$\equiv 3 \pmod 6$ dır.

Buna göre, $(97)^{13} + (98)^5$ toplamının 6 ile bölümünden kalan 3 tür.

Cevap C

Örnek .. 15

$5^{75} \equiv x \pmod 6$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$6 \equiv 0 \pmod 6$

$5 + 1 \equiv 0 \pmod 6$

$5 \equiv -1 \pmod 6$

$5^{75} \equiv (-1)^{75} \pmod 6$

$5^{75} \equiv -1 \pmod 6$

$5^{75} \equiv 5 \pmod 6$

$5^{75} \equiv x \pmod 6$ olduğuna göre, $x = 5$ tir.

Cevap E

Örnek .. 16

$m > 1$ olmak üzere,

$39 \equiv 3 \pmod m$

olduğuna göre, m pozitif tam sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm

$39 \equiv 3 \pmod m$

$39 - 3 \equiv 3 - 3 \pmod m$

$36 \equiv 0 \pmod m$

olduğuna göre; m, 36 nın tam bölenleri olmalıdır. 36 nın pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 dır. $m > 1$ olduğundan $m = 1$ olamaz. Bu durumda m nin alabileceği değerler 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 olup sekiz tanedir.

Cevap D

Örnek .. 17

$4x + 10 \equiv 6 \pmod 7$

denkliğini sağlayan <u>en küçük</u> pozitif x tam sayısı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

1. Yol

$4x + 10 \equiv 6 \pmod 7$, $(10 \equiv 3 \pmod 7)$

$4x + 3 \equiv 6 \pmod 7$

$4x \equiv 3 \pmod 7$

$4x \cdot 2 \equiv 3 \cdot 2 \pmod 7$

$8 \cdot x \equiv 6 \pmod 7$

$1 \cdot x \equiv 6 \pmod 7$

$x \equiv 6 \pmod 7$

2. Yol

k tam sayı, $4x + 10 \equiv 6 \pmod 7$ ise

$4x + 10 = 6 + 7k$

$x = \dfrac{-4 + 7k}{4}$ ise

$k = 4$ ve $x = 6$ olabilir.

Cevap E

Örnek .. 18

x iki basamaklı bir doğal sayı,

$x \equiv 2 \pmod 6$

$x \equiv 2 \pmod 8$

olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$x \equiv 2 \pmod 6$ olduğuna göre, x in 6 ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre, iki basamaklı x in alacağı değerler, 14, 20, 26, ... , 86, 92, 98 dir. ... (☆)

$x \equiv 2 \pmod 8$ olduğuna göre, iki basamaklı x in alacağı değerler, 10, 18, 26, ... , 82, 90, 98 dir. ... (☆☆)

(☆) ve (☆☆) dan x, 26, 50, 74, 98 dir. (6 ile 8 in ekok u 24 olduğu için x in alabileceği ardışık iki sayı arasındaki fark 24 tür.) Bu durumda x in alabileceği dört değer vardır.

Cevap D

Örnek .. 19

$a + b \equiv 8 \pmod{10}$

$a \cdot b \equiv 5 \pmod{10}$

$a^2 + b^2 \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ dir.

$a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab \pmod{10}$

$a^2 + b^2 \equiv 8^2 - 2 \cdot 5 \pmod{10}$

$a^2 + b^2 \equiv 4 - 0 \pmod{10}$

$a^2 + b^2 \equiv 4 \pmod{10}$ olur.

$a^2 + b^2 \equiv x \pmod{10}$ olduğuna göre, $x = 4$ tür.

Cevap E

Örnek .. 20

$1 < m \leq 16$ olmak üzere,

$20 - m \equiv 0 \pmod{m}$

denkliğini sağlayan kaç tane m tam sayısı vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm

$1 < m \leq 16$ olmak üzere,

$$20 - m \equiv 0 \pmod{m}$$
$$20 \equiv m \pmod{m}$$
$$20 \equiv 0 \pmod{m}$$

olduğuna göre, m sayısı verilen aralıkta; 2, 4, 5, 10 değerlerini alabilir. Bu durumda m nin alabileceği 4 farklı değer vardır.

Cevap B

Örnek .. 21

$8^{200} \equiv x \pmod{20}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşit <u>olabilir</u>?

A) 0 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

Çözüm

$8^1 \equiv 8 \pmod{20}$
$8^2 \equiv 4 \pmod{20}$
$8^3 \equiv 12 \pmod{20}$
$8^4 \equiv 16 \pmod{20}$

$8^5 \equiv 8 \pmod{20}$
$8^6 \equiv 4 \pmod{20}$
$8^7 \equiv 12 \pmod{20}$
$8^8 \equiv 16 \pmod{20}$

...

görüldüğü gibi 8 in 4 ten sonraki kuvvetlerinden elde edilen kalanlar ilk bulunan kalanlarla aynıdır.

200 sayısı 4 ile tam bölünmektedir.

$8^4 \equiv 8^8 \equiv 8^{12} \equiv \ldots \equiv 8^{4k} \equiv 16 \pmod{20}$

olduğundan, $8^{4 \cdot 50} \equiv 8^{200} \equiv 16 \pmod{20}$ olur.

Cevap E

Örnek .. 22

$498^2 \equiv a \pmod{501}$

olduğuna göre, a nın en küçük doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm

$498 = 501 - 3$ olduğuna göre,

$$498^2 \equiv a \pmod{501}$$
$$(501-3)^2 \equiv a \pmod{501}$$
$$501^2 - 2 \cdot 501 \cdot 3 + 3^2 \equiv a \pmod{501} \quad \ldots (\star)$$

501 sayısı 501 ile bölündüğünde kalan 0 olduğundan, 501 yerine 0 alabiliriz. Bu durumda,

$$501^2 - 2 \cdot 501 \cdot 3 + 3^2 \equiv a \pmod{501}$$
$$0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 3 + 9 \equiv a \pmod{501}$$
$$9 \equiv a \pmod{501}$$

olur.

Buna göre, a nın en küçük doğal sayı değeri 9 olabilir.

Örnek .. 23

207^{212} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm

207^{212} sayısının birler basamağındaki rakam bu sayının 10 ile bölümünden kalana eşittir.

$$207 \equiv 7 \pmod{10}$$

olduğu için, 207 yerine 7 yazarak çözüm yapalım.

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$$
$$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$$
$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$
$$7^4 \equiv 1 \pmod{10} \quad \ldots (\star)$$
$$(7^4)^{53} \equiv 1^{53} \pmod{10}$$
$$7^{212} \equiv 1 \pmod{10}$$
$$207^{212} \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğuna göre, 207^{212} sayısının birler basamağındaki rakam 1 dir.

Cevap A

B. KALAN SINIFLARI ve $\mathbb{Z}/m$ DE YAPILAN İŞLEMLER

Tam sayılar kümesinde tanımlı "apsisi ile ordinatı farkı 5 ile tam bölünen ikililerden oluşan β bağıntısı

$$\beta = \{(x, y) : 5 \mid (x - y)\}$$

olmak üzere, β denklik bağıntısıdır. (Denklik bağıntısını "Bağıntı" konusunda verdik.

β bağıntısında 0 a denk olan elemanların kümesi (0 ın denklik sınıfı):

$$\overline{0} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\} \text{ olur.}$$

(5 modülü) tam sayılar kümesinde $\overline{0}$ dan başka da denklik sınıfları oluşturur. Bunlar;

$$\overline{1} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$
$$\overline{2} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$
$$\overline{3} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$$
$$\overline{4} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\} \text{ olur.}$$

Bu denklik sınıflarının kümesine 5 in kalan sınıflarının kümesi denir ve $\mathbb{Z} / 5$ biçiminde gösterilir.

$$\mathbb{Z}/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\} \text{ olur.}$$

Uyarı

$\mathbb{Z}/m$ deki işlemler (mod m) ye göre yapılır.

Uygulama

Mod 6 da 9 sayısı 3 e denk olduğundan,

$\mathbb{Z}/6$ da, $\overline{4}+\overline{5}=\overline{4+5}=\overline{9}=\overline{3}$ olur.

Uygulama

Mod 6 da 6 sayısı 0 a denk olduğundan,

$\mathbb{Z}/6$ da, $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} = \overline{0}$ olur.

Örnek .. 24

$\mathbb{Z} / 7$ de,

$4 \cdot 5 + 2^4 + 3 \cdot 5^2$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm

$\mathbb{Z} / 7$ de işlemler mod 7 ye göre yapılır.

$4 \cdot 5 \equiv 20 \equiv 6 \pmod{7}$

$2^4 \equiv 2 \pmod{7}$

$5^2 \equiv 4 \pmod{7}$ olduğu için,

$$4 \cdot 5 + 2^4 + 3 \cdot 5^2 \equiv 6 + 2 + 3 \cdot 4 \pmod{7}$$
$$\equiv 8 + 12 \pmod{7}$$
$$\equiv 1 + 5 \pmod{7}$$
$$\equiv 6 \pmod{7}$$

olur.

Buna göre,

$\mathbb{Z} / 7$ de, $4 \cdot 5 + 2^4 + 3 \cdot 5^2$ işleminin sonucu $\overline{6}$ dır.

Örnek .. 25

$\mathbb{Z} / 6$ da,

$(2x + 5) \cdot (4x + 3)$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x+1$ B) x^2+4x C) x^2+2x+1 D) $2x^2+x+1$ E) $2x^2+2x+3$

Çözüm

$\mathbb{Z}/6$ da işlemler mod 6 ya göre yapılır. Buna göre,

$(2x + 5) \cdot (4x + 3)$

$$\equiv 2x \cdot 4x + 2x \cdot 3 + 5 \cdot 4x + 5 \cdot 3 \pmod{6}$$
$$\equiv 2x^2 + 0x + 2x + 3 \pmod{6}$$
$$\equiv 2x^2 + 2x + 3 \pmod{6}$$

olur.

Cevap E

Örnek .. 26

$f(x) = 2x + 2$

$g(x) = 4x$

olduğuna göre, (fog)(2) nin $\mathbb{Z}/5$ teki değeri aşağıdakilerden hangisine aittir?

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{3}$ E) $\overline{4}$

Çözüm

$(fog)(2) = f[(g(2))] = f(8) = 18$ dir.

$\overline{3} \equiv \{\ldots, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$, (mod 5)

$18 \equiv 3$ (mod 5)

olduğu için (fog)(2) nin $\mathbb{Z}/5$ teki değeri 3 ün denklik sınıfındadır. Yani $\overline{3}$ dedir.

Cevap D

Uygulama

$\mathbb{Z}/8$ de; $f(x) = \overline{5}\cdot x + \overline{6}$

$f(\overline{1}) = \overline{5}\cdot\overline{1} + \overline{6} = \overline{3}$

$f^{-1}(\overline{3}) = \overline{1}$

Örnek .. 27

$\mathbb{Z}/5$ kümesinde, karekökü olan sayıları bulalım.

Çözüm

$x\cdot x = x^2$ ise $\sqrt{x^2} = x$

olduğunda x^2 nin karekökü x tir. Buna göre,

$\mathbb{Z}/5$ de; $\overline{0}\cdot\overline{0} = \overline{0}$ ise $\sqrt{\overline{0}} = \overline{0}$

$\overline{1}\cdot\overline{1} = \overline{1}$ ise $\sqrt{\overline{1}} = \overline{1}$

$\overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{4}$ ise $\sqrt{\overline{4}} = \overline{2}$

$\overline{3}\cdot\overline{3} = \overline{4}$ ise $\sqrt{\overline{4}} = \overline{3}$

$\overline{4}\cdot\overline{4} = \overline{1}$ ise $\sqrt{\overline{1}} = \overline{4}$

Bu durumda $\mathbb{Z}/5$ de karekökü olan sayılar

$\overline{0}$, $\overline{1}$ ve $\overline{4}$ tür.

Örnek .. 28

$\mathbb{Z}/8$ de,

$\overline{5}\cdot x + \overline{2}\cdot y + \overline{6} = \overline{0}$

$\overline{4}\cdot x + \overline{7}\cdot y + \overline{4} = \overline{0}$

olduğuna göre, x + y aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm

Verilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rr} & \overline{5}\cdot x + \overline{2}\cdot y + \overline{6} = \overline{0} \\ + & \overline{4}\cdot x + \overline{7}\cdot y + \overline{4} = \overline{0} \\ \hline & (\overline{5}+\overline{4})\cdot x + (\overline{2}+\overline{7})\cdot y + \overline{6} + \overline{4} = \overline{0} \end{array}$$

$$\overline{9}\cdot x + \overline{9}\cdot y + \overline{6+4} = \overline{0}$$

$$\overline{1}\cdot x + \overline{1}\cdot y + \overline{2} = \overline{0}$$

$$\overline{1}\cdot x + \overline{1}\cdot y + \overline{2} - \overline{0} = \overline{0}$$

$$\overline{1}\cdot x + \overline{1}\cdot y + \overline{2} - \overline{8} = \overline{0}$$

$$\overline{1}\cdot x + \overline{1}\cdot y - \overline{6} = \overline{0}$$

$$\overline{1}\cdot x + \overline{1}\cdot y = \overline{6}$$

$$x + y = 6$$

Cevap A

C. TAKVİM ve SAAT PROBLEMLERİ

Akrep ve yelkovanı olan bir saat şu anda 10 u gösteriyor. Bu saat 8 saat sonra kaçı gösterir?

Problemini çözelim:

10 + 8 = 18 dir. Saatin üzerinde 18 sayısı yoktur.

Saat üzerinde 10 dan itibaren 8 birim sayarsak; 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6 üzerine geliriz. Yani, öğleden sonra saat 6 yı gösterir.

Bu toplama, tam sayılarda yaptığımızdan farklı bir toplamadır.

Bu ve benzeri biçimde yapılan işlemler "Modüler Aritmetik" dalının konusudur.

$10 + 8 \equiv 18$ (mod 12)

$\equiv 6$ (mod 12) olur.

Örnek .. 29

Bugün 13 Ağustos 2019 Salıdır.

Bu günden, 17 gün sonraki günü bulalım.

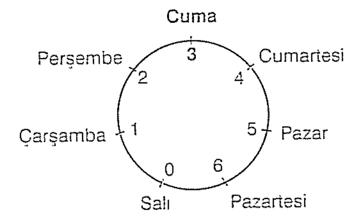
Çözüm

Bir hafta 7 gün olduğuna göre, 7 gün sonrası ve 7 nin katı olan bir sayıyla ifade edilen günler, hep aynı güne karşılık gelir.

$17 \equiv 3$ (mod 7)

olduğuna göre, istenen Salı gününden 3 gün sonrasıdır. Yani Cumadır.

Buna göre, 13 Ağustos 2019 Salı gününden 17 gün sonrası 30 Ağustos 2019 Cumadır.



Örnek .. 30

Tam 1 i gösteriyorken çalıştırılan bir saatin akrebinin 2230 saatlik süre dolduğu anda kaçı göstereceğini bulalım.

Çözüm

Akrep ve yelkovanı olan saat, her 12 saatte bir aynı saati gösterir. Bu durumda işlemlerimizi mod 12 ye göre yapacağız.

$2230 \equiv 10$ (mod 12) ve

$1 + 10 \equiv 11$ (mod 12)

olduğuna göre, 2230 saatlik süre dolduğunda saat 11 i gösterir.

Örnek .. 31

Bir elektronik saat şu anda 18.00 i gösterdiğine göre, 157 saat sonra kaçı gösterir?

A) 07.00 B) 15.00 C) 19.00 D) 21.00 E) 22.00

Çözüm

Elektronik saat 24 saatte bir aynı vakti göstereceğine göre, işlemleri (mod 24) e göre yapmalıyız.

$157 \equiv 13$ (mod 24)

18.00 + 13.00 = 31.00

$31 \equiv 7$ (mod 24)

olduğu için, saat 07.00 yi gösterir.

Cevap A

Örnek .. 32

Bir hasta; A hapını 12 günde bir (11 gün arayla) yutuyor. Bu hasta, B hapını 8 günde bir (7 gün arayla) yutuyor. Bu hasta A ve B hapını birlikte ilk kez pazar günü yutuyor.

Buna göre, A ve B hapını ikinci kez birlikte yuttuğu günü bulalım.

Çözüm

E.k.o.k.(12 ; 8) = 24 olduğu için,

bu hasta A ve B hapını birlikte 24 günde bir yutar.

24 ün 7 ile bölümünden kalan 3 olmak üzere,

$24 \equiv 3$ (mod 7)

olduğuna göre, istenen pazar gününden 3 gün sonrasıdır. Yani çarşambadır.

Örnek .. 33

Bugün günlerden salı olduğuna göre, 32 gün sonra hangi gündür?

A) Cuma B) Cumartesi C) Pazar D) Pazartesi E) Salı

Çözüm

Bir hafta 7 gündür. Bu gün günlerden ne ise 7 gün sonra yine aynı gündür.

$32 \equiv 4$ (mod 7)

Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi ...
0	1	2	3	4 ...

olduğuna göre, 32 gün sonra cumartesidir.

Cevap B

Örnek .. 34

Bir asker 4 günde bir (3 gün arayla) nöbet tutmaktadır.

Bu asker ilk nöbetini pazartesi günü tuttuğuna göre, 100. nöbetini hangi gün tutar?

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba D) Perşembe E) Cuma

Çözüm

Asker 4 günde bir nöbet tuttuğuna göre 100. nöbetini tutması için $99 \cdot 4$ gün geçmesi gerekir.

$99 \equiv 1 \pmod 7$

$99 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod 7$

$99 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$ olduğuna göre, bizden istenen pazartesiden 4 gün sonrasıdır.

P.tesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	...
0	1	2	3	4	...

Buna göre, asker 100. nöbetini cuma günü tutar.

Cevap E

Örnek .. 35

365 günlük bir yıldaki salı ve çarşamba günleri sayısının toplamı en çok kaçtır?

A) 102 B) 103 C) 104 D) 105 E) 106

Çözüm

Bir hafta 7 gündür. $365 = 52 \cdot 7 + 1$

olduğu için, 52 tane salı ve çarşamba sayılır.

Sayma işlemine salı günü başlanırsa, artan gün salı olur.

Böylece, 53 salı ve 52 çarşamba günü olur.

Toplam, $53 + 52 = 105$ salı ve çarşamba günü olur.

Cevap D

Örnek .. 36

Bu ay ağustostur.

Buna göre, 173 ay öncesi hangi ay olduğunu bulalım.

Çözüm

Bir yıl 12 ay olduğuna göre, 12 ay sonrası ve 12 nin katı olan bir sayıyla ifade edilen aylar, hep aynı aya karşılık gelir.

$173 \equiv 5 \pmod{12}$

olduğuna göre, istenen ağustos ayından 5 ay öncesidir. Yani marttır.

Örnek .. 37

12 bölmeli bir saat şu anda 11 i gösterdiğine göre, 75 saat sonra kaçı gösterir?

Çözüm

Saat 12 bölmeli olduğuna göre, işlemleri (mod 12) ye göre yapmalıyız.

$75 \equiv 3 \pmod{12}$

olur.

$75 + 11 \equiv 3 + 11 \pmod{12}$

$\equiv 2 \pmod{12}$

olduğu için, saat 11 den 75 saat sonra 2 yi gösterir.

Örnek .. 38

Bugün günlerden pazartesi olduğuna göre, 120 gün önce hangi gündür?

A) Salı B) Çarşamba C) Perşembe D) Cuma E) Pazar

Çözüm

Bir haftada 7 gün olduğuna göre, işlemleri (mod 7) ye göre yapmalıyız.

$120 \equiv 1 \pmod 7$

olur. Kalan 1 olduğuna göre, 120 gün önce pazartesiden 1 önceki gün olup sorunun cevabı pazar olur.

Cevap E

1. **$(997)^{999}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?**

A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

2. $2^{38} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

3. $997^x \equiv 4 \pmod 7$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

5^{14+6k}

sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. $12^{504} \equiv a \pmod{27}$

olduğuna göre, a nın alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 7

6. $3^{2012} \equiv x \pmod{11}$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

7. $4 - 2x \equiv 1 \pmod 5$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 7

8. $1 < x \leq 28$ olmak üzere,

$28 - x \equiv 0 \pmod x$

denkliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9. $6^{75} \equiv x \pmod 8$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 7

10. 2^{211}

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

11. $4^x \equiv 4 \pmod 7$

olduğuna göre, x in en küçük iki farklı doğal sayı değerinin toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 7

12. x iki basamaklı bir doğal sayı,

$x \equiv 3 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 6$

olduğuna göre, x in <u>en büyük</u> değeri ile <u>en küçük</u> değerinin toplamı kaçtır?

A) 106 B) 108 C) 110 D) 112 E) 114

13.

$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} \equiv 1 \pmod 7$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> doğal sayı değeri kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 1 E) 0

14. $\mathbb{Z}/5$ te,

$4^{-1} + 3^{-1}$

toplamı kaçtır? (x^{-1} : x in çarpma işlemine göre tersi)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. $\mathbb{Z}/7$ de,

$(\bar{5}x + \bar{2})(\bar{3}x + \bar{3})$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$ B) $x^2 + \bar{1}$ C) $x^2 + \bar{6}x + \bar{2}$ D) $x^2 + \bar{6}$ E) $x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$

16. 24 saatte bir aynı saati gösteren bir dijital saat şu anda 7.30 u gösterdiğine göre, 203 saat sonra kaçı gösterir?

A) 14.00 B) 14.30 C) 16.30 D) 18.30 E) 22.00

17. Bugün günlerden pazartesidir.

300 gün sonra günlerden hangisi olur?

A) Salı B) Çarşamba C) Perşembe D) Cuma E) Pazar

18. Bir hemşire 5 gün arayla (6 günde bir) nöbet tutmaktadır.

Bu hemşire birinci nöbetini çarşamba günü tuttuğuna göre, 40. nöbetini hangi gün tutar?

A) Pazartesi B) Salı C) Perşembe D) Cuma E) Cumartesi

19. Bir öğretmen 13 günde bir (12 gün arayla) nöbet tutmaktadır.

26. nöbetini çarşamba günü tuttuğuna göre, 1. nöbetini hangi gün tutmuştur?

A) Çarşamba B) Perşembe C) Cuma D) Pazar E) Pazartesi

1.

$(997)^{999}$ sayısının birler basamağındaki rakam, bu sayının 10 ile bölümünden kalana eşittir.

$997^1 \equiv 7 \pmod{10}$

$997^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$997^2 - 0 \equiv 9 - 10 \pmod{10}$

$997^2 \equiv -1 \pmod{10}$

$(997^2)^{499} \equiv (-1)^{499} \pmod{10}$

$997^{998} \equiv -1 \pmod{10}$

$997^{998} \cdot 997^1 \equiv -1 \cdot 7 \pmod{10}$

$997^{999} \equiv -7 \pmod{10}$

$997^{999} + 0 \equiv -7 + 10 \pmod{10}$

$997^{999} \equiv 3 \pmod{10}$

Cevap B

2.

$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$

$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$

$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$

$2^6 \equiv 4 \pmod{10}$

$2^7 \equiv 8 \pmod{10}$

$2^8 \equiv 6 \pmod{10}$

görüldüğü gibi 2 nin 4 ten sonraki kuvvetlerinden elde edilen kalanlar ilk bulunan kalanlarla aynıdır.

$2^1 \equiv 2^5 \equiv 2^9 \equiv \ldots \equiv 2^{4k+1} \pmod{10}$

$2^2 \equiv 2^6 \equiv 2^{10} \equiv \ldots \equiv 2^{4k+2} \pmod{10}$

$2^{38} \equiv 2^{4 \cdot 9 + 2} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$ bulunur.

Cevap C

3.

$997 \equiv 3 \pmod 7$

$997^2 \equiv 997^1 \cdot 997^1 \pmod 7$

$997^2 \equiv 3 \cdot 3 \pmod 7$

$997^2 \equiv 2 \pmod 7$

$997^3 \equiv 997^2 \cdot 997^1 \pmod 7$

$997^3 \equiv 2 \cdot 3 \pmod 7$

$997^3 \equiv 6 \pmod 7$

$997^4 \equiv 997^3 \cdot 997^1 \pmod 7$

$997^4 \equiv 6 \cdot 3 \pmod 7$

$997^4 \equiv 4 \pmod 7$

$997^x \equiv 4 \pmod 7$ olduğuna göre $x = 4$ tür.

Cevap C

4.

7, 5 in tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve 7 asal sayı olduğuna göre,

$5^6 \equiv 1 \pmod 7$ dir.

Buna göre,

$5^{6k+14} \equiv 5^{6k+12+2} \pmod 7$

$5^{6k+14} \equiv 5^{6k+12} \cdot 5^2 \pmod 7$

$5^{6k+14} \equiv (5^6)^{k+2} \cdot 5^2 \pmod 7$

$5^{6k+14} \equiv (1)^{k+2} \cdot 5^2 \pmod 7$

$5^{6k+14} \equiv 1 \cdot 25 \pmod 7$

$5^{6k+14} \equiv 4 \pmod 7$ olur.

Bu durumda 5^{14+6k} nin 7 ile bölümünden kalan 4 tür.

Cevap C

5.

$12^{504} \equiv a \pmod{27}$

olmak üzere,

$12^1 \equiv 12 \pmod{27}$

$12^2 \equiv 9 \pmod{27}$

$12^3 \equiv 0 \pmod{27}$

$12^4 \equiv 0 \pmod{27}$

...

$12^{504} \equiv 0 \pmod{81}$

olur.

Buna göre, a nın alabileceği en küçük değer 0 dır.

Cevap A

6.

Kural: x, m nin tam katı olmayan pozitif bir tam sayı ve m asal sayı ise $x^{m-1} \equiv 1 \pmod m$ dir.

11 asal sayı ve 3 sayısı 11 in katı olmadığından, kural gereği,

$3^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$ ise $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ dir.

Fakat, 10 sayısının tam sayı bölenlerinden olan 5 sayısı için de,

$3^5 \equiv 1 \pmod{11}$

olduğu görülmektedir. Buna göre,

$(3^5)^{402} \cdot 3^2 \equiv 1^{402} \cdot 3^2 \pmod{11}$

$3^{2012} \equiv 1 \cdot 9 \pmod{11}$

$3^{2012} \equiv 9 \pmod{11}$

olur. Bu durumda, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri 9 olur.

Cevap E

7.

$4 - 2 \cdot x \equiv 1 \pmod 5$

$4 - 1 \equiv 2 \cdot x \pmod 5$

$3 \equiv 2 \cdot x \pmod 5$

$3 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 2 \cdot x \pmod 5$

$3 \cdot 3 \equiv 6 \cdot x \pmod 5$

$4 \equiv 1 \cdot x \pmod 5$

$4 \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x sayısı 4, 9, 14, 19, 24 gibi değerleri alabilir.

Buna göre, x in en küçük iki farklı pozitif tam sayı değerinin toplamı, $4 + 9 = 13$ tür.

Cevap B

8.

$1 < x \leq 28$ ve k tam sayı olmak üzere,

$28 - x \equiv 0 \pmod x$ ise, $28 - x = 0 + xk$

ise, $28 = (k + 1)x$ tir.

Buna göre, x sayısı 28 ile tam bölünür.

Bu durumda, x in alabileceği değerler, 2, 4, 7, 14, 28 dir.

Buna göre, x in alabileceği beş değer vardır.

Cevap A

9.

$6^1 \equiv 6 \pmod 8$

$6^2 \equiv 4 \pmod 8$

$6^3 \equiv 0 \pmod 8$ ... (☆)

0 ın bütün kuvvetleri 0 olduğu için,

$(6^3)^{25} \equiv 0^{25} \pmod 8$

$6^{75} \equiv 0 \pmod 8$

olur. Yani, x = 0 dır.

Cevap A

10.

Bir sayının, 10 ile bölümünden kalan o sayının birler basamağındaki rakamı verir.

$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$

$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$

$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$

...

Görüldüğü gibi 2 nin 5. kuvvetinde "tekrar" başlamıştır. Yani 2 nin kuvvetleri alındığında (mod 10) a göre 2, 4, 8, 6 sayılarıyla karşılaşılmaktadır.

211 in 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre,

$2^{211} \equiv 2^3 \pmod{10}$

$\equiv 8 \pmod{10}$

olur. Yani, 2^{211} sayısının birler basamağındaki rakam 8 dir.

Cevap E

11.

$4^1 \equiv 4 \pmod 7$

$4^2 \equiv 2 \pmod 7$

$4^3 \equiv 1 \pmod 7$

Buna göre, n bir doğal sayı olmak üzere,

$4^{3 \cdot n+1} \equiv 4 \pmod 7$ olur. ... (☆)

Yani, $x = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ dir.

$n = 0$ iken $x = 1$,

$n = 1$ iken $x = 4$ olup, x in en küçük iki farklı doğal sayı değerinin toplamı: $1 + 4 = 5$ tir.

Cevap D

12.

x iki basamaklı bir doğal sayı,

$x \equiv 3 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 6$

olduğuna göre, x sayısı 4 ile ve 6 ile bölündüğünde 3 kalanını veren iki basamaklı bir doğal sayıdır.

4 ile 6 nın OKEK i 12 olduğuna göre, k bir pozitif tam sayı olmak koşuluyla,

$x = 12 \cdot k + 3$ tür.

$k = 1$ iken $x = 12 \cdot 1 + 3 = 15$ olur.

$k = 8$ iken $x = 12 \cdot 8 + 3 = 99$ olur.

Buna göre, x in en büyük değeri ile en küçük değerinin toplamı:

$15 + 99 = 114$ olur.

Cevap E

13.

1. Yol

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} \equiv 1 \pmod 7$$

$$5^{-1} \cdot x + 4^{-1} \cdot x \equiv 1 \pmod 7$$

Burada 5 ve 4 ün mod 7 ye göre tersini bulmalıyız.

Mod 7 de çarpma işleminin birim elemanı 1 dir.

Buna göre,

$5 \cdot 5^{-1} \equiv 1 \pmod 7$ ve $4 \cdot 4^{-1} \equiv 1 \pmod 7$ dir.

$5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 7$ ve $4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan

$5^{-1} \equiv 3 \pmod 7$ ve $4^{-1} \equiv 2 \pmod 7$ olur.

Bu durumda,

$5^{-1} \cdot x + 4^{-1} \cdot x \equiv 1 \pmod 7$

$3x + 2x \equiv 1 \pmod 7$

$5x \equiv 1 \pmod 7$

$3 \cdot 5x \equiv 3 \cdot 1 \pmod 7$

$15x \equiv 3 \pmod 7$

$x \equiv 3 \pmod 7$

Buna göre, x in alabileceği değerlerden bazıları −11, −4, 3, 10, 17, 24 tür. Bu durumda x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri 3 tür.

2. Yol

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} \equiv 1 \pmod 7$$

$$\frac{9x}{20} \equiv 1 \pmod 7$$

$9x \equiv 20 \pmod 7$

$9x = 20 + 7k$, (k tam sayı)

$x = \dfrac{20 + 7k}{9}$ ise

$x = 3$ ve $k = 1$ olabilir.

Bu durumda x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri 3 tür.

Cevap C

14.

1. Yol

$\mathbb{Z}/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ tür.

Bu kümede işlemler mod 5 e göre yapılır.

$\mathbb{Z}$ / 5 te çarpma işlemine göre birim eleman 1 dir.

$\mathbb{Z}$ / 5 te 4 ve 3 ün çarpma işlemine göre tersleri sırasıyla a ve b olsun.

$4 \cdot a \equiv 1 \pmod 5$

$4 \cdot 4 \cdot a \equiv 4 \cdot 1 \pmod 5$

$a \equiv 4 \pmod 5$

$4^{-1} \equiv 4 \pmod 5$ olur. ... (☆)

$3 \cdot b \equiv 1 \pmod 5$

$2 \cdot 3 \cdot b \equiv 2 \cdot 1 \pmod 5$

$b \equiv 2 \pmod 5$

$3^{-1} \equiv 2 \pmod 5$

Buna göre,

$4^{-1} + 3^{-1} \equiv 4 + 2 \pmod 5$

$\equiv 6 \pmod 5$

$\equiv 1 \pmod 5$ olur.

2. Yol

$4^{-1} + 3^{-1} \equiv x \pmod 5$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \equiv x \pmod 5$

$\dfrac{7}{12} \equiv x \pmod 5$, $(7 \equiv 2 \pmod 5)$

$\dfrac{2}{2} \equiv x \pmod 5$, $(12 \equiv 2 \pmod 5)$

$1 \equiv x \pmod 5$

$x \equiv 1 \pmod 5$

Cevap B

15.

$\mathbb{Z}/7=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{6}\}$ dır.

Bu kümede işlemler mod 7 ye göre yapılır.

Buna göre,

$$\begin{aligned}(\overline{5}\cdot x+\overline{2})(\overline{3}\cdot x+\overline{3}) &\equiv \overline{5\cdot 3}\cdot x^2+\overline{5\cdot 3}\cdot x+\overline{2\cdot 3}\cdot x+\overline{2\cdot 3}\\ &\equiv \overline{1}\cdot x^2+\overline{1}\cdot x+\overline{6}\cdot x+\overline{6}\\ &\equiv \overline{1}\cdot x^2+(\overline{1}+\overline{6})\cdot x+\overline{6}\\ &\equiv x^2+\overline{0}\cdot x+\overline{6}\\ &\equiv x^2+\overline{6} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Cevap D

16.

Dijital saat 24 saatte bir aynı saati göstereceğine göre, işlemleri (mod 24) e göre yapmalıyız.

$203\equiv 11 \pmod{24}$

olduğuna göre,

$7.30+11.00\equiv 18.30 \pmod{24}$

olur.

Buna göre, saat 7.30 dan 203 saat sonra 18.30 u gösterir.

Cevap D

17.

Bir haftada 7 gün olduğuna göre, işlemleri (mod 7) ye göre yapmalıyız.

Bugün pazartesi olduğuna göre, 7 gün sonra da pazartesidir.

Bunun için, kalanı 0 olan günler pazartesiye, kalanı 1 olan günler salıya, ... rastgelir.

Pazartesi	Salı	...	Cumartesi	Pazar
0	1	...	5	6

olmak üzere,

$300\equiv 6 \pmod 7$

olduğuna göre, 300 gün sonra pazardır.

Cevap E

18.

1.Nöbet $\underbrace{\qquad\qquad}_{5\text{ gün}}$ 2.Nöbet $\underbrace{\qquad\qquad}_{5\text{ gün}}$ 3.Nöbet ...

Hemşire 5 gün arayla (6 günde bir) nöbet tuttuğuna göre, 40. nöbetini tutması için $39\cdot 6$ gün geçmesi gerekir.

Hemşire ilk nöbetini çarşamba günü tuttuğuna göre 7 nin katı olan günler yine çarşambaya rastgelir.

Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	...	Salı
0	1	2	3		6

olmak üzere,

$39\otimes 6\equiv 4\otimes 6\equiv 3 \pmod 7$

olduğuna göre, hemşire 40. nöbetini cumartesi günü tutar.

Cevap E

19.

Bir haftada 7 gün olduğuna göre, işlemleri (mod 7) ye göre yapmalıyız. 26. nöbet çarşamba günü tutulduğuna göre, 7 gün önce de çarşambadır. Bunun için, kalanı 0 olan günler çarşambaya, kalanı 1 olan günler salıya, kalanı 2 olan günler pazartesiye, ... rastgelir.

26. Nöbet $\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{13\text{ gün}}}^{12\text{ gün}}$ 25. Nöbet $\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{13\text{ gün}}}^{12\text{ gün}}$ 24. Nöbet...

1. nöbetini tuttuğu gün 26. nöbetini tuttuğu günün $25\cdot 13=325$ gün öncesidir.

$25\equiv 4 \pmod 7$

$25\cdot 13\equiv 4\cdot 6 \pmod 7$

$25\cdot 13\equiv 24 \pmod 7$

$25\cdot 13\equiv 3 \pmod 7$

olduğuna göre, istenen çarşamba gününden 3 gün öncesidir. Yani pazardır.

Cevap D

1. $111\equiv x \pmod{11}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 8 E) 10

2. $1995\cdot 1996\equiv x \pmod 9$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3. Bugün günlerden salıdır.

Buna göre, 50 gün sonraki gün aşağıdakilerden hangisidir?

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba D) Perşembe E) Cuma

4. **1995^{1996} sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 0 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

5. $1998^{1999}\equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. $4^{99}\equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

7. **9^{18} sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8. $\mathbb{Z}/10$ kümesinde,

$(\overline{3}\otimes\overline{5})\oplus(\overline{4}\otimes\overline{4})=\overline{x}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $\mathbb{Z}/5$ te,

$4x+3=0$

olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\overline{1},\overline{4}\}$ B) $\{\overline{4}\}$ C) $\{\overline{3}\}$ D) $\{\overline{0},\overline{2}\}$ E) $\{\overline{3},\overline{0}\}$

10. $8^{99}\equiv x \pmod 7$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 1 E) 0

11.

$299 + 399 + 499 + 599 \equiv x \pmod 3$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12. x, iki basamaklı bir doğal sayıdır.

$x \equiv 2 \pmod 7$

$x \equiv 2 \pmod 9$

denkliklerini birlikte sağlayan x kaçtır?

A) 61 B) 63 C) 65 D) 67 E) 68

13.

I. $12342 \equiv 2 \pmod{10}$

II. $715 \equiv 3 \pmod 7$

III. $346 \equiv 1 \pmod 5$

IV. $747 \equiv 0 \pmod 2$

V. $4444 \equiv 4 \pmod 5$

Yukarıdakilerden kaç tanesi <u>yanlıştır</u>?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. x iki basamaklı bir pozitif tam sayı olmak üzere;

$7^x \equiv 1 \pmod 5$

denkliğini sağlayan x in <u>en büyük</u> değeri kaçtır?

A) 36 B) 44 C) 88 D) 96 E) 98

15. Bir doktor 5 günde bir (4 gün arayla) nöbet tutuyor.

Bu doktor ilk nöbetini cumartesi günü tuttuğuna göre, onuncu nöbetini hangi gün tutar?

A) Salı B) Çarşamba C) Perşembe D) Cuma E) Pazartesi

16.

$4^{15} \equiv x \pmod 6$

$8^{15} \equiv y \pmod 9$

$x + y \equiv z \pmod 5$

denkliklerinde x, y ve z verilen denklikleri sağlayan en küçük pozitif tam sayılar olduğuna göre, z aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

17. 12^{12} nin birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

18. $a > 1$ olmak üzere,

$19 \equiv 1 \pmod a$

olduğuna göre, a nın alabileceği kaç tane pozitif tam sayı değeri vardır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

1.

$A = 7^{2!+4!}$

olduğuna göre, A sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 9

2.

$33 - x \equiv 0 \pmod 9$

ifadesindeki x yerine aşağıdaki sayılardan hangisi <u>gelemez</u>?

A) −39 B) −21 C) −6 D) 24 E) 42

3.

$a^2 \equiv 12 \pmod{13}$

olduğuna göre, a nın en küçük doğal sayı değeri için $7 \cdot a$ ifadesi (mod 13) te aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

4.

$x \equiv 3 \pmod 7$

$x^2 \equiv a \pmod 7$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisine eşit <u>olabilir</u>?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$x \equiv 123 \pmod{125}$

$x^2 \equiv a \pmod{125}$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. ab iki basamaklı, abab dört basamaklı doğal sayı olmak üzere,

$ab \equiv 5 \pmod{11}$

olduğuna göre, abab sayısı (mod 11) de aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 1 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

7. 1 Ocak 2009 Perşembe günü olduğuna göre, 31 Ocak 2009 hangi gündür?

A) Salı

B) Çarşamba

C) Perşembe

D) Cuma

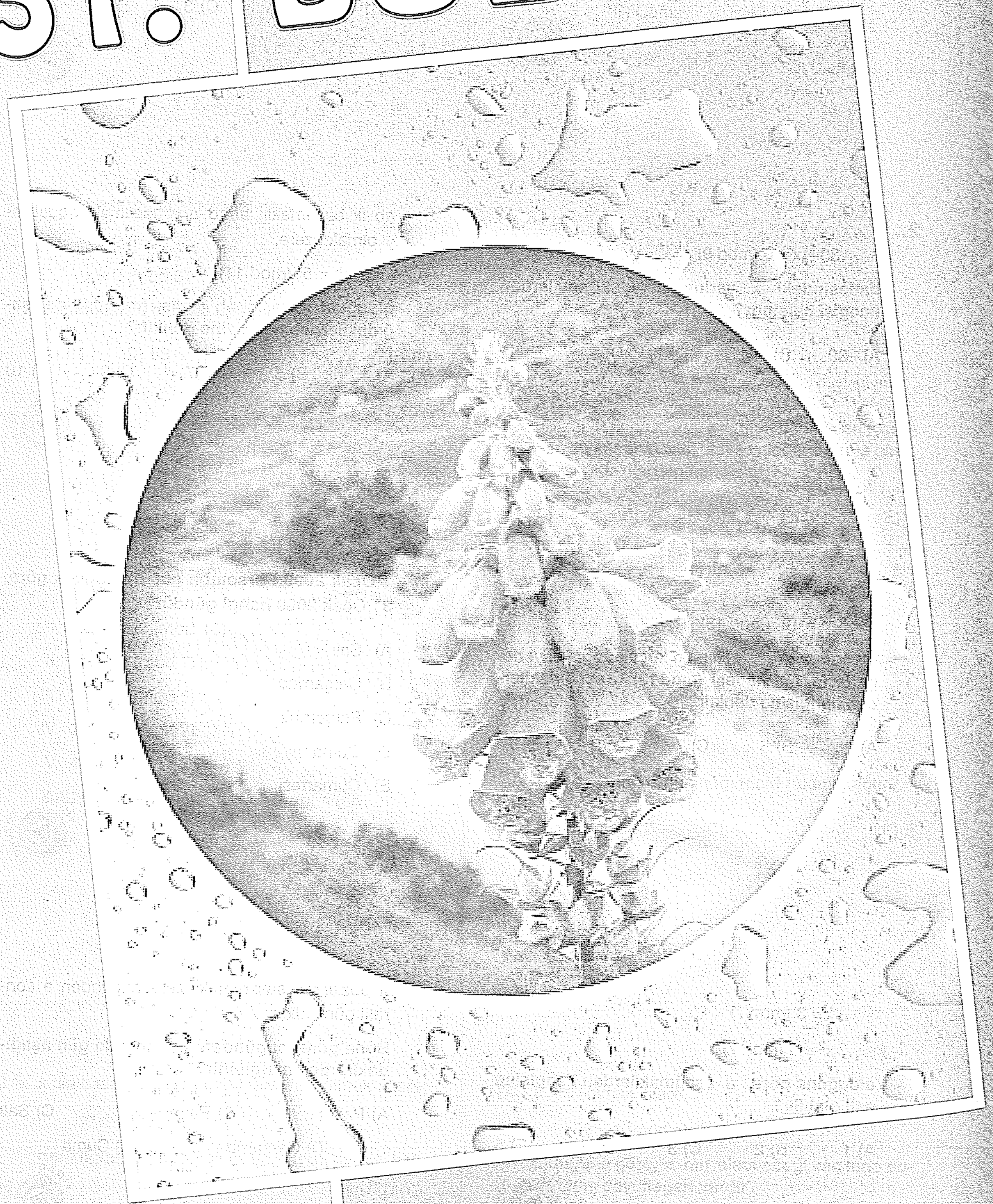
E) Cumartesi

8. a pozitif tam sayı olmak üzere, bugünden a sonraki gün salıdır.

Buna göre, bugünden 8a sonraki gün aşağıdakilerden hangisidir?

A) Pazar B) Pazartesi C) Salı D) Çarşamba E) Cuma

31. BÖLÜM



Permütasyon, Kombinasyon, Olasılık

ÖSYM Yetkililerin yaptığı açıklamalara göre YGS matematik soruları 9. Sınıf sonuna kadar olan konuları kapsayacaktır. 2010 yılında olasılık konusundan soru çıkmıştır. Bu konu orta öğretimde 10. sınıf konusudur. İlköğretim müfredatında da olasılık vardır. Bu durumda YGS de ilköğretim müfredatından da soru çıkacağını söyleyebiliriz. Permütasyon, Kombinasyon ve Olasılık konuları ilköğretim müfredatında yer aldığından bu konuları burada, ilköğretim müfredatı düzeyinde vereceğiz. LYS müfredatında bu konuları LYS mantığına uygun olarak daha detaylı bir biçimde işleyeceğiz.

A. ÇARPMA KURALI

Örnek .. 1

Serdar'ın farklı renkli 2 pantolonu ve farklı renkli 3 gömleği vardır.

Buna göre Serdar'ın, 1 pantolon, 1 gömleği kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm

Pantolonlar p_1, p_2 ve gömlekler g_1, g_2, g_3 olsun. Bu durumda

Pantolonların kümesi $A = \{p_1, p_2\}$ ve

gömleklerin kümesi $B = \{g_1, g_2, g_3\}$ tür.

1 pantolon ve 1 gömlekten oluşan küme ise,

$A \times B = \{(p_1, g_1), (p_1, g_2), (p_1, g_3), (p_2, g_1), (p_2, g_2), (p_2, g_3)\}$

olur.

Kolayca görüleceği gibi $A \times B$ kümesi $2 \cdot 3 = 6$ tane ikiliden oluşmaktadır. Yani seçme 6 farklı şekilde yapılabilir.

Diğer bir ifadeyle 2 pantolon ve 3 gömlek arasından 1 pantolon ve 1 gömlek $2 \cdot 3 = 6$ farklı şekilde seçilebilir.

Uygulama

2 çorba, 3 pilav, 4 tatlı çeşidi arasından 1 çorba, 1 pilav, 1 tatlı

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ farklı şekilde seçilebilir.

Örnek .. 2

Sevim, Zerda ve Betül koşuyorlar.

Bu koşunun sıralamasının kaç değişik şekilde olabileceğini görelim.

Çözüm

1.	Betül	Betül	Sevim	Sevim	Zerda	Zerda
2.	Sevim	Zerda	Betül	Zerda	Betül	Sevim
3.	Zerda	Sevim	Zerda	Betül	Sevim	Betül

Bu yarışta birinci, 3 yarışmacıdan birisi olabilir. İkinci, kalan 2 yarışmacıdan birisi olabilir. Üçüncü, en son kalan yarışmacıdır.

Üçünün yaptığı koşuda, sıralama $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ değişik şekilde gerçekleşebilir.

B. FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımı $n!$ biçiminde gösterilir ve **n faktöriyel** diye okunur.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Uygulama

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ çarpımını kısaca, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ şeklinde yazarız, 4 faktöriyel diye okuruz. 1 den 4 e kadar olan sayıların çarpımı, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olur.

Uyarı

$0! = 1$ ve $1! = 1$ dir.

Uygulama

$$\frac{7!}{5!} + 0! = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 0!$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} + 1$$
$$= 7 \cdot 6 + 1$$
$$= 43$$

C. PERMÜTASYON

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere,

n elemanlı bir kümenin, herhangi **r** elemanının bir sıra üzerindeki birbirinden farklı dizilişinin (permütasyonlarının) sayısı **P(n, r)** şeklinde gösterilir.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Uygulama

$$P(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!}$$
$$= \frac{7!}{5!}$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= 7 \cdot 6$$
$$= 42$$

Uyarı

- $P(n, 1) = n$
- $P(n, 2) = n \cdot (n-1)$
- $P(n, 3) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$
- $P(n, 4) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$

....

Uygulama

$P(5, 2) = 5 \cdot (5-1) = 5 \cdot 4 = 20$

Uygulama

$P(11, 3) = 11 \cdot (11-1) \cdot (11-2)$
$= 11 \cdot 10 \cdot 9$

Örnek .. 3

Bir mobilya mağazasında, birbirinden farklı 6 koltuk yan yana sıralanmıştır.

2 müşterinin bu 6 koltuğa kaç farklı şekilde oturabileceğini bulalım.

Çözüm

Yan yana sıralanmış 6 koltuğa 2 müşterinin farklı dizilişlerinin sayısı, 6 elemanlı bir kümenin 2 li permütasyonlarının sayısına eşittir.

$P(6, 2) = 6 \cdot 5 = 30$

2 müşteri 6 koltuğa 30 farklı şekilde oturabilir.

Örnek .. 4

6 atletin katıldığı bir yarışta, ilk üç derecenin kaç farklı şekilde oluşabileceğini bulalım.

Çözüm

1. Yol

Çarpma kuralına göre;

birinci 6 farklı şekilde;

ikinci, kalan 5 kişi arasından 5 farklı şekilde;

üçüncü, kalan 4 kişi arasından 4 farklı şekilde belirlenebilir.

Buna göre, ilk üç derece; $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ farklı şekilde belirlenebilir.

2. Yol

6 atletin 3 ü sıralamaya gireceği için 6 nın 3 lü permütasyonlarının sayısını bulalım.

$P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

olduğuna göre, 6 atletin katıldığı yarışta, ilk üç derece 120 farklı şekilde oluşabilir.

Örnek .. 5

1, 2 ve 3 rakamlarıyla elde edilen rakamları farklı üç basamaklı doğal sayıların sayısını, sayıları tek tek yazmadan bulalım.

Çözüm

Yazılacak olan üç basamaklı sayının rakamlarının farklı olacağına dikkat edelim.

Yüzler basamağına gelecek rakam, üç rakam arasından 3 farklı şekilde seçilir.

Rakamlar farklı olacağı için onlar basamağına gelecek rakam, kalan iki rakam arasından 2 farklı şekilde seçilir.

Rakamlar farklı olacağı için birler basamağına gelecek rakam, kalan bir rakam olur.

Bulduğumuz sayıları tablo ile gösterelim.

Yüzler	Onlar	Birler
3	2	1

Bu durumda istenen koşulları sağlayan, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ tane üç basamaklı doğal sayı yazılabilir.

Bu örneğin çözümü, permütasyon ile de yapılabilirdi.

$P(3, 3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Örnek .. 6

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

kümesinin elemanlarıyla iki basamaklı rakamları farklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm

Yazılacak olan iki basamaklı sayının rakamlarının farklı olacağına dikkat edelim.

Onlar basamağına gelecek rakam A kümesinin 4 elemanı arasından **4 farklı şekilde** seçilir.

Rakamlar farklı olacağı için birler basamağına gelecek rakam, kalan 3 rakam arasından 3 farklı şekilde seçilebilir.

Bulduğumuz sayıları tablo ile gösterelim.

Onlar	Birler
4	3

Bu durumda çarpım kuralına göre istenen koşulları sağlayan, $4 \cdot 3 = 12$ tane doğal sayı yazılabilir.

Bu örneğin çözümü, permütasyon ile de yapılabilirdi.

$P(4, 3) = 4 \cdot 3 = 12$

D. KOMBİNASYON

Bir kümenin bir kombinasyonu demek, kısaca o kümenin bir alt kümesi demektir.

Elemanların seçimi yapıldıktan sonra, **alt kümede elemanların diziliş sırasının değişmesi kümeyi değiştirmeyeceğinden, kombinasyonda sıra kavramı yoktur.**

Permütasyonda dizilişin önemi vardır, fakat kombinasyonda dizilişin önemi yoktur. Sadece elemanların seçiminin önemi vardır. İşte permütasyon ile kombinasyon arasındaki temel fark budur.

Örnek .. 7

Ali, Veli ve Şule arasından 2 kişinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

Çözüm

1. Yol

Ali ile Veli

Ali ile Şule

Veli ile Şule

seçilebilir. Bu durumda Ali, Veli ve Şule arasından 2 kişi 3 değişik şekilde seçilebilir.

2. Yol

Permütasyondan yola çıkarak da aşağıdaki gibi aynı cevabı bulabiliriz.

$$\frac{P(3,2)}{2!}=\frac{6}{2}=3 \text{ olur.}$$

Tanım

n elemanlı bir kümenin elemanları ile oluşturulacak r elemanlı farklı grupların sayısı n nin r li kombinasyonu olarak adlandırılır. n nin r li kombinasyonu **C(n, r)** şeklinde gösterilir.

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

Uygulama

$$C(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2!}=\frac{20}{2}=10 \text{ olur.}$$

Örnek .. 8

Bir işyerine 2 işçi alınacaktır.

Yapılan başvurulara göre 15 farklı seçim yapılabileceğine göre, bu iş için kaç kişinin başvuruda bulunduğunu bulalım.

Çözüm

Başvuran kişi sayısı n olsun.

n kişi arasından 2 kişinin seçimi, 15 farklı şekilde olduğuna göre,

$$C(n,2)=15$$

$$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=15$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2!}=15$$

$$n\cdot(n-1)=15\cdot 2$$

$$n\cdot(n-1)=30$$

$$n\cdot(n-1)=6\cdot 5$$

$$n=6 \text{ olur.}$$

Örnek .. 9

Bir çember üzerindeki 4 farklı noktadan herhangi ikisi ile belirlenen kaç doğru parçası çizilebileceğini bulalım.

Çözüm

Çemberin üzerindeki 4 nokta; A, B, C ve D olsun. Bu durumda çizilecek doğru parçaları bu noktalardan herhangi ikisi ile belirlenecektir.

Örneğin;

A, D noktaları ile AD doğru parçası,

A, C noktaları ile AC doğru parçası,

B, D noktaları ile BD doğru parçası oluşacaktır.

Buna göre; çizilebilecek doğru parçası sayısı, bu noktaların kendi aralarında oluşturabileceği ikili kombinasyonların sayısına eşittir.

Çember üzerinde 4 farklı nokta olduğuna göre, bu noktalardan herhangi ikisiyle,

$$C(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}$$

$$=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 2!}$$

$$=\frac{12}{2}$$

$=6$ tane doğru parçası çizilebilir.

E. OLASILIK

Olasılık, sonucu kesin olmayan olaylarla ilgilenir.

Başlangıçta bir madenî para atıldığında yazı mı yoksa tura mı olacağı, bir zar atıldığında üst yüze gelen noktaların sayısının ne olacağı, bir deste iskambil kağıdından rastgele alınan bir kağıdın ne olduğu gibi şans oyunlarıyla ilgilenen olasılık teorisi günümüzde ekonomik gelişmeler, sosyal olaylar, bilimsel tespitler gibi bir çok alanda kullanılmaktadır.

F. OLASILIK TERİMLERİ

1. Deney

Bir madenî para atıldığında yazı mı ya da tura mı geleceğini, bir zar atıldığında sonucun ne olacağını, ... tespit etme işlemidir.

2. Sonuç

Bir deneyin her bir görüntüsüne (çıktısına) verilen isimdir.

Örneğin bir madenî paranın atılması deneyinde olası sonuçlar, yazı ile turadır. (yazı : Y, tura : T ile gösterilirse) iki madenî paranın birlikte atılması olayında olası sonuçlar (Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T) dir. Bir zarın atılması deneyinde olası sonuçlar 1, 2, 3, 4, 5, 6 dır.

Her bir sonuç bir örnek nokta olarak da adlandırılır.

3. Örnek Uzay

Bir deneyin bütün sonuçlarını eleman kabul eden kümedir. Diğer bir ifadeyle örnek noktaların tamamını eleman kabul eden kümedir. (Örnek uzaya evrensel küme de denir.) Örnek uzayın her elemanına örnek nokta adı verilir.

Uygulama

İki madenî paranın atılması deneyinde örnek uzay

E = {(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)} olur.

Yazı: Metal paraların üzerinde değeri yazılan yüzü. (Y)

Tura: Metal paranın resimli yüzü. (T)

Uygulama

Bir zarın atılması deneyinde örnek uzay,

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dır.

4. Olay

Bir örnek uzayın her bir alt kümesine verilen isimdir.

Uygulama

Bir zar atıldığında 3 ten küçük gelme olayı {1, 2} dir.

Örnek .. 10

Bir madenî para atılıyor. **Bu paranın üste gelen yüzünün tura olma olasılığını bulalım.**

Çözüm

Bir madenî paranın atılması deneyinin çıktıları tura ve yazıdır.

Yazı: Metal paraların üzerinde değeri yazılan yüzü.

Tura: Metal paranın resimli yüzü.

Paranın tura gelmesini T ile yazı gelmesini Y ile gösterelim.

Bir para atıldığında örnek uzay;

E = {T, Y} olduğundan, s(E) = 2 dir.

Tura olma olayı A olsun.

A = {T} ise s(A) = 1 dir.

A olayının olasılığı ise,

$$O(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{1}{2}=0{,}5 \text{ olur.}$$

Buradaki gibi sonucu daha çok matematiksel işleme dayanan olasılığa **teorik olasılık** denir.

Örnek .. 11

Hilesiz bir zar atıldığında üst yüzüne 3 gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Bir zarın masaya atılması deneyinde üste gelebilecek yüzler; 1, 2, 3, 4, 5, 6 numaralı yüzlerdir.

Buna göre, bir zarın atılması deneyinde örnek uzay,

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olur.

Örnek uzayın eleman sayısı, $s(E) = 6$ dır.

Zarın üst yüzüne 3 gelme olayı A olsun.

$A = \{3\}$ ise, $s(A) = 1$ dir.

A olayının olasılığı ise,

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6} \text{ olur.}$$

Uyarı

Teorik Olasılık: Sonucu daha çok matematiksel işleme dayanan olasılık çeşididir.

Deneysel Olasılık: Deney yaparak yapılan olasılık bulma işlemine de deneysel olasılık diyeceğiz.

Öznel Olasılık: Sonucu kişiden kişiye değişen olasılığa öznel olasılık denir.

Deneysel olasılıktaki deneme sayısı arttıkça deneysel olasılık değeri, teorik olasılık değerine yaklaşır.

Uygulama

A ve B futbol takımları arasında yapılan bir maçın sonucu hakkında iki TV yorumcusu tahminde bulunuyor.

Hakan; A takımının maçı kazanma olasığının % 60,

Rıdvan; A takımının maçı kazanma olasığının % 70

olduğunu söylüyor.

Buradaki Hakan ve Rıdvan'In sözleri öznel olasılğa birer örnektir.

Tanım

İki veya daha fazla olayın gerçekleşmesi birbirine bağlı değilse yani bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkilemiyorsa böyle olaylara **bağımsız olaylar** denir.

Uygulama

- ✔ Bir futbol maçı ile bir voleybol maçı olayları bağımsızdır.
- ✔ Bir zar ve bir madenî para birlikte atıldığında, paranın üst yüzüne tura ve zarın üst yüzüne 6 gelme olayları bağımsızdır.

Kural

A olayının olasılığı, O(A) veya P(A) şeklinde gösterilir.

A ve B olayları bağımsız ise A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı,

$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B)$ şeklinde hesaplanır.

Örnek .. 12

Bir zar ve bir madenî para birlikte atıldığında, paranın tura ve zarın 4 gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Paranın tura gelme olayı A,

zarın 4 gelme olayı B olsun.

Bu olaylar bağımsız olaylar olduğuna göre, paranın tura ve zarın 4 gelme olasılığı

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ olur.}$$

Örnek .. 13

Bir torbada 8 mavi, 6 kırmızı ve 4 yeşil renkte bilye vardır.

Torbaya geri atılmak şartıyla arka arkaya rastgele çekilen 2 bilyenin ikisinin de kırmızı renkli olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Birinci bilyenin kırmızı renkli olma olayı A,

ikinci bilyenin kırmızı renkli olma olayı B olsun.

Bu olaylar bağımsız olaylar olduğuna göre,

torbaya geri atılmak şartıyla arka arkaya rastgele çekilen 2 bilyenin ikisinin de kırmızı renkli olma olasılığı

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{6}{18} = \frac{1}{9} \text{ olur.}$$

Tanım

İki veya daha fazla olayın gerçekleşmesi birbirine bağlıysa yani bir olayın sonucu diğer olayın sonucunu etkiliyorsa böyle olaylara **bağımlı olaylar** denir.

Uygulama

- ✔ 10 erkek, 16 kız öğrencinin kayıtlı olduğu bir sınıftan art arda 3 öğrenci seçimi bağımlı olaylardır. Çünkü ikinci öğrencinin seçimi birinci öğrencinin seçimine bağlıdır.
- ✔ Bir torbada 6 mavi, 8 kırmızı ve 4 yeşil renkte bilye vardır. Torbaya geri atılmamak şartıyla arka arkaya rastgele çekilen 2 bilyeden birincisinin yeşil renk, ikincisinin mavi renk gelme olayları bağımlıdır.

Kural

A ve B olayları bağımlı ise (B, A ya bağlı) A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı,

$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(A \text{ ya bağlı } B)$ biçimindedir.

Örnek .. 14

Bir torbada 6 mavi, 8 kırmızı ve 4 yeşil renkte bilye vardır.

Torbaya geri atılmamak şartıyla arka arkaya rastgele çekilen 2 bilyenin ikisinin de yeşil renkli olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Birinci bilyenin yeşil renkli olma olayı A,

ikinci bilyenin yeşil renkli olma olayı B olsun.

Yeşil renkte bilye çekilirken $s(E) = 6 + 8 + 4 = 18$ dir.

Yeşil renkte bilyelerden biri çekildikten sonra torbaya geri atılmadığı için geriye 17 bilye kalır. Bu bilyelerin de 3 ü yeşildir.

Bu olaylar bağımlı olaylar olduğuna göre,

Torbaya geri atılmamak şartıyla arka arkaya rastgele çekilen 2 bilyenin ikisinin de yeşil renkli olma olasılığı,

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{18} \cdot \frac{(4-1)}{(18-1)} = \frac{2}{51} \text{ olur.}$$

Örnek .. 15

Bir torbada 2 kırmızı, 2 beyaz ve 1 sarı bilye vardır.

Torbadan rastgele 4 bilye alındığında torbada kalan bilyenin kırmızı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

(YGS - 2010)

Çözüm

1. Yol

Torbadaki 2 si kırmızı, 2 si beyaz ve 1 i sarı olan toplam 5 bilyeden 4 bilye;

$C(5, 4) = 5$ farklı şekilde alınabilir.

Torbada kalan bilyenin kırmızı renkte olması için alınan 4 bilyenin renk dağılımı; 1 kırmızı, 2 beyaz, 1 sarı biçiminde olmalıdır.

Torbadan 1 kırmızı, 2 beyaz, 1 sarı bilye,

$C(2, 1) \cdot C(2, 2) \cdot C(1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

farklı şekilde alınabilir.

Olabilecek istenen durumların sayısının, olabilecek tüm durumların sayısına oranı istenen olasılığı verir. Buna göre, istenen olasılık,

$$\frac{C(2,1) \cdot C(2,2) \cdot C(1,1)}{C(5,4)} = \frac{2}{5} \text{ olur.}$$

2. Yol

Torbadaki bilye sayısı 5 tir. Bunlardan 4 ü çekilmiş son kalan bilyenin renginin kırmızı olma olasılığı soruluyor. Bu durumda son bilyenin kırmızı olma olasılığı 2 kırmızı bilyeden birisi ile bulunur. Bu da,

$\frac{2}{5}$ tir.

Cevap D

1. 2 kazak ve 3 gömlek arasından 1 kazak ve 1 gömlek kaç farklı biçimde seçilebilir?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

2. $s(A) = 2$

$s(B) = 5$

olduğuna göre, A kümesinden B kümesine tanımlanacak bağıntılardan kaçı fonksiyondur?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 10 E) 25

3. A = {1, 2, 3, 4} kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 24 B) 36 C) 64 D) 128 E) 256

4. A = {a, b, c, d, e}

kümesinin 3 lü permütasyonları sayısı kaçtır?

A) 10 B) 36 C) 60 D) 128 E) 256

5. 3 öğrenciden her biri 7 farklı yerden birine oturacaktır.

Kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 150 B) 180 C) 200 D) 210 E) 140

6. Farklı 2 matematik, 1 fizik, farklı 5 kimya kitabı bir rafa yan yana kaç farklı biçimde dizilebilir?

A) 8! B) $7! \cdot 2!$ C) $6! \cdot 2!$ D) $5! \cdot 2!$ E) 3!

7. A = {a, b, c, d, e, f}

A kümesinin 3 lü kombinasyonları sayısı kaçtır?

A) 20 B) 36 C) 64 D) 120 E) 256

8. 8 elemanlı bir A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

A) 20 B) 36 C) 56 D) 120 E) 256

9. A = {a, b, c, d, e, f} kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı <u>bulunmaz</u>?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

10. 7 farklı mendil arasından 4 mendil kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 35 E) 42

11. Aralarında Ali'nin de bulunduğu 8 basketbolcu arasından 5 basketbolcu seçilecektir.

Seçilenler arasında Ali'nin de olduğu kaç farklı durum vardır?

A) 28 B) 35 C) 42 D) 45 E) 48

12. Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan 7 kişilik bir aileden 4 kişi konsere gidecektir.

Anne ile babadan sadece biri konsere kesinlikle gideceğine göre, kaç farklı durum oluşur?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 20 E) 24

13. Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemdeki 6 noktanın ikisinden geçecek şekilde <u>en çok</u> kaç farklı doğru çizilebilir?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

14. İki madeni para birlikte havaya atıldığında ikisinin de tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

15. Bir çift zar havaya atılıyor.

Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı <u>olmama</u> olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

16. Bir torbada aynı büyüklükte 3 mavi, 2 kırmızı ve 2 yeşil bilye vardır.

Bu torbadan rastgele alınan bir bilyenin mavi veya kırmızı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{6}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{2}{7}$

17. İki zar birlikte havaya atılıyor.

Üst yüzlere gelen sayıların toplamının 8 den büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

18. Bir kişinin 2 maçın sonucunu doğru tahmin etme (galibiyet, beraberlik, mağlubiyet durumu) olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{9}$

19. 1 yüzü mavi, 2 yüzü pembe, 3 yüzü turuncu olan bir zar art arda 2 kez atılıyor.

Zarın üst yüzüne 1. atışta mavi, 2. atışta pembe gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{18}$

20. İki zar havaya atılıyor.

Zarların üst yüzlerine gelen rakamların toplamının 5 veya 9 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

1.

Kazaklar k_1, k_2 ve gömlekler g_1, g_2, g_3 olsun.

Bu durumda kazakların kümesi,

$K = \{k_1, k_2\}$ dir.

Gömleklerin kümesi,

$G = \{g_1, g_2, g_3\}$ olur.

1 kazak veya 1 gömleğin seçileceği küme,

$K \times G = \{(k_1, g_1), (k_1, g_2), (k_1, g_3), (k_2, g_1), (k_2, g_2), (k_2, g_3)\}$ tür.

Buna göre, 1 kazak ve 1 gömleğin seçileceği küme 6 elemanlıdır. Yani seçme 6 farklı şekilde yapılabilir.

Kısaca, 2 kazak ve 3 gömlek arasından 1 kazak ve 1 gömlek, $2 \cdot 3 = 6$ farklı şekilde seçilebilir.

Cevap D

2.

A kümesinin elemanları a_1, a_2 ve B kümesinin elemanları b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 olsun.

A dan B ye tanımlanabilecek bağıntılardan, A nın her elemanı B nin elemanlarıyla en az bir kez ve en çok bir kez eşleniyorsa fonksiyon olur.

a_1 elemanı b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 den herhangi biriyle,

a_2 elemanı b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 den herhangi biriyle eşlenebilir.

Buna göre, A dan B ye tanımlanacak bağıntılardan

$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$

tanesi fonksiyon belirtir.

Cevap E

3.

Sayı üç basamaklı olup rakamları tekrarlanabilir.

Birler basamağına gelecek rakam 4 farklı şekilde,

onlar basamağına gelecek rakam 4 farklı şekilde,

yüzler basamağına gelecek rakam 4 farklı şekilde belirlenebilir.

Yüzler	Onlar	Birler
4	4	4

Buna göre,

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

tane üç basamaklı doğal sayı yazılabilir.

Cevap C

4.

$A = \{a, b, c, d, e\}$

A kümesinin 3 lü permütasyonları;

(a, b, c), (a, b, d), ... , (c, d, e) dir.

Bu durumda A kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısı,

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = 60 \text{ tır.}$$

Cevap C

5.

3 öğrenci 7 farklı yerden birine oturacağı için sıralama,

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 210$$

farklı biçimde oluşur.

Cevap D

6.

Toplam 8 kitap vardır. Bu kitaplar arasından,

birinci sıraya gelecek olan kitap 8 yolla;

kalanlar arasından ikinci sıraya gelecek olan kitap 7 yolla;

...

sekizinci sıraya gelecek olan kitap 1 yolla belirlenebilir.

Buna göre, bu 8 kitap yan yana,

$P(8, 8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 1 = 8!$

farklı şekilde dizilebilir.

Cevap A

7.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

A kümesinin 3 lü kombinasyonları;

{a, b, c}, {a, b, d}, ... , {c, d, f} dir.

$s(A) = 6$ olduğu için, A kümesinin üçlü kombinasyonlarının sayısı:

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ dir.}$$

Cevap A

8.

A kümesi 8 elemanlı olduğuna göre 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı:

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

olur.

Cevap C

9.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümeden a elemanını çıkaralım. Oluşan $\{b, c, d, e, f\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümelerinde a elemanı bulunmaz.

$$C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ dur.}$$

Buna göre, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin 10 tanesinde a elemanı bulunmaz.

Cevap D

10.

7 mendil arasından 4 mendil, 7 nin 4 lü kombinasyonlarının sayısı kadar farklı şekilde seçilebilir.

Buna göre seçme,

$$C(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = 35$$

farklı şekilde yapılabilir.

Cevap D

11.

Aralarında Ali'nin de bulunduğu 8 basketbolcu arasından 5 basketbolcu seçilecektir.

Oluşturulacak her takımda Ali'nin bulunması istendiğine göre, diğer 7 kişi arasından 4 kişi seçilmelidir.

7 nin 4 lü kombinasyonlarının sayısı,

$$C(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = 35 \text{ tir.}$$

Buna göre, istenen seçim 35 değişik şekilde yapılabilir.

Cevap B

12.

Anne ile babadan sadece biri konsere kesinlikle gideceğine göre, anne ile baba arasından 1 kişi ve kalan 5 kişiden 3 kişi seçilmelidir.

Buna göre, konsere gidecek 4 kişi çarpma kuralına göre,

$$C(2, 1) \cdot C(5, 3) = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 2 \cdot 10 = 20$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

Cevap D

13.

Bir doğru iki farklı noktayla belirlenebilir. Bunun için, 6 nokta ile en çok,

$$C(6, 2) = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

farklı doğru çizilebilir.

Cevap C

14.

Bir madenî paranın atılması deneyinin çıktıları tura ve yazıdır.

Yazı: Metal paraların üzerinde değeri yazılan yüzü.

Tura: Metal paranın resimli yüzü.

Paranın tura gelmesini T ile yazı gelmesini Y ile gösterelim.

Bu deneyin örnek uzayı

$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$

$s(E) = 4$ tür.

İstenen olay A ise,

$A = \{(T, T)\}$

$s(A) = 1$ dir.

Buna göre, istenen olasılık:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Cevap C

15.

Bir zarın atılması deneyinde 6 sonuç vardır.

Bunlar {1, 2, 3, 4, 5, 6} dır.

İki zar atıldığında ise 36 sonuç olur. Çünkü;

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = 6 \cdot 6 = 36$ dır.

Bunu bir tablo ile daha açık bir biçimde gösterelim.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olma olayı D ise,

$D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ dır.

Bizden istenen D' nün olasılığıdır.

$$P(D') = \frac{36-6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ olur.}$$

Cevap A

16.

Bir torbada aynı büyüklükte 3 mavi, 2 kırmızı ve 2 yeşil bilye vardır.

Mavi bilyeler; m_1, m_2, m_3,

kırmızı bilyeler; k_1, k_2,

yeşil bilyeler; y_1, y_2 olsun.

Örnek uzay E olmak üzere,

$E = \{m_1, m_2, m_3, k_1, k_2, y_1, y_2\}$ dir.

Mavi gelme olayı A ise,

$A = \{m_1, m_2, m_3\}$ tür.

Kırmızı gelme olayı B ise,

$B = \{k_1, k_2\}$ dir.

$A \cap B = \varnothing$, $s(E) = 7$, $s(A) = 3$, $s(B) = 2$ olduğuna göre, torbadan rastgele alınan bir bilyenin mavi veya kırmızı gelme olasılığı,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \text{ olur.}$$

Cevap B

17.

2 zarın atılması deneyindeki çıktıların toplamını tablo ile gösterelim.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabloda üst yüze gelen sayıların toplamının 8 den büyük olduğu kısımlar taranmıştır. Bu olaya K dersek,

$s(K) = 10$ dur.

Bu durumda,

$$P(K) = \frac{s(K)}{s(E)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ olur.}$$

Cevap B

18.

Her bir maçın 3 muhtemel sonucu vardır. Maçlar birbirinden bağımsız olduğu için 2 maçın ikisini de doğru tahmin etme olasılığı:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \text{ dur.}$$

Cevap E

19.

Her iki atışın sonucu birbirini etkilemediğinden bu olaylar bağımsız olaylardır. Birinci atışta zarın üst yüzüne mavi gelmesi olayı A olsun. Buna göre,

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ olur.}$$

Zarın ikinci kez atılışında üst yüze pembe gelme olayı B olsun. Buna göre,

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

A ve B olayları bağımsız olaylar olduğundan, zarın üst yüzüne 1. atışta mavi, 2. atışta pembe gelme olasılığı,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{18} \text{ olur.}$$

Cevap E

20.

İki zar havaya atıldığında $6 \cdot 6 = 36$ durum olabilir.

Toplamları 5 edenler: (1, 4), (4, 1), (3, 2), (2, 3)

Toplamları 9 edenler: (4, 5), (5, 4), (6, 3), (3, 6)

5 veya 9 etmesi olasılığı,

$$\frac{4+4}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \text{ olur.}$$

Cevap A

1. n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının sayısı P(n, r) olmak üzere,

P(7, 3) – P(6, 3) – P(5, 3)

işleminin sonucu kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 60

2. **6 okulun yarıştığı bir bilgi yarışmasında ilk üç derece kaç farklı şekilde oluşur?**

A) 80 B) 90 C) 120 D) 240 E) 360

3. Taner ile kardeşinin de aralarında bulunduğu 6 kişi yan yana sıralanacaktır.

Taner ile kardeşi daima yan yana olmak üzere kaç farklı şekilde sıralanırlar?

A) 80 B) 90 C) 120 D) 240 E) 360

4. 4 kişinin katıldığı bir sınavın sonucu 0, 1, 2, 3, 4, 5 notları ile değerlendirilecektir.

Bu sınav, not dağılımı bakımından kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?

A) 4^6 B) $(4!)^6$ C) $(6!)^4$ D) 5^4 E) 6^4

5. {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}

kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde sadece 2 tane tek sayı bulunur?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 24 E) 30

6. Aralarında Gül ile Lale'nin de olduğu 10 kişi arasından 4 kişilik bir grup seçilecektir.

Seçilecek grupların kaç tanesinde Gül ile Lale birlikte bulunur?

A) 84 B) 56 C) 48 D) 28 E) 24

7. Bir zar havaya atılıyor.

Zarın üst yüzüne gelen sayının 2 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

8. Hilesiz bir zar havaya atılıyor.

Zarın üst yüzüne gelen sayının 3 ten küçük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

9. Bir torbada 4 kırmızı 2 sarı top vardır.

Bu torbadan bir top alındığında kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

10. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı doğal sayılar birer karta yazılıp torbaya atılıyor. Bu torbadan rastgele bir kart alınıyor.

Seçilen bu karttaki sayının 400 den küçük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

CEVAP ANAHTARI

Bölüm 24 : Mantık

Test 1	1-D	2-A	3-E	4-C	5-C	6-A	7-D	8-E	9-A	10-B	11-B	12-B
	13-A	14-D	15-E									
Test 2	1-D	2-D	3-A	4-E	5-B	6-D	7-A					
Test 3	1-C	2-C	3-E	4-C	5-E	6-C	7-B	8-E	9-D	10-B	11-E	12-E
	13-D	14-C										

Bölüm 25 : Kümeler

Test 1	1-C	2-B	3-B	4-C	5-C	6-B	7-C	8-C	9-E	10-D	11-D	12-C
	13-E	14-B	15-D	16-B								
Test 2	1-C	2-B	3-A	4-C	5-E	6-C	7-B	8-E	9-C	10-C	11-B	12-B
	13-C	14-B	15-A	16-D								
Test 3	1-A	2-C	3-A	4-E	5-C	6-B	7-D	8-C	9-E	10-C	11-B	12-E
	13-D	14-B	15-A	16-D	17-C	18-A	19-E	20-E	21-E	22-C		

Bölüm 26 : Kartezyen Çarpım

Test 1	1-D	2-A	3-B	4-C	5-E	6-D	7-B	8-A	9-C	10-E	11-D	12-A
	13-B	14-D										
Test 2	1-E	2-B	3-D	4-D	5-C	6-E	7-A	8-B	9-E	10-E	11-E	12-D
	13-A	14-E	15-E	16-B								
Test 3	1-B	2-E	3-C	4-C	5-E	6-A	7-B					

Bölüm 27 : Bağıntı

Test 1	1-E	2-D	3-A	4-C	5-A	6-B	7-D	8-B	9-C	10-A	11-E	12-B
	13-E	14-A	15-B	16-C								
Test 2	1-D	2-C	3-A	4-E	5-B	6-A	7-D	8-B				
Test 3	1-D	2-A	3-D	4-C	5-E	6-B	7-B	8-A	9-E	10-D	11-E	12-D
	13-C	14-B	15-D									

Bölüm 28 : Fonksiyonlar

Test 1	1-D	2-A	3-A	4-E	5-A	6-A	7-D	8-D	9-A	10-E	11-A	12-D
	13-A	14-B	15-E	16-B	17-E	18-C						
Test 2	1-E	2-E	3-C	4-A	5-E	6-A	7-A	8-D	9-A	10-D	11-D	12-D
	13-C	14-C										
Test 3	1-D	2-C	3-D	4-E	5-D	6-E	7-E	8-A	9-A	10-B	11-D	12-D

Bölüm 29 : İşlem

Test 1	1-E	2-D	3-D	4-A	5-A	6-A	7-C	8-C	9-B	10-C	11-C	12-C
	13-B	14-A	15-A	16-B								
Test 2	1-B	2-C	3-E	4-C	5-B	6-B	7-A	8-E	9-E	10-A	11-B	12-E
	13-A	14-A	15-D									
Test 3	1-B	2-D	3-A	4-E	5-C	6-D	7-C	8-E	9-E	10-D	11-A	12-C
	13-A											

Bölüm 30 : Modüler Aritmetik

Test 1	1-B	2-C	3-C	4-C	5-A	6-E	7-B	8-A	9-A	10-E	11-D	12-E
	13-C	14-B	15-D	16-D	17-E	18-E	19-D					
Test 2	1-A	2-D	3-C	4-A	5-C	6-C	7-D	8-A	9-C	10-D	11-C	12-C
	13-C	14-D	15-A	16-C	17-D	18-A						
Test 3	1-E	2-C	3-D	4-B	5-D	6-E	7-E	8-C				

Bölüm 31 : Permütasyon, Kombinasyon, Olasılık

Test 1	1-D	2-E	3-C	4-C	5-D	6-A	7-A	8-C	9-D	10-D	11-B	12-D
	13-C	14-C	15-A	16-B	17-B	18-E	19-E	20-A				
Test 2	1-C	2-C	3-D	4-E	5-B	6-D	7-A	8-D	9-D	10-E		

% 100 YGS

Matematik

Soru Bankası

Hüseyin TOBİ
Bekir TANFER
İbrahim TOKAR
Mehmet TÜRKKAN
Hüseyin KÖSE
Hüseyin TUNÇ
Mustafa KIRIKÇI
Ali ÇAKMAK
Alparslan ERDEL
Erman DEĞİRMENCİ

GÜVENDER