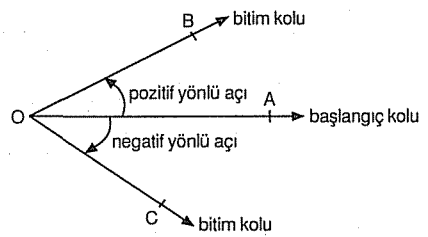
# 1. ÜNİTE: TRİGONOMETRİ

## TRİGONOMETRİ

1. **Yönlü Açılar:** Başlangıç kolundan itibaren saatin dönme yönünde alınan açıya **negatif açı**, saatin dönme yönünün tersi olan yönde alınan açıya ise **pozitif açı** denir.




2. **Açı Birimleri:** Çember yayının tamamını gören merkez açıya 360 derece, $2\pi$ radyan veya 400 grad denir. Buna göre,

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{dır.}$$

**Örnek :**

- $180° = \pi$ radyan = 200 grad
- $\frac{30}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$ olduğundan,

  $30° = \frac{\pi}{6}$ radyan
- $\frac{2\pi}{3}$ radyanın kaç derece olduğunu bulmak için,

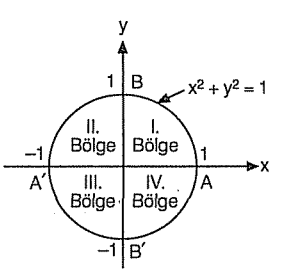
  $\pi$ radyan = 180° olduğundan $\pi$ yerine 180 yazılırsa,

  $\frac{2\pi}{3}$ radyan $= \frac{2.180°}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ radyan = 120° dir.

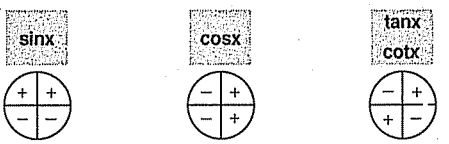
**Sonuç :**

Radyan cinsinden verilen bir açının derece cinsinden eşitini bulmak için, $\pi$ yerine 180 yazılmalıdır.

3. **Birim Çember:** Yarıçapı 1 birim olan merkezcil çemberdir.




**i) Trigonometrik Fonksiyonların Görüntülerinin Bölgelere Göre İşaretleri:**

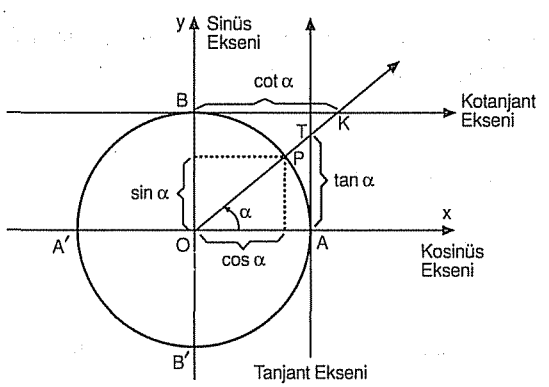



**Örnek :**

- 140° lik bir açının bitim kenarı II. bölgede olduğundan, sin140°, cos140°, tan140°, cot140° ifadelerinin işareti sırasıyla +, –, –, – ve
- $\frac{5\pi}{4}$ radyanlık bir açının bitim kenarı III. bölgede olduğundan,

  $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{4}$, $\cot\frac{5\pi}{4}$ ifadelerinin işareti sırasıyla –, –, +, + olur.

**ii) Trigonometrik Eksenler:**




Birim çembere; A noktasından çizilen teğet **Tanjant Ekseni,** B noktasından çizilen teğet de **Kotanjant Ekseni**'dir.

- $\alpha$ açısının bitim kenarının (OP ışınının) birim çemberi kestiği P noktasının; **apsisi** $\alpha$ açısının **kosinüs**ü (cos $\alpha$), **ordinatı** $\alpha$ açısının **sinüs**üdür. (sin $\alpha$)
- OP ışınının; tanjant eksenini kestiği noktanın (T noktasının) **ordinatı** $\alpha$ açısının **tanjantı** (tan $\alpha$), kotanjant eksenini kestiği noktanın (K noktasının) **apsisi** de $\alpha$ açısının **kotanjantı**dır. (cot $\alpha$)

  Buna göre,

  $P(x, y) \rightarrow x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha$

  $T(a, b) \rightarrow a = 1, \quad b = \tan\alpha$

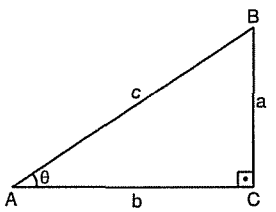
  $K(p, q) \rightarrow p = \cot\alpha, \quad q = 1$

**iii) Tanım aralıkları:**

- $\forall x \in IR$ için,
  $-1 \le \sin x \le 1$ ve $-1 \le \cos x \le 1$ dir.
- $\forall x \in IR - \left\{ \left( \frac{2k-1}{2} \right) . \pi \text{ ve } k \in Z \right\}$ için,
  $-\infty < \tan x < +\infty$ dur.
- $\forall x \in IR - \{ k\pi \text{ ve } k \in Z \}$ için,
  $-\infty < \cot x < +\infty$ dur.

**Uyarı 1 :** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$

**Uyarı 2 :** Bir diküçgende,




$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\theta = \frac{b}{c}$

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ $\quad \cot\theta = \frac{b}{a}$

**Sonuç:**
Bir açının trigonometrik oranlarından herhangi birisi biliniyorsa, diğerleri de dik üçgen yardımıyla bulunabilir.

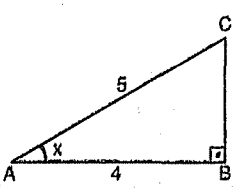
**Örnek :**
$90° < x < 180°$ olmak üzere,

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

**olduğuna göre, sin x + tan x toplamını bulalım.**

**Çözüm:**
x açısı II. bölgede olduğundan sin x pozitif, tan x ise negatiftir.

$\cos x = \frac{4}{5}$ olacak biçiminde bir dar açısı x olan şekildeki gibi bir diküçgen çizilirse, $|BC| = \sqrt{5^2-4^2} = 3$ bulunur.




Buna göre,

$$\sin x + \tan x = \frac{|BC|}{|AC|} + \left(-\frac{|BC|}{|AB|}\right)$$

$$= \frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{20} \text{ dir.}$$

**Uyarı 3 :**

i) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad$ ii) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

iii) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad$ iv) $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

**4. Bazı Özel Açıların Trigonometrik Değerleri:**

| θ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| sin θ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos θ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan θ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | tanımsız |
| cot θ | tanımsız | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

**Uyarı 4 :** Toplamları 90° olan iki açıdan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne eşittir. Aynı şekilde birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

**5. Esas Ölçü :**

$k \in Z$ ve $0° \le \theta < 360°$ olmak üzere, $\alpha = \theta + 360.k$ eşitliğini ya da $0 \le \theta < 2\pi$ olmak üzere, $\alpha = \theta + k.(2\pi)$ eşitliğini gerçekleyen θ açısı α nın **esas ölçüsü**dür.

**6. $(k.\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ Açısının Trigonometrik Oranlarının θ Açısı Türünden Yazılması:**

i) $\frac{\pi}{2}$ nin tek katlarında fonksiyonlar, ko-fonksiyonuna dönüştürülür. Ko - fonsiyonlar;

$\sin\theta \leftrightarrow \cos\theta$
$\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$
$\sec\theta \leftrightarrow \text{cosec}\,\theta$

biçimindedir.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ $\quad$ $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ $\quad$ $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$ $\quad$ $\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$

$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$ $\quad$ $\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$

**ii)** $\pi$ nin tam katlarında fonksiyonun cinsi değişmez.

| | |
|---|---|
| $\cos(-\theta) = \cos\theta$ | $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ |
| $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ | $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ |
| $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ | $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$ |
| $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ | $\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$ |

**Uyarı:**
Her iki durumda da verilen açı türleri için, eşitliğin iki yanındaki ifadelerin işaretinin aynı olup - olmadığı kontrol edilmelidir.

**Örnek:**

$\cos(-\frac{17\pi}{3})$, $\sin(\frac{51\pi}{4})$, $\tan(199°)$, $\cot(453°)$

**ifadelerinin işaretini sırasıyla bulalım.**

**Çözüm:**

$\frac{-17\pi}{3} = \frac{-18\pi+\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$, $\frac{51\pi}{4} = \frac{48\pi+3\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}$,

$453° \equiv 453° - 360° = 93°$ olduğundan,

$\cos(-\frac{17\pi}{3})$, $\sin(\frac{51\pi}{4})$, $\tan(199°)$, $\cot(453°)$

ifadelerinin işareti sırasıyla $+, +, +, -$ dir.

**Uyarı:**

Ölçüsü radyan cinsinden verilen açıların esas ölçüsü bulunurken, paydanın 2 katının tam katları atılır.

**Periyot:**

$n \in Z^+$ olmak üzere,

**i.** $\left.\begin{matrix} f(x) = \sin^n(ax+b) \\ g(x) = \cos^n(ax+b) \end{matrix}\right\}$ fonksiyonları için,

- n tek sayı ise $P = \frac{2\pi}{|a|}$,
- n çift sayı ise $P = \frac{\pi}{|a|}$ dır.

**ii.** $\left.\begin{matrix} f(x) = \tan^n(ax+b) \\ g(x) = \cot^n(ax+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = \frac{\pi}{|a|}$ dır.

**iii.** $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)$ ise,

$P = OKEK(P_1, P_2, P_3)$ tür.

**Örnek:**

$f(x) = 1 - 3\cos^2(1-2x) + \tan^3(3x+1)$

**fonksiyonunun esas peryodunu bulalım.**

**Çözüm:**

$\cos^2(1-2x)$ in peryodu : $\frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2} = 90°$,

$\tan^3(3x+1)$ in peryodu : $\frac{\pi}{3} = 60°$

olduğundan $f(x)$ in peryodu (T)

$T = OKEK(90°, 60°) = 180° = \pi$ dir.

**Trigonometrik Fonksiyonların Tersi:**

- $f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

**Örnek:**

$\sin 30° = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin(\frac{1}{2}) = 30°$,

$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$ tür.

- $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

**Örnek:**

$\cos 90° = 0 \Leftrightarrow \arccos 0 = 90°$,

$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$ dır.

- $f : R \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

**Örnek:**

$\tan 60° = \sqrt{3} \Leftrightarrow \arctan(\sqrt{3}) = 60°$,

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ dır.

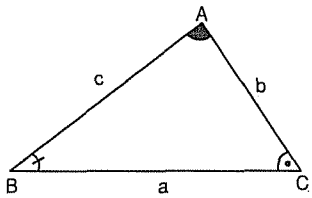
- $f : R \to (0, \pi)$, $y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$

**Örnek:**

$\cot 30° = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = 30°$,

$\operatorname{arccot}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3}$ tür.

**Kosinüs Teoremi:**




- Bir üçgenin iki kenarı ile bu iki kenar arasındaki açı biliniyorsa bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu,
- Bir üçgenin üç kenarının uzunluğu biliniyorsa bu üçgenin iç açılarının ölçüleri,
  Kosinüs Teoremi yardımıyla bulunabilir.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

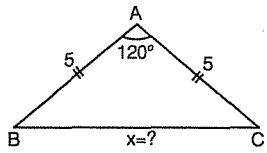
- $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ dir.

**Örnek :**

**Tepe açısı 120° olan bir ikizkenar üçgenin eş kenarlarının uzunluğu 5 cm olduğuna göre, bu üçgenin taban kenarının uzunluğunu bulalım.**

**Çözüm:**

Verilenlere uygun olarak çizilen şekildeki ABC üçgeninde Kosinüs Teoremini yazalım.



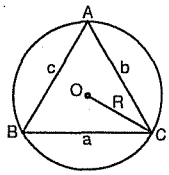

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\,.\,|AB|\,.\,|AC|\,.\,\cos\hat{A}$

$\Rightarrow x^2 = 5^2 + 5^2 - 2\,.\,5\,.\,5\,.\,\cos 120°$

$\Rightarrow x^2 = 50 - 50\,.\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad \left(\cos 120° = -\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x^2 = 75 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$ cm dir.

**Sinüs Teoremi:**




Bir üçgende; herhangi bir kenarın uzunluğunun, bu kenarın karşısındaki açının sinüsüne oranı sabittir ve bu oran üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir.

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2.R \text{ dir.}$$

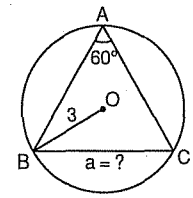
**Örnek :**

**Çevrel çemberin yarıçapı 3 cm ve A açısının ölçüsü 60° olan bir ABC üçgeninin, A açısının karşısındaki BC kenarının uzunluğunu bulalım.**

**Çözüm:**

R = 3 cm ve

$m(\hat{A}) = 60°$ ise




$\dfrac{|BC|}{\sin\hat{A}} = 2\,.\,R$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin 60°} = 2\,.\,3 \Rightarrow a = 2\,.\,3\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow a = 3\sqrt{3}$ cm dir.

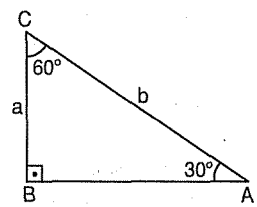
**Tanjant Teoremi :**

Bir ABC üçgeninde; A ve B açılarının karşısındaki kenarların uzunluğu sırasıyla a ve b olmak üzere,

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

**Şekildeki ABC diküçgeninde (30, 60, 90 üçgeni) hipotenüs uzunluğunun (b) |BC| = a türünden değerini bulalım.**




**Çözüm :**

Tanjant Teoremi'nden,

$$\frac{\tan\frac{B+A}{2}}{\tan\frac{B-A}{2}} = \frac{b+a}{b-a} \Rightarrow \frac{\tan\frac{90°+30°}{2}}{\tan\frac{90°-30°}{2}} = \frac{b+a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{b+a}{b-a}$$

$\Rightarrow 3(b-a) = b+a$

$\Rightarrow 3b - 3a = b + a$

$\Rightarrow b = 2a$ bulunur.

**Toplam - Fark Formülleri:**

- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$
- $\cot(a \pm b) = \dfrac{1}{\tan(a \pm b)}$

**Örnek :**

- $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° . \cos 30° + \cos 45° . \sin 30°$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- $\cos 140° . \cos 20° + \sin 140° . \sin 20°$

$= \cos(140° - 20°) = \cos 120°$

$= -\cos 60°$

$= -\dfrac{1}{2}$ dir.

**Örnek:**

$\tan(45° + x) = 5$

**olduğuna göre, tan x in değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\tan(45° + x) = 5 \Rightarrow \frac{\tan 45° + \tan x}{1 - \tan 45° . \tan x} = 5$$

$$\Rightarrow 1 + \tan x = 5 - 5\tan x$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

**Örnek:**

**cot 15° nin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = \frac{1}{\tan(45° - 30°)}$$

$$\Rightarrow \cot 15° = \frac{1 + \tan 45° . \tan 30°}{\tan 45° - \tan 30°}$$

$$= \frac{1 + 1 . \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} . \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \cot 15° = 2 + \sqrt{3}$ tür.

**Uyarı:**

$a, b \in R$ olmak üzere,

$f(x) = a.\sin x + b.\cos x$ fonksiyonunun alabileceği;

en büyük değer: $\sqrt{a^2+b^2}$,

en küçük değer: $-\sqrt{a^2+b^2}$ dir.

**Örnek:**

$f(x) = \sqrt{5}\cos x - 2\sin x$ fonksiyonunun alabileceği;

en büyük değer : $\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = 3$,

en küçük değer : $-\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = -3$ tür.

**Yarım Açı Formülleri:**

- $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

$\sin x . \cos x = \dfrac{1}{2} . \sin 2x$

**Örnek:**

$\sin 15° \cdot \cos 15° = \dfrac{1}{2} \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ tür.

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

**Örnek:**
**cos 15° nin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\cos 30° = 2.\cos^2 15° - 1$

$\Rightarrow 1 + \cos 30° = 2.\cos^2 15°$

$\Rightarrow \cos^2 15° = \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{2}}$

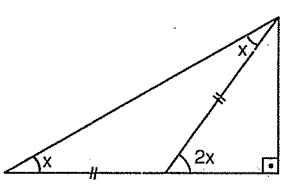
$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ dir.

- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

  $\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x}$

**Uyarı:**
Bir dar açının trigonometrik oranlarından herhangi birisi biliniyorken, bu açının yarısının trigonometrik oranları,




şeklinde bir diküçgen yardımıyla da bulunabilir.
Burada (2x) in dar açı olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

**Örnek :**

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ ve $\cos 2x = \frac{4}{5}$

**olduğuna göre, tan x in değerini bulalım.**

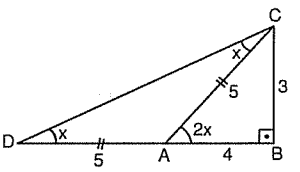
**Çözüm:**

$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan (2x dar açı)

tan x in değeri diküçgen yardımıyla bulunabilir. O halde,

$\cos 2x = \frac{4}{5} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ise

$|AB| = 4$, $|AC| = 5$ ve $|BC| = 3$ olur. Buna göre,




(2x açısını 180° ye tamamlayacak şekilde AB kenarının uzantısı, hipotenüsün uzunluğu kadar çizilir.)

$\tan x = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{3}{4+5} = \frac{1}{3}$ tür.

**Dönüşüm Formülleri:**

- $\sin A + \sin B = 2 . \sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$
- $\sin A - \sin B = 2 . \sin \frac{A-B}{2} . \cos \frac{A+B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2 . \cos \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2 . \sin \frac{A+B}{2} . \sin \frac{A-B}{2}$

**Örnek :**

- $\sin 75° - \sin 15° = 2 \sin \frac{75°-15°}{2} . \cos \frac{75°+15°}{2}$

  $= 2 \sin 30° \cos 45°$

  $= 2 . \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

- $\cos 75° - \cos 15° = -2 \sin \frac{75°+15°}{2} . \sin \frac{75°-15°}{2}$

  $= -2 \sin 45° \sin 30°$

  $= -2 . \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

**Örnek:**

$\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x}$

**işleminin sonucunu bulalım.**

**Çözüm:**

$\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x} = \frac{2.\sin 3x . \cos 2x}{2.\cos 3x . \cos 2x}$

$= \tan 3x$ olur.

**Ters Dönüşüm Formülleri:**

- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

**Örnek :**

- $\sin 15° \cdot \cos 75° = \frac{1}{2}[\sin(15°+75°) + \sin(15°-75°)]$

$$= \frac{1}{2}[\sin 90° + \sin(-60°)]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

**Örnek :**

$\cos 10° = x$ olduğuna göre,

$\cos 65° \cdot \cos 55°$

**çarpımının değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\cos 65° \cdot \cos 55° = \frac{1}{2}[\cos(65°+55°) + \cos(65°-55°)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 10°)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + x\right)$$

$$= \frac{2x-1}{4} \quad \text{olur.}$$

**Örnek:**

$\sin 20° - \sin 80° + \sin 140°$

**işleminin sonucunu bulalım.**

**Çözüm:**

$\sin 20° - \sin 80° + \sin 140°$

$= 2 \cdot \sin(-30°) \cdot \cos 50° + \sin(90° + 50°)$

$= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 50° + \cos 50°$

$= -\cos 50° + \cos 50° = 0$ dır.

**Trigonometrik Denklemlerin Çözümü:**

$k \in Z$ olmak üzere,

- $\sin f(x) = \sin\alpha \Rightarrow f(x) = \alpha + k.2\pi$ veya $f(x) = \pi - \alpha + k.2\pi$
- $\cos f(x) = \cos\alpha \Rightarrow f(x) = \alpha + k.2\pi$ veya $f(x) = -\alpha + k.2\pi$
- $\tan f(x) = \tan\alpha \Rightarrow f(x) = \alpha + k.\pi$
- $\cot f(x) = \cot\alpha \Rightarrow f(x) = \alpha + k.\pi$

şeklinde trigonometrik denklemlerin çözümü yapılır.

**Örnek :**

$$\sin(3x - 15°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm:**

$\sin(3x-15°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ise, $k \in Z$ olmak üzere,

$\Rightarrow \sin(3x-15°) = \sin(60° + k.360°) = \sin(120° + k.360°)$

$\Rightarrow 3x - 15 = 60° + k.360°$ veya $3x - 15° = 120° + k.360°$

$\Rightarrow 3x = 75° + k.360°$ $\Rightarrow 3x = 135° + k.360°$

$\Rightarrow x_1 = 25° + k.120°$ $\Rightarrow x_2 = 45° + k.120°$

olur. Dolayısıyla çözüm kümesi.

$Ç = \{x \mid x = 25° + k.120° \vee x = 45° + k.120°, k \in Z\}$ dir.

**Örnek :**

**$\cot(4x - 35°) = 1$ denkleminin $(-45°, 90°)$ aralığındaki köklerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\cot(4x - 35°) = 1$ ise $k \in Z$ olmak üzere,

$\cot(4x - 35°) = \cot(45° + k.180°)$

$\Rightarrow 4x - 35° = 45° + k.180° \Rightarrow 4x = 80° + k.180°$

$\Rightarrow x = 20° + k.45°$ olur.

$k = -1$ için, $x_1 = 20° - 45° \Rightarrow x_1 = -25°$,

$k = 0$ için, $x_2 = 20°$,

$k = 1$ için, $x_3 = 20° + 45° \Rightarrow x_3 = 65°$,

$k = 2$ için, $x = 110° \notin (-45°, 90°)$

Buna göre, $Ç = \{-25, 20°, 65°\}$ olur.

# TRİGONOMETRİ

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $x = \sin 279°$ , $y = \cos(-182°)$ , $z = \tan(-1180°)$

**olduğuna göre; x, y, z arasındaki sıralama aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x > y > z$ B) $x > z > y$ C) $y > x > z$

D) $y > z > x$ E) $z > x > y$

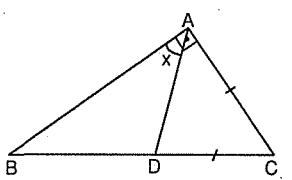
**2.** Yandaki diküçgende,

$[AB] \perp [AC]$

$|AC| = |DC|$

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{5}{12}$

$m(\widehat{BAD}) = x$




**olduğuna göre, cos 2x kaçtır?**

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{12}{13}$

**3.** $x + y = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\tan x = \frac{1}{2}$

**olduğuna göre, cot (2x + y) ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

**4.** $\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta - 1} + \frac{\cos^2\theta}{\cot\theta - 1}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\tan 2\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\frac{\sin 2\theta}{2}$ D) $\tan\frac{\theta}{2}$ E) $\sin\frac{\theta}{2}$

**5.** $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ olduğuna göre,

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - \tan(\pi - \alpha)$

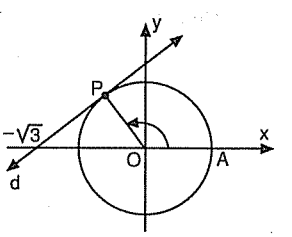
**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{7}{12}$ B) $-1$ C) $\frac{7}{12}$ D) 1 E) $\frac{17}{13}$

**6.** d doğrusu, şekildeki birim çembere P noktasında teğettir.

**Buna göre,**

**$\text{cosec}(\widehat{AOP})$ kaçtır?**



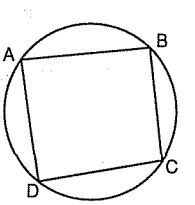

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

**7.** Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde,

$\sin A + \tan B = \frac{2}{3}$

olduğuna göre,

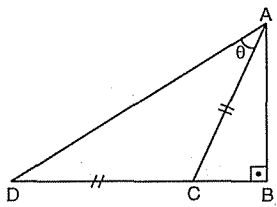
**tan D – sin C farkı kaçtır?**




A) $-\frac{7}{12}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{12}$ D) 1 E) $\frac{17}{13}$

**1-E** **2-D** **3-C** **4-C** **5-A** **6-E** **7-B**

**8.** ABD diküçgeninde,
$[AB] \perp [BD]$
$|AC| = |DC|$
$4|BC| = 3|AB|$
$m(\widehat{DAC}) = \theta$
*olduğuna göre,*
**cot θ kaçtır?**




A) 4 B) 3 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**9.** $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-4$ B) $-2$ C) 1 D) 2 E) 4

**10.** $6x = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\frac{\cos 5x + \cos 9x}{\cos 5x \cdot \sin 8x}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**11.** $\frac{\sin^2 40^\circ - \sin^2 10^\circ}{\cos 40^\circ}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

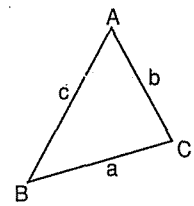
**12.** $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \cos 80^\circ$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 0 E) $-\frac{1}{4}$

**13.** Şekildeki ABC üçgeninin kenar uzunlukları a , b , c arasında,

$\frac{a-b}{c} = \frac{c-b}{a+b}$

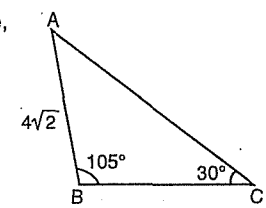



**bağıntısı olduğuna göre, A açısının ölçüsü kaç derecedir?**

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

**14.** Şekildeki ABC üçgeninde,

$|AB| = 4\sqrt{2}$ cm
$m(\widehat{ABC}) = 105^\circ$
$m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$



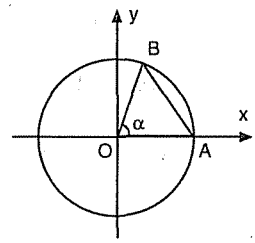

**olduğuna göre, |BC| kaç cm dir?**

A) 8 B) 7 C) $6\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 5

**8-C** **9-E** **10-A** **11-D**

**12-C** **13-D** **14-A**

**15.** A ve B, şekildeki birim çember üzerinde ve $A \in Ox$ eksenidir.




$m(\widehat{AOB}) = \alpha$

$|AB| = \cos\alpha$

olduğuna göre,
**|AB| kaç birimdir?**

A) $\sqrt{3}+2$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $2-\sqrt{3}$

**16.** $f(x) = 3 + \sin 7x \,.\, \sin 3x$

**fonksiyonunun esas peryodu kaç radyandır?**

A) $\pi$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

**17.** $0 < x < 2\pi$ olmak üzere,

$$\cos x = 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$$

**denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

**18.** $$\frac{1}{1+\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2x} = \frac{8}{3}$$

**denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 15° B) 25° C) 30° D) 45° E) 50°

**19.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{1}{3}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

**20.** $3\cos x - 4\sin x$

**ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**21.** $$T = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$$

**olduğuna göre, T nin değeri kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

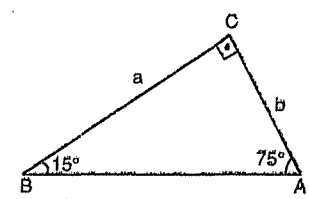
**22.** ABC üçgeninde,

$|BC| = a$

$|AC| = b$

$m(\widehat{A}) = 75°$

$m(\widehat{B}) = 15°$




**olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $1+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $2-\sqrt{3}$

**15-D** **16-A** **17-B** **18-A** **19-E** **20-C** **21-E** **22-D**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $x = \sin 279° = \sin(270° + 9°) = -\cos 9°$

$y = \cos(-182°) = \cos(180° + 2) = -\cos 2°$

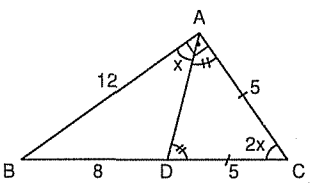
$z = \tan(-1180°) = \tan(-1080° - 100°)$

$= -\tan 100° > 0$

olduğundan, $z > x > y$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** Problemde verilenlere uygun değerler, şekilde yerine yazılırsa,




ACD ikizkenar üçgen olduğundan,

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CDA}) = 90° - x$ ve

$m(\widehat{C}) = 2x$ olur. O halde,

BAC diküçgeninde,

$\cos 2x = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{5}{13}$ tür.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $\cot(2x + y) = \cot[(x + y) + x]$

$= \cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x = -\frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta - 1} + \frac{\cos^2\theta}{\cot\theta - 1}$

$= \frac{\sin^2\theta \cdot \cot\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta \cdot \tan\theta - \cos^2\theta}{\underbrace{\tan\theta \cdot \cot\theta}_{1} - \tan\theta - \cot\theta + 1}$

$= \frac{\sin^2\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos^2\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{2 - \underbrace{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}_{(\sin\theta)} - \underbrace{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}_{(\cos\theta)}}$

$= \frac{2\sin\theta \cdot \cos\theta - 1}{\frac{2\sin\theta \cdot \cos\theta - 1}{\sin\theta \cdot \cos\theta}} = \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - \tan(\pi - \alpha)$

$= \cos\alpha + (-\cot\alpha) + (-\cos\alpha) - (-\tan\alpha)$

$= \tan\alpha - \cot\alpha = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{7}{12}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

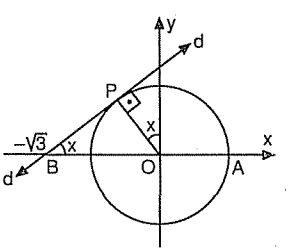
**6.** Yandaki şekle göre,

$|OP| = 1$ birim,

$|OB| = \sqrt{3}$ birim

olduğundan,

$|PB| = \sqrt{2}$ birimdir.




$m(\widehat{AOP}) = (90° + x)$ olduğundan,

$\text{cosec}(\widehat{AOP}) = \text{cosec}(90° + x) = \sec x$ olur.

BPO diküçgeninde,

$\sec x = \frac{|OB|}{|PB|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**7.** Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünler olduğundan,

$\widehat{m(A)} + \widehat{m(C)} = 180° \Rightarrow \widehat{m(C)} = 180° - \widehat{m(A)}$

$\widehat{m(B)} + \widehat{m(D)} = 180° \Rightarrow \widehat{m(D)} = 180° - \widehat{m(B)}$ olduğundan

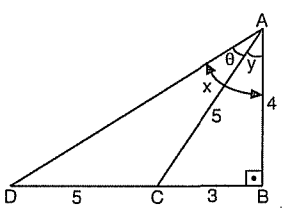
$\tan D - \sin C = \tan(180° - B) - \sin(180° - A)$

$= -\tan B - \sin A$

$= -(\tan B + \sin A) = -\frac{2}{3}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**8.** Problemde verilenlere uygun değerler, şekilde yerine yazılır ve




$\widehat{m(DAB)} = x$ ve

$\widehat{m(CAB)} = y$ denilirse

$\theta = x - y$ olur.

Buna göre,

$\cot\theta = \cot(x - y)$

$= \frac{1}{\tan(x-y)} = \frac{1 + \tan x \cdot \tan y}{\tan x - \tan y}$

$= \frac{1 + \frac{8}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2 - \frac{3}{4}} = 2$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**9.** Verilen ifadede $\sqrt{3}$ yerine $\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$ yazılırsa,

$\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°} = \frac{\sin 60°}{\cos 60° \cdot \sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°}$

$= \frac{\overbrace{\sin 60° \cdot \cos 20° - \cos 60° \cdot \sin 20°}^{\sin(60°-20°) = \sin 40°}}{\cos 60° \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°}$

$= \frac{2.\sin 20° \cdot \cos 20°}{\frac{1}{2} \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°} = 4$ tür.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**10.** $\frac{\cos 5x + \cos 9x}{\cos 5x \cdot \sin 8x} = \frac{2\cos\frac{5x+9x}{2} \cdot \cos\frac{9x-5x}{2}}{\cos 5x \cdot \sin(6x+2x)}$

$5x + 7x = 12x = \pi$ olduğundan, $\cos 5x = -\cos 7x$ değeri yerine yazılırsa,

$= \frac{2\cos 7x \cdot \cos 2x}{-\cos 7x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + 2x)}$

$= \frac{-2 \cdot \cos 2x}{\cos 2x} = -2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $\frac{\sin^2 40° - \sin^2 10°}{\cos 40°}$

$= \frac{(\sin 40° - \sin 10°)(\sin 40° + \sin 10°)}{\cos 40°}$

$\sin 40° - \sin 10° = 2\sin\frac{40°-10°}{2} \cdot \cos\frac{40°+10°}{2}$

$= 2\sin 15° \cdot \cos 25°$

$\sin 40° + \sin 10° = 2\sin\frac{40°+10°}{2} \cdot \cos\frac{40°-10°}{2}$

$= 2\sin 25° \cdot \cos 15°$

değerleri yerine yazılırsa,

$= \frac{2\sin 15° \cdot \cos 25° \cdot 2\sin 25° \cdot \cos 15°}{\cos 40°}$

$= \frac{\sin 30° \cdot \sin 50°}{\cos 40°} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**12.** $\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \frac{1}{2}\cos 80^\circ$

$= \frac{1}{2}[\sin(20^\circ + 10^\circ) + \sin(20^\circ - 10^\circ)] - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 80^\circ}_{\sin 10^\circ}$

$= \frac{1}{2}\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\sin 10^\circ - \frac{1}{2}\sin 10^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**13.** $\frac{a-b}{c} = \frac{c-b}{a+b}$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = c(c-b)$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - bc$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ... (1)

ABC üçgeninde Kosinüs Teoremi yazılırsa,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$ ... (2)

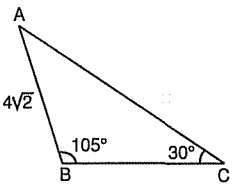
(1) ve (2) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$0 = -bc + 2bc\cos A \Rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 60^\circ$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** ABC üçgeninde,




$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$

$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 180^\circ - 105^\circ - 30^\circ$

$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 45^\circ$ dir.

Sinüs Teoremi yazılırsa,

$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C} \Rightarrow \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow |BC| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow |BC| = 8$ cm dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** Birim çemberin yarıçapı 1 birim olduğundan,

$|OA| = |OB| = 1$ birimdir.

AOB üçgeninde Kosinüs Teoremi yazılırsa,

$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,.\,|OA|\,.\,|OB|\,.\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1^2 + 1^2 - 2\,.\,1\,.\,1\,.\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\,.\,1\,.\,(-2)}}{2}$

$\alpha$ dar açı olduğundan $\cos\alpha > 0$ dır.

O halde, $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**16.** $\sin 7x \cdot \sin 3x = -\frac{1}{2}.[\cos(7x+3x) - \cos(7x-3x)]$ olduğundan,

$f(x) = 3 + \sin 7x \cdot \sin 3x$

$\Rightarrow f(x) = 3 - \frac{1}{2}.\cos 10x + \frac{1}{2} \cdot \cos 4x$ ve

$\cos 10x$ in peryodu : $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 36°$,

$\cos 4x$ in peryodu : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 90°$

olduğundan f(x) in peryodu (T)

$T = OKEK(36°, 90°) = 180° = \pi$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17. 1. Yol :**

$\cos x = 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$ eşitliğinde

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ yerine $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°}$ yazılırsa,

$\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x = 1$

$\Rightarrow \cos x + \frac{\sin 30°}{\cos 30°} \cdot \sin x = 1$

$\Rightarrow \cos x \cos 30° + \sin x \sin 30° = \cos 30°$

$\Rightarrow \cos(x - 30°) = \cos 30°$

$\Rightarrow x - 30° = 30° + k \cdot 360° \quad (k \in Z)$

$x = 60° + k \cdot 360°$

$k = 0$ için $x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$ veya

$x - 30° = -30 + k \cdot 360° \quad (k \in Z)$

$x = k \cdot 360°$

**2. Yol :**

$\cos x = 1 - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$

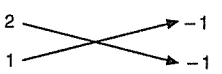
$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{3}} = 1 - \cos x$

eşitliğin iki tarafının karesi alınırsa

$\frac{\sin^2 x}{3} = 1 + \cos^2 x - 2\cos x$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x = 3 + 3\cos^2 x - 6\cos x$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$




$(2\cos x - 1) \cdot (\cos x - 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$ veya $\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}$ veya $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = \pi$ dir.

eşitliğin karesi alınarak çözüm yapıldığından, bulunan bu değer denklemde yerine yazılırsa denklemi sağladığı görülür. $x = \pi$ değeri ise denklemi sağlamaz.

**3. Yol :**

$\frac{\sin x}{\sqrt{3}} = 1 - \cos x$

eşitliğinde yarım açı formülü uygulanırsa,

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3}.[1 - (1 - 2\sin^2\frac{x}{2})]$

$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin\frac{x}{2} = 0$ veya $\cot\frac{x}{2} = \sqrt{3} \quad (\sin\frac{x}{2} \neq 0)$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in Z)$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.** $\frac{1}{1+\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2x} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \frac{1-\sin 2x+1+\sin 2x}{(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{\underbrace{1-\sin^2 2x}_{\cos^2 2x}} = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow |\cos 2x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k \in Z$ olmak üzere,

$2x = 30° + k \cdot 360°$ $\quad$ $2x = -30° + k \cdot 360°$

$\Rightarrow x_1 = 15° + k \cdot 180°$ $\quad$ $\Rightarrow x_2 = -15° + k \cdot 180°$

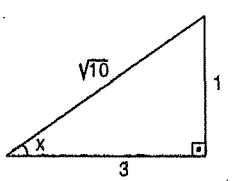
$2x = 150° + k \cdot 360°$ $\quad$ $2x = -150° + k \cdot 360°$

$\Rightarrow x_3 = 75° + k \cdot 180°$ $\quad$ $\Rightarrow x_4 = -75° + k \cdot 180°$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**19.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{1}{3}\right)$ ifadesinde, $\arctan\frac{1}{3} = x$

denilirse, $\tan x = \frac{1}{3}$ olur.




$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{1}{3}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= 2 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{5}$ tir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**20.** $3\cos x - 4\sin x = 3\left(\cos x - \frac{4}{3}\sin x\right)$ eşitliğinde

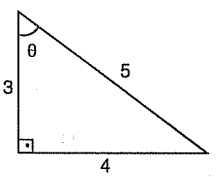
$\frac{4}{3} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ denilirse,

$= 3 \cdot \left(\cos x - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \sin x\right)$

$= 3 \cdot \frac{\overbrace{\cos\theta\cos x - \sin\theta\sin x}^{\cos(\theta+x)}}{\cos\theta}$

$= 3 \cdot \frac{\cos(\theta+x)}{\frac{3}{5}}$

$= 5 \cdot \cos(\theta+x)$




elde edilir. $\cos(\theta + x)$ in alabileceği en büyük değer 1 olduğundan, $5.\cos(\theta + x)$ in en büyük değeri $5.1 = 5$ tir. O halde, $3\cos x - 4\sin x$ ifadesinin en büyük değeri 5 tir.

(Yukarıdaki çözüm metoduyla, a ve b reel sayılar olmak üzere, $f(x) = a\cos x + b\sin x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer $\sqrt{a^2+b^2}$, en küçük değer ise $-\sqrt{a^2+b^2}$ şeklinde pratik olarak hesaplanabilir. Bu kurala göre, f(x) in en büyük değeri,

$\sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ tir.)

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**21. 1. Yol :**

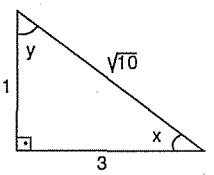
$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} = y \Leftrightarrow \sin y = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

olduğundan, x ve y açıları için uygun bir diküçgen çizelim.

Yandaki şekilden

$$T = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$$




$$T = x + y = \frac{\pi}{2}$$

olarak bulunur.

**2. Yol :**

$$\underbrace{\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}}_{x} + \underbrace{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}}_{y} = T$$

denilir ve iki tarafın sinüsü alınırsa,

$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin T$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \sin T$$

$$\Rightarrow 1 = \sin T \Rightarrow T = x + y = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**22.** $|BC| = a$, $|AC| = b$, $m(\widehat{A}) = 75°$, $m(\widehat{B}) = 15°$ veriliyor.

ABC üçgeninde Tanjant Teoremi yazılırsa,

$$\frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{\tan \frac{75° + 15°}{2}}{\tan \frac{75° - 15°}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3} - b\sqrt{3} = a + b$$

$$\Rightarrow a(\sqrt{3} - 1) = b(\sqrt{3} + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{2}$$

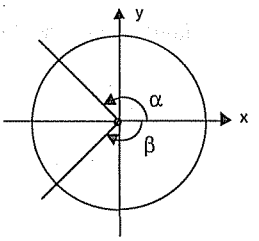
$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** Şekildeki birim çemberde verilenlere göre,




cos (– α)
tan (– β)
cos (α + β)
sin (π + α)

**ifadelerinin işareti sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –, –, –, –  B) –, +, +, –  C) +, –, +, –

D) –, –, +, –  E) +, +, –, –

**2.** $$\frac{\sin(90° - \theta) - \cos(180° - \theta)}{\tan(270° + \theta) + \cot(360° - \theta)}$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1  B) – 1  C) sec θ  D) sin θ  E) – sin θ

**3.** $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ olmak üzere,

$$a = \cos\left(\frac{23\pi}{4} - x\right)$$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 0$  B) $-\frac{1}{2} < a < 0$

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le a \le -\frac{1}{2}$  D) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$

E) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le a \le -\frac{1}{3}$

**4.** a = tan 820°, b = cos 1625°
c = sin 700°, d = tan (– 600°)

**olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?**

A) a > b > c > d  B) b > c > d > a

C) d > c > b > a  D) c > b > d > a

E) c > a > b > d

**5.** sin (π + x)

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  B) sin (π – x)  C) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

D) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  E) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

**6.** $$\frac{7 + 5\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) cos 2x  B) 6  C) 1

D) 1 + cos x  E) tan x

**1-D** **2-E** **3-D** **4-D** **5-C** **6-B**

**7.** $0 < x < \frac{\pi}{8}$ olmak üzere,

$$\tan 4x = \frac{3}{4}$$

**olduğuna göre, $\sin^2 2x$ kaçtır?**

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{10}$

**8.** $\tan^2 \frac{\pi}{8} - \cot^2 \frac{\pi}{8}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$

D) $-4\sqrt{2}$ E) $-2\sqrt{2}$

**9.** $$\frac{(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

**10.** $$\frac{\sin^2 2x - 4 . \sin^2 x}{(1 + \cos 2x)^2}$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\sin^2 x$ B) $2 \sin x$ C) $2 \cos x$

D) $-\tan^4 x$ E) $\sin^2 x$

**11.** $\tan 35° = m$

**olduğuna göre, tan 20° nin m türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1 - m^2}{m}$ B) $\frac{1 + m^2}{m}$ C) $\frac{1 - m^2}{2m}$

D) $\frac{1 + m^2}{2m}$ E) $\frac{m^2 - 1}{2m + 1}$

**12.** $$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sec x}$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) tan x B) sin x C) cos x

D) sec x E) cot x

**7-E** **8-D** **9-B**

**10-D** **11-C** **12-B**

**13.** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmak üzere,

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{3}$$

**olduğuna göre, sin 2x kaçtır?**

A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

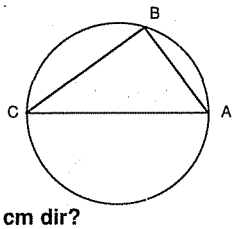
D) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

**14.** Şekilde ABC üçgeni ve çevrel çemberi verilmiştir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})$

$|AC| = 6$ cm

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{3}$




**olduğuna göre, |BC| kaç cm dir?**

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 5

D) $5\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

**15.** $\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

**16.** $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{(\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)}$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\sin x \cdot \cos x$ B) $\sin 2x$ C) $-\sin 2x$

D) $\sin x \cdot \cos x$ E) $\cos 2x$

**17.** $\left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) - \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{8}\right)$

**ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\cos \frac{\pi}{12}$ B) $\sin \frac{\pi}{8}$ C) $\cos \frac{\pi}{8}$

D) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

**18.** $\frac{1}{\sin 144^\circ} + \frac{1}{\cos 162^\circ}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\tan 18^\circ$ B) $\cot 18^\circ$ C) 1

D) $2 \cot 18^\circ$ E) $2 \tan 18^\circ$

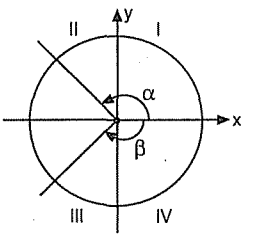
**13-D** **14-B** **15-A**

**16-A** **17-D** **18-E**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** Şekilde verilenlere göre;
(–α) III. bölgede,
(–β) II. bölgede,
(α+β) I. ya da IV. bölgede,
(π+α) IV. bölgededir.
Buna göre,
cos(–α), tan(–β), cos(α+β),
sin(π+α) ifadelerinin işareti
sırasıyla –, –, +, – olur.




**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $$\frac{\sin(90^\circ-\theta)-\cos(180^\circ-\theta)}{\tan(270^\circ+\theta)+\cot(360^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta+\cos\theta}{-\cot\theta-\cot\theta}=\frac{2\cos\theta}{-2\,.\,\cot\theta}=-\sin\theta$$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $a=\cos\left(\frac{23\pi}{4}-x\right)$

$=\cos\left(\frac{16\pi+7\pi}{4}-x\right)$

$=\cos\left(4\pi+\frac{7\pi}{4}-x\right)$

$=\cos\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$

$x=\frac{3\pi}{2}$ alınırsa $a=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{7\pi}{4}$ alınırsa $a=\cos0=1$ bulunur.

Dolayısıyla, $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**4.** $a=\tan820^\circ=\tan(2.360^\circ+100^\circ)=\tan100^\circ$
$b=\cos1625^\circ=\cos(4.360^\circ+185^\circ)=\cos185^\circ$
$c=\sin700^\circ=\sin(360^\circ+340^\circ)=\sin340^\circ$
$d=\tan(-600^\circ)=-\tan(360^\circ+240^\circ)=-\tan240^\circ$ dir.
Buradan; $c>b>d>a$ olduğu görülür.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $\sin(\pi+x)=-\sin x$ olduğundan,

A) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

B) $\sin(\pi-x)=\sin x$

C) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

D) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

E) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** $$\frac{7+5\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x+2\cos^2x}$$

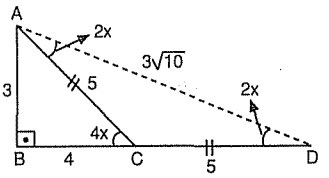
$$=\frac{7+5\cos^2x-(1-\cos^2x)}{1-\cos^2x+2\cos^2x}$$

$$=\frac{6+6\cos^2x}{1+\cos^2x}=\frac{6\,.\,(1+\cos^2x)}{1+\cos^2x}=6$$ dır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** $\tan 4x = \frac{3}{4}$ ve $0 < 4x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan,

diküçgen yardımıyla,




$$\sin 2x = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{10}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** $\tan^2 \frac{\pi}{8} - \cot^2 \frac{\pi}{8}$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{8}}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{\sin^4 \frac{\pi}{8} - \cos^4 \frac{\pi}{8}}{\cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{(\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}) \cdot \overbrace{(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8})}^{1}}{\frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\cos \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = -4\sqrt{2}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $$\frac{(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} - 2\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}}{-\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ olduğundan,

$$\frac{(2.\sin x.\cos x)^2 - 4.\sin^2 x}{(1 + \cos 2x)^2} = \frac{4\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^2 x}{(1 + 2\cos^2 x - 1)^2}$$

$$= \frac{4\sin^2 x \cdot (\cos^2 x - 1)}{(2\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{4\sin^2 x \cdot (\cos^2 x - 1)}{4 \cdot \cos^4 x}$$

$$= \frac{\cancel{4}\sin^2 x \cdot (-\sin^2 x)}{\cancel{4} \cdot \cos^4 x}$$

$$= \frac{-\sin^4 x}{\cos^4 x} = -\tan^4 x$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**11.** $\tan 35° = m$

$\tan 20° = \cot 70°$

$= \dfrac{1}{\tan 70°}$

$= \dfrac{1 - \tan^2 35°}{2\tan 35°}$

$= \dfrac{1 - m^2}{2m}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{1}{\sec x}$

$= \dfrac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2\sin x \cdot \cos x} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\cos x}}$

$= \dfrac{2 \cdot \sin^2 x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} \cdot \cos x = \sin x$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

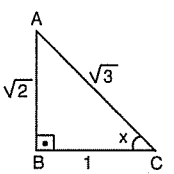
**13.** $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 3 \cdot \tan x - 3 \cdot \cot x = \tan x + \cot x$

$\Rightarrow 2 \cdot \tan x = 4 \cdot \cot x$

$\Rightarrow \tan x = 2 \cdot \dfrac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x = 2$

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ olduğundan, $\tan x = -\sqrt{2}$ dir.




$\sin 2x = 2.\sin x \cdot \cos x$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

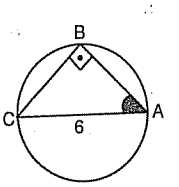
$= \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ tür.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ve

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})$

$\Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})$




olduğuna göre, $m(\widehat{B}) = 90°$ dir.

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{|AB|}{6} \Rightarrow |AB| = 2$ bulunur.

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$\Rightarrow 6^2 = 2^2 + |BC|^2$

$\Rightarrow |BC| = 4\sqrt{2}$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** $\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$

$= \frac{\cos 3x \cdot \sin x - \sin 3x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \sin x}$

$= \frac{\sin(x - 3x)}{\cos x \cdot \sin x}$

$= \frac{\sin(-2x)}{\cos x \cdot \sin x}$

$= \frac{-2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \sin x} = -2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**16.** $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{(\sin x + \cos x - 1) \cdot (\sin x + \cos x + 1)}$

$= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$

$= \frac{\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (\cos^2 x - 1)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2.\sin x \cdot \cos x - 1}$

$= \frac{\sin^2 x \cdot (-\cos^2 x) + \cos^2 x \cdot (-\sin^2 x)}{1 + 2.\sin x \cdot \cos x - 1}$

$= \frac{-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2.\sin x \cdot \cos x} = -\sin x \cdot \cos x$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17.** $(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{8}) - (\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{8})$

$= \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$

$= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} - (\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8})$

$= \cos(2.\frac{\pi}{12}) - \cos(2.\frac{\pi}{8})$

$= \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**18.** $\frac{1}{\sin 144°} + \frac{1}{\cos 162°} = \frac{\cos 162° + \sin 144°}{\sin 144° \cdot \cos 162°}$

$= \frac{\sin 144° - \sin 72°}{\sin 144° \cdot (-\sin 72°)}$

$= \frac{2.\sin 36° \cdot \cos 108°}{\sin 36° \cdot (-\cos 18°)}$

$= \frac{2.\sin 18°}{\cos 18°}$

$= 2.\tan 18°$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 3 (Çözümlü)

**1.** $\dfrac{\sin 8° + \sin 20° + \sin 32°}{\sin 58° + \sin 70° + \sin 82°}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) tan 20° B) cot 20° C) tan 10° D) cot 10° E) 1

**2.** $\dfrac{\sin 70°.\sin 85° - \sin 75°.\sin 80°}{\sin^2 5°}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) cos 5° B) sin 5° C) 2 cos 5°

D) $-2\sin 5°$ E) $-2\cos 5°$

**3.** $\dfrac{\tan^2 A - \tan^2 B}{1 - \tan^2 A \,.\, \tan^2 B}$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) tan (A + B) B) tan (A – B) C) $\tan^2$ (A – B)

D) $\tan^2$ (A + B) E) tan (A + B). tan (A – B)

**4.** Bir ABC üçgeninin a, b ve c kenarları arasında,

$$\frac{b-c}{a+c} = \frac{a}{b+c}$$

**bağıntısı olduğuna göre, cos B nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

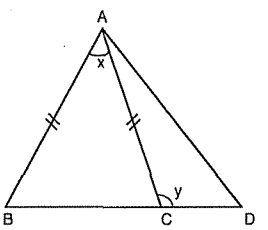
A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

**5.** $\dfrac{1}{\sin 70°} - 4 \,.\, \sin 50°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

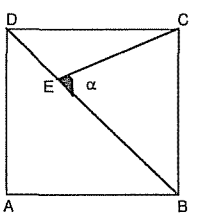
**6.** Yandaki ABD üçgeninde,
C ∈ [BD]
|AB| = |AC|
$m(\widehat{BAC}) = x$
$m(\widehat{DCA}) = y$
$\sin \dfrac{x}{2} = 0{,}6$




**olduğuna göre, cot y kaçtır?**

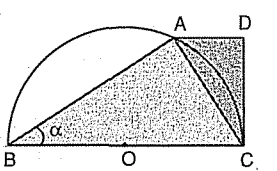
A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $-\dfrac{5}{2}$ D) $-\dfrac{3}{2}$ E) $-\dfrac{3}{4}$

**7.** Yandaki ABCD karesinde,
|BD| = 6 . |DE|
$m(\widehat{BEC}) = \alpha$
olduğuna göre,
**tan α kaçtır?**




A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{6}$

**8.** Şekildeki ABCD dörtgeninin üç köşesi O merkezli yarım çember üzerindedir.



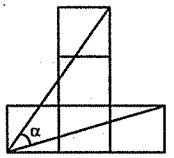

|BC| = 1 cm
[AD] // [BC]
[BC] ⊥ [CD]

**olduğuna göre,** $\dfrac{A(ACD)}{A(ABC)}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) sinα B) $\sin^2\alpha$ C) $\cos^2\alpha$ D) $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$ E) $\dfrac{1}{2}$

**1-A** **2-E** **3-E** **4-B** **5-A** **6-E** **7-A** **8-B**

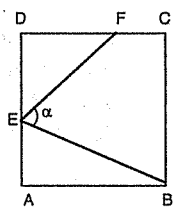
**9.** **Beş tane özdeş kareden oluşan yandaki şekilde tan $\alpha$ nın değeri kaçtır?**




A) $\frac{15}{16}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

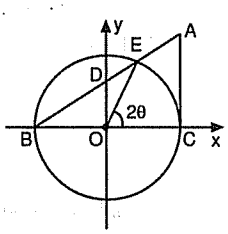
**10.** Yandaki şekilde ABCD karedir.
$|ED| = |DF| = 2|FC|$
$m(\widehat{BEF}) = \alpha$

**olduğuna göre, sin $\alpha$ kaçtır?**



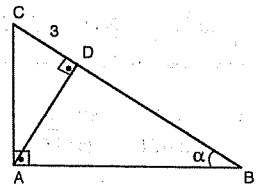

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**11.** ABC bir üçgen ve [AC], şekildeki birim çembere C noktasında teğettir.
$[AB] \cap Oy = \{ D \}$
**olduğuna göre, |AD| nin $\theta$ türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**




A) cos $\theta$ B) sec $\theta$ C) csc $\theta$ D) tan $\theta$ E) sin $\theta$

**12.** BAC diküçgeninde,
$[AB] \perp [AC]$
$[AD] \perp [BC]$
$|CD| = 3$
$m(\widehat{B}) = \alpha$




**olduğuna göre, |AB| aşağıdakilerden hangisidir?**

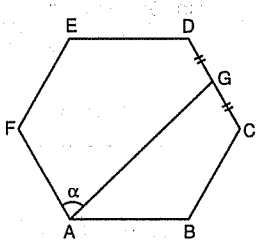
A) $\frac{\cot\alpha}{3}$ B) $\frac{3\cot\alpha}{\sin\alpha}$ C) $\frac{3\tan\alpha}{\cos\alpha}$

D) $3\cot^2\alpha$ E) $3\tan^2\alpha$

**13.** ABCDEF düzgün altıgendir.

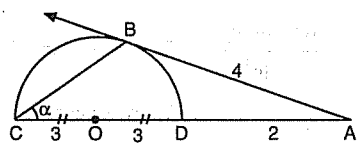
$|DG| = |GC|$

**olduğuna göre, tan $\alpha$ kaçtır?**




A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**14.**

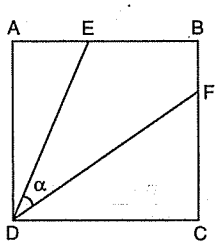



**[AB, şekildeki O merkezli yarım çembere B noktasında teğet olduğuna göre, cos $\alpha$ kaçtır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**15.** ABCD bir karedir.
$|AB| = 3|AE|$
$|BC| = 4|BF|$

**olduğuna göre,**
$\cot(\widehat{FDE})$ **kaçtır?**




A) $\frac{65}{3}$ B) $\frac{13}{9}$ C) $\frac{13}{12}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{3}{65}$

**9-C** **10-A** **11-B** **12-B** **13-B** **14-E** **15-B**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 3 (Çözümleri)

**1.** $\dfrac{\sin8° + \sin20° + \sin32°}{\sin58° + \sin70° + \sin82°}$

$= \dfrac{\sin8° + \sin20° + \sin32°}{\cos32° + \cos20° + \cos8°} = \tan20°$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**2.** $\dfrac{\sin70° \cdot \sin85° - \sin75° \cdot \sin80°}{\sin^2 5°}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}\cdot[\cos155° - \cos15°] + \frac{1}{2}[\cos155° - \cos5°]}{\sin^2 5°}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}\cos155° + \frac{1}{2}\cos15° + \frac{1}{2}\cos155° - \frac{1}{2}\cos5°}{\sin^2 5°}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}(\cos15° - \cos5°)}{\sin^2 5°} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-2).\sin10°.\sin5°}{\sin^2 5°}$

$= -\dfrac{2\sin5°.\cos5°.\sin5°}{\sin^2 5°} = -2.\cos5°$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $\dfrac{\tan^2 A - \tan^2 B}{1 - \tan^2 A \cdot \tan^2 B}$

$= \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} \cdot \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$

$= \tan(A - B) \cdot \tan(A + B)$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**4.** $\dfrac{b-c}{a+c} = \dfrac{a}{b+c} \Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 + ac \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 + ac$

($b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ olduğundan)

$\Rightarrow ac = -2ac.\cos B \Rightarrow \cos B = -\dfrac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $\dfrac{1}{\sin70°} - 4 \cdot \sin50°$

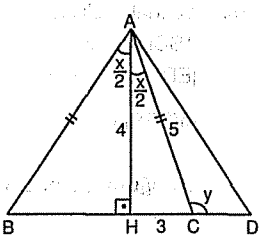
$= \dfrac{1 - 4.\sin50°.\sin70°}{\sin70°} = \dfrac{1 - 4.(-\frac{1}{2})[\cos120° - \cos20°]}{\sin70°}$

$= \dfrac{1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2} - \cos20°)}{\cos20°} = \dfrac{1 - 1 - 2.\cos20°}{\cos20°}$

$= \dfrac{-2\cos20°}{\cos20°} = -2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**6.** ABC üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan [AH] yüksekliği BAC açısını iki eşit parçaya ayırır ve




$m(\widehat{HAC}) = \dfrac{x}{2}$ olur.

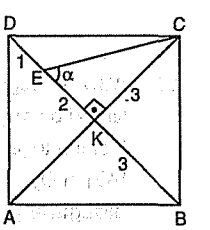
$\sin\dfrac{x}{2} = 0,6 = \dfrac{3}{5}$ olduğundan,

$|HC| = 3$, $|AC| = 5$ ve $|AH| = 4$ alınabilir.

$\cot y = -\cot(\widehat{ACH}) = -\dfrac{3}{4}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**7.** $|BD| = 6.|DE|$ eşitliğinde $|DE| = 1$ seçilirse, $|EK| = 2$ ve $|BK| = 3$ olur.

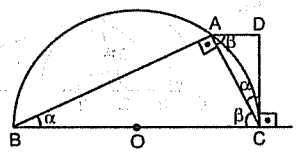



Karenin köşegenleri birbirini dik olarak ortaladığından, $|KC| = |BK| = 3$ olur. Buna göre,

EKC diküçgeninde, $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $m(\widehat{BAC}) = 90°$ (çapı gören çevre açı) ve $[AD] // [BC]$ olduğundan




$m(\widehat{ADC}) = 90°$ dir.

ABC üçgeninde $|BC| = 1$ cm olduğundan

$|AC| = \sin\alpha$ dır.

ABC üçgeni ile DCA üçgeninin açıları eşit olduğundan bu iki üçgen benzerdir. Buna göre,

$$\frac{A(ACD)}{A(ABC)} = \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2 = \sin^2\alpha \text{ dır.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

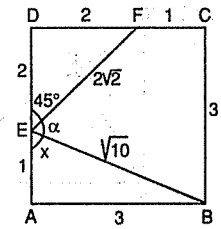
**10.** $|ED| = |DF| = 2|FC|$

$|FC| = 1$ seçilirse,

$|ED| = |DF| = 2$ ve

$|DC| = |AD| = 3$ olduğundan,

$|EA| = 1$ olur.

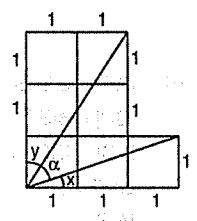



$\sin\alpha = \sin(45° + x) = \sin45° \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos45°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** Karelerin kenar uzunlukları 1 alınır ve şekil tamamlanırsa,




$\alpha + (x + y) = 90°$ olduğundan,

$\tan\alpha = \cot(x + y)$

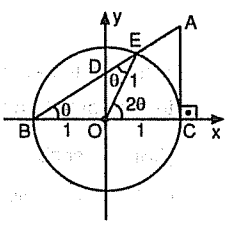
$$= \frac{1}{\tan(x + y)}$$

$$= \frac{1 - \tan x \cdot \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{7}{9} \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** EOB üçgeni, ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{B}) = \theta$

$[AC] // Oy$ ve O noktası $[BC]$ nin orta noktası olduğundan D noktası da $[AB]$ nin orta noktası olur.




BOD diküçgeninde,

$|BO| = 1$ olduğundan $|OD| = \tan\theta$ dır.

Buna göre,

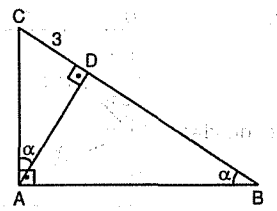
$|AD| = |BD| = \sqrt{1^2 + |OD|^2}$

$\Rightarrow |AD| = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta}$

$\Rightarrow |AD| = \sec\theta$ dır. ($\theta$, dar açı)

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.**




ADC üçgeninde, $\cot\alpha = \frac{|AD|}{3} \Rightarrow |AD| = 3.\cot\alpha$ ,

ABD üçgeninde, $\sin\alpha = \frac{|AD|}{|AB|}$ ise,

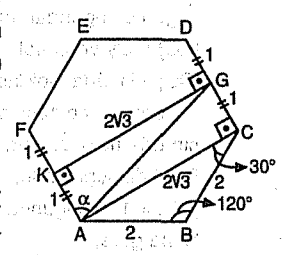
$|AB| = \frac{|AD|}{\sin\alpha} = \frac{3.\cot\alpha}{\sin\alpha}$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** ABC ikizkenar üçgeninin tepe açısı 120° olduğundan

$|AB| = 2$ seçilirse

$|AC| = 2\sqrt{3}$ olur.



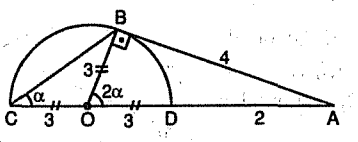

[AF] nin orta noktası olan K noktası G noktası ile birleştirilirse AKG diküçgeni oluşturulur.

Buna göre, $|GK| = |AC| = 2\sqrt{3}$ olduğundan,

$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3}$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.**




BOC üçgeni, ikizkenar üçgen olduğundan,

$\widehat{m(C)} = \alpha$ olur.

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ olduğundan,

$\frac{3}{5} = 2.\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{8}{5}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ tir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**15.** $|AB| = 3.|AE|$

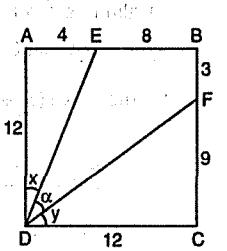
$|BC| = 4|BF|$

$|AB| = |BC| = 12$

seçilirse;

$|AE| = 4$

$|BF| = 3$ olur.




$\cot\alpha = \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \,.\, \tan y}$

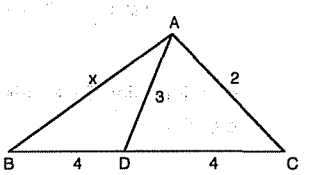
$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3}.\frac{3}{4}} = \frac{13}{9}$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 4 (Çözümlü)

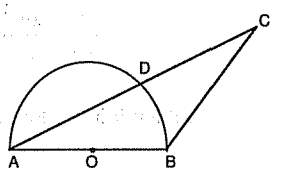
**1.** Yandaki ABC üçgeninde
|AD| = 3 cm
|AC| = 2 cm
|DC| = 4 cm
|BD| = 4 cm




**olduğuna göre, |AB| = x kaç cm dir?**

A) $\sqrt{46}$ B) $\sqrt{47}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 7 E) $5\sqrt{2}$

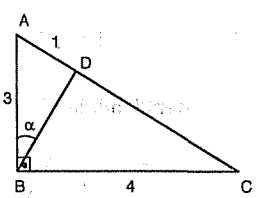
**2.** Şekilde ABC üçgeni ve O merkezli yarım çember yayı veriliyor.
D ∈ [AC]
|AB| = |BC| = 4 cm
|DC| = 3 cm




**olduğuna göre, tan($\widehat{ABC}$) kaçtır?**

A) $-\sqrt{7}$ B) $-2\sqrt{7}$ C) $-3\sqrt{7}$ D) $-5\sqrt{7}$ E) $-7\sqrt{7}$

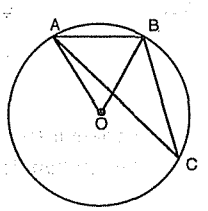
**3.** Şekilde ABC dikküçgeninde,
|AB| = 3 cm
|BC| = 4 cm
|AD| = 1 cm
m($\widehat{ABD}$) = α




**olduğuna göre, cos α nın değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ D) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{10}}$

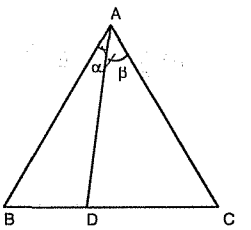
**4.** Köşeleri şekildeki O merkezli çember üzerinde olan ABC üçgeni veriliyor.
|AB| = 2 cm
|AC| = 4 cm
|BC| = 3 cm




**olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç cm dir?**

A) $\frac{8}{\sqrt{15}}$ B) $\sqrt{15}$ C) 4 D) $\frac{16}{\sqrt{15}}$ E) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

**5.** Şekilde ABC üçgeninde
|AB| = |AC|
7.|BD| = 3.|DC|




**olduğuna göre,**

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) 1

**6.** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{\pi}{2}$ B) $-\frac{\pi}{3}$ C) $-\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**7.** $f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$

**fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?**

A) $4\pi$ B) $2\pi$ C) $\pi$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**8.** $f(x) = 1 - \sin\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2}$

**fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $2\pi$ E) $\frac{5\pi}{2}$

**1-A** **2-C** **3-C** **4-A** **5-D** **6-B** **7-A** **8-D**

**9.** $f(x) = \tan^3(2x) - \sin^8(8x)$

**fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\pi$

**10.** $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{12}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

**11.** $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = x$

**olduğuna göre, cos x kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 0

**12.** $\tan x + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**denkleminin [0 , 2π] aralığındaki köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

**9-D** **10-E** **11-E** **12-E**

**13.** $0 < x \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

**denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{12}$

**14.** $\frac{1 - \cos^2 x}{\tan(\pi - x)} = \frac{1}{4}$

**denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{5\pi}{12}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{11\pi}{12}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

**15.** $\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$

**denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{7\pi}{10}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{7\pi}{30}$ E) $\frac{\pi}{5}$

**16.** $9^{2\cot y + \sin x} = 3$

$9^{\sin x} - 81^{\cot y} = 2$

**denklem sistemini sağlayan (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{6}, 2\pi\right)$ C) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

D) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ E) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$

**13-E** **14-D** **15-B** **16-D**

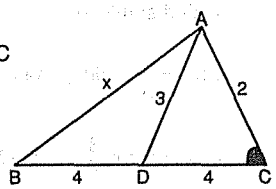
# TRİGONOMETRİ

**TEST - 4 (Çözümleri)**

**1.** ADC üçgeninde,

$3^2 = 2^2 + 4^2 - 2.2.4.\cos C$

$\cos C = \frac{11}{16}$ bulunur.




ABC üçgeninde,

$x^2 = 2^2 + 8^2 - 2.2.8.\cos C$

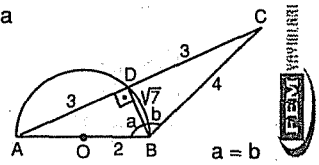
$x^2 = 68 - 32 \cdot \frac{11}{16} \Rightarrow x = \sqrt{46}$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**2.** Çapı gören çevre açı 90° olduğundan $m(\widehat{ADB}) = 90°$ dir. İkizkenar üçgenin tabanına ait yükseklik aynı zamanda açıortay olduğundan, ABC ikizkenar üçgeninde [BD] açıortay ve a = b olur.

$\tan(\widehat{ABC}) = \tan(a+b) = \tan 2a$

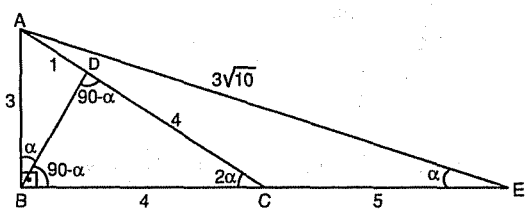
$= \frac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}$




$= \frac{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{7}}}{1 - \frac{9}{7}} = \frac{\frac{6}{\sqrt{7}}}{-\frac{2}{7}} = -3\sqrt{7}$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**3.**



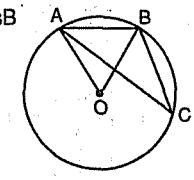

$\cos\alpha = \frac{4+5}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ olur.

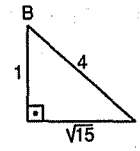
**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2.|AB|.|BC|.\cos B$

$\Rightarrow 4^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\cos B$

$\Rightarrow \cos\widehat{B} = -\frac{1}{4}$




yandaki dikküçgenden,

$\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

ABC üçgeninde, $\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = 2.r$ olduğundan,

$\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = 2.r \Rightarrow r = \frac{8}{\sqrt{15}}$ bulunur.

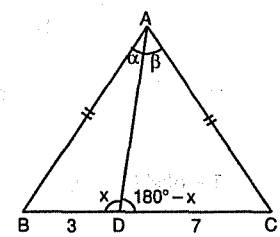
**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**5.** $7.|BD| = 3.|DC|$

ABD üçgeninde sinüs teoreminden,

$\frac{|AB|}{\sin x} = \frac{3}{\sin\alpha}$

ADC üçgeninde sinüs teoreminden,




$\frac{|AC|}{\sin(180° - x)} = \frac{7}{\sin\beta}$ ve $\sin x = \sin(180° - x)$ olduğundan elde edilen iki eşitlik taraf tarafa bölünürse,

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3\sin\beta}{7\sin\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{3}{7}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** $\underbrace{\arcsin(-\frac{1}{2})}_{x} - \underbrace{\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})}_{y}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ise $x = -\frac{\pi}{6}$, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ise $y = \frac{\pi}{6}$

$x - y = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** $f(x) = 4.\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$

$\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$ de sinüsün kuvveti tek sayı olduğundan,

$T = \left|\frac{2\pi}{-\frac{1}{2}}\right| = 4\pi$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $f(x) = 1 - \sin\frac{5x}{2} . \cos\frac{3x}{2}$

$f(x) = 1 - \frac{1}{2}[\underbrace{\sin 4x}_{T_1} + \underbrace{\sin x}_{T_2}]$

$T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , $T_2 = 2\pi$ ve

$T = \text{okek}(T_1 , T_2) = \text{okek}(\frac{\pi}{2} , 2\pi) = 2\pi$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $f(x) = \underbrace{\tan^3(2x)}_{T_1} - \underbrace{\sin^8(8x)}_{T_2}$

$T_1 = \frac{\pi}{2}$ , $T_2 = \frac{\pi}{8}$ (sinüsün kuvveti çift sayı)

$T = \text{okek}(T_1 , T_2) = \text{okek}(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{8})$

$\Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**10.** $\sin(2\arcsin\frac{3}{5}) = \sin 2x \quad (x = \arcsin\frac{3}{5})$

değeri soruluyor.

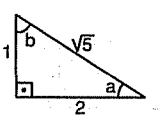
$\sin x = \frac{3}{5}$ olduğuna göre,

$\sin(2\arcsin\frac{3}{5}) = \sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

$= 2 . \frac{3}{5} . \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**11.** $\underbrace{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}_{a} + \underbrace{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}_{b} = x$




$a + b = x = \frac{\pi}{2}$ dir.

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12.** $\tan x + \tan(\frac{\pi}{6} - x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x}{1 + \frac{\tan x}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ veya $1 + \frac{\tan x}{\sqrt{3}} = 1$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k.\pi$ $\Rightarrow \tan x = 0$

$\Rightarrow x_2 = k.\pi$

$\Rightarrow k = 1$ için $x = \frac{7\pi}{6}$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $0 < x \le 2\pi$

$\tan(\frac{\pi}{4} - 2x) = \cot(\frac{\pi}{3} + x)$ olduğundan,

$\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} - 2k\pi$ bulunur.

$k = 0$ için $x_1 = \frac{\pi}{12}$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**14.** $\frac{1 - \cos^2 x}{\tan(\pi - x)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{-\tan x} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sin^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 2.\sin x.\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ veya

$2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{11\pi}{12} + k\pi$ dir.

$k = 0$ için, $x_2 = \frac{11\pi}{12}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**15.** $\sin(2x - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{5} - x)$

$\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) + \left(\frac{\pi}{5} - x\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$ dir.

$k = 0$ için $x_1 = \frac{7\pi}{10}$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** $9^{2\cot y + \sin x} = 3$

$9^{\sin x} - 81^{\cot y} = 2$

Birinci eşitlikten elde edilen,

$9^{2\cot y} \cdot 9^{\sin x} = 3 \Rightarrow 9^{2\cot y} = \frac{3}{9^{\sin x}}$

değeri, ikinci eşitlikte yerine yazılırsa;

$9^{\sin x} - \frac{3}{9^{\sin x}} = 2$ ($A = 9^{\sin x}$ dönüşümü yapılırsa)

$\Rightarrow A^2 - 2A - 3 = 0 \Rightarrow (A - 3)(A + 1) = 0$

$\Rightarrow A = 3 = 9^{\sin x}$ $(A > 0)$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ ve $\cot y = 0$ bulunur.

$x_1 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ $\quad y = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$

$(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ olabilir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 5

**1.** **1920° lik bir açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

A) 20 B) 100 C) 120 D) 150 E) 240

**2.** **– 225° lik bir açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

A) $-\frac{7\pi}{4}$ B) $-\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

**3.** **( – 1845 ) derecelik bir açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

A) 315 B) 225 C) 45 D) 30 E) 15

**4.** $\frac{22\pi}{5}$ **radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

A) $\frac{3\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{5}$

**5.** I. sin 165°
II. cos 110°
III. tan 210°

**Yukarıdaki trigonometrik değerlerin işareti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –, –, – B) –, –, + C) +, –, + D) +, –, – E) +, +, +

**6.** $\frac{11\pi}{2}$ **radyan kaç graddır?**

A) 180 B) 200 C) 270 D) 300 E) 1100

**7.** $0° < \theta < 90°$ olmak üzere,

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

**olduğuna göre, $\cos\theta + \tan\theta$ toplamı kaçtır?**

A) $\frac{23}{15}$ B) $\frac{29}{15}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{27}{20}$ E) $\frac{31}{20}$

**8.** $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$\tan x = 1$

**olduğuna göre, $\sin x - \cos x$ farkı kaçtır?**

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) 0

**1-C** **2-D** **3-A** **4-D** **5-C** **6-E** **7-E** **8-E**

**9.** $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$$\cot x = \frac{1}{3}$$

**olduğuna göre, sin x . cos x çarpımı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{1}{5}$

**10.** $\frac{-47\pi}{3}$ **radyanlık açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

A) 30 B) 45 C) 60 D) 120 E) 240

**11.** I. sin 210°
II. sec 220°
III. tan 290°

**Yukarıdaki trigonometrik değerlerin işareti sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –, –, + B) +, –, – C) –, –, –

D) +, –, + E) –, +, –

**12.** I. cosec 235°
II. cos 310°
III. cot 140°

**Yukarıdaki trigonometrik değerlerin işaretleri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –, –, – B) +, +, – C) –, +, –

D) –, +, + E) +, –, +

**13.** $a = \sin 110°$
$b = \cos 290°$
$c = \tan 250°$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) a > b > c B) a > c > b C) b > c > a

D) c > b > a E) c > a > b

**14.** $a = \tan 70°$
$b = \tan 160°$
$c = \tan 210°$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) a > b > c B) a > c > b C) b > a > c

D) c > a > b E) c > b > a

**15.** $\frac{\sin 120° + \cos 150°}{\cos 120° - \sin 150°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{4}$ E) 0

**16.** $\frac{\sin 60° + 2 \cdot \cos 60°}{\tan 45° + \frac{1}{2} \cdot \cot 30°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

**9-A** **10-C** **11-C** **12-C**

**13-E** **14-B** **15-E** **16-E**

**17.** $\dfrac{\sin 420° - \cos 780°}{\cos 420° - \sin 30° \cdot \tan 60°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

**18.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

**işleminin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2\sin\alpha$ B) $2\cos\alpha$ C) 0

D) $\cos\alpha - \sin\alpha$ E) $\sin\alpha + \cos\alpha$

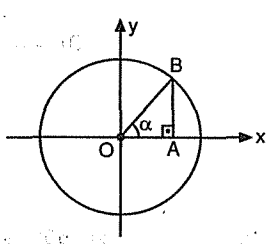
**19.** $\cos(\pi - \alpha) + \sin(2\pi + \alpha)$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\cos\alpha - \sin\alpha$ B) $2\cos\alpha$ C) $\sin\alpha - \cos\alpha$

D) $-\sin\alpha - \cos\alpha$ E) $\sin\alpha + \cos\alpha$

**20.** Yandaki birim çemberde, OAB diküçgendir.




**Buna göre, A(OAB) nin $\alpha$ cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin^2\alpha$ B) $\cos^2\alpha$ C) $\tan^2\alpha$

D) $\dfrac{\text{cosec}\,\alpha}{2}$ E) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$

**21.** $\tan(2\pi + \alpha) - \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2\tan\alpha$ B) $-\tan\alpha$ C) 0

D) $2\tan\alpha$ E) $2\cot\alpha$

**22.** $\dfrac{\tan(2\pi + \alpha) - \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) cosec $\alpha$ B) sec $\alpha$ C) 1

D) $\tan\alpha$ E) $\cot\alpha$

**23.** $A = 2\cos\alpha - 1$

**olduğuna göre, A nın alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?**

A) – 6 B) – 3 C) – 2 D) 0 E) 1

**24.** $\dfrac{\tan x}{\sec x}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin x.\cos x$ B) $\cos x$ C) $\cot x$

D) $\sin x$ E) cosec x

**17-D** **18-D** **19-C** **20-E**

**21-D** **22-B** **23-C** **24-D**

**25.** $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cot\alpha}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sec\alpha$ B) $\operatorname{cosec}\alpha$ C) $\sin\alpha$

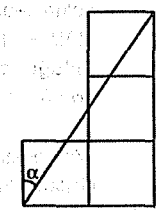
D) $\cos\alpha$ E) $\tan\alpha \cdot \sin\alpha$

**26.** $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**27.** **Dört tane özdeş kareden meydana gelen şekilde, $\cot\alpha$ nın değeri kaçtır?**




A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

**28.** $\dfrac{\tan\frac{13\pi}{8}\cdot\tan\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{7\pi}{18}}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-1$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

**29.** $\dfrac{5\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x}$

**ifadesinin eşiti kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**30.** $\dfrac{2\cdot\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}{2\cdot\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**31.** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

**olduğuna göre, $5\cos\alpha + 4\tan\alpha$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**32.** $\pi < x < 2\pi$ olmak üzere,

$$\tan x = \frac{5}{12}$$

**olduğuna göre, $\sin x - \cos x$ farkı kaçtır?**

A) $\frac{7}{13}$ B) $\frac{6}{13}$ C) $\frac{5}{13}$

D) $\frac{4}{13}$ E) $\frac{3}{13}$

**25-A** **26-C** **27-E** **28-A**

**29-B** **30-D** **31-C** **32-A**

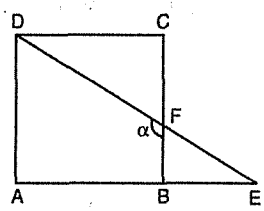
**33.** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - \tan\alpha \cdot \tan\beta$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

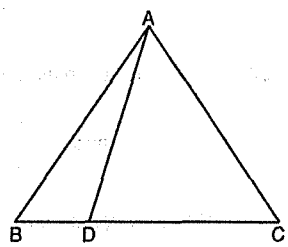
A) $-1$ B) $1$ C) $0$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**34.** **ABCD bir kare ve $|CF| = 3.|FB|$ olduğuna göre, $\tan(180° - \alpha)$ kaçtır?**




A) $2$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

**35.** **ABC eşkenar üçgen, $3.|BD| = |DC|$ olduğuna göre, $\tan(\widehat{CDA})$ kaçtır?**




(Yol gösterme: Eşkenar üçgende, tabana indirilen dikme tabanı iki eşit parçaya ayırır.)

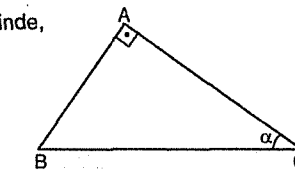
A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}$

**36.** $\cos 7° = a$

**olduğuna göre, ( $\sin 263° - \cos 353°$ ) ifadesinin a türünden değeri kaçtır?**

A) $-2a$ B) $2a$ C) $3a$ D) $-a$ E) $3a$

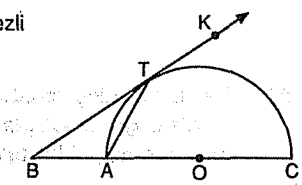
**37.** Şekildeki BAC diküçgeninde, $|AB| = 1$ cm olduğuna göre,




**$|AC|$ nin $\alpha$ cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sec\alpha$ B) $\cot\alpha$ C) $\sin\alpha$ D) $\operatorname{cosec}\alpha$ E) $\tan\alpha$

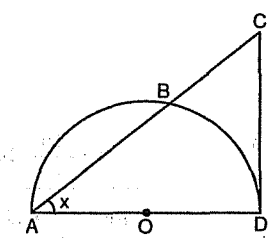
**38.** [BK, şekildeki O merkezli yarım çembere T noktasında teğettir. $3|AB| = 2|AO|$ **olduğuna göre, $\cos(\widehat{CBK})$ kaçtır?**




(Yol gösterme: Teğetin değme noktasından teğete çizilen dikme merkezden geçer.)

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

**39.** Yandaki şekilde [DC], O merkezli yarım çembere D noktasında teğettir. $|AB| = 6$ cm $|AO| = 5$ cm **olduğuna göre, cosec x kaçtır?**




(Yol gösterme: çapı gören çevre açı 90° dir.)

A) $2$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

**33-C** **34-C** **35-C** **36-A** **37-B** **38-A** **39-D**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 6

**1.** $f(x) = \sin(6x + \frac{\pi}{3})$

**fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{12}$

**2.** $g(x) = \tan(4x - \pi)$

**fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{9}$ E) $\frac{\pi}{12}$

**3.** $f(x) = \sin(4x + \pi) + \tan(3x - \pi)$

**fonksiyonunun periyodu kaçtır?**

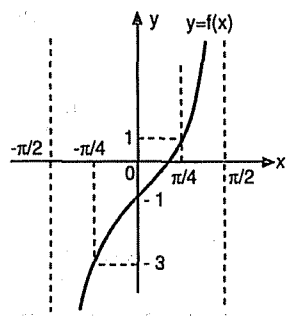
A) $\pi$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**4.** $f(x) = \tan^2(\frac{2\pi}{5}a^2 - 8x)$

**fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{15}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**5.** **Yandaki şekilde verilen grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?**




A) $f(x) = -1 + \tan 2x$ B) $f(x) = -1 + 2\tan x$

C) $f(x) = -2 + \tan x$ D) $f(x) = -3 + 2\tan x$

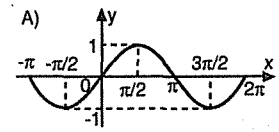
E) $f(x) = -1 - \tan x$

**1-B** **2-B** **3-A** **4-D** **5-B**

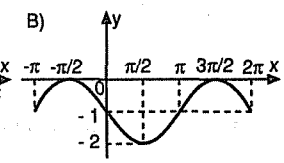
**6.** $f(x) = 1 + \sin x$

**fonksiyonunun $[-\pi, 2\pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

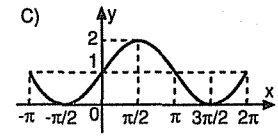
A)



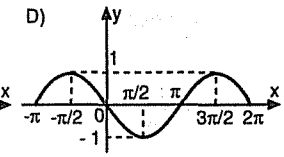

B)



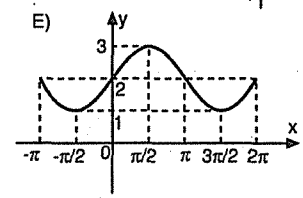

C)




D)




E)




**7.** $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

**8.** $\arctan(1) + \operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{13\pi}{12}$ B) $\frac{11\pi}{12}$ C) $\frac{7\pi}{12}$ D) $\frac{7\pi}{6}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

**9.** $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{5} - 8x)$

**fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{15}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**6-C** **7-E** **8-A** **9-D**

**10.** $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**11.** $\arcsin(\tan 45°)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**12.** $\cos\left(2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**13.** $\tan\left(2.\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\frac{1}{2}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 1

**14.** $\cot\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

**10-C 11-C 12-A 13-B 14-E**

**15.** $\sin[\arcsin(-1)]$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

**16.** $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\pi$

**17.** $\cos(\arctan x)$

**ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B) $\frac{1}{x}$ C) $\frac{1}{1-x^2}$

D) $\frac{1}{1+x^2}$ E) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

**18.** $\cot(\arctan x)$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x$ B) $\frac{1}{x}$ C) $\frac{1}{1+x^2}$

D) $\frac{1}{1+x^2}$ E) $\frac{x}{1+x^2}$

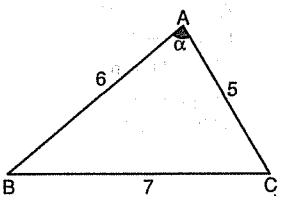
**19.** $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5}$

**toplamının değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{12}$

**15-A 16-D 17-E 18-B 19-A**

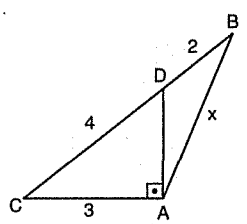
**20.** **Yandaki şekilde verilenlere göre, cos α değeri kaçtır?**




A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

**21.** Şekildeki ABC üçgeninde,

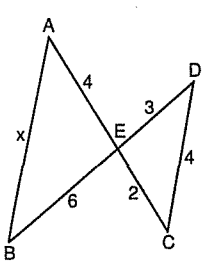
[AC] ⊥ [AD]
|BD| = 2 cm
|CD| = 4 cm
|AC| = 3 cm




**olduğuna göre, |AB| = x kaç cm dir?**

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) 3

**22.** **Yandaki şekilde verilenlere göre, x değeri kaçtır?**




A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**23.** ABC üçgeninde; A, B, C iç açılarının karşılarındaki kenarların uzunlukları sırasıyla a, b, c dir.

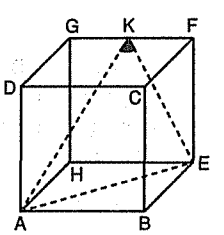
$$a^2 - b^2 = b.c + c^2$$

**olduğuna göre, A açısı kaç derecedir?**

A) 150 B) 120 C) 90 D) 60 E) 45

**24.** ABCDEFGH bir küptür.
|GK| = |KF|

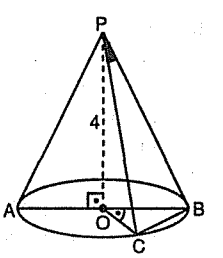
**olduğuna göre, cos(AKE) değeri kaçtır?**




A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**25.** Şekildeki dikkonide
|OP| = 4 cm
|AO| = 3 cm
m(BOC) = 60°

**olduğuna göre, cos (CPB) değeri kaçtır?**




A) $\frac{41}{50}$ B) $\frac{39}{50}$ C) $\frac{19}{25}$ D) $\frac{17}{25}$ E) $\frac{1}{2}$

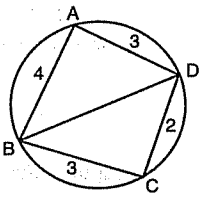
**20-E** **21-A** **22-D** **23-B** **24-E** **25-A**

**26.** ABCD kirişler dörtgeni,

$|AB| = 4$ cm

$|AD| = |BC| = 3$ cm

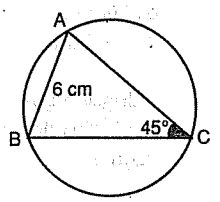
$|CD| = 2$ cm




**olduğuna göre, $|BD|$ kaç cm dir?**
(Yol gösterme: Kirişler dörtgeninde karşılıklı iki açının ölçüleri toplamı 180° dir.)

A) $\sqrt{23}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{17}$ D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{13}$

**27.** **Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre, çevrel çemberin yarıçapı kaç cm dir?**



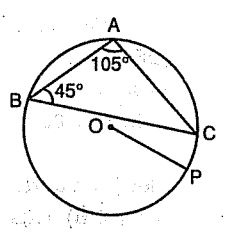

A) $6\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

**28.** Şekildeki ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı $|OP| = 5$ cm dir.

$m(\hat{A}) = 105°$

$m(\hat{B}) = 45°$

**olduğuna göre, $|AB|$ kaç cm dir?**




A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

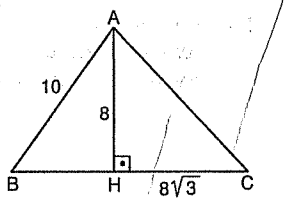
**29.** ABC üçgeninde,

$[AH] \perp [BC]$

$|AB| = 10$ cm

$|AH| = 8$ cm

$|HC| = 8\sqrt{3}$ cm



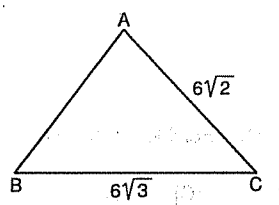

**olduğuna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm dir?**

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

**30.** Şekildeki ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 6 cm dir.

$|AC| = 6\sqrt{2}$ cm

$|BC| = 6\sqrt{3}$ cm

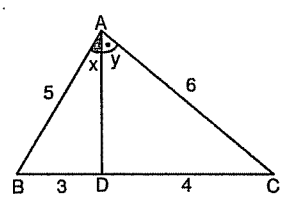



**olduğuna göre, C açısının ölçüsü en çok kaç derecedir?**

A) 90 B) 75 C) 60 D) 50 E) 45

**31.** **Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre,**

$\frac{\sin x}{\sin y}$ **kaçtır?**




A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**32.** Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü A, B ve C dir.

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

**olduğuna göre, A açısının ölçüsü kaç derecedir?**

A) 135 B) 120 C) 90 D) 75 E) 60

**26-C** **27-D** **28-C** **29-B** **30-B** **31-A** **32-C**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 7

**1.** $\sin 37° \cdot \cos 23° + \cos 37° \cdot \sin 23°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**2.** $\cos 55° \cdot \cos 10° + \sin 55° \cdot \sin 10°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**3.** $\cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{\pi}{8}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**4.** $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**5.** $\frac{\sin 33°}{\sin 11°} - \frac{\cos 33°}{\cos 11°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

**6.** $\cos x \cdot \cos(60° - x) + \sin x \cdot \sin(x - 60°)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**7.** $(\sin 40° \cos 10° + \cos 40° \sin 10°)\cos 10° + \sin 10° \cos 50°$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 0

**8.** A, B, C bir ABC üçgeninin iç açılarının ölçüsüdür.

$\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2}$

**olduğuna göre, $\tan \widehat{C}$ kaçtır?**

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\sqrt{3}$

**9.** $\frac{\tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{\pi}{5}}{1 - \tan\frac{\pi}{20} \cdot \tan\frac{\pi}{5}}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**10.** $\frac{\tan 54° - \tan 24°}{1 + \tan 54° \cdot \tan 24°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 1 B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

**1-E 2-C 3-C 4-A 5-A**

**6-E 7-B 8-B 9-C 10-C**

**11.** $2 \cdot \sin(x + 45°) = 6 \cdot \cos(x + 45°)$

**olduğuna göre, tan x kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**12.** $\frac{\cot 23° \cdot \cot 22° - 1}{\cot 23° + \cot 22°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-1$

**13.** x ve y dar açı olmak üzere,

$\tan x = \frac{1}{2}$ , $\tan y = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, x + y toplamı kaç derecedir?**

A) 105 B) 90 C) 75 D) 60 E) 45

**14.** $\tan(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}})$

**işleminin sonucu kaçtır?**

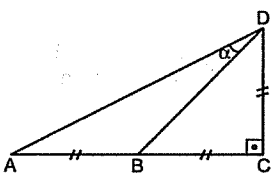
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

**15.** $\alpha = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, $\alpha$ kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

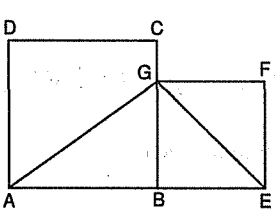
**16.** ACD diküçgendir.
$|AB| = |BC| = |CD|$




**Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, tan $\alpha$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

**17.**




Yukarıdaki şekilde ABCD ve BEFG birer kare ve $|BG| = 2 \cdot |GC|$ dir.

**Buna göre, sin ($\widehat{AGE}$) değeri kaçtır?**

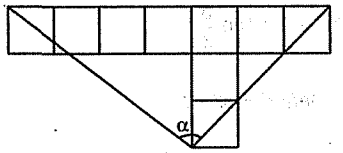
A) $\frac{5}{\sqrt{26}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{26}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{26}}$

D) $\frac{25}{\sqrt{26}}$ E) $\frac{1}{26}$

**11-D** **12-A** **13-E** **14-E**

**15-B** **16-A** **17-A**

**18.**



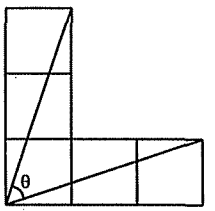

Yukarıdaki şekil özdeş 9 tane kareden meydana gelmiştir.

**Buna göre, cos α değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ E) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

**19.** Yandaki şekil, 5 tane özdeş kareden meydana gelmiştir.




**Buna göre, cot θ değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**20.** $\sin 75° \cdot \cos 75°$

**çarpımının değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**18-D** **19-E** **20-C**

**21.** $\cos 15° \cdot \sin 15° + \sin 75° \cdot \sin 15°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**22.** $4 \sin 20° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°$

**çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sin 80°$ B) $\cos 80°$ C) $2 \sin 40°$

D) $2 \cos 40°$ E) $\sin 20°$

**23.** $\sin 15° \cdot \cos 15° + \cos^2 75° - \sin^2 75°$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

D) $\frac{2\sqrt{3}-1}{4}$ E) $\frac{1-2\sqrt{3}}{4}$

**24.** $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{6}$

**olduğuna göre, sin 2x kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**21-D** **22-A** **23-E** **24-C**

**25.** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

**olduğuna göre, cot 2x kaçtır?**

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

**26.**

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{5}$$

**olduğuna göre, sin 2x in değeri kaçtır?**

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{23}{25}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

**27.**

$$\frac{1 - \cos 2x}{\tan x}$$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) cos 2x B) sin 2x C) sec 2x

D) cosec 2x E) cot 2x

**28.**

$$\sin 14° = a$$

**olduğuna göre, cos 28° nin a türünden değeri kaçtır?**

A) $1 - 2a^2$ B) $1 + 2a^2$ C) $1 - a^2$

D) $1 + 2a$ E) $a^2 - 1$

**29.**

$$\sin(2 . \arctan \frac{3}{4})$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

**30.** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\tan x = \frac{1}{2}$$

**olduğuna göre, sin 2x kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

**31.**

$$3 \sin x - 4 \cos x = 0$$

**olduğuna göre, cos 2x kaçtır?**

A) $-\frac{7}{25}$ B) $-\frac{13}{25}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

**32.** $\sin^2(22,5)° - \cos^2(22,5)° + \frac{\sqrt{2}}{8.\sin 15°.\cos 15°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**25-A 26-A 27-B 28-A**

**29-A 30-E 31-A 32-C**

**33.** $\tan 15° - \cot 15°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{3}$ E) 2

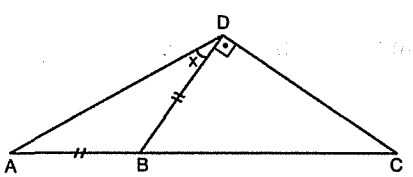
**34.** $\dfrac{1 - \tan^2 x}{2 . \tan x}$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) tan 2x B) cot 2x C) sec 2x

D) cosec 2x E) cos 2x

**35.**

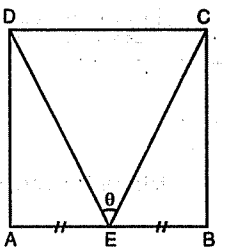



**Yukarıdaki şekilde, |CD| = 4 cm ve |BD| = 3 cm olduğuna göre, sin x değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $\frac{3}{10}$

**36.** Şekildeki ABCD karesinde E orta noktadır.

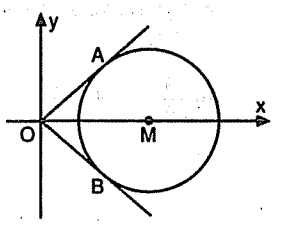



**Buna göre, cos θ değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

**37.** Şekildeki çemberin merkezi (M) x ekseni üzerinde ve yarıçapı 4 cm dir.

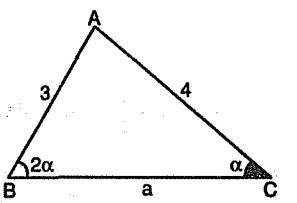



**M(5 , 0) olduğuna göre, tan(BÔA) değeri kaçtır?**

A) $\frac{24}{7}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $-\frac{7}{24}$

D) $-\frac{24}{7}$ E) $-\frac{25}{24}$

**38.** **Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre, cos α değeri kaçtır?**




A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**33-C** **34-B** **35-B**

**36-D** **37-D** **38-A**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 8

**1.** $\sin 75° + \sin 15°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

**2.** $\cos x = \frac{2}{3}$

**olduğuna göre, $\sin(x + 30°) - \sin(x - 30°)$ değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 0

**3.** $\frac{\cos 74° - \cos 14°}{\sin 44°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-1$

**4.** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *olmak üzere,*

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

**olduğuna göre, $\cos(60° + x) + \cos(60° - x)$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

**5.** $\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x}$

***işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?***

A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $\sec x$ D) $\operatorname{cosec} x$ E) $\cos 2x$

**6.** $\cos 172° + \cos 68° + \cos 52°$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) $-1$ E) $-2$

**7.** $\frac{1}{\cos 75°} - \frac{1}{\sin 75°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

**8.** $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6})}{\sin x}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{2}$

**1-E** **2-B** **3-E** **4-D** **5-A** **6-C** **7-A** **8-C**

**9.** $x = \frac{3\pi}{8}$ olduğuna göre,

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin x - \sin 3x}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) – 2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

**10.** $2.(x + y) = \pi$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) –1 C) 2 D) – 2 E) 0

**11.** $\sin x = \frac{1}{2}$ ve $\sin y = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre,** $\sin\left(\frac{x + y}{2}\right) . \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$

**değeri kaçtır?**

A) $\frac{13}{12}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

**12.** $\cos\frac{5\pi}{12} . \cos\frac{\pi}{12}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

**13.** $\frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{\cos 3x + \cos 2x + \cos x}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) tan 2x B) tan 3x C) tan x

D) cot 2x E) cot 3x

**14.** $x = \frac{\pi}{8}$ olduğuna göre,

**sin 3x . sin x çarpımının değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**15.** $2.\cos 70° . \cos 10° + \cos 100°$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**16.** $\frac{\sin 80° . \cos 100°}{\sin 20°}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) –1

**9-B 10-A 11-B 12-B**

**13-A 14-C 15-B 16-A**

**17.** $\sin(30° + x) \cdot \sin(30° - x) = \frac{1}{8}$

**olduğuna göre, cos 2x in değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

**18.** $f(x) = 2.\cos 7x \cdot \cos 3x$

**fonksiyonunun periyodu kaç radyandır?**

A) $\pi$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**19.** $\sin(x - 10°) = \frac{1}{2}$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $Ç = \{x : x = 40° + k.360° \text{ veya } x = 160° + k.360°, k \in Z\}$

B) $Ç = \{x : x = 20° + k.360° \text{ veya } x = 140° + k.360°, k \in Z\}$

C) $Ç = \{x : x = 30° + k.360° \text{ veya } x = 150° + k.360°, k \in Z\}$

D) $Ç = \{x : x = 40° + k.180° \text{ veya } x = 160° + k.180°, k \in Z\}$

E) $Ç = \{x : x = 20° + k.180° \text{ veya } x = 140° + k.180°, k \in Z\}$

**20.** $\cos(2x + 10°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $Ç = \{x : x = 10° + k.180° \text{ veya } x = -20° + k.180°, k \in Z\}$

B) $Ç = \{x : x = 10° + k.360° \text{ veya } x = -20° + k.360°, k \in Z\}$

C) $Ç = \{x : x = 25° + k.180° \text{ veya } x = -35° + k.180°, k \in Z\}$

D) $Ç = \{x : x = 25° + k.360° \text{ veya } x = -35° + k.360°, k \in Z\}$

E) $Ç = \{x : x = 10° + k.180° \text{ veya } x = 70° + k.180°, k \in Z\}$

**17-C** **18-A** **19-A** **20-A**

**21.** $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $Ç = \{x : x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3} \text{ veya } x = -\frac{\pi}{12} + k.\frac{2\pi}{3}, k \in Z\}$

B) $Ç = \{x : x = \frac{\pi}{12} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi, k \in Z\}$

C) $Ç = \{x : x = \frac{\pi}{12} + k.\frac{2\pi}{3} \text{ veya } x = -\frac{\pi}{4} + k.\frac{2\pi}{3} k \in Z\}$

D) $Ç = \{x : x = 2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in Z\}$

E) $Ç = \{x : x = \frac{2\pi}{3} . k \text{ veya } -\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3}, k \in Z\}$

**22.** $\sin^3 4x = \frac{1}{8}$

**denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?**

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $2\pi$ E) $3\pi$

**23.** $2\sin^2 x = \sin x + 1$

**denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığında birbirinden farklı kaç kökü vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**24.** $\cos 3x + \cos 2x = 0$

**denklemini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?**

A) 15 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

**21-E** **22-C** **23-B** **24-E**

**25.** $\sin(3x - 15°) = \cos(2x + 5°)$

**denklemini sağlayan <u>en küçük</u> x dar açısı kaç derecedir?**

A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 46

**26.** $\tan(4x - 15°) = 1$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) Ç = { x | x = 10° + k.90°, k ∈ Z }
B) Ç = { x | x = 10° + k.45°, k ∈ Z }
C) Ç = { x | x = 15° + k.90°, k ∈ Z }
D) Ç = { x | x = 15° + k.45°, k ∈ Z }
E) Ç = { x | x = 15° + k.180°, k ∈ Z }

**27.** $\tan^2 x - 3 = 0$

**denkleminin ( 0, 2π ) aralığındaki kökleri toplamı kaçtır?**

A) $2\pi$ B) $\frac{7\pi}{3}$ C) $3\pi$ D) $\frac{11\pi}{3}$ E) $4\pi$

**28.** $3^{\cot x} = 3$

**denkleminin ( 0 , 2π ) aralığındaki kökleri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

**25-C** **26-D** **27-E** **28-E**

**29.** $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

**denkleminin ( 0, 2π ) aralığındaki kökler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{13\pi}{8}$ B) $\frac{23\pi}{8}$ C) $3\pi$

D) $\frac{13\pi}{4}$ E) $4\pi$

**30.** $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 8$

**denkleminin ( 0 , π ) aralığındaki kökleri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

D) $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

**31.** $\tan 4\alpha \cdot \tan 2\alpha = 1$

**denklemini sağlayan <u>en küçük</u> α dar açısı kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{18}$ C) $\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**32.** $\sin^2(5x) + \sin^2(x) = 1$

**denklemini sağlayan en küçük x dar açısı kaç derecedir?**

A) 5 B) 7,5 C) 15 D) 22,5 E) 30

**29-C** **30-A** **31-C** **32-C**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 9

**1.** $\sin 810° - \cos 300°$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-1$ E) 1

**2.** $\frac{y + \sin x}{2 \sin x} = 6$

**eşitliğini sağlayan y nin kaç tane tamsayı değeri vardır?**

A) 23 B) 22 C) 21 D) 12 E) 11

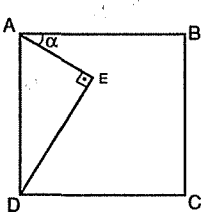
**3.** sin 122°, cos 271°, cos 91°, tan 719°

**ifadelerinin işareti sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-, -, -, -$ B) $+, -, +, +$ C) $+, +, -, +$

D) $+, +, -, -$ E) $+, -, +, -$

**4.** Yandaki şekilde
ABCD kare,
$m(\widehat{BAE}) = \alpha$
$[AE] \perp [DE]$
$5.|DE| = 4.|BC|$




**olduğuna göre, $\sin\alpha + \tan\alpha$ değeri kaçtır?**

A) $\frac{32}{15}$ B) $\frac{16}{15}$ C) $\frac{27}{20}$

D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

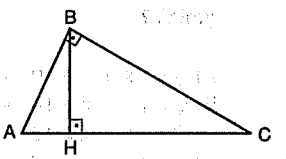
**5.** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olmak üzere,

$13.\sin\alpha - 5 = 0$

**olduğuna göre, $\sec\alpha + \tan\alpha$ toplamı kaçtır?**

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-1$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

**6.** ABC diküçgeninde,
$[AB] \perp [BC]$,
$[AC] \perp [BH]$,
$|BH| = 3$ cm dir.




**$\cot\widehat{A} + \cot\widehat{C} = 10$ olduğuna göre, $|AC|$ kaç cm dir?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**7.** $\frac{\cos x + \tan x}{\cot x + \sec x}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sec x$

D) $\tan x$ E) $\operatorname{cosec} x$

**8.** $\frac{\sin x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\tan x$ B) $\cot x$ C) $-2\sec x$

D) $-2\operatorname{cosec} x$ E) $-1$

1-A 2-B 3-D 4-C

5-A 6-E 7-A 8-C

**9.** $a = \frac{\pi}{14}$ olmak üzere,

$$\frac{\cos 3a + \cos 7a}{\sin 4a}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) 2 C) $-1$ D) $-2$ E) 1

**10.** A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$\frac{\sin(B+C) + \sin B}{\sin(A+C) + \sin A}$$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) tan C E) cot B

**11.** $\tan 20° = a$ olduğuna göre,

$$\frac{\tan 200° + \cot 70°}{\cot 290° + \tan 110°}$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $1-a^2$ B) $\frac{1-a^2}{2a}$ C) $\frac{-2a^2}{1+a^2}$

D) $\frac{2a^2}{1-a^2}$ E) $\frac{2(1-a^2)}{a^2}$

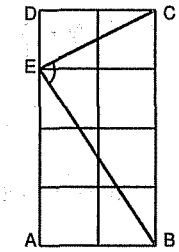
**12.** $$\frac{\cos^2 20° + \cos^2(-70°) + 1}{\tan^2(-20°).\tan^2 70° + 1}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

**9-E** **10-C** **11-C** **12-B**

**13.** Yandaki ABCD dikdörtgeni özdeş 8 kareden oluşmaktadır.




**Buna göre, tan $(\widehat{BEC})$ değeri kaçtır?**

A) 8 B) 6 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

**14.** $\cos(30° + x).\cos x + \sin(30° + x).\sin x$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

**15.** $$\frac{\sin 20° . \cos 20° . \cos 40°}{\sin 80°}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

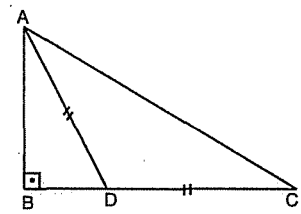
A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**16.** Yandaki ABC diküçgeninde

$[AB] \perp [BC]$

$|BC| = 2.|AB|$

$|AD| = |CD|$




**olduğuna göre, tan $(\widehat{BDA})$ kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

**13-A** **14-A** **15-E** **16-C**

**17.** $x - y = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin 2x - \sin 2y}{\cos 2x + \cos 2y}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**18.** $0° < x \leq 180°$ olmak üzere,

$$\sin(2x - 50°) - \frac{1}{2} = 0$$

**eşitliğini sağlayan x açısının alabileceği değerlerin toplamı kaç derecedir?**

A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

**19.** $$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 4$$

**denklemini sağlayan x açısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 60° B) 75° C) 135° D) 150° E) 180°

**20.** $$\sin 5x = \cos x$$

**denklemini sağlayan x in birbirinden farklı dar açı değerlerinin toplamı kaç derecedir?**

A) 37,5 B) 45 C) 90 D) 97,5 E) 112,5

**21.** $$2.\cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

**denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki köklerinin toplamı kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $2\pi$ E) $4\pi$

**22.** $$\sin(x + 30°) \cdot \cos x + \cos(x + 30°) \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**denklemini sağlayan x dar açıları aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 30°, 45° B) 30°, 60° C) 45°, 75°
D) 15°, 45° E) 15°, 75°

**23.** $$\tan(x - 50°) = \cot(50° + x)$$

**denklemini sağlayan x dar açısı kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**24.** $$1 + \cos 2x = \sin 2x$$

**denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki kökleri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

**17-C** **18-D** **19-C** **20-E**

**21-E** **22-D** **23-D** **24-C**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 10

**1.** $-\frac{29\pi}{4}$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç derecedir?

A) 45 B) 75 C) 135 D) 225 E) 285

**2.** $\cos x - \sin x = \frac{1}{5}$

olduğuna göre, $\sin x \cdot \cos x$ çarpımının değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{60}{169}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{12}{25}$

**3.** $\frac{-1 + \cos^2 x - 3\sin^2 x}{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4$ B) $-2$ C) $-1$ D) 2 E) 4

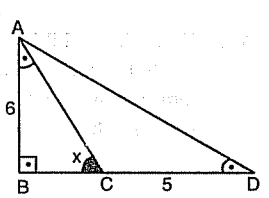
**4.** ABC diküçgeninde,

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CDA})$

$m(\widehat{ACB}) = x$

$|AB| = 6$ cm

$|CD| = 5$ cm




olduğuna göre, tan x değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

**5.** $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$\cos x = \frac{5}{13}$

olduğuna göre, cosec x – cot x farkı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

**6.** $(\tan x - \sin x) \cdot \cot x - 1$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) sin x B) – sin x C) cos x

D) – cos x E) sec x

**7.** $0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,

$\sqrt{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} + \sin x$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) cos x B) – cos x C) sin x

D) cos x + 2 sin x E) 2 sin x – cos x

**8.** $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ve $\theta > \pi$ olmak üzere,

$\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ve $\cos \theta = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

| | α | θ |
|---|---|---|
| A) | II. bölge | III. bölge |
| B) | II. bölge | IV. bölge |
| C) | III. bölge | III. bölge |
| D) | III. bölge | IV. bölge |
| E) | IV. bölge | I. bölge |

1-C 2-E 3-B 4-A 5-B 6-D 7-A 8-D

**9.** $\dfrac{\sin 45° + \cos 60°}{\tan 60° + \sqrt{2} \cdot \cot 30°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

**10.** $f(x) = 1 + \frac{5}{2} \cdot \cos x$

**olduğuna göre, f(x) in alabileceği tamsayı değerleri kaç tanedir?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**11.** $a = \tan 125°$

$b = \cot 320°$

$c = \cos 190°$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $a > b > c$ B) $b > c > a$ C) $b > a > c$

D) $c > b > a$ E) $c > a > b$

**12.** **Aşağıdakilerden hangisi** $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ **ifadesine eşittir?**

A) $\cot(-x)$ B) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ C) $\tan(2\pi + x)$

D) $\cot(\pi + x)$ E) $\cot(-3\pi - x)$

**13.** $\cos(190°) + \sin(100°) + \sin(280°) - \cos(-10°)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) $-2\cos 10°$ C) $-\cos 10°$

D) $\sin 10°$ E) $2\sin 10°$

**14.** $\tan(-20°) = m$ olduğuna göre;

$\dfrac{\tan 110° + \tan 200°}{\cot 340°}$ **ifadesinin** ***m*** **türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1 - \frac{1}{m^2}$ B) $1 + m$ C) $1 - m^2$

D) $\frac{m^2 - 1}{2}$ E) $m^2 - 1$

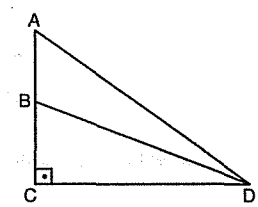
**15.** *[BD] kenarortay,*

$[AC] \perp [CD]$

$4|DC| = 3|AC|$

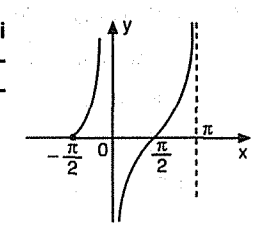
**olduğuna göre,**

**tan** $(\widehat{DBA})$ **kaçtır?**




A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

**16.** **Yandaki şekilde grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?**




A) $f(x) = \tan x$ B) $f(x) = \tan 2x$ C) $f(x) = \cot x$

D) $f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ E) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**9-E** **10-C** **11-D** **12-D**

**13-B** **14-C** **15-A** **16-E**

**17.** $f(x) = \cos\left(\frac{2x + \pi}{3}\right) - \tan(-x)$

**fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3\pi$ B) $\frac{5\pi}{2}$ C) $2\pi$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\pi$

**18.** $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 0

**19.** $x > 1$ olmak üzere,

**$\cot\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x$ B) $x - 1$ C) $\sqrt{x^2 + 1}$

D) $\sqrt{x^2 - 1}$ E) $x^2$

**20.** $\arccos(\tan 45° - \sin 150°)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 90° B) 75° C) 60° D) 45° E) 30°

**21.** $\cos^2(x - 15°) - \sin^2(x - 15°) = \frac{1}{2}$

**denkleminin ( 0, $2\pi$ ) aralığındaki köklerinin toplamı kaçtır?**

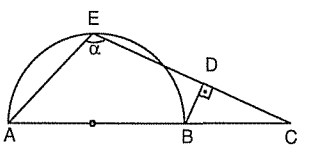
A) $\frac{13\pi}{3}$ B) $\frac{13\pi}{4}$ C) $\frac{17\pi}{31}$ D) $\frac{17\pi}{6}$ E) $\frac{29\pi}{12}$

**22.** $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2}$

**denklemini sağlayan x dar açısı kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{24}$ D) $\frac{\pi}{16}$ E) $\frac{\pi}{8}$

**23.** Şekildeki yarım çemberin yarıçapı 4 birimdir.
$[BD] \perp [EC]$
$m(\widehat{AE}) = m(\widehat{EB})$ ve
$|BD| = 3$ br ise,

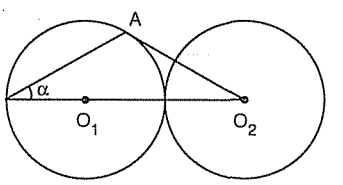



**olduğuna göre, $\cos\alpha$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ E) $-\frac{3\sqrt{2}}{16}$

**24.** Şekilde yarıçapları eşit iki çember verilmiştir.




**$[O_2A)$ birinci çembere teğet olduğuna göre, $\tan\alpha$ nın değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

**17-A** **18-A** **19-D** **20-C**

**21-A** **22-E** **23-A** **24-B**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 11

**1.** $\dfrac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\sin x - \cos x}$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2 \sin x$ B) $2 \cos x$ C) $-2 \sin x$

D) $-2 \cos x$ E) $\sin x + \cos x$

**2.** x dar açı olmak üzere,

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**olduğuna göre, $\sin(60° - x)$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{14}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ E) $\frac{\sqrt{21}}{14}$

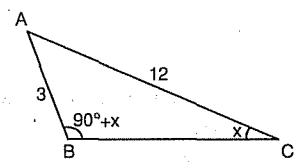
**3.** Şekildeki ABC üçgeninde,

$m(\widehat{C}) = x$

$m(\widehat{B}) = 90° + x$

$|AB| = 3$ cm

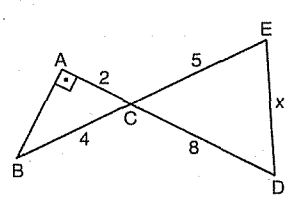
$|AC| = 12$ cm




**olduğuna göre, cot x kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**4.** C noktası, [BE] ile [AD] nin kesiştiği nokta ve $[AB] \perp [AD]$ dir.




**Şekildeki verilenlere göre, $|DE| = x$ kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

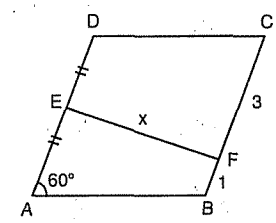
**5.** ABCD eşkenar dörtgen,

$|BF| = 1$ cm

$|CF| = 3$ cm

$|AE| = |ED|$

$m(BAD) = 60°$




**olduğuna göre, $|EF| = x$ kaç cm dir?**

A) 4 B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{14}$ D) $\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{3}$

**6.** $\cos 8^o = x$

**olduğuna göre, $\sin 74^o$ ifadesinin x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 1$ B) $2x$ C) $1 - x^2$

D) $1 - 2x^2$ E) $2x^2 - 1$

**7.** $\tan A = 2$ ve $\tan B = 1$

**olduğuna göre, cot (A + B) değeri kaçtır?**

A) $-3$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 2 E) 3

**8.** $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}$

$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, $\sin(x - y)$ kaçtır?**

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{6}$

**1-D** **2-E** **3-C** **4-B**

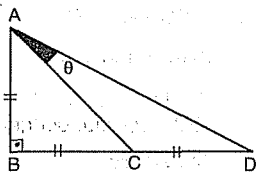
**5-D** **6-E** **7-B** **8-E**

**9.** ABD diküçgeninde,

$[AB] \perp [BD]$

$|AB| = |BC| = |CD|$

$m(\widehat{CAD}) = \theta$




**olduğuna göre, tan θ değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

**10.** $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) . \cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) . \sin\theta$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

**11.** $\frac{\tan 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - 1}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $-\frac{1}{6}$

**12.** $0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,

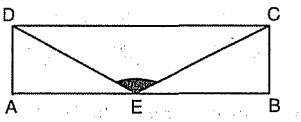
$$\sin 2x = \frac{4}{5}$$

**olduğuna göre, cot x kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) 2

**9-D** **10-C** **11-D** **12-E**

**13.**




Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,

$$3 . |AE| = 2 . |BE| = 6 . |BC|$$

**olduğuna göre, sin $(\widehat{CED})$ kaçtır?**

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**14.** $\sin(60^\circ - x) . \cos x + \cos(x - 60^\circ) . \sin x$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**15.** $0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\frac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**olduğuna göre, tan x kaçtır?**

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**13-C** **14-E** **15-B**

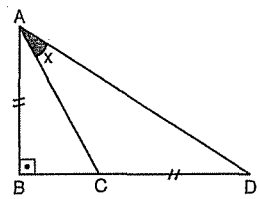
**16.** $\dfrac{\sin 50° + \sin 30° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 30° + \cos 10°}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\tan 20°$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1

D) $\tan 40°$ E) $\sqrt{3}$

**17.** ABD diküçgen,
$[AB] \perp [BD]$
$m(\widehat{CAD}) = x$
$|AB| = |CD|$
$4.|BC| = 3.|AB|$ dir.




**Yukarıdaki verilere göre, tan x kaçtır?**

A) $\dfrac{18}{37}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{16}{37}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{14}{37}$

**18.** $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arccot}\dfrac{1}{3} = \theta$

**olduğuna göre, cos θ kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

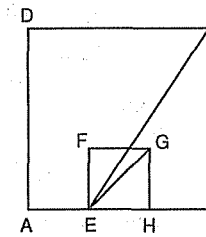
**19.** $\tan 4x = \sqrt{3}$

**denklemini sağlayan <u>en küçük x dar açısı</u> kaç derecedir?**

A) 45 B) 30 C) 20 D) 15 E) 10

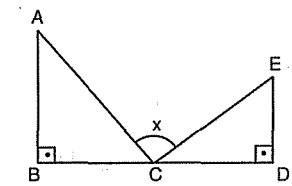
**20.** ABCD ve EFGH birer karedir.
$|AE| = |EH| = |HB|$,

**olduğuna göre,**
**$\tan(\widehat{CEG})$ kaçtır?**




A) 3 B) 4 C) 5 D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{3}$

**21.** Yandaki şekilde,
$|AB| = 8$,
$|CD| = 4$
$|DE| = 7$
$|BC| = 3$
$m(\widehat{ACE}) = x°$




**olduğuna göre, tan x kaçtır?**

A) $\dfrac{49}{44}$ B) $\dfrac{48}{43}$ C) $\dfrac{47}{43}$ D) $\dfrac{53}{44}$ E) $\dfrac{46}{47}$

**22.** $0° < x < 45°$ olmak üzere,

$$\tan 2x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

**olduğuna göre, sin x kaçtır?**

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ D) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

**23.** $f(x) = 3\sin(-x) + \sqrt{7}\cos x$

**fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**16-B** **17-C** **18-E** **19-D**

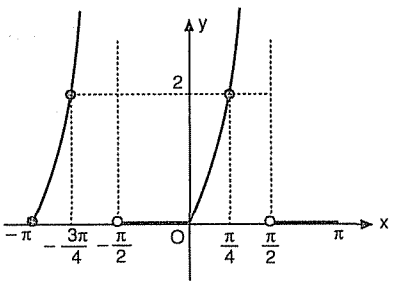
**20-D** **21-D** **22-B** **23-E**

**24.** $f(x) = \sin^2(3x) + \cos^3(6x)$

**fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\pi$

**25.**




**Yukarıdaki şekilde grafiği verilen trigonometrik fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $f(x) = \tan x + |\tan x|$ B) $f(x) = 2 \cdot \tan x$

C) $f(x) = \cot x + |\cot x|$ D) $f(x) = 2 \cdot \cot x$

E) $f(x) = \tan x + \cot x$

**26.** $f(x) = \arcsin\left(3 - \frac{2x}{3}\right)$ **fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-1, 1]$ B) $[-3, 3]$ C) $[3, 6]$

D) $[-6, 3]$ E) $[-3, 6]$

**27.** $2.\arctan(x^2 - x - 7) + \frac{\pi}{2} = 0$

**eşitliğini sağlayan x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?**

A) $-7$ B) $-6$ C) $-3$ D) 1 E) 2

**28.** $\arctan 3x = \operatorname{arccot} 12x$

**olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{12}$

**29.** Yandaki ABC üçgeninde,

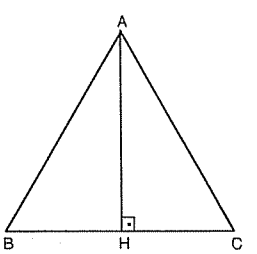
$[AH] \perp [BC]$

$\tan(\widehat{BAC}) = 3$

$\tan(\widehat{CBA}) = 1$

**olduğuna göre,**

**$\cos(\widehat{ACB})$ kaçtır?**




A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5}{6}$

**24-B** **25-A** **26-C** **27-D** **28-D** **29-A**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 12

**1.** $\cos(8\pi + \alpha) + \cos(\frac{15\pi}{2} + \alpha) + \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha)$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) $\cos\alpha$ C) $\sin\alpha$ D) $2\cos\alpha$ E) $-\cos\alpha$

**2.** $\pi < \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$\cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

**olduğuna göre, $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B) $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

**3.** $a + b = \pi$ olmak üzere,

$$\sin a = \frac{3}{5}$$

**olduğuna göre, cos (2a + b) ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{9}{25}$ D) $\frac{16}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

**4.** $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,

$$a = \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$$

$$b = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

$$c = \tan(2\pi - \alpha)$$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $c < b < a$ B) $a < c < b$ C) $b < c < a$

D) $c < a < b$ E) $c < b = a$

**5.** $\tan 125° = -a$ olmak üzere,

$$\frac{\tan 35° - \cot 215°}{1 - \tan 305°}$$

**kesrinin a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1+a}{2a}$ B) $\frac{1-a}{2a}$ C) $\frac{a}{1-a}$

D) $\frac{1-a}{a}$ E) $\frac{1+a}{a}$

**6.** $\frac{\operatorname{cosec} x + \cos x}{\sec x + \sin x}$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $\sin x$ D) $\cos x$ E) 0

**1-B** **2-A** **3-A** **4-D** **5-D** **6-B**

**7.** $\sin 198° + \sin 108° + \dfrac{1}{\sec 72°} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} 72°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2\sin 18°$ B) $-2\cos 18°$ C) $-2$ D) $0$ E) $1$

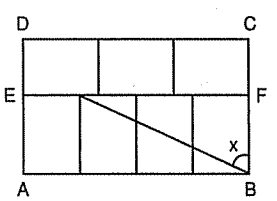
**8.** $a \neq 0°$ olmak üzere,

$$2^{\sin 3a} = \left(4^{\sin b}\right)^{\cos b}$$

**olduğuna göre, a nın b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $\dfrac{b}{3}$ B) $2b$ C) $\dfrac{2b}{3}$ D) $\dfrac{3b}{2}$ E) $3b$

**9.** ABCD dikdörtgeni şekildeki gibi boyutları eşit yedi tane dikdörtgene ayrılmıştır.




**Buna göre, cot x kaçtır?**

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{4}{9}$ C) $\dfrac{7}{4}$ D) $\dfrac{9}{4}$ E) $\dfrac{11}{4}$

**10.** $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

**olduğuna göre, sin 2x kaçtır?**

A) $\dfrac{2}{25}$ B) $\dfrac{6}{25}$ C) $\dfrac{7}{25}$ D) $\dfrac{3}{10}$ E) $\dfrac{24}{25}$

**11.** $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$ olmak üzere,

$$\frac{2\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\cos x$ B) $-\cos x$ C) $\sin 2x$ D) $-\sin 2x$ E) $2\sin x$

**12.** $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\sin 2\alpha$ D) $-\sin\alpha$ E) $-\cos\alpha$

**7-D** **8-C** **9-B** **10-E** **11-D** **12-B**

**13.** $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**olduğuna göre, tan 2x aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

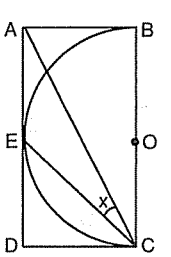
**14.** $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ olmak üzere,

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} = -\frac{7}{2}$$

**olduğuna göre, cos x kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{5}$ E) $-\frac{1}{6}$

**15.** Şekildeki O merkezli yarım çember, ABCD dikdörtgenine E noktasında teğettir.
$m(\widehat{ACE}) = x$




**olduğuna göre, tan x kaçtır?**

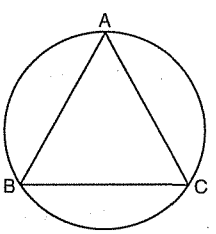
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**16.** $\sin(2 \arctan \frac{1}{2})$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

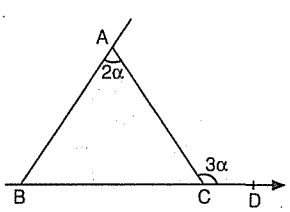
**17.** Şekildeki ABC üçgeninde,
$|AC| = 13$




**Çevrel çemberin çapı 26 cm olduğuna göre, $\sin(\widehat{ABC})$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{2}{3}$

**18.** ABC üçgeninde
$m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$
$m(\widehat{DCA}) = 3\alpha$
$|BC| = 3$ cm
$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{3}{4}$




**olduğuna göre, |AC| kaç cm dir?**

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

**13-B** **14-C** **15-B**

**16-E** **17-C** **18-B**

# TRİGONOMETRİ

TEST - 13

**1.** $f(x) = \sqrt{5} \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin(-2x)$

**fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?**

A) $\sqrt{5}-2$ B) 1 C) 2 D) 3 E) $2+\sqrt{5}$

**2.** $\alpha = \arctan 3 - \arctan \frac{1}{2}$

**olduğuna göre, $\alpha$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

**3.** $\sin(\pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}})$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{7}{25}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{24}{25}$

**4.** $\frac{\tan 105°}{\sin 105°} - \frac{\cot 75°}{\cos 75°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-2\sqrt{6}$ B) $-\sqrt{6}$ C) $-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

**5.** $\frac{1 - \sin 80° + \cos 80°}{1 + \sin 80° + \cos 80°}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) cot 5° B) tan 5° C) tan10°

D) cot 10° E) 1

**6.** $\frac{\cos^2 20° - \sin^2 100°}{\sin 190°}$

**kesrinin sadeleştirilmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1$ B) $-\sin 10°$ C) $\sin 10°$

D) $\cos 10°$ E) $\frac{1}{2}$

**7.** $16x = \pi$ olmak üzere,

$$\frac{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}{\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x}$$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**8.** $\frac{\cos 100° \cdot \cos 40°}{-1 + 2 \sin 50°}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

**1-D** **2-C** **3-D** **4-A** **5-B** **6-E** **7-C** **8-B**

**9.** $4.\sin 70° - \dfrac{1}{\sin 10°}$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $2$

D) $-\sin 10°$ E) $\cos 10°$

**10.** $f(x) = \cos 6x \,.\, \sin 2x + \sin 6x$

**fonksiyonunun esas peryodu kaç radyandır?**

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{2\pi}{3}$ C) $\pi$ D) $\dfrac{3\pi}{2}$ E) $2\pi$

**11.** $(1 + \tan 20°) \,.\, (1 + \tan 25°)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $1$ E) $2$

**12.** Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü, A, B ve 60° olduğuna göre,

$$\cos 2A + \cos 2B + 2\cos A.\cos B$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $1$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $0$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $-1$

**13.** $\sin(x + 10°) + \cos(80° - x) = \sqrt{3}$

**eşitliğini sağlayan x dar açısı kaç derecedir?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

**14.** $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$

**eşitliğini sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 45° E) 60°

**15.** $0 < x < \pi$ olmak üzere,

$$\sin x = 1 - \frac{\cos x}{\sqrt{3}}$$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\}$ B) $\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\}$ C) $\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\}$

D) $\{\dfrac{2\pi}{3}, \pi\}$ E) $\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\}$

**16.** $\sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) - \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**denklemini sağlayan x dar açılarının toplamı kaç derecedir?**

A) 135 B) 150 C) 180 D) 225 E) 240

**9-A** **10-C** **11-E** **12-D**

**13-E** **14-A** **15-C** **16-A**

**17.** $8\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin 2x - 1 = 0$

**denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{7\pi}{12}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{11\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{4\pi}{3}$

**18.** $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$

**denklemini sağlayan x değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

**19.** $\tan 2x \cdot \cot(3x - 75°) = -1$

**olduğuna göre, x in en küçük dar açı değeri kaç derecedir?**

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 30

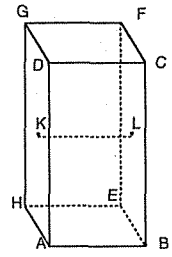
**20.** $0° < x \leq 270°$ olmak üzere,

$\sin^2 2x - 2\cos^2 x = \sin^4 x - \cos^4 x$

**denklemini sağlayan x in kaç farklı değeri vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**21.** ABCDEFGH kare dik prizmasında K ve L, bulundukları yüzeylerin köşegenlerinin kesişim noktalarıdır.

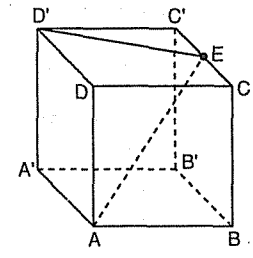



$|BE| = |AB| = 2$ cm
$|AD| = 4$ cm

**olduğuna göre, [ AF ] cisim köşegeni ile [ KL ] arasında kalan geniş açının kosinüsü kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $-\frac{\sqrt{7}}{7}$

**22.** Yandaki şekilde bir ABCDA'B'C'D' küpü verilmiştir.

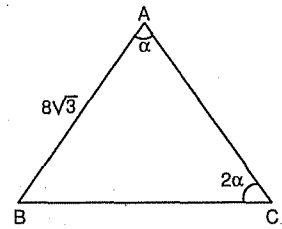



**E noktası [C'C] nin orta noktası olduğuna göre, cos (D'ÊA) kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**23.** ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$
$m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$
$|AB| = 8\sqrt{3}$ cm
$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$




**olduğuna göre, | BC | kaç cm dir?**

A) 12 B) $8\sqrt{3}$ C) 8 D) $6\sqrt{3}$ E) 6

**17-A** **18-D** **19-C** **20-C** **21-D** **22-C** **23-A**

# 2. ÜNİTE: KARMAŞIK SAYILAR

## KARMAŞIK SAYILAR

**Tanım:**

$\sqrt{-1}$ sayısına **sanal** (imajiner) **sayı birimi** denir ve $i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ ile gösterilir.

**Örnek:**

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2i,$

$\sqrt{-3} = \sqrt{-1 \cdot 3} = \sqrt{3}\,i,$

$\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{8}\,i \cdot \sqrt{2}\,i$

$= \sqrt{16} \cdot i^2 = -4$ tür.

**Sanal Birimin** (i – nin) **Kuvvetleri:**

$i = \sqrt{-1}$ ve $i^2 = -1$ olduğundan,

| | |
|---|---|
| $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ | $n \in Z$ olmak üzere, |
| $i^4 = (i^2)^2 = 1$ | $i^{4n} = 1$ |
| $i^5 = i^4 \cdot i = i$ | $i^{4n+1} = i$ |
| $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$ | $i^{4n+2} = -1$ |
| $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$ | $i^{4n+3} = -i$ olur. |

**Örnek:**

**$i^{98} + i^{-101}$ toplamını bulalım.**

**Çözüm:**

$i^{98} = i^{4.24+2} = i^2 = -1,$

$i^{-101} = i^{4.(-26)+3} = i^3 = -i$ olduğundan,

$i^{98} + i^{-101} = -1 - i$ dir.

**Tanım:**

a, b reel sayı ve i sanal sayı birimi olmak üzere; **z = a + bi** biçimindeki sayılara **karmaşık sayı** denir. Karmaşık sayılar kümesi **C** ile gösterilir.

$z = a + b\,i$ sayısında; **a** değerine karmaşık sayının **reel kısmı, b** değerine de karmaşık sayının **sanal (imajiner) kısmı** denir. **a = Re(z)** ve **b = İm(z)** şeklinde gösterilir.

$C = \{ z : z = a + bi;\ a \in R, b \in R \text{ ve } i = \sqrt{-1} \}$

**Örnek:**

$z_1 = 3 - 2\,i$ ise $Re(z_1) = 3,\ İm(z_1) = -2$

$z_2 = 4i$ ise $Re(z_2) = 0,\ İm(z_2) = 4$

$z_3 = -2$ ise $Re(z_3) = -2,\ İm(z_3) = 0$

$z_4 = \sqrt{3} + 1$ ise $Re(z_4) = \sqrt{3} + 1,\ İm(z_4) = 0$ dır.

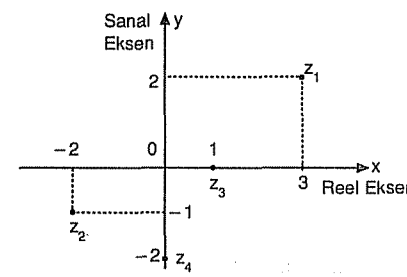
**Karmaşık Düzlem:**

$z = a + bi$ karmaşık sayısı, düzlemde (a, b) sıralı ikilisine karşılık gelir.

**Örnek:**

**$z_1 = 3 + 2i,\quad z_2 = -2 - i,\quad z_3 = 1,\quad z_4 = -2i$**

**karmaşık sayılarının düzlemdeki görüntüleri;**




şeklinde olur.

**İki Karmaşık Sayının Eşitliği:**

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere,

$z_1 = z_2$ ise $(a = c$ ve $b = d)$ dir.

**Karmaşık Sayının Eşleniği:**

$z = x + yi$ ise $\bar{z} = x - yi$ dir.

$\bar{z}$ : z karmaşık sayısının eşleniğidir.

**Örnek:**

$z_1 = 3 + 4\,i$ ise, $\bar{z}_1 = 3 - 4\,i$

$z_2 = -6\,i + 7$ ise, $\bar{z}_2 = 6\,i + 7$

$z_3 = 5$ ise, $\bar{z}_3 = 5$

$z_4 = \sqrt{3}\,i$ ise, $\bar{z}_4 = -\sqrt{3}\,i$

$z_5 = \sqrt{2} + 3\,i$ ise, $\bar{z}_5 = \sqrt{2} - 3\,i$

$z_6 = i - \sqrt{7}$ ise, $\bar{z}_6 = -i - \sqrt{7}$

$z_7 = \sqrt{5} + 1$ ise, $\bar{z}_7 = \sqrt{5} + 1$ dir.

**Uyarı:**

**i.** $\overline{(\overline{z})} = z$,  **ii.** $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$,

**iii.** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$,  **iv.** $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$,

**v.** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$  $(z_2 \neq 0)$

**vi.** İkinci dereceden, reel katsayılı, bir bilinmeyenli bir denklemin köklerinden birisi karmaşık sayı ise diğeri bu kökün eşleniğidir.

**Örnek:**

$x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin C kümesindeki çözümü;

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = -4 < 0$ olduğundan bu denklemin reel kökleri yoktur. Bu denklemin karmaşık kökleri,

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{2 \pm 2i}{2}$ ise,

$x_1 = 1 - i$,

$x_2 = 1 + i$ olur.

**Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Karmaşık Sayının Uzunluğu - Modülü):**

$z = a + bi$ karmaşık sayısının mutlak değeri, karmaşık sayının orjine olan uzaklığıdır. Buna göre,

$z = a + bi$ karmaşık sayısının mutlak değeri,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

**1.** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  **2.** $|z^n| = |z|^n$

**3.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$  **4.** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

**5.** $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |i \cdot z| = |i \cdot \overline{z}| = \ldots$

**Karmaşık Sayılarda İşlemler**

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ olmak üzere,

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ ... (Toplama)
- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$ ... (Çıkarma)
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ... (Çarpma)
- $\overline{z}_1 \cdot z_1 = (a - bi) \cdot (a + bi) = a^2 + b^2$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$ ... (Bölme)

**İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık**

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere,

$z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık:

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ olur.

**Örnek:**

**$z_1 = 2 - 2i$ ve $z_2 = -1 + 2i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.**

**Çözüm:**

$|z_1 - z_2| = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (-2 - 2)^2}$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ birimdir.

**Sonuç:**

$z_0 = a + bi$ olmak üzere,

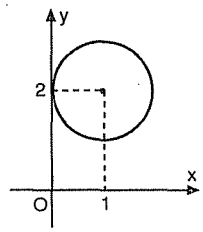
1. $|z - z_0| = r$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları; merkezi $z_0$ yani M(a,b), yarıçapı r olan çember üzerindeki noktalar kümesidir.
2. $|z - z_0| < r$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayıları; merkezi M(a,b), yarıçapı r olan çemberin iç bölgesindeki noktalar kümesidir.
3. $|z - z_0| > r$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayıları; merkezi M(a,b), yarıçapı r olan çemberin dış bölgesindeki noktalar kümesidir.

**Örnek:**

$z = x + yi$ olmak üzere,

$\{z : |z - 1 - 2i| = 1,\ z \in C\}$ kümesinin elemanları,

$|z - 1 - 2i| = |z - (1 + 2i)|$ olduğundan, merkezi M(1, 2) yarıçapı 1 birim olan çember üzerindeki noktalardır. Bu noktaların karmaşık düzlemdeki görüntüleri,




şeklinde olur.

**Karmaşık Sayının Kutupsal (Trigonometrik) Gösterimi:**

$z = x + yi$ karmaşık sayısını orijine birleştiren doğrunun reel eksenle pozitif yönde yaptığı açıya, **z karmaşık sayısının argümenti denir** ve **arg(z)** $= \theta + k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$ olarak gösterilir. Açının esas ölçüsü olan değere de esas argümenti denir ve **Arg(z)** $= \theta$ ile gösterilir. Buna göre,

- Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının kutupsal koordinatları denir ve $(r , \theta)$ şeklinde gösterilir.

$|z| = r$ **ve** $\arg(z) = \theta$ dır.

**Argümentin Özellikleri:**

$\arg(z_1) = \theta_1$ ve $\arg(z_2) = \theta_2$ olmak üzere,

**1.** $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2$

**2.** $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2$

**3.** $\arg(z_1^n) = n.\arg(z_1) = n \cdot \theta_1$

- $z = a + bi$ olmak üzere, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ , $\cos\theta = \frac{a}{r}$ , $\tan\theta = \frac{b}{a}$ dır.

**z Karmaşık Sayısının Kutupsal (Trigonometrik) Biçimi:**

$a = r \cdot \cos\theta$ ve $b = r \cdot \sin\theta$ ise,

**$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$** dır.

**Örnek:**

**$z = 1 + \sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) biçimini bulalım.**

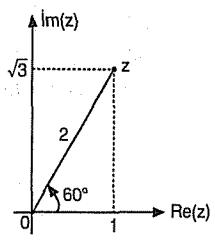
**Çözüm:**

**1. yol:**

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısı yandaki şekilde gösterilmiştir. Şekilden, $|z| = r = 2$ birim, $\text{Arg}(z) = \theta = 60°$ olarak bulunur. Buna göre;

$(r, \theta) = (2, 60°) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ve

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$ olur.




**2. yol:**

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ve $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

olduğundan, $\text{Arg}(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$ olur. O halde,

z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ve kutupsal biçimi: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$ tür.

**Kutupsal Biçimde İşlemler:**

$z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ ve $z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ olmak üzere,

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ve

$z_1^n = r_1^n \cdot [\cos(n.\theta_1) + i \sin(n.\theta_1)]$ dir.

- $\cos\theta + i \sin\theta = \text{cis}\,\theta$ şeklinde gösterilebilir.

**Örnek:**

$z_1 = 4 \cdot \text{cis}\,120°$ ve $z_2 = 2 \cdot \text{cis}\,30°$ olmak üzere,

$z_1 \cdot z_2 = (4 \cdot 2) \cdot \text{cis}\,(120° + 30°) = 8\,\text{cis}\,150°$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot \text{cis}\,(120° - 30°) = 2\,\text{cis}\,90°$

$z_1^3 \cdot z_2^2 = [4^3 \cdot \text{cis}(3 \cdot 120°)] \cdot [2^2 \cdot \text{cis}\,(2 \cdot 30°)]$

$= (2^6 \cdot \text{cis}\,360°) \cdot (2^2\,\text{cis}\,60°)$

$= 2^8 \cdot \text{cis}\,(360° + 60) = 2^8 \cdot \text{cis}\,420°$

$= 2^8\,\text{cis}\,60°$ olur.

**Karmaşık Sayının Orijin Etrafında Döndürülmesi**

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde $\alpha$ kadar döndürülmesiyle elde edilen $z'$ karmaşık sayısı;

$z' = z \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ veya

$z' = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$z' = r[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]$ dır.

**Örnek:**

**$z = 1 + \sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının saat ibresi yönünde 90° döndürülmesiyle oluşan karmaşık sayıyı bulalım.**

**Çözüm:**

z karmaşık sayısı, saat ibresi yönünde 90° döndürüldüğü için,

$\alpha = -90° = -\frac{\pi}{2}$ radyandır. Buna göre,

$z' = z \cdot \text{cis}(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow z' = (1 + \sqrt{3}\,i) \cdot (0 - i)$

$\Rightarrow z' = -i - \sqrt{3}\,i^2$

$\Rightarrow z' = \sqrt{3} - i$ olur.

**Karmaşık Sayıların n. Kuvvetten Kökleri:**

$z, u \in C$ ve $n \in N^+$ olmak üzere, $z^n = u$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarına u nun n. kuvvetten kökleri denir ve bu kökler $z = \sqrt[n]{u}$ biçiminde gösterilir.

● **$z = a + bi$ Karmaşık Sayısının Karekökleri,**

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i.\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right), \quad (b > 0)$$

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i.\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right), \quad (b < 0)$$

bağıntısı ile bulunabilir. $(r = |z|)$

**Örnek:**

**$z^2 = 5 - 12i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını bulalım.**

**Çözüm:**

**1. yol:**

Verilen eşitliği sağlayan z karmaşık sayıları $u = 5 - 12i$ karmaşık sayısının kareköklerdir.

Buna göre,

$u = 5 - 12i \Rightarrow |u| = r = 13$ olduğundan,

$$u_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} - i.\sqrt{\frac{13-5}{2}}\right) = \pm(3 - 2i)$$

ise $u_1 = z_1 = -3 + 2i, \quad u_2 = z_2 = 3 - 2i$ dir.

**2. yol:**

$z = x + yi$ olsun. O halde,

$(x + yi)^2 = 5 - 12i$

$\Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 5 - 12i$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 5$ ve $2xy = -12 \Rightarrow y = -\frac{6}{x}$ olduğundan

$x^2 - y^2 = 5$ eşitliğinde $y = -\frac{6}{x}$ yazılırsa,

$$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = 5$$

$\Rightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0 \qquad (x \in R)$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3, \quad y_1 = -\frac{6}{-3} = 2$ veya

$x_2 = 3, \quad y_2 = -\frac{6}{3} = -2$ olduğundan,

$z_1 = -3 + 2i, \quad z_2 = 3 - 2i$ olur.

**Teorem:**

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in N^+$ olmak üzere, $z^n = w$ denkleminin kökleri;

$w_k = r[\cos(\theta + k.2\pi) + i\sin(\theta + k.2\pi)]$ olduğundan,

$$z_k = \sqrt{w_k} = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right)\right]$$

$k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)\}$ dir.

● Köklerin modülleri eşit olduğundan köklerin görüntüleri olan noktalar, orijine eşit uzaklıktadır. Bu noktalar, karmaşık düzlemde merkezi orijinde olan $\sqrt[n]{r}$ yarıçaplı çember üzerinde olup, bir düzgün n - genin köşeleri olurlar.

**Örnek:**

**$z = -8i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulalım.**

**Çözüm:**

$|z| = r = 8$ birim ve $Arg(z) = 270°$ olduğundan z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları,

$\left(8, \frac{3\pi}{2}\right)$ dir. Buna göre,

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\ \text{cis}\left(\frac{1}{3}.\frac{3\pi}{2}\right) = 2\ \text{cis}\frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

$360° : 3 = 120°$ olduğundan bu üç kökü orijine birleştiren doğrular arasındaki açı $120° = \frac{2\pi}{3}$ tür.

O halde, $z_1 = 2\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\ \text{cis}\frac{7\pi}{6}$,

$$z_2 = 2\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\ \text{cis}\frac{11\pi}{6} \text{ olur.}$$

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(2+i)^2 \cdot (1+i^5) \cdot i^{22}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1+7i$ B) $1-7i$ C) $i-7$

D) $i+7$ E) $7-i$

**2.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{(8i)^5}{(2-2i)^{10}}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1$ B) $-i$ C) $\frac{1}{2}$ D) $i$ E) $1$

**3.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(3x-2y)\,i - x = 2 - 4i$$

**olduğuna göre, (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-1, 2)$ B) $(1, -2)$ C) $(-2, -1)$

D) $(2, -1)$ E) $(-2, 1)$

**4.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{64}{(1+i)^{10}} + \frac{64}{(1-i)^{11}}$$

**olduğuna göre, İm(z) kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $0$ D) $1$ E) $2$

**5.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$a < 0 < b$$

$$b + b\sqrt{a} = bi + 1$$

**olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $0$ D) $1$ E) $2$

**6.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 2 + 3i + \frac{15 - 5i}{1 + 2i}$$

**karmaşık sayısının esas argümenti $\theta$ olduğuna göre, $\cos\theta$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

**7.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z_1 = i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{7}\,i$$

**olduğuna göre,** $\left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \right|$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $2$ D) $3$ E) $4$

**8.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{\sqrt{3-4i}\,.\,(-1-2i)^3}{(-6+8i)^2}$$

**olduğuna göre,** $\left| \frac{1}{\bar{z}} \right|$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $1$ D) $4$ E) $\sqrt{5}$

**9.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{1 + \sqrt{3}\,i}$$

**olduğuna göre, $z \cdot \bar{z}$ kaçtır?**

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $1$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{5}$

**10.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$|z| + z = 2 + 4i$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-3+4i$ B) $3+4i$ C) $3-4i$

D) $2+4i$ E) $1+i$

**1-B 2-A 3-C 4-B 5-C**

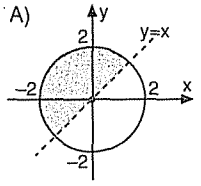
**6-C 7-B 8-D 9-C 10-A**

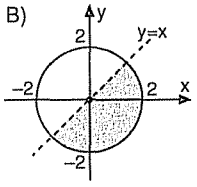
**11.** $z = x + y\,i$ olmak üzere,

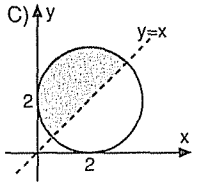
$|z| \le 2$ ve

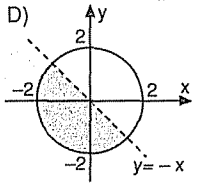
$|z + 1| < |z + i|$

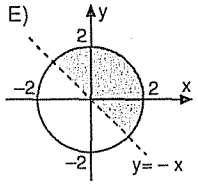
**şartlarını sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**12.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z + z.(1 + z) = -1 - 8i$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından birisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1 + 2i$ B) $-1 - 2i$ C) $-1 + 2i$

D) $1 - 2i$ E) $-4 + 2i$

**13.** **Köklerinden biri (2 – 3i) olan, reel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 4x + 13 = 0$ B) $x^2 - 4x + 1 = 0$

C) $x^2 + 4x - 13 = 0$ D) $x^2 + 4x - 10 = 0$

E) $x^2 - \sqrt{3}\,x + 5 = 0$

**14.**

$$z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,.\,i}{3 - \sqrt{3}\,.\,i}$$

**karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos 75° + i.\sin 75°)$

B) $\sqrt{3}\,(\cos 15° + i.\sin 15°)$

C) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos 45° + i.\sin 45°)$

D) $\sqrt{3}\,(\cos 30° + i.\sin 30°)$

E) $\sqrt{3}\,(\cos 60° + i.\sin 60°)$

**15.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = 1 - \sqrt{3}\,.\,i$$

**olduğuna göre, $z^{12}$ sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3^{12}$ B) $2^{12}$ C) $2^{12}.i$

D) $-2^{12}.i$ E) $-2^{12}$

**16.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}\,i}$$

**olduğuna göre, $z^6$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-4$ B) $-8$ C) $8i$ D) $4i$ E) $4$

**11-A** **12-D** **13-A**

**14-A** **15-B** **16-C**

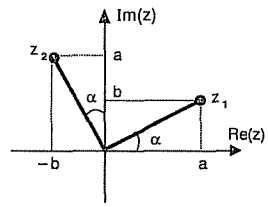
**17.** $z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos 25° + i \sin 25°)$

$z_2 = \sqrt{2} \cdot (\cos 15° + i \sin 15°)$

**olduğuna göre,** $\frac{z_1^3}{z_2}$ **karmaşık sayısının sanal kısmı kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

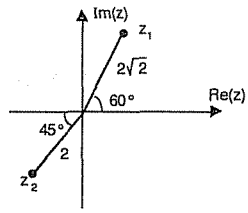
**18.** $z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayılardır.




**Şekilde verilenlere göre,** $\frac{z_1}{z_2}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) i B) – i C) cis α D) – 1 E) 1

**19.**




Yukarıdaki şekilde, $z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayıları veriliyor.

$$|z_1| = 2\sqrt{2} \quad , \quad |z_2| = 2$$

**olduğuna göre,** $z_1^2 \cdot z_2^4$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2^7 . [\cos \frac{\pi}{3} + i.\sin \frac{\pi}{3}]$

B) $2^7 . [\cos \frac{3\pi}{4} + i.\sin \frac{3\pi}{4}]$

C) $2^7 . [\cos \frac{2\pi}{3} + i.\sin \frac{2\pi}{3}]$

D) $2^7 . [\cos \frac{5\pi}{6} + i.\sin \frac{5\pi}{6}]$

E) $2^7 . [\cos \frac{5\pi}{3} + i.\sin \frac{5\pi}{3}]$

**17-C** **18-B** **19-E**

**20.** **$z_1 = 1 + 2i$ karmaşık sayısının kompleks düzlemde, saat yönünde 90° döndürülmesiyle elde edilen karmaşık sayı $z_2$ olduğuna göre, $|z_1 - z_2|$ kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{13}$

**21.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{i^{2001} + i^{2002}}{i^{2003} + i^{2004}}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) – 1 C) i D) – i E) 0

**22.** $i = \sqrt{-1}$ ve a bir reel sayı olmak üzere,

$$\sqrt{3 + ai} = 2 - i$$

**olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 4 B) – 3 C) – 2 D) 2 E) 3

**23.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{12}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) – 1 C) 0 D) i E) – i

**20-D** **21-B** **22-A** **23-A**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $i^2 = -1$, $i^5 = i$ ve $i^{22} = i^2 = -1$ olduğundan,

$$(2+i)^2 \cdot (1+i^5) \cdot i^{22} = (4+4i+i^2) \cdot (1+i) \cdot (-1)$$
$$= (3+4i) \cdot (1+i) \cdot (-1)$$
$$= (3+7i-4) \cdot (-1)$$
$$= 1-7i \quad \text{bulunur.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.**
$$\frac{(8i)^5}{(2-2i)^{10}} = \frac{(2^3)^5 \cdot i^5}{2^{10} \cdot (1-i)^{10}} = \frac{2^5 \cdot i^5}{[(1-i)^2]^5} = \frac{2^5 \cdot i^5}{(-2i)^5} = -1$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**3.** $(3x-2y)\,i - x = 2-4i$ eşitliğinin iki yanındaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşit olacağına göre,

$-x = 2$ ve $3x - 2y = -4$

$\Rightarrow x = -2$ ve $3 \cdot (-2) - 2y = -4 \Rightarrow y = -1$ olur.

$(x, y) = (-2, -1)$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.**
$$z = \frac{64}{(1+i)^{10}} + \frac{64}{(1-i)^{11}}$$
$$= \frac{64}{(2i)^5} + \frac{64}{(-2i)^5 \cdot (1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{64}{32i} \cdot \frac{i}{i} + \frac{64 \cdot (1+i)}{-32i \cdot 2} \cdot \frac{i}{i}$$
$$= -2i + (1+i) \cdot i = -2i + i + i^2$$

$\Rightarrow z = -1 - i \Rightarrow \text{Im}(z) = -1$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $a < 0 < b$ ve

$$b + b \cdot \sqrt{a} = bi + 1$$
$$\Rightarrow b + b \cdot \sqrt{(-1) \cdot (-a)} = bi + 1$$
$$\Rightarrow b + i \cdot b\sqrt{-a} = bi + 1$$
$\Rightarrow b = 1$ ve $b \cdot \sqrt{-a} = b$

$\Rightarrow \sqrt{-a} = 1$

$\Rightarrow a = -1$ bulunur.

$a + b = -1 + 1 = 0$ dır.

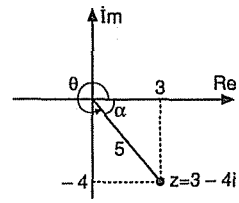
**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.**
$$z = 2 + 3i + \underset{(1-2i)}{\frac{15-5i}{1+2i}}$$
$$= 2 + 3i + \frac{5(3-i)(1-2i)}{1^2 + 2^2}$$
$$= 2 + 3i + 1 - 7i = 3 - 4i \quad \text{olur.}$$

O halde, yandaki şekilden

$\cos\theta = \cos\alpha$

$= \frac{3}{5}$ tir.




**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** $z_1 = i$ ise $|z_1| = 1$

$z_2 = \sqrt{3} + i$ ise $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{7}\,i$ ise $|z_3| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = 3$ tür

Buna göre, $\left|\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}$

$$= \frac{1 \cdot 2}{3}$$
$$= \frac{2}{3} \quad \text{olur.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**8.** $z = \dfrac{\sqrt{3-4i}\,.(-1-2i)^3}{(-6+8i)^2}$

$\Rightarrow |z| = \dfrac{\sqrt{|3-4i|}\,.|-1-2i|^3}{|-6+8i|^2}$

$= \dfrac{\sqrt{5}\,.\left(\sqrt{5}\right)^3}{10^2} = \dfrac{1}{4}$ tür.

$|z| = |\bar{z}|$ olduğundan,

$\left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $z = \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}$ veriliyor.

$|z| = \dfrac{|1-\sqrt{3}\,i|}{|1+\sqrt{3}\,i|} = 1$ ve

$z.\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**10.** $z = x + y\,i$ denilirse,

$|z| + z = 2 + 4i$

$\sqrt{x^2+y^2} + x + y\,i = 2 + 4i$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ ve $y = 4$ olur.

$\Rightarrow \sqrt{x^2+4^2} = 2 - x$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+16}\right)^2 = (2-x)^2$

$\Rightarrow x^2+16 = 4-4x+x^2$

$\Rightarrow x = -3$ bulunur.

O halde, $z = x+yi = -3+4i$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $z = x + y\,i$ olduğundan,

$|z| \le 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 2$

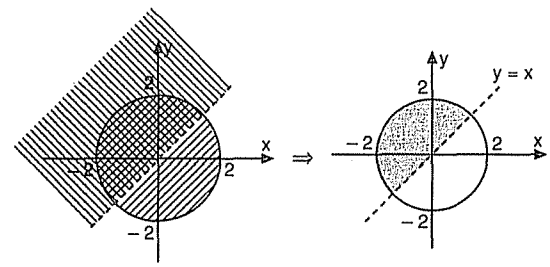
$\Rightarrow x^2 + y^2 \le 4$ ... (1)

$|z+1| < |z+i| \Rightarrow |(x+1)+y\,i| < |x+(y+1)\,i|$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 < x^2 + (y+1)^2$

$\Rightarrow x < y$ ... (2)

(1) ve (2) şartlarını sağlayan karmaşık sayıların görüntüsü aşağıdaki şekildeki gibidir.




**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** $z + z(1+z) = -1 - 8i$

$\Rightarrow z^2 + 2z + 1 = -8i$

$\Rightarrow (z+1)^2 = 8\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow z+1 = \pm\sqrt{8}\ \text{cis}\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow z+1 = \pm 2\sqrt{2}\ \text{cis}\ \dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z = -1 \pm 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$

$\Rightarrow z = -1 \pm (-2+2i)$

$\Rightarrow z_1 = -1-(-2+2i) \Rightarrow z_1 = 1-2i$

$z_2 = -1+(-2+2i) \Rightarrow z_2 = -3+2i$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.** $x_1 = 2 - 3i$ olan reel katsayılı, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin ikinci kökü $x_2 = 2 + 3i$ dir.

$x_1 = 2 - 3i$
$x_2 = 2 + 3i$

Kökler toplamı : $x_1 + x_2 = 4$
Kökler çarpımı : $x_1 . x_2 = 13$
Buna göre denklem,
$x^2 - 4x + 13 = 0$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $z = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i}{3 - \sqrt{3}\,i}$

$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \Rightarrow |z_1| = 2$ ve $z_1$ in apsisi de ordinatı da pozitif olduğundan $z_1$ I. bölgededir.

$\Rightarrow \tan\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ ise $\theta_1 = 45°$

$\Rightarrow z_1 = 2 . \text{cis}45°$

$z_2 = 3 - \sqrt{3}\,i \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{3}$ ve $z_2$ nin apsisi pozitif, ordinatı negatif olduğundan $z_2$ IV. bölgededir.

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ ise $\theta_2 = 330°$

$\Rightarrow z_2 = 2\sqrt{3} . \text{cis}\,330°$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 . \text{cis}\,45°}{2\sqrt{3} . \text{cis}\,330°}$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} . \text{cis}(-285°) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} . \text{cis}\,75°$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $z = 1 - \sqrt{3}\,i \Rightarrow |z| = 2$ ve z nin apsisi pozitif, ordinatı negatif olduğundan IV. bölgedir.

$\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 300°$
$z = 2 . \text{cis}\,300°$
$z^{12} = 2^{12} . \text{cis}(12 . 300°)$
$z^{12} = 2^{12} . \text{cis}(3600°)$
$z^{12} = 2^{12}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\,\dfrac{7\pi}{4}$,

$1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\ \text{cis}\,\dfrac{5\pi}{3}$ olduğundan,

$$z = \frac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}\,i} = \frac{2\sqrt{2}\ \text{cis}\,\frac{7\pi}{4}}{2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}}$$

$= \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{2}\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{12}$ dir.

Buna göre,

$$z^6 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \text{cis}\left(6 . \frac{\pi}{12}\right)$$

$= 8 . \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= 8i$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**17.** $z_1 = \sqrt{2} . \text{cis}\,25° \Rightarrow z_1^3 = 2\sqrt{2} . \text{cis}\,75°$
$z_2 = \sqrt{2} . \text{cis}\,15°$

$$\frac{z_1^3}{z_2} = \frac{2\sqrt{2} . \text{cis}\,75°}{\sqrt{2} . \text{cis}\,15°} = 2 . \text{cis}\,60°$$

$= 2 . \left(\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ bulunur.

$\text{İm}\left(\dfrac{z_1^3}{z_2}\right) = \sqrt{3}$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**18.** Şekilde verilenlere göre,

$z_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{cis}\ \alpha$

$z_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{cis}\ \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$= \text{cis}\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**19.** Şekilde verilenlere göre,

$z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \text{cis}\ 60°$

$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\ (180° + 45°)$ tir.

$z_1^2 = 8 \cdot \text{cis}\ 120°$

$z_2^4 = 16 \cdot \text{cis}\ (720° + 180°)$

$= 16 \cdot \text{cis}\ 180°$

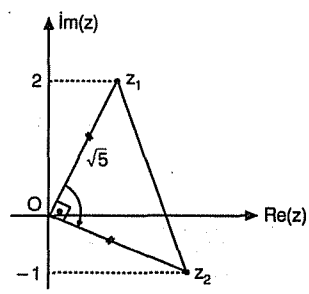
$z_1^2 \cdot z_2^4 = (8 \cdot \text{cis}120°) \cdot (16 \cdot \text{cis}180°)$

$= 2^7 \cdot \text{cis}\ 300°$

$= 2^7 \cdot \text{cis}\ \frac{5\pi}{3}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**20.** $z_1 = 1 + 2i$ karmaşık sayısı saat ibresi yönünde 90° döndürüldüğüne göre,




$|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$

$z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık, şekildeki $z_1Oz_2$ ikizkenar dikküçgeninden

$|z_1 - z_2| = |Oz_1| \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{10}$ olarak bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**21.** $$\frac{i^{2001} + i^{2002}}{i^{2003} + i^{2004}} = \frac{i - 1}{-i + 1}$$

$$= \frac{i - 1}{-(i - 1)} = -1$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**22.** $\sqrt{3 + a.i} = 2 - i$

$(\sqrt{3 + a.i})^2 = (2 - i)^2$

$3 + a.i = 3 - 4i$

olduğundan $a = -4$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**23.** $(1 - i)^2 = -2.i$ ve $(1 + i)^2 = 2.i$ dir.

$$\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{12} = \left(\frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^2}\right)^6 = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^6$$

$= (-1)^6 = 1$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 2

**1.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z_1 = 1 - 4i$
$z_2 = 3i$
$z_3 = 4$

**olduğuna göre, $İm(z_1) + Re(z_2) + Re(z_3)$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) 0 D) – 1 E) – 3

**2.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z = -1 + \sqrt{-2}$

**olduğuna göre, İm(z) – Re(z) farkı kaçtır?**

A) $-\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$
D) $-\sqrt{2}-1$ E) 0

**3.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$i^3 + i^6 + i^9$

**İşleminin sonucu kaçtır?**

A) – i B) – 1 C) 0 D) 1 E) i

**4.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$i^{-4} + i^{-3} + i^{-2}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) i B) 1 C) 0 D) – 1 E) – i

**5.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) 1 D) – 2 E) – 4

**6.**

$z_1 = 2 \cdot i + 5$
$z_2 = x \cdot i + y$
$z_1 = z_2$

**olduğuna göre, x . y çarpımı kaçtır?**

A) 10 B) 7 C) 5 D) 2 E) 0

**1-C** **2-B** **3-B** **4-A** **5-E** **6-A**

**7.** $z_1 = 3a + 2 + 5i + bi$
$z_2 = 2a + 1 + i + 2bi$
$z_1 = z_2$

**olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?**

A) – 3 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

**8.** $z = -3 - 2i$

**olduğuna göre, z nin eşleniği kaçtır?**

A) $-2i$ B) $-3$ C) $-3-2i$
D) $3-2i$ E) $-3+2i$

**9.** $z = \frac{-2+5i}{4}$

**olduğuna göre, z nin eşleniğinin sanal kısmı ile reel kısmının toplamı kaçtır?**

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{7}{4}$

**10.** $z_1 = 3x + 2yi$
$z_2 = 4x - 1 + 3yi + i$
$z_1 = z_2$

**olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**11.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z_1 = 8 + 3i$
$z_2 = -5 + i$

**olduğuna göre, $z_1 + z_2$ toplamı kaçtır?**

A) $3-4i$ B) $-3+4i$ C) $3+4i$
D) $-3i-4$ E) $4-3i$

**12.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z_1 = 2 - 4i$
$z_2 = 2 + 3i$

**olduğuna göre, $z_1 - z_2$ farkı kaçtır?**

A) $-7i$ B) $2-7i$ C) $7i+4$
D) $2+7i$ E) $7i$

**13.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 3 - 2i$

**olduğuna göre, $\frac{z_1}{z_2}$ kaçtır?**

A) $\frac{8i-1}{13}$ B) $\frac{1+8i}{13}$ C) $\frac{4-8i}{13}$
D) $\frac{2i-3}{13}$ E) $\frac{3-2i}{13}$

**14.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$\frac{2+i}{1-i}$

**karmaşık sayısının eşiti kaçtır?**

A) $\frac{3i}{2}$ B) $\frac{1-3i}{4}$ C) $\frac{3i-1}{4}$
D) $\frac{1+3i}{2}$ E) $\frac{3i-1}{2}$

**7-C** **8-E** **9-E** **10-C**

**11-C** **12-A** **13-A** **14-D**

**15.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $1+i$ B) 0 C) $1-i$

D) $i-1$ E) $i$

**16.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 3 - 2i$$

**olduğuna göre, $z \cdot \bar{z}$ kaçtır?**

A) $-13$ B) $-5$ C) 5 D) 8 E) 13

**17.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(1+i)^2 - (1-i)^2$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $1+2i$ B) $4i$ C) $-4i$ D) $-2i$ E) $-i$

**18.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(1+i) \cdot (1+i^3) \cdot (1+i^5) \cdot (1+i^7)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 8 B) $4i$ C) 4 D) $-4$ E) $-4i$

**19.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(\sqrt{2}+i)^2 \cdot (\sqrt{2}-i)^3$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\sqrt{2}-i$ B) $i+2$ C) $9(\sqrt{2}-i)$

D) $7(i-\sqrt{2})$ E) $5(\sqrt{2}+i)$

**20.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-2i$ B) $-i$ C) $-1$ D) 1 E) $2i$

**15-B** **16-E** **17-B**

**18-C** **19-C** **20-D**

**21.** $z = 3 - 4i$

**karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

**22.** $z = -2i$

**karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) kaçtır?**

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

**23.** $z = \dfrac{2-3i}{2+3i}$

**olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

**24.** $z = 2 - 3i$

karmaşık sayısı veriliyor.

**Buna göre, $|z^{-1}|$ kaçtır?**

A) $\frac{13}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{1}{13}$

**21-E** **22-B** **23-C** **24-C**

**25.** $z = (2 + i) \cdot (-4 + i)$

**olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?**

A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\sqrt{65}$

D) $\sqrt{85}$ E) $7\sqrt{5}$

**26.** $z = \dfrac{(2-i)^2 \cdot (3+4i)}{(2+i)^3}$

**olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?**

A) $5\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

**27.** $z_1 = 4 + 3i$
$z_2 = 2 - i$

**karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{8}$

**25-D** **26-D** **27-D**

**28.** $z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z - 3| = |z - 4 + 2i|$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x - 2y = 5$ B) $2x - 4y = 11$ C) $x + 3y = 7$

D) $2x + y = 11$ E) $x - 3y = 5$

**29.** $z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z - 3 + 2i| = 7$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

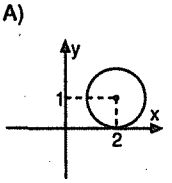
A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
B) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$
C) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 49$
D) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$
E) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$

**30.** $z = x + yi$ olmak üzere,

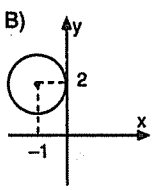
$$\{z : |z - 1 - 2i| = 1,\ z \in C\}$$

**kümesinin karmaşık düzlemdeki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

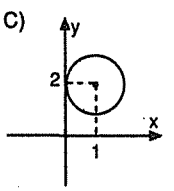
A)



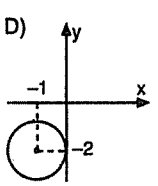

B)



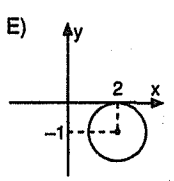

C)




D)




E)




**28-B** **29-B** **30-C**

**31.** **Kutupsal koordinatları** $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ **olan karmaşık sayı kaçtır?**

A) $\sqrt{3} + i$ B) $\sqrt{2} + i$ C) $1 + \sqrt{2}\,i$

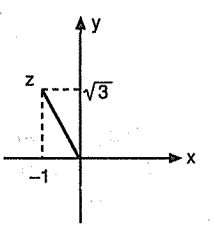
D) $-\sqrt{3} - i$ E) $2 - \sqrt{3}$

**32.** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

**karmaşık sayısının esas argümenti kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**33.** **Şekildeki z karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $3\text{cis}\frac{2\pi}{3}$ B) $2\text{cis}\frac{2\pi}{3}$ C) $\text{cis}\frac{\pi}{4}$

D) $3\text{cis}\frac{\pi}{6}$ E) $2\text{cis}\frac{\pi}{3}$

**34.** $z_1 = 6\ \text{cis}\frac{5\pi}{6}$

$z_2 = 3\ \text{cis}\frac{\pi}{6}$

**olduğuna göre,** $\frac{z_1}{z_2}$ **ifadesinin kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3\text{cis}\frac{\pi}{4}$ B) $2\text{cis}\frac{\pi}{6}$ C) $2\text{cis}\frac{2\pi}{3}$

D) $3\text{cis}\frac{2\pi}{3}$ E) $\text{cis}\frac{\pi}{4}$

**31-D** **32-D** **33-B** **34-C**

**35.** $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

**karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ B) $2\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ C) $3\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

D) $2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ E) $3\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$

**36.** $z_1 = 3\,.\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2\,.\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

**olduğuna göre, $z_1\,.\,z_2$ çarpımının kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $6\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ B) $2\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ C) $3\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$

D) $6\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ E) $6\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

**37.** $\arg(x + 1 + yi) = \frac{\pi}{4}$

**olduğuna göre, $x - y$ kaçtır?**

A) $-3$ B) $-1$ C) 1 D) 2 E) 3

**38.** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

**olduğuna göre, $z^{10}$ karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4^7.\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$ B) $2^5.\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ C) $2^{10}.\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

D) $2^{10}.\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ E) $4^5.\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

**39.** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

**karmaşık sayısının kareköklerinin kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(\sqrt{2}.\text{cis}\,\frac{\pi}{6}\,,\ \sqrt{2}.\text{cis}\,\frac{7\pi}{6})$

B) $(2.\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\,,\ 2.\text{cis}\,\frac{4\pi}{3})$

C) $(\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\,,\ \text{cis}\,\frac{5\pi}{4})$

D) $(\sqrt{2}.\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\,,\ \sqrt{2}.\text{cis}\,\frac{5\pi}{3})$

E) $(\text{cis}\,\frac{\pi}{6}\,,\ \text{cis}\,\frac{7\pi}{6})$

**40.** $z = 8$

**karmaşık sayısının küp köklerinin kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(2.\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\,,\ 3.\text{cis}\pi\,,\ 2.\text{cis}\,\frac{5\pi}{3})$

B) $(\text{cis}\,0°\,,\ \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\,,\ \text{cis}\,\frac{4\pi}{3})$

C) $(2\text{cis}\,0°\,,\ 2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\,,\ 2\text{cis}\,\frac{4\pi}{3})$

D) $(2\text{cis}\,0°\,,\ 2\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}\,,\ 2\text{cis}\,\frac{7\pi}{3})$

E) $(2\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}\,,\ 2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\,,\ 2\text{cis}\,\frac{\pi}{3})$

**35-A** **36-E** **37-B** **38-C** **39-A** **40-C**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 3

**1.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i^{17} - i^{15} + 2\,i^{7}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) i  B) – 1  C) – i  D) 1  E) 0

**2.** $i^2 = -1$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\frac{i^{4n} + 1}{1 - i^{8n+2}}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2  B) 1  C) – 1  D) – i  E) – 2i

**3.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(i^5 - 1).(i^4 + 1).(i^3 - 1).(i^2 - 1)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 16  B) – 8  C) – 2  D) 4  E) 8

**4.** $z = a + bi$ olmak üzere,

$$3z - 1 = 2.(1 + 3.i)$$

**olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?**

A) – 1  B) 0  C) 1  D) 3  E) 4

**5.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z_1 = 3i$

$z_2 = -1 + 2i$

**olduğuna göre, $\overline{z_1 + z_2}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 1 – 5i  B) 5i – 1  C) – 1 + i

D) 1 + i  E) 6i – 1

**6.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(1 + i)^{20}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2^{10}.i$  B) $-2^{10}$  C) $2^{10}$

D) $2^{20}.i$  E) $2^{20}$

**1-E** **2-B** **3-B** **4-D** **5-A** **6-B**

**7.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-i$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $i$

**8.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$u = 1 + i \quad \text{ve} \quad v = -2 + i$$

**olduğuna göre,** $\frac{u.v}{u+2}$ **işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2i$ B) $-i$ C) $-1$ D) 1 E) 2

**9.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 1 + i$$

**olduğuna göre,** $\frac{i.z + \bar{z}}{z + i.\bar{z}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**10.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{1+2i}{2-i}$$

**karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $i$ D) $-i$ E) $i-1$

**11.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{i}{2} + \frac{2}{i}\right)^2$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-3$ B) $-2$ C) $-1$ D) $-\frac{10}{3}$ E) $-\frac{9}{4}$

**12.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{(1-i)^6}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{i}{10}$ B) $-\frac{i}{9}$ C) $-\frac{i}{8}$ D) $-\frac{i}{7}$ E) $-\frac{i}{6}$

**13.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = (3+4i)(5+12i)$$

**olduğuna göre,** $|z|$ **kaçtır?**

A) 65 B) 50 C) 45 D) 30 E) 10

**14.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{4-i}{i+4}$$

**olduğuna göre,** $|z|$ **kaçtır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 4 E) 5

**7-D** **8-C** **9-B** **10-D**

**11-E** **12-C** **13-A** **14-A**

**15.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = 4 + 3i$

**olduğuna göre,** $\frac{z + \bar{z}}{z.\bar{z}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

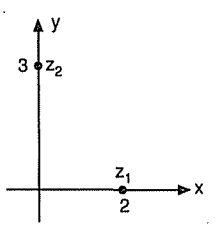
A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{8}{25}$ C) $\frac{16}{25}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

**16.** $|z - 2| = 2$

**olduğuna göre, z karmaşık sayısının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) Bir çember
B) Bir doğru
C) y ekseni üzerinde bir nokta
D) x ekseni üzerinde bir nokta
E) Bir parabol

**17.** Şekilde verilenlere göre,




$z_1.z_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2 - 3i$ B) $3i - 2$ C) $5i$
D) $2 + 3i$ E) $2 + 5i$

**18.** $z_1 = 3 + 4i$
$z_2 = 4 + 3i$

**olduğuna göre,** $z_1$ **ile** $z_2$ **karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

**19.** $z - 1 = 3i$

karmaşık sayısının esas argümenti x tir.

**Buna göre, tan x kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{3}$

**20.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{1}{1 + i} + i$

**olduğuna göre, z karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?**

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

**15-B** **16-A** **17-D** **18-A** **19-A** **20-C**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 4

**1.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = i^3 - i^6$$

**olduğuna göre, Re (z) + İm (z) kaçtır?**

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**2.**

$$\left( \left(\frac{1}{i}\right)^{-1} + \frac{1}{i^3} + i^9 \right)^2$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 9 B) $-\frac{1}{9}$ C) 3 i D) 9 E) $\frac{1}{9}$

**3.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

**4.** $z = x + iy$ olmak üzere,

$$2i \,.\, z = \overline{z} + 3i - 6$$

**olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?**

A) – 4 B) – 2 C) 2 D) – 3 E) 3

**5.**

$$z = \frac{4}{4i + (1-i)^4}$$

**olduğuna göre, İm(z) – Re(z) ifadesinin değeri kaçtır?**

A) – 1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**6.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{2}{1+i} - \frac{2}{1-i}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 2 B) – 2 i C) – i D) i E) 2 i

**1-B** **2-A** **3-A** **4-E** **5-C** **6-B**

**7.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z_1 = 4 - 2i$

$z_2 = 2 + 4i$

**olduğuna göre, $|z_1 . z_2|$ kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 10 D) 16 E) 20

**8.** $|z| = 2$ ve $\arg(z) = 120°$

**olduğuna göre, z karmaşık sayısının eşleniğinin kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2 cis 150° B) 2 cis 160° C) 2 cis 210°

D) 2 cis 240° E) 2 cis 300°

**9.** $i = \sqrt{-1}$ ve x pozitif bir reel (gerçel) sayıdır.

$z = x + i . (x - 1)$

$|z + \bar{z}| = 8$

**olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) 8 E) $8\sqrt{2}$

**10.** $z_1 = \frac{1}{2}$ cis 20°

$z_2 = 8$ cis 50°

**olduğuna göre, $(z_1)^2 . z_2$ çarpımının imajiner (sanal) kısmı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) – 1 D) 2 E) – 2

**11.** $z_1 = 2i - 2$

$z_2 = 1 + i$

**olduğuna göre, $\frac{z_1}{z_2}$ karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?**

A) $\pi$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**12.** $z = x - xi$ olmak üzere,

$|2 . z + i . \bar{z}| = \sqrt{18}$

**olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**13.** $z = \frac{(a + 3i) . (3 - 4i)}{(1 + 2i) . (3 - ai)}$

**karmaşık sayısının eşleniğinin mutlak değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{5}$ E) 5

**14.** $z = x + iy$ olmak üzere,

$|z + 3i| = 2$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ B) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$

C) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ D) $x^2 + (y + 3)^2 = 4$

E) $x^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{2}$

**7-E** **8-D** **9-B** **10-D**

**11-C** **12-C** **13-B** **14-D**

**15.** $z - 3i + 2 = 6$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının argümenti $\theta$ olduğuna göre, cos $\theta$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{4}{5}$

**16.** $z = -3i$

**karmaşık sayısının kutupsal şekli aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $z = 3$ cis $180°$ B) $z = \sqrt{3}$ cis $270°$

C) $z = 9$ cis $270°$ D) $z = 3$ cis $270°$

E) $z = 3$ cis $300°$

**17.** $z + i = (2 - 3i) \cdot \bar{z}$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının sanal kısmı kaçtır?**

A) $-\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**18.** $z_1 = -1 + i$

$z_2 = 2 - 3i$

**karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) $\frac{3}{4}$ B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

**19.** $z = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{1 - i}$

**karmaşık sayısının kutupsal biçimde yazılımı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2.cis $\frac{23\pi}{12}$ B) $\sqrt{2}$.cis $\frac{23\pi}{12}$ C) 2.cis $\frac{5\pi}{6}$

D) $\sqrt{2}$.cis $\frac{\pi}{12}$ E) cis $\frac{5\pi}{12}$

**20.** $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ve $z_2 = \sqrt{3} + i$

**sayıları için, $Arg(z_1.z_2)$ ifadesinin değeri kaç radyandır?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\pi$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**15-C** **16-D** **17-A** **18-D** **19-A** **20-E**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 5

**1.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{i^{1996} + i^{1997} + i^{1998}}{i^{-1996} + i^{-1997} + i^{-1998}}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1$ B) 1 C) $-i$ D) i E) 2i

**2.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i^{-2} + i^{-13} + i^{-15}$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) i C) 1 D) $-1$ E) $-i$

**3.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(1 + i^{96}) \cdot (1 + i^{97}) \cdot (1 + i^{98})$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) i B) 1 C) 0 D) $-1$ E) $-i$

**4.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z_1 = -x + 3y\,i + 11$
$z_2 = 4x - y + y\,i - x\,i$
$z_1 = z_2$

**olduğuna göre, (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-2, -1)$ B) $(2, -1)$ C) $(2, 1)$

D) $(1, 2)$ E) $(-1, 2)$

**5.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{1 - i}{1 + i} - \frac{1 + i}{1 - i}$$

**sayısının reel kısmı kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**6.** $i = \sqrt{-1}$ ve z bir karmaşık sayıdır.

$$(1 - i).z = 2\,i + \overline{z}$$

**olduğuna göre, Re (z) kaçtır?**

A) $-3$ B) $-2$ C) 0 D) 2 E) 3

**1-A** **2-D** **3-C** **4-B** **5-C** **6-B**

**7.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1}{i} - 1\right)^{100}$$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2^{100}$ B) $2^{50}$ C) $-2^{50}.i$

D) $-2^{50}$ E) $-2^{100}.i$

**8.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z^2 - 2.z = (1 + i)^2 - 1$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının eşleniği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $2 - i$ B) $2 + i$ C) $1 + i$

D) $1 - i$ E) $-i$

**9.** $i = \sqrt{-1}$ ve $z = x + y\,i$ olmak üzere,

$$\frac{1 - i}{z} = \frac{1 + i}{z + i}$$

**olduğuna göre, |z| kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

**10.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \sqrt{\frac{(1-2i).(3-i\sqrt{7})}{\sqrt{3+4i}}}$$

**olduğuna göre, |z| kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) 4 E) $2\sqrt{5}$

**11.** $i = \sqrt{-1}$ ve $z = x + y\,i$ olmak üzere,

$$z \,.\, \bar{z} = z^2 + 4$$

**olduğuna göre, |z| kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

**12.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$|4 - 3i - z| = 5$$

**eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
B) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$
C) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
D) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
E) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

**13.** $i = \sqrt{-1}$ ve $z = x + y\,i$ olmak üzere,

$$z \,.\, \bar{z} = (1 - z) \,.\, (1 - \bar{z})$$

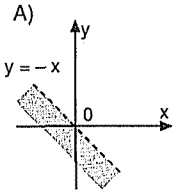
**şartını sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?**

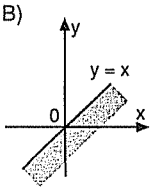
A) Bir çember
B) Bir parabol
C) Orijinden geçen bir doğru
D) Gerçel eksene dik bir doğru
E) Sanal eksene dik bir doğru

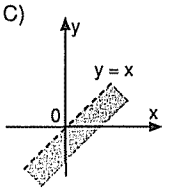
**7-D** **8-A** **9-A** **10-B** **11-A** **12-E** **13-D**

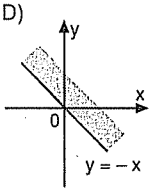
**14.** $\{ z : \left| \frac{z - i}{z + 1} \right| \leq 1 , \ i^2 = -1 \text{ ve } z \in C \}$

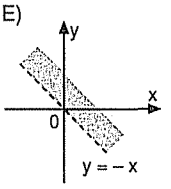
**kümesinin karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?**

A)



B)



C)



D)



E)



**15.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\arg\left(\frac{z + i}{i}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

**olduğuna göre, Re(z) – İm(z) kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**16.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{6} \, . \, i$$

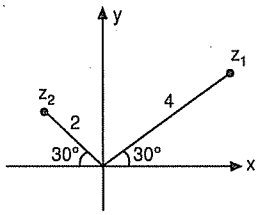
**karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2\sqrt{2}$ cis $\frac{2\pi}{3}$ B) $2\sqrt{2}$ cis $\frac{4\pi}{3}$

C) $2\sqrt{2}$ cis $\frac{5\pi}{3}$ D) $3\sqrt{2}$ cis $\frac{4\pi}{3}$

E) $3\sqrt{2}$ cis $\frac{5\pi}{3}$

**17.** **Şekilde verilenlere göre,** $\frac{z_1^2}{z_2}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**




A) – 16 i B) – 8 i C) 8 i D) 16 i E) 8

**18.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^4}{1 - \sqrt{3}\, i}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 8 B) – 4 C) 2 D) 4 E) 8

**19.** $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$z_1 = 5(\cos 235° + i.\sin 235°)$

$z_2 = 12(\cos 325° + i.\sin 325°)$

**olduğuna göre, $z_1$ ile $z_2$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) 7 B) $\sqrt{14}$ C) 13 D) 15 E) 16

**14-D** **15-D** **16-C**

**17-B** **18-A** **19-C**

# KARMAŞIK SAYILAR

TEST - 6

**1.** $z = (1 + i\sqrt{3})^{245}$

**sayısının argümenti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{11\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**2.** ABC bir üçgen olup köşelerinin görüntüleri,

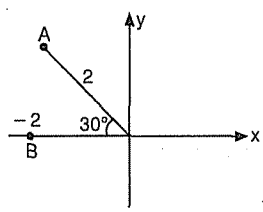
$A = 6 + i$
$B = 5 + 5i$
$C = 2 + i$

**olduğuna göre, ABC üçgeninin çevresi kaçtır?**

A) $9 + \sqrt{15}$ B) $3 + \sqrt{15}$ C) $9 + \sqrt{17}$

D) 14 E) $5 + \sqrt{17}$

**3.**




**$z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayılarının görüntüleri sırasıyla A ve B noktaları olduğuna göre, $z_1 . z_2$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ B) $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$ C) $2(1 - \sqrt{3}i)$

D) $2(-1 + \sqrt{3}i)$ E) $2.(\sqrt{3} - i)$

**4.** $\sqrt{-3} . \sqrt{-27} . \sqrt{-1}$

**çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 9 B) − 9 C) 9i D) − 9i E) 3i

**5.** $z_1 = 2 + i$

karmaşık sayısının saat ibresi yönünde 90° döndürülmesiyle elde edilen yeni karmaşık sayı $z_2$ dir.

**Buna göre, $z_1$ ve $z_2$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{15}$ E) $4\sqrt{5}$

**6.** $A = \{z : |z - (4 + 3i)| \leq 2,\ z \in C\}$

**kümesi karmaşık düzlemde aşağıdakilerden hangisini belirtir?**

A) Merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 birim olan çember
B) Merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 birim olan çemberin iç bölgesi
C) Merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 birim olan çemberin dış bölgesi
D) Merkezi (4, 3) ve yarıçapı $\sqrt{2}$ birim olan çember ve iç bölgesi
E) Merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 birim olan çemberin kendisi ve iç bölgesi

**7.** Her x pozitif reel sayısı için,

$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

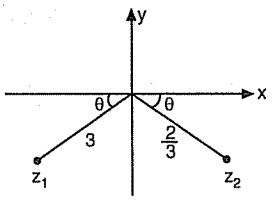
**olduğuna göre, $\sqrt{-18} . \sqrt{-8}$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) − 12 i B) 12 i C) 12

D) − 12 E) $-\sqrt{2}\,i$

**1-B** **2-C** **3-E** **4-D** **5-C** **6-E** **7-D**

**8.**




**Yukarıdaki şekle göre, $z_1^{-1}.z_2^{-1}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2

B) $-\frac{1}{2}$

C) $2(\cos\theta + i\sin\theta)$

D) $-2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

E) $2[\cos(2\pi-\theta) + i\sin(2\pi-\theta)]$

**9.** $a < b < 0 < c$ olmak üzere,

$$\sqrt{(a-b)c^2} + \sqrt{(c-b)a^2} = -2a + c\,i$$

**olduğuna göre, c – a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**10.** $$z = \frac{(2-\sqrt{2}\,i)^2 \cdot (2+i)^3}{4-3\,i}$$

**karmaşık sayısının mutlak değeri kaçtır?**

A) 30 B) $\sqrt{5}$ C) 15 D) $\frac{\sqrt{5}}{30}$ E) $6\sqrt{5}$

**11.** $$z = \frac{3-i}{1-3i}$$

**olduğuna göre, $\frac{1}{|z|}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

**8-B** **9-E** **10-E** **11-C**

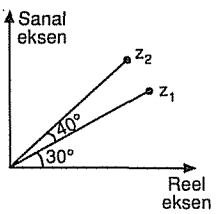
**12.** $f(x) = x^{n+1} - x^{n+2} + x^{n+3} - x^{n+4}$

fonksiyonu veriliyor.

**Buna göre, f(i) + f(–i) toplamının sonucu kaçtır?**

A) – 2i B) 2i C) 0 D) i E) – i

**13.**

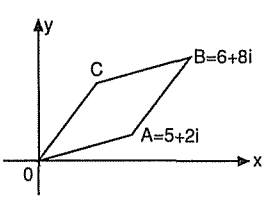



Karmaşık düzlemde verilen $z_1$ ve $z_2$ noktaları için, $|z_1| = |z_2| = 2$ dir.

**Buna göre, $\frac{z_2^3}{z_1}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 4 B) – 4i C) 4 + 4i D) 6 – 6i E) – 4

**14.**




OABC paralelkenardır. A ya ve B ye karşılık gelen karmaşık sayılar sırasıyla

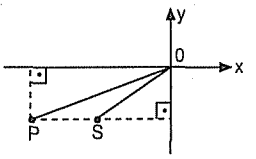
$5 + 2i$ ve $6 + 8i$

**olduğuna göre, C ye karşılık gelen sayının sanal kısmı nedir?**

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) 6

**12-C** **13-E** **14-E**

**15.**




Şekildeki S noktasına karşılık gelen karmaşık sayı $(1 - 3i)(1 + i)^{-1}$ dir.

**$|OP| = \sqrt{22}$ olduğuna göre, P ye karşılık gelen karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-4 - 2i$ B) $-3 + i$ C) $-3\sqrt{2} - 2i$

D) $-5 - 3i$ E) $-6 - 4i$

**16.** $f(x + 3) = f(x)(a + bi)$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$f(i) = 2$
$f(i + 6) = 12\,i$

**olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?**

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{6}$ E) $12\sqrt{5}$

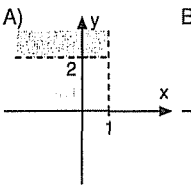
**17. Köklerinden biri (1 + i) olan 2. derece denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 2x + 2 = 0$
B) $x^2 - 2x + 3 = 0$
C) $x^2 + 2x + 2 = 0$
D) $x^2 + 2x - 2 = 0$
E) $x^2 - 2x - 2 = 0$

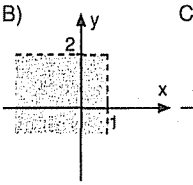
**18.** $A = \{ z \in C \mid Re(z) > 1 \text{ ve } Im(z) < 2 \}$

**kümesinin elemanlarının karmaşık düzlemdeki gösterilişi aşağıdakilerden hangisidir?**

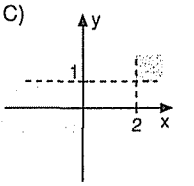
A)



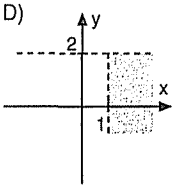

B)



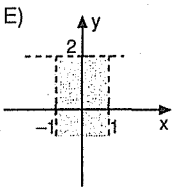

C)




D)




E)




**19. z karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsü 3. bölgede olduğuna göre, bu sayının i ile çarpımının eşleniğinin görüntüsü hangi bölgede bulunur?**

A) 1. Bölge B) 2. Bölge C) 3. Bölge

D) 4. Bölge E) Orjin noktası

**20.** $(3 + i)^3 \cdot (3 - i)^3$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 10 B) 100 C) 1000 D) 2000 E) 200

**15-C** **16-A** **17-A** **18-D** **19-A** **20-C**

# 3. ÜNİTE: LOGARİTMA

## LOGARİTMA

**Tanım:**

Üstel fonksiyonun tersi logaritma fonksiyonudur.

$a \in R^+ - \{1\}$ ve $x \in R^+$ olmak üzere,

$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$ tir.

**Örnek:**

- $3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2$,
- $5^3 = 125 \Leftrightarrow \log_5 125 = 3$,
- $2^{-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 (\frac{1}{4}) = -2$,
- $4^0 = 1 \Leftrightarrow \log_4 1 = 0$ dır.

**Örnek:**

**$\log_3 81$ in değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 = 3^4$

$\Rightarrow x = 4$ olduğundan,

$\log_3 81 = 4$ tür.

Buradan, $\log_3 81$ in değerini bulma işlemi 3 ün hangi kuvvetinin 81 olduğunu bulma işlemidir.

**Uyarı:**

Logaritma fonksiyonu pozitif reel sayılar kümesinden reel sayılar kümesine tanımlıdır. Yani sadece pozitif reel sayıların logaritması vardır.

**Örnek :**

$y = \log_{x+1}(3 - x)$

**fonksiyonunun tanım aralığını (kümesini) bulalım.**

**Çözüm :**

$y = \log_a x$ in tanım şartları,

**i.** $x > 0$

**ii.** $a > 0$ ve $a \neq 1$ olduğundan;

$$\left.\begin{array}{l} 3 - x > 0 \text{ ve} \\ x + 1 > 0 \text{ ve } x + 1 \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 > x \text{ ve} \\ x > -1 \text{ ve } x \neq 0 \end{array}$$

olduğuna göre,

x in alabileceği değerlerin en geniş aralığı

$-1 < x < 3$ ve $x \neq 0$ olur.

Buna göre,

$y = \log_{x+1} (3 - x)$ fonksiyonunun tanım aralığı (kümesi)

$(-1, 3) - \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 3)$ tür.

**Örnek:**

$y = 3^{x-1}$

**olduğuna göre, x in eşitini bulalım.**

**Çözüm:**

$y = 3^{x-1} \Rightarrow \log_3 y = \log_3 3^{x-1}$

$\Rightarrow \log_3 y = (x - 1) \log_3 3$

$\Rightarrow \log_3 y = (x - 1) . 1 \Rightarrow x = 1 + \log_3 y$ veya

$x = \log_3 3 + \log_3 y$

$x = \log_3 (3y)$ dir.

Burada, logaritmanın tanımı kullanılarak da **(x – 1) in yani üssün eşiti kısaca,** $y = 3^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 y$ şeklinde bulunabilir.

**Logaritma Fonksiyonunun Grafiği**

$y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonu için;

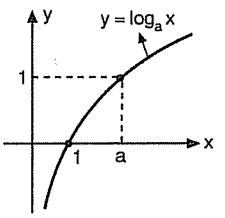
**$y = f(x) = \log_a x$ in grafiği:**

**I. Durum:** $a > 1$ olsun.

$y = \log_a x$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = a \Rightarrow y = 1$




$a > 1$ ise $y = \log_a x$ fonksiyonu artandır.

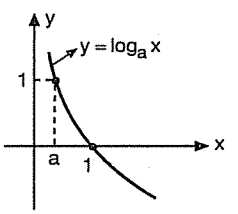
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ dir.

**II. Durum:** $0 < a < 1$ olsun.

$y = \log_a x$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = a \Rightarrow y = 1$




$0 < a < 1$ ise $y = \log_a x$ fonksiyonu azalandır.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$ dir.

**On Tabanında Logaritma (Bayağı Logaritma) Fonksiyonu**

**Tabanı 10** olan logaritma fonksiyonuna **bayağı (onluk) logaritma** fonksiyonu denir.

$f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_{10} x = \log x$

biçiminde gösterilir.

**Doğal Logaritma Fonksiyonu**

Yaklaşık değeri 2,71828183... olan irrasyonel sayı **e** olmak üzere, **tabanı e** olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma** fonksiyonu denir.

$f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_e x = \ln x$

şeklinde gösterilir.

**Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri**

$a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

1. **$\log_a a = 1$ dir.** $\log_{10} 10 = 1$, $\ln e = 1$

2. 1 in logaritması 0 dır. **$\log_a 1 = 0$**

3. Bir çarpımın logaritması, çarpanların logaritmaları toplamına eşittir.

   i. **$\log_a (x \cdot y \cdot z) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$ dir.**

   ii. **$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ olur.**

4. Bir bölümün logaritması, payın logaritmasından paydanın logaritmasının çıkarılmasıyla bulunur.

   $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \text{dir.}$$

5. **$a^{\log_a x} = x$ tir.**

**Örnek:**

$a = \log 375$ ve $b = \log 5$

**olduğuna göre, log 3 ün değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$a = \log 375 \Rightarrow a = \log (3.125)$

$\Rightarrow a = \log (3.5^3)$

$\Rightarrow a = \log 3 + \log 5^3$

$\Rightarrow \log 3 = a - 3 \cdot \log 5$

$\Rightarrow \log 3 = a - 3 \cdot b$ dir.

6. **Taban Değiştirme Kuralı:**

   $a, b, c \in R^+$ ve $a \neq 1$, $c \neq 1$ olmak üzere,

   $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{dır.}$$

I. **$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$ ,**

**ii.** $\log_a b . \log_b a = \log_a a = 1$

$\Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ **dir.**

**Örnek:**

$\log_2 3 = a$

$\log_5 2 = b$

**olduğuna göre,** $\log_6 10$ **un değerini bulalım.**

**Çözüm:**

Verilen iki eşitlikte ortak olan sayı değeri 2 olduğundan $\log_6 10$ un 2 tabanındaki eşitini yazalım.

$$\log_6 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 6}$$

$$= \frac{\log_2 (2.5)}{\log_2 (2.3)}$$

$$= \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3}$$

$\log_5 2 = b \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{b}$ olduğundan,

$$= \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + a} = \frac{b + 1}{(1 + a)b} \quad \text{dir.}$$

**iii.** $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b,$

(Bu kurala göre, logaritması alınan sayı ile logaritma tabanının aynı kuvveti alınabilir.)

**Örnek:**

$\log_4 25 = \log_2 5 = \log_8 125 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$ tir.

**iv.** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ **dır.**

**Örnek:**

$5^{\log_3 4} = 4^{\log_3 5}$ olur.

**Logaritmalı Denklemler ve Eşitsizlikler:**

**1.** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

**2.** $a > 1$ için $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

**3.** $0 < a < 1$ için $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

**Karakteristik ve Mantis:**

x pozitif reel sayı, k bir tamsayı ve $0 \leq m < 1$ olmak üzere, $\log x = k + m$ olacak şekilde, **k tamsayısına** logaritmanın **karakteristiği**, **m reel sayısına** da logaritmanın **mantisi** denir.

**Örnek:**

$\log a = 2{,}125$ ise $k = 2$ ve $m = 0{,}125$ tir.

$k = -3$ ve $m = 0{,}477$ ise $\log b = \overline{3}{,}477$ dir.

Ayrıca, burada log b nin değeri,

$\log b = -3 + 0{,}477 = -2{,}523$ tür.

**Örnek:**

$\log c = -1{,}024$ ise,

$= -1 - 0{,}024 + 1 - 1$

$= -2 + 1 - 0{,}024$

$= -2 + 0{,}976$

$= \overline{2}{,}976$ olur.

Buradan, $k = -2$ ve $m = 0{,}976$ dır.

**Kologaritma:**

x pozitif bir reel sayı olmak üzere, **x in çarpmaya göre tersinin logaritmasına** x in **kologaritması** denir ve **colog x** şeklinde gösterilir.

$\text{colog } x = \log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x$ olduğundan,

**colog x = – log x** tir.

**Örnek:**

$\text{colog } 1000 = -\log 1000$

$= -\log 10^3$

$= -3$ tür.

**Örnek:**

$\text{colog } a = 2$

**olduğuna göre, a nın değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\text{colog } a = 2 \Rightarrow \log a = -2$

$\Leftrightarrow a = 10^{-2}$

$\Rightarrow a = 0{,}01$ dir.

# LOGARİTMA

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = \log_{x-2}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x > 1$ B) $x > 2$ C) $1 < x < 2$

D) $x \geq 3$ E) $(2, \infty) - \{3\}$

**2.** $\log^2 x^4 = 64$

**olduğuna göre, $\sqrt{x}$ in değerlerinden biri kaçtır?**

A) 10 B) $10^2$ C) $10^4$ D) $10^6$ E) $10^8$

**3.** $\log_x 3 = 2 - \log_3 x$

**olduğuna göre, x in değeri kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

**4.** $\log_x(\log_{\sqrt{2}}(\log_3 81)) = \frac{1}{2}$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64

**5.** $\log\left(\frac{x^2 + x - 1}{5}\right) = 0$

**denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**6.** $\log_a c = 2$

$\log_b a = 3$

**olduğuna göre, $\log_c b$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 3 E) 6

**7.** $\log 4 = a$

**olduğuna göre, log 5 aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2 - a$ B) $\frac{2-a}{2}$ C) $a - 2$ D) $\frac{a-2}{2}$ E) $\frac{a}{2}$

**8.** $a = \log 6{,}3$ ve $b = \log 3$

**olduğuna göre, log 7 nin a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a - 2b$ B) $a + 2b$ C) $2b - a$

D) $1 + a - 2b$ E) $2b - a - 1$

**1-E** **2-A** **3-A** **4-D**

**5-A** **6-A** **7-B** **8-D**

**9.** $a = \log_2 3$ ve $b = \log_3 5$

**olduğuna göre, log 45 in a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2a + b}{a + b}$ B) $\frac{2 + b}{1 + ab}$ C) $\frac{a(2 + b)}{1 + ab}$

D) $\frac{2 + b}{ab}$ E) $\frac{a + b}{ab}$

**10.** $\log_3 5 = a$

**olduğuna göre, $\log_{75} 45$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olur?**

A) $\frac{2 - a}{a + 1}$ B) $\frac{2 + a}{2a + 1}$ C) $\frac{3 + 2a}{1 - a}$

D) $\frac{a + 3}{2a - 1}$ E) $\frac{a + 2}{3a - 1}$

**11.** $\log_{\sqrt{2}} a = \log_2 b$

**olduğuna göre, $\log_{(a.b)} b$ kaçtır?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**12.** $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = 3^{\log_3 2x}$

**olduğuna göre, x in değeri kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**13.** $\log (2x-1) + 2 \log \frac{\sqrt[3]{64}}{2} = \log 8 - 2 \log \sqrt{x-2}$

**denklemini sağlayan x değeri kaçtır?**

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) 3 E) 4

**14.** $\ln [\ln (\log a)] = 1$

$\log [\ln (\ln b)] = 0$

**olduğuna göre, b nin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) log a B) ln a C) 10a

D) $a^{11}$ E) a

**15.** $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = 2$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**16.** $\log_3 25 \cdot \log_4 7 \cdot \log_5 121 \cdot \log_{11} 2 = \log_9 x$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $5^4$ B) $5^5$ C) $5^6$ D) $7^4$ E) $7^5$

**9-C** **10-B** **11-E** **12-B**

**13-A** **14-A** **15-E** **16-D**

**17.** $\log a - 2 \cdot \log b = 3$

$3 \cdot \log a + 5 \cdot \log b = 20$

**olduğuna göre, $\log_b a$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 5

**18.** $4^x - 2^x - 6 = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{1, \log_2 3\}$ B) $\{-2, 3\}$ C) $\{\log_4 3\}$

D) $\{\ln 3\}$ E) $\{\log_2 3\}$

**19.** $\frac{1}{\log_x y} - \frac{2}{\log_y x} - 1 = 0$

**olduğuna göre, x ile y arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi doğrudur?**

A) $y = x^2$ B) $x = y^3$ C) $y = x^3$

D) $x \cdot y = 1$ E) $x \cdot y = 2$

**20.** $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 3$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{\ln\sqrt{2}\}$ B) $\{\ln 2\}$ C) $\{\log e\}$

D) $\{-\ln 2\}$ E) $\{\ln 3\}$

**21.** $f(x) = \log(x-1) + \log(7-x) - \log(x+2)$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-1, 7)$ C) $(-2, -1)$

D) $(1, 7)$ E) $(-\infty, -2) \cup (1, 7)$

**22.** $\frac{1}{\log_x xy} + \frac{1}{\log_y xy} + 1$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) $\log_x y$ D) $\log_y x$ E) $\log_{xy} x$

**23.** $\ln(x-y) = \ln x - \ln y$

**olduğuna göre, x in y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{y^2}{y-1}$ B) $\frac{y}{y-1}$ C) $\frac{y+1}{y-1}$

D) $\frac{y-1}{y^2+1}$ E) $\frac{y^2}{y+1}$

**24.** $x^{\ln x} = e$

**denkleminin kökler çarpımı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) e D) $e^2$ E) $e^3$

**17-E** **18-E** **19-D** **20-A** **21-D** **22-B** **23-A** **24-A**

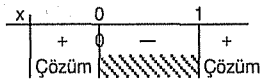
# LOGARİTMA

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** i) $x-2>0 \Rightarrow x>2$

ii) $x-2\neq 1 \Rightarrow x\neq 3$

iii) $\frac{x}{x-1}>0$




$x<0$ veya $x>1$ dir.

i, ii ve iii nin ortak çözümleri alınırsa tanım aralığı $2<x<3$ veya $x>3$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** $\log^2 x^4 = (\log x^4)^2 = 64$ ise

$\log x^4 = 8$ veya $\log x^4 = -8$ dir.

$\Leftrightarrow x^4 = 10^8$ $\quad$ $\Leftrightarrow x^4 = 10^{-8}$

$\Rightarrow x = 10^2$ $\quad$ $\Rightarrow x = 10^{-2}$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 10$ $\quad$ $\Rightarrow \sqrt{x} = 10^{-1}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**3.** $\log_x 3 = 2 - \log_3 x$

eşitliğinde $t = \log_x 3$ dönüşümü yapılırsa,

$t = 2 - \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 = 2t - 1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$\Rightarrow (t-1)^2 = 0$

$\Rightarrow t = \log_x 3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 3$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**4.** $\log_x (\log_{\sqrt{2}} (\log_3 81)) = \frac{1}{2}$

$\log_x (\log_{\sqrt{2}} (\log_3 3^4)) = \frac{1}{2}$

$\log_x (\log_{\sqrt{2}} 2^2) = \frac{1}{2}$

$\log_x (\log_2 2^4) = \frac{1}{2}$

$\log_x 4 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^{1/2} = 4$

$\Rightarrow x = 16$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $\log\left(\frac{x^2+x-1}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2+x-1}{5} = 1$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x+3).(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 2$ dir.

$x$ değerlerinin toplamı $-1$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**6.** $\log_a c = 2$

$\log_b a = 3$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$\log_b a \cdot \log_a c = 6$

$\frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log c}{\log a} = 6$

$\Rightarrow \frac{\log c}{\log b} = 6 \Rightarrow \log_b c = 6 \Rightarrow \log_c b = \frac{1}{6}$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $\log 2^2 = a \Rightarrow 2 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{2}$ dir.

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$

$= \log 10 - \log 2$

$= 1 - \frac{a}{2} = \frac{2-a}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**8.** $a = \log 6{,}3$ ve $b = \log 3$ veriliyor.

$a = \log \frac{63}{10} = \log (9 \cdot 7) - \log 10$

$a = \log 3^2 + \log 7 - \log 10$

$\Rightarrow a = 2 \cdot b + \log 7 - 1$

$\Rightarrow \log 7 = a - 2b + 1$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $a = \log_2 3$ ve $b = \log_3 5$ eşitliklerinde ortak olan sayı 3 olduğundan, log 45 sayısını 3 tabanında yazalım.

$\log_{10} 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 10}$

$= \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5}$

$= \frac{2 + b}{\frac{1}{a} + b} = \frac{a(2+b)}{1 + ab}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**10.** $\log_3 5 = a$ veriliyor.

$\log_{75} 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 75}$

$= \frac{\log_3 (3^2 \cdot 5)}{\log_3 (3 \cdot 5^2)}$

$= \frac{2 \cdot \log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 3 + 2 \cdot \log_3 5}$

$= \frac{2 + a}{1 + 2a}$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11. 1. Yol:**

$\log_{\sqrt{2}} a = \log_2 b \Rightarrow \log_2 a^2 = \log_2 b$

$\Rightarrow b = a^2$ dir.

O halde,

$\log_{(a.b)} b = \log_{(a.a^2)} a^2$

$= \log_{a^3} a^2$

$= \frac{2}{3}$ tür.

**2. Yol:**

$\log_{\sqrt{2}} a = \log_2 b \Rightarrow \frac{\log a}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log b}{\log 2}$

$\Rightarrow \frac{\log a}{\log b} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log 2}$

$\Rightarrow \log_b a = \frac{1}{2}$ ve

$\log_{(a.b)} b = \frac{1}{\log_b (a \cdot b)}$

$= \frac{1}{\log_b a + \log_b b}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$ tür.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12.** $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ olduğundan,

$\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = 3^{\log_3 2x}$

$\Rightarrow \log_2 \left[(2^{-2})^{(1-x)}\right]^2 = 2x$

$\Rightarrow -2 . (1-x) . 2 = 2x \Rightarrow x = 2$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** $\log (2x-1) + 2 . \log \frac{\sqrt[3]{64}}{2} = \log 8 - 2 . \log \sqrt{x-2}$

$\log (2x-1) + 2 . \log 2 = 3 . \log 2 - \log \left[\sqrt{x-2}\right]^2$

$\log (2x-1) + \log (x-2) = \log 2$

$\log [(2x-1) . (x-2)] = \log 2$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 2$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x . (2x-5) = 0$

$x = 0$ veya $x = \frac{5}{2}$

( $x = 0$ denklemi sağlamaz.)

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $\ln [\ln (\log a)] = 1$

$\log [\ln (\ln b)] = 0 \Rightarrow \ln (\ln b) = 1 = \ln [\ln (\log a)]$

$\Rightarrow \ln b = \ln (\log a)$

$\Rightarrow b = \log a$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = 2$

$\Rightarrow \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 6 = 2$

$\Rightarrow \log_x (2 . 3 . 6) = 2 \Leftrightarrow 36 = x^2 \Rightarrow x = 6$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** $\log_3 25 . \log_4 7 . \log_5 121 . \log_{11} 2 = \log_9 x$

$2 . \log_3 5 . \log_5 121 . \log_{121} 4 . \log_4 7 = \frac{1}{2} . \log_3 x$

$\Rightarrow 4 . \log_3 7 = \log_3 x$

$\Rightarrow \log_3 7^4 = \log_3 x \Rightarrow x = 7^4$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**17.** $-3 /$ $\log a - 2 . \log b = 3$ ... I

$3 . \log a + 5 . \log b = 20$ ... II

Taraf tarafa toplama yapılırsa;

$11 . \log b = 11 \Rightarrow \log b = 1 \Leftrightarrow b = 10$ olur.

b değeri I. eşitlikte yerine yazılırsa,

$\log a - 2 . 1 = 3 \Rightarrow \log a = 5 \Leftrightarrow a = 10^5$ bulunur.

$\log_b a = \log_{10} 10^5 = 5$ tir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**18.** $4^x - 2^x - 6 = 0$

denkleminde $2^x = a$ dönüşümü yapılırsa;

$a^2 - a - 6 = 0$

$(a - 3) . (a + 2) = 0$

$a = 3$ veya $a = -2$

$\Rightarrow 2^x = 3$ $\Rightarrow 2^x = -2 \Rightarrow x \notin R$

$\Rightarrow x = \log_2 3$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** $\frac{1}{\log_x y} - \frac{2}{\log_y x} - 1 = 0$

$\log_x y = t$ dönüşümü yapılırsa,

$\frac{1}{t} - 2t - 1 = 0$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$(2t - 1) . (t + 1) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ veya $t = -1$

$\Rightarrow \log_x y = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_x y = -1 \Leftrightarrow y = x^{-1}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y^2 = x$ $\Rightarrow y . x = 1$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**20.** $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 3 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 3 . e^x - 3 . e^{-x}$

$\Rightarrow 4 . e^{-x} = 2 . e^x$ ve

eşitliğin iki yanı $e^x$ ile çarpılırsa,

$\Rightarrow 2 . e^{-x} . e^x = e^x . e^x$

$\Rightarrow 2 = e^{2x} \Rightarrow \sqrt{2} = e^x$

$\Leftrightarrow x = \ln \sqrt{2}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** $f(x) = \log (x - 1) + \log (7 - x) - \log (x + 2)$ ifadesinde

$x - 1 > 0$ , $7 - x > 0$ ve $x + 2 > 0$ olmalıdır.

$x > 1$ , $x < 7$ , $x > -2$ olduğuna göre, ortak çözüm

$1 < x < 7$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**22.** $\frac{1}{\log_x xy} + \frac{1}{\log_y xy} + 1 = \log_{xy} x + \log_{xy} y + 1$

$= \log_{xy} (x.y) + 1 = 1 + 1 = 2$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**23.** $\ln(x - y) = \ln x - \ln y$

$\ln(x - y) = \ln \frac{x}{y} \Rightarrow x - y = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow xy - y^2 = x \Rightarrow xy - x = y^2$

$\Rightarrow x(y - 1) = y^2$ olduğuna göre $x = \frac{y^2}{y - 1}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**24.** $x^{\ln x} = e \Rightarrow \ln x^{\ln x} = \ln e$

$\Rightarrow (\ln x) . (\ln x) = 1$

$\Rightarrow (\ln x)^2 = 1$

$\Rightarrow \ln x = 1$ veya $\ln x = -1$ dir.

$\Rightarrow x_1 = e$ veya $x_2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$ dir.

O halde kökler çarpımı

$x_1 . x_2 = e . \frac{1}{e} = 1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# LOGARİTMA

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** $\log\left(\log_2(\ln x)\right) = 0$

**olduğuna göre, x değeri kaçtır?**

A) e  B) $\sqrt{10}$  C) $e^2$  D) 10  E) 100

**2.** $\log_3\left(3 \cdot \log_2\left(\log_x 2\right)\right) = 1$ .

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$  B) $\sqrt{2}$  C) 1  D) 2  E) 4

**3.** $f(x) = \log_{(5-x)}(x - 1)$

**fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan tamsayıların toplamı kaçtır?**

A) 2  B) 3  C) 4  D) 5  E) 8

**4.** $f(x) = 1 + \log_2(x - 1)$

**olduğuna göre, $f^{-1}(3)$ kaçtır?**

A) 2  B) 3  C) 5  D) 9  E) 17

**5.** $f(x) = \log_3(x + 1)$

**fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3^{x+1}$  B) $3^{x-1}$  C) $1 + 3^{-x}$

D) $1 + 3^x$  E) $3^x - 1$

**6.** $x = \log_2 3$ , $y = \log_5 4$ ve $z = \log_4 18$

**olduğuna göre, x , y ve z nin küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x < y < z$  B) $y < z < x$  C) $y < x < z$

D) $x < z < y$  E) $z < x < y$

**7.** $\log_a \frac{1}{4} = 2$, $\log_{\frac{1}{b}} 5 = 1$, $\log_3 c = 4$

**olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?**

A) $a < b < c$  B) $c < a < b$  C) $b < a < c$

D) $c < b < a$  E) $a < c < b$

**8.** $\log 3 = x$ ve $\log 5 = y$

**olduğuna göre, log 375 in x ve y cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3y + x  B) y + 3x  C) 3y + 2x

D) 2y + 3x  E) 2y + x

**1-C  2-B  3-D  4-C  5-E  6-C  7-C  8-A**

**9.** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} - \log_5 \frac{1}{125}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

**10.** $\log_a b = n$

**olduğuna göre, $\log_a (a.b^2)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2n + 1$ B) $n - 2$ C) $n + 2$

D) $2n - 1$ E) $2 - n$

**11.** $\log_4 (x - 2) = \frac{3}{2} - \log_4 x$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**12.** $\log (x + y) = 2.\log x + \log y$

**olduğuna göre, y nin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{x^2+1}$ B) $\frac{x}{x+1}$ C) $\frac{x}{x-1}$

D) $\frac{x}{x^2-1}$ E) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

**13.** $\log_9 (2x + 1) - \log_9 (x - 1) = \frac{1}{2}$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

**14.** $\log (0{,}05) = a$

**olduğuna göre, log 2 nin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-a-1$ B) $-a$ C) $-\frac{1}{a+1}$

D) $-\frac{1}{a}$ E) $\frac{a}{a+1}$

**15.** $\log 2 = p$

**olduğuna göre, log (2,5) ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2p - 2$ B) $2 - p$ C) $2p - 1$

D) $2 - 2p$ E) $1 - 2p$

**16.** $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $\log_3 2$ B) $\log_2 3$ C) $\log 3$ D) $\log 2$ E) 1

**9-E** **10-A** **11-B** **12-D**

**13-B** **14-A** **15-E** **16-B**

**17.** $\log_5 x + \log_5 y = 2$ ve $x^2 + y^2 = 50$

**olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?**

A) 12 B) 10 C) 7 D) 5 E) 2

**18.** $\log_2 x - \log_x 4 = 1$

**denklemini sağlayan x in alabileceği değerler çarpımı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**19.** $10^{\log 4} + 4^{\log_2 3} - e^{\ln 5}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**20.** $e^{2.\ln x} - 16 = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\{-4, 4\}$ B) $\{1, e\}$ C) $\{4, e\}$

D) $\{4\}$ E) $\{e, -4\}$

**21.** $x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $10^{-2}$ B) $10^{-1}$ C) 10 D) $10^2$ E) $10^3$

**22.** **$\log_9 12 = a$ ise $\log_2 3$ nin a cinsinden değeri hangisidir?**

A) $\frac{2a-1}{2}$ B) $\frac{a-1}{2}$ C) $\frac{2a+1}{2}$

D) $\frac{2}{a+1}$ E) $\frac{2}{2a-1}$

**23.** **log3 = 0,4771 olduğuna göre, $(81)^{2000}$ sayısı kaç basamaklıdır?**

A) 3815 B) 3816 C) 3817

D) 3818 E) 3819

**24.** $3.\ln(a.b) - 4.\ln b = 5$

**$\ln(a^2b) - \ln a = 0$ olduğuna göre, a kaçtır?**

A) $\sqrt[5]{e}$ B) $e\sqrt[5]{e}$ C) $\sqrt[4]{e}$

D) $e\sqrt[4]{e}$ E) $e\sqrt[3]{e}$

**25.** **$2^{x^2-1} = a$ ve $2^x = 2b$ ise x in a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1 + \log_a b$ B) $1 - \log_b a$ C) $-1 - \log_a b$

D) $-1 + \log_a b$ E) $-1 + \log_b a$

**17-B** **18-B** **19-E** **20-D** **21-D** **22-E** **23-C** **24-D** **25-E**

# LOGARİTMA

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** $\log\left(\log_2(\ln x)\right) = 0 \Rightarrow \log_2(\ln x) = 1$

$\Rightarrow \ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = e^2$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**2.** $\log_3\left(3 \cdot \log_2(\log_x 2)\right) = 1$

$\Rightarrow 3 \cdot \log_2(\log_x 2) = 3$

$\Rightarrow \log_2(\log_x 2) = 1$

$\Rightarrow \log_x 2 = 2$

$\Leftrightarrow 2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{2} = x$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $f(x) = \log_{5-x}(x-1)$

i) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

ii) $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$

iii) $5 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$

i, ii, iii için ortak çözüm düşünülürse;

f(x) in tanım aralığı, $1 < x < 5$ ve $x \neq 4$ bulunur.

x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı;

$2 + 3 = 5$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = 1 + \log_2(x-1)$

$f^{-1}(3) = a$ olsun.

$f(a) = 3$ şartını sağlayan a değerini bulalım.

$f(a) = 1 + \log_2(a-1) = 3$

$\Rightarrow \log_2(a-1) = 2 \Leftrightarrow a - 1 = 4$

$\Rightarrow a = f^{-1}(3) = 5$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = \log_3(x+1)$

$\Rightarrow y = \log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow 3^y = x + 1 \Rightarrow 3^y - 1 = x$ olduğundan;

$f^{-1}(x) = 3^x - 1$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**6.** $x = \log_2 3 \Rightarrow 1 < x < 2$

$y = \log_5 4 \Rightarrow 0 < y < 1$

$z = \log_4 18 \Rightarrow 2 < z < 3$

olduğuna göre, $y < x < z$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** $\log_a \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\left(a = -\frac{1}{2}\right.$ olamaz, çünkü a tabandır.$\left.\right)$

$\log_{\frac{1}{b}} 5 = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 5 \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

$\log_3 c = 4 \Leftrightarrow c = 3^4$ bulunur.

Buna göre, $b < a < c$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** $\log 3 = x$ ve $\log 5 = y$

$\log 375 = \log(5^3 \cdot 3)$

$= 3 \cdot \log 5 + \log 3$

$= 3y + x$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} - \log_5 \frac{1}{125}$

$= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \log_5 5^{-3}$

$= -2 - (-3) = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**10.** $\log_a b = n$

$\log_a (a \cdot b^2) = \log_a a + 2 . \log_a b$

$= 1 + 2n$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $\log_4 (x-2) = \frac{3}{2} - \log_4 x$

$\Rightarrow \log_4 (x-2) + \log_4 x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \log_4 [(x-2) . x] = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x-2) . x = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow (x-2) . x = 8$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-4) . (x+2) = 0$

$x = 4$ veya $x = -2$ bulunur.

$x = -2$ olamayacağından $x = 4$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.** $\log (x + y) = 2 . \log x + \log y$

$\Rightarrow \log (x + y) = \log x^2 + \log y$

$\Rightarrow \log (x + y) = \log (x^2 . y)$

$\Rightarrow x + y = x^2 . y$

$\Rightarrow x = x^2 . y - y$

$\Rightarrow x = y (x^2 - 1)$

$\Rightarrow y = \frac{x}{x^2 - 1}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.** $\log_9 (2x + 1) - \log_9 (x - 1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_9 \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 9^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 3x - 3$

$\Rightarrow x = 4$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** $\log(0{,}05) = a$

$\Rightarrow \log 20^{-1} = a$

$\Rightarrow -1 \cdot (\log 2 + \log 10) = a$

$\Rightarrow \log 2 + 1 = -a$

$\Rightarrow \log 2 = -1 - a$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $\log 2 = p$ ve

$\log(2{,}5) = \log\left(\frac{10}{4}\right)$

$= \log 10 - \log 4$

$= 1 - 2 \cdot \log 2$

$= 1 - 2p$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$

$2^x = t$ dönüşümü yapılırsa,

$\Rightarrow t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0$

$\Rightarrow (t-3) \cdot (t+1) = 0$

$\Rightarrow t = 3$ veya $t = -1$ bulunur.

$\Rightarrow 2^x = 3$ $\quad 2^x = -1 \Rightarrow x \notin R$

$\Leftrightarrow x = \log_2 3$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**17.** $\log_5 x + \log_5 y = 2 \Rightarrow \log_5 (x \cdot y) = 2 \Leftrightarrow x \cdot y = 25$

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$x^2 + y^2 = 50$ olduğundan

$\Rightarrow (x+y)^2 = 50 + 2 \cdot 25 = 100$

$\Rightarrow x + y = 10$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.** $\log_2 x - \log_x 4 = 1 \Rightarrow \log_2 x - 2 \cdot \log_x 2 = 1$

$\log_2 x = t$ dönüşümü yapılırsa $\log_x 2 = \frac{1}{t}$ olur.

Buna göre;

$t - 2 \cdot \frac{1}{t} = 1$

$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$

$\Rightarrow (t-2) \cdot (t+1) = 0$

$\Rightarrow t = 2 = \log_2 x$ veya $t = -1 = \log_2 x$

$\Leftrightarrow x = 4$ $\quad \Leftrightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

olduğundan, x in alabileceği değerler çarpımı;

$4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**19.** $10^{\log 4} + 4^{\log_2 3} - e^{\ln 5}$

$a^{\log_a x} = x$ olduğundan;

$= 10^{\log_{10} 4} + 4^{\log_4 9} - e^{\log_e 5}$ $\quad (\log_2 3 = \log_4 9)$

$= 4 + 9 - 5 = 8$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**20.** $e^{2.\ln x} - 16 = 0 \Rightarrow e^{\ln x^2} = 16$

$\Rightarrow e^{\log_e x^2} = 16$

$\Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x = -4$ bulunur.

$x = -4$ logaritma tanımına aykırı olduğundan;

$Ç = \{4\}$ olur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**21.** $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ olduğundan, $x^{\log 7} = 7^{\log x}$

$x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98 \Rightarrow 7^{\log x} + 7^{\log x} = 98$

$\Rightarrow 7^{\log x} = 49 = 7^2$

$\Rightarrow \log x = 2$

$\Leftrightarrow x = 10^2 = 100$ olur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**22.** $\log_9 12 = a \Rightarrow \log_{3^2} 12 = a \Rightarrow \frac{1}{2} . \log_3 12 = a$

$\Rightarrow \log_3 12 = 2a \Rightarrow \log_3 (2^2.3) = 2.\log_3 2 + 1 = 2a$

$\Rightarrow \log_3 2 = \frac{2a-1}{2} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2}{2a-1}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**23.** $\log x = n,m$ ise x sayısı $(n + 1)$ basamaklıdır.

$\log 81^{2000} = 2000.\log 81 = 2000.\log 3^4$

$= 8000.\log 3 = 8000.0,4771 = 3816,8$

$\log 81^{2000} = 3816,8$ ise $81^{2000}$ sayısı 3817 basamaklıdır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**24.** $\ln(a^2 b) - \ln a = 0 \Rightarrow \ln (a^2.b) = \ln a$

$\Rightarrow a^2 b = a \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow b = a^{-1}$

$3.\ln(a.a^{-1}) - 4.\ln b = 5 \Rightarrow 3.\ln 1 - 4 \ln b = 5$

$\ln 1 = 0$ ve $\ln b = -\frac{5}{4} \Rightarrow b = e^{\frac{-5}{4}}$

ise $a = e^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{e^5} = e\sqrt[4]{e}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**25.** $2^x = 2b \Rightarrow 2^{x-1} = b$ dir.

$2^{x^2-1} = a \Rightarrow 2^{(x-1)(x+1)} = a \Rightarrow (2^{x-1})^{x+1} = a$

$\Rightarrow b^{x+1} = a$

$\Rightarrow x + 1 = \log_b a$

$\Rightarrow x = -1 + \log_b a$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

# LOGARİTMA

TEST - 3

**1.** $\log_4(x-7)$

**ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $x > 0$ B) $0 < x < 7$ C) $x < 7$

D) $x > 7$ E) $x \geq 7$

**2.** $\log_{(2-x)}(9+x)$

**ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $(-9, \infty)$ B) $(-9, 1) \cup (1, 2)$ C) $(-\infty, 2)$

D) $(-2, 9)$ E) $(0, 1) \cup (1, 9)$

**3.** **Aşağıdaki ifadelerin kaç tanesi doğrudur?**

I. $\log_5 1 = 0$ II. $\log_5 5 = 1$

III. $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 2$ IV. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = -1$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**4.** **Aşağıdaki ifadelerin kaç tanesi doğrudur?**

I. $\log_5 125 = 3$ II. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = -2$

III. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ IV. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{81} = 1$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**1-D** **2-B** **3-C** **4-C**

**5.** $\log_4 2 + \log_4 8$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**6.** $\log_7 98 - \log_7 2$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-1$ B) $-2$ C) 1 D) 2 E) 3

**7.** $8^{\log_8 9}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 1 D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

**8.** $4^{\log_x 3} + 3^{\log_x 4} = 8$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

**5-C** **6-D** **7-A** **8-A**

**9.** $\log_3 5 = m$

**olduğuna göre, $\log_3 25$ in m türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $m + 1$ B) $m - 1$ C) $2m$

D) $\frac{m}{2}$ E) $\frac{m}{4}$

**10.** $\log_2 3 = a$

**olduğuna göre, $\log_9 6$ nın a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{a+1}{2a}$ B) $\frac{2a}{a+1}$ C) $\frac{a+2}{a}$

D) $\frac{a+1}{a+2}$ E) $\frac{a+2}{a+1}$

**11.** $\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_7 81$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 21 B) 18 C) 16 D) 15 E) 8

**12.** $\log_7 11 \cdot \log_{11} 7$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 7 C) 11 D) 77 E) $7^{11}$

**9-C** **10-A** **11-E** **12-A**

**13.** $\log_7 5 = t$

**olduğuna göre, $\log_5 35 + \log_5 7$ ifadesinin t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $t + 2$ B) $\frac{1}{t}$ C) $\frac{t}{t+2}$

D) $\frac{t+2}{t}$ E) $\frac{2t}{t+1}$

**14.** $\log_a b = 1$

**olduğuna göre, $\log_{b^2} a^4 + \log_{\sqrt{b}} a$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) 16 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

**15.** $\log_3 (3 \cdot \log_2 x) = 2$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

**16.** $\log 3 = a$
$\log 5 = b$

**olduğuna göre, log 6 nın a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a + b$ B) $a - b$ C) $a.b + 1$

D) $a - b + 1$ E) $a + b - 1$

**13-D** **14-E** **15-B** **16-D**

**17.** $\log 2 = a$
$\log 7 = b$

**olduğuna göre, log(0,35) in a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a - b - 1$ B) $b - a - 1$ C) $a - b$

D) $a + b - 1$ E) $b - a + 1$

**18.** $0 < x < 1$ olmak üzere,

$$\log_3 x - \log_x 3 = 0$$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**19.** $\log_5 (x + 2) = \log_5 (3x - 8)$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**20.** $\log_3 (x + 3) - \log_3 x = \log_3 2$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**21.** $\log_5 x + \log_5 2 = 1$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

**22.** $\log_{14} 7 + \log_{14} (2 \cdot a) = 1$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**23.** $0 < x < 1$ olmak üzere,

$$\log_3 \sqrt{x} \cdot \log_9 x = 4$$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{27}$ D) $\frac{1}{81}$ E) $\frac{1}{243}$

**24.** $3^{\log_2 x^2} = 81$

**denkleminde x in alabileceği değerler çarpımı kaçtır?**

A) $-16$ B) $-8$ C) $-4$ D) 2 E) 3

**17-B** **18-D** **19-A** **20-C**

**21-B** **22-A** **23-D** **24-A**

**25.** $\frac{2}{\log_x 3} - \frac{1}{\log_y 3} = 0$

**olduğuna göre, $\log_x y$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3

**26.** $\log_2 (3x + 5) < 2$

**olduğuna göre, x in çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{5}{8} < x$ B) $x < -\frac{1}{3}$ C) $-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$

D) $-\frac{5}{8} < x < 0$ E) $-\frac{1}{3} < x < 0$

**27.** $\log_4 (x - 3) > \log_4 (4 - x)$

**olduğuna göre, x in çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{7}{2} < x < 4$ B) $\frac{7}{2} < x$ C) $x < 4$

D) $x < \frac{7}{2}$ E) $4 < x$

**28.** $3^{x+1} < 5$

**eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x < \log_3 5$ B) $x < \log_5 3$ C) $x < -1 + \log_3 5$

D) $x > \log_3 5$ E) $x > -1 + \log_3 5$

**25-D** **26-C** **27-A** **28-C**

**29.** $\log x = 2{,}0603$

**olduğuna göre, x sayısının logaritmasının karakteristiği kaçtır?**

A) 0,0603 B) 2 C) 2,0603

D) 3 E) 6

**30.** $\log 2 = 0{,}30103$

**olduğuna göre, log 40 ın mantisi kaçtır?**

A) 0,30103 B) 1,06206 C) 0,60206

D) 0,40804 E) 3,0103

**31.** $\log x = \bar{4}{,}0303$

**olduğuna göre, log x in karakteristiği ve mantisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $k = -4$, $m = 0{,}0303$ B) $k = 4$, $m = 0{,}0303$ C) $k = -4$, $m = -0{,}0303$

D) $k = -4$, $m = 0{,}303$ E) $k = -5$, $m = 0{,}0697$

**32.** $\log x = \bar{5}{,}3$

**olduğuna göre, colog x kaçtır?**

A) $-4{,}7$ B) $-5{,}3$ C) 4,7

D) 5,3 E) 47

**29-B** **30-C** **31-A** **32-C**

**33.** $\log x = 12{,}0603$

**olduğuna göre, x sayısı kaç basamaklıdır?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

**34.** $f : (3 , +\infty) \to R$
$f(x) = \log_2 (x - 3)$

**olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f^{-1}(x) = 2^x - 3$ B) $f^{-1}(x) = 2^{x-3}$

C) $f^{-1}(x) = 3 - 2^x$ D) $f^{-1}(x) = 2^x + 3$

E) $f^{-1}(x) = \frac{3}{2^x}$

**35.** $f : R^+ \to R$ , $f(x) = 1 - \log_5 (2x + 5)$

**olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f^{-1}(x) = \frac{5^{1-x} - 5}{2}$ B) $f^{-1}(x) = \frac{5^x - 1}{2}$

C) $f^{-1}(x) = \frac{5^{-x} + 5}{2}$ D) $f^{-1}(x) = \frac{5^{-x} - 1}{2}$

E) $f^{-1}(x) = \frac{5^{-x} - 5}{2}$

**33-E** **34-D** **35-A**

**36.** Tanımlı olduğu değerler için,

$f(x) = 5^{x-1}$

**fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

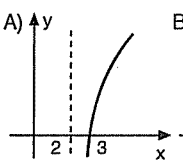
A) $f^{-1}(x) = \log_5 x$ B) $f^{-1}(x) = 1 + \log_5 x$

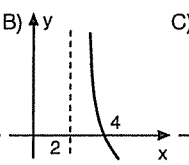
C) $f^{-1}(x) = -1 + \log_5 x$ D) $f^{-1}(x) = \log_5 \frac{1}{x}$

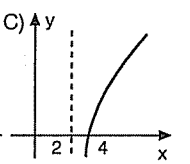
E) $f^{-1}(x) = \log_x 5$

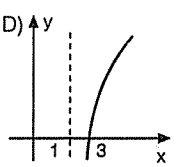
**37.** $f(x) = \log_3 (\frac{x}{2} - 1)$

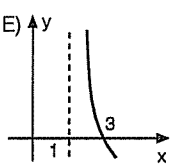
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

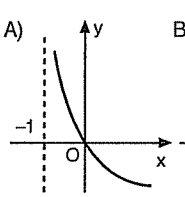

C) 

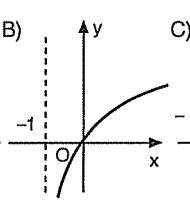

D) 

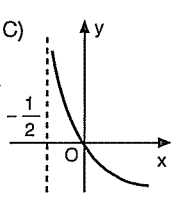

E) 

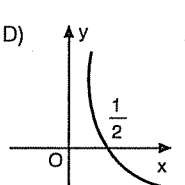

**38.** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$

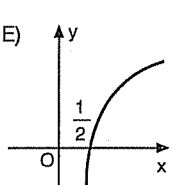
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**36-B** **37-C** **38-A**

# LOGARİTMA

TEST - 4

**1.** $\log\left(\frac{x}{y}\right) = 2$

$\log(x.y) = 4$

**olduğuna göre, logx kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**2.** $\log_3 \sqrt{3} - \log_{\sqrt{3}} 3$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $-1$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

**3.** $\log_{\frac{1}{5}}(\log_{32} 2)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{5}$ B) $-1$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{5}$ E) 1

**4.** $\log_5(2a - 1) = 2$

**olduğuna göre, $\log_{13} a$ kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 13 E) 26

**5.** $\log_3(\log x) = 2$

**eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $10^9$ B) $10^8$ C) $10^7$ D) $10^6$ E) $10^5$

**6.** $\log(10!) = x$

**olduğuna göre, log(9!) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) x – 1 B) x – 10 C) x + 1 D) 10x E) $x^2$

**7.** $\log 2 = f$
$\log 5 = e$
$\log 7 = m$

**olduğuna göre, log70 aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) f + e – m B) f + e + m C) f.e.m D) $\frac{f.e}{m}$ E) $\frac{1}{f.e.m}$

**8.** $\log_3 5 \cdot \log_{25} 49 \cdot \log_7 27$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

**1-C** **2-E** **3-E** **4-B**

**5-A** **6-A** **7-B** **8-B**

**9.** $\log_{25}\sqrt[4]{125}$

**ifadesinin eşiti kaçtır?**

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{25}$

**10.** $\log_5 a = 2$ ve $\log_5 b = 3$

**olduğuna göre, $\log_5(a^2.b)$ kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**11.** $\log_{24}8 + \log_{24}6 - \log_{24}2$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\log_{24}48$ B) $\log_{24}12$ C) 2 D) 1 E) 0

**12.** $\log_6 (a - 1) - \log_6 2 = 2$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 18 B) 19 C) 33 D) 72 E) 73

**9-D** **10-C** **11-D** **12-E**

**13.** $\log 2 = a$

**olduğuna göre, colog(0,8) ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 3a B) 3a – 10 C) 1 – 3a

D) $\frac{a-1}{3}$ E) $\frac{a+1}{3}$

**14.** $f(x) = \log_3 (x + 4)$

**olduğuna göre, $f^{-1}(2)$ kaçtır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**15.** $(3^x + 2)(3^x - 4) = 0$

**denkleminin kökü kaçtır?**

A) 1 B) $\log_2 3$ C) $\log_3 2$

D) $\log_3 4$ E) $\log_4 3$

**16.** $1 < \log_3(x - 2) \leq 2$

**eşitsizliğini sağlayan x in kaç farklı tamsayı değeri vardır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**13-C** **14-A** **15-D** **16-B**

**17.** x doğal sayıdır.

$\log x = 2{,}71$

**olduğuna göre, $x^3$ kaç basamaklı bir sayıdır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**18.** **Beş basamaklı en büyük doğal sayının 10 tabanındaki logaritmasının karakteristiği kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**19.** $\ln x = a$

**olduğuna göre, $\log x^3$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 3 – a B) a.ln10 C) a.loge

D) 3a.loge E) 3a.ln10

**20.** $\ln e = 1$ olmak üzere,

$\log_5 1000 \cdot \log 5 \cdot \ln e^2$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**21.** $\ln 3x = 2y$

$\ln 2x = y$

**denklem sistemini sağlayan x değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

**22.** $\log_{\frac{1}{a}} (a^2)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

**23.** $\log_{100} (0{,}01)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) – 2 E) – 1

**24.** $\sqrt{14 + \log_2 \sqrt{\log 100 + 14}}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 4 B) 8 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}$ E) 2

**17-A** **18-C** **19-D** **20-E**

**21-C** **22-E** **23-E** **24-A**

# LOGARİTMA

TEST - 5

**1.** $\log x - \log 2 = 1$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 15 B) 20 C) 100 D) 120 E) 200

**2.** $4^{\log_2(x+1)} = 25$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 24 D) 25 E) 99

**3.** $\log_{27}5 \cdot \log_{25}8 \cdot \log_2 81$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 2 D) $\log_2 5$ E) $\log_3 2$

**4.** $\log a = 3{,}01$

**olduğuna göre, $\log \frac{10}{a}$ nın karakteristiği kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) – 2 D) – 3 E) – 4

**5.** $\log_4 (\log_3 x - \log_3 y) = \frac{1}{2}$

**olduğuna göre, x in değeri y nin kaç katıdır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) 6 E) 9

**6.** $\log 2 = m$
$\log 3 = n$

**olduğuna göre, $\log \frac{6}{5}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) m + n + 1 B) m – n – 1 C) 2m + n + 1
D) 2m – n – 1 E) 2m + n – 1

**7.** $\operatorname{colog} x = 2{,}075$

**olduğuna göre, log x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\bar{3}{,}075$ B) $\bar{3}{,}925$ C) $\bar{2}{,}925$
D) 2,075 E) 1,075

**8.** $\log 5 + \log 16 + \log 125$

**toplamının sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

1-B 2-A 3-C 4-D

5-E 6-E 7-B 8-D

**9.** $\log_x (x + 3) + \log_x (5 - x)$

**ifadesini tanımlı yapan x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 10

**10.** $2^{\log_x 36} = \frac{1}{4}$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 2 E) 4

**11.** $\log_{\frac{1}{3}} (x + 4) > -1$

**eşitsizliğini sağlayan (gerçekleyen) x in en büyük tamsayı değeri kaçtır?**

A) 1 B) 0 C) – 1 D) – 2 E) – 3

**12.** $\log_5 4 = x$
$\log_y 20 = x + 1$

**olduğuna göre, y kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**9-D** **10-C** **11-D** **12-E**

**13.** $\log 2 = a$

$\log 7 = b$

**olduğuna göre, log392 nin a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2a + 3b B) 2a + 3b + 1 C) 3a + 2b – 1

D) 3a + 2b E) 3a + 2b + 1

**14.** $a = \log_2 3$

$b = \log_3 12$

$c = \log_4 3$

**olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?**

A) c > b > a B) b > a > c C) a > c > b

D) c > a > b E) b > c > a

**15.** $\log_{xy} x = 4$

**olduğuna göre, $\log_{xy} y$ değeri kaçtır?**

A) – 3 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

**16.** $\frac{3}{\log_3 4} + 2\log_4 3 = \log_a 243$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

**13-D** **14-B** **15-A** **16-B**

**17.** $x^3 = 5$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $\log_x 5 = 3$ B) $\log_3 x = 5$ C) $\log_x 3 = 5$

D) $\log_5 x = 3$ E) $\log_x 5 = 5$

**18.** $\log_{\frac{1}{9}} 27 - 3\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 3

**19.** $\log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} + ... + \log \frac{199}{200}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 1 B) – 2 C) – 10 D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{100}$

**20.** $\log x = 3{,}244$

**olduğuna göre, cologx değeri kaçtır?**

A) $\bar{3}{,}244$ B) $\bar{3}{,}756$ C) $\bar{4}{,}756$

D) 4,756 E) – 2,246

**17-A** **18-B** **19-B** **20-C**

**21.** $\log 3 = a$ ve $3^x + 3^{x+1} = 120$

**olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{a}{1+a}$ B) $\frac{1+a}{a}$ C) $\frac{a}{1-a}$

D) $\frac{1-a}{a}$ E) $\frac{a-1}{a}$

**22.** $2\log a - \log b = \log c$

**olduğuna göre,** $\frac{3a^2 + bc}{5a^2 - bc}$ **oranı kaçtır?**

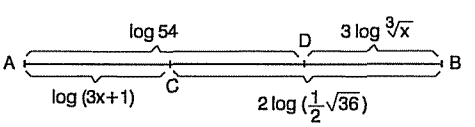
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

**23.** **Aşağıdaki sayıların logaritmaları alınırsa hangisinin mantisi diğerlerinden farklı olur?**

A) 2,013 B) 201300 C) 0,2013

D) 2013 E) 2,103

**24.**




**şekilde verilenlere göre, x kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3

**21-B** **22-C** **23-E** **24-B**

# LOGARİTMA

TEST - 6

**1.** $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

denkleminin çözüm kümesi {ln a , ln b} olduğuna göre, a + b kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) 5

**2.** $\log_2 (6 - 2\sqrt{7}) + \log_2 (6 + 2\sqrt{7}) = \log_3 (x^2 + 2)$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 5 B) 0 C) 25 D) – 25 E) – 10

**3.** $|1 - \log_2 (x - 1)| = 2$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\frac{1}{2}, 2\}$ B) $\{\frac{3}{2}, 9\}$ C) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

D) $\{\frac{2}{3}, 3\}$ E) {3, 6}

**4.** $\log_3(x^2 - 1) - 2 = \log_3 (x - 1)$

olduğuna göre, $\log_3(\log_2 x)$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) 8

**1-D** **2-D** **3-B** **4-B**

**5.** $3^{f(x)} = \ln x$

olduğuna göre, 2f(e) + f($e^3$) toplamı kaçtır?

A) 1 B) e C) 3 D) 2e E) 3e

**6.** $\log_3 (\frac{1}{27})^{x-1} = 5^{\log_5 4}$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 8

**7.** $x^2 - \log(a^x.b^x) + \log a \,.\, \log b = 0$

denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ dir.

Buna göre, $10^{x_1} - 10^{x_2}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) a – b B) a.b C) $\frac{a}{b}$ D) a + b E) $a^2.b^2$

**8.** $f(x) = \frac{1}{4} \,.\, \log_3(\frac{x+2}{3})$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3^{4x+2}$ B) $3^{4x-1} + 2$ C) $3^{4x+1} + 2$

D) $3^{4x-1} - 2$ E) $3^{4x+1} - 2$

**5-A** **6-C** **7-A** **8-E**

**9.** $f(x) = \ln x^2 - 2.\ln(1 - x)$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x < 1 , x \neq 0$ B) $0 < x < 1$ C) $x > 0, x \neq 1$

D) $R - \{1\}$ E) $R - \{0 , 1\}$

**10.** $f(x) = \log_2 x$

**olduğuna göre, $f(\frac{2}{3x}) + f(3.x^2)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3f(x) + 1$ B) $\frac{f(x)}{3}$ C) $f(x) + 1$

D) $1 - 3f(x)$ E) $1 - f(x)$

**11.** $4^{\log_4(2x^2 - 3x)} = 2x + 3$

**olduğuna göre, x in alabileceği değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**12.** $\log_x 8 = 6y$

$\log_5 x = 2$

**$\log_x 50$ ifadesinin y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2y + 1$ B) $2y - 1$ C) $1 + 3y$

D) $1 - 3y$ E) $3y$

**13.** $f : R^+ \to R$ ve $h : R^+ - \{1\} \to R$ fonksiyonları veriliyor.

$f : x \to 2 + \log x$

$h : x \to \log_x 10$

**olduğuna göre, $(hof^{-1})(3)$ kaçtır?**

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 2 E) 3

**14.** **log2 = 0,30103 olduğuna göre, log0,0032 aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\bar{4},30103$ B) $\bar{3},30103$ C) $\bar{4},49485$

D) $\bar{3},49485$ E) $\bar{3},50515$

**15.** **log3000 = 3,47712 olduğuna göre, $3^{100}$ kaç basamaklı bir sayıdır?**

A) 48 B) 47 C) 46 D) 45 E) 44

**16.** $\log_5 3 = a$

$\log_5 4 = b$

**$\log_5(7,2)$ nin a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2a + 2b$ B) $a + 2b + 1$ C) $2a + b - 1$

D) $2a + 2b - 1$ E) $a + b + 1$

**9-A 10-C 11-E 12-A**

**13-C 14-E 15-A 16-C**

**17.** $\log x = a$

**olduğuna göre, colog $\left(\frac{1}{x}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) a  B) $\frac{1}{a}$  C) $-a$

D) $-\frac{1}{a}$  E) $\sqrt{a}$

**18.** $1 \le \log_2 |3 - x| \le \log_2 8$

**eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerleri toplamı kaçtır?**

A) $-46$  B) $-45$  C) $-44$  D) $-43$  E) $-42$

**19.** $\log_2 81 = a$

**olduğuna göre, $\frac{\log_2 48}{\log_3 6}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{a^2}{16}$  B) $\frac{16a + 1}{4 + a}$  C) $\frac{a^2 + 16a}{4a + 16}$

D) $\frac{a^2 + 6}{a + 2}$  E) $\frac{16a + 1}{2a + 8}$

**20.** $f : R^+ \to R$ olmak üzere,

$f(x) = \log_4 x$

$g(x) = 6x$

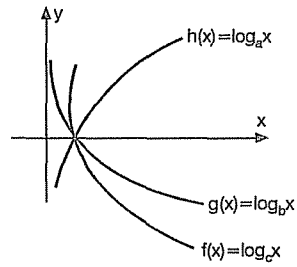
$A = \{0, -1, \frac{1}{2}\}$

**olduğuna göre, $(gof^{-1})(A)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{6, \frac{3}{2}, 12\}$  B) $\{6, \frac{2}{3}, 12\}$  C) $\{6, -24, 12\}$

D) $\{6, -6, 3\}$  E) $\{6, 5, 8\}$

**21.**




**Şekildeki grafiğe göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $a < 1 < b < c$  B) $1 < a < b < c$

C) $c < b < 1 < a$  D) $b < c < 1 < a$

E) $c < b < a < 1$

**22.** $\log a = 8$

$\log_b a = 4$

$\log_c a = 2$

**Buna göre, $\log \sqrt{abc}$ kaçtır?**

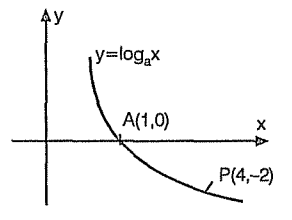
A) 6  B) 18  C) 7  D) 5  E) $\frac{7}{2}$

**23.** **Bir kenarı $\log_a x$ olan bir karenin alanı ile çevresi eşit olduğuna göre, a ile x arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = a^2$  B) $x = a^4$  C) $x = 4a$

D) $a = x^4$  E) $a = 4x$

**24.**




**Şekilde verilenlere göre, a kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$  B) $\frac{1}{4}$  C) $\frac{1}{8}$  D) $\frac{1}{16}$  E) $\frac{1}{32}$

17-A  18-E  19-C  20-A  21-D  22-C  23-B  24-A

# 4. ÜNİTE: PERMÜTASYON

**SAYMA METODLARI**

Sayma işlemleri ile ilgili uygulamaları, örneklendirme yoluyla açıklayalım.

1. Bir sınıftaki öğrenci sayısını, bir kitabın yapraklarının sayısını, bir kutudaki kalemlerin sayısını, sonlu bir kümenin eleman sayısını belirlemek için söz konusu elemanlar, sayma sayıları ile bire bir eşlenerek, **bire bir eşleme yoluyla sayma** yapılır.

2. A ve B ayrık iki küme olmak üzere, A ve B kümelerinin toplam kaç elemanı olduğunu,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) \qquad (A \cap B) = \emptyset$$

şeklinde toplama yaparak sayarız.

**Örneğin,** A ve B şehirleri arasında 3 farklı kara yolu, 2 farklı demir yolu güzergâhı varsa, A dan B ye 5 farklı yoldan gidilebileceğini $3 + 2 = 5$ biçiminde;

Bir sınıfta 10 kız, 15 erkek öğrenci varsa, bu sınıfın mevcudunun 25 olduğunu $10 + 15 = 25$ biçiminde;

**toplama yoluyla sayma** yaparak buluruz.

3. A, B, C boş kümeden farklı birer küme olmak üzere; A ve B kümelerinden sırasıyla birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün ikililerin sayısını,

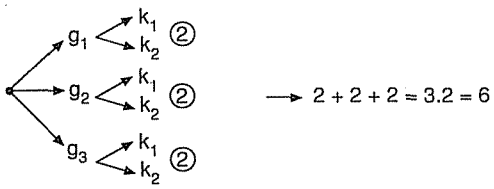
$$s(A \times B) = s(A).s(B)$$

veya A, B, C kümelerinden sırasıyla birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün sıralı üçlülerin sayısını,

$$s(A \times B \times C) = s(A).s(B).s(C)$$

şeklinde çarpma işlemi yaparak buluruz.

**Örneğin,** 3 farklı gömleği, 2 farklı kravatı olan bir kişi, bir gömlek giyip üzerine bir kravat takacağına göre; gömlekleri: $g_1, g_2, g_3$; kravatları: $k_1, k_2$ olmak üzere,




6 farklı seçim yapabileceğini $3.2 = 6$ biçiminde;
Birbirinden farklı 5 defteri, birbirinden farklı 3 kalemi, birbirinden farkı 2 silgisi olan bir öğrencinin ders çalışırken bir defter, bir kalem ve bir silgiyi 30 değişik şekilde seçebileceğini $5.3.2 = 30$ biçiminde;

**çarpma yoluyla sayma** yaparak buluruz.

**Sonuç:**

*Ayrık (birbirinden bağımsız) r tane işten;*

1. iş $n_1$ değişik yoldan,
2. iş $n_2$ değişik yoldan,

---

r. iş $n_r$ değişik yoldan gerçekleştirilebiliyorsa,

1. Bu r tane **işten biri,** (1. si veya 2. si veya ... veya r. si)

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **toplama kuralı** denir.

2. Bu r tane iş birlikte, sıralı bir biçimde (1. si ve 2.si ve ... ve r . si birlikte sıralı bir şekilde)

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **genel çarpım kuralı** veya **saymanın temel kuralı** denir.

**Örnek: 1984 - ÖYS**

**6 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı biçimde sonuçlanabilir?**

A) 31 B) 32 C) 60 D) 64 E) 128

**Çözüm:**

Sınava katılan bir kişinin sınavı; başarılı veya başarısız olmak üzere, iki şekilde sonuçlanabilir. Sınava 6 kişi birlikte katıldığına göre,

| 1. kişi | 2. kişi | ... | 6. kişi |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | ... | 2 |

bu sınav başarı yönünden,

$2^6 = 64$ farklı biçimde sonuçlanabilir.

**Örnek:**

**0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak, üç basamaklı;**

a) **Kaç değişik doğal sayı yazılabilir?**

Üç basamaklı sayı oluşturmak için, sırasıyla üç iş (yüzler basamağındaki, onlar basamağındaki ve birler basamağındaki rakamın seçilmesi işi) birlikte yapılmalıdır. Buna göre,

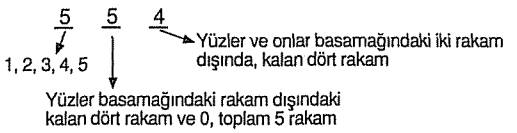
| Yüzler basamağı | Onlar basamağı | Birler basamağı |
|---|---|---|
| 1, 2, 3, 4, 5 | 0, 1, 2, 3, 4, 5 | 0, 1, 2, 3, 4, 5 |

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarıyla üç basamaklı, $5.6.6 = 180$ değişik doğal sayı yazılabilir.

**b) Rakamları farklı, kaç değişik doğal sayı yazılabilir?**

**Uyarı:**

Rakamları farklı doğal sayıların yazılmasında, rakamlardan birisi 0 (sıfır) ise ilk iş olarak en soldaki (burada yüzler basamağındaki) rakamın seçimi yapılmalıdır. O halde,



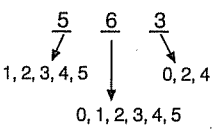

rakamları farklı, 5.5.4 = 100 değişik doğal sayı yazılabilir.

**c) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

**Uyarı:**

Rakamları farklı olan sayılar yazılmıyorsa, basamaklardaki rakamların seçimi için herhangi bir öncelik sırası gözetmek gerekmez.

O halde,

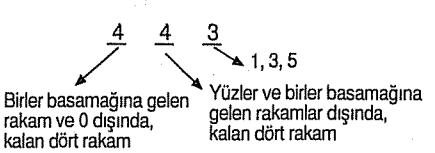



5.6.3 = 90 değişik çift sayı yazılabilir.

**d) Rakamları farklı, kaç değişik tek sayı yazılabilir?**

**Uyarı:**

Rakamları farklı olan tek (veya çift) sayıların yazılmasında, birinci iş olarak birler basamağındaki rakamın seçilmesi, rakamlardan birisi 0 (sıfır) ise ikinci iş olarak en soldaki basamağa (burada yüzler basamağına) gelecek rakamın seçilmesi işi yapılmalıdır. O halde,

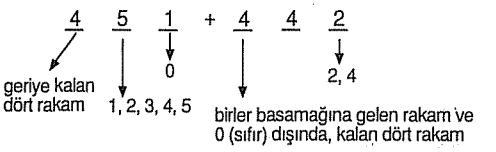



rakamları farklı, 4.4.3 = 48 değişik tek sayı yazılabilir.

**e) Rakamları farklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?**

**Uyarı:**

Rakamları farklı çift sayılar yazılırken rakamlardan birisi 0(sıfır) ise; birler basamağına 0(sıfır) gelmesi ile 0 (sıfır) dışındaki çift rakamların gelmesi durumları ayrı ayrı düşünülmelidir. Dolayısıyla, birler basamağındaki rakam 0 (sıfır) veya 0 (sıfır) dışındaki çift rakamlar olabilir şeklinde, çözümde toplama kuralı da uygulanır. O halde,




rakamları farklı, 4.5.1 + 4.4.2 = 52 değişik çift sayı yazılabilir.

**Uyarı:**

Rakamları farklı, çift sayıların yazılmasında; rakamlardan birisi 0 (sıfır) ise, rakamları farklı bütün sayıların ve rakamları farklı tek sayıların kaç tane olduğu bulunup ikisinin farkından da rakamları farklı çift sayıların sayısı bulunabilir. Bu yolun kullanılması tercih edilirse işlem hatası yapma riski daha az olabilir. Buna göre,

(b) seçeneğinde rakamları farklı 100 değişik sayı olduğu, (d) seçeneğinde rakamarı farklı 48 değişik tek sayı olduğu bulunmuştu. 100 sayıdan 48 i tek sayı ise, kalan 100 – 48 = 52 si çift sayıdır.

Bu çözümle, (e) seçeneğindeki çözümün; işlem sayısı da aynı olduğuna göre, bu ikinci çözüm tercih edilebilir.

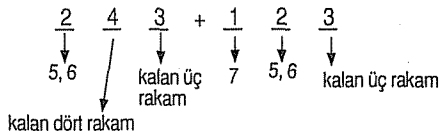
**Örnek: 1999 - ÖSS - İptal**

**5, 6, 7, 8, 9 rakamlarını kullanarak rakamları birbirinden farklı olan, üç basamaklı ve 780 den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?**

A) 46 B) 42 C) 36 D) 30 E) 24

**Çözüm:**

5, 6, 7, 8, 9 rakamlarını kullanarak yazılacak olan rakamları farklı sayıların 780 den küçük olması için yüzler basamağındaki rakam 5, 6 veya 7 olmalıdır. Ancak yüzler basamağındaki rakamı 7 olan her sayı 780 den küçük değildir. Halbuki yüzler basamağındaki rakamı 5 ve 6 olan her sayı 780 den küçüktür. O halde, bu iki iş ayrı ayrı yapılacak iki iş olarak düşünülüp çözümde toplama kuralı da uygulanmalıdır.




Burada birinci, ikinci ve üçüncü iş; sırasıyla yüzler, onlar ve birler basamağındaki rakamın seçilmesidir.
Buna göre, istenen şartlara uygun toplam,
2.4.3 + 1.2.3 = 30 değişik sayı yazılabilir.

**PERMÜTASYON (SIRALAMA)**

$n \geq r$ ve $n, r \in N^+$ olmak üzere, **n** elemanlı bir kümenin ***r* tane elemanının *r* - li sıralanışlarının her biri, n elemanın r - li** bir **permütasyonu** (sıralanışı) olur.

**n elemanın r - li bütün permütasyonlarının sayısı P(n, r)** ile gösterilir ve

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ dir.}$$

**Uyarı:**

1. $P(n, 1) = n$, $P(n, n) = n!$ dir.
2. $P(n, r) = \underbrace{n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-r+1)}_{r \text{ tane}}$

şeklinde pratik olarak hesap yapılır.

**Örnek:**

$P(5, 1) = 5$, $P(3, 3) = 3.2.1 = 3!$,

$P(10, 3) = 10.9.8 = 720$ dir.

3. Birbirinden **farklı n** tane **elemandan r tanesinin** farklı **sıralanışlarının permütasyon** olduğuna dikkat edilirse; **permütasyon, saymanın temel ilkesinin (genel çarpma kuralının) özel bir durumu (elemanların tekrar etmemesi durumu)** dur.

**Örnek:**

**A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } olmak üzere, A kümesinin;**

**a) Üçlü permütasyonlarının sayısı,**

$P(7, 3) = 7.6.5 = 210$ olduğundan,
A kümesinin elemanları kullanılarak, üç basamaklı ve rakamları farklı, 210 değişik sayı yazılabilir.

**b) Bütün permütasyonlarının sayısı,**

$P(7,7) = 7!$ dir.

**c) " 1 " in bulunduğu dörtlü permütasyolarının sayısı,**

" 1 " en solda olursa, kalan altı rakamdan üçü "1" in sağına $P(6, 3) = 6.5.4 = 120$ değişik şekilde sıralanır.
Benzer şekilde, " 1 " in ikinci, üçüncü ve dördüncü sırada olduğu durumların her birinin sayısı da 120 dir.
O halde, " 1 " in bulunduğu dörtlü permütasyonların sayısı, $4.P(6, 3) = 480$ olduğundan, A kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek dört basamaklı ve rakamları farklı 480 tane sayının rakamlarından bir tanesi " 1 " dir.

**d) " 2 " ile " 5 " in yan yana olduğu dörtlü permütasyonlarının sayısı,**

" 2 " ile " 5 " i bir eleman gibi [25] şeklinde düşünürsek; [25] elemanının, geriye kalan beş elemandan ikisinin de solunda olduğu [25] •• biçiminde $P(5, 2) = 5.4 = 20$ değişik sıralama olabilir. Benzer şekilde • [25] • biçiminde ya da •• [25] şeklinde 20 şer değişik sıralama daha olur. ( 3 durum)

Ayrıca " 2 " ile " 5 " yan yana [52] şeklinde olduğunda da oluşacak sıralamaların sayısı diğerinin sayısı kadardır.
Buna göre, " 2 " ile " 5 " in yan yana olduğu dörtlü permütasyonların sayısı, $2.3.P(5, 2) = 2.3.5.4 = 120$ dir.

**Tekrarlı Permütasyon**

$n_1$ tanesi **birinci** türden, $n_2$ tanesi **ikinci** türden, $n_3$ tanesi **üçüncü** türden, ..., $n_r$ tanesi **r ninci** türden olmak üzere, toplam $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$ tane elemanın birbirinden **farklı sıralanışlarının sayısı,**

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!. \ldots .n_r!} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

**Bir kez 1, iki kez 2, üç kez 3 kullanılarak altı basamaklı;**

**a) Kaç farklı sayı yazılabilir?**
2 den iki tane, 3 ten üç tane olduğu için bu altı rakamla

$\frac{6!}{2!.3!} = 60$ değişik sayı yazılabilir.

**b) Kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

$$\underbrace{_____}_{1,2,3,3,3}2$$

Çift sayı olacağı için, birler basamağına 2 lerden birisi yazıldıktan sonra, diğer beş rakam 2 nin soluna sıralanacaktır. Birler basamağındaki rakamın yeri değişmediği için sıralamaya katılmaz. O halde, 3 ten üç tane olduğu için bu beş rakamla, $\frac{5!}{3!} = 20$ değişik çift sayı yazılabilir.

**Uyarı:**
Tekrarlı permütasyonların hesaplanmasında, sıralanacak **bütün elemanlar** birbirinden **farklı** gibi **düşünülerek istenilen** şartlardaki **sıralamaların** sayısı hesaplandıktan sonra, aynı türden olan elemanların kendi aralarındaki yer değişmelerinden dolayı **ortaya çıkan azalmalar** hesaba katılarak çözüm yapılır. Dolayısıyla **herhangi bir elemanı sabit tutmaya gerek yoktur.**

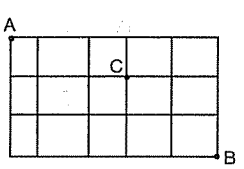
**c) Kaç farklı tek sayı yazılabilir?**

$$\underbrace{____}_{5!}\ \underbrace{_}_{4}$$

Birler basamağına yazılan rakam dışında, kalan beş rakam → 1, 3, 3, 3

altı rakamın altısı da sıralamaya katıldığı için, bu altı rakamla $\frac{5!.4}{2!.3!} = 40$ değişik tek sayı yazılabilir.

**Örnek: 2001 - ÖSS**




Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir.

**A dan hareket edip C ye uğrayarak B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimse kaç değişik yol izleyebilir?**

A) 24 B) 18 C) 16 D) 12 E) 9

**I. Çözüm:**
A dan hareket eden bir kişi, ilk iş olarak C noktasına gidebilmek için, üç sokak sağa (s), bir sokak aşağı (a) gitmelidir.

sssa → $\frac{4!}{3!} = 4$ olduğundan A dan C ye 4 değişik yoldan gidebilir.

İkinci iş olarak da C den B ye gidebilmek için 2 sokak sağa (s), 2 sokak aşağı (a) gitmelidir.

ssaa → $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ olduğundan C den B ye 6 değişik yoldan gidebilir.

Buna göre, A dan C ye uğrayarak B ye en kısa yoldan gidecek olan bir kimse, 4.6 = 24 değişik yol izleyebilir.

**II. Çözüm:**
Burada, A dan C ye izlenebilecek olan 4 yol ve C den B ye izlenebilecek 6 yol tek tek sayılarak da bulunduktan sonra, ikisi birlikte gerçekleşeceği için 4.6 = 24 değişik yol izlenebileceği bulunabilir.

**Dairesel (Dönel) Permütasyon**

Sonlu bir kümenin elemanlarının bir çember üzerinde (kapalı bir eğri etrafında) **birbirlerine göre** farklı biçimde **sıralanışlarının** her birine **bu elemanların bir dairesel permütasyonu** veya **dönel sıralanması** denir.
Örneğin, bir masa etrafında oturan üç kişinin birbirine göre yan yana gelmelerini inceleyelim. İki kişiden birisi üçüncü kişinin sağına diğeri de soluna oturabilir. (Birinci durum) Bu iki kişi yer değiştirebilir. (İkinci bir durum) Bu ikisinden farklı başka bir sıralanma olmadığı kolaylıkla görülebilir. O halde, 3 kişi dairesel olarak 2 değişik şekilde sıralanabilir.

★ Dikkat edilirse, üç kişinin dairesel olarak sıralanışları sayılırken içlerinden birisine göre karşılaştırma yapılmıştır. O halde bir eleman sabit tutulup diğerleri sıralanmaktadır.

**Sonuç:**
Birbirlerinden **farklı,** sonlu **n elemanın dairesel permütasyonlarının** (dönel sıralanmalarının) **sayısı,**

**(n – 1)!** dir.

**Örnek:**
5 kişilik bir aile dairesel bir yemek masasının etrafına,

$(5-1)! = 4! = 24$ değişik şekilde oturarak yemek yiyebilir.

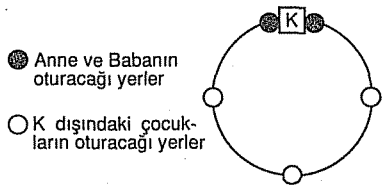
**Uyarı:**

Dairesel permütasyonların sayısı hesaplanırken, **elemanlardan** herhangi **biri** belli bir noktaya **sabitlendikten sonra,** kalan **(n – 1) elemanın sıralanışları, yan yana sıralanışlarda olduğu gibi düşünülür.**

**Örnek:**

**Anne, baba ve dört çocuğunun, sadece en küçük çocuk anne ve babasının arasında olacak şekilde, dairesel yemek masasının etrafında kaç farklı şekilde oturabileceklerini bulalım.**

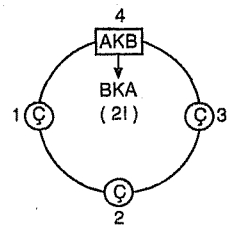
**I. Çözüm:**




En küçük çocuk (K) bir yere oturduktan sonra, bir tarafına anne, diğer tarafına baba otursun. Anne ve babadan biri, örneğin önce anne, en küçük çocuğun bir yanına $2! = 2$ değişik şekilde, ardından baba bu çocuğun boş kalan yanına 1 şekilde oturur. Bundan sonra da diğer üç çocuk kalan yerlere $3! = 6$ değişik şekilde oturabilirler. O halde, en küçük çocuğun anne ve babasının arasında oturduğu bütün durumların sayısı,

$$2!.1.3! = 12 \text{ dir.}$$

**II. Çözüm**



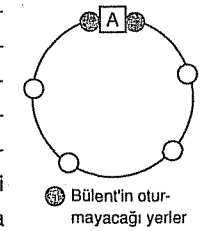

Anne (A), en küçük çocuk (K) ve baba (B) bir eleman gibi düşünülürse, diğer üç çocukla birlikte toplam dört elemanın dairesel sıralanışı söz konusu olur. Bununla birlikte anne ve baba kendi arasında $2! = 2$ değişik şekilde yer değiştirebilir. O halde, bu şekildeki bütün sıralanışların sayısı, $2! \cdot (4-1)! = 12$ dir.

**Örnek:**

Aralarında Ali ve Bülent'in de bulunduğu 7 arkadaş, yuvarlak bir masa etrafında oturuyorlar.

**Ali ile Bülent'in yan yana <u>olmadığı</u> kaç farklı sıralanış olduğunu bulalım.**

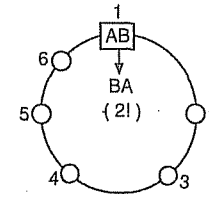
**I. Çözüm:**




İlk önce Ali (veya önce Bülent) belli bir yere, yer değiştirmemek üzere, otursun. İki yanına Bülent'in dışında diğer arkadaşlarından herhangi biri oturacağına göre, Bülent'in dışında, kalan 5 kişiden biri 5 değişik şekilde Ali'nin bir yanına (birinci iş), kalan 4 kişiden biri de 4 değişik şekilde boş kalan diğer yanına (ikinci iş) oturabilirler. Bundan sonra kalanların (Bülent dahil) oturması için hiçbir şart olmadığından kalan 4 kişi $4! = 24$ değişik şekilde oturabilirler (üçüncü iş).

O halde, bu üç iş birlikte, $5.4.4! = 480$ değişik şekilde gerçekleşebilir.

**II. Çözüm:**




Ali ile Bülent'in yan yana oturdukları durumlar

Bütün durumların sayısından Ali ile Bülent'in yan yana oturdukları durumların sayısı çıkarılırsa, Ali ile Bülent'in yan yana oturmadıkları durumların sayısı bulunur.

O halde, Ali ile Bülent'in yan yana oturmadıkları durumların sayısı,

$$\left(\begin{array}{c}\text{Ali ile Bülent'in yan yana olmadıkları durumlar}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Bütün durumlar}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Ali ile Bülent'in yan yana oldukları durumlar}\end{array}\right)$$

$$= (7-1)! - 2!.(6-1)!$$
$$= 6! - 2!.5!$$
$$= 720 - 2.120$$
$$= 480 \text{ dir.}$$

# PERMÜTASYON

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $\dfrac{(7!)^2 - (5!)^2}{6.7! + 6!}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 120 B) 256 C) 340 D) 624 E) 820

**2.** $\dfrac{(2n+6)!}{(n+3)!} : \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!} = 252$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**3.** $P(n+1, 3) + 3\,P(n, 1) = P(2n, 2)$

**eşitliğini sağlayan n değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**4.** 111222333

**sayısının rakamları kullanılarak üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 27

**5.** **Soldan birinci hanesi 8 tane sesli harften biri, ikinci hanesi 15 tane sessiz harften biri ve diğer üç hanesi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarından biri olan beş haneli kaç şifre oluşturulabilir?**

A) 112 000 B) 115 000 C) 118 000

D) 120 000 E) 125 000

**6.** A = { a, b, c, d, e, f }

**kümesinin elemanları ile yazılabilecek dört harfli, harfleri farklı, anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaç tanesinde en çok üç tane sessiz harf vardır?**

A) 240 B) 272 C) 316 D) 324 E) 336

**7.** **Rakamları farklı, 4000 den büyük dört basamaklı doğal sayıların kaç tanesi tek sayıdır?**

A) 1720 B) 1680 C) 1624

D) 1608 E) 1512

**8.** Dokuz koşucunun katıldığı bir koşuda, koşu başladıktan sonra belli üç kişi koşuyu bırakmak zorunda kalıyor.

**Buna göre, bu koşuda ilk üç derece kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?**

A) 160 B) 150 C) 130 D) 120 E) 100

**9.** A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

**kümesinin elemanlarının üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde " 3 " vardır?**

A) 30 B) 60 C) 90 D) 120 E) 150

**10.** **3 kız ve 3 erkek arkadaş, herhangi iki erkek bir arada olmamak koşulu ile 6 kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde yan yana oturabilirler?**

A) 288 B) 144 C) 124 D) 96 E) 72

**1-E** **2-B** **3-A** **4-E** **5-D** **6-E** **7-E** **8-D** **9-C** **10-E**

**11.** " ERZURUM "

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilecek yedi harfli, anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaç tanesinde her " R " harfinden sonra bir " U " harfi vardır?**

A) 120 B) 100 C) 90 D) 80 E) 60

**12.** "122333007"

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek dokuz basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

A) 5460 B) 5420 C) 5360 D) 5240 E) 5040

**13.** **4 Matematik, 3 Fizik, 2 Kimya öğretmeni, yuvarlak bir masa etrafında, aynı branşın tüm öğretmenleri yan yana olmak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 864 B) 576 C) 496 D) 424 E) 382

**14.** **4 doktor ve 4 asistan, yuvarlak bir masa etrafında, herhangi iki asistan yan yana olmamak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 144 B) 124 C) 96 D) 84 E) 72

**15.** **100 den 200 e kadar olan doğal sayılar yazılırken toplam kaç kez 7 rakamı kullanılmıştır?**

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

**11-E 12-A 13-B 14-A 15-D**

**16.** Sinema salonunda bulunan n tane koltuğa, n tane öğrenci 120 farklı şekilde oturabiliyorlar.

**Buna göre, grupta bulunan Ahmet, Recep ve Rıfat'ın yanyana geldiği kaç farklı oturma şekli vardır?**

A) 18 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

**17.** $K = \{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$
$M = \{2, 5\}$

**kümelerinin elemanları kullanılarak birler basamağı M kümesinden onlar ve yüzler basamağı K kümesinden seçilmek üzere, rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 41 B) 40 C) 39 D) 38 E) 37

**18.** **x kişinin katıldığı bir yarışta ilk üç derece 990 farklı şekilde olabiliyorsa x kaçtır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**19.** **5 çocuklu bir ailede baba daima sağ tarafında eşini ve eşi de daima çocuklarından A ve B yi sağ tarafında bulundurmak şartıyla, kaç farklı şekilde yuvarlak bir masa etrafında oturabilirler?**

A) 44 B) 32 C) 28 D) 16 E) 12

**20.** İçlerinde fizik, kimya, biyoloji, matematik ve türkçe kitaplarından birer tane bulunan 5 ayrı çantadan; Ahmet ve Can isimli öğrenciler farklı çantalardan, birbirinden farklı birer kitap seçeceklerdir.

**Bu seçim kaç değişik şekilde gerçekleşebilir?**

A) 144 B) 256 C) 316 D) 400 E) 512

**16-D 17-A 18-D 19-E 20-D**

# PERMÜTASYON

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $\dfrac{(7!)^2 - (5!)^2}{6.7! + 6!} = \dfrac{(7! - 5!)(7! + 5!)}{6.7.6! + 6!}$

$= \dfrac{(7.6 - 1).5!.(7.6 + 1).5!}{(42 + 1).6!}$

$= \dfrac{41.120.43.120}{43.6.120}$

$= 820$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** $\dfrac{(2n+6)!}{(2n+2)!} = \dfrac{(2n+6)(2n+5)(2n+4)(2n+3)(2n+2)!}{(2n+2)!}$

$= 2(n+3)(2n+5)2(n+2)(2n+3)$ ve

$\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$

$= (n+3)(n+2)$ olduğundan,

$\dfrac{(2n+6)!}{(n+3)!} : \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!} = 252$

$\Rightarrow \dfrac{2(n+3)(2n+5)\,2(n+2)(2n+3)}{(n+3)(n+2)} = 252$

$\Rightarrow 4(2n+5)(2n+3) = 4.9.7$

$\Rightarrow 2n+5=9 \Rightarrow n = 2$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $P(n+1, 3) + 3\,P(n, 1) = P(2n, 2)$

$\Rightarrow (n+1)\,n\,(n-1) + 3n = 2n\,(2n-1) \qquad (n \neq 0)$

$\Rightarrow n((n+1)(n-1) + 3) = 2n(2n-1)$

$\Rightarrow n^2 - 1 + 3 = 4n - 2$

$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0$

$\Rightarrow (n-2)^2 = 0 \Rightarrow n = 2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**4.** Dikkat edilecek olursa 3 tane birbirinin aynı olan 3 er tane rakam var.

Sadece iki rakamı aynı olan üç basamaklı sayılar,

122, 212, 221 → 3 tane
133, 313, 331 → 3 tane
211, 121, 112 → 3 tane
233, 323, 332 → 3 tane
311, 131, 113 → 3 tane
322, 232, 223 → 3 tane

olmak üzere, 18 tanedir.

Ayrıca 1, 2 ve 3 rakamları kullanılarak 123, 132, ... gibi 6 tane üç basamaklı sayı yazılabilir.

Ayrıca 111 ve 222 ve 333 gibi üç basamaklı 3 farklı sayı vardır. O halde, olabilecek bütün üç basamaklı sayılar; 18 + 6 + 3 = 27 tanedir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**5.**

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 15 | 10 | 10 | 10 |
| sesli harf | sessiz harf | rakam | | |

1. haneye 8 tane sesli harften biri 8 değişik şekilde, 2. haneye 15 tane sessiz harften biri 15 değişik şekilde, 3., 4. ve 5. hanelere 10 tane rakamdan biri 10 değişik şekilde yazılabileceğinden, problemde belirtilen şartlardaki beş haneli şifre,

$8.15.10.10.10 = 120\,000$

değişik şekilde oluşturulabilir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** s(A) = 6 olduğundan A kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek dört harfli, harfleri farklı kelimelerin (bütün durumların) sayısı P(6, 4) tür.
A kümesinin elemanlarının 4 ü sessiz harf olduğundan bu dört harfle, harfleri farklı, P(4, 4) değişik kelime yazılabilir (istenmeyen durum). Buna göre,
A kümesinin elemanlarıyla, harfleri farklı, en çok üç harfi sessiz harften oluşan;

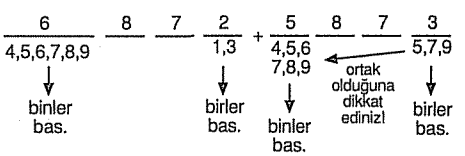
$$\left(\begin{matrix}\text{istenilen}\\ \text{durumların}\\ \text{sayısı}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{bütün}\\ \text{durumların}\\ \text{sayısı}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{istenmeyen}\\ \text{durumların}\\ \text{sayısı}\end{matrix}\right)$$

$$= P(6, 4) - P(4, 4)$$
$$= 6.5.4.3 - 4.3.2.1$$
$$= 336$$

değişik kelime yazılabilir.

**Doğru cevap E seçeneğidir.**

**7.**




$= 6 . 8 . 7 . 2 + 5 . 8 . 7 . 3 =$ 1512 dir.

**Doğru cevap E seçeneğidir.**

**8.** Koşu başladıktan sonra belli üç kişi yarışı bıraktığına göre, kalan altı kişiden üçü,

$P(6, 3) = 6.5.4 = 120$

değişik şekilde ilk üç dereceyi oluşturabilirler.

**Doğru cevap D seçeneğidir.**

**9.** **1. Yol:**

A kümesinin üçlü permütasyonları

xyz

biçiminde olsun. " 3 " mutlaka olacağına göre; x, y veya z den birinin yerine " 3 " üç farklı şekilde yazılabilir. " 3 " yazıldıktan sonra (örneğin x yerine yazılırsa) geriye kalan altı elemandan ikisi diğer iki yere (y ve z yerine) P(6, 2) değişik şekilde yazılabilir. Buna göre, A kümesinin üçlü permütasyonlarının,

$xyz \rightarrow 3\,P(6, 2) = 90$

tanesinde " 3 " vardır.

**2. Yol:**

s(A) = 7 olduğundan A kümesinin üçlü permütasyonlarının sayısı P(7, 3) ve " 3 " dışındaki altı elemanın (3 ün bulunmadığı) üçlü permütasyonlarının sayısı
P(6, 3) olduğundan, A kümesinin geriye kalan üçlü permütasyonlarının,

$P(7, 3) - P(6, 3) = 7.6.5 - 6.5.4$
$= 90$

tanesinde " 3 " vardır.

**Doğru cevap C seçeneğidir.**

**10.** Herhangi bir erkek E, herhangi bir kız K ile gösterilirse problemde istenen sıralama,

EKEKEK veya KEKEKE

şeklindedir. Üç erkek kendi aralarında $P(3, 3) = 3!$ ve üç kız kendi aralarında $P(3, 3) = 3!$ sayıda değişik şekilde sıralanabileceğinden istenen sıralamaların sayısı toplam,

$3!.3! + 3!.3! = 2.6.6 = 72$ dir.

**Doğru cevap E seçeneğidir.**

**11.** Her R harfinden sonra bir U harfi geleceğine göre, iki tane (RU) ve birer tane E, Z, M olmak üzere, toplam beş elemanın farklı sıralanışlarının sayısı

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ tır.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12. 1. yol:**

Birler basamağı sıfır için ↑ $7 \cdot 7! \cdot 2$ + Birler basamağı 2 için ↑ $6 \cdot 7! \cdot 2$

$$\frac{\quad + \quad}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

$$= \frac{14 \cdot 7! + 12 \cdot 7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 5460$$

**2. yol:**

122 333 007

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilecek dokuz basamaklı bütün sayılar,

| 1.iş | 2.iş |
|---|---|
| $10^8$ ler b. | • • • • • • • • • |
| 7 | P(8,8)=8! |
| {1,2,2,3,3,3,7} ↓ {1} yazılsın | {2,2,3,3,3,0,0,7} |

$$\frac{7 \cdot 8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \text{ ve}$$

yazılabilecek dokuz basamaklı tek sayılar,

| 2.iş | 3.iş | 1.iş |
|---|---|---|
| $10^8$ler b. | • • • • • • • • | binler b. |
| 6 | P(7,7)=7! | 5 |
| {2,2,3,3,3,7} ↓ {2} yazılsın | {2,3,3,3,0,0,7} | {1,3,3,3,7} ↓ {1} yazılsın |

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

olduğundan geriye kalan,

$$\frac{7 \cdot 8! - 30 \cdot 7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{(7 \cdot 8 - 30) \cdot 7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$= 5460$$

tane sayı çift sayıdır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**13.** Aynı branştan olan öğretmenler bir arada olacağına göre, 4 Matematik öğretmeni bir arada 1 eleman, 3 Fizik öğretmeni bir arada 1 eleman ve 2 Kimya öğretmeni bir arada 1 eleman gibi düşünülürse 3 eleman dairesel olarak $(3-1)! = 2!$ değişik şekilde sıralanabilir. Ayrıca;
4 Matematik öğretmeni kendi aralarında 4!,
3 Fizik öğretmeni kendi aralarında 3! ve
2 Kimya öğretmeni kendi aralarında 2! değişik sayıda yer değiştirebileceğinden istenen bütün sıralamaların sayısı,

$(3-1)! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 576$ dır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** 4 asistan aralarında birer boşluk olacak şekilde yuvarlak bir masa etrafında $(4-1) = 3!$ değişik şekilde, asistanların arasındaki dört boş yere, 4 doktor 4! değişik şekilde oturabileceğinden problemde istenenlere uygun farklı durumların sayısı,

$3! \cdot 4! = 144$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** 169 ile 180 arasındaki doğal sayılarda kullanılan 7 rakamı 170, 171, ... 177, 178,179 için 11 tanedir. Ayrıca bunun dışında kalan 100 den sonra 200 e kadar olan sayılarda da 9 tane 7 rakamı kullanılır.
O halde, olabilecek bütün durumlar;

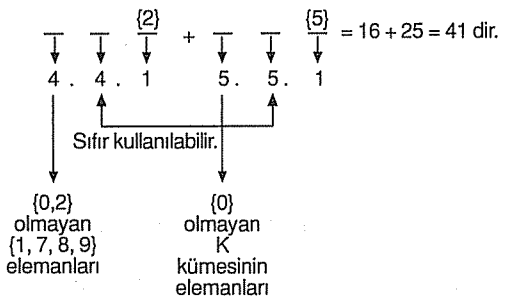
11 + 9 = 20 tanedir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**16.** n tane koltuğa, n kişi,
$n.(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n!$ şeklinde oturabilir.
O halde, $n! = 120$ ise $n = 5$ tir.
Ahmet, Recep ve Rıfat + 4. kişi + 5. kişi = 3 kişi gibi düşünülür.
kendi aralarında 3! şekilde otururlar.
O halde, $3! \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$ dır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**17.** Rakamları farklı olacağından son basamağa 2 ve 5 için ayrı ayrı düşünelim. Çünkü 2 rakamı iki kümede de ortak elemandır.
O halde,

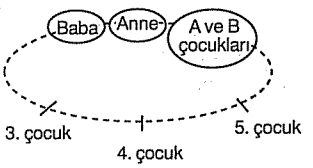



**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**18.** x kişinin katıldığı yarışta ilk üç derece
x.(x – 1) . (x – 2) şekilde olur.
O halde, x.(x – 1) . (x – 2) = 990 = 99.10
x(x – 1) . (x – 2) = 9.10.11
Buna göre, x = 11 dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**19.** Yuvarlak bir masaya oturma şekli




Yukarıda sadece A ve B çocukları kendi aralarında yer değiştirebilir. Ayrıca, Anne ve Baba iki çocuğu bir grup düşünürsek kalan 3., 4., ve 5. çocuklarla 4 kişinin yuvarlak masada oturmaları (4 – 1)! = 3! dir.
Ayrıca A ve B çocuğunun yer değiştirmesi 2! dir.
O halde, olabilecek bütün oturma şekilleri 2! . 3! = 12 dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**20.** 5 farklı çantayı Ahmet'in ve Can'ın farklı şekilde almaları 5 . 4 = 20 farklı şekildedir.

Çantaların içindeki 5 farklı kitaptan Ahmet ve Can'ın farklı kitapları okumaları 5 . 4 = 20 farklı şekildedir.

Bu iki durumla birlikte farklı şekilde olması ise

20 . 20 = 400 dür.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

# PERMÜTASYON

TEST - 2

**1.** **4 farklı renk mendili ve 3 farklı çeşit anahtarlığı olan bir kişi 1 mendil veya 1 anahtarlığı kaç farklı şekilde seçebilir?**

A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 3

**2.** **4 farklı defteri ve 7 farklı renkte kalemi olan bir öğrenci bir defter ve bir kalemi kaç farklı şekilde seçebilir?**

A) 11 B) 16 C) 26 D) 28 E) 30

**3.** Bir lokantada 3 çeşit çorba, 5 çeşit yemek ve 4 çeşit tatlı vardır.

**Bir çorba, bir yemek ve bir tatlıdan oluşan mönü kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 72 B) 60 C) 40 D) 36 E) 12

**4.** A köyünden B köyüne 4 farklı yoldan, B köyünden C köyüne 3 farklı yoldan gidilebilmektedir.

**Gidiş ve dönüşte B köyüne uğranmak ve gidişte kullanılan yol dönüşte kullanılmamak şartıyla, A köyünden C köyüne kaç farklı şekilde gidilip dönülebilir?**

A) 7 B) 12 C) 48 D) 70 E) 72

**5.** **10 kişilik bir gruptan bir başkan, bir başkan yardımcısı ve bir sekreter kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 720 B) 700 C) 640 D) 560 E) 520

**6.** **5 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?**

A) 36 B) 32 C) 30 D) 24 E) 20

**7.** 4 mektup 5 posta kutusuna atılarak postalanacaktır.

**Mektuplar kaç farklı şekilde postalanabilir?**

A) $4^5$ B) $5^4$ C) 20 D) 9 E) 4

**8.** Bir okulun öğrencilerine, alfabemizdeki sessiz harfler ve rakamlar kullanılarak ilk hanesi harf, son iki hanesi rakam olan üç haneli numaralar verilecektir.

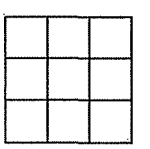
**Bu okulda kaç öğrenciye numara verilebilir?**

A) 2900 B) 2800 C) 2100 D) 2000 E) 1800

**9.** **İki zarın birlikte atılması işleminde, olabilecek tüm durumların kaç tanesinde üst yüze gelen sayıların çarpımı çift sayıdır?**

A) 36 B) 33 C) 28 D) 27 E) 24

**10.** **Farklı 4 sesli ve farklı 5 sessiz harfler herhangi bir satırda veya herhangi bir sütunda iki tane sessiz harf art arda gelmemek şartıyla, şekildeki kutulara kaç farklı şekilde yazılabilir?**



A) 5!.4! B) 5! C) 4.5! D) 5.5! E) 4!

1-C 2-D 3-B 4-E 5-A

6-B 7-B 8-C 9-D 10-A

**11, 12, 13, 14 ve 15. soruları**
**A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**
**kümesinin elemanlarını kullanarak çözünüz.**

**11.** Üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

A) 360 B) 343 C) 313 D) 310 E) 293

**12.** Üç basamaklı kaç tane çift doğal sayı yazılabilir?

A) 153 B) 147 C) 143 D) 137 E) 130

**13.** 5 ile tam bölünebilen üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

A) 53 B) 51 C) 49 D) 48 E) 32

**14.** 400 den büyük, üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 200 B) 198 C) 196 D) 190 E) 186

**15.** 300 den büyük, üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 126 B) 130 C) 136 D) 140 E) 146

**11-B 12-B 13-C 14-C 15-D**

**16, 17, 18, 19 ve 20. soruları**
**B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}**
**kümesinin elemanlarını kullanarak çözünüz.**

**16.** Rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 190 B) 184 C) 182 D) 180 E) 172

**17.** Rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

A) 105 B) 100 C) 95 D) 45 E) 70

**18.** 5 ile tam bölünebilen, rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 57 B) 55 C) 52 D) 45 E) 42

**19.** 400 den büyük, üç basamaklı kaç tane çift sayı yazılabilir?

A) 83 B) 80 C) 77 D) 73 E) 70

**20.** 300 den büyük, rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 60 B) 50 C) 48 D) 45 E) 40

**16-D 17-A 18-B 19-A 20-B**

**21, 22, 23, 24, 25 ve 26. soruları**
**C = {a, b, c, d, e, f}**
**kümesinin elemenlarını kullanarak çözünüz.**

**21.** **4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?**

A) 48 B) $4^6$ C) $6^4$ D) 6! E) 4!

**22.** **Harfleri birbirinden farklı 4 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?**

A) 390 B) 380 C) 360 D) 320 E) 280

**23.** **Sessiz harfle başlayıp sessiz harfle biten 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?**

A) 604 B) 596 C) 580 D) 576 E) 570

**24.** **Her harf bir kez kullanılmak üzere, 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaç tanesi sesli harf ile başlar ve sesli harf ile biter?**

A) 5! B) 6! C) 3! D) 24 E) 20

**25.** **İçerisinde " a " harfinin bulunduğu, harfleri tekrarsız 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?**

A) 160 B) 170 C) 180 D) 200 E) 240

**21-C** **22-C** **23-D** **24-D** **25-E**

**26.** **" a " harfi ile başlayan fakat " d " harfi ile bitmeyen, harfleri tekrarsız 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?**

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 48

**27.** $$\frac{8! - 6!}{6! + 5.5!}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 42 B) 40 C) 36 D) 32 E) 30

**28.** $0! + 1! + 2! + \ldots + 20!$

**toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 4

**29.** $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{(n-1)!}{(n-3)!} + 2 = 5n - 3$$

**olduğuna göre, n değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**30.** $$\frac{(2n)!\,.\,(n-2)!}{n!\,.\,(2n-3)!} = 28$$

**olduğuna göre, n değeri kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

**26-E** **27-E** **28-E** **29-C** **30-C**

**31.** $P(5, 2) + 3.P(3, 3) + 4.P(5, 1)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 60 B) 58 C) 56 D) 54 E) 52

**32.** $P(9, 2) = \frac{(n + 2)!}{n!}$

**olduğuna göre, n değeri kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**33.** **3 kişi, 6 tane boş koltuğa kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 120 B) 100 C) 96 D) 72 E) 24

**34.** 3 öğrenci ile 2 öğretmen, üçü önde ikisi arkada olmak üzere fotoğraf çektireceklerdir.

**Kaç türlü poz verebilirler?**

A) 120 B) 100 C) 96 D) 80 E) 72

**35.** 3 öğrenci ile 2 öğretmen, üçü önde ikisi arkada olmak üzere fotoğraf çektireceklerdir.

**Öğretmenler birbirinden ayrılmamak şartıyla kaç türlü poz verebilirler?**

A) 30 B) 32 C) 36 D) 42 E) 48

**36.** $A = \{ a, b, c, d, e \}$

**kümesinin 3 lü permütasyonlarının kaçında " c " eleman olarak bulunur?**

A) 30 B) 32 C) 36 D) 42 E) 48

**37.** " KARAKAŞ "

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 7 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?**

A) 420 B) 410 C) 405 D) 396 E) 384

**38.** " BABACAN "

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 7 harfli, C ile başlayıp N ile biten anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?**

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

**31-B** **32-B** **33-A** **34-A** **35-C** **36-C** **37-A** **38-A**

**39.** " KELEBEK "

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılan yedi harfli, anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaç tanesi BEL ile biter?**

A) 18 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

**40.** " 22211334 "

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek sekiz basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

A) 920 B) 840 C) 720 D) 600 E) 500

**41.** " 2200111 "

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yedi basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?**

A) 80 B) 70 C) 60 D) 50 E) 40

**42.** **7 kişilik bir grup yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 7! B) 2.6! C) 6! D) 2.5! E) 5!

**43.** **Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir aile anne ile baba daima yan yana olacak şekilde bir yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 2!.5! B) $(5!)^2$ C) 5!

D) $(2!)^5$ E) 2!.2!.5!

**44.** **8 kişilik bir toplantı grubu, yardımcısı başkanın sağında ve sekreteri solunda olmak üzere, bir yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 4! B) 5! C) 2.5! D) 6! E) 20!

**45.** **6 memur ile 6 işçi, iki memur arasına bir işçi gelmek şartıyla yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 2.3!.6! B) 4!.5! C) 5!.6!

D) 2!.5!.6! E) 6!

**46.** **Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan 6 kişilik bir aile, en küçük çocuk daima anne ile baba arasında olmak şartıyla, yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı biçimde oturabilirler?**

A) 6! B) 4! C) 2.4! D) 3! E) 2!.3!

**39-D** **40-B** **41-C** **42-C**

**43-A** **44-B** **45-C** **46-E**

# PERMÜTASYON

TEST - 3

**1.** $P(n, 3) = P(n, 2) + 40$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**2.** $\frac{4! + n!}{n!} = 5$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**3.** $\frac{P(n, 2)}{P(n, 1)} = P(5, 3)$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 11 B) 19 C) 21 D) 59 E) 61

**4.** **Aynı özellikte; 3 matematik ve 3 kimya kitabı, bir rafa kaç farklı şekilde sıralanabilir?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**5.** 0, 1, 2, 3, 4, 5

**rakamları kullanılarak 5 ile tam bölünebilen, üç basamaklı kaç değişik doğal sayı yazılabilir?**

A) 40 B) 48 C) 50 D) 60 E) 72

**6.** $\frac{(n + 1)! - n!}{n! + (n + 1)!} = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**7.** $\frac{P(n,2)}{n - 1} + P(2,1) = 6$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**8.** **16 kişilik bir takımda bir kaleci ve bir kaptan kaç farklı şekilde seçilir?**

A) 228 B) 232 C) 236 D) 240 E) 250

**1-B** **2-A** **3-E** **4-C**

**5-D** **6-A** **7-C** **8-D**

**9.** 4 farklı matematik, 3 farklı fizik kitabı bir rafa;

I. 7! farklı şekilde dizilebilir.

II. Aynı branşın tüm kitapları bir arada olmak şartıyla 4!.3!.2! farklı şekilde dizilebilir.

III. Matematik kitapları birbirinden ayrılmamak şartıyla 4!.4! farklı şekilde dizilebilir.

**Yukarıdaki verilenlerden hangileri doğrudur?**

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

**10.** **Birler basamağı çift sayı, onlar basamağı tek sayı olan kaç tane iki basamaklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 28 B) 25 C) 23 D) 20 E) 18

**11.** **3 farklı matematik kitabı ve 4 farklı geometri kitabı olan bir öğrenci kitaplarından birini kaç farklı şekilde seçebilir?**

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**12.** 0, 2, 3, 4, 6, 7

**rakamları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

A) 58 B) 61 C) 64 D) 68 E) 70

**13.** **5 kız ve 6 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıftan bir kız ve bir erkek kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 18 B) 20 C) 24 D) 25 E) 30

**14.** 1, 2, 3, 4, 5

**rakamları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

A) 18 B) 21 C) 24 D) 28 E) 30

**15.** **Birbirinden farklı 8 kitap, her öğrenciye bir kitap verilmek şartıyla 4 öğrenciye kaç farklı şekilde verilebilir?**

A) 1680 B) 1640 C) 1600 D) 1580 E) 1520

**16.** **5 i erkek 4 ü kız 9 öğrenci, kaç farklı şekilde yan yana oturabilirler?**

A) 4! B) 5! C) 4.5! D) 9! E) 10!

**9-E** **10-B** **11-C** **12-D**

**13-E** **14-C** **15-A** **16-D**

**17.** "S I N A V"

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilecek anlamlı ya da anlamsız beş harfli kelimelerin kaç tanesinin son harfi N dir?**

A) 5! B) 2.4! C) 4! D) 2.3! E) 3!

**18.** **Anne, baba, nine, dede ve belli sayıda çocuktan oluşan bir aile, yuvarlak bir masa etrafına dede ile ninenin arasında anne ve baba olmak şartıyla 96 değişik şekilde oturabildiklerine göre, bu ailedeki birey sayısı kaçtır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**19.** **1, 3, 5, 7 rakamları birer kez kullanılarak iki basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?**

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

**20.** P(4, 3) + P(3, 2) + P(2, 1)

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 9 B) 16 C) 24 D) 32 E) 35

**21.** P(n, 2) + P(n, 1) = 25

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**22.** **4 kişilik koltuğa 4 kişi kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 1 B) 4 C) 12 D) 20 E) 24

**23.** "Ş İ R İ N"

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız beş harfli kaç farklı kelime yazılır?**

A) 45 B) 60 C) 75 D) 90 E) 120

**24.** "1 1 5 5 4 3"

**sayısının rakamlarından oluşan altı basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 120 B) 180 C) 240 D) 360 E) 720

**17-C** **18-D** **19-B** **20-D**

**21-C** **22-E** **23-B** **24-B**

**25.** "8 7 0 6 6"

**sayısının rakamları yer değiştirilerek beş basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 24 B) 36 C) 48 D) 56 E) 60

**26.** Ahmet'in hepsi birbirinden farklı olan pantolonlarından 4 ü siyah, 4 ü lacivert, 4 ü gridir.

**Ahmet bu pantolonlarından bir tanesini kaç farklı şekilde seçebilir?**

A) 12 B) 11 C) 10 D) 6 E) 3

**27.** $\dfrac{2.6! - 3.7!}{2.7! + 8!} + \dfrac{3}{7}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\dfrac{12}{71}$ B) $\dfrac{13}{70}$ C) $\dfrac{11}{70}$ D) $\dfrac{9}{70}$ E) $\dfrac{7}{8}$

**28.** a pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\frac{2.(a+1)! + a!}{(a-1)!} = 10.a + 15$$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**25-C** **26-A** **27-C** **28-B**

**29.** **Onlar basamağı 2 olan kaç tane üç basamaklı doğal sayı vardır?**

A) 100 B) 90 C) 54 D) 36 E) 30

**30.** 10 farklı renkli boyadan üçü ile, üç katlı bir bina boyanacaktır.

**Her katı farklı renk olmak şartıyla bu bina kaç değişik biçimde boyanabilir?**

A) 27 B) 90 C) 240 D) 720 E) 1000

**31.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

**kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?**

A) 120 B) 200 C) 340 D) 420 E) 510

**32.** "K İ T A P"

**kelimesinin harflerinden üç tanesi kullanılarak, harfleri tekrarsız anlamlı ya da anlamsız kaç kelime yazılabilir?**

A) 40 B) 60 C) 70 D) 80 E) 120

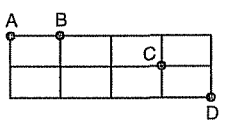
**29-B** **30-D** **31-A** **32-B**

**33.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

**kümesinin rakamları kullanılarak 400 den büyük üç basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 96 C) 108 D) 120 E) 216

**34.**




Yukarıdaki şekil bir şehrin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir.

**B ve C noktalarına uğramak şartıyla en kısa yoldan, A dan D ye kaç farklı şekilde gidilebilir?**

A) 4 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24

**35.** A = { 0, 1, 2, 3, 4 }

**kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 48 C) 30 D) 24 E) 12

**36.** Bir binada tüm katlara uğrayan 3 farklı asansör ile 4 farklı merdiven vardır.

**3. kata uğramak şartıyla, 2. kattan 4. kata en kısa yoldan kaç farklı şekilde çıkılabilir?**

A) 12 B) 21 C) 28 D) 42 E) 49

**37.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

**kümesinin üçlü permütasyonlarından kaç tanesinde 3 veya 5 eleman olarak bulunur?**

A) 96 B) 100 C) 108 D) 132 E) 144

**38.** 11133445

**sayısının rakamları yer değişitirilerek 45 ile başlayan sekiz basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 30 B) 45 C) 50 D) 60 E) 70

**39.** A şehrinden B şehrine gitmek için 4 yol, B şehrinden C şehrine gitmek için 3 yol, C şehrinden D şehrine gitmek için 2 yol vardır. A dan D ye gitmek için sırasıyla B ve C den geçmek zorunludur.

**A şehrinden hareket eden bir kişi, giderken kullanılan herhangi bir yol dönerken bir daha kullanılmayacağına göre, D ye kaç farklı şekilde gidip gelebilir?**

A) 144 B) 132 C) 116 D) 108 E) 96

**40.** **7 kişilik bir ailede anne, baba yanyana ve oturacakları yerler belli olduğuna göre, kaç farklı şekilde yuvarlak bir masa etrafına oturulur?**

A) 480 B) 360 C) 240 D) 120 E) 100

**33-C** **34-B** **35-B** **36-E**

**37-A** **38-D** **39-A** **40-D**

# PERMÜTASYON

TEST - 4

**1.** $P(n, 2) + P(3n + 1,1) = 9$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**2.** 4 mektup 5 posta kutusuna atılacaktır.

***Her kutuya en çok bir mektup atılmak şartıyla bu mektuplar kaç farklı şekilde postalanabilir?***

A) 58 B) 96 C) 108 D) 120 E) 140

**3.** $$\frac{n! + (n-1)!}{(n-1)! \cdot n^2 + n.(n-1) \cdot (n-2)!}$$

***işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?***

A) n B) $n^2$ C) $\frac{1}{n}$ D) $\frac{1}{n^2}$ E) 6

**4.** $$\frac{12! - 4.11!}{10! - 2.8!}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 110 B) 90 C) 84 D) 72 E) 63

**5.** **Bir çift zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayıların çarpımının tek sayı olduğu kaç farklı durum vardır?**

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 27

**6.** $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

**kümesinin elemanlarını kullanarak, rakamları farklı en az üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 42 C) 36 D) 32 E) 28

**7.** Ayşe'nin 8 farklı gömleği vardır. Ayşe prensibi gereği giydiği bir gömleği bir daha giymemektedir.

**Buna göre, Ayşe her gün bir gömlek giymek üzere, art arda 3 gün kaç farklı şekilde gömlek giyebilir?**

A) 336 B) 343 C) 396 D) 512 E) 546

**8.** **2 si kız 3 ü erkek olmak üzere, bir küme çalışmasında kız öğrenciler yan yana olmak şartıyla, bu beş öğrenci dairesel bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturulabilirler?**

A) 18 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

**1-A** **2-D** **3-C** **4-B**

**5-A** **6-C** **7-A** **8-B**

**9.** "0, 2, 4, 5, 6, 8"

**rakamları kullanılarak, 5 ile tam bölünebilen, üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 68 B) 64 C) 60 D) 56 E) 52

**10.** **3 tane 5, 5 tane 3 kullanılarak sekiz basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 56 C) 52 D) 48 E) 56

**11.** **0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak üç basamaklı, rakamları farklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 72 B) 76 C) 80 D) 96 E) 100

**12.** A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

**kümesinin elemanları kullanılarak, rakamlarından sadece biri 2 olan üç basamaklı kaç tane tek sayı yazılabilir?**

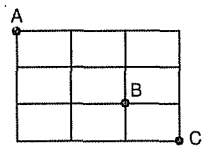
A) 21 B) 24 C) 27 D) 31 E) 33

**13.** 1, 2, 4, 7, 8

**rakamları kullanılarak 1000 ile 7500 arasında rakamları tekrarsız kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 68 C) 74 D) 82 E) 90

**14.**




B den geçmek şartıyla, A dan C ye en kısa yoldan gidilecektir.

**Buna göre, kaç farklı şekilde gidilebilir?**

A) 36 B) 24 C) 20 D) 12 E) 10

**15.** a, b, c, d, e, f harfleri kullanılarak, üç harfli, harfleri tekrarsız, anlamlı ya da anlamsız kelimeler yazılacaktır.

**Bu kelimelerden a ile başlayanların sayısı, a ile başlayıp c ile bitenlerin sayısından kaç fazladır?**

A) 5 B) 6 C) 9 D) 12 E) 16

**16.** 210102

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilebilecek altı basamaklı sayıların kaç tanesinin birler basamağındaki rakam 1 dir?**

A) 60 B) 32 C) 20 D) 18 E) 12

**9-C** **10-B** **11-E** **12-C**

**13-E** **14-D** **15-E** **16-D**

# PERMÜTASYON

TEST - 5

**1.** "BONİBON"

**kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız, yedi harfli kaç kelime yazılabilir?**

A) 540 B) 560 C) 600 D) 630 E) 720

**2.** 001122

**rakamlarının yerleri değiştirilerek altı basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?**

A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 120

**3.** Bir apartmanın giriş katından başka 7 katı daha vardır.

**Bu apartmanın giriş katından asansöre binen 3 kişiden her biri farklı katlarda ineceklerine göre, katlarda kaç değişik şekilde inebilirler?**

A) 100 B) 102 C) 150 D) 200 E) 210

**4.**

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Yukarıdaki harflerle hergün farklı bir sıralama oluşturulmaktadır.

**Buna göre, B harfi 4. sırada en çok kaç gün kalır?**

A) 3!.4! B) 4! C) 5!.4! D) 5! E) 6!

**5.** Aralarında Ali ile Veli'nin bulunduğu bir grup öğrenci bir sırada oturacaklardır.

**Ali ile Veli yanyana gelmemek şartı ile 5.6! değişik şekilde oturabildiklerine göre, bu grup kaç kişiliktir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**6.** A = {0, 1, 2, 3}

**kümesinin elemanları ile dört basamaklı, rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?**

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

**7.** **4 kız, 4 erkek öğrencinin bulunduğu bir toplulukta Ayşe ve Hasan sıranın uçlarında; Fatma ve Can ise yan yana olacak şekilde bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 480 B) 440 C) 380 D) 320 E) 280

**8.** A = {x, y, z, t}

**kümesinin dörtlü permütasyonlarının sayısı kaçtır?**

A) 12 B) 18 C) 20 D) 24 E) 30

**1-D** **2-C** **3-E** **4-D** **5-D** **6-C** **7-A** **8-D**

**9.** "ÖNCE VATAN"

**kelimelerindeki harflerin yerleri değiştirilerek yazılabilecek 9 harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerden kaç tanesi "ATA" ile başlar?**

A) $\frac{6!}{2!}$ B) 7!.2! C) 7! D) 6!.3! E) $\frac{9!}{3!}$

**10.** 1122003

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yedi basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 600 B) 540 C) 450 D) 400 E) 300

**11.** Belli üç kişi yanyana olmak üzere, n kişilik bir topluluk bir yuvarlak masa etrafına 720 değişik biçimde oturabilmektedirler.

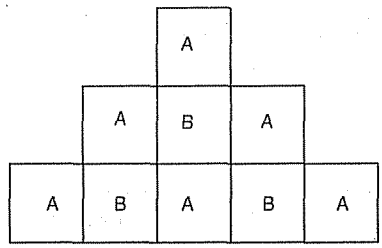
**Buna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**12.** **Anne, baba ve yaşları farklı 5 çocuktan oluşan 7 kişilik bir aile, yuvarlak bir masa etrafında; en küçük iki çocuk daima anne ve baba arasında olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 24 B) 48 C) 52 D) 64 E) 72

**13.**




Yukarıdaki eş karelerden oluşan şekilde 6 tane A ve 3 tane B harfi rastgele yazılıyor.

**Buna göre, kaç farklı görüntü oluşur?**

A) 72 B) 84 C) 96 D) 112 E) 120

**14.** 25467

**beş basamaklı sayısının rakamları kullanılarak rakamları tekrarsız olan üç basamaklı 540 tan büyük en fazla kaç tane doğal sayı yazılabilir?**

A) 48 B) 44 C) 42 D) 35 E) 33

**15.** A = {6, 7, 8, 9}

**kümesinin rakamları kullanılarak rakamları farklı en fazla kaç tane doğal sayı yazılabilir?**

A) 64 B) 58 C) 54 D) 50 E) 46

**16.** RECEPRIFAT

**kelimelerinin harfleri kullanılarak yazılabilecek on harfli kelimelerden kaç tanesinde her R harfinden sonra E harfi gelebilir?**

A) 9! B) 8! C) $\frac{8!}{2}$ D) 7! E) $\frac{7!}{2}$

**9-A** **10-C** **11-C** **12-A**

**13-B** **14-E** **15-A** **16-C**

# PERMÜTASYON

TEST - 6

**1.** A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

**kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların kaç tanesi hem 5 ile hem de 2 ile tam bölünebilir?**

A) 25 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

**2.** A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

**kümesinin elemanları kullanılarak, 450 den küçük üç basamaklı, rakamları tekrarsız kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 90 C) 105 D) 120 E) 140

**3.** **Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir aile, yuvarlak bir masa etrafında anne ve baba yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 24 B) 48 C) 120 D) 240 E) 480

**4.** "A L A T U R K A"

**kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşturulabilecek anlamlı ya da anlamsız sekiz harfli kelimelerin kaç tanesi sesli harfle başlayıp sessiz harfle biter?**

A) 120 B) 480 C) 720 D) 1080 E) 1920

**5.** **Ali, Veli ve 4 arkadaşı, düz bir sıraya; sıranın bir ucunda Ali, diğer ucunda Veli olmak şartıyla, yan yana kaç farklı biçimde oturabilirler?**

A) 120 B) 60 C) 48 D) 24 E) 12

**6.** 1 3 0 2 0 1

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek altı basamaklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?**

A) 72 B) 66 C) 64 D) 60 E) 56

**7.** 344222

**sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilecek tüm altı basamaklı sayıların kaç tanesinde birler basamağındaki rakam 2 dir?**

A) 48 B) 30 C) 24 D) 18 E) 12

**8.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

kümesi veriliyor.

**A kümesinin elemanları kullanılarak yazılan 3 basamaklı sayılardan kaç tanesinde 5 veya 6 eleman olarak bulunur?**

A) 84 B) 116 C) 164 D) 244 E) 296

**1-B** **2-C** **3-D** **4-E**

**5-C** **6-B** **7-B** **8-E**

**9.** 5 çocuklu 7 kişilik bir ailenin tüm bireyleri yuvarlak bir masa etrafında oturacaklardır.

**Anne ile baba yan yana gelmemek şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 120 B) 240 C) 360 D) 480 E) 600

**10.** "t ı k ı r t ı k ı r"

**kelimesinin harfleri kullanılarak yazılabilecek on harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerden kaç tanesinde her "k" harfinden sonra "ı" harfi gelir?**

A) 720 B) 1440 C) 1480

D) 2400 E) 2520

**11.** $$\frac{(n+1)! - 2.(n-1)!}{(n+1)! + n!} = \frac{6}{7}$$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

**12.** **5 çocuklu bir aile, babanın oturacağı bir yer sabit olmak üzere, belli iki çocuk arasında anneleri olmak şartıyla, kaç farklı biçimde yuvarlak bir masa etrafında oturabilirler?**

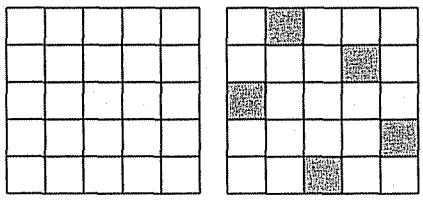
A) 24 B) 48 C) 62 D) 120 E) 248

**13.** **4 erkek, 4 kız öğrenci bir sıraya herhangi iki erkek öğrenci arasında bir kız öğrenci olmak şartıyla kaç değişik şekilde oturabilirler?**

A) 8! B) 2.4! C) 4!.4!

D) 4!.3! E) 4!.4!.2!

**14.**



Şekil - I Şekil - II

Şekil 1 ve şekil 2 deki kareler özdeştir. Aynı boyda beş taş Şekil I e yerleştirilecektir.

**Şekil II deki gibi her satır ve sütunda sadece bir taş olacak şekilde kaç farklı diziliş yapılabilir?**

A) 4! B) 5! C) 6! D) 5 E) 4

**15.** **4 farklı matematik, 3 farklı fizik, 2 farklı kimya kitabı bir rafa aynı branşın kitapları yanyana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilirler?**

A) 7!.2! B) 4!.3! C) 4!.3!.2!

D) 4!.3!.2! E) 4!.3!.3!.2!

**16.** **4 mektup 3 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?**

A) 81 B) 64 C) 48 D) 36 E) 18

**9-D** **10-E** **11-C** **12-B**

**13-E** **14-B** **15-E** **16-A**

# PERMÜTASYON

TEST - 7

**1.** $P(n, 2) + P(n + 2, 1) = 2.P(9, 1)$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**2.** 25 soruluk bir testte her sorunun 5 seçeneği vardır.

**Ardışık 3 sorudan herhangi ikisinin cevabı aynı şık olmadığına göre, cevap anahtarı kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) $5^{25}$ B) $4^{24}$ C) $5.3^{23}$

D) $5.4^{24}$ E) $20.3^{23}$

**3.** **5 özdeş kırmızı, 2 özdeş mavi, 3 özdeş sarı mandal iki ağaç arasına gerilen bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir?**

A) 5!.5! B) 780 C) 390

D) 1260 E) 5!.2!.3!

**4.** Ç A Ğ R I

**kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek Ğ ile başlamayan ve son harfi sesli harf olmayan harfleri farklı 5 harfli anlamlı veya anlamsız kaç değişik kelime yazılır?**

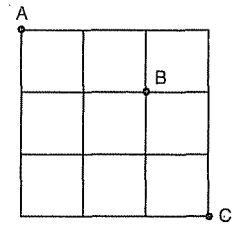
A) 120 B) 80 C) 72 D) 60 E) 40

**5.** Bir sınıfta üçer kişilik 10 sıra vardır.

**Ahmet ve Kadir'in arasında Hakan oturmak şartıyla, bu üç öğrenci kaç farklı şekilde aynı sırada yan yana oturabilirler?**

A) 20 B) 30 C) 60 D) 90 E) 120

**6.**




**Yukarıdaki şekilde A noktasından C noktasına, B noktasına uğramamak şartıyla en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?**

A) 20 B) 18 C) 13 D) 11 E) 9

**7.**

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | k |

**Yukarıdaki şekilde harflerin kendi aralarında sıralarnalarının kaç tanesinde d nin üstünde a bulunur?** ($\frac{a}{d}$ gibi)

A) 7! B) 2.7! C) 4.6! D) 6.7! E) 7.6!

**8.** **6 doktor ve 6 hemşire herhangi iki hemşire arasına bir doktor gelecek şekilde düz bir sıraya kaç farklı şekilde sıralanabilir?**

A) 5!.6! B) 5!.5! C) 6!.6!.2!

D) 5!.4! E) 5!.2

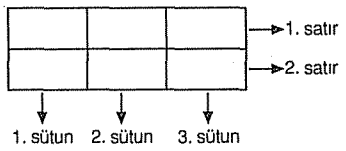
**1-C** **2-E** **3-D** **4-D** **5-C** **6-D** **7-D** **8-C**

**9.** $K = \{ A, B, C, D, E, F, İ \}$

**kümesinin harfleri bir defa kullanılarak başta, ortada ve sonda sesli harfin olduğu 7 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?**

A) 144 B) 136 C) 121 D) 112 E) 96

**10.**




**1, 2, 3, 5, 6, 7 sayıların tamamı yukarıdaki tabloya, her satır ve sütundaki sayıların toplamı çift sayı olmak şartıyla kaç farklı şekilde yazılabilir?**

A) 144 B) 256 C) 384 D) 576 E) 720

**11.** 5 farklı matematik, 4 farklı fizik, 3 farklı kimya kitabı uygun bir rafa dizilecektir.

**Sağdan ilk iki sırada matematik kitapları, soldan ilk iki sırada fizik kitapları olmak şartıyla kitaplar bu rafa kaç farklı şekilde sıralanabilir?**

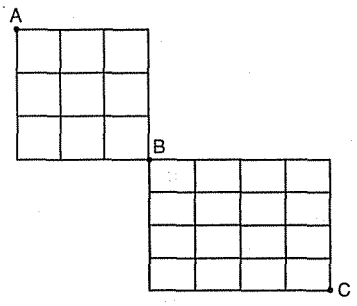
A) 120! B) 240.8! C) 360.8!

D) 480.8! E) 12.7!

**12. Dört çocuklu 6 kişilik bir ailenin tüm bireyleri 6 kişilik bir sıraya, anne ile baba sıranın uçlarında ve en küçük çocuk annenin yanından ayrılmamak şartı ile kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 42

**13.**




Şekildeki yatay ve dikey çizgiler; A, B, C şehirleri arasındaki sokakları göstermektedir. B şehrinden geçmek şartıyla, A şehriden C şehrine gidilecektir.

**Buna göre, A dan C ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?**

A) 900 B) 1100 C) 1200 D) 1400 E) 1500

**14.** $\dfrac{P(n+1, n)}{P(n, n-1)} = 7$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**15.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin üzerinde f permütasyonu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**olduğuna göre, (f o f) (2) kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**16.** Bir okula kayıt olan öğrencilere, ilk iki hanesi rakam ve üçüncü hanesi harften oluşan üç haneli numaralar verilmektedir.

**Sıfır ile başlayan numaralar bittiğine göre, o ana kadar okula kaç öğrenci kayıt olmuştur?**
(29 harfimiz vardır ve 00 kullanılmamıştır)

A) 271 B) 261 C) 251 D) 240 E) 220

**9-A** **10-A** **11-B** **12-A**

**13-D** **14-C** **15-A** **16-B**

# 5. ÜNİTE: KOMBİNASYON - BİNOM

**TANIM**

n, r ∈ N ve n ≥ r olmak üzere,

**n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r - li bir kombinasyonu (grubu)** denir ve **n elemanlı bir kümenin r elemanlı bütün alt kümelerinin sayısı, C(n, r)** veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.

**Uyarı:**

n elemanlı bir kümenin r elemanlı permütasyonlarının hepsi, bu kümenin r elemanlı bir kümesinin elemanlarıdır, dolayısıyla tek bir grubu (kümeyi) gösterir. O halde r! sayıdaki sıralamanın hepsi bir grubu gösterdiğinden,

n nin r - li permütasyonlarından $\frac{1}{r!}$ i, n nin r - li kombinasyonlarıdır.

Buna göre,

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!.(n-r)!}$$

dir.

**Örnek:**

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı, $\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3!} = 35$ tir.

**Örnek: 1985 - ÖYS**

10 sporcudan beş kişilik bir takım oluşturulacaktır.

**Bu 10 sporcudan takıma girecek iki kişi belli olduğuna göre, takım kaç değişik biçimde kurulabilir?**

A) 36 B) 48 C) 56 D) 112 E) 336

**Çözüm:**

Takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre, diğer 3 kişi kalan 8 kişi arasından seçilerek bu takım,

$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$ değişik biçimde kurulabilir.

**Örnek: 1983 - ÖYS**

10 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı, bu sınıftaki erkek öğrencilerin sayısına eşittir.

**Sınıfta kaç kız öğrenci vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**Çözüm:**

Sınıftaki kız öğrenci sayısına n denilirse, erkek öğrenci sayısı 10 – n olur. Buna göre,

$$\binom{n}{2} = 10 - n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 - n$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 20 = 4.5 \Rightarrow n = 4 \text{ tür.}$$

**Uyarı:**

1. n elemandan r eleman seçiliyorsa, (r - li bir grup (küme) oluşturuluyorsa) sıralamanın önemi yoktur. Çünkü kümenin elemanlarının yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. Bu durumda kombinasyonla hesap yapılır.
2. n elemandan r tanesi seçilip bu r eleman sıralanıyorsa permütasyonla hesap yapılır.

   Buna göre permütasyon hesabı; n elemandan r elemanın seçilmesi (birinci iş) kombinasyonla hesaplandıktan sonra, bu r elemanın sıralanmaları (ikinci iş) hesaplanarak (r!) birlikte gerçekleştirilen iki iş olarak düşünülüp ikisinin çarpımı şeklinde yapılabilir. O halde,

   $$P(n, r) = \binom{n}{r} . r!$$ dir.

**Örnek:**

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rakamlarını kullanarak, rakamları farklı, ikisi tek birisi çift rakamdan oluşan üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?**

**Çözüm:**

Dört tane tek rakamdan ikisi $\binom{4}{2} = 6$ değişik şekilde,

üç tane çift rakamdan biri $\binom{3}{1} = 3$ değişik şekilde seçilebilir. Seçilen bu üç rakam da 3! = 6 değişik şekilde sıralanır. Buna göre, istenilen şartlarda,

$\binom{4}{2}.\binom{3}{1}.3! = 108$ değişik sayı yazılabilir.

**Kombinasyonla İlgili Özellikler**

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ dir.

2. $\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow (a = b \text{ veya } n = a + b)$ dir.

3. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ dir.

4. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{r}$ olduğundan,

n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ dir.}$$

$\binom{n}{0}$: boş küme; $\binom{n}{1}$: 1 elemanlı alt kümeleri; $\binom{n}{2}$: 2 elemanlı alt kümeleri; $\binom{n}{n}$: kümenin kendisi

**Örnek: 1989 - ÖYS**

n elemanlı bir kümenin r - li bütün kombinasyonlarının sayısı C(n, r) ile gösterildiğine göre,

$$C(0, 0) + C(6, 3) = 3\,C(m, m-1)$$

**eşitliğinde m kaç olmalıdır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**Çözüm:**

$C(0, 0) + C(6, 3) = 3.C(m, m-1)$

$$\Rightarrow 1 + \frac{6.5.4}{3!} = 3.m$$

$\Rightarrow m = 7$ dir.

**Örnek: 1982 - ÖYS**

M, N, P, Q, R gibi beş değişik seçmeli dersten M ve N dersleri aynı saatte verilmektedir.

**Bu beş dersten ikisini seçmek isteyen bir öğrencinin bu durumda kaç seçeneği vardır?**

A) 4 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

**I. Çözüm:**

Beş dersten, $\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2} = 10$ farklı ikili grup oluşturulabilir. Ancak bu gruplardan birisi { M, N } dir.

M ve N aynı saatte verildiği için bunun dışında kalan $10 - 1 = 9$ farklı seçim yapabilir.

**II. Çözüm:**

M ve N den birisi ile P, Q, R den ikisi; $\binom{2}{1}.\binom{3}{2} = 6$ değişik şekilde, veya M ve N den herhangi biri seçilmeden P, Q, R den ikisi $\binom{3}{2} = 3$ değişik şekilde seçilebilir.

O halde toplam, $6 + 3 = 9$ değişik seçim yapılabilir.

**Örnek: 1981 - ÖSS**

Kesişen doğrulardan oluşan bir şekilde belirleyici üç özellik aşağıda verilmiştir.

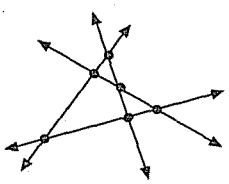
I. Şekil dört doğrudan oluşmaktadır.
II. Her doğru diğer üçünü kesmektedir.
III. Her kesim noktasından iki doğru geçmektedir.

**Buna göre şekilde kaç kesim noktası vardır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**I. Çözüm:**

İstenilenlere uygun bir şekil çizilerek 6 kesim noktası olduğu görülebilir.



Veya **II. yoldan;** 4 doğrudan seçilen herhangi ikisi bir kesim noktası oluşturduğuna göre,

$\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$ kesim noktası oluşacağı hesapla bulunabilir.

**Örnek: 1986 - ÖYS**

10 öğrenci arasından 4 kişilik bir ekip, bu ekip içinden de bir başkan seçilecektir.

**Bir başkan ve üç üyeden oluşan bu ekip kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 210 B) 504 C) 840 D) 1200 E) 5040

**I. Çözüm:**

Birinci iş olarak 10 kişiden 4 kişi, ikinci iş olarak da bu 4 kişiden 1 kişi seçileceğine göre, birbirinden farklı

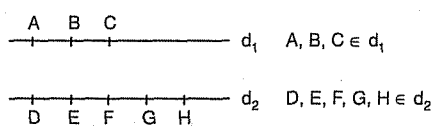
$\binom{10}{4}\cdot\binom{4}{1}=\frac{10.9.8.7}{4!}\cdot 4=840$ ekip oluşturulabilir.

**II. Çözüm**

Birinci iş olarak 10 kişiden 1 kişinin (grup başkanın) seçimi, ikinci iş olarak da kalan 9 kişiden 3 kişinin seçimi yapılırsa, birbirinden farklı;

$\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{3}=10\cdot\frac{9.8.7}{3!}=840$ ekip oluşturulabilir.

**Örnek: 1996 - ÖYS**




**Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ olduğuna göre, köşeleri bu 8 noktadan (A, B, C, D, E, F, G, H) herhangi üçü olan kaç üçgen çizilebilir?**

A) 45 B) 48 C) 52 D) 56 E) 72

**I. Çözüm:**

Çizilecek üçgenlerin bir köşesi $d_1$, tabanı (diğer iki köşesi) $d_2$ doğrusu üzerinde olabilir veya bir köşesi $d_2$, tabanı (diğer iki köşesi) $d_1$ doğrusu üzerinde olabilir.

O halde oluşacak üçgenlerin sayısı,

$\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{2}=3\cdot\frac{5.4}{2!}+5.3=45$ tir.

**II. Çözüm:**

8 noktadan herhangi 3 ü doğrusal olmasaydı $\binom{8}{3}=56$

değişik üçgen çizilebilirdi. Doğrusal olan herhangi üç noktadan dolayı üçgenlerin sayısı toplam,

$\binom{3}{3}+\binom{5}{3}=1+10=11$ tane daha az olacaktır. O halde, şekildeki noktalarla $56-11=45$ üçgen çizilebilir.

**BİNOM**

$n \in N$ ve x ve y den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n}y^n$$

eşitliğine **binom formülü (binom açılımı),**

$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}$ sayılarına da **binom katsayıları** denir.

1. $(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\ldots+\binom{5}{5}y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

2. $(x-2)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4.(-2)+\binom{5}{2}x^3(-2)^2+\ldots$

$\ldots+\binom{5}{5}(-2)^5$

$=x^5-5x^4.2+10.x^3.4-10.x^2.8+5.x.16-32$

$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$ dir.

**Binom katsayıları aşağıdaki üçgeni meydana getirir.**

$(x+y)^0$: $\binom{0}{0}$

$(x+y)^1$: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$(x+y)^2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$(x+y)^3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$(x+y)^4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

**Sonuç:**

**$(x+y)^n$ ifadesinin açılımında:**

1. $n+1$ terim vardır.
2. Her terimde x ve y nin üsleri toplamı n dir.
3. Katsayılar toplamı, x ve y (değişkenler) yerine 1 yazılarak bulunur.

$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ dir.

4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ olduğundan, baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları mutlak değerce eşittir.

5. Baştan $r+1$ inci terim: $\binom{n}{r} x^{n-r} y^r$ dir.

6. Katsayılar üçgeninden, $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ dir.

7. $(x+y)^{2n}$ açılımında ortadaki terim: $\binom{2n}{n} x^n y^n$ dir.

**Örnek:**

$(2x + 3y - z)^5$ ifadesinin açılımında katsayıların toplamı; $x = y = z = 1$ yazılırsa, $(2.1 + 3.1 - 1)^5 = 4^5 = 1024$ tür.

**Örnek:**

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$$

$$= \frac{7.6.5}{3!} = 35 \text{ tir.}$$

**Örnek: 1991 - ÖSS**

$x = 4, \quad y = 2$

**olduğuna göre, $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ ifadesinin değeri nedir?**

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

**Çözüm:**

$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

$= (4 - 2)^5 = 32$ dir.

**Örnek: 1990 - ÖYS**

**$\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^7$ nin açılımında $x^8$ li terimin katsayısı kaçtır?**

A) 84 B) 48 C) 28 D) – 48 E) – 84

**Çözüm:**

$$\binom{7}{r}\left(\frac{2}{x}\right)^{7-r}(-x^2)^r = kx^8 \Rightarrow k = \binom{7}{r}2^{7-r}(-1)^r$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{7-r}(x^2)^r = x^8 \Rightarrow x^{r-7+2r} = x^8 \Rightarrow r = 5 \text{ tir.}$$

Buna göre,

$$k = \binom{7}{5}.2^{7-5}.(-1)^5 = \frac{7.6}{2}.2^2.(-1)$$

$\binom{7}{2}$

$\Rightarrow k = -84$ tür.

**Örnek: 1998 - ÖYS**

**$(3x + 2y)^{23}$ ün açılımında baştan 11. terimin katsayısı kaçtır?**

( C (n, r) : n elemanlı bir kümenin r - li kombinasyonlarının sayısı.)

A) $2^{10} . 3^{13} . C(23, 10)$ B) $2^{11} . 3^{12} . C(23, 11)$

C) $2^{11} . 3^{12} . C(23, 12)$ D) $2^{12} . 3^{11} . C(23, 12)$

E) $2^{13} . 3^{11} . C(23, 11)$

**Çözüm:**

$r + 1 = 11$ olduğuna göre, $r = 10$ dur.

Buna göre, 11. terim,

$C(23, 10).(3x)^{23-10} . (2y)^{10} = k . x^{13} . y^{10}$

$\Rightarrow k = 2^{10}.3^{13}.C(23,10)$ olur.

**Örnek: 1988 - ÖYS**

$(x + 2y)^8 = x^8 + \ldots + 16\,a\,x^3y^5 + \ldots$

**eşitliğinde a hangi sayıyı göstermektedir?**

A) 248 B) 200 C) 148 D) 112 E) 96

**Çözüm:**

x in 3. kuvveti, y nin 5. kuvveti geldiğine göre,

$$\binom{8}{5} . x^3 (2y)^5 = 16\,a\,x^3y^5$$

$$\binom{8}{3} . 2^5 = 16a \Rightarrow \frac{8.7.6}{3.2.1} . 32 = 16a$$

$\Rightarrow a = 112$ dir.

**Örnek: 1996 - ÖYS**

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$$

**ifadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?**

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

**Çözüm:**

$$\binom{6}{r} \cdot x^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = k \cdot x^0$$

$$\Rightarrow x^{6-r} \cdot x^{-2r} = x^0 \text{ ve } k = \binom{6}{r}$$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ ve } k = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ tir.}$$

**Örnek: 1997 - ÖYS**

**$(x^2 - 2y^2)^n$ açılımında $x^4 y^4$ lü terimin katsayısı kaçtır?**

A) – 48 B) – 24 C) 12 D) 24 E) 48

**Çözüm:**

$(x + y)^n$ açılımında herhangi bir terimdeki değişkenlerin üsleri toplamı n olduğuna göre $(x^2 - 2y^2)^n$ açılımında;

$$k \cdot x^4 \cdot y^4 = \binom{n}{r} \cdot (x^2)^{\overbrace{2}^{n=2+2=4}} \cdot (-2y^2)^{\overbrace{2}^{}} \text{ olduğundan}$$

$n = 4$,

r de $y^2$ nin üssü olduğundan, $(y^2)^2$ ve $r = 2$ dir.

O halde, $k = \binom{4}{2} \cdot (-2)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 24$ tür.

**Uyarı:**

1. p, q, r birer doğal sayı ve $p + q + r = n$ olmak üzere,

$(ax + by + cz)^n$ açılımında, $x^p \cdot y^q \cdot z^r$ li terim:

$$(ax)^p \cdot (by)^q \cdot (cz)^r \cdot \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!} \text{ dir.}$$

2. $(x + y + z)^n$ ifadesinin açılımındaki **terimlerin sayısı:**

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ dir. } (n \in N)$$

**Örnek:**

**$(x - y + 2)^5$ ifadesinin açılımında,**

**a) Terim sayısını,**

**b) $x^2 y^2$ nin katsayısını bulalım.**

**Çözüm:**

a) $(x - y + 2)^5 = [(x - y) + 2]^5$ şeklinde düşünelim.

$$\binom{5}{0}(x-y)^5 \cdot 2^0 + \binom{5}{1}(x-y)^4 \cdot 2^1 + \ldots + \binom{5}{5}2^5$$

↓ ↓ ↓

6 terim + 5 terim + ... + 1 terim

Buna göre, açılımdaki terimlerin sayısı,

$$6 + 5 + 4 + \ldots + 1 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ dir.}$$

**Veya,** $n = 5$ olduğundan, **terim sayısı formülünden,**

$$\frac{(5+1) \cdot (5+2)}{2} = 21 \text{ dir.}$$

b) $(x - y + 2)^5 = \ldots + k \cdot x^2 y^2 + \ldots$ ise,

$$x^2 \cdot (-y)^2 \cdot 2^1 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = k \cdot x^2 y^2$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 \cdot 30 = k x^2 y^2 \Rightarrow k = 60 \text{ tır.}$$

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** **7 kişilik bir gruptan en az 2, en çok 4 kişilik bir grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 61 B) 70 C) 81 D) 90 E) 91

**2.** Aralarında Rıfat ve Recep'inde bulunduğu 6 kişi; 2 ve 4 kişilik iki odaya yerleştirilecektir.

**Rıfat ve Recep birlikte olmak şartı ile kaç farklı yerleştirme yapılabilir?**

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

**3.** **7 kişilik öğrenci grubundan 5 kişilik öğrenci grubu bir yuvarlak yemek masasının etrafına kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 496 B) 500 C) 504 D) 508 E) 512

**4.** 4 kız, 5 erkek arasından 3 kişilik yarışma ekibi seçilecektir.

**Bu ekipte en fazla 2 erkek olmak şartı ile kaç farklı seçim yapılabilir?**

A) 76 B) 74 C) 72 D) 70 E) 68

**5.** Ramazan ve Ahmet'in de aralarında bulunduğu 8 kişilik bir gruptan 3 kişilik bir ekip seçilecektir.

**Ramazan ve Ahmet her durumda birlikte olmak şartı ile kaç farklı seçim yapılabilir?**

A) 28 B) 27 C) 26 D) 23 E) 20

**6.** Bir öğrenci 10 kredilik ders alacaktır. A, B, C dersleri 5 er kredi ve D, E, F, G, H, K, L dersleri ise 2 şer kredilik derslerdir.

**Buna göre, bu öğrenci 10 kredilik dersi kaç farklı şekilde seçebilir?**

A) 18 B) 21 C) 22 D) 24 E) 27

**7.** Bir öğrenci 10 soruluk bir sınavda soruların 6 tanesine "C", 2 tanesine "D", diğerlerine ise "A" veya "E" yanıtını verecektir.

**Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?**

A) 2520 B) 2580 C) 4980 D) 5000 E) 5040

**8.** 8 oyuncusu bulunan bir basketbol takımının 3 oyuncusu yabancıdır.

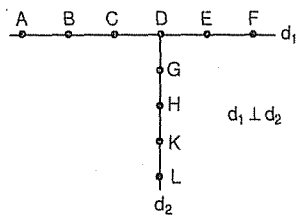
**Her maçta en fazla 2 yabancı oynamak şartı ile 5 kişilik basketbol takımı kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 15 B) 16 C) 31 D) 40 E) 46

**1-E** **2-E** **3-C** **4-B**

**5-C** **6-D** **7-E** **8-E**

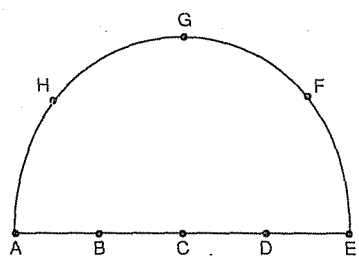
**9.**




**Şekildeki on adet nokta kullanılarak köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilir?**

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 115

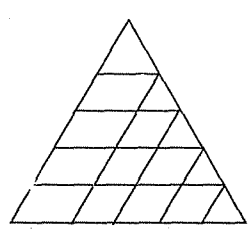
**10.**




**Şekildeki sekiz adet nokta ile köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilir?**

A) 50 B) 48 C) 46 D) 44 E) 40

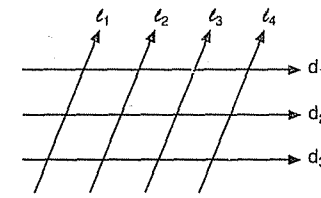
**11.**



**Şekilde kaç tane üçgen vardır?**

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

**12.**

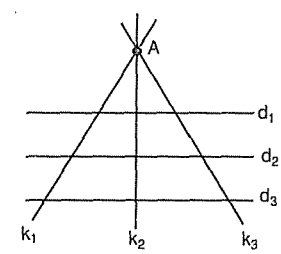



**Şekildeki doğrular kullanılarak oluşturulabilecek paralel kenarların kaç tanesinin bir kenarı $d_2$ doğrusu üzerindedir?**

A) 18 B) 16 C) 13 D) 12 E) 11

**13.** $k_1 \cap k_2 \cap k_3 = \{A\}$

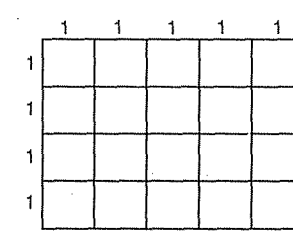
$d_1 // d_2 // d_3$




**Yukarıdaki şekilde <u>en çok</u> kaç tane üçgen vardır?**

A) 13 B) 9 C) 5 D) 3 E) 2

**14.**




**Şekilde kaç tane kare vardır?**

A) 30 B) 36 C) 38 D) 40 E) 44

**9-B** **10-C** **11-B**

**12-D** **13-B** **14-D**

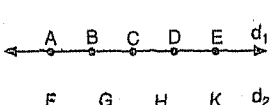
**15.** 5 kız ve 7 erkek öğrenci arasından biri kız, ikisi erkek olmak şartıyla 3 kişilik bir yarışma ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) 120 B) 105 C) 95 D) 80 E) 75

**16.** 5 doktor ve 6 hemşire arasından en az biri doktor olmak şartıyla 5 kişilik bir sağlık tarama ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) 492 B) 486 C) 472 D) 462 E) 456

**17.**




$d_1 // d_2$ olmak üzere, A, B, C, D, E noktaları $d_1$; F, G, H, K noktaları $d_2$ doğrusu üzerinde olduğuna göre, şekildeki dokuz nokta ile köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan en çok kaç farklı üçgen çizilebilir?

A) 72 B) 70 C) 60 D) 56 E) 48

**18.** $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$

ifadesinin açılımında ortadaki terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $15.x^4$ B) $15.x^2$ C) $-20.x^3$ D) $-20.x^2$ E) $-15.x^2$

**19.** $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) 672 B) – 672 C) 576 D) – 567 E) 448

**20.** $(x - y + z^2)^5$

ifadesinin açılımında terimlerden biri $a \cdot x^2 \cdot y \cdot z^4$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) – 30 B) 30 C) – 40 D) 40 E) – 60

**15-B** **16-E** **17-B** **18-C** **19-B** **20-A**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** 7 kişiden en az 2 kişilik grup için;

$\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$

ve en çok 4 kişilik grup için,

$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}$

bulunur. Bu iki durumun kesişimi ise,

$\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=\frac{7.6}{2.1}+\frac{7.6.5}{3.2.1}+\frac{7.6.5.4}{4.3.2.1}$

$= 21 + 35 + 35 = 91$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** 2 kişilik odada veya 4 kişilik odada bu iki kişi birlikte bulunabilir.

2 kişi 4 kişi  4 kişi  2 kişi

$\overbrace{\binom{2}{2}}\cdot\overbrace{\binom{4}{4}} + \overbrace{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}}\cdot\overbrace{\binom{2}{2}} = 1+6=7$

Rıfat Recep birlikte seçilir  Rıfat Recep birlikte seçilir

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** 7 kişiden 5 kişi seçmek,

$\binom{7}{5}=\frac{7.6.5.4.3}{5.4.3.2.1}$ = 21 farklı şekilde yapılabilir.

5 kişi yuvarlak yemek masasına 4! farklı şekilde oturabilirler.

Aynı anda yapılan bu iki iş için,

$\binom{7}{5}.4! = 21.4! = 21.24 = 504$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** 3 kişi (3K), 3 kişi (2K,1E), 3 kişi (1K,2E)

$\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}$

$= 4 + 6.5 + 4.10 = 4 + 30 + 40 = 74$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** Ramazan ve Ahmet ya birlikte seçilip grup içinde yer alırlar, ya da ikisi birlikte seçilmeyip diğer kişilerden grup elemanları seçilir.

3 kişilik ekip $\Rightarrow \binom{2}{2}\cdot\binom{6}{1} \Rightarrow$ R ve A grupta

3 kişilik ekip $\Rightarrow \binom{6}{3} \Rightarrow$ R ve A grupta değil

O halde,

$\binom{2}{2}\cdot\binom{6}{1}+\binom{6}{3} = 1.6 + 20 = 26$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** 5 er kredi (A, B, C), 2 şer kredi (D, E, F, G, H, K, L)

$\binom{3}{2} + \binom{7}{5} = 3+21=24$

10 kredi  10 kredi

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** Altı sorunun cevabı "C" ise,

$\binom{10}{6} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$ farklı seçim yapılır.

İki sorunun cevabı "D" ise,

$\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2.1} = 6$ farklı seçim yapılır.

İki sorunun cevabı "A" veya "E" ise

$\binom{2}{2} .2^2 = 1.2^2 = 4$ farklı seçim yapılır.

Aynı anda yapılan bu seçim,

$\binom{10}{6} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} . 2.2 = 210.6.4$

$= 5040$

şekilde yapılabilir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** 8 oyuncu = 5 yerli oyuncu + 3 yabancı oyuncu

En fazla 2 yabancı bulunan 5 kişilik grup için,

$$\underbrace{\binom{3}{0}}_{\text{yabancı yok}} \cdot \underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{5 yerli}} + \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{1 yabancı}} \cdot \underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{4 yerli}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{2 yabancı}} \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3 yerli}}$$

$= 1.1 + 3.5 + 3.10 = 1 + 15 + 30 = 46$

farklı seçim yapılabilir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** Üçgen çizimi için doğrusal olmayan 3 nokta seçimi yapılır.

$\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$ tane,

farklı 3 nokta seçimi yapılır. Ancak ($d_1$) doğrusu üzerinde

$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$ tane,

$d_2$ doğrusu üzerinde

$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$ tane,

doğrusal olan 3 nokta seçimleri üçgen oluşturmaz, bunlar atılmalıdır.

O halde,

$120 - 20 - 10 = 90$ tanedir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** 8 noktadan 3 nokta seçelim,

$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6.}{3.2.1} = 56$ dır.

A, B, C, D, E doğrusal olduğu için

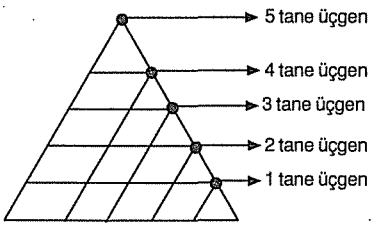
$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$ tane

üçgen oluşturmayan 3 nokta seçimleri vardır, bunlar atılmalıdır. O halde,

$56 - 10 = 46$ tanedir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.**




Şekilde gösterilen noktalar tepe noktası olmak üzere, üçgen sayıları verilmiştir.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5.6}{2} = 15$ tane üçgen vardır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.** Paralelkenar oluşturmak için; ($d_1$, $d_2$, $d_3$) doğrulardan birbirine paralel 2 doğru ve bu iki doğruyu kesen ($\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $\ell_4$) doğrularından birbirine paralel 2 doğru seçilmelidir.

$d_2$ doğrusu seçildiğine göre, diğer $d_1$ ve $d_3$ doğrularından her hangi biri $\binom{2}{1} = 2$ farklı şekilde ve $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $\ell_4$ doğrularından her hangi ikisi $\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2.1} = 6$ farklı şekilde seçilir.

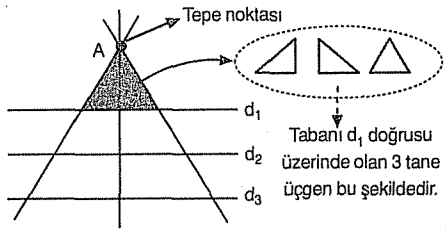
O halde,

$\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 2.6 = 12$ tane

farklı paralel kenar vardır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.**




A noktası tepe noktası olarak alınır ise tabanı $d_1$ doğrusu üzerinde olan 3 tane üçgen, $d_2$ doğrusu üzerinde olan 3 tane üçgen, $d_3$ doğrusu üzerinde olan 3 tane üçgen vardır.

O halde, $3 + 3 + 3 = 9$ tane üçgen vardır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** Yatay 5 birim, dikey 4 birim olduğuna göre,

1. Yol:

kare sayısı $= \sum_{k=1}^{4} k(k+1)$

$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 = 40$ tır.

(4 ile 5 in farkı 1 olduğu için $k.(k + 1)$ olarak alınır.)

2. Yol:

Bir kenarı 1 br olan $4.5 = 20$ tane

bir kenarı 2 br olan $3.4 = 12$ tane

bir kenarı 3 br olan $2.3 = 6$ tane

bir kenarı 4 br olan $1.2 = 2$ tane

kare vardır.

$20 + 12 + 6 + 2 = 40$ tır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**15.** 5 kız öğrenci arasından biri $\binom{5}{1}$, 7 erkek öğrenci arasından ikisi $\binom{7}{2}$ değişik şekilde seçilebileceğinden biri kız, ikisi erkek öğrenci olmak üzere, üç kişilik yarışma ekibi,

$$\binom{5}{1}.\binom{7}{2} = 5.\frac{7.6}{2} = 105$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** 5 doktor ve 6 hemşire olmak üzere, toplam 11 kişi arasından 5 kişilik bir ekip, $\binom{11}{5}$ farklı şekilde (bütün durumların sayısı) ve 6 hemşire arasından 5 kişilik bir ekip $\binom{6}{5}$ farklı şekilde (istenmeyen durumların sayısı) oluşturulabileceğinden geriye kalan $\binom{11}{5} - \binom{6}{5}$ farklı şekilde en az biri doktor olmak üzere 5 kişilik bir sağlık tarama ekibi (istenen durumların sayısı) oluşturulabilir.

O halde,

$$\binom{11}{5} - \binom{6}{5} = \frac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1} - 6$$

$= 456$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17. 1. Yol:**

Herhangi üçü doğrusal olmayan 9 nokta ile $\binom{9}{3}$ kadar farklı üçgen oluşturulabilir.

$d_1$ doğrusu üzerindeki doğrusal 5 nokta üçgen oluşturmayacağından, oluşturulabilecek üçgenlerin sayısı $\binom{5}{3}$ kadar daha az ve benzer şekilde $d_2$ doğrusu üzerindeki doğrusal 4 nokta üçgen oluşturmayacağından oluşturulabilecek üçgenlerin sayısı $\binom{4}{3}$ kadar daha azdır. O halde, şekildeki 9 nokta ile oluşturulabilecek üçgenlerin sayısı en çok,

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} - \binom{4}{3} = \frac{9.8.7}{3.2.1} - \binom{5}{2} - \binom{4}{1}$$

$$= 84 - \frac{5.4}{2} - 4$$

$$= 70 \text{ tir.}$$

**2. Yol:**

$d_1$ doğrusu üzerindeki 5 noktadan 2 nokta ve $d_2$ doğrusu üzerindeki 4 noktadan 1 nokta seçilerek veya $d_1$ doğrusu üzerindeki 5 noktadan 1 nokta ve $d_2$ doğrusu üzerindeki 4 noktadan 2 nokta seçilerek üçgen oluşturulabilir.
O halde, şekildeki 9 nokta ile oluşturulabilecek üçgenlerin sayısı en çok,

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 10.4 + 5.6$$

$$= 70 \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.** $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ ifadesinin açılımında ortadaki terim,

$$\binom{6}{3} . (x^2)^3 . \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -20x^3 \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**19.** $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$ ifadesinin açılımında sabit terim,

$$\binom{9}{r} x^{9-r} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r \text{ olsun.}$$

Buna göre, $k \in R$ (sabit) olmak üzere,

$$\binom{9}{r} . x^{9-r} . (-2x^{-2})^r = k . x^0$$

$$\Rightarrow \binom{9}{r} . (-2)^r . x^{9-3r} = k . x^0$$

$$\Rightarrow 9 - 3r = 0 \text{ ve } \binom{9}{r} . (-2)^r = k$$

$$\Rightarrow r = 3 \text{ ve } \binom{9}{3} . (-2)^3 = k$$

$$\Rightarrow k = -8 . \frac{9.8.7}{3.2.1}$$

$$\Rightarrow k = -672 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**20. 1. Yol:**

$[(x - y) + z^2]^5$ ifadesinin açılımında,

$ax^2y\,z^4$ ifadesi $\binom{5}{2} . (x - y)^3 . (z^2)^2$ ifadesinin terimlerinden birine eşittir.

$$\Rightarrow ax^2y\,z^4 = 10z^4 \binom{3}{1} (x)^2 (-y)^1$$

$$\Rightarrow a\,x^2\,y\,z^4 = -30\,x^2\,y\,z^4$$

$$\Rightarrow a = -30 \text{ dur.}$$

**2. Yol:**

$(x - y + z^2)^5$ ifadesinin açılımında,

$$ax^2\,y\,z^4 = x^2 (-y)^1 (z^2)^2 . \frac{5!}{2!.1!.2!}$$

$$\Rightarrow ax^2\,y\,z^4 = -x^2\,y\,z^4 . \frac{120}{4}$$

$$\Rightarrow a = -30 \text{ dur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** $\binom{n+1}{2} = 1 + P(n+2, 1)$

**olduğuna göre, $\binom{n+4}{n-1}$ kaçtır?**

A) 3 B) 6 C) 12 D) 21 E) 42

**2.** Herbiri farklı renkte 7 ampül, 3 dairesel avizeye takılacaktır.

**Birinci avizeye 3, ikinci avizeye 2 ve üçüncü avizeye 2 adet ampül takılacağına göre, ampüller bu avizelere kaç farklı şekilde takılabilirler?**

A) 304 B) 350 C) 420 D) 630 E) 840

**3.** A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}

kümesinin elemanları ile abc biçiminde üç basamaklı sayılar yazılacaktır.

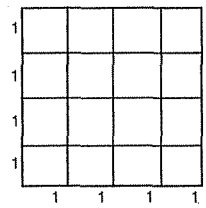
**a < b < c olmak koşulu ile kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 19 B) 20 C) 24 D) 26 E) 28

**4.** **Günde 5 saat ders gören bir sınıfa, günde en fazla 2 saat derse girebilen bir öğretmen bir günde kaç değişik şekilde bu sınıfta ders yapabilir?**
*(Derslerin arka arkaya olması şart değildir.)*

A) 16 B) 15 C) 12 D) 10 E) 9

**5.** **Bir kenarı 1 cm olan on altı tane özdeş kareden meydana gelen yandaki şekilde, alanı 1 cm² den büyük, en fazla kaç dikdörtgen vardır?**



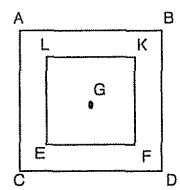

A) 72 B) 76 C) 80 D) 84 E) 90

**6.** $\binom{5}{1}-\binom{6}{2}+\binom{5}{2}-\binom{6}{3}+\binom{5}{3}-\binom{6}{4}+\binom{5}{4}-\binom{6}{5}+\binom{5}{5}-\binom{6}{6}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) – 32 B) – 26 C) 26 D) 32 E) 88

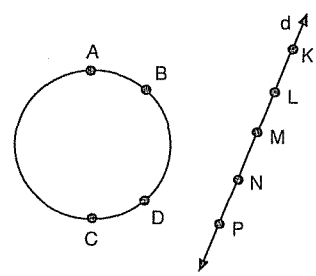
**7.** ABCD ve EFKL, kenarları birbirine paralel, aynı G ağırlık merkezli iki karedir.




**Bu düzlemde A, B, C, D, E, F, K, L, G noktalarını köşe kabul eden kaç tane üçgen oluşturulabilir?**

A) 84 B) 76 C) 74 D) 70 E) 64

**8.** Yandaki şekilde A,B,C,D noktaları çemberin üzerinde ve K,L,M,N,P noktaları d doğrusu üzerindedir.

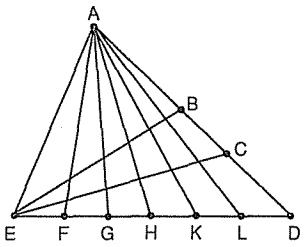



**Bu 9 nokta ile yalnız bir köşesi çemberin üzerinde olan en fazla kaç farklı üçgen çizilebilir?**

A) 25 B) 30 C) 32 D) 40 E) 60

**1-D** **2-C** **3-B** **4-B** **5-D** **6-B** **7-E** **8-D**

**9.** **Şekildeki 10 nokta (A,B,C,D,E,F,G,H,K,L) kullanılarak kaç farklı üçgen çizilebilir?**




A) 81 B) 69 C) 56 D) 42 E) 21

**10.** $(2x + 3)^5$

ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 4. terimin katsayısı 27.a oluyor.

**Buna göre, a kaçtır?**

A) 40 B) 25 C) 24 D) 20 E) 15

**11.** $(x + 1)^{12}$

**ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 4. terimin, baştan 6. terime oranı $\frac{1}{10}$ olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

**12.** $(x - 2y - 3z)^{10}$

**açılımında katsayıların toplamı kaçtır?**

A) $-2^{20}$ B) $-2^{10}$ C) $2^{10}$ D) $6^{10}$ E) $2^{20}$

**13.** $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

**açılımında baştan 8. terimin katsayısı kaçtır?**

A) $-120$ B) $-60$ C) $-40$ D) 20 E) 80

**14.** $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^6$

**açılımında $x^2$ nin katsayısı kaçtır?**

A) 6 B) 10 C) 15 D) 20 E) 30

**15.** $\left(x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$

**açılımında $x^{11}$ in katsayısı kaçtır?**

A) $-40$ B) $-35$ C) 15 D) 35 E) 40

**9-A** **10-A** **11-C** **12-E** **13-A** **14-C** **15-B**

**16.** $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{a}\right)^8$

**açılımında sabit terim kaçtır?**

A) 14 B) 28 C) 36 D) 48 E) 56

**17.** $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^7 = (\frac{x}{y})^7 - ..... + k\frac{x}{y} + .... - (\frac{y}{x})^7$

**açılımında k nın değeri kaçtır?**

A) – 35 B) – 10 C) 10 D) 15 E) 35

**18.** $(x + 1)^{2n}$

**açılımında <u>en büyük katsayılı terimin katsayısı</u> aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\binom{2n+1}{n}$ B) $\binom{2n+1}{n+1}$ C) $\binom{2n}{n}$

D) $\binom{2n}{n+1}$ E) $\binom{2n}{n-2}$

**19.** $(x - y - 2z)^9$

**açılımında $x^2 y^3 z^4$ ün katsayısı kaçtır?**

A) – 20160 B) – 10080 C) – 5040

D) 10080 E) 20160

**20.** Bir okulda 8 seçmeli dersten 4 ü aynı saatte verilmektedir.

**Bu 8 dersten 3 ünü seçmek isteyen bir öğrenci kaç farklı seçim yapabilir?**

A) 28 B) 22 C) 18 D) 16 E) 11

**21.** **Bir sınıfın öğrencilerinden oluşturulabilecek üç kişilik grupların sayısı 120 olduğuna göre, sınıfta kaç öğrenci vardır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**22.** Bir sınıfta 8 erkek, 6 kız öğrenci vardır. Bu 14 öğrenciden 3 kişilik bir grup oluşturulacaktır.

**Bu grupta en az bir kız öğrenci olacak şekilde kaç farklı grup seçilebilir?**

A) 275 B) 300 C) 308 D) 360 E) 370

**23.** x ve y birer rakam ve

$$\binom{21}{x-y} = \binom{21}{13}$$

**olduğuna göre, <u>x.y çarpımının alabileceği en büyük değer için</u> x + y toplamı kaçtır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**16-B** **17-A** **18-C** **19-A** **20-A** **21-C** **22-C** **23-C**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** $\binom{n+1}{2} = 1 + P(n+2, 1)$

$\Rightarrow \frac{(n+1).n}{2!} = 1 + n + 2$

$\Rightarrow n^2 + n = 2.(n+3) \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$

$\Rightarrow (n-3).(n+2) = 0$ ve

$(n+1)$ ve $(n+2)$ doğal sayı olduğundan $n = 3$ tür.

Buna göre, $n = 3$ için

$\binom{n+4}{n-1} = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{2!} = 21$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** Birinci avizeye takılacak üç ampül $\binom{7}{3} = 35$ değişik şekilde seçilebilir ve bu üç ampül bu avizeye $(3-1)! = 2!$ değişik şekilde takılabilir. Ayrıca iki ampül bir avizeye bir tek şekilde takılabileceğinden; bu üç avizeye takılacak yedi ampül:

$\binom{7}{3}.2!.\binom{4}{2}.\binom{2}{2} = 420$ değişik şekilde takılabilir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**3.** A kümesinden seçilen herhangi üç sayı ile istenen koşullarda yalnız bir tane sayı yazılabilmektedir. Buna göre, A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı istenen cevap olacaktır. O halde istenen koşulu sağlayan

$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$

farklı sayı yazılabilir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**4.** Öğretmen bu sınıfta günde 1 saat veya günde 2 saat derse girebilir. O halde, bu öğretmen bu sınıfta

$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$

değişik şekilde ders yapabilir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** Şekildeki bütün dikdörtgenlerin sayısı:

$\binom{5}{2} . \binom{5}{2} = 10 . 10 = 100$

tane ve alanı 1 $cm^2$ olan dikdörtgenlerin sayısı 16 tane olduğundan, alanı 1 $cm^2$ den büyük olan dikdörtgenlerinin sayısı $100 - 16 = 84$ tanedir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** $\binom{5}{1} - \binom{6}{2} + \binom{5}{2} - \binom{6}{3} + \binom{5}{3} - \binom{6}{4} + \binom{5}{4} - \binom{6}{5} + \binom{5}{5} - \binom{6}{6}$

$= \left[\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{5}{5}\right] - \left[\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{6}{6}\right]$

$= 2^5 - 1 - \left[2^6 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1}\right]$

$= 31 - [64 - 1 - 6] = -26$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** Dokuz nokta ile $\binom{9}{3} = \frac{9.8.7}{3!} = 84$

farklı üçgen oluşturulabilir. Ancak, A, L, G, F, D noktalarının aynı doğrultuda ve C, E, G, K, B noktalarının da doğrultularının aynı olmasından dolayı

$$2.\binom{5}{3} = 2.10 = 20$$

tane daha az üçgen oluşur.

Buna göre, oluşturulabilecek bütün üçgenlerin sayısı $84 - 20 = 64$ tür.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** İki köşesi d doğrusu, bir köşesi de çember üzerinde olan en fazla

$\binom{5}{2}.\binom{4}{1} = 10.4 = 40$ üçgen çizilebilir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $\binom{10}{3} - \binom{4}{3} - \binom{7}{3} = \frac{10.9.8}{3!} - 4 - 35 = 81$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $r + 1 = 4$ olduğundan $(r = 3)$ baştan 4. terim

$$\binom{5}{3}.(2x)^2.3^3 = 10.2^2.3^3.x^2$$

baştan dördüncü terimin katsayısı 27.a ise,

$$27.a = 10.4.27$$

$$a = 40 \text{ tır.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $$\frac{\binom{12}{3}.x^9.1^3}{\binom{12}{5}.x^7.1^5} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 10.\frac{12.11.10}{3!}.x^2 = \frac{12.11.10.9.8}{5!}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{9.8.3!}{10.5.4.3!} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ yazılırsa katsayılar toplamı;

$(1 - 2.1 - 3.1)^{10} = (-4)^{10} = 2^{20}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $r + 1 = 8$ olduğundan $r = 7$dir.

$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ açılımında baştan 8. terim:

$$\binom{10}{7} . (x^2)^3 . \left(\frac{-1}{x^2}\right)^7$$

ve bu terimin katsayısı: $\binom{10}{3} . (-1)^7 = -120$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^6$ açılımında;

$$\binom{6}{r} . (x^2)^{6-r} . (x^{-3})^r = k . x^2$$

$\Rightarrow x^{12 - 2r - 3r} = x^2$ ve $k = \binom{6}{r}$

$\Rightarrow 12 - 5r = 2 \Rightarrow r = 2$

$k = \binom{6}{2} = \frac{6 . 5}{2!} = 15$ tir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** $\binom{7}{3} . (x^3)^4 . \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 35 . (-1)^3 . x^{11} = -35x^{11}$

$x^{11}$ in katsayısı $-35$ tir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{a}\right)^8$ açılımında sabit terim:

$$\binom{8}{2} . \left(\sqrt[3]{a}\right)^6 . \left(-\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{8 . 7}{2!} . (-1)^2 = 28 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**17.** $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^7$ açılımında,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 . \left(-\frac{y}{x}\right)^3 . \binom{7}{3} = k . \left(\frac{x}{y}\right)$$

$\Rightarrow (-1)^3 . \frac{7 . 6 . 5}{3!} = k \Rightarrow k = -35$ tir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**18.** $(x + 1)^{2n}$ açılımında en büyük katsayılı terim ortadaki terim olduğundan bu terimin katsayısı $\binom{2n}{n}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**19.** $(x - y - 2z)^9$ açılımında,

$$k . x^2 y^3 z^4 = \frac{9!}{2! . 3! . 4!} . x^2 . (-y)^3 . (-2z)^4$$

$$\Rightarrow k = \frac{9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4!}{2 . 6 . 4!} . (-1)^3 . (-2)^4$$

$\Rightarrow k = -20160$ tır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**20.** Bu 8 dersi; A, B, C, D, E, F, G, H dersleri olsun.

| 1. saat | 2. saat | 3. saat | 4. saat | 5. saat |
|---|---|---|---|---|
| A | E | F | G | H |
| B | | | | |
| C | | | | |
| D | | | | |

4 ders 1. saatte diğer derslerde 2., 3., 4., 5. derslerde veriliyor olsun.

$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{1. saatte verilen 4 dersten biri seçilir.}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Diğer 4 dersten ikisi seçilir.}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{Diğer 4 dersten üçü seçilir.}} = 4.6 + 4 = 28$

farklı şekilde seçim yapılır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** n, öğrenci sayısı olsun;
3 erli grupların sayısı,

$$C(n, 3) = \binom{n}{3} = 120 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3.2.1} = 120$$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6.120$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6.12.10$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 2.3.4.3.10$

$\underbrace{n}_{10} \cdot \underbrace{(n-1)}_{9} \cdot \underbrace{(n-2)}_{8} = 8.9.10$

$n = 10$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**22.** 8 erkek, 6 kız

3 kişi = KEE, KKE, KKK şeklinde seçim yapılır.

O halde, bu şekilde yapılacak seçimlerin toplam sayısı:

$$\binom{8}{2}\binom{6}{1} + \binom{6}{2}\binom{8}{1} + \binom{6}{3}$$

$$= \frac{8.7}{2.1} \cdot 6 + \frac{6.5}{2.1} \cdot 8 + \frac{6.5.4}{3.2.1}$$

$= 28 \cdot 6 + 15 \cdot 8 + 20$
$= 308$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**23.** $\binom{21}{x-y} = \binom{21}{13}$ ise

$x - y = 13$ veya $(x - y) + 13 = 21$ dir.
x ve y bir rakam olduğundan $x - y \neq 13$ tür.
O halde,
$(x - y) + 13 = 21 \Rightarrow x - y = 8$

olduğundan $x = 8$, $y = 0 \Rightarrow x.y = 0$
$x = 9$, $y = 1 \Rightarrow x.y = 9$

ve x.y nin en büyük değeri (9) için,
$x + y = 9 + 1 = 10$ dur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 3

1. $\binom{6}{2} - \binom{5}{2} + 1 = \binom{n}{2}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. $\binom{n}{3} = \binom{n}{4}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 128$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4. $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{7}{3}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5. $\binom{11}{2x} = \binom{11}{x+2}$

olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

6. 5 kişi arasından 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

7. 6 öğrenci arasından 4 kişilik bir grup ve grup içerisinden bir başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 60 B) 56 C) 48 D) 44 E) 40

8. 4 ördek, 5 tavuk arasından 2 si ördek, 3 ü tavuk olmak şartıyla 5 hayvan kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 56 B) 60 C) 64 D) 72 E) 90

9. 5 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı, en az 4 elemanlı alt kümelerinin sayısından kaç fazladır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

10. n kişinin bulunduğu bir topluluktan oluşturulabilecek 2 şerli grupların sayısı 4 erli grupların sayısına eşit olduğuna göre, n kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

1-B 2-E 3-B 4-A 5-C

6-E 7-A 8-B 9-C 10-C

**11.** $A = \{1, 2, 3, 4, \{4\}, \{3\}\}$

**kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde eleman olarak " 3 " bulunur?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

**12.** **3 erkek ve 4 bayan arasından en az 2 si bayan olan 4 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 9 B) 16 C) 27 D) 31 E) 35

**13.** **Aralarında Faruk'un da bulunduğu 6 çocuk arasından Faruk'un da bulunduğu 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

**14.** 7 arkadaş ikişer ikişer tokalaşıyorlar.

**Buna göre, toplam kaç tokalaşma olur?**

A) 9 B) 11 C) 12 D) 21 E) 22

**15.** **8 soruluk bir sınavda ilk 3 soruyu cevaplamak zorunlu olduğuna göre, bu sorulardan 5 i kaç farklı şekilde seçilip cevaplanabilir?**

A) 18 B) 14 C) 10 D) 8 E) 6

**16.** Bir pansiyonda biri 4, diğeri 3 kişilik 2 oda boştur.

**Pansiyona gelen 7 kişi, belli ikisi aynı odada olmamak şartıyla bu iki odaya kaç farklı şekilde yerleştirilebilirler?**

A) 20 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

**17.** 8 sporcudan 4 kişilik bir takım oluşturulacaktır.

**Bu 8 sporcudan takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre, takım kaç değişik biçimde kurulabilir?**

A) 16 B) 15 C) 14 D) 10 E) 8

**18.** 7 kişilik bir gruptan 4 kişilik bir grup Balıkesir'e, 3 kişilik bir grup da Edirne'ye gidecektir.

**Bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 35 B) 30 C) 24 D) 15 E) 12

**11-E** **12-D** **13-D** **14-D**

**15-C** **16-A** **17-B** **18-A**

**19.** 9 kişilik bir takımda kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı, bu takımdaki erkek öğrencilerin sayısının yarısına eşittir.

**Buna göre, takımda kaç erkek öğrenci vardır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**20.** Bir okulda 5 dersten 2 si aynı saatte verilmektedir.

**Bu okulda bu 5 dersten 3 ünü seçmek isteyen biri seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**21.** **3 kırmızı, 3 beyaz ve 3 sarı bilye arasından 3 ü de farklı renk olan 3 bilye kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 12 B) 15 C) 21 D) 27 E) 32

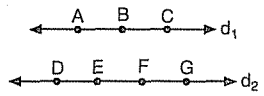
**22.** **3 tanesi doğrusal olan 7 noktadan <u>en çok</u> kaç farklı doğru geçer?**

A) 12 B) 15 C) 19 D) 21 E) 24

**23.** **4 ü bir A noktasından geçen 8 doğrunun <u>en çok</u> kaç farklı kesişim noktası vardır?**

A) 16 B) 17 C) 19 D) 21 E) 23

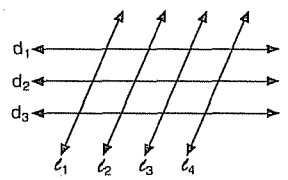
**24.**




**$d_1 // d_2$ olmak üzere, şekildeki noktalar (A, B, C, D, E, F, G) kullanılarak köşeleri bu 7 noktadan herhangi 3 ü olan <u>en çok</u> kaç farklı üçgen çizilebilir?**

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

**25.**




$d_1 // d_2 // d_3$ ve $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4$

**olduğuna göre, yandaki şekilde kaç farklı paralel kenar vardır?**

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

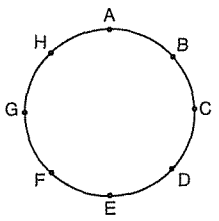
**26.** **Bir çember üzerindeki 6 nokta ile uçları bu noktalar olan <u>en fazla</u> kaç kiriş çizilebilir?**

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

**19-B** **20-B** **21-D** **22-C**

**23-E** **24-D** **25-B** **26-A**

**27.** Yandaki çember üzerinde 8 nokta vardır.




**Köşeleri bu noktalar üzerinde ve bir köşesi A noktası olan kaç farklı dörtgen çizilebilir?**

A) 27 B) 30 C) 35 D) 40 E) 43

**28.** **Yarıçapları farklı üç çemberin en çok kaç kesişim noktası vardır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**29.** $(3x + y - 2)^5$

**açılımındaki terimlerin katsayılarının toplamı, sabit terimden kaç fazladır?**

A) 36 B) 48 C) 54 D) 60 E) 64

**30.** $(x - 2y)^5$

**ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 3. terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-40x^3y^2$ B) $40x^3y^2$ C) $32x^3y^2$

D) $-32x^3y^2$ E) $10x^3y^2$

**31.** $\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$

**açılımı yapıldığında x li terimin katsayısı kaç olur?**

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 44

**32.** $\left(\frac{a}{2} + \frac{4}{a}\right)^4$

**açılımı yapıldığında sabit terim kaç olur?**

A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

**33.** $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)^6$

**açılımında ortanca terim kaçtır?**

A) 40 B) 36 C) $-33$ D) $-36$ E) $-40$

**34.** $k \in R$, m ve n doğal sayılardır.

$(x + y + z)^7$

**açılımı yapıldığında $x^2.y^m.z^n$ biçiminde kaç terim vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**27-C** **28-A** **29-E** **30-B**

**31-D** **32-A** **33-E** **34-E**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 4

**1.** $\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + 1 = \binom{n}{2}$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**2.** $\binom{n}{5} = \binom{n}{4}$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**3.** **7 öğrenci arasından 6 kişilik bir grup ve bu grup içerisinden bir başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 6 B) 12 C) 30 D) 42 E) 71

**4.** **5 kız, 6 erkek arasından 3 ü kız, 2 si erkek olmak şartıyla 5 kişilik bir kazı ekibi kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 30 B) 60 C) 120 D) 150 E) 180

**5.** **4 elemanlı bir kümenin en çok 3 elemanlı alt kümeleri sayısı, en az 3 elemanlı alt kümeleri sayısından kaç fazladır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**6.** $A = \{1, 3, 5, \{\Delta\}, \varnothing, 222\}$

**kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaçında "1" bulunur, "3" bulunmaz?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

**7.** **4 erkek, 5 bayan arasından en az 3 ü erkek olan 5 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 45 B) 40 C) 36 D) 30 E) 15

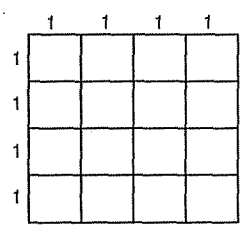
**8.** **Aralarında Tamer'in de bulunduğu 7 kişi arasından Tamer'in de bulunduğu 4 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 36

**1-D** **2-D** **3-D** **4-D**

**5-C** **6-C** **7-A** **8-B**

**9.**




**şekilde kaç dikdörtgen vardır?**

A) 20 B) 36 C) 40 D) 60 E) 100

**10.** 9 soruluk bir sınavda 6 soru yanıtlanacaktır.

**İlk 4 soruyu yanıtlamak zorunlu olduğuna göre, yanıtlanacak bu 6 soru kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 6 B) 8 C) 10 D) 15 E) 20

**11.** 6 kişilik bir gruptan 4 kişilik bir grup sinemaya, 2 kişilik bir grup da tiyatroya gidecektir.

**Bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

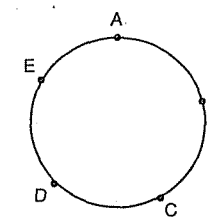
A) 15 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

**12.** 10 kişilik bir ekipte bayanlardan oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısının bir fazlası, bu gruptaki erkeklerin sayısının 4 katına eşittir.

**Buna göre, bu grupta kaç bayan vardır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**13.** **Çember üzerindeki A, B, C, D, E noktaları kullanılarak bir köşesi D noktasında olan kaç tane üçgen çizilebilir?**




A) 2 B) 4 C) 6 D) 10 E) 12

**14.** **4 tanesi doğrusal olan 8 noktadan <u>en çok</u> kaç doğru geçer?**

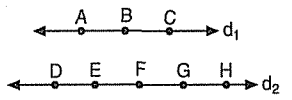
A) 11 B) 20 C) 22 D) 23 E) 24

**15.** **3 ü bir A noktasından geçen 7 doğrunun en çok kaç kesişim noktası vardır?**

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

**9-E** **10-C** **11-A** **12-C** **13-C** **14-D** **15-E**

**16.**

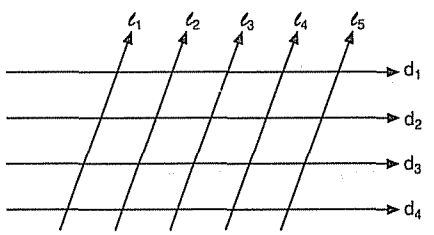



**$d_1$ // $d_2$ olmak üzere, şekildeki A, B, C, D, E, F, G, H noktaları kullanılarak köşeleri bu sekiz noktadan herhangi dördü olan <u>en çok</u> kaç farklı dörtgen çizilebilir?**

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

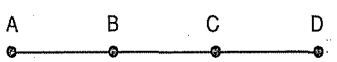
**17.** $d_1 // d_2 // d_3 // d_4$ ve $\ell_1 // \ell_2 // \ell_3 // \ell_4 // \ell_5$

**olduğuna göre, aşağıdaki şekilde kaç farklı paralel kenar vardır?**




A) 12 B) 20 C) 30 D) 60 E) 120

**18.**

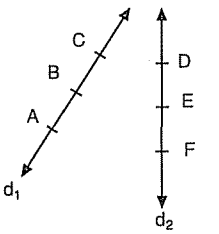



**Şekildeki herhangi iki noktayı birleştirerek kaç farklı doğru parçası oluşturulabilir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**16-D** **17-D** **18-D**

**19.** $d_1$ ve $d_2$ *doğruları veriliyor.*




**Şekildeki noktaları birleştirerek kaç farklı üçgen oluşturulabilir?**

A) 14 B) 15 C) 18 D) 19 E) 20

**20.** a bir reel sayı olmak üzere,

$$(x + 3y - a)^3$$

**açılımındaki terimlerin katsayılarının toplamı – 1 olduğuna göre, a kaçtır?**

A) – 1 B) – 2 C) 2 D) 3 E) 5

**21.** $(a - 3b)^9$

**ifadesi a nın azalan kuvvetlerine göre sıralandığında baştan 3. terimin katsayısı kaçtır?**

A) – 144 B) – 72 C) 72 D) 144 E) 324

**22.** $(a + \frac{1}{a})^5$

**açılımında a lı terimin katsayısı kaçtır?**

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 20

**19-C** **20-E** **21-E** **22-A**

**23.** $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^6$

**açılımında sabit terim kaçtır?**

A) 25 B) 35 C) 60 D) 80 E) 120

**24.** $(x + 2y)^8$

**açılımında ortanca terimin katsayısı kaçtır?**

A) 16 B) $\binom{8}{4}$ C) $4 . \binom{8}{4}$

D) $16 . \binom{8}{4}$ E) $32 . \binom{8}{4}$

**25.** $(3x - y)^4 = ... + a . x^b . y + ...$

**olduğuna göre, a + b kaçtır?**

A) – 105 B) – 75 C) – 35 D) 75 E) 105

**26.** $\binom{a+1}{2} + \binom{a}{2} = 121$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

**27.** $\binom{x}{2} = \binom{5}{y}$

**olduğuna göre, y nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 10

**28.** $(x + 2y - 2)^6$ **ifadesinin açılımında; katsayıları toplamı ile sabit terimin toplamı kaçtır?**

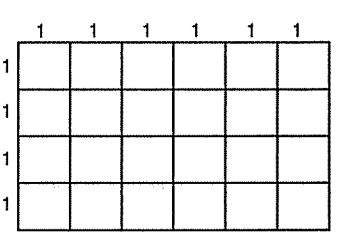
A) 128 B) 65 C) 33 D) 1 E) 0

**29.** $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$

**ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?**

A) – 480 B) 480 C) – 240 D) 240 E) 120

**30.** **Bir kenarı 1 birim olan 24 küçük kareden oluşan şekilde alanı 1 birimkareden büyük olan kaç dikdörtgen vardır?**




A) 84 B) 90 C) 126 D) 186 E) 210

**23-C** **24-D** **25-A** **26-C**

**27-E** **28-B** **29-D** **30-D**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 5

**1.** $A = \{ \{a\}, b, c, \{d, e\}, d, e\}$

**kümesinin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

**2.** $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 127$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**3.** $\binom{7}{3} = n+2 . \binom{n}{n}$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 21 B) 23 C) 27 D) 31 E) 33

**4.** **8 basketbolcu arasından 5 kişilik bir takım ve bu 5 kişi içinden bir kaptan kaç farklı şekilde seçilir?**

A) 170 B) 210 C) 240 D) 250 E) 280

**5.** **6 sayısal 4 sözel öğrenci arasından 3 ü sayısal, 2 si sözel olmak şartıyla 5 kişilik bir öğrenci grubu kaç değişik şekilde seçilir?**

A) 150 B) 120 C) 100 D) 80 E) 60

**6.** **Farklı renklerde 7 bilye 2 öğrenciye kaç değişik şekilde dağıtılabilir?**

A) 128 B) 64 C) 49 D) 42 E) 21

**7.** 6 kişi içinden 4 kişi seçilip, seçilen 4 kişinin içinden de yeni bir eleme yapılıp iki kişi seçilecektir.

**Buna göre, kaç değişik seçim yapılabilir?**

A) 60 B) 70 C) 90 D) 100 E) 170

**8.** **9 farklı oyuncağın 5 tanesi Ali'ye, 4 tanesi de Hasan'a kaç farklı şekilde dağıtılabilir?**

A) 168 B) 144 C) 136 D) 126 E) 120

**1-D** **2-B** **3-E** **4-E**

**5-B** **6-A** **7-C** **8-D**

**9.** **5 erkek, 2 bayan arasından en çok birisi bayan olmak üzere, 2 kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 20 B) 19 C) 18 D) 16 E) 15

**10.** 3 doktor 5 hemşire içinden ikisi doktor üçü hemşire beş kişilik bir ekip seçilecektir.

**Kaç değişik seçim yapılabilir?**

A) 16 B) 18 C) 22 D) 26 E) 30

**11.** **Herhangi üçü doğrusal olmayan 5 nokta ile kaç farklı üçgen çizilebilir?**

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

**12.** **6 doktor ve 3 hemşire arasından, 2 doktor ve 1 hemşireden oluşan 3 kişilik bir heyet kaç değişik biçimde seçilebilir?**

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

**9-A** **10-E** **11-A** **12-C**

**13.** **8 kişi, iki tanesi 3 kişilik, bir tanesi 2 kişilik toplam 3 odada kaç farklı şekilde kalabilirler?**

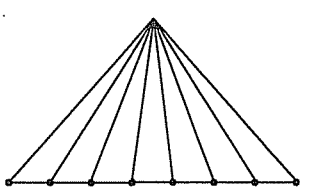
A) 280 B) 560 C) 624 D) 428 E) 360

**14.** Bir basketbol takımının 10 kişilik kadrosundan ilk 5 seçilecektir.

**Takım kaptanı Ramazan ve Emin takımda olmak şartıyla bu takımın ilk beşi kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 20 B) 28 C) 32 D) 35 E) 56

**15.**



**Yukarıdaki şekilde kaç tane üçgen vardır?**

A) 20 B) 21 C) 24 D) 26 E) 28

**16.** $(2x + y)^8$

**açılımında terimlerden biri $a.x^3.y^b$ olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?**

A) 56 B) 61 C) 117 D) 263 E) 453

**13-B** **14-E** **15-E** **16-E**

**17.** $\left(x - \frac{1}{2x^2}\right)^9$

**açılımında sabit terim kaçtır?**

A) 84 B) 42 C) $\frac{21}{2}$ D) $-\frac{21}{2}$ E) $-84$

**18.** $(a + 2b - c)^7$

**açılımında $a^2.b^2.c^3$ lü terimin katsayısı kaçtır?**

A) $-960$ B) $-840$ C) $-260$ D) 450 E) 840

**19.** **$(x^3 - y^2 . z)^n$ ifadesinin açılımındaki herhangi bir terim $A(x.y)^6 . z^m$ olduğuna göre, m + n kaçtır?**

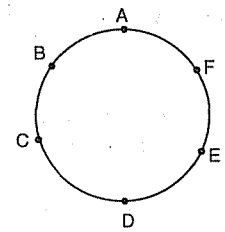
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

**20.** Bir şehirdeki 5 doktordan 2 si seçilip şehirdeki iki farklı hastaneye tayin edilecektir.

**Bu tayin kaç farklı şekilde gerçekleştirilebilir?**

A) 2 B) 10 C) 15 D) 20 E) 40

**21.** **Şekildeki çember üzerindeki altı nokta ile bir köşesi A noktası olan kaç farklı üçgen çizilebilir?**




A) 20 B) 15 C) 10 D) 6 E) 3

**22.** Mavi, sarı, yeşil renkte üç yumak ip ve Minnoş, Tekir, Pamuk adlarında üç kedimiz vardır. Kedilerden biri bir yumakla oynadığında yumak bozulduğu için diğerleri oynayamıyor.

**Kedilerden herbiri bir yumakla oynamak isterse kaç farklı şekilde yumaklarla oynayabilirler?**

A) 24 B) 12 C) 9 D) 8 E) 6

**23.** 8 kişilik voleybol takım kadrosundan 6 kişilik takım çıkarılacaktır.

**Neslihan takımda bulunacağına göre, kaç farklı takım çıkarılabilir?**

A) 7 B) 14 C) 21 D) 35 E) 49

**24.** **6 kişilik bir ekipten 4 kişilik bir kurul ve bu kurul içerisinden bir başkan ile bir başkan yardımcısı kaç değişik biçimde seçilebilir?**

A) 50 B) 60 C) 90 D) 120 E) 180

**17-D** **18-B** **19-C** **20-D**

**21-C** **22-E** **23-C** **24-E**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 6

**1.** **7 kişi arasından 3 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 35 B) 28 C) 21 D) 18 E) 11

**2.** 9 sporcudan 6 kişilik bir voleybol takımı oluşturulacaktır.

**Takıma girecek kaptan belli olduğuna göre, bu takım kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 34 B) 48 C) 56 D) 63 E) 72

**3.** 10 kişilik bir kafileden 2 kişi uçakla, 3 kişi gemiyle, 5 kişi de otobüsle yurt dışına gidecektir.

**Bu üç grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 2480 B) 2500 C) 2520

D) 2560 E) 2580

**4.** 6 asistan arasından, 1 başkan ve 2 üyeden oluşan 3 kişilik bir ekip oluşturulacaktır.

**Buna göre, bu ekip kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

**5.** 18 kişilik bir gruptan 7 kişi seçiliyor. Bu 7 kişiden de 5 i farklı şehirlere tatile gönderiliyorlar.

**Kaç farklı durum oluşur?**

A) $\binom{18}{7}.\binom{7}{5}$ B) $\binom{18}{7}.5!$ C) $P(18,7).P(7,5).5!$

D) $P(18,7).5!$ E) $\binom{18}{7}.\binom{7}{5}.5!$

**6.** 5 farklı matematik kitabından herhangi üçü, 4 farklı kimya kitabından herhangi ikisi seçilerek aynı rafa yan yana dizilecektir.

**Matematik kitaplarının tümü birarada olmak şartıyla bu beş kitap rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?**

A) 2160 B) 1800 C) 1440

D) 1200 E) 960

**7.** **10 kişi arasından seçilen 4 kişi, bir yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde sıralanabilir?**

A) 5040 B) 4140 C) 1260

D) 1100 E) 960

**8.** 16 kişilik bir futbolcu kafilesindekilerin 3 tanesi kalecidir.

**Kalecilerden sadece bir tanesi seçilmek şartıyla, bu kafileden 11 kişilik bir futbol takımı kaç türlü oluşturulabilir?**

A) 858 B) 870 C) 875 D) 880 E) 896

**1-A** **2-C** **3-C** **4-D** **5-E** **6-A** **7-C** **8-A**

**9.** **4 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı biçimde sonuçlanabilir?**

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

**10.** 3 asistan ile 4 doktor arasından 4 kişilik bir sağlık heyeti kurulacaktır.

**İçerisinde en az 3 doktorun bulunduğu heyet kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

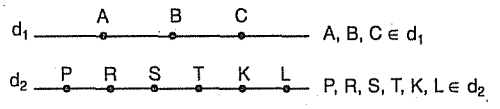
**11.** **Dördü paralel altı tane doğru en çok kaç noktada kesişir?**

A) 15 B) 12 C) 9 D) 8 E) 6

**12.** **Bir düzlemde dördü doğrusal olmak üzere, yedi tane noktanın birleştirilmesiyle en çok kaç doğru elde edilebilir?**

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

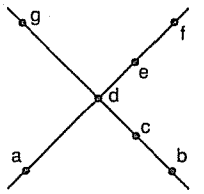
**13.**




**Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ olduğuna göre, köşeleri bu dokuz noktadan (A, B, C, P, R, S, T, K, L) herhangi üçü olan kaç üçgen çizilebilir?**

A) 24 B) 32 C) 40 D) 51 E) 63

**14.** g, d, c, b doğrusal
a, d, e, f doğrusal
noktalardır.



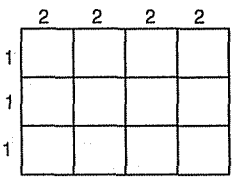

**şekilde verilen 7 nokta ile kaç farklı üçgen oluşturulabilir?**

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

**15.** **Düzgün bir onüçgenin kaç tane köşegeni vardır?**

A) 52 B) 65 C) 78 D) 89 E) 91

**16.** **Boyutları 1 x 2 [$cm^2$] olan özdeş oniki dikdörtgenden oluşan yandaki şekilde, alanı 2 $cm^2$ den büyük ve 24 $cm^2$ den küçük kaç tane dikdörtgen vardır?**




A) 27 B) 30 C) 37 D) 40 E) 47

**9-D** **10-B** **11-C** **12-E**

**13-E** **14-E** **15-B** **16E**

**17.** $12.C(n, r) = \frac{P(n, r)}{2}$

**olduğuna göre, r kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**18.** $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \ldots + \binom{7}{6}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 30 B) 62 C) 112 D) 126 E) 254

**19.** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n} = 6$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**20.** Bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 4 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir.

**Buna göre, bu kümenin 3 ten az elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?**

A) 50 B) 46 C) 40 D) 37 E) 33

**21.** $(2x - \frac{1}{y})^8$ **açılımında ortanca terimin katsayısı kaçtır?**

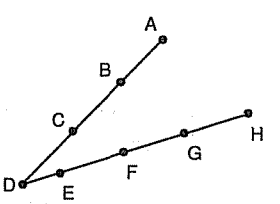
A) 560 B) 702 C) 896 D) 902 E) 1120

**22.** $(x^3 - \frac{1}{x^2})^8$

**açılımında bir terim $k.x^{-6}$ olduğuna göre, k kaçtır?**

A) – 56 B) – 28 C) – 15 D) 28 E) 56

**23.** **Köşeleri şekildeki 8 nokta üzerinde olan kaç üçgen çizilebilir?**




A) 42 B) 48 C) 50 D) 54 E) 56

**24.** A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

**kümesinin iki elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde "2" veya "4" eleman olarak bulunur?**

A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

**17-A** **18-D** **19-E** **20-B**

**21-E** **22-D** **23-A** **24-D**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 7

**1.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{3, 4, 5, 6\}$

kümeleri veriliyor.

**Buna göre, A kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi B kümesini kapsar?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**2.** $\binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1092 B) 1110 C) 1290

D) 1320 E)1351

**3.** 7 doktor arasından 4 ü ve 5 asistan arasından da 2 si yan yana oturacaklardır.

**Doktorların hepsi bir arada ve asistanların hepsi bir arada kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) $\binom{7}{4}.\binom{5}{2}$ B) $\binom{7}{4}.\binom{5}{2}.6!$

C) $\binom{7}{2}.\binom{5}{4}.4!.2!$ D) $4!.2!.2!$

E) $\binom{7}{4}.\binom{5}{2}.2!.4!.2!$

**4.** $(3x - 2y + m)^6$

**ifadesi açıldığında katsayılar toplamı 64 olduğuna göre, m nin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) – 5 B) – 4 C) – 2 D) 1 E) 3

**5.** $(x - 5y + 2z)^3 . (x - 2y)^5$

**ifadesinin açılımında elde edilen terimlerin katsayılarının toplamı kaçtır?**

A) – 16 B) – 8 C) 2 D) 4 E) 8

**6.** $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^7$

**açılımında baştan 4. terimin katsayısı kaçtır?**

A) 8 B) 10 C) 15 D) 35 E) 70

**7.** $a . (1 - a)^{10}$

**ifadesinin açılımında $a^8$ li terimin katsayısı kaçtır?**

A) – 95 B) – 120 C) 95

D) 110 E) 120

**1-D** **2-E** **3-E** **4-D** **5-E** **6-D** **7-B**

**8.** $(3x + by + 1)^{15}$

**ifadesinin açılımında terimlerin katsayılarının toplamı, sabit terime eşit olduğuna göre, b kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) – 3 E) – 1

**9.** $(1 + x^2)^{10} = 1 + \ldots + k.x^6 + \ldots + x^{20}$

**olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 110 B) 120 C) 130

D) 140 E) 210

**10.** $\left(\frac{1}{x} - x^2\right)^9$

**ifadesinin açılımında $x^6$ lı terimin katsayısı kaçtır?**

A) – 126 B) – 114 C) 114

D) 126 E) 132

**11.** $\left(\frac{1}{x^2} - 2x^6\right)^8$

**ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?**

A) – 112 B) – 98 C) 98

D) 105 E) 112

**12.** $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$

**ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında ortadaki terim aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-20\sqrt{x}$ B) $-10\sqrt{x}$ C) $\sqrt{x}$

D) $10\sqrt{x}$ E) $20\sqrt{x}$

**13.** **$(x^2 + y^5)^n$ ifadesinin açılımında $(x \cdot y)^{10}$ lu terimin katsayısı kaçtır?**

A) 21 B) 24 C) 28 D) 35 E) 36

**14.** $\left(\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$

**açılımındaki terimlerden biri rasyonel sayı olduğuna göre, bu terim kaçtır?**

A) 6 B) 10 C) 15 D) 18 E) 21

**15.** $\left(x^3 + \frac{a}{x^2}\right)^n$

ifadesinin açılımında baştan dördüncü terim 80 dir.

**Buna göre, a kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**8-D** **9-B** **10-A** **11-E**

**12-A** **13-A** **14-C** **15-E**

**16.** $(m^2 + m.n)^a = ... + b\,m^7 n^3 + ...$

**olduğuna göre, a.b kaçtır?**

A) 5 B) 15 C) 30 D) 50 E) 65

**17.** $(2x^3y - y^2)^6$

**açılımında $x^9$ lu terimin katsayısı kaçtır?**

A) – 216 B) – 160 C) 256 D) 120 E) 512

**18.** $\left(\frac{x^3}{a} + \frac{1}{x^3}\right)^6$

**açılımında $x^6$ lı terimin katsayısı 240 olduğuna göre, a kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

**19.** $(x^2 + x)^n$

**açılımında ortadaki terim $A.x^9$ olduğuna göre, A + n kaçtır?**

A) 16 B) 21 C) 26 D) 34 E) 41

**20.** $\left(\frac{2}{x^2} - x^3\right)^{10}$

**açılımında baştan kaçıncı terimin derecesi 20 dir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**21.** $(x + y - z^2)^5$

**açılımında $x\,y^2z^4$ lü terim katsayısı kaçtır?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

**22.** 5 kişi arasından üç kişilik bir grup oluşturulacaktır.

**Ali ile Veli bir arada olmayacak şekilde, bu grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 10 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**23.** $\binom{19}{1} + \binom{19}{3} + \binom{19}{5} + .... + \binom{19}{19}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2^{17}$ B) $2^{18}$ C) $2^{19}$ D) $2^{20}$ E) $2^{21}$

**16-D** **17-B** **18-D** **19-C**

**20-E** **21-C** **22-C** **23-B**

# KOMBİNASYON - BİNOM

TEST - 8

**1.** **10 kişi arasından 7 kişiden oluşan bir folklor ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 60 B) 84 C) 120 D) 144 E) 180

**2.** 9 kişilik bir arkadaş grubu 2, 3 ve 4 kişilik üç odaya yerleşeceklerdir.

**Kaç farklı şekilde odalara yerleşirler?**

A) 1080 B) 1260 C) 1440 D) 1760 E) 2480

**3.** **8 sporcu arasından birisi kaptan ve birisi oyun kurucu olmak şartıyla 5 kişilik bir basketbol takımı kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 560 B) 780 C) 840 D) 1120 E) 1360

**4.** **4 doktordan herhangi iki tanesi ile 5 hemşireden herhangi üç tanesi iki hemşire arasına bir doktor gelecek şekilde düz bir sıraya kaç farklı şekilde sıralanırlar?**

A) 180 B) 420 C) 540 D) 720 E) 960

**5.** **8 kişi arasından seçilen 5 kişi, beşgen şeklindeki bir masanın etrafına kaç farklı şekilde sıralanır?**

A) 896 B) 1152 C) 1344 D) 2688 E) 6720

**6.** 4 kız ve 3 erkek arasından 3 kişilik bir izci grubu kurulacaktır.

**En az birer tane kız ve erkek bulunması şartıyla bu grup kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 32

**7.** **Bir kümenin 3 ten az elemanlı bütün alt kümeleri ile 2 den fazla elemanlı bütün alt kümelerinin toplam sayısı 64 olduğuna göre, bu kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?**

A) 6 B) 10 C) 15 D) 21 E) 56

**8.** 10 kişilik bir grupta 6 erkek 4 kız öğrenci vardır.

**Kızlardan sadece 1 tanesi seçilmek şartıyla halay çekecek 5 kişilik bir grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?**

A) 20 B) 60 C) 80 D) 90 E) 120

**1-C** **2-B** **3-D** **4-D**

**5-C** **6-D** **7-C** **8-B**

**9.** 7 sporcudan 4 kişilik bir takım oluşturulacaktır.

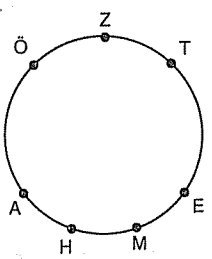
**Takıma girecek olanlardan birisi belli olduğuna göre, bu takım kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 30 E) 35

**10.** **İkisi paralel beş tane doğru en çok kaç noktada kesişir?**

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

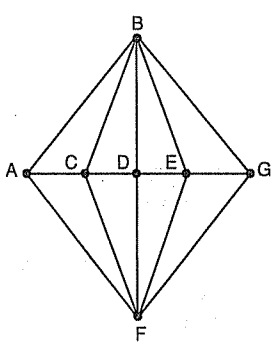
**11.** Yandaki çember üzerinde 7 (A, H, M, E, T, Ö, Z) nokta bulunmaktadır.




**Köşeleri bu yedi noktadan herhangi dördü olan kaç dörtgen çizilebilir?**

A) 18 B) 30 C) 32 D) 35 E) 56

**12.** **[BF] ve [AG] şekildeki dörtgenin köşegeni olmak üzere, A, B, C, D, E, F, G noktaları ile kaç farklı üçgen çizebilir?**



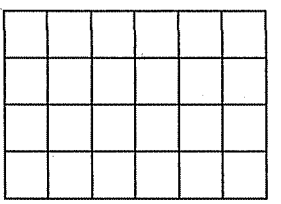

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 25

**13.** $2.C(n, 2) = 5.P(n, 1)$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**14.** **Özdeş 24 tane birim kareden oluşan şekilde, alanı 1 birimkareden büyük olan kaç tane kare vardır?**



A) 20 B) 24 C) 26 D) 30 E) 32

**15.** $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 21 B) 25 C) 26 D) 30 E) 32

**16.** **İki elemanlı alt kümelerinin sayısı, yedi elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olan bir kümenin en çok bir elemanlı kaç alt kümesi vardır?**

A) 15 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

**9-C** **10-D** **11-D** **12-D**

**13-C** **14-C** **15-C** **16-D**

**17.** $(ax - 2y)^9$ **ifadesinin açılımında katsayılar toplamı 512 olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

**18.** $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^2}\right)^6$ **ifadesinin açılımında ortadaki terimin katsayısı kaçtır?**

A) $-\frac{5}{4}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) $-1$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{4}$

**19.** $(x^2 - 2y^2)^n$ **ifadesinin açılımındaki** $x^4.y^4$ **lü terimin katsayısı kaçtır?**

A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

**20.** $(x + 2y^2 - 5z^3)^n$ **ifadesinin açılımındaki herhangi bir terim** $ax^3(yz)^6$ **olduğuna göre, n kaçtır?** $(a \in Z^+)$

A) 16 B) 14 C) 10 D) 9 E) 8

**21.** $(2x - y + z)^8$ **ifadesinin açılımında** $ax^3 y^m z^n$ **biçiminde kaç farklı terim vardır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**22.** İçlerinde Ayşe ve Ali'nin de bulunduğu 15 kişilik bir topluluktan 4 kişilik bir grup seçilecektir.

**İçinde Ayşe'nin bulunup Ali'nin bulunmadığı kaç farklı grup oluşturulabilir?**

A) 286 B) 212 C) 143 D) 106 E) 96

**23.** 10 soruluk bir sınavda 7 soru cevaplandırılacaktır.

**İlk 3 sorudan sadece 1 tanesi cevaplanacağına göre, toplam 7 soru kaç değişik şekilde seçilebilir?**

A) 21 B) 105 C) 210 D) 215 E) 420

**24.** 15 kişilik bir ekipten 11 kişilik bir futbol takımı oluşturulacaktır.

**Bu takımda Ali'nin oynaması, Veli'nin de oynaması şartıyla, bu takım kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

A) 96 B) 106 C) 143 D) 212 E) 286

**17-D** **18-B** **19-A** **20-E**

**21-C** **22-A** **23-A** **24-E**

# 6. ÜNİTE: OLASILIK

## OLASILIK TERİMLERİ

### 1. Deney ve Çıktı

Düzgün bir zemine; bir madeni paranın atılması, bir zarın atılması, bir madeni paranın art arda iki kez (veya iki madeni paranın aynı anda) atılması, iki zarın aynı anda (veya bir zarın art arda iki kez) atılması ya da içinde bilyeler bulunan bir torbadan bilye çekilmesi, ya da içinde üzeri numaralandırılmış kartlar bulunan bir torbadan kart çekilmesi, ... v.b birer **deney**dir. Yapılan **bir deneyde elde edilebilecek sonuç**lara da deneyin **çıktı**ları denir.

### 2. Örnek (Örneklem) Uzay ve Örnek Nokta

Bir deneyde elde edilebilecek bütün çıktıların kümesine **örnek (örneklem) uzay** denir ve genellikle E sembolüyle gösterilir. Örnek uzayın bir elemanına ise, **örnek nokta** denir.

**Örnek:**

- Bir madeni paranın atılması deneyinde;

  deneyin çıktıları: Y (yazı) ve T (tura)

  örnek uzay: E = { Y, T } ve s(E) = 2 dir.

- İki madeni paranın birlikte atılması (veya bir madeni paranın art arda iki kez atılması) deneyinde;

  E = { (Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T) } ve

  s(E) = 2 . 2 = 4 tür. (çarpma kuralı)

- **Bir madeni paranın art arda n defa** (veya n tane madeni paranın aynı anda) **atılması** deneyinde **örnek uzayın eleman sayısı,**

$$s(E) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n tane}} = 2^n \text{ dir.}$$

**Örnek:**

- Bir zarın atılması deneyinin örnek uzayı,

  E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ve s(E) = 6 dır.

- İki zarın birlikte atılması deneyinde, örnek uzayın eleman sayısı:

  s(E) = 6.6 = 36 dır. (çarpma kuralı)

**Örnek:**

Bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zar atılması (veya bir zar atıldıktan sonra ardından bir madeni para atılması ya da bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması) deneyinin örnek uzayı,

E = { (Y, 1), (Y, 2), ... , (Y, 6), (T, 1), ... , (T, 6) }

örnek uzayın eleman sayısı:

s(E) = 2.6 = 12 dir. (çarpma kuralı)

**Örnek:**

İçinde yedi tane bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekilmesi (veya çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda üç kez birer bilye çekilmesi) deneyinin örnek uzayı,

E = { $(b_1, b_2, b_3)$, $(b_1, b_2, b_4)$, ... , $(b_5, b_6, b_7)$ } ve

örnek uzayın eleman sayısı:

$$s(E) = \binom{7}{3} = 21 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

İçinde 7 tane bilye bulunan bir torbadan, çekilen bilye torbaya geri atılarak, art arda iki kez birer bilye çekilmesi deneyinin örnek uzayı,

E = { $(b_1, b_1)$, $(b_1, b_2)$,$(b_2, b_1)$,$(b_2, b_2)$, ... ,$(b_7, b_7)$ } ve

örnek uzayın eleman sayısı:

s(E) = 7 . 7 = 49 dur. (çarpma kuralı)

### 3. Olay, İmkansız Olay ve Kesin Olay

Bir örnek uzayın herhangi bir alt kümesine **olay**, boş kümeye **imkansız olay**, E örnek uzayına da **kesin olay** denir.

**Örnek:**

Bir zarın atılması deneyinde,

E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ve

üst yüze gelen sayının;

a) asal sayı olma olayı : A

A = { 2, 3, 5 }, $A \subset E$

b) " 7 " olma olayı : B

$B \subset E$, B = { } ; imkansız olay

c) " 7 den küçük " olma olayı: C

$C \subset E$, $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ; kesin olay

**Örnek:**

Bir madeni paranın art arda iki kez atılması deneyinde,

$E = \{ (Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T) \}$

a) en az bir kez yazı gelme olayı: A

$A = \{ (Y, T), (T, Y), (Y, Y) \}$

b) en çok bir kez yazı gelme olayı: B

$B = \{ (T, T), (T, Y), (Y, T) \}$

c) birinin yazı, birinin tura gelme olayı: C

$C = A \cap B = \{ (Y, T), (T, Y) \}$ dir.

**4. Ayrık Olay**

Bir örnek uzaya ait **iki olayın kesişimi boş küme** ise bu iki olaya **ayrık olaylar** denir.

**$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ A ile B ayrık olaylardır.**

**Örnek:**

Bir kutuda bulunan 10 tane ampülden 3 ü bozuk, 7 si sağlamdır. Bu kutudan aynı anda iki ampul alınması deneyinde;

A = { seçilen iki ampülden en az birinin sağlam olması} ve

B = { seçilen iki ampülün de bozuk olması }

olaylarının ortak elemanı olmadığından ayrık olaylardır.

**Örnek:**

Bir zar atılması deneyinde, üst yüze gelen sayının;

tek sayı olması olayı: T = { 1, 3, 5 },

çift sayı olması olayı: Ç = { 2, 4, 6 } ve

hem tek hem çift sayı olması olayı: $T \cap Ç = \emptyset$

olduğundan, T ile Ç ayrık olaylardır.

**OLASILIK HESABI**

Sonlu bir örnek uzayın (E) örnek noktalarının oluşturduğu olaylar ayrıktır. Eğer bu olayların olasılıkları belli ise, E deki her bir olayın olasılığı bulunabilir.

**Eş Olumlu Örnek Uzay**

E örnek uzayına ait bir A olayının olasılığı P(A) ile gösterilmek üzere,

$E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \}$ sonlu bir örnek uzay olsun.

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \ldots = P(e_n)$$

ise, E örnek uzayına **eş olumlu (veya eş olasılı) örnek uzay** denir.

**Uyarı:**

Bir deneyde bütün çıktıların olasılıkları birbirine eşit ise, bu şekildeki örnek uzaya **eş olumlu örnek uzay** denir.

**Olasılık Hesabı**

$n, r \in Z^+$ ve $E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \}$ eş olumlu bir örnek uzay olmak üzere, E ye ait bir A olayı,

$A = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_r \}$ ise A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{r}{n} = \frac{\text{istenen bütün durumların sayısı}}{\text{olası bütün durumların sayısı}}$$

şeklinde hesaplanır.

**Özellikler:**

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(E) = 1$ dir.
2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ dir.
3. A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı ise P(A′) olmak üzere,

   $P(E) = P(A) + P(A') = 1$ dir.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.
5. $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ ikişer ikişer ayrık olaylar ve

   $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$ ise

   $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$ dir.

**Örnek: 1999 - ÖSS**

Bir düzgün dörtyüzlünün (bütün yüzleri eşkenar üçgen olan üçgen piramit) iki yüzünde A, iki yüzünde de T harfleri yazılıdır.

**Bu düzgün dörtyüzlü bir kez atıldığında yan yüzlerinde, sırasına ve yönüne bakılmaksızın A, T, A harflerinin görülme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

**Çözüm:**

Düzgün dörtyüzlünün yan yüzlerinde A, T, A harflerinin görülmesi için, yere gelen yüzünde T harfi olması gerekir. Buna göre, bu düzgün dörtyüzlünün yere gelen yüzünde T harfinin olma olasılığı,

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dir.

**Örnek: 1984 - ÖYS**

**4 kız, 6 erkek öğrenci bulunan bir okul kafilesinden rastgele 2 öğrenci seçilirse öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı nedir?**

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

**Çözüm:**

Toplam 10 öğrenci arasından 2 öğrenci seçilmesi örnek uzay(E);

4 kız, 6 erkek öğrenci arasından bir kız, bir erkek öğrenci seçilmesi olayı da A olsun.

Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4.6}{\frac{10.9}{2!}} = \frac{8}{15} \text{ tir.}$$

**Örnek: 1988 - ÖYS**

*Bir torbada aynı büyüklükte 4 kırmızı, 5 beyaz, 7 yeşil kalem vardır.*

**Rastgele alınan bir kalemin kırmızı veya beyaz olma olasılığı nedir?**

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{9}{16}$

**Çözüm:**

$E = \{ k_1, \dots, k_4, b_1, \dots, b_5, y_1, \dots, y_7 \}$

$K = \{ k_1, k_2, k_3, k_4 \}$, $B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \}$ ve

$K \cap B \neq \emptyset$ olduğundan,

$P(K \cup B) = P(K) + P(B)$

$$= \frac{s(K) + s(B)}{s(E)}$$

$$= \frac{4 + 5}{4 + 5 + 7} = \frac{9}{16} \text{ dır.}$$

**Örnek: 1987 - ÖYS**

**Düzgün bir para 3 defa atıldığında, en az bir kez tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

**Çözüm:**

En az bir kez tura gelme olayına A denilirse, hiç tura gelmemesi olayı A′ olur. O halde,

$A' = \{ (Y, Y, Y) \}$ ve $s(E) = 2^3 = 8$ olduğundan,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ dir.}$$

**Uyarı:**

İki zarın birlikte atılması veya bir zarın art arda iki kez atılması deneyinde, üst yüze gelen sayıların toplamı için;

| Toplamlar: | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| Adet: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

şeklinde bir durum vardır.

**Örnek:**

**Bir çift zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının en az 9 olma olasılığı kaçtır?**

**Çözüm:**

Yukarıdaki tablodan

9 10 11 12 : istenen toplamlar
↓ ↓ ↓ ↓
4 3 2 1 : İstenenlerin sayısı

Buna göre, bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının en az 9 olma olasılığı: P(A)

$$P(A) = \frac{\text{istenen durumların sayısı}}{\text{olabilecek bütün durumların sayısı}}$$

$$= \frac{4 + 3 + 2 + 1}{6.6} = \frac{5}{18} \text{ dir.}$$

**Ardışık Denemeler (Deneyler)**

Bir deney art arda n defa ya da belirli n tane olayın art arda gerçekleşmesinden oluşuyorsa,

$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \dots \cdot P(A_n)$ olur.

**Örnek:**

**Bir zar art arda üç kez atıldığında üçünün de farklı gelme olasılığını bulalım.**

**I. Çözüm:**

Birincide (I) 6 sayıdan herhangi biri; İkincide (II) birincide gelenden farklı bir sayı (dolayısıyla 6 sayıdan 5 i); üçüncüde (III) ilk ikisinde de gelenden farklı bir sayı (dolayısıyla 6 sayıdan 4 ü) gelmelidir. Buna göre,

$$P(I, II, III) = P(I).P(II).P(III) = \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$ olur.

**II. Çözüm:**

Üç atışta da farklı sayı gelme olayına A diyelim.

Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}}{6.6.6} = \frac{5}{9}$$ olur.

**Örnek: 1998 - ÖYS**

Bir torbada 2 tane mavi, 5 tane yeşil mendil vardır. Bu torbadan geri atılmamak koşulu ile iki kez birer mendil çekiliyor.

**Bu iki çekilişin birincisinde mavi, ikincisinde de yeşil mendil çekme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{70}{12}$ B) $\frac{20}{49}$ C) $\frac{10}{45}$ D) $\frac{10}{21}$ E) $\frac{5}{21}$

**Çözüm:**

$$P(M, Y) = P_1(M)\cdot P_2(Y)$$

$$= \frac{s(M)}{s(E_1)}\cdot\frac{s(Y)}{s(E_2)}$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{21}$$ dir.

**Örnek: 1982 - ÖYS**

Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor.

**Zarın 4 veya 4 ten küçük ve paranın tura gelmesi olasılığı nedir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

**Çözüm:**

Bir zar ve bir madeni paranın birlikte atılması deneyinin sonuçları ile bir zar atıldıktan sonra bir madeni paranın atılması (ya da bir madeni para atıldıktan sonra bir zarın atılması) deneyinin sonuçları aynıdır. O halde, zarın 4 veya 4 ten küçük gelmesi olayına A, paranın tura gelmesi olayına da T diyelim.

$$P(A \cap T) = P(A)\cdot P(T) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$ tür.

**Örnek: 1995 - ÖYS**

Bir torbada 6 beyaz, 4 siyah bilye vardır.

**Bu torbadan rastgele çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{3}{19}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{5}{13}$

**I. Çözüm:**

Torbadan aynı anda 3 bilye çekme deneyinin sonuçları ile çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda üç çekiliş yapma deneyinin sonuçları aynıdır. O halde, ardışık üç çekiliş yapılması şeklinde düşünülürse;

$$P(B, S, S) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3!}{2!} = \frac{3}{10}$$ dur. $(BSS \rightarrow \frac{3!}{2!})$

**II. Çözüm:**

Çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olma olayına A diyelim.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$ dur.

**KOŞULLU (ŞARTLI) OLASILIK**

Bir E örnek uzayının herhangi iki olayı A ve B olsun. **B** olayının **gerçekleşmiş** olması halinde **A olayının** gerçekleşmesi **olasılığına, A olayının B ye bağlı koşullu (şartlı) olasılığı** veya kısaca **A nın B koşullu olasılığı** denir ve **P(A | B)** şeklinde gösterilir.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ dir. $(P(B) \neq 0)$

**Uyarı:**

E örnek uzayı, **eş olumlu örnek uzay** ise,

$$P(A \mid B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

**Bir zar atıldığında üst yüze tek sayı geldiği bilindiğine göre, bu sayının asal sayı olma olasılığını bulalım.**

**I. Çözüm:**

Asal sayı gelme olayı A, tek sayı gelme olayı T olsun.

$A \cap T = \{3, 5\}$ olduğundan,

$$P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

**II. Çözüm:**

Problemdeki şarta göre örnek uzay düşünülürse;

$E_T = \{1, 3, 5\}$,

$A_T = \{3, 5\}$ olur.

Buna göre,

$$P(A \mid T) = \frac{s(A_T)}{s(E_T)} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

**Uyarı:**

A nın B koşullu olasılığını hesaplarken, yukarıdaki II. çözümde olduğu gibi B olayını örnek uzay gibi düşünerek hesap yapabiliriz.

**Örnek:**

Bir sınıftaki öğrencilerin % 60 ı kız öğrencidir. Kız öğrencilerin % 50 si, erkek öğrencilerin de % 60 ı matematik dersinden başarılı olmuştur.

**Sınıftan rastgele seçilen bir erkek öğrencinin matematikten başarılı bir öğrenci olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm:**

Seçilen öğrenci erkek öğrenci olduğundan $s(E) = 40$,

$s(B \cap E) = 24$ olduğundan

| | Başarılı | Başarısız |
|---|---|---|
| K | 30 | 30 |
| E | 24 | 16 |

$P(B \mid E) = \frac{24}{40} = \%\ 60$ tır.

**Bağımsız ve Bağımlı Olay**

İki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi, diğerinin gerçekleşme olasılığını değiştirmiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir.

1. **A ve B bağımsız olaylar ise, $P(A) = P(A \mid B)$** dir.

   Eğer **iki olay bağımsız değilse,** bu iki olaya **bağımlı olaylar** denir. Örneğin, bir torbadan çekiliş yapma deneyinde birden fazla çekiliş yapılıyorsa; ikinci, üçüncü, ... çekilişler kendisinden önce yapılan çekilişlere bağımlıdır.

2. **$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow$ A ve B bağımsız olaylardır.**

**Örnek:**

Bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması deneyinde,

A = { madeni paranın yazı gelmesi } olayı ile

B = { zarın 4 ten büyük gelmesi } olayını inceleyelim.

Bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması deneyinin sonuçları (çıktıları) ile bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zarın atılması deneyinin sonuçları (çıktıları) aynı olduğundan, olayları ifade etme kolaylığı olması için, deneyi ikinci şekliyle düşünelim.

Buna göre,

$E = \{(Y, 1), (Y, 2), \ldots, (Y, 6), (T, 1), \ldots, (T, 6)\}$,

$A = \{(Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6)\}$,

$B = \{(Y, 5), (Y, 6), (T, 5), (T, 6)\}$

$A \cap B = \{(Y, 5), (Y, 6)\}$ dır.

A ile B olayının bağımsız olaylar olduğunu gösterelim.

$$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

( Örnek uzayın eleman sayısı, s(E) = 2.6 = 12 dir. )

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{6} \quad \text{ve}$$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ olduğu görülmektedir.

Ayrıca burada,
paranın yazı ve zarın 4 ten büyük bir sayı gelme olasılığını, bir deneyin art arda iki deney yapılarak gerçekleştirilmesi şeklinde de düşünerek,
paranın yazı gelmesi : Y ve zarın 4 ten büyük gelmesi : D olmak üzere,

$P(A \cap B) = P(Y \cap D) = P(Y).P(D)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

şeklinde de hesaplayabiliriz.

**SONSUZ ÖRNEK UZAY**

Burada sayılamayan örnek noktalardan meydana gelen E örnek uzayı; uzunluk, alan veya hacim gibi bazı geometrik ölçümlerdir. Bu durumda,

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{A \text{ nın ölçüsü}}{E \text{ nin ölçüsü}}}$$

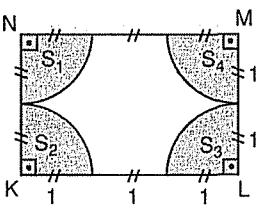
şeklinde hesaplanır.

**Örnek:**

**Boyutları 2 birim ve 3 birim olan dikdörtgen şeklindeki bir levha üzerinde rastgele işaretlenen bir noktanın, levhanın köşelerinden en çok 1 birim uzakta olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm:**

Levhanın köşelerinden en çok 1 birim uzakta olan noktaların oluşturduğu bölge, şekildeki dört tane çeyrek daire dilimlerini oluşturur. (İstenilen A olayı)




Örnek uzay da dikdörtgen biçimindeki KLMN düzlemsel levhası (bölgesi) dır.

Buna göre,

$n(E) = A(KLMN)$

$n(A) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ olduğundan,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\pi . 1^2}{2.3}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\pi}{6} \quad \text{dır.}$$

# OLASILIK

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** M ve N, E örnek uzayının iki olayıdır.

$P(M \cup N) = \frac{8}{9}$, $P(M' \cup N') = \frac{7}{9}$, $P(M) = \frac{7}{18}$

**olduğuna göre, $P(N')$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{7}{18}$

**2.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**kümesinden seçilen iki rakamın toplamının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{9}$

**3.** 5 madeni para atılıyor.

**Bunlardan en az 4 ünün yazı gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{5}{32}$ E) $\frac{3}{16}$

**4.** Bir zarın asal sayı olan yüzleri beyaz, diğer yüzleri sarı renklidir. Bu zar bir kez atılıyor.

**Zarın üst yüzüne gelen sayının tek sayı veya renginin sarı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

**1-D** **2-A** **3-E** **4-E**

**5.** Bir torbada beyaz, sarı, kırmızı toplardan 3 er tane vardır.

**Aynı anda çekilen üç topun en az ikisinin aynı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{19}{28}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{11}{14}$ E) $\frac{15}{17}$

**6.** Bir torbada 1 den 15 e kadar numaralandırılmış 15 tane fiş vardır.

**Torbadan rastgele çekilen bir fişin üzerindeki numaranın asal veya 3 ün katı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{13}{15}$

**7.** İki zar ile iki madeni para düzgün bir zemin üzerine atılıyor.

**Paraların farklı veya zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9 dan büyük gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{3}{8}$

**8.** Bir filede 3 elma, 4 armut ve 5 portakal vardır. Bu fileden, alınan meyve tekrar fileye atılmadan, arka arkaya rastgele 3 meyve alınıyor.

**İlk alınan meyvenin armut, diğerlerinden birinin elma, birinin portakal olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{5}{11}$

**5-A** **6-B** **7-C** **8-A**

**9.** 6 kişilik bir öğrenci grubundan 2 kişi matematik dersinden geçmiştir.

**Bu öğrencilerden arka arkaya 3 öğrenci çağrılırsa sadece üçüncü öğrencinin matematikten geçmiş olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

**10.** Bir para ve bir zar birlikte atılıyor.

**Paranın tura ve zarın 4 ten büyük gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{7}$

**11.** Bir torbada 4 kırmızı, 6 mavi top vardır. Bu torbadan arka arkaya, yerine koymaksızın 4 top çekiliyor.

**Çekilen toplardan en az ikisinin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{25}{41}$ B) $\frac{26}{35}$ C) $\frac{37}{42}$ D) $\frac{21}{23}$ E) $\frac{26}{27}$

**12.** n, 4 ten büyük bir tamsayıdır. Bir torbada 1 den n ye kadar olan tüm doğal sayıların yazılı olduğu n tane kart vardır.

**Torbadan geriye atılmaksızın art arda çekilen iki kartın üstündeki sayılardan ikincisinin birincisinden büyük olan ardışık iki sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{n-1}{n}$ B) $\frac{2n-1}{3n}$ C) $\frac{n}{n+1}$ D) $\frac{2}{n}$ E) $\frac{3}{n}$

**9-A** **10-B** **11-C** **12-D**

**13.** Bir A torbasında 4 beyaz, 3 kırmızı; bir B torbasında ise 3 beyaz, 4 kırmızı top vardır. Bir zar atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayı 3 ten küçük ise A torbasından, değil ise B torbasından bir top çekiliyor.

**Buna göre, çekilen topun beyaz olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{8}{21}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{10}{21}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{20}{21}$

**14.** Düzgün bir para üç defa atılıyor.

**İki defa yazı, bir defa tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{8}$

**15.** Bir torbada 3 mavi, 6 kırmızı top vardır. Bu torbadan çekilen bir topun yerine siyah bir top konmaktadır.

**Peş peşe iki top çekildiğinde iki topun da farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $\frac{15}{28}$ D) $\frac{13}{27}$ E) $\frac{9}{14}$

**16.** Sadece mavi ve kırmızı bilyelerin bulunduğu bir kavanozdaki mavi bilyelerin sayısının, kırmızı bilyelerin sayısına oranı $\frac{2}{3}$ tür. Bu kavanozdan aynı anda ve rastgele iki bilye çekiliyor.

**Çekilen bilyelerin aynı renkte olma olasılığı $\frac{7}{15}$ olduğuna göre, bu kavanozda kaç bilye vardır?**

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

**13-C** **14-C** **15-A** **16-B**

**17.** $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek, rakamları farklı 3 basamaklı sayılardan biri seçiliyor.

**Seçilen sayının 5 ile tam bölünemeyen bir sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{25}{36}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{11}{36}$ E) $\frac{5}{36}$

**18.** Bir zar 5 defa atılıyor.

**Sadece iki defa 3 gelme olasılığı kaçtır?**

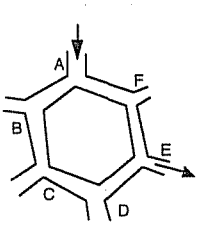
A) $\frac{125}{6^5}$ B) $\frac{625}{6^5}$ C) $\frac{125}{6^4}$ D) $\frac{625}{1296}$ E) $\frac{625}{3888}$

**19.** Bir torbada 12 beyaz, 6 siyah top vardır. Torbadan bir top çekilmekte, beyaz ise torbaya geri konmakta, siyah ise çekilen topla, 3 siyah top daha torbaya konmaktadır. Daha sonra bir top çekiliyor.

**Bu topun beyaz olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{20}{63}$ B) $\frac{40}{63}$ C) $\frac{10}{23}$ D) $\frac{5}{23}$ E) $\frac{5}{18}$

**20.** **Şekildeki gibi bir labirentte kullandığı yolu bir daha kullanmamak koşuluyla A kapısından giren bir çocuğun E kapısından çıkma olasılığı kaçtır?**




A) $\frac{7}{64}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{5}{32}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{16}$

**21.** Bir atıcının bir hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

**Atıcının bu hedefi en çok üç atışta vurma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{22}{27}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{26}{27}$

**22.** **Bir madeni para art arda beş kez atıldığında iki kez yazı, üç kez tura geldiği bilindiğine göre, ilk ve son atışta tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

**23.** Bir torbada 3 kırmızı, 3 siyah, 3 beyaz, 3 mavi top vardır. Bu torbadan arka arkaya, yerine koymaksızın 3 top çekiliyor.

**Buna göre, çekilen topların farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{32}{43}$ B) $\frac{39}{49}$ C) $\frac{27}{55}$ D) $\frac{30}{59}$ E) $\frac{33}{64}$

**24.** 6 kız, 5 erkek öğrencinin bulunduğu bir gruptan bir voleybol takımı yapılacaktır.

**Bu takımda eşit sayıda kız ve erkek öğrenci bulunacağına göre, takımda kızlardan Ayşe'nin olması, Can'ın olmaması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{1}{30}$

**17-A** **18-E** **19-B** **20-C**

**21-E** **22-B** **23-C** **24-C**

# OLASILIK

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $P(M \cap N) = 1 - P((M \cap N)')$

$\Rightarrow P(M \cap N) = 1 - P(M' \cup N')$

$\Rightarrow P(M \cap N) = 1 - \frac{7}{9} \Rightarrow P(M \cap N) = \frac{2}{9}$ ,

$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$

$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{7}{18} + P(N) - \frac{2}{9} \Rightarrow P(N) = \frac{13}{18}$ ,

$P(N') = 1 - P(N) = 1 - \frac{13}{18} \Rightarrow P(N') = \frac{5}{18}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** İki rakamın toplamının tek sayı olması için; birisinin tek sayı, diğerinin de çift sayı olması gerekir. Buna göre,

$$P(T, Ç) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5.4}{\frac{9.8}{2!}} = \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**3.** $P(Y, Y, Y, Y, T) + P(Y, Y, Y, Y, Y)$

$= \frac{1}{32} \cdot \frac{5!}{4!} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**4.** **1. Yol:**

$P(T \cup S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(Sarıya boyanan yüzlerden üzerinde tek sayı olan bir yüz (1) var.)

**2. Yol:**

E = { B(2), B(3), B(5), S(1), S(4), S(6) }

istenen olay: A = { B(3), B(5), S(1), S(4), S(6) }

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{5}{6}$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**5.** En az ikisinin aynı renkte olma olayına A denilirse, A' olayı üçünün de farklı renkte olması olayıdır. Buna göre,

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3!$

$\Rightarrow P(A) = \frac{19}{28}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**6.** Çekilen sayının asal olması olayı A, 3 ün katı olması olayı da B olsun.

A = { 2, 3, 5, 7, 11, 13 } , B = {3, 6, 9, 12, 15 }

$A \cap B = \{3\}$ olduğundan

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{6}{15} + \frac{5}{15} - \frac{1}{15} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Veya istenilen olay M olmak üzere,

M = { 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15 } ve

$P(M) = = \frac{s(M)}{s(E)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** Paraların farklı gelmesi olayı A, zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9 dan büyük olması olayı B olsun.

A = { YT, TY } ise $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ,

B → 10 , 11 , 12

↓ ↓ ↓

Adet: 3 2 1 $\qquad P(B) = \frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6}$

olduğundan,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** AEP veya APE olma olasılığı

$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot 2! = \frac{1}{11}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** Matematikten geçme olayı M, geçmeme olayı da M′ olsun. O halde,

$P(M', M', M) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$ tir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** Paranın tura gelme olasılığı $\left(\frac{1}{2}\right)$, zarın 4'ten büyük {5, 6} gelme olasılığı $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ tür.

Buna göre; paranın tura ve zarın 4'ten büyük gelme olasılığı: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ dır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** MMM′M′ veya MMMM′ veya MMMM

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}+\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{1}+\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}$$

$$= \frac{15 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 15}{210} = \frac{37}{42} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** İstenilen durumlar:
(1, 2); (2, 3); (3, 4); ... , (n − 1, n) olup n − 1 tane olduğundan;

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.** $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{10}{21}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**14.** YYT → $\frac{3!}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** MM′ veya KK′

$\frac{3}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**16.** Mavi bilyelerin sayısına (2x) denilirse, kırmızı bilyelerin sayısı (3x) olur. Torbadan çekilen iki bilyenin aynı renkte olma olasılığı $\frac{7}{15}$ ise, farklı renklerde olma olasılığı $\frac{8}{15}$ tir.

Buna göre,

MK → $2! \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \frac{3x}{5x-1} = \frac{8}{15} \Rightarrow x = 2$ ve

torbadaki bilyelerin sayısı $2x + 3x = 10$ dur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**17.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
rakamlarıyla yazılabilecek üç basamaklı, rakamları farklı sayılar:

$\underset{\uparrow}{6} \cdot P(6, 2) = 6 \cdot 6 \cdot 5$

1,2,3,4,5,6
(1. iş)

5 ile bölünemeyen sayılar:

$\underset{\uparrow}{5} \quad 5 \quad \underset{\uparrow}{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5$

Birler basamağına yazılan rakam ve 0 dışındaki beş rakam(2. iş) — 1,2,3,4,6 (1. iş)

olduğundan, istenilen olayın olasılığı:

$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{25}{36}$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**18.** 3 gelme olayı A, 3 gelmeme olayı $A'$ olsun. Buna göre,

$$AAA'A'A' \rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5!}{2!.3!}$$

$$= \frac{625}{3888} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** BB veya $B'B$

$$\frac{12}{18} \cdot \frac{12}{18} + \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{21}$$

$$= \frac{40}{63} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**20.** A - F - E veya A - B - C - D - E yollarını kullanır,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**21.** En çok üç atışta vurma olayına A denilirse, üç atışta da vuramama olayı $A'$ olur. Buna göre,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**22.** Bir madeni para beş kez atıldığında iki kez yazı, üç kez tura geldiği durumların sayısı (örnek uzayın eleman sayısı),

$$YYTTT \rightarrow \frac{5!}{2!.3!} = 10 \text{ ve}$$

ilk ve son atışta tura geldiği durumların sayısı (istenilen olayın eleman sayısı),

$$\boxed{T}IY\underline{Y}\boxed{T} \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

olduğundan istenilen olayın olasılığı, $\frac{3}{10}$ dur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**23.** Torbadan üç çekiliş yapılacak ve torbadaki farklı renkteki topların adetleri aynı olduğundan 1. çekilişte; rastgele bir renk gelme ihtimali kesin ihtimal olduğundan 1 dir.

2. çekilişte; ilk çekilen topun rengine göre farklı renkte bilye sayısı 9 tane olduğundan bunun çekilme olasılığı $\frac{9}{11}$ dir.

3. çekilişte; 1. ve 2. çekilişe göre farklı renkte bilye sayısı 6 tane olduğundan bunun çekilme olasılığı $\frac{6}{10}$ dur.

Çarpma kuralı gereği bu olasılığın gerçekleşme olasılığı

$$1.\ \frac{9}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{27}{55} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**24.** 3 kız, 3 erkek olma koşuluyla

$\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3}$ farklı voleybol takımı oluşturulur.

Bu koşula göre, kız öğrencilerden Ayşe'nin olması ve erkek öğrencilerden Can'ın olmaması durumu

$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3}$ olur.

O halde, istenen olayın ihtimali

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3}} = \frac{10.4}{20.10} = \frac{1}{5} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# OLASILIK

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** A ve B, E örnek uzayında iki olaydır.

$12.P(A) = 5$

$2.P(B) = 1$

$4.P(A \cup B) = 3$

**olduğuna göre, $P(A \cap B)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

**2.** M ve N, E örnek uzayında ayrık iki olaydır.

$P(M' \cap N') = \frac{1}{6}$

$P(N) = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, $P(M) + P(N')$ kaçtır?**

A) $\frac{13}{12}$ B) $\frac{11}{9}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{5}{4}$

**3.** A ve B, E örnek uzayında iki olaydır.

$P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

$P(A - B) = \frac{1}{5}$

**olduğuna göre, $P(B')$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{4}{5}$

**4.** Bir deney için a, b ve c gibi üç ayrı çıktı vardır. Sonucun b olma olasılığı a olma olasılığının 3 katı, c olma olasılığı da a olma olasılığının 4 katıdır.

**Buna göre, sonucun b olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

**5.** **Düzgün bir madeni para art arda 7 kez atıldığında üçünün yazı dördünün tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{35}{128}$ C) $\frac{21}{64}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{21}{32}$

**6.** **Bir çift hilesiz zar atıldığında zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 8 den büyük veya tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{23}{36}$ E) $\frac{11}{18}$

**7.** **Bir çift hilesiz zar atıldığında zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının tek sayı veya asal sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{11}{36}$

**1-D** **2-D** **3-B** **4-C** **5-B** **6-E** **7-E**

**8.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

rakamları arasından iki tanesi seçiliyor.

**Bu iki rakamın çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{18}$

**9.** Bir sınıfta 6 erkek ve 6 kız öğrenci vardır. Bu sınıftan rastgele 3 öğrenci seçiliyor.

**Seçilen öğrencilerden ikisinin kız birinin erkek olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{9}{22}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{7}{22}$

**10.** Bir torbada bulunan 11 bilyeden 5 tanesi kırmızıdır.

**Torbadan rastgele 4 tane bilye seçildiğinde yalnız 3 tanesinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{5}{11}$

**11.** Üç madeni para düzgün bir zemine atılıyor.

**Paralardan birinin tura birinin yazı geldiği bilindiğine göre, diğerinin de tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**8-E** **9-A** **10-B** **11-C**

**12.** Bir elbise dolabında pantolon ve ceketten oluşan 4 değişik bedende takım elbiseler vardır.

**Bu dolaptan seçilen bir pantolon ve bir ceketin bir takım elbise oluşturma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{11}$ D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{24}$

**13.** Bir torbada bulunan 5 anahtardan bir tanesi kapıyı açmaktadır. Torbadan çekilen bir anahtar kapıya denendikten sonra tekrar torbaya atılıyor.

**Kapının en fazla üç denemede açılma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{125}$ B) $\frac{4}{125}$ C) $\frac{21}{125}$ D) $\frac{61}{125}$ E) $\frac{71}{125}$

**14.** Bir torbada mavi, kırmızı ve beyaz renklere boyanmış üç tane zar vardır. Bu torbadan rastgele bir zar alınıp atılıyor.

**Zarın beyaz veya üst yüze gelen sayının çift sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

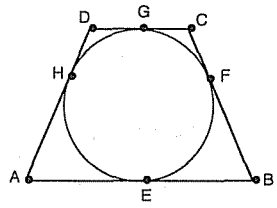
**15.** 9 resimden 7 si bir duvara asılacaktır.

**Belli iki resmin yan yana asılmış olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

**12-B** **13-D** **14-B** **15-E**

**16.** Yandaki şekilde ABCD yamuğu ve buna iç teğet olan çember verilmiştir.




**A, B, C, D, E, F, G, H noktalarından seçilen üç noktadan yalnız ikisinin hem çembere hem de yamuğa ait olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

**17.** İki torbadan birincisinde 4 beyaz, 2 siyah top; ikincisinde 3 siyah top vardır. Torbaların birincisinden rastgele bir top çekilip ikinci torbaya atılıyor.

**İkinci torbadan rastgele seçilen bir topun beyaz gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

**18.** Bir sınıftaki öğrencilerin 16 sı kız, 12 si erkektir. Kızların 10 u, erkeklerin ise 8 i matematik dersinden sınıfını geçmiştir.

**Bu sınıftan rastgele seçilen iki öğrencinin matematikten kaldığı bilindiğine göre, ikisinin de erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{4}{15}$

**16-C** **17-C** **18-D**

**19.** A kutusunda 2 beyaz, 3 siyah bilye; B kutusunda ise 3 beyaz, 2 siyah bilye vardır. Her iki kutudan da birer bilye rastgele alınıyor.

**Alınan bu bilyelerin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{6}{25}$ B) $\frac{12}{25}$ C) $\frac{13}{25}$ D) $\frac{14}{25}$ E) $\frac{16}{25}$

**20.** İçerisinde kırmızı ve mavi kalem bulunan bir kalem kutusundaki kırmızı kalemlerin sayısı, mavi kalemlerin sayısından 2 fazladır.

**Bu kutudan aynı anda ve rastgele alınacak iki kalemin farklı renklerde olma olasılığı $\frac{8}{15}$ olduğuna göre, kutudaki kırmızı kalemlerin sayısı en çok kaç olabilir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

**21.** **Bir para ve bir zar birlikte atıldığında paranın yazı gelmesi veya zarın üst yüzüne gelen sayının 4 ten büyük olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

**22.** Reel sayı doğrusu üzerinde A(x , 0) ve B(y, 0) noktaları $-5 \le x \le 1$ ve $1 \le y \le 6$ olacak şekilde rastgele seçiliyor.

**Buna göre, A ve B noktaları arasındaki uzaklığın 6 ya eşit veya büyük olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{7}{22}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{5}{36}$

**19-C** **20-C** **21-E** **22-B**

# OLASILIK

TEST - 2 (Çözümleri)

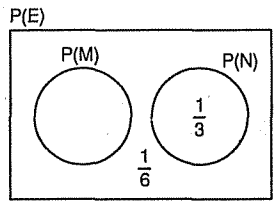
**1.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5}{12} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ dır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.**




$P(M' \cap N') = \frac{1}{6} \Rightarrow P((M \cup N)') = \frac{1}{6}$ veriliyor.

$P(M) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$P(M) + P(N') = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ dır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $P(B) = P(A \cup B) - P(A - B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

olduğundan, $P(B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ tir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**4.** $P(b) = 3 \cdot P(a)$, $P(c) = 4 \cdot P(a)$

$\Rightarrow 4 \cdot P(b) = 12 \cdot P(a) = 3 \cdot P(c) = 12 \cdot k$

$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow k + 3k + 4k = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{8}$ ve

$P(b) = 3k = \frac{3}{8}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** YYYTTTT $\rightarrow \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**6.** Toplam : 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12

Adet : 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

İstenilen olayın olasılığı,

$\frac{2+4+6+4+3+2+1}{36} = \frac{11}{18}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**7.**

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | ② | ③ | 4 | ⑤ | 6 |
| 2 | ② | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | ③ | 6 | ⑨ | 12 | ⑮ | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | ⑤ | 10 | ⑮ | 20 | ㉕ | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

O : İstenilen durumlar (11 adet) olmak üzere, $\frac{11}{36}$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** Çarpımın tek sayı olması için, seçilen iki rakamın da tek sayı olması gerekir. Buna göre,

$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5.4}{9.8} = \frac{5}{18}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15.6}{\frac{12.11.10}{3.2.1}} = \frac{9}{22}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $P(K, K, K, K') = \dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{11}{4}}$

$= \dfrac{10.6}{\dfrac{11.10.9.8}{4.3.2.1}} = \dfrac{2}{11}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** $E = \{ TYY, YTY, YYT, YTT, TYT, TTY \}$
$A = \{ YTT, TYT, TTY \}$ ise

$P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $\dfrac{4}{\binom{4}{1}\binom{4}{1}} = \dfrac{1}{4}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** Kapının açılması olayı A, açılmaması olayı da $A'$ olsun. Buna göre, istenen durumlar
A veya $AA'$ veya $A'A'A$ dır.

$\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{61}{125}$ tir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** Zarın beyaz olması olayı B, üst yüze gelen sayının çift olma olayı Ç olsun. Buna göre,
$P(B \cup Ç) = P(B) + P(Ç) - P(B \cap Ç)$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** 7 resimden belli ikisinin yan yana asıldığı durumlar,



$\longrightarrow \binom{7}{5}.6!.2!$

Kalan 7 resimden 5 tanesi

olduğundan istenilen olayın olasılığı:

$\dfrac{\binom{7}{5}.6!.2!}{\binom{9}{7}.7!} = \dfrac{7.6.6!.2!}{9.8.7!} = \dfrac{1}{6}$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** İstenilen olay: E, F, G, H noktalarından ikisinin; A, B, C, D noktalarından da birisinin seçilmesi olayı olduğundan bu olayın olma olasılığı

$\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{3}{7}$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**17.** İstenilen olay birinci torbadan da ikinci torbadan da beyaz topun çekilmesi olayıdır. Buna göre,

$B_I B_{II} \Rightarrow \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**18.** Problemde verilenlere göre, kızların 6 sı, erkeklerin de 4 ü matematikten kaldığına göre, matematikten kalan toplam $4 + 6 = 10$ öğrenci arasından seçilen iki öğrencinin de erkek olma olasılığı,

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4.3}{10.9} = \frac{2}{15} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**19.** $A_b B_s$ veya $A_s B_b$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$ tir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**20.** Kırmızı kalemlerin sayısına x denilirse mavi kalemlerin sayısı $(x - 2)$ ve kutudaki kalemlerin toplam sayısı $(2x - 2)$ olur.
Problemde verilenlere göre,

$$2! \cdot \frac{x}{2x-2} \cdot \frac{x-2}{2x-3} = \frac{8}{15} \quad (KM \rightarrow 2!)$$

$\Rightarrow 15(x^2 - 2x) = 4(2x - 2)(2x - 3)$
$\Rightarrow 15(x^2 - 2x) = 8(x - 1)(2x - 3)$
$\Rightarrow 15x^2 - 30x = 16x^2 - 40x + 24$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$
$\Rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 4$ veya $x_2 = 6$ olduğundan kırmızı kalemlerin sayısı (x) en çok 6 olabilir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

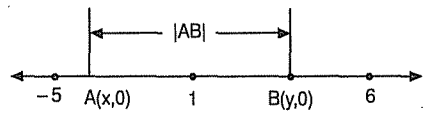
**21.** Paranın yazı gelmesi olayı Y, zarın üst yüzüne gelen sayının 4 ten büyük olması olayı D ile gösterilirse paranın yazı gelmesi veya zarın üst yüzüne gelen sayının 4 ten büyük olması olayı $(Y \cup D)$ olur.

Buna göre,
$P(Y \cup D) = P(Y) + P(D) - P(Y \cap D)$

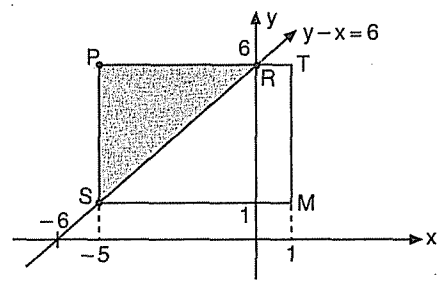
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**22.** Reel sayı doğrusu üzerine verilenleri yerleştirelim.




$|AB| \geq 6$ olacağından $y - x \geq 6$ olacak şekilde $y - x \geq 6$ eşitsizliğini analitik düzlemde gösterelim.




Şekildeki PSMT dikdörtgenin içindeki noktalardan sadece $y - x \geq 6$ eşitsizliğini sağlayan noktalar PSR üçgeninin içindeki noktalardır.

O halde n(E) = Alan (PSMT) ve n(A) = Alan($\widehat{PSR}$) olacağından $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\frac{5.5}{2}}{6.5} = \frac{5}{12}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# OLASILIK

TEST - 3

**1.** 10 limondan 4 ü çürüktür.

**Bu limonlardan seçilen bir limonun sağlam olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

**2.** **4 erkek, 3 kız öğrenci arasından seçilen 2 öğrenciden birinin erkek diğerinin kız olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

**3.** A = { 0, 2, 3, 5, 6, 7 } kümesinden iki sayı seçiliyor.

**Seçilen sayıların ikisinin de çift sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

**4.** Bir kutuda 4 beyaz, 3 mavi top vardır.

**Çekilen bir topun mavi olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

**1-D** **2-E** **3-B** **4-C**

**5.** Bir torbadaki mavi topların sayısı, beyaz topların sayısından 4 fazladır.

**Torbadan çekilen bir topun beyaz olma olasılığı $\frac{3}{7}$ olduğuna göre, torbadaki mavi topların sayısı kaçtır?**

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

**6.** Bir torbada 4 siyah, 5 beyaz top vardır.

**Geri bırakılmamak şartı ile, bu torbadan art arda çekilen iki toptan birisinin siyah, diğerinin beyaz olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{18}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{20}{81}$

**7.** Bir atıcının bir hedefi vurma olasılığı $\frac{3}{5}$ tir.

**Atıcı iki atış yaptığında sadece ikinci atışta hedefi vurma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{25}$ B) $\frac{6}{25}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{8}{25}$ E) $\frac{9}{25}$

**8.** Bir soruyu Gamze ve Tuğba'nın çözebilme olasılıkları sırasıyla $\frac{3}{5}$ ve $\frac{2}{3}$ tür.

**Buna göre, bu sorunun bu iki kişinin en az biri tarafından çözülebilme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{13}{15}$

**5-B** **6-D** **7-B** **8-E**

**9.** İçinde 4 sarı ve 5 mavi top bulunan bir torbadan rastgele 2 top seçiliyor.

**Seçilen toplardan en az birinin sarı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $\frac{11}{18}$ E) $\frac{13}{18}$

**10.** Bir zar ile bir madeni para birlikte atılıyor.

**Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı veya paranın yazı gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**11.** 5 evli çift arasından rastgele 2 kişi seçiliyor.

**Seçilen bu kişilerin eş (karı-koca) olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

**12.** **4 evli çift arasından seçilen 1 erkek ve 1 bayanın eş** (karı-koca) **olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

**9-E** **10-C** **11-A** **12-C**

**13.** Bir futbolcunun attığı bir penaltıyı gole çevirme olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

**Bu futbolcunun attığı 3 penaltıdan 2 sini gole çevirme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{4}{27}$ E) $\frac{4}{9}$

**14.** Bir sınıftaki öğrencilerin % 40 ı kızdır. Kızların % 80 i, erkeklerin ise % 60 ı resim dersinden başarılıdır.

**Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin erkek veya resim dersinden başarılı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{25}$ B) $\frac{9}{25}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{23}{50}$ E) $\frac{23}{25}$

**15.** İki zar aynı anda atılıyor.

**Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{36}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{18}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{1}{2}$

**16.** **Bir çift zar atıldığında birincinin 4 ten küçük geldiği bilindiğine göre, toplamlarının 4 ün katı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{6}$

**13-E** **14-E** **15-A** **16-B**

**17.** İki zar ile iki madeni para düzgün bir zemine atılıyor.

**Paraların farklı veya zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9 dan büyük gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{3}{8}$

**18.** 6 kişilik bir öğrenci grubundan 2 kişi matematik dersinden geçmiştir.

**Bu öğrencilerden arka arkaya 3 öğrenci çağrılırsa üçüncü öğrencinin matematikten geçmiş olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

**19.** Bir zar art arda 2 kez atılıyor.

**Birincinin üst yüzüne çift sayı geldiği bilindiğine göre, toplamlarının 5 olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{2}{9}$

**20.** Bir zar iki kez atılıyor.

**Üst yüze gelen sayıların çarpımının tek sayı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

**21.** 2 mavi, 3 kırmızı topun bulunduğu bir torbadan art arda iki top çekilecektir.

**Çekilen top torbaya geri atılmak şartıyla, çekilen iki topun da mavi olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{25}$ B) $\frac{9}{25}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{5}$

**22.** Bir öğretmenin elinde 4 zor, 2 kolay soru bulunan 6 zarf vardır. Öğretmen öğrencisine 2 zarf seçmesini söylüyor.

**Öğrencinin 1 zor, 1 kolay soru zarfı seçmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

**23.** A torbasında 3 mavi 2 kırmızı, B torbasında 1 mavi 3 kırmızı top bulunmaktadır. A torbasından rastgele çekilen bir top B torbasına atılıyor.

**Bundan sonra, B torbasından rastgele çekilecek bir topun mavi olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{3}{25}$ C) $\frac{6}{25}$ D) $\frac{8}{25}$ E) $\frac{12}{25}$

**17-C** **18-A** **19-D** **20-B** **21-A** **22-B** **23-D**

**25.** Bir sınıfın % 60 ı kız öğrencidir. Kızların % 20 si gözlüklüdür.

**Buna göre, rastgele seçilen bir öğrencinin gözlüklü kız öğrenci olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{50}$ B) $\frac{3}{25}$ C) $\frac{2}{25}$ D) $\frac{1}{40}$ E) $\frac{1}{20}$

**26.** **5 kız, 4 erkek öğrenci arasından seçilen iki öğrenciden birinin kız öğrenci, diğerinin erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{28}$ B) $\frac{4}{27}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

**27.** Bir kutuda 7 siyah, 8 kırmızı kalem vardır. Bu kutudan alınan kalem tekrar kutuya konmak şartıyla iki kalem alınıyor.

**Buna göre, alınan ikinci kalemin kırmızı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{11}{15}$ E) $\frac{13}{15}$

**28.** **Sıfırdan 73 e kadar olan doğal sayılardan rastgele alınan bir sayının 7 ile tam bölünebiliyor olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{11}{74}$ B) $\frac{10}{73}$ C) $\frac{5}{35}$ D) $\frac{5}{73}$ E) $\frac{11}{35}$

**25-B** **26-D** **27-C** **28-A**

**29.** $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$

**kümesinin içerisinden rastgele alınan bir sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre, bu sayının 5 ile tam bölünebilen bir sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

**30.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesindeki rakamlar kullanılarak rakamlar tekrarsız yazılabilecek bütün iki basamaklı doğal sayılar birer karta yazılıp bir torbaya atılıyor.

**Torbadan rastgele bir kart çekildiğinde üzerindeki sayının 9 ile tam bölünebilmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{18}$

**31.** A ve B bağımsız iki olaydır.

$$P(B') = \frac{5}{8} \quad \text{ve} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

**olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{16}$

**32.** İçinde İrem'inde bulunduğu 10 öğrenciden üç tanesi geziye gönderilecektir.

**İrem'in geziye gönderilme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

**29-D** **30-D** **31-C** **32-A**

**33.** Bir torbada 6 beyaz, 6 siyah zar vardır. Torbadan rastgele alınan bir zar havaya atılıyor.

**Zarın beyaz renkli veya zarın tek sayı gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{8}$

**34.** Üç para aynı anda atılıyor.

**Paralardan en az birinin tura gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

**35.** İki torbadan birincisinde 1 siyah 2 beyaz, ikincisinde ise bir kısmı beyaz toplam 7 tane bilye vardır.

**Birinci torbadan rastgele bir bilye alınıp ikinci torbaya atıldıktan sonra ikinci torbadan alınan bir bilyenin beyaz olması olasılığı $\frac{17}{24}$ olduğuna göre, ikinci torbada kaç tane beyaz bilye vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**36.** 1 den 9 a kadar numaralandırılmış kartlardan geri bırakılmamak şartıyla iki kart alınıyor.

**Birinci kartın 4 ten büyük ikinci kartın 5 ten küçük olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{11}{81}$ B) $\frac{7}{18}$ C) $\frac{5}{18}$ D) $\frac{11}{18}$ E) $\frac{5}{81}$

**37.** Bir grupta 3 kız, 2 erkek öğrenci vardır.

**Bu gruptan seçilen 2 öğrencinin ikisinin de kız olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

**38.** **Bir çift zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayıların çarpımının asal sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**39.** 3, 4, 5

rakamları kullanılarak yazılabilecek üç basamaklı bütün sayıların her biri birer karta yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor.

**Bu torbadan rastgele çekilen bir kart üzerinde yazılı olan sayının tek sayı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**40.** 2 siyah, 3 mavi topun bulunduğu bir torbadan iki top çekilecektir.

**Çekilen top torbaya geri atılmamak şartıyla art arda yapılan iki çekilişte, sadece ikinci topun siyah gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{2}{5}$

**33-B** **34-E** **35-D** **36-C**

**37-A** **38-B** **39-E** **40-D**

# OLASILIK

TEST - 4

**1.** **İki madeni para birlikte atılıyor, ikisinin de farklı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**2.** **İki zar aynı anda atılıyor, zarların farklı gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{5}{6}$

**3.** **Bir madeni para ve bir zar birlikte atılıyor; zarın dört, paranın yazı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{6}$

**4.** $A = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**kümesinden rastgele bir sayı seçiliyor, seçilen sayının asal sayı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

**5.** 3 kız, 4 erkek öğrencinin bulunduğu yedi kişilik bir grup düz bir sıraya dizileceklerdir.

**Bu dizilişte kızların birlikte olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{6!}$ D) $\frac{1}{7!}$ E) $\frac{3}{7!}$

**6.** **Yirmi dokuz harften oluşan Türk alfabesinden aynı anda rastgele iki harf seçiliyor, ikisinin de sesli harf olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{29}$ B) $\frac{3}{29}$ C) $\frac{8}{29}$ D) $\frac{21}{29}$ E) $\frac{25}{29}$

**7.** $A = \{3, 6, 9, 12, ..., 27\}$

**A kümesinin elemanlarından rastgele bir sayı seçiliyor, seçilen sayının 3 ile bölünebildiği halde, 2 ile bölünemeyen bir sayı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

**8.** x, y, z pozitif tamsayıdır.

$x + y = 8$
$y + z = 6$

**olduğuna göre, x + z toplamının 12 olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**1-A** **2-E** **3-C** **4-B** **5-B** **6-A** **7-E** **8-D**

**9.** "E R H A N"

kelimesinin harfleri birer kez kullanılmak üzere yazılabilecek beş harfli kelimelerden rastgele bir tanesi seçiliyor.

**Bu kelimenin "HANER" olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{120}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{1}{32}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{8}$

**10.** m, n ve k birer rakamdır.

$$m + n + k = 5$$

eşitliğini sağlayan rakamları farklı bütün üç basamaklı **mnk** doğal sayıları kartlara yazılıp bir torbaya atılıyor.

**Torbadan rastgele alınan kartın üzerindeki sayının 10 a tam bölünebilmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

**11.** K = {1, 2, 3, a, b, c}

kümesinin alt kümelerinden herhangi biri rastgele seçiliyor.

**Seçilen kümenin içerisinde "3" ve "a" elemanlarının birlikte bulunması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

**12.** T A P T A Z E

**kelimenin harfleri kullanılarak yazılabilecek yedi harfli kelimelerden rastgele alınan bir kelimede her A harfinden sonra T harfinin gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{21}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{15}$

**13.** Bir torbada 3 kırmızı, 5 beyaz, 1 siyah top vardır.

**Torbadan art arda çekilen 3 topun en az birinin kırmızı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{16}{21}$ E) $\frac{21}{25}$

**14.** **Bir para 4 kez atıldığında ikisinin tura, ikisinin yazı gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{8}$

**15.** Bir zar ile bir para birlikte atılıyor.

**Zarın çift geldiği bilindiğine göre, paranın tura gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**16.** İki para ve bir zar birlikte atılıyor.

**Paraların ikisinin de tura, zarın 3 veya 5 gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{12}$

**9-A** **10-A** **11-C** **12-C**

**13-D** **14-C** **15-A** **16-E**

**17.** Bir grup öğrenciden seçilen iki öğrenciden birincinin erkek, ikincinin kız olma olasılığı $\frac{1}{4}$ tür.

**Erkek öğrencilerin sayısının kız öğrencilerin sayısına oranı $\frac{1}{2}$ ise grupta toplam kaç öğrenci vardır?**

A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

**18.** **Bir çift zar atıldığında zarlardan birinin 2 geldiği bilindiğine göre, toplamların 7 olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{5}{11}$ E) $\frac{6}{11}$

**19.** Birinci torbada 3 sarı, 2 mavi renkli mendil, ikinci torbada ise 4 sarı 3 mavi renkli mendil vardır. Birinci torbadan bir mendil alınıp rengine bakmadan ikinci torbaya konuyor. Daha sonra ikinci torbadan bir mendil alınıp birinci torbaya konuyor.

**İlk baştaki durumun elde edilmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{21}{40}$ B) $\frac{22}{40}$ C) $\frac{23}{40}$ D) $\frac{24}{40}$ E) $\frac{25}{40}$

**20.** Bir zarın bir yüzü mavi, iki yüzü yeşil ve geri kalan yüzleri de sarı renktedir.

**Zarı üç kez attığımızda üçünün de farklı renkte olan yüzlerinin gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{36}$ E) $\frac{1}{6}$

**21.** İçinde; 4 yeşil, 3 kırmızı, 2 sarı bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekiliyor.

**Üçünün de aynı renkte olması olasılığı kaçtır?**

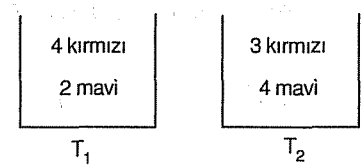
A) $\frac{2}{13}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{4}{25}$ D) $\frac{5}{42}$ E) $\frac{5}{84}$

**22.** 2, 4, 3, 5

**sayılarının ikisini rastgele seçecek olan bir çocuğun seçeceği iki sayının 4 ten farklı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

**23.**




Kırmızı ve mavi bilyelerin bulunduğu şekildeki $T_1$ ve $T_2$ torbalarından bir tanesi rastgele seçiliyor, daha sonra seçilen torbadan rastgele bir bilye seçiliyor.

**Seçilen bilyenin mavi olduğu bilindiğine göre, bu bilyenin $T_2$ torbasından seçilmiş olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{13}{15}$ D) $\frac{12}{19}$ E) $\frac{4}{19}$

**24.** 5 madeni para düz bir zemine aynı anda atılıyor.

**Üç tanesinin yazı, iki tanesinin tura gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{3}{32}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{11}{16}$

**17-C** **18-A** **19-C** **20-E**

**21-E** **22-A** **23-D** **24-D**

# OLASILIK

TEST - 5

**1.** Bir sınıfta 40 kız ve 20 erkek öğrenci vardır. Erkeklerin sayısının yarısı ve kızların sayısının $\frac{3}{4}$ ü gözlüklüdür.

**Rastgele seçilen iki öğrencinin ikisinin de gözlüksüz kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{47}$ B) $\frac{2}{59}$ C) $\frac{3}{118}$ D) $\frac{5}{118}$ E) $\frac{1}{2}$

**2.** **Bir zar art arda iki kez atıldığında üst yüze gelen sayıların çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**3.** 2 siyah, 3 mavi topun bulunduğu bir torbadan iki top çekilecektir.

**Çekilen top torbaya geri atılmamak şartıyla art arda yapılan iki çekilişte, sadece ikinci topun siyah gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{2}{5}$

**4.** Bir zar bir kez atılıyor.

**Üst yüze gelen sayının çift sayı olduğu bilindiğine göre, bu sayının 2 olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

**5.** **3 kız, 3 erkek öğrenci arasından rastgele seçilen 2 öğrenciden ikisinin de aynı cinsiyetten olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{4}{5}$

**6.** A ve B bağımsız iki olaydır.

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{ve} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

**olduğuna göre, P(B) kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{5}{6}$

**7.** İki madeni para ve iki zar birlikte atılıyor.

**Paralardan en az birinin tura ve zarlardaki sayılar toplamının 5 ten küçük olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{16}$

**8.** **Bir torbada bulunan 10 siyah, 6 kırmızı toptan; rastgele üç top çekiliyor, iki tanesinin siyah ve bir tanesinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{23}{28}$ B) $\frac{25}{56}$ C) $\frac{15}{28}$ D) $\frac{27}{56}$ E) $\frac{33}{56}$

**1-C** **2-C** **3-D** **4-C** **5-B** **6-C** **7-A** **8-D**

**9.** Bir kutuda bulunan 4 mavi, 5 kırmızı, 6 yeşil kalemden rastgele iki kalem çekiliyor.

**Buna göre, en az birinin mavi olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{13}{21}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{11}{21}$ E) $\frac{10}{21}$

**10.** Kırmızı torbada 3 kırmızı, 5 beyaz, beyaz torbada 2 kırmızı, 1 beyaz top vardır.

**Rastgele alınan bir torbadan seçilen bir topun torbayla aynı renkte olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{19}{48}$ B) $\frac{17}{48}$ C) $\frac{15}{48}$ D) $\frac{13}{48}$ E) $\frac{11}{48}$

**11.** Bir torbada 1 den 8 e kadar numaralandırılmış sekiz tane kart vardır.

**Rastgele alınan bir karttaki numaranın 3 ten büyük olduğu bilindiğine göre, tek sayı olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

**12.** Bir zarın üç yüzüne F, iki yüzüne E, bir yüzüne M harfi yazılıyor.

**Bu zar art arda üç kez atılıyor ve sırasıyla F, E, M harflerinin gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

**9-E** **10-B** **11-C** **12-E**

**13.** Aralarında Hatice'nin de bulunduğu 4 kız ve 5 erkek öğrenciden oluşan 9 kişilik bir gruptan, 6 kişilik bir voleybol takımı oluşturulacaktır.

**Eşit sayıda kız ve erkek öğrencinin bulunduğu bu takımda Hatice'nin bulunmaması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

**14.** **Boyutları 3 cm ve 4 cm olan bir dikdörtgen zemine yukarıdan bırakılan bir böceğin, dikdörtgenin köşelerinden en fazla 1 cm uzaklıkta olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**15.** Yedi farklı numaralı olan yedi çift ayakkabının bulunduğu kutudan ard arda iki tane ayakkabı seçiliyor.

**Seçilen bu ayakkabı çiftinin giyilebilir olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{8}{13}$

**16.** $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$

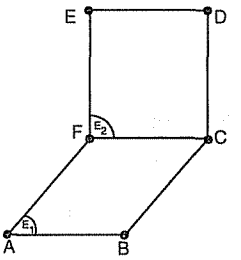
kümesinin elemanlarının herbiri özdeş beş tane topun üzerine yazılıyor ve toplar bir torbaya konuyor. Alınan bir top geri bırakılmamak şartı ile hepsi çekiliyor.

**Çekilen topların küçükten büyüğe doğru çekilmiş olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{40}$ B) $\frac{1}{60}$ C) $\frac{1}{75}$ D) $\frac{1}{90}$ E) $\frac{1}{120}$

**13-D** **14-A** **15-C** **16-E**

**17.** A, B, C, D, E, F noktaları, $E_1$ ve $E_2$ düzlemlerine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.




**Altı noktadan rastgele seçilen iki noktadan yalnızca birinin $E_1 \cap E_2$ doğrultusunda olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

**18.** A torbasında 1 kırmızı, 2 yeşil, 3 beyaz, 4 mavi ve 5 siyah, B torbasında ise 1 kırmızı ve 2 siyah top vardır. A torbasından rastgele alınan top rengine bakılmaksızın B torbasına atılıyor.

**Daha sonra B torbasından alınan topun kırmızı top olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{6}{35}$ D) $\frac{11}{60}$ E) $\frac{15}{42}$

**19.** **İki basamaklı pozitif bir tamsayının karesi alınıyor, elde edilen sayının birler basamağının 4 olması olasılığı kaçtır?**

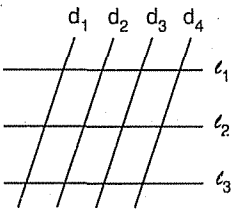
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{9}$

**20.** **Dördü pozitif, üçü negatif yedi tane reel sayıdan rastgele üç sayı seçiliyor; seçilen sayılar çarpımı negatif olduğuna göre, seçilen üç sayınında negatif olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{19}$ D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{21}$

**17-C** **18-A** **19-D** **20-C**

**21.** Şekildeki yedi tane doğrudan herhangi dört tanesi seçiliyor.




**Seçilen doğruların paralel kenar oluşturması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{7}{35}$ B) $\frac{17}{35}$ C) $\frac{18}{35}$ D) $\frac{24}{35}$ E) $\frac{27}{35}$

**22.** A torbasında 3 kırmızı, 2 yeşil, B torbasında 2 kırmızı, 3 yeşil bilye vardır. Bir zar atılıyor, zar 4 ten büyük gelirse A torbasından bir bilye, diğer durumlarda B torbasından bir bilye çekiliyor.

**Buna göre, çekilen bilyenin yeşil renkli olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{14}{15}$

**23.** **Bir çift zar atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 8 olduğu bilindiğine göre, zarların en az birinin asal sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{11}{12}$

**24.** Üç ikizin bulunduğu 14 kişilik bir sınıftan 4 öğrenci seçiliyor.

**Seçilenler arasında 1 tane ikizi olan öğrenci bulunduğuna göre, seçilecek 5. öğrencinin bu ikizin eşi olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{11}$ D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{5}{12}$

**21-C** **22-B** **23-D** **24-A**

# OLASILIK

TEST - 6

**1.** A ve B, E örnek uzayının iki olayıdır.

$P(A \cup B) = \frac{11}{15}$ ve $P(A) + P(B) = \frac{9}{10}$

**olduğuna göre, $P(A \cap B)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

**2.** Bir kutuda 3 mavi, 4 kırmızı, 5 yeşil top vardır.

**Bu kutudan rastgele çekilen bir topun kırmızı veya yeşil olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

**3.** 2 idareci ve 4 öğretmen, yuvarlak bir masa etrafında toplantı yapacaklardır.

**İdarecilerin yanyana gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

**4.** Bir sınıftaki 10 kişiden 4 ü gözlüklüdür.

**Bu sınıftan seçilen 2 öğrencinin ikisinin de gözlüksüz olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

**5.** **Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 7 den küçük olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{7}{18}$ E) $\frac{1}{6}$

**6.** Bir sepetteki 8 elmadan 3 ü çürüktür.

**Bu sepetten aynı anda, gelişi güzel alınan üç elmadan <u>en az birinin</u> sağlam olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{55}{56}$ B) $\frac{25}{28}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{2}{3}$

**7.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulabilecek üç basamaklı, rakamları tekrarsız sayıların her biri, birer karta yazılıp kartlar bir torbaya atılıyor.

**Torbadan rastgele alınan bir kartta yazılı olan sayının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

**8.** 5 kız, 4 erkek öğrenci arasından 3 kişilik bir ekip oluşturulacaktır.

**Ekipteki öğrencilerden ikisinin kız, birinin erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{21}$ B) $\frac{10}{21}$ C) $\frac{5}{42}$ D) $\frac{5}{84}$ E) $\frac{1}{14}$

1-D 2-D 3-B 4-E

5-C 6-A 7-B 8-B

**9.** Bir madeni para ve bir zar art arda atılıyor.

**Paranın yazı ve zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

**10.** Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor.

**Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı veya paranın tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**11.** **Bir çift zar atıldığında, üst yüze gelen sayılardan <u>en az birinin tek sayı</u> olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

**12.** 5 mavi, 5 kırmızı ve 5 sarı bilyenin bulunduğu bir torbadan, çekilen bilye tekrar torbaya atılmak şartıyla, art arda 3 bilye çekiliyor.

**Çekilen 3 bilyenin üçünün de aynı renk olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{4}{75}$ D) $\frac{8}{75}$ E) $\frac{71}{75}$

**13.** Bir torbada 5 mavi, 4 kırmızı ve 3 sarı bilye vardır.

**Bu torbadan aynı anda ve rastgele alınan üç bilyeden ikisinin mavi diğerinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{22}$ B) $\frac{3}{22}$ C) $\frac{2}{11}$ D) $\frac{3}{11}$ E) $\frac{5}{11}$

**14.** Bir kutuda 3 kırmızı, 4 mavi, 5 beyaz bilye vardır. Bu kutudan çekilen bilye tekrar kutuya atılarak art arda üç bilye çekiliyor.

**<u>En az iki</u> tanesinin aynı renk olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{19}{24}$ B) $\frac{23}{24}$ C) $\frac{21}{22}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{8}{11}$

**15.** Biri kırmızı, diğeri beyaz olan iki zar atılıyor.

**Kırmızı zarın üst yüzüne gelen sayının, beyaz zarın üstüne gelen sayı ile çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

**16.** Bir A torbasında 3 beyaz 4 kırmızı, bir B torbasında 4 beyaz 3 kırmızı top vardır. A torbasından rengine bakılmaksızın bir top çekilerek B torbasına atılıyor. Sonra B torbasından bir top çekiliyor.

**B torbasından çekilen topun kırmızı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{15}{16}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{25}{56}$ D) $\frac{33}{56}$ E) $\frac{35}{56}$

**9-C** **10-E** **11-D** **12-A**

**13-C** **14-A** **15-D** **16-C**

**17.** Bir sınıfta 8 erkek, 5 kız öğrenci vardır. Sınıftan art arda iki öğrenci seçiliyor.

**İkinci öğrencinin erkek olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{7}{33}$ B) $\frac{9}{26}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $\frac{11}{15}$ E) $\frac{7}{11}$

**18.** Üç zar arka arkaya atılıyor.

**Üç atışta da birbirinden farklı sayı gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{34}{33}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

**19.** Bir zarın üç yüzünde A, üç yüzünde T harfi yazılıdır.

**Bu zar üç kez art arda atıldığında sırasıyla A, T, A harflerinin gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

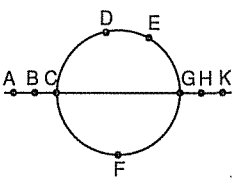
**20.** **5 tane madeni para atıldığında 2 tura, 3 yazı gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{32}$ B) $\frac{15}{64}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{7}{32}$ E) $\frac{1}{128}$

**21.** **Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayılardan bir tanesi 4 olduğuna göre toplamlarının asal sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{7}{36}$ C) $\frac{4}{36}$ D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{1}{3}$

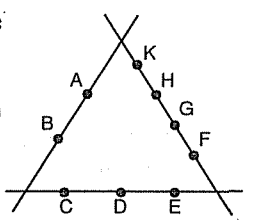
**22.** **Şekildeki A, B, C, D, E, F, G, H, K noktalarından seçilen iki noktanın ikisinin de çember üzerinde olma olasılığı kaçtır?**




A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{5}{6}$

**23.** Şekildeki 9 noktadan üç nokta seçiliyor.

**Seçilen noktaların üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?**




A) $\frac{16}{21}$ B) $\frac{36}{42}$ C) $\frac{69}{74}$ D) $\frac{74}{79}$ E) $\frac{79}{84}$

**24.** E = {A, B, C} olmak üzere,

A, B, C olayları ikişer ikişer bağımsız olaylar olmak üzere E kümesi eş olumlu örnek uzaydır.

**Buna göre, $P(A \cap B) + P(B \cap C)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

**17-C** **18-B** **19-C** **20-C**

**21-D** **22-A** **23-E** **24-C**

# OLASILIK

TEST - 7

**1.** Bir torbadaki on bilyeden üçü aynı renkte, diğerleri bunlardan ve birbirlerinden farklı renktedir.

**Torbadan aynı anda ve rastgele çekilen iki bilyenin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{14}{15}$

**2.** $\beta = \{ (x, y) \mid x + 2y = 15,\ x \text{ ve } y \text{ rakam} \}$

**bağıntısının elemanları içinden rastgele seçilen bir (x, y) ikilisinde, x in y den küçük olmaması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{7}$

**3.** $A = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$

kümesindeki rakamlarla yazılabilecek dört basamaklı ve rakamları farklı bütün doğal sayılar birer karta yazılıyor ve bu kartlar bir torbaya atılıyor.

**Bu torbadan rastgele çekilen bir kartın üzerindeki sayının 5 ile tam bölünebilen bir sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

**4.** Bir grup öğrencinin % 30 u ela gözlü, % 40 ı siyah saçlı ve % 15 i hem ela gözlü, hem de siyah saçlıdır.

**Bu gruptan seçilen bir öğrencinin siyah saçlı olduğu bilindiğine göre, ela gözlü olmama olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

**5.** Bir torbada 3 siyah, 4 mavi ve 3 kırmızı bilye vardır.

**Torbadan aynı anda ve rastgele alınan üç bilyenin üçünün de farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

**6.** Bir torbada 3 sarı, 4 beyaz top vardır.

**Torbadan, geri konulmamak üzere, art arda çekilen 2 topun farklı renkte olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{14}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{4}{7}$

**7.** Bir torbada 4 kırmızı, 6 mavi top vardır. Bu torbadan arka arkaya, yerine koymaksızın 3 top çekiliyor.

**Çekilen toplardan ikisinin kırmızı, diğerinin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{7}{11}$

**8.** 10 kişilik bir sınıftaki bütün öğrenciler Matematik veya Fizik derslerinin en az birinden başarılı olmuşlardır. 6 kişi Matematik dersinden, 4 kişi de hem Matematik hem de Fizik dersinden başarılı olmuştur.

**Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin Fizik dersinden başarılı olmuş olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

**1-E** **2-D** **3-B** **4-A** **5-C** **6-E** **7-A** **8-E**

**9.** **Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan 7 kişilik bir aile, yuvarlak bir masa etrafında oturduğunda en küçük çocuğun anne ve babasının arasında olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

**10.** İki torbadan birincisinde 3 mavi 4 sarı, ikincisinde 2 mavi 5 sarı top vardır.

**Birinci torbadan bir top alınıp rengine bakılmadan ikinci torbaya atıldıktan sonra ikinci torbadan çekilen bir topun mavi olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{9}{56}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{17}{56}$ E) $\frac{1}{2}$

**11.** Bir deneyin bütün çıktılarının kümesi E = {a, b, c} dir.

$P(a) = 3 \cdot P(c)$

$P(c) = \frac{1}{8} \cdot P(b)$

**olduğuna göre, $P(a \cup c)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**12.** A ve B aynı örnek uzayda iki olaydır.

$P(A') = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

**olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{3}{4}$

**9-B** **10-D** **11-B** **12-E**

**13.** Bir torbada 4 ü kırmızı, 6 sı beyaz, 8 i yeşil olmak üzere, aynı büyüklükte 18 bilye vardır.

**Bu torbadan rastgele alınan bir bilyenin kırmızı ya da beyaz renkte olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{18}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{2}{10}$

**14.** **5 evli çift arasından rastgele seçilen bir erkek ve bir bayanın, birbirinin eşi olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

**15.** **Beş seçenekli üç sorunun cevap anahtarından en az iki cevabın aynı harf olması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{12}{25}$ B) $\frac{13}{25}$ C) $\frac{14}{25}$ D) $\frac{16}{25}$ E) $\frac{17}{25}$

**16.** Bir avcının bir hedefi vurabilme olasılığı $\frac{1}{3}$ tür.

**Hedefe üç atış yapan bu avcının aynı hedefi sadece 3. atışta vurabilme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{27}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{4}{27}$ E) $\frac{8}{27}$

**13-A** **14-C** **15-B** **16-D**

# OLASILIK

**TEST - 8**

**1.** A ve B, E örnek uzayının iki olayıdır.

$$P(A) + P(B') = \frac{5}{6} \quad ve \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

**olduğuna göre, P(E – A) kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{1}{2}$

**2.** 6 öğretmen ve 2 öğrencinin bulunduğu bir gruptan 3 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır.

**Komisyonun tüm elemanlarının öğretmen olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{3}{14}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{15}$

**3.** İçerisinde kırmızı ve beyaz renkli toplam 12 tane top bulunan bir torbadan aynı anda 2 tane top çekiliyor.

**Çekilen bu topların her ikisinin de kırmızı renkli olma olasılığı $\frac{1}{11}$ olduğuna göre, torbadaki topların kaç tanesi beyazdır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**4.** Türkiye, Norveç'le veya İngiltere ile futbol maçı yapacaktır. Türkiye'nin; Norveç'i yenme olasılığı % 55, İngiltere'yi yenme olasılığı % 25 tir. Türkiye'nin Norveç ile karşılaşma olasılığı % 40, İngiltere ile karşılaşma olasılığı % 60 tır.

**Buna göre, Türkiye'nin bu iki ülkeden biriyle yaptığı bir maçı kazanma olasılığı yüzde kaçtır?**

A) 35 B) 37 C) 39 D) 41 E) 43

**1-D** **2-A** **3-E** **4-B**

**5.** Bir zarın bir yüzü sarı, bir yüzü kırmızı, iki yüzü beyaz, diğer yüzleri de mavi renktedir. Bu zar 3 kez atılıyor.

**Üç atış sonunda zarın bir kez sarı, bir kez kırmızı ve bir kez beyaz yüzü üzerine düşme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{24}$

**6.** **Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 8 den büyük olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{18}$

**7.** Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor.

**Zarın 3 ten küçük ve paranın yazı gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**8.** Dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına 10, içine de 5 ağaç dikilmiştir. Ağaçlardan ikisi meyve ağacıdır.

**Buna göre, meyve ağaçlarının bahçenin içinde olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{21}$ B) $\frac{2}{21}$ C) $\frac{5}{21}$ D) $\frac{15}{21}$ E) $\frac{20}{21}$

**5-D** **6-E** **7-E** **8-B**

**9.** Aralarında Ali ve Veli'nin de bulunduğu 12 kişilik bir gruptan 5 kişilik bir takım kurulacaktır.

**Kurulacak bu takımda hem Ali'nin hem de Veli'nin bulunmaması olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{5}{33}$ B) $\frac{28}{33}$ C) $\frac{7}{22}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{12}$

**10.** İki torbadan birincisinde 3 mavi, 5 yeşil; ikincisinde ise 2 mavi, 6 yeşil top vardır. Bir zar atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayı 4 ten büyük olursa birinci torbadan 5 ten küçük olursa ikinci torbadan bir top çekiliyor.

**Buna göre, çekilen topun mavi gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

**11.** 10 evli çiftten oluşan bir gruptaki her bireyin adı soyadı birer karta yazılıyor ve bu kartlar bir torbaya atılıyor.

**Torbadan rastgele çekilen iki karttaki isimlerin aynı çifte ait olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{19}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{2}{19}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{2}{15}$

**12.** Bir torbada 1 den 7 ye kadar numaralandırılmış 7 tane top vardır.

**Torbadan rastgele çekilen iki toptan birinin 4 numaralı top olduğu bilindiğine göre, toplamlarının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{21}$

**13.** İki avcının bir hedefi vurabilme olasılıkları sırası ile $\frac{3}{5}$ ve $\frac{2}{7}$ dir. Bu iki avcı hedefe birer atış yapıyorlar.

**Bu iki avcıdan sadece birinin bu hedefi vurma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{19}{35}$ C) $\frac{18}{35}$ D) $\frac{17}{35}$ E) $\frac{16}{35}$

**14.** Bir torbada 3 kırmızı, 4 yeşil ve 5 mavi bilye vardır. Bu torbadan aynı anda 3 bilye çekiliyor.

**En az iki tanesinin aynı renk olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{8}{11}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{11}{13}$

**15.** Bir sınıftaki öğrencilerin % 40 ı fizikten, % 30 u kimyadan geçmiştir. Her iki dersten geçenler sınıfın %10 u dur.

**Sınıftan rasgele seçilen bir öğrencinin fizikten kaldığı bilindiğine göre, kimyadan geçmiş olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**16.** **Aynı anda atılan üç madeni paranın üçünün birden aynı olmadığı bilindiğine göre, birinin yazı diğerlerinin tura gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**9-C** **10-A** **11-A** **12-A**

**13-B** **14-C** **15-D** **16-D**

**17.** **Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 8 den küçük ve asal sayı olduğu bilindiğine göre, zarlardan birinin 3 gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{4}{13}$

**18.** **3 subay ve 3 erin yuvarlak bir masa etrafına, her iki subayın arasına bir er gelecek şekilde oturma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{3}{10}$

**19.** İki torbadan birincisinde 2 beyaz, 3 mavi; ikincisinde 3 mavi, 4 beyaz top vardır. Birinci torbadan bir top çekilip rengine bakılmadan ikinci torbaya atılıyor. Bundan sonra ikinci torbadan bir top çekilip rengine bakılmadan birinci torbaya atılıyor.

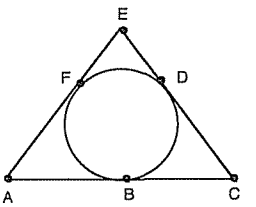
**Renk bakımından başlangıçtaki durumu elde etme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{11}{20}$ B) $\frac{11}{15}$ C) $\frac{21}{23}$ D) $\frac{22}{25}$ E) $\frac{33}{40}$

**20.** **Görüşmek istediği kişinin 7 haneli telefon numarasını kaybeden fakat telefon numarasının 3 tane 5, 2 tane 3 ve 2 tane de 7 den oluştuğunu hatırlayan bir kişinin ilk aramada istediği kişi ile görüşme ihtimali kaçtır?**

A) $\frac{1}{81}$ B) $\frac{1}{120}$ C) $\frac{1}{210}$ D) $\frac{1}{420}$ E) $\frac{1}{720}$

**21.** **Şekildeki A, B, C, D, E, F noktalarından rastgele seçilen herhangi üç noktadan yalnız ikisinin çember üzerinde olma olasılığı kaçtır?**




A) $\frac{7}{20}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{9}{20}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{11}{20}$

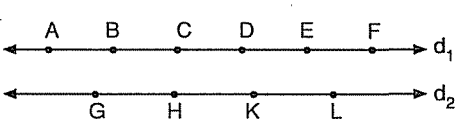
**22.** $M = \{1, 2, 3, 4, A, B, C, D\}$

kümesinin elemanları birer kez kullanılarak ilk ikisi rakam ve son ikisi harf olan, dört haneli şifreler oluşturuluyor. Oluşturulan bütün şifreler birer karta yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor.

**Torbadan rastgele alınan bir karttaki şifrenin 3 ile başlayıp sessiz harfle biten bir şifre olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{3}{64}$ D) $\frac{5}{32}$ E) $\frac{7}{8}$

**23.**




Yukarıdaki şekilde A, B, C, D, E, F noktaları $d_1$ doğrusu, G, H, K, L noktaları da $d_2$ doğrusu üzerinde olup $d_1 \,//\, d_2$ dir.

**A, B, C, D, E, F, G, H, K, L noktaları kullanılarak elde edilebilecek üçgenlerden seçilen bir üçgenin sadece bir noktasının $d_1$ doğrusu üzerinde olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{9}{8}$

**17-E** **18-D** **19-A** **20-C** **21-C** **22-B** **23-A**

# 7. ÜNİTE: TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

## TÜME VARIM YÖNTEMİ

$N_a \subset N^+$ olmak üzere, $N_a = \{ a , a + 1 , ... , a + n, ... \}$ kümesi ve $a \in N_a$ için, n ye bağlı P(n) açık önermesi verilsin.

1. P(a) önermesinin doğruluğu gösterilir.
   (P(n) açık önermesi, $N_a$ kümesinin en küçük elemanı olan $n = a$ için doğru, yani P(a) doğru ise),
2. $k \in N_a$ için, P(k) nın doğruluğu kabul edilip, $k + 1 \in N_a$ için, P(k + 1) in doğruluğu ispatlanırsa, bu önerme $N_a$ kümesinin her elemanı için doğru olur.

Bu yöntemle yapılan ispatlara tüme varım yöntemi ile ispat denir.

**Örnek:**

Her $n \in N^+$ için, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ **olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için, $P(1) : 1 = \frac{1.(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow P(1)$ doğrudur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için,

$P(k + 1) : 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitliğin her iki yanına **k + 1** eklenip gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$1 + 2 + 3 + ... + k + \mathbf{(k + 1)} = \frac{k.(k+1)}{2} + \mathbf{(k + 1)}$$

$$= \frac{k.(k+1) + 2.(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

önermesi elde edilir.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;
$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğru olur.

**Örnek:**

Her $n \in N^+$ için, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ **olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için, $1^2 = \frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2.3}{6} \Rightarrow 1 = 1 \text{ doğru olur.}$$

**2.** $n = k$ için, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için,

$P(k + 1): 1^2 + 2^2 + ... k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitliğin her iki yanına $\mathbf{(k + 1)^2}$ ekleyip gerekli düzenlemeleri yapalım.

$$1^2 + 2^2 + ... \ k^2 + \mathbf{(k + 1)^2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \mathbf{(k + 1)^2}$$

$$= \frac{k.(k+1).(2k+1)+6.(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1).[k.(2k+1)+6.(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

bulunur.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;
$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğru olur.

**Örnek:**

$r \in R$, $r \neq 1$, $r \neq 0$ ve $\forall n \in N^+$ için,

$$1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

**olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için, $P(1) : 1 = \frac{1-r}{1-r} \Rightarrow 1 = 1$ doğru olur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : 1 + r + r^2 + ... + r^{k-1} = \frac{1 - r^k}{1 - r}$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için,

$P(k + 1) : 1 + r + r^2 + ... + r^{k-1} + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitliğin iki tarafına $r^k$ eklenip, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$1 + r + r^2 + ... + r^{k-1} + r^k = \frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k$$

$$= \frac{1 - r^k + r^k - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

bulunur.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;
$\forall n \in N^+$ için, *P(n) önermesi de doğrudur.*

**Örnek:**

$\forall n \in N^+$ için,

$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n + 1) = \frac{n.(n + 1).(n + 2)}{3}$

**olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

1. $n = 1$ için, $P(1) : 1.(1 + 1) = \frac{1.(1 + 1).(1 + 2)}{3}$

$$\Rightarrow 1.2 = \frac{2.3}{3} \Rightarrow 2 = 2 \text{ doğru olur.}$$

**2.** $n = k$ için,

$P(k) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k.(k + 1) = \frac{k.(k + 1).(k + 2)}{3}$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için,

$P(k + 1) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (k + 1).(k + 2)$

$$= \frac{(k + 1).(k + 2).(k + 3)}{3}$$

olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitliğin her iki yanına **(k + 1).(k + 2)** ekleyip gerekli işlemleri yapalım.

$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k.(k + 1) + \mathbf{(k + 1).(k + 2)}$

$$= \frac{k.(k + 1).(k + 2)}{3} + \mathbf{(k + 1).(k + 2)}$$

$$= \frac{k.(k + 1).(k + 2) + 3.(k + 1).(k + 2)}{3}$$

$$= \frac{(k + 1).(k + 2).(k + 3)}{3} \text{ olur.}$$

Bu ise, P(k + 1) in doğru olduğunu gösterir.

O halde; $\forall n \in N^+$ için, P(n) de doğrudur.

**Örnek:**

$\forall n \in N^+$ için,

$1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! = (n + 1)! - 1$

**olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için, $P(1) : 1.1! = (1 + 1)! - 1$

$$1 = 2! - 1$$

$1 = 2 - 1 \Rightarrow 1 = 1$ doğru olur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : 1.1! + 2.2! + ... + k.k! = (k + 1)! - 1$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için,

$P(k + 1) : 1.1! + 2.2! + ... + (k + 1).(k + 1)! = (k + 2)! - 1$

olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitliğin her iki yanına **(k + 1).(k + 1)!** ekleyip gerekli düzenlemeleri yapalım.

$1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + k.k! + \mathbf{(k + 1).(k + 1)!}$

$$= (k + 1)! - 1 + \mathbf{(k + 1).(k + 1)!}$$

$$= (k + 1)! \cdot (1 + k + 1) - 1$$

$= (k + 2)! - 1$ elde edilir.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;
$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğrudur.

**Örnek:**

**$n \geq 4$ için, $n! > 2^n$ olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

$P(n) : n! > 2^n$ ve

$N_4 = \{ 4 , 5 , 6 , ... \}$ olduğundan,

**1.** $n = 4$ için, $P(4) : 4! > 2^4 \Rightarrow 24 > 16$ doğru olur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : k! > 2^k$ önermesinin doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için, $P(k + 1) : (k + 1)! > 2^{k+1}$ önermesinin olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitsizliğin iki yanını pozitif **(k + 1)** sayısı ile çarpalım.

$k! > 2^k \Rightarrow \mathbf{(k + 1)} \cdot k! > \mathbf{(k + 1)} \cdot 2^k$

$$\Rightarrow (k + 1)! > (k + 1)2^k \text{ ... (I)}$$

$k \geq 4$ için, $k + 1 > 2 \Rightarrow (k + 1).\mathbf{2^k} > 2.\mathbf{2^k}$

$$\Rightarrow (k + 1)2^k > 2^{k+1} \text{ ... (II)}$$

(I) ve (II) eşitsizliklerinden,

$(k + 1)! > (k + 1)2^k > 2^{k+1}$

$\Rightarrow (k + 1)! > 2^{k+1}$ olur.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;

$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğru olur.

**Örnek:**

**$\forall n \in N^+$ için, $n! \leq n^{n-1}$ olduğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için $P(1) : 1! \leq 1^{1-1} \Rightarrow 1 \leq 1$ doğru olur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : k! \leq k^{k-1}$ önermesinin doğru olduğunu kabul edip,

$n = k + 1$ için, $P(k + 1) : (k + 1)! \leq (k + 1)^k$ olduğunu gösterelim.

P(k) da eşitsizliğin iki yanını pozitif **(k + 1)** sayısı ile çarpalım.

$k! \leq k^{k-1} \Rightarrow$ **(k + 1)**.$k! \leq$ **(k + 1)**.$k^{k-1}$

$\Rightarrow (k + 1)! \leq k^k + k^{k-1}$

Binom açılımından,

$(k + 1)^k = \binom{k}{0}k^k + \binom{k}{1}k^{k-1} + \binom{k}{2}k^{k-2} + ... + \binom{k}{k}$

ifadesinde ilk iki terimin toplamı $k^k + k \cdot k^{k-1}$ bile $k^k + k^{k-1}$ toplamından büyük olduğundan, $(k + 1)^k > k^k + k^{k-1}$ olduğu kolaylıkla görülür. O halde,

$(k + 1)! \leq k^k + k^{k-1} < (k + 1)^k \Rightarrow (k + 1)! \leq (k + 1)^k$ önermesinin doğru olduğu bulunmuş olur.

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan;

$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğru olur.

**Örnek:**

$\forall n \in N^+$ için, $P(n) = 3^{2n} - 1$ sayısı 8 ile bölünür **önermesini tüme varım yöntemi ile ispatlayalım.**

**İspat:**

**1.** $n = 1$ için, $P(1) : 3^{2.1} - 1 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ doğru olur.

**2.** $n = k$ için, $P(k) : 3^{2k} - 1 = 8m$, $(m \in Z)$ önermesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için, $P(k + 1) : 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k}.3^2 + (8 - 8) - 1$

$= 3^{2k}.9 + 8 - 9$

$= 9(3^{2k} - 1) + 8 = 9.8m + 8$

$(3^{2k} - 1 = 8m)$

$= 8.(9m + 1) = 8.t$ olur.

$(9m + 1 = t,\ t \in Z)$

O halde, P(k + 1) önermesi doğru olduğundan,

$\forall n \in N^+$ için, P(n) önermesi de doğru olur.

## TOPLAM SEMBOLÜ $(\sum)$

$1 + 2 + 3 + ... + n$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ biçimindeki toplamlar, sigma adı verilen $\sum$ sembolü ile gösterilir.

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in R$, $k \leq n$ ve $k, n \in Z$ olmak üzere;

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şeklinde yazılır.

"Toplam k = 1 den n ye kadar $a_k$" diye okunur.

$\sum_{k=m}^{n} a_k$ gösteriminde; **k** $\in Z$ ye **indis** ya da **değişken**, **m** $\in Z$ ye **alt sınır**, **n** $\in Z$ ye de **üst sınır** denir.

**Örnek:**

- $\sum_{k=1}^{51} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{51}$
- $\sum_{k=3}^{15} 3^k = 3^3 + 3^4 + 3^5 + ... + 3^{15}$
- $\sum_{j=5}^{19} j = 5 + 6 + 7 + ... + 19$
- $\sum_{k=1}^{16} k(k+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + ... + 16(16+1)$

**Örnek:**

**$5 + 7 + 9 + ... + 121$ toplamını $\sum$ ile ifade edelim.**

**Çözüm:**

| $2k + 1 = 5$ | $2k + 1 = 121$ |
|---|---|
| $k = 2$ | $k = 60$ |
| (alt sınır) | (üst sınır) |

$5 + 7 + 9 + 11 + ... + 121 = \sum_{k=2}^{60} (2k + 1)$ olur.

**Örnek:**

**$2.4 + 4.6 + 6.8 + ... + 50.52$ toplamını $\sum$ ile ifade edelim.**

**Çözüm:**

Toplamdaki terimler ardışık gelen iki çift sayının çarpımıdır.

$n \in N^+$ olmak üzere, 2n çift sayısının ardışığı (2n + 2) dir.

$2.4 + 4.6 + 6.8 + ... + 50.52 = \sum_{n=1}^{25} 2n(2n + 2)$ olur.

### BAZI TOPLAM FORMÜLLERİ

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. $r \in R-\{0,1\}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

7. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2+2.3+\ldots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

8. $\sum_{k=1}^{n} k.k! = 1.1!+2.2!+3.3!+\ldots+n.n! = (n+1)!-1$

- $\sum_{k=a}^{n} k.k! = (k+1)!-a!$

9. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

**Uyarı:**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \text{ dir.}$$

### TOPLAM SEMBOLÜNÜN ÖZELLİKLERİ

1. $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{n \text{ tane}} = n.c$ $(c \in R)$ dir.

**Örnek:**

- $\sum_{k=1}^{20} 4 = 20.4 = 80$ dir.

- $\sum_{k=0}^{5} 3 = 3+3+3+3+3+3 = 6.3 = 18$ dir.

2. $\sum_{k=1}^{n} c.a_k = c.a_1+c.a_2+\ldots+c.a_n = c\,n\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(c \in R)$ dir.

**Örnek:**

$$\sum_{k=1}^{80} 3k = 3\sum_{k=1}^{80} k = 3.\frac{80.81}{2} = 3.40.81 = 9720 \text{ dir.}$$

3. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mp \sum_{k=1}^{n} b_k$ dir.

**Örnek:**

$\sum_{k=1}^{50} (k^2-2k+5)$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$$\sum_{k=1}^{50} (k^2-2k+5) = \sum_{k=1}^{50} k^2 - 2\sum_{k=1}^{50} k + \sum_{k=1}^{50} 5$$

$$= \frac{50.51.101}{6} - 2.\frac{50.51}{2} + 50.5$$

$$= 40625 \text{ olur.}$$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ $(1<m<n)$ dir.

5. $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r} = \sum_{k=p+r}^{n+r} a_{k-r}$ dir.

6. $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{m} a_{kr}\right) = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kr}\right)$ dir.

## ÇARPIM SEMBOLÜ $(\Pi)$

Aralarında belirli bir kural olan n tane sayının çarpımı, $\Pi$ sembolü ile gösterilir ve "pi" diye okunur.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$, $k \le n$ ve $k, n \in Z$ olmak üzere,

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ biçiminde yazılır. "k = 1 den n ye kadar $a_k$ sayılarının çarpımı" diye okunur.

$\prod_{k=m}^{n} a_k$ gösteriminde; **k** $\in Z$ ye **indis** ya da **değişken**, **m** $\in Z$ ye **alt sınır**, **n** $\in Z$ ye de **üst sınır** denir.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{5} 2k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\prod_{k=1}^{5} 2k = (2.1).(2.2).(2.3).(2.4).(2.5) = 2^5.5!$ olur.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{10} k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\prod_{k=1}^{10} k = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 10!$ olur.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{20} 3^k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=1}^{20} 3^k = 3^1 . 3^2 . 3^3 . 3^4 . 3^5 . \ldots . 3^{20}$$

$$= 3^{(1+2+3+\ldots+20)} = 3^{\frac{20.21}{2}} = 3^{210} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

**(1·5) · (2·6) · (3·7) · ... · (9·13) çarpımını $\prod$ sembolü ile ifade edelim.**

**Çözüm:**

$(1.5) \cdot (2.6) \cdot (3.7) \cdot \ldots \cdot (9.13) = \prod_{k=1}^{9} k(k+4)$ olur.

**Örnek:**

**1 · 3 · 5 · ... · 29 çarpımını $\prod$ sembolü ile ifade edelim.**

**Çözüm:**

$2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1$ alt sınır ve

$2n - 1 = 29 \Rightarrow n = 15$ üst sınır olmak üzere,

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 29 = \prod_{k=1}^{15} (2k-1)$ olur.

**ÇARPIM SEMBOLÜNÜN ÖZELLİKLERİ**

1. $\prod_{k=1}^{n} c = \underbrace{c \cdot c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{\text{n tane}} = c^n \quad (c \in R)$ dir.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{30} 2$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\prod_{k=1}^{30} 2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{30 tane}} = 2^{30}$ olur.

2. $\prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$ dır.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{15} 3k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$\prod_{k=1}^{15} 3k = 3^{15} \cdot \prod_{k=1}^{15} k = 3^{15} \cdot 15!$ olur.

3. $\prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k$ dir.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{3} (2k \cdot 3^k)$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=1}^{3} (2k \cdot 3^k) = 2^3 . 3! . 3^{\frac{3.4}{2}} = 2^3 . 3! . 3^6 = 2^3 . 2 . 3 . 3^6$$

$$= 2^4 . 3^7 \text{ olur.}$$

4. $1 < p < n$ olmak üzere,

$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{p} a_k \cdot \prod_{k=p+1}^{n} a_k$ dir.

**Örnek:**

$\prod_{k=5}^{20} \frac{k}{k+1}$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=5}^{20} \frac{k}{k+1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{20}{21} = \frac{5}{21} \text{ olur.}$$

5. $\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p+r}^{n+r} a_{k-r} = \prod_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r}$ dir.

**Örnek:**

$\prod_{k=4}^{63} \log_k (k+1)$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=4}^{63} \log_k (k+1) = \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \ldots \cdot \log_{63} 64$$

$$= \log_4 64$$

$$= \log_4 4^3$$

$$= 3.\log_4 4$$

$$= 3.1 = 3 \text{ olur.}$$

6. $\prod_{k=1}^{n} c^{a_k} = c^{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ dir. $(c \in R)$

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{40} 5^k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=1}^{40} 5^k = 5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{40} = 5^{(1+2+3+\ldots+40)}$$

$$= 5^{\sum_{k=1}^{40} k} = 5^{\frac{40.41}{2}}$$

$$= 5^{820} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{3}} = 4096$ **eşitliğini sağlayan** $n$ **sayısının değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{3}} \cdot \ldots \cdot 2^{\frac{n}{3}} = 4096$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}(1+2+3+\ldots+n)} = 2^{12} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{n.(n+1)}{2} = 12$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 6 \cdot 12$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 72 \Rightarrow n = 8 \text{ olur.}$$

**7.** $\prod_{k=p}^{n} a_k = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{p-1} a_k}$ dir. $(1 < k < p-1)$

**Örnek:**

$\prod_{k=11}^{100} k$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=11}^{100} k = \frac{\prod_{k=1}^{100} k}{\prod_{k=1}^{10} k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10} = \frac{100!}{10!} \text{ olur.}$$

**8.** $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$ $(b_k \neq 0)$ dır.

**Örnek:**

$\prod_{n=1}^{3} \frac{n}{n^2+1}$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{n=1}^{3} \frac{n}{n^2+1} = \frac{\prod_{n=1}^{3} n}{\prod_{n=1}^{3} (n^2+1)} = \frac{1.2.3}{(1+1).(4+1).(9+1)}$$

$$= \frac{3}{5.10} = \frac{3}{50} \text{ olur.}$$

**9.** $\prod_{k=1}^{m} \left(\prod_{p=1}^{n} a_{kp}\right) = \prod_{p=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{m} a_{kp}\right)$ dir.

**Örnek:**

$\prod_{k=1}^{20} \left[\prod_{r=1}^{3} (k-1).r\right]$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm 1:**

$$\prod_{k=1}^{20} \left[\prod_{r=1}^{3} (k-1).r\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{20} \left[(k-1)^3.3!\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{20} \left[(k-1)^3.6\right]$$

$$= 6^{20} \cdot (1-1)^3 \cdot (2-1)^3 \cdot (3-1)^3 \cdot \ldots \cdot (20-1)^3 = 0 \text{ olur.}$$

**Çözüm 2:**

$$\prod_{k=1}^{20} \left[\prod_{r=1}^{3} (k-1).r\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{3} \left[\prod_{k=1}^{20} (k-1).r\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{3} \left[(1-1) \cdot (2-1) \cdot \ldots \cdot (20-1) \cdot r^{20}\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{3} [0] = 0 \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$\prod_{k=2}^{n-5} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{20}$$

**olduğuna göre, n nin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$\prod_{k=2}^{n-5} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=2}^{n-5} \left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n-5}{n-4} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2}{n-4} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow n - 4 = 40$$

$$\Rightarrow n = 44 \text{ olur.}$$

# TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $\sum_{k=-4}^{5} (4k+5)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

**2.** $\sum_{k=0}^{n} (2k+7)=91$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

**3.** $\prod_{k=3}^{10} \left(5+\frac{5}{k}\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{55}{3}$ B) $\frac{55 \cdot 5^6}{3}$ C) $\frac{55 \cdot 5^7}{3}$

D) $\frac{555}{3}$ E) $\frac{55 \cdot 6^5}{3}$

**4.** $\sum_{k=1}^{4} \sum_{s=1}^{2} (4s-2k+1)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) –12 B) –8 C) 0 D) 16 E) 24

**5.** $\sum_{n=1}^{20} (2+na)=70$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

**6.** $1.3 + 2.4 + 3.5 + ... + 17.19$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1881 B) 2071 C) 2091 D) 2351 E) 2551

**7.** $x^2 - 4x + k^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ dir.

$\prod_{i=1}^{2} x_i = 10$

**olduğuna göre, k kaçtır?**

A) ±3 B) ±4 C) ±5 D) ±6 E) ±7

**8.** $\prod_{k=1}^{n} (5.a_k)=5^{2n}$

**olduğuna göre, $a_6$ kaçtır?**

A) 5 B) $5^3$ C) $5^6$ D) $5^{12}$ E) $5^{24}$

**1-B** **2-E** **3-C** **4-D**

**5-C** **6-C** **7-A** **8-A**

**9.** $f(x)=\prod_{k=1}^{x} k \quad ve \quad g(x)=\sum_{k=1}^{x} k^3$

**olduğuna göre, (g o f)(3) kaçtır?**

A) 484 B) 441 C) 384 D) 324 E) 312

**10.** c reel sayı olmak üzere,

$$\sum_{i=-2}^{7}\left(\prod_{k=5}^{11} c\right)$$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $9.c^7$ B) $9.c^6$ C) $10.c^6$

D) $10.c^7$ E) $10.c^{10}$

**11.** $f(x) = 3x + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2}(x_i-3)f(x_i)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

**12.** $$\prod_{k=2}^{10} 3^{\log\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 9

**9-B** **10-D** **11-E** **12-C**

**13.** $\sum_{i=1}^{n}(y_i+1)=n+1 \quad ve \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)y_i=0$

**olduğuna göre,** $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\alpha$ C) $n\alpha$ D) $\alpha-1$ E) $(n-1)\alpha$

**14.** f ve g: $N \to N$ aşağıdaki biçimde tanımlı iki fonksiyondur.

$$f: x \to \sum_{n=1}^{x} n, \quad g: x \to \sum_{n=1}^{x} n^2$$

**olduğuna göre, (f o g)(2) kaçtır?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

**15.** $$\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=2}^{3}(m^2n-6n)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –20 B) –10 C) 10 D) 20 E) 30

**16.** $\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)=m.n$ **olduğuna göre,** $\sum_{k=1}^{n}(4a_k+2)$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2n(2m + 5) B) 4n(m + 2) C) 4n(m + 3)

D) 2n(2m + 3) E) 3n(4m + 2)

**13-B** **14-D** **15-C** **16-A**

**17.** $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ ve $f(x) = x^2 + 1$ olduğuna göre,

$$\sum_{k=1}^{2} f(2k).(x_k - 2)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 42 B) 46 C) 48 D) 52 E) 56

**18.** 1 den n ye kadar olan n tane doğal sayının kareleri toplamı;

$T = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ dir.

**Bu n tane sayıdan herbiri 1 artırıldığında T ne kadar artar?**

A) n B) $n^2$ C) n(n + 1)

D) n(n – 1) E) n(n + 2)

**19.**

$$\prod_{k=1}^{11} k . \prod_{k=11}^{20} k . \prod_{k=20}^{40} k$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 40! B) 11.40! C) 20.40!

D) 220.40! E) 240.40!

**20.**

$$\sum_{p=1}^{n} p(p^2+5)=66$$

**olduğuna göre,** $\sum_{p=1}^{n} p$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

**21.**

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{41}$ B) $\frac{15}{41}$ C) $\frac{20}{41}$ D) $\frac{29}{41}$ E) $\frac{39}{41}$

**22.**

$$\sum_{x=1°}^{89°} \sin^2 x$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{87}{2}$ D) 44 E) $\frac{89}{2}$

**17-E** **18-E** **19-D** **20-A** **21-C** **22-E**

# TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $\sum_{k=-4}^{5}(4k+5)=\sum_{k=1}^{10}[4(k-5)+5]=\sum_{k=1}^{10}(4k-15)$

$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}15=4.\frac{10.11}{2}-15.10=70$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.** $\sum_{k=0}^{n}(2k+7)=2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}7=91$

$\Rightarrow 2\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).7=91$

$\Rightarrow (n+1)(n+7)=91 \Rightarrow n=6$ dır.

7 13

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $\prod_{k=3}^{10}\left(5+\frac{5}{k}\right)=\prod_{k=3}^{10}\left(\frac{5k+5}{k}\right)=\prod_{k=3}^{10}\left(\frac{5(k+1)}{k}\right)$

$=\frac{5.4}{3}.\frac{5.5}{4}.\frac{5.6}{5}\cdots\frac{5.11}{10}$

$=\frac{5^8.(4.5.6\ldots10.11)}{3.4.5.\ldots10}=\frac{5^8.11}{3}=\frac{55.5^7}{3}$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $\sum_{k=1}^{4}\sum_{s=1}^{2}(4s-2k+1)=\sum_{k=1}^{4}[(4-2k+1)+(8-2k+1)]$

$=\sum_{k=1}^{4}(14-4k)=4.14-4\frac{4.5}{2}=16$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $\sum_{n=1}^{20}(2+na)=\sum_{n=1}^{20}2+a\sum_{n=1}^{20}n=70$

$=2.20+a\frac{20.21}{2}=70$

$\Rightarrow 40+210a=70$

$a=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** $1.3+2.4+\cdots+17.19=\sum_{k=1}^{17}n(n+2)$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{17}(n^2+2n)=\sum_{k=1}^{17}n^2+2\sum_{k=1}^{17}n$

$=\frac{17.18.35}{6}+2\frac{17.18}{2}$

$\Rightarrow$ Sonuç $=17.3.35+17.18=2091$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** $x^2 - 4x + k^2 + 1 = 0$ ise

$x_1 \cdot x_2 = k^2 + 1$

$\prod_{i=1}^{2} x_i = 10 \Rightarrow x_1 . x_2 = 10$

$k^2 + 1 = 10 \Rightarrow k^2 = 9$ ve

$k = \pm 3$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $\prod_{k=1}^{n} (5a_k) = 5^{2n} \Rightarrow 5^n \prod_{k=1}^{n} a_k = 5^{2n}$

ise $\prod_{k=1}^{n} a_k = 5^n$

$n = 1$ için $a_1 = 5$

$n = 2$ için $a_1 . a_2 = 5^2 \Rightarrow a_2 = 5$

$n = 3$ için $a_1 . a_2 . a_3 = 5^3 \Rightarrow a_3 = 5$

Kısaca $a_1 = a_2 = a_3 = .....= a_6 = 5$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** $(gof)(3) = g[f(3)]$

$f(3) = \prod_{k=1}^{3} k = 3! = 6 \Rightarrow g(6) = \sum_{k=1}^{6} k^3 = \left(\frac{6.7}{2}\right)^2 = 441$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** $\sum_{i=-2}^{7} \left( \prod_{k=5}^{11} c \right) = \sum_{i=-2}^{7} c^7 = 10 . c^7$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**11.** $\sum_{i=1}^{2} (x_i - 3).f(x_i) = (x_1 - 3)f(x_1) + (x_2 - 3)f(x_2)$

$= (1 - 3).f(1) + (4 - 3).f(4)$

$= (-2).4 + 1.13$

$= -8 + 13 = 5$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12.** $\prod_{k=2}^{10} 3^{\log\left(\frac{k-1}{k}\right)} = 3^{\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + ..... + \log\frac{9}{10}}$

$= 3^{\log\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} ..... \frac{\cancel{9}}{10}\right)}$

$= 3^{\log\left(\frac{1}{10}\right)} = 3^{-\log 10} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**13.** $\sum_{i=1}^{n}(y_i+1)=\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}y_i+n=n+1$

$\sum_{i=1}^{n}y_i=1$ olur. Diğer yandan

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)y_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i.y_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i.y_i-\alpha.1=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i.y_i=\alpha$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** $(fog)(2)=f[g(2)]$ ve $g(2)=\sum_{n=1}^{2}n^2=5$ ise

$$\Rightarrow (fog)(2)=f[g(2)]=f(5)=\sum_{n=1}^{5}n=\frac{5.6}{2}=15 \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**15.** $\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=2}^{3}(m^2n-6n)=\sum_{k=1}^{4}[(4n-6n)+(9n-6n)]$

$$=\sum_{n=1}^{4}n=\frac{4.5}{2}=10$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**16.** $\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)=mn$ ise $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}2=mn$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k=mn+2n$$

$$\sum_{k=1}^{n}(4a_k+2)=4\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}2=4.(mn+2n)+2n$$

$$=4n(m+2)+2n$$

$$=2n(2m+5)$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17.** $f(x)=x^2+1 \Rightarrow f(2)=5$ ve $f(4)=17$ bulunur.

$x_1=3$ ve $x_2=5$ olduğuna göre,

$$\sum_{k=1}^{2}f(2k).(x_k-2)=f(2)(x_1-2)+f(4)(x_2-2)$$

$$=5.(1)+17.(3)$$

$$=5+51=56 \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**18.** $T=1^2+2^2+.....+n^2$

Burada herbir terimi 1 artırdığımızda

$T'=2^2+3^2+.....+n^2+(n+1)^2$ olur.

$T'=2^2+3^2+.....+n^2+n^2+2n+1$

$T'=\underbrace{1^2+2^2+3^2+.....+n^2}_{T}+n^2+2n=T+n^2+2n$

$T'=T+n(n+2) \Rightarrow$ Artma miktarı $=n(n+2)$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** $\prod_{k=1}^{11} k . \prod_{k=11}^{20} k . \prod_{k=20}^{40} k$

$= (1.2 \ldots\ldots 11)\ (11.12 \ldots\ldots 20)\ (20.21 \ldots\ldots 40)$

$= 11.20\ (1.2.3 \ldots\ldots 40)$

$= 220 \,.\, 40!$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**20.** $\sum_{p=1}^{n} (p^3 + 5p) = \sum_{p=1}^{n} p^3 + 5 \sum_{p=1}^{n} p = 66$

$\Rightarrow \left[\sum_{p=1}^{n} p\right]^2 + 5 \sum_{p=1}^{n} p = 66$ yazılabilir.

$\sum_{p=1}^{n} p = x$ olsun.

$x^2 + 5x = 66$

$x^2 + 5x - 66 = 0$

$(x + 11)(x - 6) = 0$

$x_1 = -11, \quad x_2 = 6$

Pozitif sayıların toplamı negatif olamayacağından cevap: 6 dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{39}} - \frac{1}{41}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{41}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{41} = \frac{20}{41}$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**22.** $\sum_{x=1°}^{89°} \sin^2 x = \sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + \cdots$

$+ \sin^2 87° + \sin^2 88° + \sin^2 89°$

$= \underbrace{\sin^2 1° + \sin^2 2° + \ldots + \sin^2 45° + \ldots + \cos^2 2° + \cos^2 1°}_{1}$

$= 44 + \sin^2 45° = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

# TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TEST - 2

**1.** $\sum_{k=1}^{15} (3k-1)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 245 B) 270 C) 295 D) 345 E) 365

**2.** $k \in Z^+$ ve $5 < k < 21$ olmak üzere,

$11 + 13 + 15 + ... + (2k-1) + ... + 37 + 39$

**toplamının değeri kaçtır?**

A) 295 B) 300 C) 310 D) 345 E) 375

**3.** $\sum_{k=1}^{5} (k^3 + k^2)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 280 B) 290 C) 295 D) 315 E) 345

**4.** $\sum_{k=-3}^{6} (2k+7)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 60 B) 80 C) 100 D) 120 E) 130

**5.** $\sum_{k=3}^{7} (k^2 - 4k)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 25 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

**6.** $\sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{17}{19}$ B) $\frac{18}{19}$ C) $\frac{19}{20}$ D) $\frac{21}{20}$ E) 1

**7.** $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k . k$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –10 B) –5 C) 10 D) 20 E) 30

**8.** $\sum_{k=0}^{7} 2^k + \sum_{i=8}^{14} 2^i$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2^{15} - 1$ B) $2^{14} - 2^7$ C) $2^{14} - 2$

D) $2^{14} - 1$ E) $2^{15}$

**1-D** **2-E** **3-A** **4-C**

**5-B** **6-C** **7-C** **8-A**

**9.** $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = 225$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 29 B) 27 C) 15 D) 13 E) 11

**10.** $\sum_{k=1}^{5} (a+3) = 75$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

**11.** $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-3)$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $n^2$ B) $n^2 - n$ C) $n^2 + 1$

D) $n^2 + n$ E) $n^2 - 1$

**12.** $\sum_{k=1}^{n-2} p = 19.p$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 16 B) 17 C) 19 D) 20 E) 21

**13.** $\sum_{k=-1}^{n-1} (2k+8) = an^2 + bn + c$

**eşitliğinde, a + b + c toplamı kaçtır?**

A) –3 B) –1 C) 0 D) 14 E) 18

**14.** n bir doğal sayıdır,

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 36$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**15.** $\sum_{k=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} (2k - 3i + 4)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**16.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = 3x - 2$ olduğuna göre,

$\sum_{k=1}^{2} x_k . f(k)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

**9-C** **10-B** **11-E** **12-E**

**13-D** **14-C** **15-D** **16-C**

**17.** $\sum_{k=1}^{124} \log_5\left(\frac{k+1}{k}\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**18.** $\prod_{k=1}^{5} (2.k)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2^5$ B) 5! C) $2^5 . 5!$ D) $2^{10}$ E) $2^{15}$

**19.** $\prod_{k=2}^{19} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{19}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

**20.** $\prod_{k=1}^{11} \left(1-\frac{5}{k}\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

**17-C** **18-C** **19-A** **20-A**

**21.** $\prod_{k=1}^{6} (2k-7)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 120 B) 160 C) –180 D) –200 E) –225

**22.** $\prod_{k=1}^{4} 3^k$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $3^5$ B) $3^6$ C) $3^7$ D) $3^9$ E) $3^{10}$

**23.** $\prod_{k=1}^{11} \left(\frac{k}{2}-5\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 9

**24.** $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 27$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

**21-E** **22-E** **23-B** **24-D**

25. $\prod_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{8} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 16 D) 20 E) 24

26. $\prod_{k=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} (k^2 - 1)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 121 B) 100 C) 81 D) 75 E) 64

27. $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = x - 1$ olmak üzere,

$$\prod_{x=1}^{3} (f(x) + g(x))$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 78 B) 64 C) 54 D) 48 E) 28

28. $\prod_{n=7}^{12} \left(\frac{n+2}{n}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{13}{8}$ B) $\frac{13}{4}$ C) $\frac{13}{2}$ D) 13 E) 26

29. $\prod_{k=1}^{2} \prod_{k=1}^{3} 4$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $2^7$ B) $2^8$ C) $2^9$ D) $2^{10}$ E) $2^{12}$

30. $\prod_{n=1}^{2} \prod_{k=1}^{3} \prod_{p=1}^{2} p$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 70 B) 64 C) 60 D) 54 E) 48

31. $\sum_{k=1}^{10} \left(\prod_{n=1}^{50} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 510 B) 1020 C) 1200 D) 1260 E) 1510

32. $\prod_{k=1}^{4} \left(\sum_{k=1}^{3} (k^2 - k)\right) = 2^n$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 7 D) 8 E) 12

25-C 26-A 27-D 28-B

29-E 30-B 31-A 32-E

**33.** $\sum_{p=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{2}(k+p)\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

**34.** $\prod_{n=1}^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\left(\frac{9}{4}\right)^{2-x}$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 39 B) 37 C) 35 D) 33 E) 31

**35.** $x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$ olmak üzere,

$$\prod_{k=1}^{2}(x_k - 1)$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 12

**36.** a ve b tamsayı olmak üzere,

$$\prod_{k=1}^{12} 2.5^{k} = 2^{a}.5^{b}$$

**olduğuna göre, a + b kaçtır?**

A) 92 B) 90 C) 84 D) 80 E) 78

**37.** $\prod_{p=1}^{5}\prod_{k=1}^{3}4$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2^{26}$ B) $2^{30}$ C) $2^{32}$ D) $2^{36}$ E) $2^{40}$

**38.** $f(x) = \prod_{k=1}^{x}(k-2)$ olmak üzere,

$\sum_{k=1}^{3} f(k)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

**39.** $A = \prod_{k=1}^{6} 4^{k+1}$ ve $B = \prod_{k=1}^{5} 2^{k+2}$

**olduğuna göre,** $\frac{A}{B}$ **kaçtır?**

A) $2^{54}$ B) $2^{40}$ C) $2^{29}$ D) $2^{27}$ E) $2^{21}$

**40.** $\prod_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\prod_{p=1}^{2}2$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $2^4$ B) $2^6$ C) $2^8$ D) $2^9$ E) $2^{10}$

**33-D** **34-C** **35-C** **36-B**

**37-B** **38-B** **39-C** **40-B**

# TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TEST - 3

**1.** $\sum_{r=1}^{10}(r+2)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 55 B) 75 C) 85 D) 95 E) 105

**2.** $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k.k^2$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –15 B) –10 C) 0 D) 10 E) 15

**3.** $\sum_{k=-3}^{20} 5k$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1050 B) 1020 C) 1000 D) 950 E) 920

**4.** **1 + 4 + 7 + 10 + .... + 100 toplamı aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?**

A) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ B) $\sum_{k=0}^{15}(3k+1)$ C) $\sum_{k=1}^{10} k^3$ D) $\sum_{k=0}^{10}(3k-1)$ E) $\sum_{k=0}^{33}(3k+1)$

**5.** $\prod_{p=1}^{5} 3.p$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 3 . 5! B) $3^5$ . 5 C) $3^5$ . 5! D) $(3 . 5!)^5$ E) 5 . 3 . 5!

**6.** $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + .... + 2^{10}$

**toplamının sonucu kaçtır?**

A) $2^{10} - 1$ B) $2^{11} - 1$ C) $2^{12} - 2$ D) $2^{13} - 4$ E) $2^{14} - 2$

**7.** $\sum_{a=1}^{n}(2a+1) = 120$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

**8.** $\sum_{k=-1}^{1}\left[k+(-1)^k\right]$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

**1-B** **2-A** **3-B** **4-E**

**5-C** **6-B** **7-C** **8-C**

**9.** $g(x) = (-1)^x . x$ ve $f(x) = \sum_{k=1}^{x} g(k)$

olduğuna göre, f(100) kaçtır?

A) 35 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

**10.** $\prod_{r=1}^{7} 2^r$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $2^{56}$ B) $2^{40}$ C) $2^{32}$ D) $2^{28}$ E) $2^{20}$

**11.** $\prod_{a=1}^{6} \sin(15.a)^\circ$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{32}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

**12.** $\sum_{a=1}^{4} \left( \prod_{b=-1}^{1} c^b . a \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{10}$ C) 1 D) 10 E) 100

**13.** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = x$ ve $\sum_{k=1}^{n} k = y$

olduğuna göre, $\sum_{k=r}^{n+r-1} (k-r)^2$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) x – y B) x – y + n C) x + 2y – n

D) x – 2y + n E) x + y

**14.** $\sum_{r=1}^{x} \left( \sum_{k=1}^{r} 2 \right) = x^2 + 3x - 18$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**15.** $\sum_{a=1}^{4} \left( \ln \left( \prod_{k=1}^{a} e^k \right) \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**16.** $\prod_{r=1}^{3} \left( \sum_{m=1}^{r} \frac{m}{r} \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**9-C** **10-D** **11-D** **12-E**

**13-D** **14-D** **15-C** **16-C**

17. $\prod_{k=2}^{p}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{3}{p+4}$

olduğuna göre, p kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. $\prod_{a=1}^{x} x^a = x^{36}$

olduğuna göre, $\sum_{a=1}^{x}(a-1)$ kaçtır?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

19. $1.3+2.4+3.5+\ldots+10.12$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 465 B) 480 C) 495 D) 509 E) 515

20. $\sum_{k=-2}^{n-3}(3k+9)=18$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

21. $\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) 64 B) 63 C) 32 D) 31 E) 16

22. $\sum_{k=1}^{20} m.k = 420$

olduğuna göre, $\prod_{p=1}^{3} m^p$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 28 B) 64 C) 32 D) 16 E) 8

23. $\sum_{a=-5}^{175}\cos(a+5)^0$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

24. $f(a+b) = f(a)+f(b)$

$f(1)=\frac{1}{2}$

olduğuna göre, $\sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} f(k+r)$ ifadesinin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

17-A 18-A 19-C 20-B

21-B 22-B 23-B 24-B

**25.** $\prod_{k=5}^{25} \sqrt{1+\frac{2k+1}{k^2}}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{26}{5}$ B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{28}{9}$ D) $\frac{29}{10}$ E) $\frac{32}{5}$

**26.** $\prod_{n=1}^{k} 2^{\frac{n}{5}} = 8$

**olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

**27.** $\prod_{k=2}^{n} 2k = (n+1)!$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**28.** $\sum_{p=3}^{7} p.\left(\prod_{k=1}^{p} k\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 6! B) 7! – 4! C) 8! – 4! D) 9! E) 8! – 3!

**29.** $\prod_{n=1}^{100} . \sum_{k=1}^{101} (-1)^k$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) –2 E) 2

**30.** $\prod_{k=10}^{99} \log_k (k+1)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 10 D) 99 E) 990

**31.** $\sum_{p=2}^{3} \prod_{r=1}^{2} p.2^r$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 16 B) 28 C) 37 D) 52 E) 104

**32.** $\sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} (m^2+k+1)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 32 B) 33 C) 37 D) 42 E) 43

**25-A** **26-D** **27-E** **28-E**

**29-C** **30-B** **31-E** **32-E**

**33.** $\sum_{n=1}^{3}\left(\sum_{m=2}^{3}(mn+n)\right)$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 36 B) 39 C) 42 D) 45 E) 48

**34.** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 30$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**35.** $f(x) = 2^x + 2$ olduğuna göre,

$$\sum_{k=1}^{4}(f(k)-f(k-1))$$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

**36.** $\prod_{k=1}^{10} 4^k$ **toplamının sonucu kaçtır?**

A) $2^{110}$ B) $2^{100}$ C) $2^{90}$ D) $2^{70}$ E) $2^{55}$

**33-C** **34-E** **35-E** **36-A**

**37.** **2 + 5 + 8 + ... + 131 toplamı aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?**

A) $\sum_{k=3}^{43}(3k-2)$ B) $\sum_{k=1}^{45}(3k-5)$ C) $\sum_{k=1}^{44}(3k-2)$

D) $\sum_{k=1}^{43}(3k+2)$ E) $\sum_{k=0}^{43}(3k+2)$

**38.** **2 . 4 . 6 . 8 ... 100 çarpımının ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\prod_{k=1}^{50} k$ B) $\prod_{k=1}^{100} k$ C) $\prod_{k=1}^{50}(2k)$

D) $\prod_{k=1}^{100}(2k)$ E) $\prod_{k=1}^{50}(2k+2)$

**39.** $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6 . \sum_{k=1}^{n} k$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**40.** $\prod_{k=1}^{10} 2 + \prod_{k=1}^{4} 2^k + \sum_{k=1}^{8} 128$

**toplamının sonucu kaçtır?**

A) $3 . 2^{10}$ B) $2^{11}$ C) $2^{10}$ D) $5 . 2^{11}$ E) $5 . 2^{10}$

**37-E** **38-C** **39-C** **40-A**

# TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TEST - 4

**1.** $\sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \cdot 2^k$

toplamının sonucu kaçtır?

A) 42 B) 32 C) – 16 D) – 32 E) – 42

**2.** $\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} 4 = 40$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**3.** $\sum_{k=-6}^{6} \left(k^3 + 1\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 441 D) 882 E) 895

**4.** $\prod_{k=1}^{10} 2.5^{\frac{k}{5}}$

sayısı kaç basamaklıdır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

**5.** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{200}{201}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 199 B) 200 C) 201 D) 202 E) 203

**6.** $\sum_{n=x}^{3x} n = 110$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 5 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

**7.** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\prod_{m=1}^{k} m\right) = 719$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**8.** $\sum_{p=1}^{3} \ln\left(\prod_{r=1}^{p} e^{2r}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 12 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

**1-E** **2-E** **3-B** **4-B** **5-B** **6-A** **7-D** **8-C**

**9.** $\sum_{r=1}^{10} r^2 = a$ olmak üzere,

$$\sum_{r=1}^{10} (2r-1)(2r+1)$$

**aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $4a-1$ B) $4a-10$ C) $2a-1$

D) $2a-10$ E) $4a+10$

**10.** **13 ile bölündüğünde 5 kalanını veren iki basamaklı doğal sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sum_{k=1}^{13} (13k+5)$ B) $\sum_{k=1}^{13} (13k-5)$ C) $\sum_{k=1}^{13}$

D) $\sum_{k=1}^{7} (13k+5)$ E) $\sum_{k=1}^{8} 13k+5$

**11.** $$\prod_{k=1}^{2} 1 + \prod_{k=2}^{3} 2 + \prod_{k=3}^{4} 3 + \ldots + \prod_{k=10}^{11} 10$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 55 B) 110 C) 315 D) 385 E) 440

**12.** $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \ldots + 1.2.3 \ldots 10$

**toplam ifadesi aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?**

A) $\sum_{m=1}^{10} \prod_{k=1}^{m} k$ B) $\sum_{m=1}^{10} \prod_{k=n}^{m} k$ C) $\sum_{m=1}^{10} \prod_{k=1}^{n} (k+2)$

D) $\sum_{m=1}^{10} \prod_{k=1}^{10} k$ E) $\prod_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{m} k$

**13.** a ve b pozitif tamsayıdır.

$$\prod_{k=1}^{20} k = 3^a.b$$

**olduğuna göre, a nın alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**14.** $$\sum_{k=0}^{99} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2(x+1)}{3}$$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2^{99}}$ B) $-\frac{1}{2^{100}}$ C) $\frac{1}{2^{99}}$

D) $\frac{1}{2^{100}}$ E) $\frac{1}{2^{101}}$

**15.** $$f(x) = \sum_{k=1}^{x} k \quad \text{ve} \quad g(x) = \prod_{k=1}^{x} k$$

**olduğuna göre,** $\sum_{k=1}^{2} (fog)(k)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

**16.** $$\sum_{m=1}^{2} \sum_{n=2}^{3} m.n.k = 45$$

**olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**9-B** **10-D** **11-D** **12-A**

**13-D** **14-B** **15-A** **16-C**

# 8. ÜNİTE: DİZİLER - SERİLER

## DİZİLER

$A \neq \varnothing$ olmak üzere, $f : N^+ \to A$ tanımlı fonksiyona **dizi** denir. $f(n) = a_n$ ifadesine, dizinin **genel terimi** veya **n . terimi** denir. $A = R$ ise, diziye **reel sayı dizisi** denir. O halde, ***tanım kümesi pozitif tamsayılar*** *(sayma sayıları) olan her* fonksiyona **dizi** denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır.

Bir reel sayı dizisi,

$f = \{ (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ... , (n, a_n), ... \}$ biçiminde veya $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...)$ şeklinde gösterilir. $(a_n)$ şeklindeki gösterilişte her terim sıralıdır, elemanların yerleri değiştirilmez. Burada,

$f(1) = a_1$ : dizinin birinci terimi,

$f(2) = a_2$ : dizinin ikinci terimi,

$f(3) = a_3$ : dizinin üçüncü terimi,

.....

.....

.....

$f(n) = a_n$ : dizinin **n . terimi** veya **genel terimi**

.....

dir.

**Örnek :**

$f : N^+ \to R$, $f(n) = 2n$ *fonksiyonu,*

$( f(1), f(2), f(3), ... , f(n), ... ) = (2, 4, 6, ... , 2n, ...)$ dizisini belirtir. Bu dizinin genel terimi $a_n = 2n$ dir.

### SONLU DİZİLER

$k \in N^+$, $B = \{1, 2, 3, ... , k\}$ ve $B \subset N^+$ olsun. $f : B \to R$ fonksiyonuna veya bu fonksiyonun görüntü kümesindeki sayıların $( f(1), f(2), f(3), ... , f(k) )$ sıralanışına, k terimli **sonlu dizi** denir.

### SABİT DİZİ

$c \in R$, $\forall n \in N^+$ için $a_n = c$ ise, $(a_n) = ( c, c, c, ... , c, ...)$ dizisine **sabit dizi** denir. Yani bütün elemanları birbirine eşit olan diziye sabit dizi denir.

### DİZİLERİN EŞİTLİĞİ

$(a_n)$ ve $(b_n)$ birer dizi olsun.

$\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ ise $(a_n)$ ve $(b_n)$ dizilerine **eşit diziler** denir ve $(a_n) = (b_n)$ biçiminde gösterilir.

O halde, iki dizinin birbirine eşit olması için bu dizilerin genel terimlerinin birbirine eşit olması gerekir.

### DİZİLERDE İŞLEMLER

$(a_n)$ ve $(b_n)$ birer reel sayı dizisi ve k bir reel sayı olsun.

1. $(a_n)$ ve $(b_n)$ dizilerinin toplamı veya farkı:
$$(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$$

2. k reel sayısı ile $(a_n)$ dizisinin çarpımı:
$$k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$$

3. $(a_n)$ ve $(b_n)$ dizilerinin çarpımı:
$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

4. $(a_n)$ dizisinin $(b_n)$ dizisine bölümü:
$\forall n \in N^+$ için $b_n \neq 0$ olmak üzere,
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ dir.}$$

### ALT DİZİ

$\forall n \in N^+$ için, $k_n \in N^+$ ve

$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < ... < k_n < k_{n+1}$ olmak üzere,

$(a_n)$ dizisinde n yerine $(k_n)$ yazılarak elde edilen $(a_{k_n})$ dizisine, $(a_n)$ dizisinin **alt dizisi** denir. $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ biçiminde yazılır.

**Uyarı:**

1. Her dizi kendisinin alt dizisidir. $(a_n) \subset (a_n)$
2. $(a_{k_n})$ *alt dizisinin bütün terimleri,* $(a_n)$ *dizisinin bir terimidir.*

**Uyarı:**

Bir $(b_n)$ dizisinin, bir $(a_n)$ dizisinin alt dizisi olup - olmadığını anlamak için,

1. $(a_n)$ dizisinde n yerine $k_n$ yazılarak $(a_{k_n})$ ifadesi elde edilir. $b_n = a_{k_n}$ eşitliğinden $k_n$ bulunur. Eğer $(k_n)$ pozitif tamsayı dizisi ise $(b_n)$ dizisi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisidir.

2. $(b_n)$ dizisi ile $(a_n)$ dizisinin terimleri açık olarak yazılır. Eğer $(b_n)$ dizisinin her teriminin $(a_n)$ dizisinin bir terimi olduğu belirlenebiliyorsa $(b_n)$ dizisi $(a_n)$ dizisinin bir alt

dizisidir. Veya $(b_n)$ dizisinin en az bir terimi $(a_n)$ dizisinin bir terimi değilse $(b_n)$ dizisi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisi değildir.

### MONOTON DİZİLER

Bir $(a_n)$ dizisinde $\forall n \in N^+$ için,

1. $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton artandır.
2. $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton azalandır.
3. $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ azalmayandır.
4. $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ artmayandır.
5. $a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ sabit dizidir.

- Artan veya azalan dizilere kısaca monoton dizi denir.

**Uyarı:**
Bir $(a_n)$ dizisinin monotonluğu araştırılırken;

1. Dizinin terimleri,
   $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$
   biçiminde yazılarak monotonluğu incelenebilir.
2. $A(n) = a_{n+1} - a_n$ farkı bulunur.
   $\forall n \in N^+$ için $A(n) > 0$ ise dizi monoton artan, $A(n) < 0$ ise dizi monoton azalan, $A(n) = 0$ ise dizi sabit dizidir.
3. $(a_n)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere,
   $B(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı bulunur. $\forall n \in N^+$ için $B(n) > 1$ ise dizi monoton artan, $B(n) < 1$ ise dizi monoton azalan, $B(n) = 1$ ise dizi sabit dizidir.

**Uyarı:**

a, b, c, d $\in$ R olmak üzere,

$(a_n) = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ biçimindeki dizilerde monotonluk durumu aşağıdaki gibi incelenir.

1. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} > 1$ ise, dizi ne artan ne de azalandır. Dizi monoton değildir.
2. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} < 1$ ise, dizi monotondur.
   i. $ad - bc > 0$ ise dizi monoton artan,
   ii. $ad - bc < 0$ ise dizi monoton azalan,
   iii. $ad - bc = 0$ ise dizi sabit dizidir.

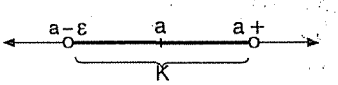
## DİZİLERİN YAKINSAKLIĞI VE IRAKSAKLIĞI

### Komşuluk

$a \in R$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığındaki bütün reel sayıların kümesine **a sayısının ε (epsilon) komşuluğu** denir. Bu komşuluk (K)

$$K = \{ x : |x - a| < \varepsilon, x \in R \}$$

şeklinde tanımlanır.




Örneğin, 4 ün $\frac{1}{10}$ komşuluğu:

$$\left(4 - \frac{1}{10}, 4 + \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{39}{10}, \frac{41}{10}\right)$$

$-5$ in $\frac{1}{10}$ komşuluğu:

$$\left(-5 - \frac{1}{10}, -5 + \frac{1}{10}\right) = \left(-\frac{51}{10}, -\frac{49}{10}\right) \text{ olur.}$$

### Bir dizinin Hemen Hemen Her Terimi

Bir $(a_n)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç, geriye kalan sonsuz sayıdaki terimlerine bu **dizinin hemen hemen her terimi** denir.

Örneğin, $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ dizisinde, ilk 100 terim atıldığında geriye kalan sonsuz sayıdaki terimleri $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ dizinin hemen hemen her terimidir. Ancak, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$ terimleri, dizinin hemen hemen her terimi değildir. Çünkü, dizinin atılan terimleri $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$ sonsuz sayıdadır.

### Bir Dizinin Yakınsaklığı, Iraksaklığı

$(a_n)$ bir dizi, a seçilmiş bir sayı ve ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olsun. $\forall \varepsilon \in N^+$ için, $(a_n)$ dizisinin hemen hemen her terimi a nın ε komşuluğunda kalıyorsa **$(a_n)$ dizisi a sayısına yakınsıyor** denir.

- $(a_n)$ dizisi bir a sayısına yakınsıyorsa $(a_n)$ dizisine **yakınsak dizi,** yakınsak olmayan dizilere de **ıraksak dizi** denir.

**Örnek:**

**$(a_n) = \left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)$ dizisinin 2 sayısına yakınsadığını gösterelim.**

**Çözüm:**

$a = 2$ ve $\varepsilon = \frac{1}{100}$ olsun. $\forall \varepsilon \in R^+$ için dizinin hemen hemen her teriminin 2 nin $\frac{1}{100}$ komşuluğunda olduğunu gösterelim.

$$|a_n - 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{4n+3}{2n-1} - 2\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{4n+3-4n+2}{2n-1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{5}{2n-1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2n-1} < \frac{1}{100} \qquad (n \in N^+)$$

$$\Rightarrow 500 < 2n-1 \Rightarrow n > \frac{501}{2}$$

şartını sağlayan n sayma sayıları $n = 251, 252, 253, \ldots$ olduğundan dizinin 251. ve daha sonraki terimleri dolayısıyla hemen hemen her terimi 2 nin $\frac{1}{100}$ komşuluğunda bulunur. O halde, $(a_n)$ dizisi 2 sayısına yakınsar.

**Uyarı:**

a nın $\varepsilon$ komşuluğundaki noktaların kümesi,

$K = \{ x : |x-a| < \varepsilon,\ x \in R \}$ olduğundan a nın $\varepsilon$ komşuluğu dışındaki noktaların kümesi,

$$K' = \{ x : |x-a| \geq \varepsilon,\ x \in R \} \text{ olur.}$$

Buna göre, bir $(a_n)$ dizisinin kaç teriminin a nın $\varepsilon$ komşuluğu dışında olduğunu bulmak için,

$x = a_n$ olacağından;

$|x-a| \geq \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane n sayma sayısı olduğu bulunur.

**Örnek:**

**$(a_n) = \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)$ dizisinin kaç teriminin $\frac{3}{2}$ nin $\frac{1}{100}$ komşuluğu dışında olduğunu bulalım.**

**Çözüm:**

$a = \frac{3}{2}$ ve $\varepsilon = \frac{1}{100}$ olduğundan,

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{6n+2-6n+3}{2(2n-1)}\right| \geq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2(2n-1)} \geq \frac{1}{100} \qquad (n \in N^+)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \cdot 100 \geq 2n-1$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{251}{2} \Rightarrow \leq 125{,}5$$

şartını sağlayan n sayma sayıları $n = 1, 2, 3, \ldots, 125$ olduğundan $(a_n)$ dizisinin ilk 125 terimi $\frac{3}{2}$ nin $\frac{1}{100}$ komşuluğu dışındadır. Buradan, $(a_n)$ dizisinin 126. teriminin ve daha sonraki terimlerinin de dolayısıyla hemen hemen her teriminin $\frac{3}{2}$ nin $\frac{1}{100}$ komşuluğunda olduğunu söyleyebiliriz.

**Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesinde Limit ve Sonsuza Iraksama**

Her reel sayıdan küçük olarak düşünülen $-\infty$ (eksi sonsuz) ve her reel sayıdan büyük olarak düşünülen $+\infty$ (artı sonsuz) iki ideal sayı olsun.

Reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ sembollerinin katılmasıyla elde edilen sayı kümesine yani,

$R \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ aralığına **genişletilmiş reel sayılar kümesi** denir.

**Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesindeki İşlemler**

1. $\forall n \in R$ için,
   $(+\infty) \pm a = +\infty, \quad (-\infty) \pm a = -\infty$

2. $\forall a \in R$ için, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
   $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

5. $\forall n \in N^+$ için, $(+\infty)^n = +\infty$

6. $\forall n \in N^+$ için, $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ çift sayı} \\ -\infty, & n \text{ tek sayı} \end{cases}$

7. $\forall n \in N^+$ için, $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$

8. $n \in N^+$ ve n tek sayı ise, $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$

9. i. $a \in R^+$ için;
   $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$

ii. $a \in R^-$ için;

$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, $\dfrac{\pm\infty}{a} = \mp\infty$

## DİZİNİN LİMİTİ

Bir $(a_n)$ dizisi, sabit bir $a \in R$ sayısına yakınsıyorsa, yani $(a_n)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri (hemen hemen her terimi) bir a reel sayısının $\varepsilon$ komşuluğunda bulunuyorsa a sayısına **$(a_n)$ dizisinin limiti** denir. $(a_n)$ dizisinin limiti a ise, $(a_n) \to a$ veya $\lim(a_n) = a$ veya $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = a$ biçimlerinden birisi ile gösterilir.

Yakınsak bir dizinin **yakınsadığı sayı**, bu **dizinin limitidir.**

**Örnek:**

**$(a_n) = \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)$ dizisinin limitinin $\dfrac{1}{3}$ olduğunu, $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ alarak gösterelim**

**Çözüm:**

$(a_n)$ dizisinin limiti $\dfrac{1}{3}$ ise, $\forall\, \varepsilon \in R^+$ için $(a_n)$ dizisinin hemen hemen her terimi $\dfrac{1}{3}$ ün $\varepsilon$ komşuluğunda olmalıdır.

O halde,

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3n+3-3n-2}{3(3n+2)}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{3(3n+2)}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9n+6} < \frac{1}{100} \quad (\forall n \in N^+)$$

$$\Rightarrow 9n+6 > 100 \Rightarrow n > \frac{100-6}{9}$$

$$\Rightarrow n > 10,\overline{4} \text{ olur.}$$

O halde, $(a_n)$ dizisinin ilk 10 terimi $\dfrac{1}{3}$ ün $\dfrac{1}{100}$ komşuluğu dışında, geriye kalan sonsuz çokluktaki terimi (hemen hemen her terimi) ise bu aralığın içinde olduğundan $(a_n)$ dizisi $\dfrac{1}{3}$ sayısına yakınsar. Yani $(a_n)$ dizisinin limiti $\dfrac{1}{3}$ tür.

$\lim(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right) = \dfrac{1}{3}$ veya $\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right) \to \dfrac{1}{3}$

biçiminde gösterilir.

**Dizilerin Limiti İle İlgili Özellikler**

1. $\left(\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\right) \to a$ olsun.

   $m > n$ ise $a = 0$,

   $m = n$ ise $a = \dfrac{a_n}{b_m}$,

   $m < n$ ise $a = +\infty$ veya $a = -\infty$ dur.

   **Burada pratik olarak,**

   $$\lim\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\right) = \lim\left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m}\right)$$

   biçiminde limit bulunabilir.

2. $|a| < 1$ ise, $\lim(a^n) = 0$

   $a > 1$ ise, $\lim(a^n) = +\infty$

   $a \le -1$ ise, $(a^n)$ dizisinin limiti yoktur.

   **Burada pratik olarak;**

   $a > b$ olmak üzere, $\lim(a^n \pm b^n) = \lim(a^n)$ dir.

   Örneğin,

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n - 3^{n+1}}{3^{n-1} + 2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3^{n+1}}{3^{n-1}}\right) \quad (3^n > 2^n)$$

   $$= \lim_{n\to\infty}\left(-1.3^{n+1-n+1}\right)$$

   $$= -1.3^2 = -9 \text{ dur.}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \pm\infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n).\, g(n)] = \alpha$ ise

   $\lim\limits_{n\to\infty}[1 + f(n)]^{g(n)} = e^{\alpha}$ dır.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = e$,

   b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{kn} = e^k$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{a}{bn+c}\right)^{kn+p} = e^{\frac{a.k}{b}}$

4. $\lim[\log(a_n)] = \log[\lim(a_n)]$ dir.

5. $\lim|a_n| = |\lim(a_n)|$ dir.

**6.** $c > 0$ olmak üzere,

$\lim (c^{a_n}) = c^{\lim (a_n)}$ dir.

**7.** $\forall n \in N^+$ için $a_n \neq 0$ ve $\lim (a_n) = 0$ ise,

$$\lim\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)=\lim\left(\frac{a_n}{\sin(a_n)}\right)=1,$$

$$\lim\left(\frac{\tan(a_n)}{a_n}\right)=\lim\left(\frac{a_n}{\tan(a_n)}\right)=1,$$

$$\lim\left(\frac{\sin(a_n)}{\tan(a_n)}\right)=\lim\left(\frac{\tan(a_n)}{\sin(a_n)}\right)=1 \text{ dir.}$$

**Uyarı:**

$a > 1$ olmak üzere,

$$\lim\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0, \quad \lim\left(\frac{a^n}{n!}\right)=0,$$

$$\lim\left(\frac{n^a}{a^n}\right)=0, \quad \lim\left(\frac{an}{n^a}\right)=0,$$

$$\lim\left(\frac{\sin(an)}{an}\right)=0, \quad \lim\left(\frac{\cos(an)}{an}\right)=0 \text{ dır.}$$

O halde, $n \to +\infty$ için büyükten küçüğe doğru sıralanmış biçimi; $n^n$, $n!$, $a^n$, $n^a$, an, sin(an) veya cos(an) olan fonksiyonların toplamından (veya farkından) meydana gelmiş olan bir dizinin limiti hesaplanırken, bu ifadelerden en büyük olanının yanında diğerlerinin hepsi ihmal edilebilir.

**Bir Dizinin Alt Limiti ve Üst Limiti**

Bir $(a_n)$ dizisi a sayısına yakınsıyor ise, $(a_n)$ dizisinin her $(a_{k_n})$ alt dizisi de aynı a sayısına yakınsar.

$\lim (a_n) = a$ ise $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ olmak üzere, $\lim (a_{k_n}) = a$ dır.

Örneğin; $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ olduğundan,

$$(a_{3n})=\left(\frac{1}{3n}\right)\to 0, \quad (a_{2n-1})=\left(\frac{1}{2n-1}\right)\to 0 \text{ dır.}$$

Bir $(a_n)$ dizisinin limiti reel sayı olan alt dizilerinden;

limiti en küçük olanının limitine **$(a_n)$ dizisinin alt limiti,**

limiti en büyük olanının limitine de **$(a_n)$ dizisinin üst limiti** denir.

$(a_n)$ dizisinin alt limiti $\underline{\lim}\,(a_n)$, üst limiti de $\overline{\lim}\,(a_n)$ biçiminde gösterilir.

Eğer, $\underline{\lim}\,(a_n) = \overline{\lim}\,(a_n) = a$ ise $\lim (a_n) = a$ dır.

$\underline{\lim}\,(a_n) \neq \overline{\lim}\,(a_n)$ ise $(a_n)$ dizisinin limiti yoktur.

**SINIRLI DİZİLER**

Bir $(a_n)$ dizisinde;

1. $\forall n \in N^+$ için $m \leq a_n$ olacak biçimde bir **$m \in R$ varsa;** $(a_n)$ dizisine **alttan sınırlı dizi,** m ye bir alt sınır, **alt sınırların en büyüğüne** de **en büyük alt sınır (EBAS)** denir.

2. $\forall n \in N^+$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir **$M \in R$ varsa;** $(a_n)$ dizisine **üstten sınırlı dizi,** M ye bir üst sınır, **üst sınırların en küçüğüne** de **en küçük üst sınır (EKÜS)** denir.

3. Alttan ve üstten sınırlı bir diziye **sınırlı dizi** denir.

**Örnek:**

$(a_n) = (n + 3) = (4, 5, 6, \ldots, n + 3, \ldots)$ dizisi alttan sınırlıdır. $\forall n \in N^+$ için, $a_n \geq 4$ olduğundan, 4 ve 4 ten küçük olan her reel sayı $(a_n)$ dizisinin bir alt sınırıdır. 4 sayısı, alt sınırların en büyüğüdür. O halde, EBAS $(a_n) = 4$ tür.

**Örnek:**

$(a_n) = (4 - n) = (3, 2, 1, \ldots, 4 - n, \ldots)$ dizisi üstten sınırlıdır. $\forall n \in N^+$ için $a_n \leq 3$ olduğundan, 3 ve 3 ten büyük olan her reel sayı $(a_n)$ dizisinin bir üst sınırıdır. 3 sayısı, üst sınırların en küçüğüdür. O halde, EKÜS $(a_n) = 3$ tür.

**Örnek:**

$(a_n)=\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$ dizisinde $\forall n \in N^+$ için, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ olduğundan $(a_n)$ dizisi hem alttan hem de üstten sınırlı olduğundan $(a_n)$ dizisi sınırlı bir dizidir.

EBAS $(a_n) = 0$ ve EKÜS $(a_n) = \frac{1}{2}$ dir.

**Uyarı:**

$(a_n) = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisi verilsin.

Paydanın kökü, $cn + d = 0 \Rightarrow n = -\frac{d}{c}$ olur.

1. $-\frac{d}{c} < 1$ için $(a_n)$ dizisi monotondur.
   Bu durumda $a_1 = \frac{a+b}{c+d}$ ve $\lim(a_n) = \frac{a}{c}$ sayılarından büyük olanı EKÜS, küçük olanı EBAS tır.

2. $-\frac{d}{c} \geq 1$ için $(a_n)$ dizisi monoton değildir. Bu durumda $-\frac{d}{c}$ ye en yakın olan iki tamsayı p ve p + 1 olmak üzere, $a_p$ ve $a_{p+1}$ sayılarından büyük olanı EKÜS, küçük olanı EBAS tır.

**Örnek:**

$(a_n) = \left(\frac{3n-7}{4n-3}\right)$ dizisi için, $4n - 3 = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{4} < 1$ olduğundan $(a_n)$ dizisi monotondur. Dolayısıyla $a_1 = -4$ ve $\lim(a_n) = \frac{3}{4}$ sayılarından; küçük olanı EBAS $(a_n) = -4$ ve büyük olanı EKÜS $(a_n) = \frac{3}{4}$ tür.

**Örnek:**

$(a_n) = \left(\frac{n+1}{5n-12}\right)$ dizisi için, $5n - 12 = 0 \Rightarrow n = \frac{12}{5} > 1$ olduğundan $(a_n)$ dizisi monoton değildir. Bu durumda $\frac{12}{5} = 2{,}4$ sayısına en yakın olan iki tamsayı 2 ve 3 olduğundan; $a_2 = -\frac{3}{2}$ ve $a_3 = \frac{4}{3}$ sayılarından; küçük olanı EBAS $(a_n) = -\frac{3}{2}$ ve büyük olanı EKÜS $(a_n) = \frac{4}{3}$ tür.

3. $(a_n) = (an^2 + bn + c)$ dizisinin EKÜS ünü veya EBAS ını bulmak için, $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinden (parabol) yararlanılır.

   $a > 0$ ise dizinin EBAS ı var, EKÜS ü yoktur.
   $a < 0$ ise dizinin EKÜS ü var, EBAS ı yoktur.
   Parabolün tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a}$ olduğundan,

   i. $n = -\frac{b}{2a} < 1$ için;
      $a > 0$ ise EBAS $(a_n) = a_1$
      $a < 0$ ise EKÜS $(a_n) = a_1$ dir.

   ii. $n = -\frac{b}{2a} > 1$ için $\frac{b}{2a}$ sayısına en yakın olan tamsayı p olmak üzere;
      $a > 0$ ise EBAS $(a_n) = a_p$
      $a < 0$ ise EKÜS $(a_n) = a_p$ dir.

**Tanım:**

$(a_n)$ bir dizi olsun. $\forall n \in N^+$ için, $|a_n| \leq k$ olacak biçimde bir $k \in R^+$ sayısı varsa, $(a_n)$ dizisine **sınırlı dizi** denir.

$(a_n)$ sınırlı dizi $\Leftrightarrow |a_n| \leq k$ ve

$|a_n| \leq k \Leftrightarrow (-k \leq a_n \leq k)$ olur.

**Tanım:**

Sınırlı olmayan dizilere **sınırsız diziler** denir.

**Sınırlı Dizilerle İlgili Teoremler:**

**Teorem 1:** $(a_n)$ ve $(b_n)$ sınırlı iki dizi ve $c \in R$ ise,

1. $(a_n) \pm (b_n)$ dizisi sınırlıdır.
2. $c \cdot (a_n)$ dizisi sınırlıdır.
3. $(a_n) \cdot (b_n)$ dizisi sınırlıdır.

**Teorem 2:** Sabit diziler yakınsaktır.
$c \in R$ ve $(a_n) = (c)$ ise $\lim(a_n) = c$ dir.

**Teorem 3:** Yakınsak bir dizinin limiti bir tanedir.

**Teorem 4:** Yakınsak her dizi sınırlıdır. Ancak, sınırlı her dizi yakınsak olmayabilir.
Örneğin, $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ dizisinde $\forall n \in N^+ - 1 \leq a_n \leq 1$ olduğundan, bu dizi sınırlıdır. Ancak,
$n = 2k - 1$ $(k \in N^+)$ ise, $(a_n) \to -1$
$n = 2k$ $(k \in N^+)$ ise, $(a_n) \to 1$
olduğundan bu dizinin limiti yoktur. Dolayısıyla bu dizi yakınsak değildir.

**Teorem 5:** Monoton ve sınırlı bir dizi yakınsaktır.

1. **Monoton artan** bir dizi, en küçük üst sınırına yakınsar.
   **lim $(a_n)$ = EKÜS $(a_n)$** dir.

2. **Monoton azalan** bir dizi, en büyük alt sınırına yakınsar.
   **lim $(a_n)$ = EBAS $(a_n)$** dir.

**Yakınsak Bir Dizinin Limiti İle İlgili Teoremler:**

$(a_n)$ ve $(b_n)$ yakınsak iki dizi ve $c \in R$ olsun.
$(a_n) \to a$ ve $(b_n) \to b$ ise,

1. $(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n) \to (a \pm b)$
2. $c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n) \to c \cdot a$

3. $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$

4. $\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0,\ b \neq 0)$

5. $(a_n) \to a \Leftrightarrow (a_n - a) \to 0$

**Teorem:** $(a_n) \to a$, $(b_n) \to a$ ve $\forall n \in N^+$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ ise

$(c_n) \to a$ dır. Bu teoreme **sıkıştırma teoremi** denir.

### SONSUZA IRAKSAMA

1. Bir $(a_n)$ dizisinin hemen hemen her terimi $+\infty$ un her a komşuluğunda ise, **$(a_n)$ dizisinin limiti $+\infty$ dur** denir ve $(a_n) \to +\infty$ ya da $\lim (a_n) = +\infty$ biçiminde gösterilir. **( $+\infty$ a ıraksama )**

2. Bir $(a_n)$ dizisinin hemen hemen her terimi $-\infty$ un her b komşuluğunda ise, **$(a_n)$ dizisinin limiti $-\infty$ dur** denir ve $(a_n) \to -\infty$ ya da $\lim (a_n) = -\infty$ biçiminde gösterilir. **( $-\infty$ a ıraksama )**

**Uyarı:**

Limiti, $+\infty$ veya $-\infty$ olan dizilere ıraksak diziler denir.

**Belirsiz İfadeler**

$\infty^\infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$, $\frac{0}{0}$ işlemleri tanımlanmamıştır. Bu ifadelere **belirsiz ifadeler** denir.

## ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER

### ARİTMETİK DİZİ

**Tanım:**

Ardışık iki terimi arasındaki fark sabit olan dizilere **aritmetik dizi** denir.

Buna göre, $\forall n \in N^+$ ve $d \in R$ olmak üzere $a_{n+1} - a_n = d$ eşitliğini sağlayan $(a_n)$ dizisi bir aritmetik dizidir. **d** sayısına dizinin **ortak farkı** denir.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_4 &= a_3 + d \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_{n-1} + d \\ + \quad & \\ \hline a_n &= a_1 + (n-1)d \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde aritmetik dizinin genel terimi;

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ dir.}$$

### ARİTMETİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

1. $p < n$ olmak üzere, bir aritmetik dizinin genel terimi;
   $a_n = a_p + (n-p)\,d$ ve ortak farkı; $d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$ dir.
   $d > 0$ ise dizi artan, $d < 0$ ise dizi azalan ve $d = 0$ ise sabit dizidir.
   Benzer şekilde bir aritmetik dizinin herhangi iki terimi $a_p$ ve $a_k$ arasında, $a_p - a_k = (p-k) \cdot d$ bağıntısı vardır.

2. Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin aritmetik ortasıdır. $\forall n \in N^+$ için,
   $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ $(k \in N,\ 1 \leq k < n)$ dir.

3. Bir aritmetik dizide ilk n terimi toplamı $S_n$ ile gösterilirse,
   $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ veya $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ dir.

4. a ve b arasına bu sayılarla beraber bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde, n tane sayı yerleştirilirse, elde edilen $n+2$ terimli aritmetik dizinin ortak farkı;
   $d = \frac{b-a}{n+1}$ olur.

5. Sonlu bir aritmetik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimler toplamı birbirine eşittir.
   Sonlu bir aritmetik dizi $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ olsun.
   $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_p + a_{n-p+1}$ olur.

### GEOMETRİK DİZİ

**Tanım:**

Ardışık terimlerinin oranı sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir.

$\forall n \in N^+$ için, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ $(a_n \neq 0)$ olan diziler, geometrik dizidir. **r** sayısına dizinin **ortak çarpanı** denir.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}\, r = a_1 \cdot r^{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Genel terim;** $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ dir.

Ayrıca genel terim; $a_n = a_{n-p} \cdot r^p$ şeklinde de yazılabilir.

### GEOMETRİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

Bir $(a_n)$ dizisi geometrik dizi ise:

1. $\forall n \in N^+$ için, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ dir. *Geometrik dizide ardışık iki terim oranı sabittir.*

2. $\forall n,\ k \in N^+$ için,

   $a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2$ veya $|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$

   $(1 \le k < n)$

   Herhangi bir terim, kendisinden aynı uzaklıktaki terimlerin geometrik ortasıdır.

3. Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan aynı uzaklıktaki terimlerin çarpımları birbirine eşittir.

   $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$

4. İlk n teriminin toplamı $S_n$ ise,

   $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$ $(r \neq 1)$ dir.

5. Bir geometrik dizide, iki terim $a_k$ ve $a_p$ ise bu dizinin ortak çarpanı $p > k$ için; $r = \sqrt[p-k]{\frac{a_p}{a_k}}$ dır.

6. Bir geometrik dizide ilk n terim çarpımı,

   $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$ dir.

7. a ve b pozitif reel sayıları arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse, oluşan n + 2 terimli geometrik dizinin ortak çarpanı $a > b$ için

   $r = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$ olur.

8. $(a_n)$ geometrik dizisinde $1 \le k < n$ ve $k \in N^+$ olmak üzere, ortak çarpan r ise $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ dir.

## SERİLER

**Tanım:**

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dizisi verildiğinde,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ sonsuz toplamına **seri** denir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ biçiminde gösterilir. $a_n$ ye de serinin **genel terimi** denir.

**Örnek:**

- $(a_n) = \left(\frac{n}{n+3}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{n}{n+3}, \dots\right)$ bir dizi olduğundan,

  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \dots + \frac{n}{n+3} + \dots$

  bir seridir.

- $(a_n) = (3^n) = (3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots)$ bir dizi olduğundan,

  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + \dots$ bir seridir.

Örneklerden de görüleceği gibi dizinin genel terimi ile serinin genel terimi aynıdır.

**Tanım:**

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dizisinin ilk n terim toplamı;

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

.

.

.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olsun.

$S_n$ sayısına, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin **n . kısmi (parça) toplamı** denir.

$(S_n) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ dizisine de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin **kısmî toplamlar dizisi** denir.

**Tanım:**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi $(S_n)$ olsun.

1. $(S_n)$ *dizisi yakınsak ise,* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi yakınsak seri;*

2. $(S_n)$ dizisi ıraksak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak seridir.

### YAKINSAK BİR SERİNİN DEĞERİ (TOPLAMI)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ yakınsak serisinde,

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

$= \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \lim_{n \to \infty} (S_n)$ olur.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n) \text{ dir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak bir seri ise, serinin değeri (toplamı), kısmî toplamlar dizisinin limitine eşittir. Serinin bu S değerini bulmak yakınsak serilerde mümkündür.

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ **serisinin değerini (toplamını) bulalım.**

**Çözüm:**

$$S_n = 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\right) = \frac{4}{3}\cdot(1-0) = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

Dikkat edilirse $(S_n)$ parça toplamlar dizisinin yakınsadığı S sayısını bulduğumuzda, serinin değerini (toplamını) de bulmuş oluyoruz.

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).(n+2)}$ **serisinin değerini bulalım.**

**Çözüm:**

Önce serinin yakınsak olup - olmadığına bakılır.

$$a_n = \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} \text{ dir.}$$

Serinin n. parça toplamı,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} \text{ olur.}$$

Serinin parça toplamlar dizisi,

$$(S_n) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) \text{ dir.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$(S_n)$ dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla seri yakınsaktır ve serinin değeri,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n+1).(n+2)}+\ldots$$

$$= S = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}$ **serisinin yakınsak olup - olmadığını inceleyelim, varsa değerini bulalım.**

**Çözüm:**

Serinin genel terimi $a_n = 3^{n-1}$ dir.

Serinin parça toplamlar dizisi,

$$(S_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1})$$

$$(S_n) = \left(\frac{1-3^n}{1-3}\right) = \left(\frac{-(1-3^n)}{2}\right) \text{ dir.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-(1-3^n)}{1-3}\right) = \left(\frac{-(1-\infty)}{2}\right) = +\infty \text{ olur.}$$

Parça toplamlar dizisi ıraksak, dolayısıyla seri de ıraksaktır. Buna göre, serinin bir reel sayı olarak değeri yoktur.

**Teorem:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (Yakınsak serilerin genel terimleri sıfıra yaklaşır.)

Yakınsak her serinin genel teriminin limiti sıfırdır. Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani genel teriminin limiti sıfır olan bir seri, ıraksak olabilir.

## ARİTMETİK SERİ

**Tanım:**

$(a_n)$ bir aritmetik dizi ise; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine **aritmetik seri** denir.

Aritmetik dizi için $a_n = a_1 + (n-1)d$ ve $S_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n)$ veya $S_n = \frac{n}{2}.[2a_1 + (n-1)d]$ olduğundan,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)d]$ olur. Bu serinin n. kısmî toplamı

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ olur.

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) = 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n + 1 + \ldots$

serisi aritmetik seridir.

Sıfır sabit dizisi dışındaki aritmetik dizilerde, $\lim(a_n) \neq 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aritmetik serisi, ıraksak seri olur.

## GEOMETRİK SERİ

**Tanım:**

$(a_n)$ bir geometrik dizi ise; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine **geometrik seri** denir.

**Örnek:**

$\left(\frac{1}{2^n}\right)$ dizisi bir geometrik dizi olduğundan,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ bir geometrik seridir.

### Geometrik Serinin n. Kısmî Toplamı

$(a_n)$ geometrik dizi ise, $a_n = a_1 . r^{n-1}$ dir. Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 . r^{n-1})$ olur. Bu serinin n. kısmî toplamı ise,

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 . r^{n-1})$ serisinde;

1. $|r| > 1$ ise, $(r^n) \to \infty$ olduğundan, serinin genel teriminin limiti de $\infty$ olur ve seri ıraksaktır.

2. $|r| < 1$ ise, $(r^n) \to 0$ olduğundan, serinin genel teriminin limiti de sıfır olur ve seri yakınsaktır.

### Yakınsak Geometrik Serinin Toplamı

Yakınsak olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ geometrik serisinin toplamı, kısmî toplamlar dizisi olan $(S_n)$ nin limitine eşittir.

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ , $|r| < 1$ ise, $(r^n) \to 0$ olacağından,

$\lim (S_n) = a_1 \cdot \frac{1-0}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$ olur. Serinin toplamı

$|r| < 1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$ olur.

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **serisinin geometrik seri olduğunu gösterip, toplamını bulalım.**

**Çözüm:**

$\sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 + 2.\frac{1}{2} + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

serisi, ilk terimi 2 ve ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik seridir.

$r = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan, bu serinin toplamı :

$\sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 2.\frac{2}{1} = 4$ tür.

**Örnek:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ **serisinin toplamını bulalım.**

**Çözüm:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}$

$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

$= \frac{13}{6}$ olur.

**Uyarı:**

1. $|r| < 1$ olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{\infty} n . r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ dir.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisinin toplamı,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ tir.

O halde, $x = 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ olduğundan,

$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$ dir. $(e \cong 2{,}71 \dots)$

# DİZİLER

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** **Aşağıdakilerden hangisi bir dizi belirtilir?**

A) $\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)$ B) $\left(\log(11-n^2)\right)$

C) $\left(\log(n+1)\right)$ D) $\left(\frac{n-2}{9+3n-2n^2}\right)$

E) $\left(\frac{1}{n^2-5n+6}\right)$

**2.** Genel terimi,

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} \cdot n, & n \text{ tek ise} \\ \frac{(-1)^n}{n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

**olan $(a_n)$ dizisi için $a_6 + a_{11}$ toplamının değeri kaçtır?**

A) $7\frac{1}{11}$ B) $11\frac{1}{7}$ C) 17

D) $6\frac{1}{11}$ E) $11\frac{1}{6}$

**3.** **Aşağıdakilerden hangisi bir dizinin genel terimi olamaz?**

A) $\frac{1}{3n-12}$ B) $\frac{1}{2n-1}$ C) $\frac{1}{n+3}$

D) $-3n$ E) $2n-3$

**4.** $(a_n) = \left(\frac{9n-5}{3n+6}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{3n+a}{n+2}\right)$

dizileri veriliyor.

**$(a_n) = (b_n)$ olduğuna göre, a kaçtır?**

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

**5.** Genel terimi,

$$a_n = \begin{cases} n^2+2, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ n+x, & n \equiv 2 \pmod 3 \\ 2n-3, & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

**olan $(a_n)$ dizisi için $a_4 + a_5 + a_6 = 35$ olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**6.** $(a_n) = \left((2x^2-x-4)n + 2n - 5\right)$

**dizisi sabit dizi olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?**

A) $-1$ B) $-2$ C) $-3$ D) $-4$ E) $-6$

1-C 2-B 3-A 4-B 5-C 6-A

**7.** $(a_n) = (-n^2 + 7n + 18)$

dizisinin kaç terimi pozitiftir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**8.** İlk n teriminin toplamı $n^2 + 2n$ olan bir dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2n - 1$ B) $2n - 3$ C) $3n - 2$

D) $n + 5$ E) $2n + 1$

**9.** $(a_n) = \left(\frac{3n-19}{2n-7}\right)$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**10.** $(a_n) = (3^{n+1} \cdot (n+1)!)$

dizisine göre, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı kaçtır?

A) $3n + 6$ B) $3n + 2$ C) $3n$

D) $3n - 1$ E) $n + 2$

**11.** $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisinin genel terimi,

$$a_{n+2} = \frac{2n+3}{n+5}$$

olduğuna göre, $a_n$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{n}{n+1}$ B) $\frac{2n+5}{n+3}$ C) $\frac{2n-1}{n+3}$

D) $\frac{n+2}{n+5}$ E) $\frac{4n-1}{n+4}$

**12.** Genel terimi, $a_n = 7^{2n-5}$ olan bir $(a_n)$ dizisinde $a_{n+2}$ nin değeri, $a_n$ nin kaç katıdır?

A) 7 B) $7^2$ C) $7^3$ D) $7^4$ E) $7^5$

**7-C** **8-E** **9-B** **10-A** **11-C** **12-D**

**13.** $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisi olamaz?

A) $\left(\frac{2n^2+1}{n^2+2}\right)$ B) $\left(\frac{4n-1}{2n+1}\right)$ C) $\left(\frac{2^{n+1}+1}{2^n+2}\right)$

D) $\left(\frac{2n+2}{n+4}\right)$ E) $\left(\frac{2n!+1}{n!+2}\right)$

**14.** $\left(\frac{-n^2+8n-12}{n^2+4n+4}\right)$

dizisinin kaç terimi pozitiftir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**15.** $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n.n+3n}{n+4}\right)$

olduğuna göre, EKÜS$(a_n)$ kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**16.** $(a_n) = \left(\frac{m.n-2}{n+4}\right)$

$(b_n) = \left(\frac{12n-8}{2n+3}\right)$

olmak üzere, $(b_n)$ dizisi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisi olduğuna göre, m kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**17.** $(a_n) = \left(\frac{7n+3}{n+2}\right)$

olduğuna göre, $(a_{4n+1})$ dizisinin kaçıncı terimi 6 dır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 9

**18.** $(a_n) = \left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

olduğuna göre, $a_3$ kaçtır?

A) $\frac{175}{64}$ B) $\frac{135}{64}$ C) $\frac{143}{32}$ D) $\frac{37}{16}$ E) $\frac{43}{32}$

**19.** $(a_n) = \left(\frac{3}{n^2+1}\right)$

dizisinin $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında kaç terimi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**20.** $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)$

dizisinin 3 ün $\frac{1}{20}$ komşuluğu dışında kalan kaç terimi vardır?

A) 144 B) 176 C) 216 D) 220 E) 224

**13-D** **14-B** **15-E** **16-E**

**17-B** **18-A** **19-C** **20-C**

# DİZİLER

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** Tanım kümesi pozitif doğal sayılar olan her fonksiyon bir dizidir.
Buna göre, (A) seçeneğinde $\frac{2n+1}{n-1}$ ifadesi $n = 1$ için tanımsızdır.

(B) seçeneğinde $11 - n^2$ ifadesi $n \geq 4$ için negatif olduğundan, $\log(11 - n^2)$ ifadesi $n \geq 4$ için tanımsızdır.

(D) seçeneğinde $9 + 3n - 2n^2 = (3 - n)(3 + 2n)$ olduğundan, $\frac{n-2}{9+3n-2n^2}$ ifadesi $n = 3$ doğal sayısı için tanımsızdır.

(E) seçeneğinde de $n^2 - 5n + 6 = (n - 3)(n - 2)$ olduğundan, $\frac{1}{n^2-5n+6}$ ifadesi $n = 3$ ve $n = 2$ için tanımsızdır.

(C) seçeneğinde her n pozitif doğal sayısı için $n + 1$ ifadesi pozitif olduğundan, $\log(n + 1)$ ifadesi bütün pozitif doğal sayılar için tanımlıdır. O halde, bu ifade bir dizinin genel terimi olabilir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**2.** $n = 6$ çift sayı, $n = 11$ tek sayı olduğundan,

$$a_6 + a_{11} = \frac{(-1)^6}{6+1} + (-1)^{11+1} \cdot 11$$

$$= \frac{1}{7} + 11 = 11\frac{1}{7} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** Herhangi bir pozitif doğal sayı değeri için tanımsız olan bir ifade, bir dizinin genel terimi olamaz. Buna göre, (A) seçeneğindeki $\frac{1}{3n-12}$ ifadesi $n = 4$ için tanımsız olduğundan bu ifade bir dizinin genel terimi olamaz.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**4.** $(a_n) = (b_n)$ ise

$$\frac{9n-5}{3n+6} = \frac{3n+a}{n+2} \Rightarrow \frac{9n-5}{3(n+2)} = \frac{3n+a}{n+2}$$

$$\Rightarrow 9n - 5 = 3(3n + a)$$

$$\Rightarrow -5 = 3a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** (mod 3) te 4, 5 ve 6 sayıları sırasıyla 1, 2 ve 0 a denk olduğundan,

$a_4 + a_5 + a_6 = 35$ ise

$(4^2 + 2) + (5 + x) + (2 \cdot 6 - 3) = 35$

$\Rightarrow 18 + 5 + x + 9 = 35 \Rightarrow x = 3$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** **1. Yol:**

$(a_n) = \left((2x^2 - x - 4)n + 2n - 5\right)$ dizisi sabit dizi ise bu dizinin terimlerinin değeri; n nin değerlerinden bağımsız olmalı, yani n nin alabileceği değerlere göre değişen değerler almamalıdır. Buna göre,

$2x^2 - x - 4 = -2$ olmalıdır.

O halde, x in alabileceği değerler çarpımı,

$2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{2} = -1$ dir.

**2. Yol:**

$(a_n)$ sabit dizi ise, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots$

O halde,

$a_1 = a_2 \Rightarrow (2x^2 - x - 4) \cdot 1 - 3 = (2x^2 - x - 4) \cdot 2 - 1$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 4 - 3 = 4x^2 - 2x - 8 - 1$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{2} = -1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $-n^2 + 7n + 18 = -n^2 - 2n + 9n + 18$

$= -n(n + 2) + 9(n + 2)$

$= (n + 2)(9 - n)$ ise

$n \geq 1$ için $n + 2 > 0$ olduğundan, $9 - n$ ifadesini pozitif yapan sayma sayılarını (pozitif doğal sayıları) bulalım.

$9 - n > 0 \Rightarrow 9 > n$ olduğundan

$(a_n) = (-n^2 + 7n + 18)$ dizisinin terimleri,

$n = 1, 2, 3, \ldots, 8$ için pozitif değerler alır. Buna göre, bu dizinin 8 tane terimi pozitiftir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** **1. Yol:**

$s_n = n^2 + 2n$ ise

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n^2 + 2n$

$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1)$

$\Rightarrow a_n = n^2 + 2n - (n^2 - 2n + 1 + 2n - 2)$

$\Rightarrow a_n = 2n + 1$ dir.

**2. Yol:**

$a_1 = s_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 3$ ve

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow n^2 + 2n = \frac{n}{2}(3 + a_n)$

$\Rightarrow n(n + 2) = \frac{n}{2}(3 + a_n)$

$\Rightarrow (n + 2) \cdot 2 = 3 + a_n$

$\Rightarrow a_n = 2n + 1$ dir.

**3. Yol:**

$s_1 = a_1 = 3$

$s_2 = a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow 3 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5$

$s_3 = s_2 + a_3 = 15 \Rightarrow 8 + a_3 = 15 \Rightarrow a_3 = 7$

$(a_n) = (3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$ olduğundan, 3 ten başlayan tek sayıların genel terimi $2n + 1$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** $\frac{3n - 19}{2n - 7} < 0$ şartını sağlayan sayma sayılarını (pozitif tamsayıları) eşitsizlik tablosu yaparak bulalım.

$3n - 19 = 0 \Rightarrow n = \frac{19}{3}$ ve $2n - 7 = 0 \Rightarrow n = \frac{7}{2}$ olduğundan,

| n | | $\frac{7}{2}$ | | $\frac{19}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | + | 0 | − | 0 | + |

$4 \leq n \leq 6$ için $a_n < 0$ dır.

O halde, $n = 4, 5, 6$ için $a_n < 0$ yeni $(a_n)$ dizisinin üç terimi negatiftir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** $a_n = 3^{n+1} \cdot (n + 1)!$ ise,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1+1} \cdot (n+1+1)!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}$

$= \frac{3(n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!}$

$= 3n + 6$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $a_{n+2} = \frac{2n + 3}{n + 5}$ ifadesinde n yerine $n - 2$ yazılırsa,

$a_{n-2+2} = \frac{2(n-2)+3}{n-2+5} \Rightarrow a_n = \frac{2n-1}{n+3}$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{7^{2(n+2)-5}}{7^{2n-5}} = 7^4$ tür.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.** $k_n : N^+ \to N^+$ olmak üzere, $(a_n)$ dizisinde n yerine $k_n$ yazılarak elde edilen fonksiyon $(a_n)$ dizisinin alt dizisidir. Buna göre,

$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$ dizisinde n yerine;

$n^2$, $2n-1$, $2^n$ ve n! yazılarak sırasıyla (A), (B), (C) ve (E) seçeneğinde verilen diziler elde edilebileceğinden bu seçeneklerde verilen diziler $(a_n)$ dizisinin birer alt dizisidir.

O halde, (D) seçeneğinde verilen dizi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisi olamaz.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$ ifadesi bütün sayma sayıları (pozitif tamsayılar) için pozitif olduğundan,

$\frac{-n^2 + 8n - 12}{n^2 + 4n + 4}$ ifadesininin pozitif olması için $(-n^2 + 8n - 12)$ ifadesi pozitif olmalıdır. O halde,

$-n^2 + 8n - 12 = -n^2 + 2n + 6n - 12$

$= n(2-n) - 6(2-n)$

$= (n-6)(2-n)$ ifadesi;

$n = 1$ veya $n > 6$ için negatif,

$n = 2$ veya $n = 6$ için sıfır,

$n = 3$ veya $n = 4$ veya $n = 5$ için pozitiftir.

Buna göre, bu dizinin üç terimi pozitiftir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 3n}{n+4}$ dizisi için,

n tek sayı ise $\frac{2n}{n+4} = 2 - \frac{8}{n+4}$ olduğundan

$a_1, a_3, a_5, \ldots$ terimlerinin değeri 2 den büyük olamaz.

n çift sayı ise $\frac{4n}{n+4} = 4 - \frac{16}{n+4}$ olduğundan

$a_2, a_4, a_6, \ldots$ terimlerinin değeri 4 ten büyük olamaz.

O halde, $a_n < 4$ olduğundan

$(a_n)$ dizisinin üst sınırlarından en küçüğü 4 tür.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16. 1. Yol:**

Bir dizinin terimleri ile bu dizinin alt dizisinin terimleri aynı sayıya yaklaşırlar (yakınsarlar).

Buna göre,

$b_n = \frac{12n-8}{2n+3} = \frac{12n+18-18-8}{2n+3}$

$= \frac{6(2n+3)-26}{2n+3}$

$= 6 - \frac{26}{2n+3}$

olduğundan $(b_n)$ dizisinin terimleri 6 ya yaklaşmaktadır. O halde, $(a_n)$ dizisinin terimlerinin de 6 ya yaklaşması için,

$a_n = \frac{mn-2}{n+4}$ ifadesinde pay ve paydaki n değişkeninin katsayılarının oranı 6 olmalıdır. Buna göre,

$m = 6$ olmalıdır.

**2. Yol:**

$a_n = \frac{mn-2}{n+4}$ ifadesinde n yerine $(2n-1)$ yazıldığında bu ifadenin paydası $2n+3$ olmaktadır.

Buna göre, payında da n yerine $(2n-1)$ yazıldığında $(12n-8)$ ifadesinin elde edilmesi gerektiği varsayılarak,

$m \cdot (2n-1) - 2 = 12n - 8$

$\Rightarrow 2mn - m - 2 = 12n - 8$

$\Rightarrow m = 6$ olmalıdır biçiminde düşünülebilir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17.** **1. Yol:**

$a_n = \frac{7n+3}{n+2}$ ise

$a_{4n+1} = \frac{7.(4n+1)+3}{4n+1+2} = 6$

$\Rightarrow 28n + 10 = 24n + 18$

$\Rightarrow 4n = 8 \Rightarrow n = 2$ dir.

O halde, $a_{4n+1}$ dizisinin 2. teriminin değeri 6 dır.

**2. Yol:**

$\frac{7n+3}{n+2} = 6 \Rightarrow 7n + 3 = 6n + 12$

$\Rightarrow n = 9$ ise

$n = 9$ için $a_9 = 6$ olduğundan $(a_{4n+1})$ dizisinde,

$4n + 1 = 9 \Rightarrow n = 2$ olduğundan

$(a_{4n+1})$ dizisinin 2. terimi 6 dır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.**

$a_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$a_3 = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3$

(64) (16) (4) (1)

$\Rightarrow a_3 = \frac{64+48+36+27}{64}$

$\Rightarrow a_3 = \frac{175}{64}$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**19.** $\frac{1}{9} < \frac{3}{n^2+1} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 9 > \frac{n^2+1}{3} > 2 \Rightarrow 27 > n^2 + 1 > 6$

$\Rightarrow 26 > n^2 > 5$

şartını sağlayan n pozitif tamsayıları (sayma sayıları) 3, 4 ve 5 olduğundan $(a_n)$ dizisinin üç terimi $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{2}\right)$ aralığındadır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**20.** **1. Yol:**

3 ün $\frac{1}{20}$ komşuluğu $\left(3 - \frac{1}{20},\ 3 + \frac{1}{20}\right)$ olduğundan, $(a_n)$ dizisinin komşuluğun içindeki terimleri,

$3 - \frac{1}{20} < \frac{3n+1+12-12}{n+4} < 3 + \frac{1}{20}$

$\Rightarrow 3 - \frac{1}{20} < 3 - \frac{11}{n+4} < 3 + \frac{1}{20}$

$\Rightarrow -\frac{1}{20} < -\frac{11}{n+4} < \frac{1}{20}$

eşitsizliğinde $\frac{-11}{n+4} < \frac{1}{20}$ şartı her zaman sağlandığına göre, $\frac{-1}{20} < \frac{-11}{n+4}$ şartını sağlayan değerleri bulalım.

$\frac{1}{20} > \frac{11}{n+4} \Rightarrow n + 4 > 220 \Rightarrow n > 216$ olduğundan,

$1 \le n \le 216$ için $(a_n)$ dizisinin terimleri komşuluğun dışında kalır.

Buna göre, $(a_n)$ dizisinin ilk 216 terimi komşuluğun dışındadır.

**2. Yol:**

$|a_n - 3| \ge \frac{1}{20}$ şartını sağlayan terimler komşuluğun dışında kalır. O halde,

$\left|\frac{3n+1}{n+4} - 3\right| \ge \frac{1}{20} \Rightarrow \left|\frac{-11}{n+4}\right| \ge \frac{1}{20}$

$\Rightarrow \left|\frac{n+4}{11}\right| \le 20$

$\Rightarrow n + 4 \le 220$

$\Rightarrow n \le 216$ dır.

Buna göre, $(a_n)$ dizisinin 216 tane terimi komşuluğun dışındadır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# DİZİLER

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^{-n}+4^{\frac{3}{n}}+6\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**2.** $(a_n)=\left(\dfrac{(a-2)n^3-3n^2-1}{(b+1)n^2+2n+1}\right)$

**dizisinin limiti $\frac{3}{2}$ olduğuna göre, a . b kaçtır?**

A) – 6 B) – 4 C) 1 D) 4 E) 6

**3.** $(P_n)=\left(\dfrac{2n^2+1}{(n+1)^2}\right)$ ve $(Q_n)=(P_{n+1}.P_{2n+1}.P_{3n+2})$

**olduğuna göre, $(Q_n)$ dizisinin limiti kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**4.** $(a_n)=\left(\dfrac{2^{n+1}+3^{n+2}}{2^{2n+1}+3^{2n+2}}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

**5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{12n+2\sqrt{3n-1}}}{\sqrt{3n+2}}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

**6.** Pozitif terimli bir $(a_n)$ dizisinin bazı alt dizileri arasında;

$$a_{2n}.a_{n+2}+2.a_n=\frac{8n+5}{n+2}$$

**eşitliği olduğuna göre, $\lim(a_n)$ kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 12

**1- D** **2-A** **3-D** **4-C** **5-D** **6-B**

7. $a_1 = \sqrt{6}$ ve genel terimi $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$ şeklinde tanımlanan $(a_n)$ dizisinin limiti kaçtır?

A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) 6

8. $$(a_n) = \left( 4^{\frac{n^2+2n}{2n^2-3}} \right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) $\sqrt{2}$

9. $$(a_n) = \left( \frac{2n+2}{2n-1} \right)^{2n+3}$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) e B) $e^2$ C) $e^3$ D) $e^4$ E) $e^5$

10. $$\left( \frac{\sqrt{4n + \sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} + 3^{-n} + \frac{4}{n} + 2 \right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) 0

11. $$(a_n) = \left( \frac{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2}{2n^3 + n + 1} \right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 6 B) 3 C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

12. $$(a_n) = \left( \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{6}{n} \right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

**7- B** **8-D** **9-C** **10-A** **11-E** **12-B**

**13.** $0 < x < 2$ olmak üzere,

$$(a_n) = \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k + 1}{2^k} \right)$$

**dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{x+2}$ B) $\frac{x}{x-2}$ C) $\frac{x}{2-x}$

D) $\frac{2}{x-2}$ E) $\frac{2}{2-x}$

**14.**

$$(a_n) = \left(3n - \sqrt{9n^2 + 6n + 3}\right)$$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) 1

**15.**

$$(a_n) = \left( \frac{n^3 + 4n^2 . \sin 5n + n - 7}{2n^3 + 7n^2 . \cos 2n + 3n + 4} \right)$$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{7}{4}$ E) $\frac{5}{9}$

**16.**

$$\left( \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 1} \right)^{n-2}$$

**dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $e^{-2}$ B) $e^{-1}$ C) 1 D) e E) $e^2$

**17.**

$$\left( \frac{2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{n^2 + n^3 + n^4 + n^5} \right)$$

**dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) $\infty$

**18.**

$$\left( \frac{n^n + 3^n}{10^n + 3^n} \right)$$

**dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\frac{1}{10}$ C) 1 D) 3 E) $\infty$

**19.**

$$(a_n) = \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^3} + \cdots + \frac{1}{\pi^n}\right)$$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{\pi - 1}$ B) $\frac{\pi - 1}{\pi}$ C) $\pi$

D) $\frac{1}{\pi}$ E) $\frac{1}{\pi - 1}$

**20.**

$$\left( \sqrt{81}^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)} \right)$$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 243

**13- E** **14-A** **15-B** **16-D**

**17-E** **18-E** **19-A** **20-D**

# DİZİLER

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ için, $\lim_{n\to\infty}(3^{-n}) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$ ve

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) = 0$ olduğundan,

$\lim_{n\to\infty}\left(3^{-n} + 4^{\frac{3}{n}} + 6\right) = 0 + 4^0 + 6 = 1 + 6 = 7$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $(a^n) = \left(\frac{(a-2)n^3 - 3n^2 - 1}{(b+1)n^2 + 2n + 1}\right)$

dizisinin limiti varsa, bu dizinin genel teriminin payının derecesi paydasının derecesine eşit olmalıdır.

Buna göre, $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ ve

$\lim(a_n) = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^2}{(b+1)n^2}\right) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{-3}{b+1} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow b + 1 = -2 \Rightarrow b = -3$ tür.

O halde, $a \cdot b = 2.(-3) = -6$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**3.** Bir dizinin alt dizilerinin limiti, bu dizinin limitine eşittir.

O halde,

$\lim(P_{n+1}) = \lim(P_{2n+1}) = \lim(P_{3n+2}) = \lim(P_n)$

$\lim(P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+2n+1}\right)$

$\Rightarrow \lim(P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2}\right) = 2$ olduğundan

$\lim(Q_n) = \lim(P_{n+1} \cdot P_{2n+1} \cdot P_{3n+2})$

$\Rightarrow \lim(Q_n) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**4.** $\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{2^{2n+1} + 3^{2n+2}}\right)$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9.3^n}{9.3^{2n}}\right)$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{12n + 2\sqrt{3n-1}}}{\sqrt{3n+2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{12n}}{\sqrt{3n}}\right)$

$= \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** $\lim(a_n) = \lim(a_{2n}) = \lim(a_{n+2}) = x$ olsun.

$\lim(a_{2n}.a_{n+2} + 2a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{n+2}\right)$

$\Rightarrow x \cdot x + 2x = 8$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ veya $x_2 = -4$

$(a_n)$ pozitif terimli bir dizi olduğundan limiti de pozitiftir. Buna göre

$\lim(a_n) = x = 2$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** **1. Yol:**

$\lim(a_n) = \lim(a_{n-1}) = x$ olsun.

$\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_{n-1}}$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \sqrt{6 + \lim(a_{n-1})}$

$\Rightarrow x = \sqrt{6+x} \Rightarrow x^2 = 6 + x$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ tür.

**2. Yol:**

$a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$ ve $a_1 = \sqrt{6}$ ise,

$a_2 = \sqrt{6 + a_1} \Rightarrow a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}$ ,

$a_3 = \sqrt{6 + a_2} \Rightarrow a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$ ve

$a_n = \sqrt{\underbrace{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{\ldots}}}}_{\text{n tane}}}$ olur.

Ohalde

$\lim(a_n) = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} = 3$ tür.

(2.3)

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**8.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{2n^2-3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan

$\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(4^{\frac{n^2+2n}{2n^2-3}}\right)$

$\Rightarrow \lim(a_n) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{2n+3}$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+3}{2n-1}\right)^{2n+3}$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{2n-1}\right)^{2n+3}$ ve

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{2n-1}\right).(2n+3)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[3.\frac{2n+3}{2n-1}\right]$

$= 3.\frac{2}{2} = 3$ olduğundan

$\lim(a_n) = e^3$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**10.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4n+\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} + 3^{-n} + \frac{4}{n} + 2\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4}{n} + 2\right)$

$= \sqrt{4} + 0 + 0 + 2 = 4$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $(a_n) = \left(\frac{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{2n^3 + n + 1}\right)$

$\Rightarrow (a_n) = \left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2n^3 + n + 1}\right)$

$\Rightarrow \lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6(2n^3 + n + 1)}\right) = \frac{1}{6}$ dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12.** $\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2} \cdot \sin\frac{6}{n}\right) = \infty.0$ olduğundan

$\lim(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(3.\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right) = \frac{3}{1} = 3$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k+1}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

$$=\frac{\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2}}+\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2}}+\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim(a_n)=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2-x}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim(a_n)=\frac{x}{2-x}+1=\frac{2}{2-x}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**14. 1. Yol:**

$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+6n+3}\right)=\infty-\infty$ olduğundan,

$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+6n+1+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{(3n+1)^2+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(3n-|3n+1|\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(3n-(3n+1)\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(3n-(3n+1)\right)=-1$ dir.

**2. Yol:**

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+6n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n-\sqrt{9n^2+6n+3}\right).\left(3n+\sqrt{9n^2+6n+3}\right)}{3n+\sqrt{9n^2+6n+3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-(9n^2+6n+3)}{3n+\sqrt{9n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n-3}{6n}=-1 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.**

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4n^2.\sin 5n+n-7}{2n^3+7n^2.\cos 2n+3n+4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{2n^3}\right)=\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+1}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}.(n-2)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-2}{n^2+1}\right)=1 \text{ ise}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+1}\right)^{(n-2)}=e^1=e \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**17.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n+4^n+5^n}{n^2+n^3+n^4+n^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n^5}\right)=\infty \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**18.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n+3^n}{10^n+3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{10^n}\right)=\infty \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.**

$$(a_n)=\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^3}+\ldots+\frac{1}{\pi^n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\pi}} \text{ ise}$$

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\pi}}$$

$$\Rightarrow \lim(a_n)=\frac{1-0}{\frac{\pi-1}{\pi}}=\frac{\pi}{\pi-1} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**20.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{81}^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}\right)$$

$$=9^{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)}=9^2=81 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

# ARİTMETİK ve GEOMETRİK DİZİLER

TEST - 3 (Çözümlü)

**1.** $x \neq 0$ olmak üzere,

$$x + y,\quad x^2 + 1,\quad 2y - 1$$

**üçlüsü hem aritmetik, hem de geometrik bir dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre, $x - y$ farkı kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 1 D) 2 E) 3

**2.** Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla,

$$2x - 2,\quad 2x + 1,\quad 2x - 6$$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 16 B) 12 C) 9 D) $\frac{11}{20}$ E) $\frac{9}{20}$

**3.** Bir aritmetik dizide ilk n terimin toplamı;

$$S_n = 2n^2 - n$$

**olduğuna göre, bu dizinin onuncu terimi kaçtır?**

A) 35 B) 37 C) 39 D) 40 E) 41

**4.** **İlk terimi 2, sekizinci terimi 20 olan bir geometrik dizinin 15 inci terimi kaçtır?**

A) 200 B) 240 C) 300 D) 380 E) 400

**5.** Bir aritmetik dizinin ardışık beş terimi sırasıyla,

$$\log 4,\quad \log x,\quad \log y,\quad \log z,\quad \log 36$$

**olduğuna göre, $\frac{x \cdot z}{y}$ kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) 24

**6.** **Bir aritmetik dizide ilk terim 1, ilk 15 terimin toplamı ile ilk 10 terimin toplamı arasındaki fark 185 olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{18}{8}$ B) $\frac{16}{5}$ C) 3 D) $\frac{8}{3}$ E) 2

**1- B** **2-D** **3-B** **4-A** **5-D** **6-C**

**7.** Yaşları toplamı 45 olan beş kardeşin yaşları, bir aritmetik dizi oluşturuyor.

**En büyük kardeş 15 yaşında olduğuna göre, en küçük kardeş kaç yaşındadır?**

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

**8.** **Bir geometrik dizinin ilk 6 teriminin çarpımı, ilk 3 teriminin çarpımının 125 katı olduğuna göre, bu geometrik dizinin 5. terimi kaçtır?**

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 5 E) 25

**9.** İlk terimi 1 olan pozitif terimli bir $(a_n)$ geometrik dizisi için,

$$\frac{a_{n+9}}{a_{n+3}} = \frac{1}{64}$$

**bağıntısı olduğuna göre, $a_4$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{1}{64}$

**10.** $x \cdot y \neq 0$ olmak üzere,

**ardışık üç terimi; $x - y$, $xy$, $x^2y$ olan bir dizinin hem aritmetik hem de geometrik dizi olabilmesi için y kaç olmalıdır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

**7-A** **8-D** **9-B** **10-B**

**11.** $(a_n)$ aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı $S_n$ dir.

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{7}{9} \text{ ve } S_4 = 60$$

**olduğuna göre, $a_2$ kaçtır?**

A) 14 B) 18 C) 21 D) 24 E) 28

**12.** **Beşinci terimi $\frac{1}{2}$, dokuzuncu terimi $\frac{1}{32}$ olan bir geometrik dizinin on birinci terimi kaçtır?**

A) $\frac{1}{40}$ B) $\frac{1}{48}$ C) $\frac{1}{64}$ D) $\frac{1}{81}$ E) $\frac{1}{128}$

**13.** **Yedinci terimi $(a - b)$ ve on beşinci terimi $(a + b)$ olan bir aritmetik dizinin yirmi üçüncü terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a + 3b$ B) $3a - b$ C) $2a + b$

D) $5a + 2b$ E) $a - 2b$

**14.** İlk n terim toplamı $S_n$ olan bir dizide,

$$S_n = n^3 + n^2$$

**olduğuna göre, $a_3$ kaçtır?**

A) 24 B) 26 C) 29 D) 35 E) 36

**11-A** **12-E** **13-A** **14-A**

**15.** **Bir geometrik dizinin ilk altı terim toplamının, ilk üç terim toplamına oranı 65 olduğuna göre, ortak çarpanı kaçtır?**

A) 8 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**16.** Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi,

$2k + 1,\quad 3k + 2,\quad 5k + 1$

**olduğuna göre, bu dizinin beşinci terimi kaçtır?**

A) 2 B) 8 C) 11 D) 14 E) 17

**17.** **Bir aritmetik dizide, üçüncü terim 7 ve on ikinci terim 4 olduğuna göre, ortak fark kaçtır?**

A) $-\frac{1}{6}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-1$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

**18.** Bir dizide; herhangi bir terim, kendisinden bir önceki terim ile bir sonraki terimin çarpımına eşit olarak veriliyor.

$a_2 = 2$ ve $a_3 = 3$

**olduğuna göre, $a_6$ kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

**19.** **10 ile 32 arasına aritmetik dizi oluşacak şekilde 10 terim yerleştirilirse on iki terimli dizinin 4. terimi kaç olur?**

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

**20.** **İlk terimi $\log_a 2$ ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin ilk üç teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $7.\log_a 2$ B) $3.\log_a 2$ C) $\log_a 4$

D) $\log_a 8$ E) $\log_a 16$

**15-B** **16-E** **17-B** **18-C** **19-C** **20-A**

# ARİTMETİK ve GEOMETRİK DİZİLER

TEST - 3 (Çözümleri)

**1.** Bir dizi, hem aritmetik hem de geometrik bir dizi ise bu dizi sabit dizidir. Buna göre,

$x + y = x^2 + 1 = 2y - 1$ olmalıdır. Buradan,

$x + y = 2y - 1 \Rightarrow y = x + 1$

$\Rightarrow x - y = -1$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.** $2x-2,\ 2x+1,\ 2x-6$ bir geometrik dizinin ardışık üç terimi ise,

$\frac{2x+1}{2x-2} = \frac{2x-6}{2x+1}$ olmalıdır. Buradan,

$(2x+1)^2 = (2x-2)(2x-6)$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x - 4x + 12$

$\Rightarrow 20x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{20}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** **1. Yol:**

$S_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_9 + a_{10} = 2.10^2 - 10$

$S_9 = a_1 + a_2 + ... + a_8 + a_9 = 2.9^2 - 9$

$\Rightarrow a_{10} = 2.(10^2 - 9^2) - 10 + 9$

$\Rightarrow a_{10} = 2.(10 + 9) - 1$

$\Rightarrow a_{10} = 37$ dir.

**2. Yol:**

$S_1 = a_1 = 2 . 1^2 - 1 \Rightarrow a_1 = 1,$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2 . 2^2 - 2 \Rightarrow 1 + a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 5$ ve

$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 5 - 1 \Rightarrow d = 4$ olduğundan,

$a_{10} = a_1 + 9 . d \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 . 4 \Rightarrow a_{10} = 37$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**4.** $\frac{a_8}{a_1} = r^7 \Rightarrow \frac{20}{2} = r^7 \Rightarrow r^7 = 10$ olduğundan,

$a_{15} = a_1 . r^{14} \Rightarrow a_{15} = 2.(r^7)^2$

$\Rightarrow a_{15} = 2 . 10^2$

$\Rightarrow a_{15} = 200$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**5.** Bir aritmetik dizide herhangi bir terim, kendisinden *eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşit* olduğundan,

$\log y = \frac{\log 4 + \log 36}{2} = \frac{\log x + \log z}{2}$ ise,

$2\log y = \log(4.36) = \log(x . z)$ ise

$\log y^2 = \log(4 . 36)$ ve $\log(4 . 36) = \log(x . z)$

$\Rightarrow y^2 = 4 . 36 \Rightarrow y = 2 . 6 = 12$ ve $4 . 36 = x . z$

$\frac{x.z}{y} = \frac{4.36}{12} \Rightarrow \frac{x.z}{y} = 12$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** **1. Yol:**

$S_{15} - S_{10} = \overbrace{a_{15} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11}}^{2 . a_{13}} = 185$

$\Rightarrow 5 . a_{13} = 185 \Rightarrow a_{13} = 37$ ve

$a_{13} = a_1 + 12 . d \Rightarrow 37 = 1 + 12 . d \Rightarrow d = 3$ tür.

**2. Yol:**

$a_{15} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} = 185$

$(a_1 + 14d) + (a_1 + 13d) + (a_1 + 12d) + (a_1 + 11d)$

$+ (a_1 + 10d) = 185$

$\Rightarrow 5a_1 + 60d = 185 \Rightarrow 60d = 185 - 5 . 1$

$\Rightarrow d = 3$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** **1. Yol:**

Beş kardeşin yaşları, aritmetik bir dizi oluşturduğuna göre, yaşlarının aritmetik ortalaması ortanca ($a_3$) kardeşin yaşına eşittir. Buna göre,

$a_3 = \frac{45}{5} = 9$ ve

$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} \Rightarrow 9 \cdot 2 = 15 + a_1$

$\Rightarrow a_1 = 3$ tür.

**2. Yol:**

$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) \Rightarrow 45 = \frac{5}{2}(15 + a_1)$

$\Rightarrow a_1 = 3$ tür.

**3. Yol:**

$x_3 = \frac{45}{5} \Rightarrow x_3 = 9$ ve

$x_5 - x_3 = 2 \cdot d \Rightarrow 15 - 9 = 2 \cdot d \Rightarrow d = 3$ olur.

Buna göre,

$x_3 = x_1 + 2d \Rightarrow 9 = x_1 + 2 \cdot 3$

$\Rightarrow x_1 = 3$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = 125$

$\Rightarrow \underbrace{a_4 \cdot a_5}_{a_5^2} \cdot a_6 = 125$

$\Rightarrow (a_5)^2 \cdot a_5 = 125 \Rightarrow (a_5)^3 = 5^3$

$\Rightarrow a_5 = 5$ tir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $\frac{a_n}{a_k} = r^{n-k}$ olduğundan,

$\frac{a_{n+9}}{a_{n+3}} = \frac{1}{64} \Rightarrow r^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$\Rightarrow r = \frac{1}{2}$ $(r > 0)$

$a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow a_4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\Rightarrow a_4 = \frac{1}{8}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** Bir dizinin hem aritmetik hem de geometrik bir dizi olması için,

$x - y = xy = x^2y$

$\Rightarrow xy = x \cdot (xy)$

$\Rightarrow x = 1 \quad (x \cdot y \neq 0)$

$x - y = xy \Rightarrow 1 - y = 1 \cdot y$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** $\frac{a_2}{a_4} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{a_1 + d}{a_1 + 3d} = \frac{7}{9}$

$\Rightarrow 9a_1 + 9d = 7a_1 + 21d$

$\Rightarrow a_1 = 6d$ ve

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 60$

$\Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 60$

$\Rightarrow 4a_1 + 6d = 60 \Rightarrow 4a_1 + a_1 = 60$

$\Rightarrow a_1 = 12$ bulunur.

Buna göre,

$a_1 = 6d = 12 \Rightarrow d = 2$ ve

$a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_2 = 12 + 2 = 14$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** $\frac{a_9}{a_5} = r^4 \Rightarrow \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = r^4$

$\Rightarrow \frac{1}{16} = r^4 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ ve

$a_{11} = a_9 \cdot r^2 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{128}$ tür.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $a_{15} - a_7 = 8d \Rightarrow (a + b) - (a - b) = 8d$

$\Rightarrow 8d = 2b$ ve

$a_{23} = a_{15} + 8d \Rightarrow a_{23} = (a + b) + 2b$

$\Rightarrow a_{23} = a + 3b$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $a_3 = S_3 - S_2 = (3^3 + 3^2) - (2^3 + 2^2)$

$\Rightarrow a_3 = 24$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $\dfrac{a_1 + a_1r + ... + a_1r^5}{a_1 + a_1r + a_1r^2} = 65$

$\Rightarrow \dfrac{1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5}{1 + r + r^2} = 65$

$\Rightarrow \dfrac{(1 + r + r^2) + r^3(1 + r + r^2)}{1 + r + r^2} = 65$

$\Rightarrow 1 + r^3 = 65 \Rightarrow r = 4$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ olduğundan,

$(3k + 2) - (2k + 1) = (5k + 1) - (3k + 2)$

$\Rightarrow k + 1 = 2k - 1 \Rightarrow k = 2$ ve

$a_1 = 2k + 1 \Rightarrow a_1 = 5,$

$a_2 = 3k + 2 \Rightarrow a_2 = 8$ olur.

Ardışık terimler arasındaki fark $8 - 5 = 3$ olduğundan bu dizinin beşinci terimi $(a_5)$

$5, 8, 11, 14, 17 = a_5$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17.** $a_{12} - a_3 = 9d \Rightarrow 4 - 7 = 9d$

$\Rightarrow d = -\dfrac{1}{3}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.** $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ ise,

$a_3 = a_2 \cdot a_4 \Rightarrow 3 = 2 \cdot a_4 \Rightarrow a_4 = \dfrac{3}{2},$

$a_4 = a_3 \cdot a_5 \Rightarrow \dfrac{3}{2} = 3 \cdot a_5 \Rightarrow a_5 = \dfrac{1}{2}$ ve

$a_5 = a_4 \cdot a_6 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot a_6 \Rightarrow a_6 = \dfrac{1}{3}$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**19.** $a_1 = 10,\ a_2, a_3, a_4, ..., a_{11}, a_{12} = 32$ ise,

$a_{12} - a_1 = 11d \Rightarrow 32 - 10 = 11d$

$\Rightarrow d = 2$ ve

$a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_4 = 10 + 3 \cdot 2 = 16$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**20.** $a_1 = \log_a 2$ ve $r = 2$ ise

$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 = 2 \cdot \log_a 2$

$a_3 = a_2 \cdot r \Rightarrow a_3 = 2 \cdot (2\log_a 2) = 4 \cdot \log_a 2$

olduğuna göre,

$a_1 + a_2 + a_3 = \log_a 2 + 2 \cdot \log_a 2 + 4 \cdot \log_a 2$

$= 7 \cdot \log_a 2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# SERİLER

TEST - 4 (Çözümlü)

**1.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}.3^{-n})$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) 4 E) 6

**2.** $\sum_{k=1}^{\infty} (1,1)^{-k}$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{10}{9}$ B) $\frac{11}{10}$ C) 9 D) 10 E) 11

**3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 5 D) $\frac{15}{2}$ E) 10

**4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n + 4^n}{5^n}$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{25}{6}$ B) $\frac{26}{6}$ C) $\frac{29}{6}$ D) $\frac{31}{6}$ E) $\frac{35}{6}$

**5.** $\sum_{n=-3}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

toplamının değeri kaçtır?

A) 1 B) $-\frac{16}{3}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $-\frac{8}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

**6.** a > 3 olmak üzere,

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{3^n}{a^{n+1}} = \frac{25}{18}$$

eşitliğini sağlayan a nın tamsayı değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**7.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} + 3^{2n}}{12^n}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**8.** x > 3 olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n.x^{1-n}) = 9$$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a.2^{2n} + 3^{n+2}}{12^{n+1}} = \frac{9}{8}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 9 D) 18 E) 21

**10.** $\prod_{n=1}^{\infty} 3^{(3^{1-n})}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

| 1-E | 2-D | 3-D | 4-C | 5-B |
|---|---|---|---|---|

| 6-B | 7-C | 8-C | 9-E | 10-C |
|---|---|---|---|---|

**11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{5^k}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{25}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{125}$

**12.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 1

**13.** $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$

**ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln 2$ B) $\ln 5$ C) $\ln 10$ D) 0 E) $\infty$

**14.** Dik kenarlarından biri 4 cm olan bir ikizkenar dikü-genin dik kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir dikü-gen elde ediliyor.

**Bu işleme sonsuz kez devam edildiğinde elde edilen bütün üçgenlerin alanlarının toplamı kaç $cm^2$ olur?**

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) $\frac{64}{3}$ E) $\frac{128}{3}$

**15.** $\frac{12}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\frac{12}{3^4}+\ldots+\frac{12}{3^n}+\ldots$

**toplamının değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**16.** $\frac{1}{3^2-6}+\frac{1}{4^2-8}+\frac{1}{5^2-10}+\frac{1}{6^2-12}+\ldots+\frac{1}{n^2-2n}+\ldots$

**toplamının değeri kaçtır?**

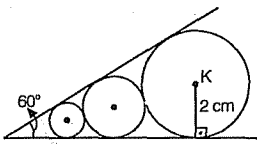
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 2 E) 3

**17.** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\ldots+\frac{1}{(-3)^n}+\ldots$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{8}{9}$

**18.** Şekildeki 60° lik bir açının kolları arasında en dışta yarıçapı 2 cm olan bir daire vardır. Bu daire ve açının kollarına teğet olacak şekilde daireler çizilerek açının köşesine doğru bu işleme devam ediliyor.




**Elde edilen bu dairelerin alanları toplamı kaç $\pi$ $cm^2$ olur?**

A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) 6 E) 8

**11-B** **12-A** **13-E** **14-C**

**15-A** **16-C** **17-D** **18-B**

# SERİLER

TEST - 4 (Çözümleri)

**1.** İlk terim $a_1$, ortak çarpanı r olan bir geometrik serinin toplamı, $\frac{a_1}{1-r}$ dir. O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}\cdot 3^{-n})=\sum_{n=0}^{\infty}\left[2.\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \text{ ise}$$

ilk terim $n = 0$ için $a_1 = 2$ ortak çarpan $r = \frac{2}{3}$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}\cdot 3^{-n})=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6 \text{ dır.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** $\sum_{k=1}^{\infty}(1,1)^{-k}$ ise

İlk terim n = 1 için, $a_1 = \left(\frac{11}{10}\right)^{-1}=\frac{10}{11}$ ortak çarpan

$r = (1,1)^{-1} = \frac{10}{11}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1,1)^{-k}=\frac{\frac{10}{11}}{1-\frac{10}{11}}=10 \text{ dur.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^0}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^0}{1-\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{1}{\frac{2}{5}}+\frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**4.** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n+4^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+4=\frac{29}{6} \text{ dır.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $$\sum_{n=-3}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-8}{\frac{3}{2}}=-\frac{16}{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**6.** $$\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{3^n}{a^{n+1}}=\frac{25}{18}$$

$$\frac{1}{a}\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=\frac{25}{18}$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{3}{a}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{a}}=\frac{25}{18}$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{a}{a-3}=\frac{25}{18}$$

$\Rightarrow 2a^2 - 25a + 75 = 0$

$\Rightarrow 2a^2 - 10a - 15a + 75 = 0$

$\Rightarrow 2a(a - 5) - 15(a - 5) = 0$

$\Rightarrow (a - 5)(2a - 15) = 0$

eşitliğini sağlayan a nın tamsayı değeri a = 5 tir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}+3^{2n}}{12^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{12}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{12}\right)^n$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$= 2+3 = 5$ tir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n . x^{1-n}) = 9 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n . x = 9$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^0 \cdot x}{1-\frac{2}{x}} = 9$$

$$\Rightarrow x = 9.\frac{x-2}{x}$$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-6) = 0$

$\Rightarrow x = 6$ dır. $(x > 3)$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a.2^{2n}+3^{n+2}}{12^{n+1}} = \frac{9}{8}$

$$\Rightarrow \frac{a}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{12}\right)^n + \frac{9}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{12}\right)^n = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{12}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{12}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{9}{8}\cdot\frac{3}{3}$$

$\Rightarrow a+6 = 27 \Rightarrow a = 21$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**10.** $\prod_{n=1}^{\infty} 3^{(3^{1-n})} = 3^{\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n}}$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n} = \frac{3^0}{1-\frac{1}{3}} \qquad \left(r = \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ ise}$$

$$3^{\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3}$$

$= 3\sqrt{3}$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{5^k} = (-1)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^k}$

$$= (-1)\cdot\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

$= \frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**13.** $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n}{n-1}$

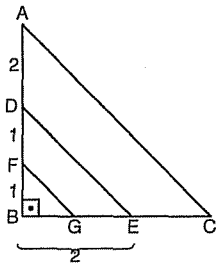
$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots$$

$$= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{\infty+1}{\infty}\right)$$

$= \infty$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**14.**




$a_1 = A(ABC) = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\ cm^2$

$a_2 = A(DBE) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ cm^2$

$a_3 = A(FBG) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ cm^2$

$(a_n) = (8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, ...)$ ve

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + ...$$

$$= \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{4}} = \frac{32}{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** $\frac{12}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \frac{12}{3^4} + ... + \frac{12}{3^n} + ...$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{12}{3^{n+2}} = \frac{12}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**16.** $\frac{1}{3^2 - 6} + \frac{1}{4^2 - 8} + \frac{1}{5^2 - 10} + ... + \frac{1}{n^2 - 2n} + ...$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + ...\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

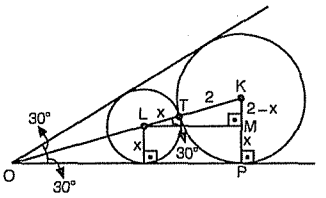
**17.** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ... + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + ...$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^0}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**18.**




Çemberler, açı kollarına ve birbirlerine teğet olduğundan bu çemberlerin merkezleri, açıortay doğrusu üzerindedir. O halde,

[LM] // [OP olduğundan,

$s(\widehat{KOP}) = s(\widehat{KLM}) = 30°$ dir.

KLM dikküçgeninde,

Hipotenüsün uzunluğu, 30° lik açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun 2 katıdır. Buradan,

$|KL| = 2.|KM|$

$\Rightarrow |LT| + |TK| = 2.(|KP| - |MP|)$

$\Rightarrow x + 2 = 2 \cdot (2 - x)$

$\Rightarrow x + 2 = 4 - 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ cm dir.

Buna göre,

$a_1 = \pi \cdot |KT|^2 \Rightarrow a_1 = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = 4 \cdot \pi\ cm^2$

$a_2 = \pi \cdot |TL|^2 \Rightarrow a_2 = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{9} \cdot \pi\ cm^2$

$\frac{a_2}{a_1} = r \Rightarrow r = \frac{\frac{4\pi}{9}}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{9}$ olur.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$= \frac{4\pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{2} \cdot \pi \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# DİZİLER - SERİLER

TEST - 5

**1.** **Aşağıdakilerden hangisi dizi değildir?**

A) $\left(\frac{1}{n}\right)$ B) $\left(\frac{1}{n-5}\right)$ C) (3)

D) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ E) $(n^2 + n)$

**2.** **Aşağıdakilerden hangisi sabit dizi değildir?**

A) (100) B) $((-1)^n+(-1)^{n+1})$ C) (1000!)

D) $((-1)^{2n+4})$ E) $\left(\frac{10!}{n}\right)$

**3.** $(a_n)=\left(\frac{n^2+24}{n}\right)$

**dizisinin kaç tane terimi tamsayıdır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**4.** **Aşağıdakilerden hangisi $(a_n) = (3n - 2)$ dizisinin bir alt dizisi değildir?**

A) $(9n + 1)$ B) $(3n^2 - 5)$ C) $(3n^2 + 1)$

D) $(3n^2 - 2)$ E) $(3n^3 - 2)$

**5.** $(a_n) = \begin{cases} n^2, & n \text{ tek sayı} \\ n-1, & n \text{ çift sayı} \end{cases}$

**olduğuna göre, $(a_n)$ dizisinin ilk dört terim toplamı kaçtır?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

**6.** $(a_n)=\left(\frac{n^2-n+8}{n}\right)$

**dizisinin kaç terimi tamsayıdır?**

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**7.** $(a_n) = (n^2 + 2)$

**olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi $(a_n)$ dizisinin bir alt dizisidir?**

A) $n^2 + 2n + 3$ B) $n^2 + 4n + 1$ C) $n^2 - 1$

D) $n^2 + 1$ E) $n^2 + n$

**8.** **(2, 5, 8, .... , (3n – 1), ....) dizisinin ilk beş terim toplamı kaçtır?**

A) 44 B) 40 C) 39 D) 35 E) 32

**1-B** **2-E** **3-B** **4-B**

**5-C** **6-D** **7-A** **8-B**

**9.** Her n sayma sayısı için,

$a_{n+1} + 2n + 5 = 2 \cdot a_n$ ve $a_1 = 2$

**olduğuna göre, $a_3$ kaçtır?**

A) 15 B) 11 C) –9 D) –11 E) –15

**10.** $n \geq 1$ olmaküzere,

**$2 \cdot a_n = a_{n+1}$ ve $(a_n)$ dizisinin ilk üç terim toplamı 21 olduğuna göre, ilk terimi kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

**11.** $(a_n) = \left(\frac{1}{n+2}\right)$

**dizisinin kaç terimi $\frac{1}{6}$ sayısından büyüktür?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**12.** $(b_n) = (n - 3)$

**dizisinin kaç terimi negatiftir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**9-E** **10-A** **11-C** **12-C**

**13.** (3, 5, 7, 9, .....)

**şeklinde devam eden aritmetik dizinin onuncu terimi kaçtır?**

A) 19 B) 21 C) 23 D) 24 E) 25

**14.** $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, .....)$

**şeklinde devam eden geometrik dizinin beşinci terimi kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

**15.** **2 ve 14 sayıları arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde üç terim yerleştirilir ise oluşan beş terimli sonlu aritmetik dizisinin üçüncü terimi ile dördüncü teriminin toplamı kaçtır?**

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

**16.** $(a_n) = (0, 0, 0, .....)$

$(b_n) = (2, 2, 2, .....)$

$(c_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$(d_n) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$

olmak üzere,

**$\lim(a_n) + \lim(b_n) + \lim(c_n) + \lim(d_n)$ kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**13-B** **14-D** **15-A** **16-C**

**17.** $(a_n)=\left(\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}\right)$

dizisinin limiti kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) $-\frac{1}{2}$

**18.** $(a_n)=\left(\frac{3n^3+5}{2n^3+1}\right)$ dizisinin bir alt dizisi $(a_{n+2})$ olduğuna göre, $\lim (a_{n+2})$ kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{27}{8}$

**19.** $2a+1,\ 4-3a,\ 2a-3$

bir aritmetik dizi oluşturduğuna göre, a kaçtır?

A) 3 B) 1 C) – 1 D) – 3 E) – 4

**20.** Bir geometrik dizide, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ olduğuna göre, $\frac{a_3}{a_4}$ kaçtır?

A) 9 B) 6 C) 3 D) 1 E) $\frac{1}{3}$

**17-A** **18-C** **19-B** **20-C**

**21.** $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ .....$

serisinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

**22.** Üçüncü terimi a, beşinci terim $a^3$ olan pozitif terimli bir geometrik dizinin ikinci terimi kaçtır?

A) $\frac{1}{a^2}$ B) $\frac{1}{a}$ C) 1 D) a E) $a^2$

**23.** $(a_n)=\left(\frac{2^n-3^n}{1-6^n}\right)$

olduğuna göre, $(a_{n2})\ .\ (a_{3n-1})$ dizisinin limiti kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**24.** $(a_n)=\left(\frac{(-1)^n}{2n+3}\right)$

olduğuna göre, $(a_{2n+1})$ alt dizisinin 5. terimi kaçtır?

A) $\frac{1}{25}$ B) $-\frac{1}{25}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $-\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{18}$

**21-A** **22-C** **23-C** **24-B**

# DİZİLER - SERİLER

TEST - 6

**1.** $(a_{n+1}) = (a_n) - 2$
$a_1 = 2$

**olduğuna göre, $a_{104}$ kaçtır?**

A) – 196 B) – 198 C) – 200 D) – 204 E) – 206

**2.** $(a_{n+2}) = \left(\frac{n!}{n^n}\right)$

**olduğuna göre, $(a_4)$, $(a_6)$ nın kaç katıdır?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{16}{3}$

**3.** $(a_n) = \begin{cases} \log_2 n, & n \text{ çift sayı} \\ 2^n, & n \text{ tek sayı} \end{cases}$

**olduğuna göre, $a_5 + a_8$ kaçtır?**

A) 32 B) 33 C) 34 D) 35 E) 36

**4.** $(a_n)$ pozitif terimli yakınsak bir dizidir.

$(a_{2n})$, $(a_{3n})$ ve $(a_{5n})$ dizileri $(a_n)$ dizisinin birer alt dizileridir.

**$2(a_{2n}) \cdot (a_{3n}) - (a_{5n}) = 3$ olduğuna göre, $\lim(a_n)$ kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{3}{2}$

**5.** $(a_n) = \left(\frac{3n-1}{2+kn}\right)$

**dizisinin sabit bir dizi olması için k kaçtır?**

A) – 6 B) – 3 C) – 1 D) 3 E) 9

**6.** $(a_n) = \left(\frac{2n-4}{4n+1}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) – 2

**7.** $(b_n) = 5^{\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)}$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 1 B) 5 C) 25 D) 125 E) 625

**8.** $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$ **dizisinin E.K.Ü.S. ve E.B.A.S. toplamı kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**1-D** **2-E** **3-D** **4-E**

**5-A** **6-D** **7-C** **8-C**

**9.** $(a_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $(b_n)=\left(\frac{n}{3n+1}\right)$

$(c_n)=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

**olduğuna göre, $\lim(c_n)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

**10.** **Bir geometrik dizisinin ardışık beş terimi 3, x, y, z, $3^5$ olduğuna göre, x . y . z çarpımı kaçtır?**

A) $3^6$ B) $3^7$ C) $3^8$ D) $3^9$ E) $3^{10}$

**11.** **İlk terimi 6, ortak farkı –2 olan aritmetik dizinin kaçıncı terimi –14 tür?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

**12.** Bir aritmetik dizinin dördüncü terimi 12, onuncu terimi 36 dır.

**Buna göre, ilk on terim toplamı kaçtır?**

A) 240 B) 180 C) 120 D) 210 E) 360

**13.** **$(a_n)=\left(\frac{3n+x}{2n+y}\right)$ dizisi sabit bir dizi olduğuna göre, x + y toplamı x – y farkının kaç katıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**14.** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

**serisinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

**15.** $(a_n)$ geometrik dizisinin ilk üç terim toplamı $\frac{21}{2}$ dir.

**$(a_{n+1}) = 4 . (a_n)$ olduğuna göre, dizinin altıncı terimi kaçtır?**

A) $2^2$ B) $2^4$ C) $2^6$ D) $2^9$ E) $2^{10}$

**16.** $(a_n)=\left(\frac{\sqrt{12n+3}}{\sqrt{3n+1}}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

**9-E** **10-D** **11-C** **12-B**

**13-D** **14-B** **15-D** **16-D**

# DİZİLER - SERİLER

TEST - 7

**1.** $(a_n) = (1 + 2 + 3 + ... + n)$

$(b_n) = (1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1))$

**olduğuna göre, $(a_n + b_n)$ dizisinin dördüncü terimi kaçtır?**

A) 10 B) 16 C) 20 D) 26 E) 30

**2.** $(a_n) = \left(\frac{n-k+2}{11}\right)$

**dizisinin altıncı terimi 2 olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 14 B) 7 C) – 7 D) – 11 E) – 14

**3.** $(a_n) = (2n + 3)$ ve $(b_n) = (3n - 1)$

**olmak üzere, $(a_n + b_n)$ dizisinin kaçıncı terimi 22 dir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**4.** $(a_{n+2}) = \left(\frac{2n+4}{n+5}\right)$

**olduğuna göre, $(a_n)$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2n+2}{n+3}$ B) $\frac{n}{n+3}$ C) $\frac{2n}{n+3}$

D) $\frac{2n+2}{n+4}$ E) $\frac{2n+3}{n+3}$

**1-D** **2-E** **3-B** **4-C**

**5.** $(a_n) = \left(\frac{n+k+1}{3}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{k+7}{2}\right)$

**olmak üzere; $(a_n)$ dizisinin üçüncü terimi, $(b_n)$ dizisinin beşinci terimine eşit olduğuna göre, $b_5$ kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) – 4 E) – 3

**6.** $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n}\right)$

**dizisinin EBAS ı kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

**7.** $(a_n) = \left(\frac{4n^2+1}{n^2}\right)$

**dizisinin EKÜS ü kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) $\frac{1}{4}$

**8.** **2 nin $\frac{1}{5}$ komşuluğu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right)$ B) $\left(\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right)$ C) $\left(\frac{9}{5}, \frac{10}{5}\right)$

D) $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ E) $\left(\frac{8}{5}, \frac{13}{5}\right)$

**5-E** **6-C** **7-A** **8-A**

**9.** $\lim(a_n) = 4$ olduğuna göre, $(a_{n+2} + 3a_{n+1} - 5)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

**10.** Bir aritmetik dizide,

$a_4 = 8$ ve $a_{10} = 18$

**olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 2 E) $\frac{1}{3}$

**11.** Bir geometrik dizide,

$a_5 = 8$ ve $a_8 = 27$

**olduğuna göre, ortak çarpan kaçtır?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

**12.** Bir aritmetik dizide,

$a_3 = 3$ ve $a_5 = 5$

**olduğuna göre, bu dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) n B) n – 1 C) n + 1 D) n – 2 E) n + 2

**9-D** **10-B** **11-C** **12-A**

**13.** Pozitif terimli bir geometrik dizide,

$a_2 = 2$ ve $a_6 = 32$

**olduğuna göre, bu dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2^{n+2}$ B) $2^{n-2}$ C) $2^{n+1}$ D) $2^n$ E) $2^{n-1}$

**14.** $(a_n) = \left(\frac{(k-3)n+5}{(3+k)n+4}\right)$

**dizisinin limiti 4 olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 5 B) 3 C) –1 D) –3 E) –5

BEM YAYINLARI

**15.** **4, a, b, 32 elemanları bir geometrik dizinin ilk dört terimi olduğuna göre, a . b çarpımı kaçtır?**

A) 128 B) 64 C) 32 D) 16 E) 8

**16.** $2.4 + 3.5 + 4.6 + .....$

**serisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k-1)$ B) $\sum_{k=1}^{\infty}k(k+2)$ C) $\sum_{k=2}^{\infty}k(k+2)$

D) $\sum_{k=2}^{\infty}k(k-2)$ E) $\sum_{k=0}^{\infty}k(k+2)$

**13-E** **14-E** **15-A** **16-C**

**17.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

**18.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k}$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 3

**19.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$

serisinin toplamı kaçtır?

A) 7 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

**20.** $\sum_{k=n}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{54}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**17-E** **18-A** **19-D** **20-C**

**21.** $(a_n) = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

dizisine göre, EKÜS $(a_n)$ – EBAS $(a_n)$ farkı kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**22.** $(a_n) = \log\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$

dizisinin ilk 5 terim toplamı kaçtır?

A) log 5! B) log $\frac{56}{6!}$ C) log 6!

D) log 20 E) 20

**23.** $(a_n)$, aritmetik dizisinde, $a_6 = 3x$, $a_{12} = 6x$ ve ortak fark $r = 3$ ise x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

**24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$ toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

**21-E** **22-D** **23-D** **24-E**

# DİZİLER

TEST - 8

**1.** $(a_n) = \left(n.\sin\frac{5}{n}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) – 5 B) – 1 C) 0 D) 5 E) 25

**2.** $a_1 = \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$(a_n) = \left(\frac{n+4}{n+3}\right).a_{n+1}$$

***olduğuna göre, $(a_n)$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?***

A) $\frac{1}{n+2}$ B) $\frac{3}{n+2}$ C) $\frac{n+1}{n+2}$

D) $\frac{n+3}{n+1}$ E) $\frac{2}{n+3}$

**3.** Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -n, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

**olan $(a_n)$ dizisinin ilk 50 teriminin toplamı kaçtır?**

A) 100 B) 50 C) 25 D) –25 E) –50

**4.** $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^2}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 6

**5.** $(a_n) = \left(\frac{3n-2}{n+3}\right)$

**dizisinin bir terimi $\frac{10}{7}$ olduğuna göre, bundan sonraki terimi kaçtır?**

A) $\frac{10}{9}$ B) $\frac{13}{8}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{7}{4}$

**6.** $(a_n) = \left(\frac{10}{n}\right)$

**dizisinin $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında kaç terimi vardır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

**7.** $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$

**dizisinin ilk 4 teriminin toplamı kaçtır?**

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

**8.** $(a_n) = \left(\frac{1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2}{1-n^3}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

**1-D** **2-E** **3-C** **4-A**

**5-B** **6-C** **7-E** **8-A**

**9.** $\left(\frac{3^n - n!}{2^n - n!}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

**10.** $(a_n) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} 6k(k+1)}{n^3 + 3}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**11.** $(a_n) = (n^2 - 3n + 2)$

**olduğuna göre, EBAS $(a_n)$ kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

**12.** $(a_n) = \left(\frac{\sin(3n)}{n}\right)$

**olduğuna göre, lim $(a_{n+3})$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 3 D) $\infty$ E) Yoktur

**13.** Genel terimi,

$$a_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

**olan $(a_n)$ dizisinin EBAS'ı ile EKÜS'ünün toplamı kaçtır?**

A) $\frac{14}{3}$ B) $\frac{19}{9}$ C) $\frac{27}{14}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

**14.** $(a_n) = \left(\frac{n^2 + 4n + 19}{n + 2}\right)$

**dizisinin kaç terimi tamsayıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**15.** $(a_n) = ((-1)^{n+1} \cdot 2n)$

**dizisinin ilk 100 teriminin toplamı kaçtır?**

A) – 100 B) – 50 C) 0 D) 50 E) 100

**16.** $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{6}{4n+1}\right)^{2n+1}\right)$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) e B) $e^2$ C) $e^3$ D) $e^4$ E) $e^5$

**9-C** **10-B** **11-C** **12-A**

**13-A** **14-B** **15-A** **16-C**

**17.** n pozitif tamsayı ve $a_1 = 2$ olmak üzere,

$$a_n = (n + 1) \cdot a_{n-1}$$

**olduğuna göre, $a_{10}$ kaçtır?**

A) 9 B) 11 C) 9! D) 10! E) 11!

**18.** $(a_n)$ bir aritmetik dizi olmak üzere,

$$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} = 6n + 3$$

**olduğuna göre, $(a_n)$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2n + 5$ B) $n + 5$ C) $2n - 3$

D) $2n + 3$ E) $2n - 5$

**19.** $(a_{4n})$ ve $(a_{2n+1})$ dizileri, $(a_n)$ dizisinin alt dizileridir.

$$(a_n) = \left(\frac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}\right)$$

$$(b_n) = (3 \cdot a_{4n} - a_{2n+1} + 10)$$

**olduğuna göre, $\lim(b_n)$ kaçtır?**

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

**20.** Genel terimi,

$$(a_n) = \left(\frac{2}{n^2+3n+2}\right)$$

**olan dizinin ilk 5 teriminin toplamı kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{5}{21}$ D) $\frac{8}{21}$ E) $\frac{5}{21}$

**17-E** **18-A** **19-A** **20-B**

**21.**

$$(a_n) = \log\left(\frac{2^n+1}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

**dizisinin limiti kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

**22.** $(a_n) = \left(\frac{8n+2k}{n+3}\right)$ **dizisi sabit bir dizi olduğuna göre, k kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

**23.**

$$a_n = \begin{cases} n! & : n \equiv 0 \pmod 5 \\ \frac{1}{n-1} & : n \equiv 1 \pmod 5 \\ \frac{2n+1}{n+3} & : n \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$$

**olduğuna göre, $(a_n)$ dizisinde $\frac{a_5 \cdot a_6}{a_2}$ kaçtır?**

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

**24.** $\left((3^n + 2.5^n)^{\frac{1}{n}}\right)$ **dizisinin limiti kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

**21-A** **22-D** **23-C** **24-D**

# SERİLER

TEST - 9

**1.** $\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{27}{4}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

**2.** $\sum_{n=-3}^{\infty} 2^{-3n-12}$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

**3.** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-a} = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**4.** $\sum_{k=-3}^{\infty}\left(2^{k+3}\right)^{-1}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) $\frac{25}{2}$ C) $\frac{25}{3}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{20}{3}$

**5.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1000}{n+1}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) – 1000 B) – 3 C) 3 D) 0 E) ∞

**6.** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left[2.\left(\frac{1}{a}\right)^k\right]$

olduğuna göre, a reel sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**7.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!\,.\,(k+1)}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

**8.** $\frac{4^{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)}}{2^{\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\cdots}}}}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $2^{-6}$ B) $2^{-5}$ C) $2^{-4}$ D) $2^{-3}$ E) $2^{-2}$

1-A 2-B 3-A 4-A

5-C 6-A 7-A 8-B

**9.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(a+k).(a+k+1)}$

**toplamının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{a+2}$ B) $\frac{1}{a+1}$ C) $\frac{1}{a}$ D) $\frac{1}{a-1}$ E) $\frac{1}{a-2}$

**10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[3^{2-n} + (-0{,}5)^{2n}\right]$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{29}{6}$

**11.** $\sum_{k=-\infty}^{2} 2^k$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**12.** $\prod_{n=1}^{\infty} 3^{x\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 81$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

**13.** $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} - \cdots$

**sonsuz toplamının değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

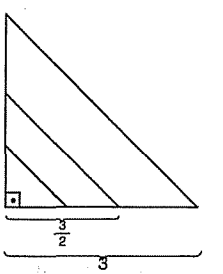
**14.** $0 < a < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a(1-a)^{n+2}$$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) $(a-1)^3$ B) $(1-a)^4$ C) 1 D) $1-(a-1)^3$ E) $1-(1-a)^4$

**15.** Dik kenarı 3 cm olan ikizkenar bir diküçgenin dik kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir diküçgen elde ediliyor.




**Bu işleme sonsuz çoklukla devam edildiğinde oluşan bütün üçgenlerin alanları toplamı kaç $cm^2$ olur?**

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

**16.** Bir top 30 m yükseklikten bırakılıyor. Top yere çarptıktan sonra bırakıldığı yüksekliğin $\frac{1}{3}$'ü kadar yükseliyor.

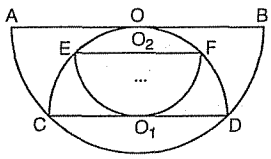
**Top duruncaya kadar kaç metre yol alır?**

A) 45 B) 60 C) 75 D) 120 E) 150

**9-A** **10-E** **11-B** **12-C**

**13-D** **14-B** **15-A** **16-B**

**17.** Yandaki şekilde, O merkezli, yarıçapı 6 cm olan yarım dairenin içine $O_1$ merkezli, $O_2$ merkezli gibi sonsuz tane yarım daire çizilmiştir.




**Buna göre, oluşan tüm yarım dairelerin alanlarının toplamı kaç $cm^2$ dir?**

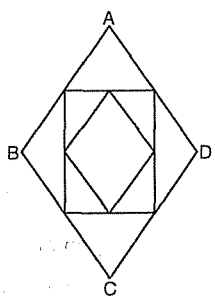
A) $9\pi$ B) $18\pi$ C) $36\pi$ D) $54\pi$ E) $72\pi$

**18.** $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{a-k} + \prod_{k=1}^{\infty} 2^{(2^{-k})} = 10$$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**19.** ABCD eşkenar dörtgenin köşegen uzunlukları
$|AC| = 16$ birim
$|BD| = 12$ birimdir.
ABCD eşkenar dörtgeninin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek bir dikdörtgen elde ediliyor. Bu işleme art arda n defa devam ediliyor.




**Böylece oluşan tüm şekillerin çevrelerinin toplamının $n \to \infty$ için limiti kaç birimdir?**

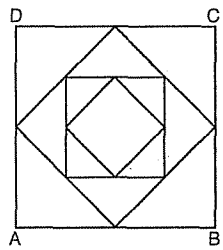
A) 136 B) 192 C) 288 D) 376 E) $\infty$

**20.** 12 terimden oluşan bir aritmetik dizinin terimleri toplamı 354 dür. Çift nolu terimlerin toplamının tek nolu terimlerin toplamına oranı $\frac{32}{27}$ dir.

**Bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**21.** Şekildeki ABCD karesinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir kare oluşturuluyor. Aynı işlem elde edilen her yeni kare için tekrarlanıyor.




**ABCD karesinin bir kenarının uzunluğu 3 cm ise oluşabilecek tüm karelerin alanları toplamı kaç $cm^2$ dir?**

A) 9 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

**22.** $$\sum_{n=1}^{\infty} (3^{-n} + 2^{-n})$$

**toplamının değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{3}$

**17-C** **18-E** **19-A** **20-B** **21-C** **22-D**

# 9. ÜNİTE: ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

## ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

### I. FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİ

Bir fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş reel sayı kümesine veya en geniş aralığa o fonksiyonun tanım kümesi denir.

**1. Polinom Fonksiyonunun Tanım Kümesi**

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

şeklindeki reel katsayılı polinom fonksiyonları bütün reel sayılar için tanımlıdır.

Tanım kümesi A ile gösterilirse, polinom fonksiyonlarının tanım kümesi $A = R$ olur.

**Örnek:**

$$f(x) = x^2 + 2$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

Her $x \in R$ olmak üzere, $f(x) = x^2 + 2$ ifadesi için bir reel sayı değeri bulunacaktır. Tanım kümesi T olsun. O halde, $T = R = (-\infty, +\infty)$ dur.

**2. Rasyonel Fonksiyonların Tanım Kümesi**

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonlar

$Q(x) = 0$ için tanımsızdır.

$Q(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi Ç = B ise f(x) fonksiyonunun en geniş tanım kümesi (tanım aralığı)

$A = R - B$ olur.

**Örnek:**

$$g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

g(x) fonksiyonu $x - 2 = 0$ için tanımsız, diğer reel sayılar için tanımlıdır. Tanım kümesi T olsun. O halde $T = R - \{2\}$ dir.

**3. Çift Dereceden Köklü Fonksiyonların Tanım Kümesi**

n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar $g(x) \geq 0$ için tanımlıdır. $g(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi Ç = B ise f(x) fonksiyonunun en geniş tanım kümesi B dir.

**Örnek:**

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

h(x) fonksiyonu $x^2 - 9 \geq 0$ için tanımlıdır. O halde $x^2 - 9 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 9 = 0$ için $x = 3$ veya $x = -3$ tür.

| x | $-\infty$ | $-3$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-9$ | + | 0 | − | 0 | + |

Tablodan çözüm kümesi,

$x \leq -3$ veya $x \geq 3$ tür.

$Ç = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ olur.

h(x) in tanım aralığı A kümesi olsun. O halde

$A = Ç = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$A = R - (-3, 3)$ şeklinde de yazılabilir.

**Örnek:**

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[10]{x-5} + 2$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

$x \geq 0$ ve $x - 5 \geq 0$ için $f(x)$ fonksiyonu tanımlıdır.
O halde

$x \geq 0$ ve $x \geq 5$ aralıkları kesişimi alınırsa, $x \geq 5$ bulunur.

Buradan tanım kümesi $[5, +\infty)$ aralığı olarak bulunur.

**4. Tek Dereceden Köklü Fonksiyonların Tanım Kümesi**

n bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$$

fonksiyonu, g(x) in tanımlı olduğu her yerde tanımlıdır. g(x) in tanım kümesi B ise f(x) in tanım kümesi A = B dir.

**Örnek:**

$$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

Kökün derecesi 3, yani tek sayı olduğundan g(x) in tanım aralığı $x + 1 \in R$ şeklindedir.

Her $x \in R$ için $x + 1 \in R$ olduğundan tanım aralığı IR dır.

**Örnek:**

$$f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[3]{\frac{x}{x-2}} + \sqrt[5]{x}$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

f(x) fonksiyonunu sırasıyla üç parça halinde incelersek; $x + 2 \geq 0$, $x - 2 \neq 0$, $x \in R$ şeklinde tanım aralığı bulunur. Bu üç parçanın kesişimi alınırsa, $[-2, +\infty) - \{2\}$ aralığı bulunur. O halde en geniş tanım aralığı,

$[-2, 2) \cup (2, +\infty)$ şeklindedir.

**II. PARÇALI FONKSİYONLAR**

Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyonlara parçalı fonksiyonlar denir.

**Örnek:**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & x > 2 \\ x^2, & x = 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 10, & x \geq -7 \\ 7, & x < -7 \end{cases} \qquad t(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq -1 \\ x^2 - x, & x < -1 \end{cases}$$

**ifadeleri birer parçalı fonksiyondur.**

**Örnek:**

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 2 \\ x, & x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$$

**fonksiyonları için aşağıdaki soruları çözelim.**

**a) f(3) + g(–1) = ?**

$3 > 2$ için $f(3) = 4$

$-1 < 1$ için $g(-1) = 1$ dir.

$f(3) + g(-1) = 4 + 1 = 5$ tir.

**b) (f + 2g)(4) = ?**

$(f + 2g)(4) = f(4) + 2.g(4)$

$= 4 + 2.4^2 = 4 + 32 = 36$

**c) (f + g) (x) fonksiyonunu bulunuz**

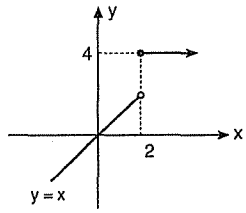
$$(f+g)(x) = \begin{cases} x + (-x), & x \leq 1 \\ x + x^2, & 1 < x < 2 \\ 4 + x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x^2 + x, & 1 < x < 2 \\ x^2 + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

**d) f(x) ve g(x) in grafiklerini çizelim.**

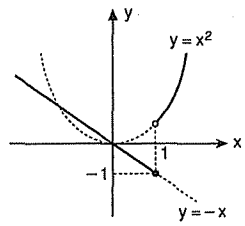
$x \geq 2$ için $y = 4$

$x < 2$ için $y = x$ çizilirse




$x > 1$ için $y = x^2$

$x \leq 1$ için $y = -x$ çizilirse




## III. MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

$f : A \to B$ fonksiyonu reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) , & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x) , & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f nin mutlak değer fonksiyonu denir.

**Örnek**

***Reel sayılarda tanımlı f(x) = x − 5 fonksiyonu için, |f(x)| fonksiyonunu bulalım.***

**Çözüm:**

$x - 5 \geq 0$ için $|f(x)| = f(x)$,

$x - 5 < 0$ için $|f(x)| = -f(x)$ tir.

$$|f(x)| = \begin{cases} x - 5 , & x - 5 \geq 0 \\ -x + 5 , & x - 5 < 0 \end{cases}$$

Buradan

$$|f(x)| = \begin{cases} x - 5 , & x \geq 5 \\ -x + 5 , & x < 5 \end{cases} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$f : R \to R \text{ ve } f(x) = x - 2$$

**olmak üzere, |f(x)| fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

$x - 2 \geq 0$ için $|f(x)| = f(x)$,

$x - 2 < 0$ için $|f(x)| = -f(x)$ tir.

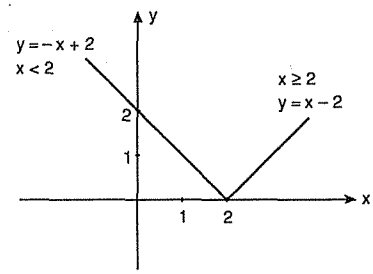
Buradan

$$|f(x)| = \begin{cases} x - 2 , & x - 2 \geq 0 \\ -x + 2 , & x - 2 < 0 \end{cases} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Buradan

$x \geq 2$ için $y = x - 2$

$x < 2$ için $y = -x + 2$ grafiklerini çizelim.




**Not:**

Mutlak değerin tanımını ve yukarıdaki grafiği göz önüne alalım. f(x) in negatif olmadığı yerde |f(x)| in grafiği f(x) ile aynıdır. f(x) in negatif olduğu yerde |f(x)| in grafiği f(x) in grafiğinin Ox eksenine göre simetriğidir.

Bu durumda, y = |f(x)| in grafiğini iki adımda çizebiliriz.

**1. Adım:** y = f(x) in grafiği çizilir.

**2. Adım:** Ox ekseninin üst tarafında kalan eğri aynen bırakılır. Ox ekseninin altında kalan kısmın Ox eksenine göre simetriği çizilir.

**Örnek:**

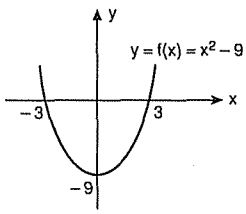
$$y = f(x) = x^2 - 9$$

**fonksiyonu için, |f(x)| fonksiyonunun grafiğini iki adımda çizelim.**

**Çözüm:**

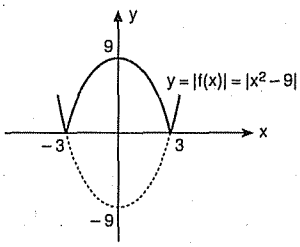
**1. Adım:**

$y = f(x) = x^2 - 9$ fonksiyonunun grafiği,

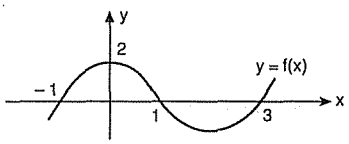



şeklindedir.

**2. Adım:** x eksenine göre simetriği alınırsa,




**Örnek:**




**fonksiyonu için |f(x)| fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

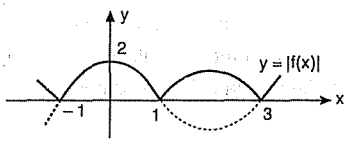
$x < -1$ için $|f(x)| = -f(x)$

$-1 \le x \le 1$ için $|f(x)| = f(x)$,

$1 < x < 3$ için $|f(x)| = -f(x)$,

$3 \le x$ için $|f(x)| = f(x)$ tir.

Buradan grafik çizilirse




**Örnek:**

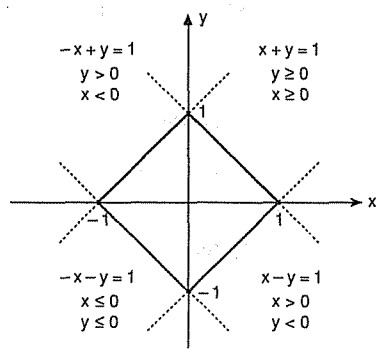
$$|x| + |y| = 1$$

**bağıntısının grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

1. $x \ge 0$ ve $y \ge 0$ için, $x + y = 1$
2. $x < 0$ ve $y > 0$ için $-x + y = 1$
3. $x \le 0$ ve $y \le 0$ için $-x - y = 1$
4. $x > 0$ ve $y < 0$ için $x - y = 1$

olmak üzere,




## IV. İŞARET FONKSİYONU

$f : A \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere,

$$\text{sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **f nin işaret fonksiyonu** denir. sgn(f(x)) şeklinde gösterilir.

**Örnek:**

$\text{sgn}(7) = 1$, $\text{sgn}(0) = 0$,

$\text{sgn}(-19) = -1$

$\text{sgn}(\sqrt{2}) = 1$, $\text{sgn}(100) = 1$

$\text{sgn}(0{,}2) = 1$, $\text{sgn}(x^2 + 4) = 1$

$\text{sgn}(-x^2 - 7) = -1$, $\text{sgn}(\pi) = 1$

**Örnek:**

$$\text{sgn}(x-4)=1$$

**denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm:**

sgn (f(x)) = 1 ise f(x) > 0 dır.

Buna göre, $x-4>0$ olmalıdır.

O halde çözüm kümesi $x>4$ tür.

Yani $(4,+\infty)$ olur.

**Örnek:**

$$\text{sgn}(x^2-16)=0$$

**denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm:**

sgn(f(x)) = 0 ise f(x) = 0 dır.

Buna göre, $x^2-16=0$ olmalıdır.

$x^2=16 \Rightarrow x=4$ veya $x=-4$ tür.

O halde, $Ç=\{-4,4\}$ tür.

**Örnek:**

$$f(x)=x-1$$

fonksiyonu için sgn(f(x)) ifadesinin grafiğini çizelim.

**Çözüm:**

$$\text{sgn}(f(x))=\text{sgn}(x-1)=\begin{cases}1, & x-1>0\\ 0, & x-1=0\\ -1, & x-1<0\end{cases}$$

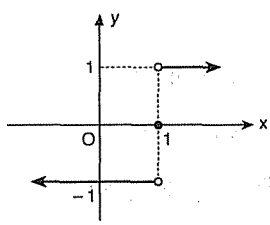
$$\text{sgn}(x-1)=\begin{cases}1, & x>1\\ 0, & x=1\\ -1, & x<1\end{cases}$$

Grafik çizilirken sırasıyla

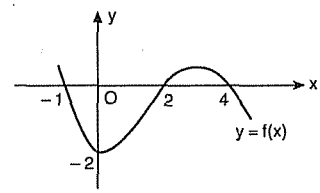
$x>1$ için $y=1$

$x=1$ için $y=0$

$x<1$ için $y=-1$ grafikleri çizilir.




**Örnek:**




**y = f(x) fonksiyonu için sgn(f(x)) ifadesinin grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

$x=-1$ için $f(x)=0$

$x=2$ için $f(x)=0$

$x=4$ için $f(x)=0$

$x<-1$ için $f(x)>0$

$-1<x<2$ için $f(x)<0$

$2<x<4$ için $f(x)>0$

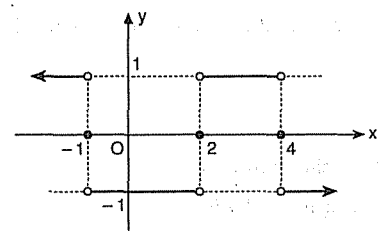
$x>4$ için $f(x)<0$ dir.

Grafikten işaret tablosu yapılırsa,

| x | | −1 | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − |
| sgn(f(x)) | +1 | 0 | −1 | 0 | +1 | 0 | −1 |

şeklinde olur.

Tablodan grafiğe geçilirse,




**Not:**

Sgn(f(x)) şeklindeki ifadelerin çözüm kümesi bulunurken veya grafik çizilirken f(x) = 0 denkleminin köklerine göre işaret incelemesi yapılır ise sgn(f(x)) in 1, 0, −1 gibi üç değeri daha çabuk bulunmuş olur.

**Örnek:**

$f : R \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, sgn(f(x)) ifadesinin eşitini bulalım.

**Çözüm:**

$$sgn(x^2 - x - 2) = \begin{cases} 1, & x^2 - x - 2 > 0 \\ 0, & x^2 - x - 2 = 0 \\ -1, & x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

$x^2 - x - 2 = 0$ dan işaret tablosu yapılırsa,

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2).(x + 1) = 0$

$x = 2$ veya $x = -1$ dir.

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | + | 0 | − | 0 | + | | |
| $sgn(x^2-x-2)$ | +1 | 0 | −1 | 0 | +1 | | |
| | | + | | − | | + | |
| | | $x^2-x-2>0$ | | $x^2-x-2<0$ | | $x^2-x-2>0$ | |

$$sgn(x^2 - x - 2) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ 0, & x = -1 \text{ veya } x = 2 \\ -1, & x \in (-1, 2) \end{cases}$$

## V. TAM KISIM (DEĞER) FONKSİYONU

x bir reel sayı olmak üzere, x ten büyük olmayan en büyük tam sayıya x in tam değeri denir ve $[\![ x ]\!]$ ile gösterilir.

$f : R \to Z$

$$f(x) = [\![ x ]\!] = \begin{cases} x, & x \in Z \text{ ise} \\ \text{x ten küçük olan tamsayıların en büyüğü,} & x \notin Z \text{ ise} \end{cases}$$

**Örnek:**

1. $[\![ 5 ]\!] = 5$
2. $[\![ 5{,}7 ]\!] = 5$
3. $[\![ 4{,}7 ]\!] = 4$
4. $[\![ -5{,}7 ]\!] = -6$
5. $[\![ 0{,}5 ]\!] = 0$
6. $[\![ 2\frac{1}{3} ]\!] = 2$

**Not:**

$a \in Z$ olmak üzere, $[\![ x ]\!] = a$ denkleminin çözümü daima, $a \le x < a + 1$ şeklindedir.

**Örnek:**

$$[\![ x + 2 ]\!] = 5$$

**denklemini sağlayan x değerlerini bulalım.**

**Çözüm:**

$[\![ x + 2 ]\!] = 5$ için,

$5 \le x + 2 < 6$ dır.

Buradan; $3 \le x < 4$ tür.

**Örnek:**

$$[\![ \frac{4 - x}{2} ]\!] = 3$$

**denklemini sağlayan x değerlerinin çözüm aralığını bulalım.**

**Çözüm:**

$$[\![ \frac{4 - x}{2} ]\!] = 3$$

$$3 \le \frac{4 - x}{2} < 4$$

$6 \le 4 - x < 8$

$2 \le -x < 4$

$-4 < x \le -2$ dir.

**Özellikler**

1. $x \in R$ ve $a \in Z$ olmak üzere,

   $[\![ x + a ]\!] = [\![ x ]\!] + a$ dır.

2. $x, y \in R$ için,

   $[\![ x + y ]\!] \ge [\![ x ]\!] + [\![ y ]\!]$ dir.

3. $[\![ x ]\!] < a$ ise,

   $x < a$ dır.

4. $[\![ x ]\!] > a$ ise,

   $x \ge a + 1$ dir.

**Örnek:**

$$[\![ [\![ x + 4 ]\!] + 3 ]\!] = 10$$

**denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm:**

Denklemden,

$[\![ x ]\!] + 4 + 3 = 10$

$[\![ x ]\!] = 3$

$3 \le x < 4$

$x \in [3, 4)$ olur.

**Örnek:**

$$[\![ x + 2[\![ x ]\!] ]\!] = 9$$

**denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm:**

$x \in R$ için daima $[\![ x ]\!] \in Z$ dir.

Buna göre, $2.[\![ x ]\!] \in Z$ dir.

$[\![ x + 2[\![ x ]\!] ]\!] = 9$

$[\![ x ]\!] + 2[\![ x ]\!] = 9$

$3[\![ x ]\!] = 9$

$[\![ x ]\!] = 3$

$3 \le x < 4$ $\quad x \in [3, 4)$ olur.

**Örnek:**

$$[\![ x + 2 ]\!] + [\![ x - 3 ]\!] = 7$$

***denkleminin çözümünü bulalım.***

**Çözüm:**

$2 \in Z$ ve $-3 \in Z$ olduğundan,

$[\![ x + 2 ]\!] + [\![ x - 3 ]\!] = 7$

$[\![ x ]\!] + 2 + [\![ x ]\!] - 3 = 7$

$2.[\![ x ]\!] - 1 = 7$

$2.[\![ x ]\!] = 8$

$[\![ x ]\!] = 4$

$4 \le x < 5$ $\quad x \in [4, 5)$ *olur.*

**Örnek:**

$$[\![ x ]\!]^2 - 4.[\![ x ]\!] + [\![ 2.[\![ x ]\!] - 8 ]\!] = 0$$

**denklemini çözelim.**

**Çözüm:**

$x \in R$ için $[\![ x ]\!] \in Z$ dir.

Buna göre,

$[\![ x ]\!]^2 - 4 . [\![ x ]\!] + 2 . [\![ x ]\!] - 8 = 0$

$[\![ x ]\!]^2 - 2 . [\![ x ]\!] - 8 = 0$

$([\![ x ]\!] - 4) . ([\![ x ]\!] + 2) = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$[\![ x ]\!] = 4$ veya $[\![ x ]\!] = -2$

$4 \le x < 5$ veya $-2 \le x < -1$

$[4, 5)$ veya $[-2, -1)$

$Ç = [-2, -1) \cup [4, 5)$

**Tam Değer Fonksiyonun Grafiği**

$f(x) = [\![ ax ]\!]$ fonksiyonun grafiği çizilirken $x$ in değişen aralıkları $\frac{1}{|a|}$ farkla artar.

**Örnek:**

$$f : [-1, 2] \to R,\ f(x) = [\![ x ]\!]$$

**fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

$a = 1$ olduğundan

Aralık Uzunluğu $= \frac{1}{|1|} = 1$ birim

olarak artacaktır.

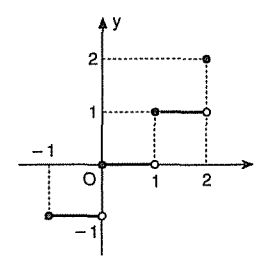
$-1 \le x < 0 \Rightarrow [\![ x ]\!] = -1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [\![ x ]\!] = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [\![ x ]\!] = 1$

$x = 2 \Rightarrow [\![ x ]\!] = 2$

Bu durumda f nin grafiği aşağıdaki gibi olur.



**Örnek:**

$f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x - [\![2x]\!]$

**fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm:**

a = 2 olduğundan aralık uzunluğu

$\frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$ birim olacaktır.

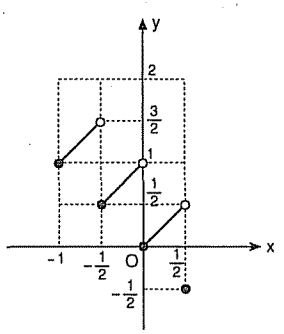
$-1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow [\![2x]\!] = -2 \Rightarrow f(x) = x + 2$

$-\frac{1}{2} \le x < 0 \Rightarrow [\![2x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = x + 1$

$0 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow [\![2x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow [\![2x]\!] = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Bu durumda f(x) in grafiği




## VI. Tek ve Çift Fonksiyonlar

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunda

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ ise f ye **çift fonksiyon** ve $f(-x) = -f(x)$ ise f ye **tek fonksiyon** denir.

Çift fonksiyon y eksenine göre simetrik, tek fonksiyon ise orijine göre simetriktir.

**Örnek:**

$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

Çünkü; $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ dir.

**Örnek:**

$f(x) = x^3 + x$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$

$= -(x^3 + x) = -f(x)$ dir.

**Örnek:**

$f(x) = x^2 + \cos x$ çift fonksiyondur.

Çünkü; $f(-x) = (-x^2) + \cos(-x)$

$= x^2 + \cos x = f(x)$ dir.

**Örnek:**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + mx + 2$

**fonksiyonunun çift fonksiyon olması için m kaç olmalıdır?**

**Çözüm:**

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ olmalıdır.

$f(-x) = f(x)$ ise, $(-x)^2 + m(-x) + 2 = x^2 + mx + 2$

$\Rightarrow x^2 - mx + 2 = x^2 + mx + 2$

polinom eşitliğinden $-m = m$

$2m = 0 \Rightarrow m = 0$ olmalıdır.

**Örnek:**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 4 - f(-x)$ bağıntısında f çift fonksiyon olduğuna göre, f(4) ü bulalım.

**Çözüm:**

f çift fonksiyon ise

$f(-x) = f(x)$ dir.

$f(x) = x^2 + 4 - f(x) \Rightarrow 2f(x) = x^2 + 4$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow f(4) = \frac{4^2}{2} + 2 = 10$ dur.

**Not:**

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\cot(-x) = -\cot x$

$\sec(-x) = \sec x$

$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$

olduğundan; cosx ve secx fonksiyonları çift; sinx, tanx, cotx, cosecx fonksiyonları ise tek fonksiyondur. Özel olarak, $f(x) = |g(x)|$ şeklinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonları için, g(x) çift fonksiyon ya da tek fonksiyon ise, f(x) çift fonksiyondur.

Daima; $f(-x) = |-g(x)| = |g(x)| = f(x)$ olur.

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ve $x \in R$

**olmak üzere, $f(x) = f(|x|)$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?**

A) $c = 1$ B) $c = 0$ C) $b = -1$

D) $b = 0$ E) $a = 1$

**2.** $f(x) = \sqrt{5 - |x - 2|}$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

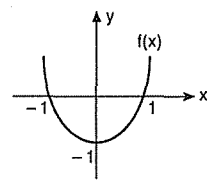
A) $-2 \le x \le 5$ B) $-5 \le x \le 2$ C) $-5 \le x \le 7$

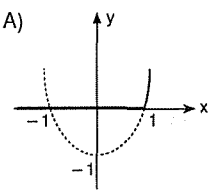
D) $-3 \le x \le 7$ E) $-2 \le x \le 7$

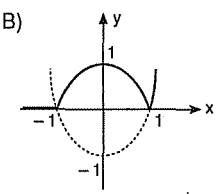
**3.** **Şekildeki eğri f(x) fonksiyonunun grafiği olduğuna göre,**

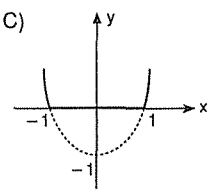
$y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$

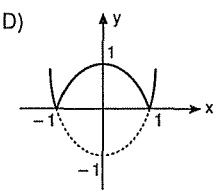
**in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

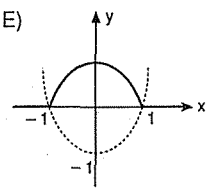



A)



B)



C)



D)



E)



**4.** $0 < [\![ 2x - 4 ]\!] \le 5$

**eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2 < x < 4$ B) $-2 < x < \frac{9}{2}$ C) $\frac{-2}{3} < x < 3$

D) $\frac{-3}{2} < x < 5$ E) $\frac{5}{2} \le x < 5$

**5.** $f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x) = 3 + 2\,\text{sgn}(x^2 - 5x + 4)$

**fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {3} B) {1, 2} C) {1, 3, 5}

D) {1, 4} E) $\mathbb{R}$

**6.** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{[\![ x + 1 ]\!]}$

**fonksiyonunun tanımsız olduğu en geniş aralık hangisidir?**

A) [−1, 1) B) [−1, 0) C) [−2, −1)

D) [0, 1) E) [1, 2)

**7.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 12}$

**fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [1, 5] B) [2, 5] C) R − (2, 6)

D) $(-\infty, 1] \cup [6, \infty)$ E) $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

**1-D** **2-D** **3-C** **4-E** **5-C** **6-B** **7-D**

**8.** $f(x) = |x-2| + \text{sgn}(x-1) + [\![x]\!]$

**fonksiyonunun $1 < x < 2$ aralığındaki değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x-4$ B) $-x$ C) $x$

D) $2-x$ E) $4-x$

**9.** $[\![\frac{2x}{3} + [\![\frac{2x}{3} - 1]\!]]\!] = [\![\frac{2x}{3}]\!] + 2$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{7}{2} \le x < 5$ B) $\frac{7}{2} \le x < 6$ C) $\frac{9}{2} \le x < 7$

D) $\frac{9}{2} \le x < 6$ E) $4 \le x < 6$

**10.** $\text{sgn}(x^2 - 2x) = |x^2 - 2x|$

**denkleminin köklerinden kaç tanesi tamsayıdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**11.**
$$f(x) = \begin{cases} [\![x+1]\!], & x < 1 \text{ ise} \\ \text{sgn}x, & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x-2|, & x > -1 \text{ ise} \\ x.[\![x]\!], & x \le -1 \text{ ise} \end{cases}$$

**olarak tanımlanan f(x) ve g(x) fonksiyonları için $(f+g)(2) + (f-g)(-2)$ nin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 4 C) $-4$ D) 6 E) $-6$

**12.**
$$f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] + a, & x > 1 \text{ ise} \\ |x| - 4, & x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

**fonksiyonuna göre $f(\pi) + f(-\pi) = \pi + 3$ denklemini sağlayan a değeri kaçtır?**

A) 3 B) $-3$ C) 2 D) $-2$ E) 4

**13.** $f(x, y) = \min([\![x]\!], |y|)$

$g(x, y) = \max(|-x|, \text{sgn}[\![x]\!])$

olarak tanımlanan f(x, y) ve g(x, y) fonksiyonları için **$f[f(2,-2), g(-3,3)]$ işleminin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**14.** $2[\![x]\!]^2 + 3 = 7[\![x]\!]$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [2, 3) B) [3, 4) C) [1, 2)

D) [2, 4) E) [3, 5)

**15.** $f(x) = [\![x-2]\!]$ ve $g(x) = |x+2|$

**olduğuna göre $(g \circ f)(x) = 4$ denklemini sağlayan en küçük tamsayı değeri kaçtır?**

A) $-5$ B) $-4$ C) $-3$ D) $-2$ E) $-1$

**8-E** **9-D** **10-B** **11-C** **12-E** **13-B** **14-B** **15-B**

**16.** $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} ; & x < 2 \\ \dfrac{x+1}{[\![ x ]\!]} ; & x \geq 2 \end{cases}$$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\emptyset$ B) $x \geq 2$ C) $x \geq 2$ veya $-1 \leq x < 1$

D) $0 \leq x < 1$ E) R

**17.** $$[\![ x^2 + y^2 ]\!] = 3$$

**bağıntısının koordinat düzleminde sınırladığı bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $2\pi$ D) $3\pi$ E) $5\pi$

**18.** $m \in Z$, $x \in (m-1, m)$ olmak üzere,

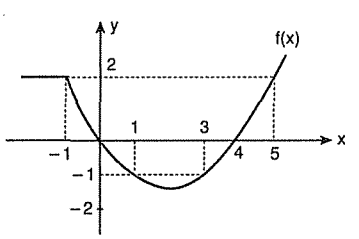
$$2[\![ x ]\!] + [\![ -x ]\!]$$

**ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $m+2$ B) $m+1$ C) $m$

D) $m-1$ E) $m-2$

**19.**




**Yukarıda verilen f(x) fonksiyonuna göre**

$$f(5) + f(-5) + f(4) + [\![ f(2) ]\!]$$

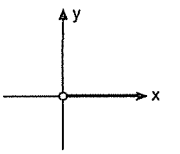
**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) −2 C) 4 D) −4 E) 0

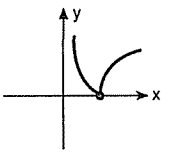
**20.** $$f(x) = \log(\text{sgn}x)$$

**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

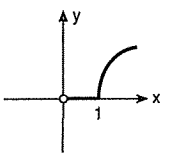
A)



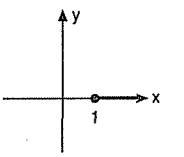

B)



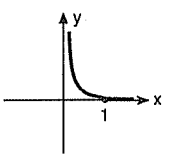

C)




D)



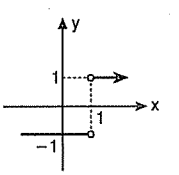

E)



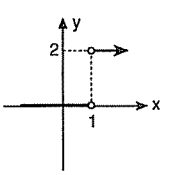

**21.** $$y = f(x) = \frac{|x-1| + x - 1}{|x-1|}$$

**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

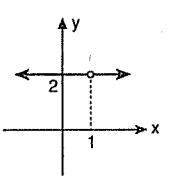
A)



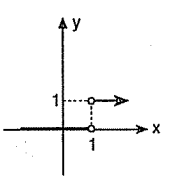

B)



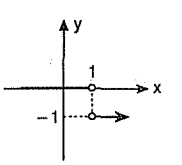

C)




D)




E)




**16-E** **17-B** **18-E** **19-A** **20-A** **21-B**

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ise

$f(|x|) = a|x|^2 + b|x| + c$ dir.

$|x|^2 = |x^2| = x^2$ olduğuna göre

$f(x) = f(|x|)$ ise

$ax^2 + bx + c = a|x^2| + b|x| + c$

$ax^2 + bx + c = ax^2 + b|x| + c$

$\Rightarrow bx = b|x|$

Bu eşitliğin her $x \in \mathbb{R}$ için doğru olması için $b = 0$ olmalıdır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $f(x) = \sqrt{u(x)}$ in tanım aralığı $u(x) \geq 0$ dur.

$y = \sqrt{5 - |x-2|}$ ise $5 - |x-2| \geq 0$ olmalıdır.

$|x-2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-2 \leq 5$

$-3 \leq x \leq 7$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $-1 < x < 1$ aralığında $f(x) < 0$

$x < -1$ veya $x > 1$ aralığında $f(x) > 0$ dır.

★ $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x) \Rightarrow y = \dfrac{f(x) - f(x)}{2} = 0$

★ $f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$

Buna göre, $f(x)$ in negatif olduğu yerlerde $y = 0$ ve $f(x)$ in pozitif olduğu yerlerde $y = f(x)$ alınmalıdır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $0 < [\![2x-4]\!] \leq 5$ ise $1 \leq 2x-4 < 6$

$\Rightarrow 5 \leq 2x < 10 \Rightarrow \dfrac{5}{2} \leq x < 5$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = 3 + 2\,\text{sgn}(x^2 - 5x + 4)$

| $x$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5x+4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$(x^2 - 5x + 4)$ ün pozitif olduğu yerlerde sgn fonksiyonu $(+1)$, negatif olduğu yerlerde $(-1)$ ve sıfır olduğu yerlerde $(0)$ değerini aldığından

$\text{sgn}(x^2 - 5x + 4)$

fonksiyonu $\{-1, 0, 1\}$ değerlerini alabilir.

Buna göre

$f(x) = 3 + 2.(-1) = 1$

$f(x) = 3 + 2.(0) = 3$

$f(x) = 3 + 2 \,.\, 1 = 5$

$f(x)$ in görüntü kümesi $\{1, 3, 5\}$ tir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** Paydayı sıfır yapan değerler de tanımsızdır.

$[\![x+1]\!] = 0 \Rightarrow 0 \leq x+1 < 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$

$\Rightarrow x \in [-1, 0)$ aralığında tanımsızdır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** Kökün kuvveti çift olduğundan içi pozitif veya sıfır olmalıdır.

$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ ise $x_1 = 1$, $x_2 = 5$

| $x$ | | $1$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-6x+5$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| | $x \leq 1$ | | | $x \geq 5$ | |

$x^2 - 8x + 12 \geq 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

| $x$ | | $2$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-8x+12$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| | $x \leq 2$ | | | $x \geq 6$ | |

$(x \leq 1$ veya $x \geq 5)$ ve $(x \leq 2$ veya $x \geq 6)$

$\Rightarrow x \leq 1$ veya $x \geq 6$

$\Rightarrow (-\infty, 1] \cup [6, \infty)$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**8.** $x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$

$x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow \text{sgn}(x-1) = 1$

$1 < x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 1$

$f(x) = |x-2| + \text{sgn}(x-1) + [\![x]\!]$

$f(x) = 2 - x + 1 + 1 = 4 - x$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** $[\![\frac{2x}{3} - 1]\!]$ tamsayı olduğundan tam değeri kendisidir.

$[\![\frac{2x}{3} + [\![\frac{2x}{3} - 1]\!]]\!] = [\![\frac{2x}{3}]\!] + 2$

$[\![\frac{2x}{3}]\!] + [\![\frac{2x}{3} - 1]\!] = [\![\frac{2x}{3}]\!] + 2$

$2.[\![\frac{2x}{3}]\!] - 1 = [\![\frac{2x}{3}]\!] + 2$

$\Rightarrow [\![\frac{2x}{3}]\!] = 3$

$3 \le \frac{2x}{3} < 4$

$9 \le 2x < 12$

$\Rightarrow \frac{9}{2} \le x < 6$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**10.**

| x | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sgn}(x^2-2x)$ | $+1$ | 0 | $-1$ | 0 | $+1$ |
| $\lvert x^2-2x\rvert$ | $x^2-2x$ | | $-x^2+2x$ | | $x^2-2x$ |

★ $x = 0$ ve $x = 2$ çözümdür.

★ $x < 0$ veya $x > 2$ ise $+1 = x^2 - 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin Z$

★ $0 < x < 2$ ise $-1 = -x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin Z$ dır.

O halde çözüm $\{0, 2\}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** $f(2) = \text{sgn}2 = 1$

$g(2) = |2-2| = 0$

$f(-2) = [\![-2+1]\!] = -1$

$g(-2) = (-2)[\![-2]\!] = (-2)(-2) = 4$

★ $(f+g)(2) + (f-g)(-2) = f(2) + g(2) + f(-2) - g(-2)$

$= 1 + 0 + (-1) - 4 = -4$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $f(\pi) = [\![\pi]\!] + a = [\![3{,}14]\!] + a = 3 + a$ dır.

$f(-\pi) = |-\pi| - 4 = \pi - 4$ tür.

★ $f(\pi) + f(-\pi) = \pi + 3$ ise

$3 + a + \pi - 4 = \pi + 3 \Rightarrow a = 4$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $f(2, -3) = \min([\![2]\!], |-3|) = \min(2, 3) = 2$

$g(-3, 3) = \max(-(-3), \text{sgn}([\![3]\!])) = \max(3, 1) = 3$

★ $f[f(2,-3), g(-3,3)] = f(2, 3)$

$= f(2, 3) = \min([\![2]\!], |3|) = \min(2, 3) = 2$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** $2[\![x]\!]^2 - 7[\![x]\!] + 3 = 0$ denkleminde $[\![x]\!] = t$ diyelim.

$\Rightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0$

$2t \quad -1$

$t \quad -3$

$\Rightarrow (2t-1).(t-3) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ veya $t = 3$

★ $[\![x]\!] = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesi boş kümedir.

Çünkü; hiç bir sayının tam değeri $\frac{1}{2}$ olamaz.

★ $[\![x]\!] = 3 \Rightarrow 3 \le x < 4 \Rightarrow x \in [3, 4)$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** $(g \circ f)(x) = 4 \Rightarrow g(f(x)) = 4 \Rightarrow |f(x) + 2| = 4$

$\Rightarrow |[\![x-2]\!] + 2| = 4$

$\Rightarrow [\![x-2]\!] + 2 = 4$ veya $[\![x-2]\!] + 2 = -4$

$\Rightarrow [\![x-2]\!] = 2$ veya $[\![x-2]\!] = -6$

$\Rightarrow [\![x]\!] = 4$ veya $[\![x]\!] = -4$

$\Rightarrow 4 \le x < 5$ veya $-4 \le x < -3$

En küçük değer $x = -4$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** Fonksiyonun paydasını sıfır yapan değerler de tanımsızdır.

$\sqrt{2-x}=0$ ve $[\![x]\!]=0$ için fonksiyon tanımsızdır.

$2-x\le 0$ ve $0\le x<1$

$x\ge 2$ ve $0\le x<1$ aralıkları için fonksiyon tanımsızdır.

Fakat fonksiyonda;

$x<2$ için $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ve

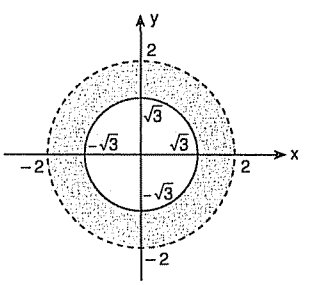
$x\ge 2$ için $\dfrac{x+1}{[\![x]\!]}$ tanımsız olmamaktadır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17.** $[\![x^2+y^2]\!]=3 \Rightarrow 3\le x^2+y^2<4$

$\Rightarrow (\sqrt{3})^2\le x^2+y^2<2^2$

Yarıçapı 2 olan daire ile yarıçapı $\sqrt{3}$ olan daireler arasındaki alandır.




Sınırladığı bölgenin alanı: $\pi r_2^2-\pi r_1^2$

$=\pi.2^2-\pi(\sqrt{3})^2=4\pi-3\pi=\pi$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**18.** $x\in(m-1,m) \Rightarrow m-1<x<m \Rightarrow [\![x]\!]=m-1$ dir.

$[\![-x]\!]$ i bulmak için eşitsizliği $(-1)$ ile çarpalım.

$m-1<x<m \Rightarrow -m+1>-x>-m$

$\Rightarrow -m<-x<-m+1 \Rightarrow [\![-x]\!]=-m$ dir.

$2[\![x]\!]+[\![-x]\!]=2(m-1)+(-m)=m-2$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** $f(5)=2$ ve $f(-5)=2$, $f(4)=0$ dır.

$-2<f(2)<-1$ olduğundan $[\![f(2)]\!]=-2$ dir.

$f(5)+f(-5)+f(4)+[\![f(2)]\!]=2+2+0+(-2)=2$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**20.** log fonksiyonu pozitif değerler için tanımlı olduğundan,

$\text{sgn}(x)>0$ olmalıdır.

$\Rightarrow \text{sgn}(x)=1$ ve $x>0$ olur.

$f(x)=\log(\text{sgn}(x))=\log(1)=0$

$\Rightarrow y=0$ aranan grafiktir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** $x=2$ için $y=\dfrac{|2-1|+2-1}{2-1}=2$

(2, 2) noktasından geçen (B) ve (C) şıkları cevap olabilir.

$x=0$ için $y=\dfrac{|0-1|+0-1}{0-1}=0$

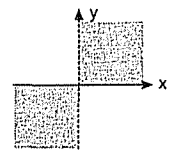
(0, 0) noktasından (B) ve (C) şıklarından (C) geçmez.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 2 (Çözümlü)

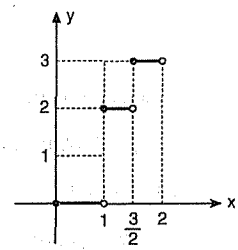
**1.** Yandaki taralı bölgenin bağıntısı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x.y \geq 0$ B) $\frac{x}{y} \leq 0$ C) $\frac{x}{y} > 0$

D) $\frac{x}{y} \geq 0$ E) $\frac{y}{x} > 0$

**2.** $f: (0, 2) \to \mathbb{R}$ ye çizilmiş $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = [\![ \frac{x}{2} ]\!]$

B) $y = [\![ x ]\!].[\![ 2x ]\!]$

C) $y = [\![ \frac{x}{2} ]\!].[\![ 2x ]\!]$

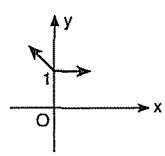
D) $y = [\![ \frac{x}{2} ]\!].[\![ 3x ]\!]$

E) $y = [\![ 2x ]\!]$

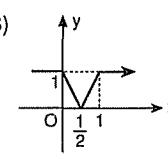
**3.** $y = \big||x-1|-x\big|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

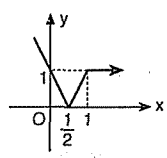
A)



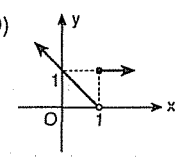
B)



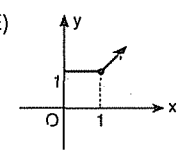
C)



D)



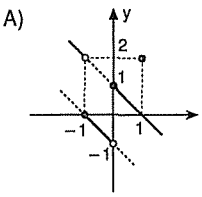
E)



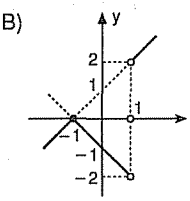
**4.** $y = \frac{|x+1|}{\text{sgn}(x-1)}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

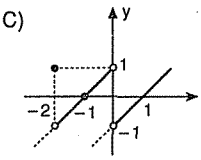
A)



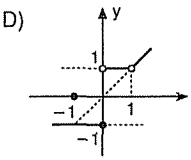
B)



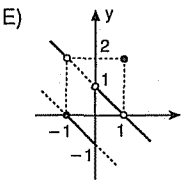
C)



D)



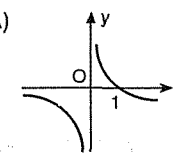
E)



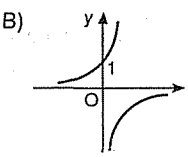
**5.** $g(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

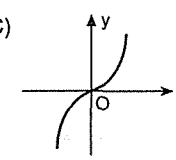
A)



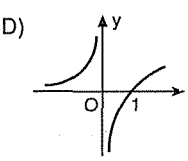
B)



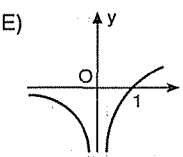
C)



D)



E)



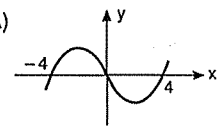
1-D 2-B 3-C

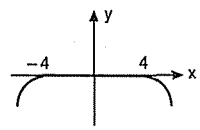
4-B 5-E

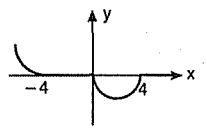
**6.** $f(x) = x^3 - 16x$ olduğuna göre

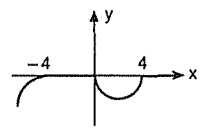
$$y = \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$$

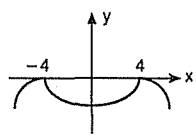
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

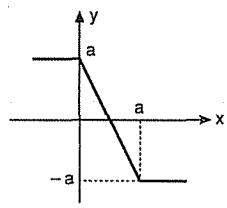

B) 


C) 


D) 


E) 


**7.** **Yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin olabilir?**




A) $y = \frac{|x-a|}{|a|}$

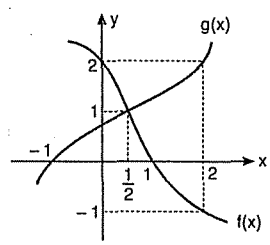
B) $y = |x| + |x-a|$

C) $y = |x-a| - |x|$

D) $y = |x| - |x-a|$

E) $y = x|x-a|$

**8.** $(f^{-1}og)(2) = [\![x-2]\!]$ **olduğuna göre, x değeri hangi aralıktadır?**




A) $0 \le x < 1$

B) $1 \le x < 2$

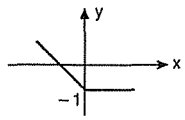
C) $2 \le x < 3$

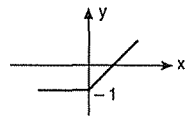
D) $1 < x \le 2$

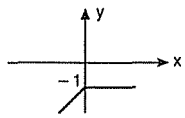
E) $3 \le x < 4$

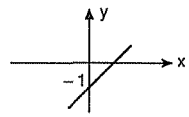
**9.** $f(x) = x - |x|$ ve $g(x) = 2x - 1$

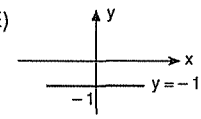
**olduğuna göre, (g o f)(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

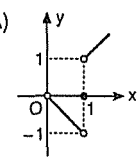

C) 

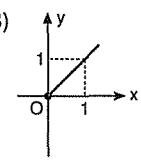

D) 

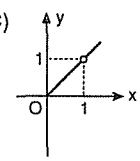

E) 

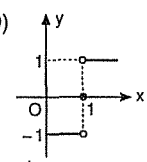

**10.** $f(x) = x.\text{sgn}(\log x)$

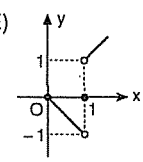
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

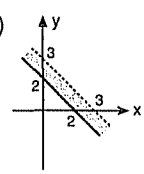

C) 

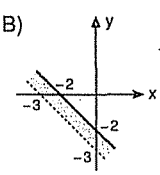

D) 

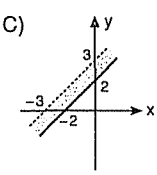

E) 

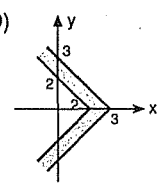

**11.** $[\![y - x]\!] = 2$

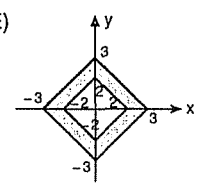
**bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**6-D** **7-C** **8-C** **9-C** **10-A** **11-C**

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** I. ve III. bölge tarandığından x ile y aynı işaretli olmalıdır.

y ekseni tanımsız ve x ekseni tanımlı olduğundan $\frac{x}{y} \geq 0$ olmalıdır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** x = 1 için y = 2 noktasından geçen (B) ve (E) şıkları var.

$x = \frac{1}{2}$ için y = 0 noktasını (B) ve (E) şıklarından *yalnız (B) sağlar.*

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $x = \frac{1}{2}$ için $y = \left|\left|\frac{1}{2} - 1\right| - \frac{1}{2}\right|$

$y = \left|\left|-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$

y = 0 olduğu için

(B) ve (C) şıklarının dışındaki şıklar cevap olamaz.

x = −1 için

$y = |\,|-1-1| - (-1)\,|$

y = 3 olduğu için cevap "C" şıkkıdır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** Kesirli veya köklü sorularda önce tanım aralığına bakmalıyız. Bu fonksiyon x = 1 noktası için tanımsızdır.

O halde (A), (C), (E) şıkları cevap olamaz. Geriye kalan (B) veya (D) yi elemek için $x = -\frac{1}{2}$ seçelim.

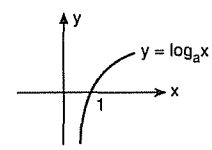
$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\left|-\frac{1}{2} + 1\right|}{\operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

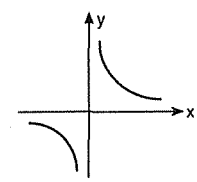
noktasından (D) geçmez.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

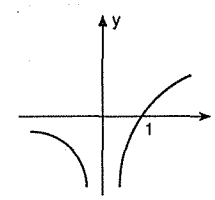
**5.** 1 < a için $y = \log_a x$




$y = \frac{1}{x}$ in grafiği




olduğuna göre, g(x) grafiği




olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**6.** $x = -2$ için $y = \frac{1}{2}(f(-2) - |f(-2)|)$

$y = \frac{1}{2}(24 - 24)$

$y = 0$ olur.

Cevap (A), (E) olamaz.

$x = 2$ için $y = \frac{1}{2}(f(2) - |f(2)|)$

$y = \frac{1}{2}[-24 - |-24|]$

$y = -24$ olur.

Cevap (B) de olamaz.

$x = -5$ için $y = \frac{1}{2}[f(-5) - |f(-5)|]$

$y = \frac{1}{2}[-45 - |-45|)$

$y = -45$ olur.

Cevap (C) de olamaz.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** Grafiğe göre,

$x = 0$ için $y = a$ olmalı

Cevap (A) ve (E) olamaz.

$x = a$ için $y = -a$ olmalı.

Cevap (B) ve (D) olamaz.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** Grafiğe göre

$g(2) = 2$

$f^{-1}(2) = 0$ dır.

$(f^{-1}og)(2) = [\![x - 2]\!]$

$f^{-1}[g(2)] = [\![x - 2]\!]$

$f^{-1}(2) = [\![x - 2]\!]$

$0 = [\![x - 2]\!]$

$0 \le x - 2 < 1$

$2 \le x < 3$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**9.** $f(x) = x - |x|$

$g(x) = 2x - 1$

olduğundan

$gof(x) = 2(x - |x|) - 1$ olur.

$x \ge 0$ için

$gof(x) = 2(x - x) - 1$

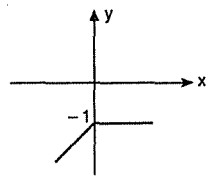
$= -1$ olur.

$x \le 0$ için

$gof(x) = 2[x + x] - 1$

$= 4x - 1$ olur.

Buna göre grafik




olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**10.** $f(x) = x.sgn(\log x)$

$0 < x < 1$ için $\log x < 0$

$sgn(\log x) = -1$

$f(x) = -x$ olur.

$x > 1$ için $\log x > 0$

$sgn(\log x) = 1$

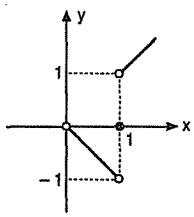
$f(x) = x$ olur.

$x = 1$ için $\log 1 = 0$

$sgn(\log 1) = 0$ dır.

Yani, $f(1) = 0$ dır.

Buna göre grafik




olur.

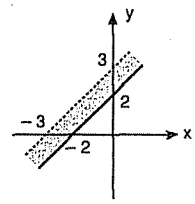
**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $[\![ y - x ]\!] = 2$

$2 \le y - x < 3$

$x + 2 \le y < x + 3$

olacağından grafik,




olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 3

**1.** $f(x) = [\![ x - e ]\!] + [\![ \pi ]\!]$

**olduğuna göre, $f(\pi)$ kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**2.** $e < x < \pi$ olduğuna göre,

$f(x) = |e - x| + |\pi - x| + |e - \pi|$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) $\pi - e$ C) $2(\pi - e)$

D) $2(e - \pi)$ E) $2(e + \pi)$

**3.** $f(x) = x - [\![ \frac{2x^2}{3} ]\!]$

**olduğuna göre, $f(\frac{2}{3})$ kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

**4.** $[\![ 3x - 5 ]\!] = 4$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $0 \le x < 1$ B) $3 \le x < 4$ C) $4 \le x < 5$

D) $3 \le x < \frac{10}{3}$ E) $\frac{10}{3} \le x < 4$

**5.** $[\![ x + 3 ]\!] > 1$

**eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x > -3$ B) $x \ge -2$ C) $x \ge -1$

D) $x > 0$ E) $x > 1$

**6.** $sgn(x^2 + 3x - 4) = -1$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-4, -2)$ B) $(-1, 4)$ C) $(-4, 1)$

D) $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ E) $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$

**7.** $f(x) = [\![ 2x ]\!] - |x + 3| - sgn(x + 3)$

**olduğuna göre, $f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ toplamı kaçtır?**

A) $-\frac{9}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{17}{2}$

**8.** $sgn(x^2 + x + 1) = [\![ x - 3 ]\!]$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3 \le x < 4$ B) $4 \le x < 5$ C) $5 \le x < 6$

D) $2 \le x < 4$ E) $3 \le x < 6$

**9.** $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{3 - x}} + \sqrt{4 - x}$

**fonksiyonunun tanımlı olduğu en büyük tamsayı değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**10.** $f(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}} + \sqrt[3]{\frac{x - 4}{x + 1}}$

**fonksiyonun tanımsız olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1 < x < 1$ B) $-2 < x < 2$ C) $-2 < x \le 2$

D) $-2 \le x < 2$ E) $-2 < x < 4$

1-C 2-C 3-B 4-D 5-C

6-C 7-E 8-B 9-A 10-C

**11.** $f(x) = \sqrt{2 - |2 - x|}$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-4 \le x \le 0$ B) $0 \le x \le 4$ C) $-2 < x \le 2$

D) $-2 \le x < 2$ E) $-2 < x < 4$

**12.** $f(x) = \sqrt{\log_2\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}$

**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x < -3$ B) $x > 2$ C) $-3 < x < 2$

D) $x < -3$ veya $x > 2$ E) $-3 < x < 0$

**13.** $[\![ 2x + [\![ 2x - 2 ]\!] ]\!] = 2$

**denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1 \le x < \frac{3}{2}$ B) $2 \le x < \frac{5}{2}$ C) $3 \le x < \frac{7}{2}$

D) $2 \le x < 3$ E) $3 \le x < 4$

**14.** $f(x) = |2 - x| + \text{sgn}(x + 1) + x + 1$

**fonksiyonu $x > 2$ aralığında aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 4 B) $2x$ C) $2x - 2$ D) $2x - 4$ E) 2

**15.** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} [\![ f(x) ]\!], & x < 0 \\ \text{sgn}(f(x)), & x \ge 0 \end{cases}$

**olduğuna göre, $g(-1) + g(2)$ kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**16.** $([\![ x ]\!] + 3)^2 = 4$

**denklemini sağlayan tamsayılar toplamı kaçtır?**

A) $-6$ B) $-5$ C) $-4$ D) 4 E) 5

**17.** $f(x) = \begin{cases} [\![ x ]\!], & x \text{ tek ise} \\ |x|, & x \text{ çift ise} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} [\![ -x + 1 ]\!], & x \text{ çift ise} \\ |\text{sgn}x|, & x \text{ tek ise} \end{cases}$

**(fog)(2) + (gof)(2) işleminin sonucu kaçtır?**

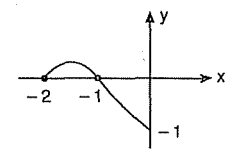
A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**18.** $[\![ \ln(2x) ]\!] = [\![ \ln 10 ]\!]$

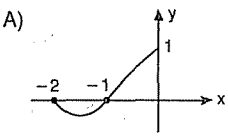
**denklemini sağlayan x in <u>en küçük</u> tamsayı değeri kaçtır?**

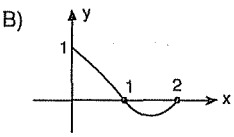
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

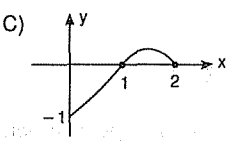
**19.** Yandaki şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x \le 0$ için grafiği verilmiştir.

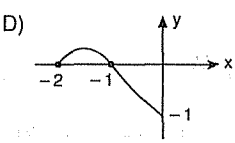


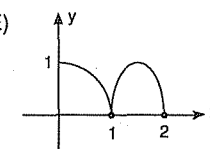

**f(x) fonksiyonu $f(x) = f(-x)$ bağıntısını sağladığına göre $x \ge 0$ için f(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olur?**

A)



B)



C)



D)



E)



**11-B** **12-B** **13-A** **14-B** **15-A**

**16-A** **17-A** **18-C** **19-C**

**20.** $[\![x]\!]^2 - 4[\![x]\!] - 5 = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

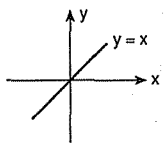
A) $[-1, 0) \cup [4, 5)$ B) $[-2, -1) \cup [5, 6)$

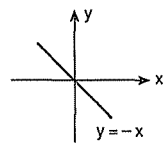
C) $[-1, 0) \cup [5, 6)$ D) $[-1, 6)$

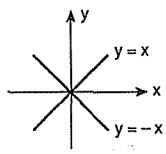
E) $[0, 1) \cup [5, 6]$

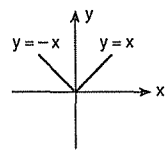
**21.** $|y| = |x|$

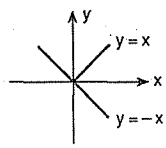
**bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)



B)



C)



D)



E)



**22.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{1-x} + \dfrac{1}{|x|}}$

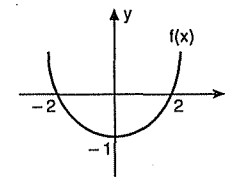
**fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x > 1$ B) $0 < x < 1$ C) $-1 < x < 0$

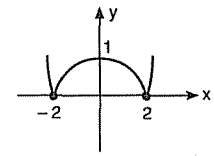
D) $x < 1$ ve $x \neq 0$ E) $-1 < x < 1$ ve $x \neq 0$

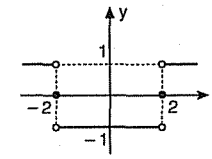
**20-C** **21-C** **22-D**

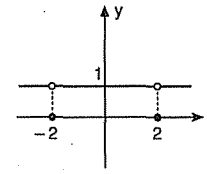
**23.** f(x) in grafiği yanda verilmiştir.

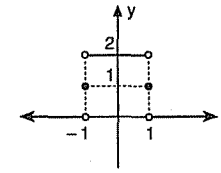


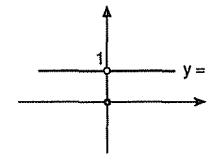

**Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $y = |f(x)|$



B) $y = \text{sgn}(f(x))$


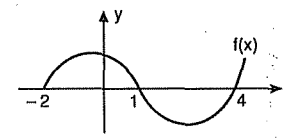

C) $y = \text{sgn}(|f(x)|)$



D) $y = \text{sgn}(-f(x)+1)$



E) $y = \text{sgn}(f(x)+1)$



**24.** Yanda verilen f(x) fonksiyonuna göre

$$\frac{\text{sgn}(f(x))}{|x|.x} \leq 0$$




**eşitsizliğini sağlayan tamsayılar toplamı kaçtır?**

A) −3 B) 3 C) 4 D) 7 E) 10

**25.** $f(x) = |x - 2| + |2x - 4| - 3$

**fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?**

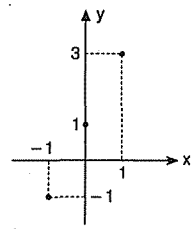
A) −4 B) −3 C) −2 D) −1 E) 0

**23-D** **24-D** **25-B**

# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST - 4

**1.** **[−1 , 1] aralığındaki grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) f : R → R, f(x) = x + 1
B) f : Z → Z, f(x) = x + 2
C) f : R → R, f(x) = 3x + 1
D) f : Z → Z, f(x) = 2x + 1
E) f : R → Z, f(x) = 2x + 1

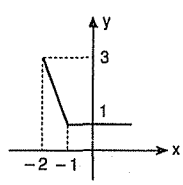
**2.** **Aşağıdakilerin hangisi R den R ye çift fonksiyondur?**

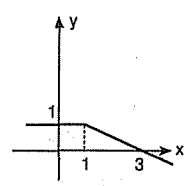
A) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
B) $f(x) = x^3 - x$
C) $f(x) = x^4 - x^2$
D) $f(x) = |x - 1|$
E) $f(x) = 3x$

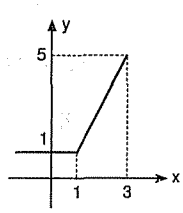
**3.** f: R → R olmak üzere

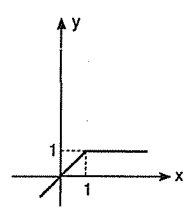
$$f(x) = x + |1 - x|$$

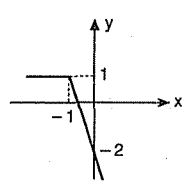
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


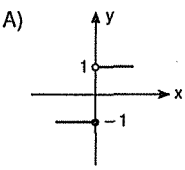

B)


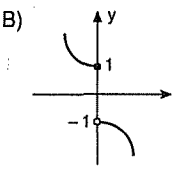

C)


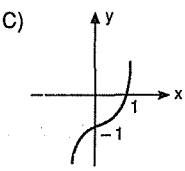

D)


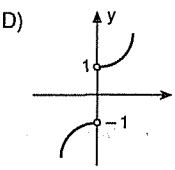

E)


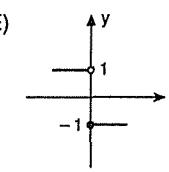

**4.** **f : R → R, f(x) = x.|x| − 1 in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)



B)



C)



D)


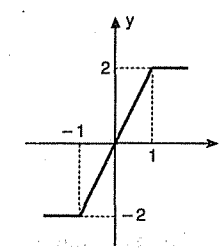

E)



**5.** $x^2 + |x^2 - 3| + 2 = 0$

**denklemini sağlayan kaç farklı reel sayı vardır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**6.** **Yandaki şekilde, R den R ye grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

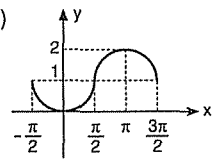


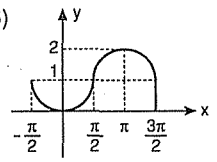

A) y = |x| − |x − 1|
B) y = |x + 1| − |x − 1|
C) y = |x − 1| + |x − 2|
D) y = |x − 1| − |x + 1|
E) y = |x| − |x + 1|

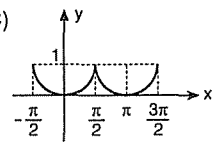
1-D 2-C 3-C 4-C 5-A 6-B

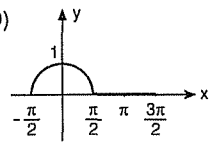
**7.** $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to R$

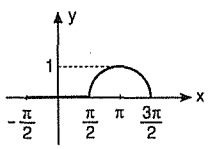
**olmak üzere $f(x) = |\cos x - 1|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

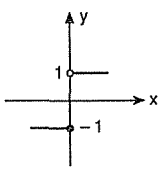

B) 

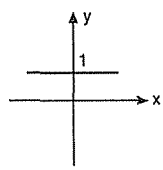

C) 

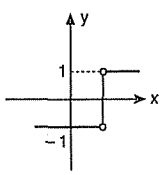

D) 

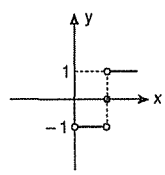

E) 

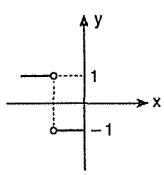

**8.** **Tanımlı olduğu değerler için $y = \text{sgn}(\ln x)$ in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**9.** $2x.\text{sgn}(x) - 6 = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{-1, 1\}$ B) $\{2, 2\}$ C) $\{-3, 3\}$

D) $\{-4, 4\}$ E) $\{-5, 5\}$

**10.** $x.|x| + \text{sgn}(x) = 5$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{-2, 0\}$ C) $\{0, 2\}$

D) $\{-2\}$ E) $\{2\}$

**11.** $y = \text{sgn}(e^{-x})$

**fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $y = x$ B) $y = -1$ C) $y = 0$

D) $y = 1$ E) $y = e^{-x}$

**12.** $[\![ \frac{x+3}{10} ]\!] = 6$

**denklemini sağlayan kaç tane tek sayı vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**13.** $y = (-1)^{\text{sgn}(x)}$

**fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $y = 1$ B) $y = 0$ C) $y = -1$

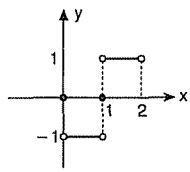
D) $y = \pm 1$ E) $y = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -1, & x \neq 0 \end{cases}$

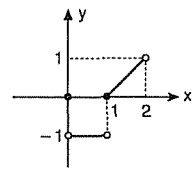
**7-A** **8-D** **9-C** **10-E** **11-D** **12-E** **13-E**

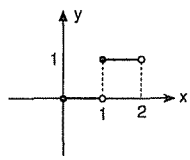
**14.** $f : [0, 2) \to R$ olmak üzere

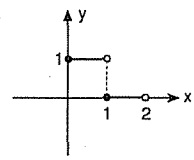
$$f(x) = [\![ x ]\!] . x - sgn(x)$$

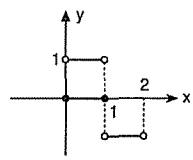
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


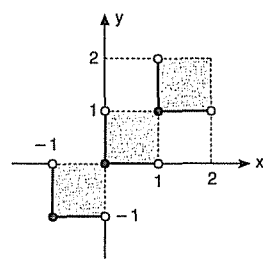

B)



C)



D)



E)



**15.** **$[-1, 2) \times [-1, 2)$ de tanımlanan ve grafiği yanda verilen bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $[\![ y ]\!] = [\![ x ]\!]$ B) $[\![ y ]\!] + [\![ x ]\!] = 0$

C) $[\![ y + x ]\!] = 0$ D) $[\![ y ]\!] = [\![ x ]\!]^2$

E) $[\![ y ]\!] = [\![ x ]\!] - 1$

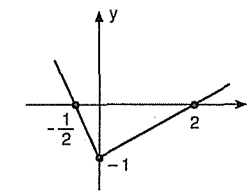
**16.** $sgn\,(x^2 + 10x - 1) = 0$

**denkleminin kökler toplamı kaçtır?**

A) $-10$ B) $-4$ C) $-1$ D) $1$ E) $4$

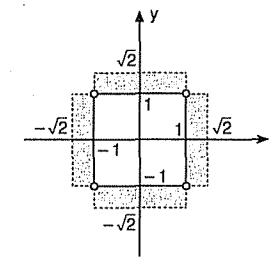
**14-B** **15-A** **16-A**

**17.** **Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonuna göre, (fofof)(4) işleminin sonucu kaçtır?**




A) $-\frac{1}{2}$ B) $0$ C) $1$ D) $2$ E) $8$

**18.** **Grafiği yanda verilen bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $[\![ x^2 ]\!] = [\![ y^2 ]\!]$ B) $y = [\![ x^2 ]\!]$

C) $[\![ y ]\!] = [\![ x^2 ]\!]$ D) $[\![ x^2 ]\!] + [\![ y^2 ]\!] = 1$

E) $[\![ x^2 + y^2 ]\!] = 1$

**19.** $[\![ x^2 ]\!]^2 - 3.[\![ x^2 ]\!] - 4 = 0$

**denkleminin çözüm aralıklarından birisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-5, -4)$ B) $[-5, 0)$ C) $(-\sqrt{5}, -2]$

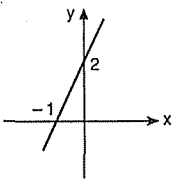
D) $[0, 1)$ E) $[1, 2)$

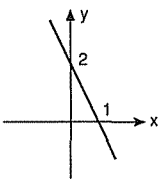
**17-B** **18-D** **19-C**

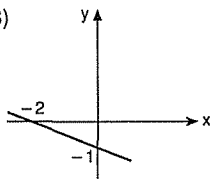
# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

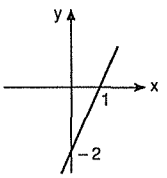
TEST - 5

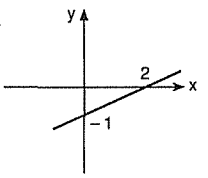
**1.** **Yanda grafiği verilen fonksiyonun tersinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

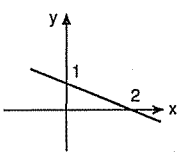



A)



B)


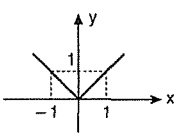

C)


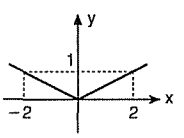

D)


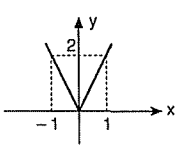

E)


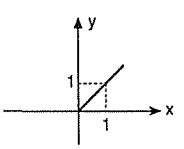

**2.** $f : R \to R,\ f(x) = |x + |x - |x|||$

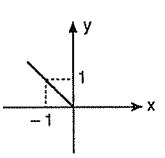
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)



B)



C)



D)



E)



**3.** $f : R \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = x^3 + x$$

**fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) pozitiftir B) negatiftir C) tektir

D) çifttir E) x eksenini kesmez

**4.** $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere,

$$f(x) = |\cos x| - \cos|x|$$

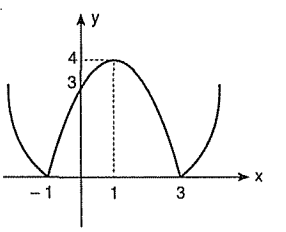
**fonksiyonu aşağıdakilerin hangisine eşittir?**

A) $f(x) = 2\cos x$ B) $f(x) = \cos x$

C) $f(x) = -\cos x$ D) $f(x) = -2\cos x$

E) $f(x) = 0$

**5.** **R den R ye grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = |x^2 - 3x - 1|$
B) $y = |x^2 - 2x + 3|$
C) $y = |x^2 - x + 1|$
D) $y = |x^2 - 2x - 3|$
E) $y = |x^2 + x - 1|$

**6.** $y = |x + 1| - x + 1$

**fonksiyonunun ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**

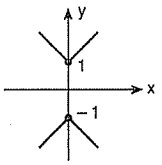
A) $y = \begin{cases} 0, & x \geq -1 \\ 2x, & x < -1 \end{cases}$ B) $y = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$

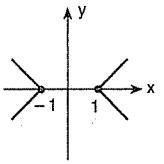
C) $y = \begin{cases} 2, & x \geq -1 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$ D) $y = \begin{cases} 0, & x \geq -1 \\ 2, & x < -1 \end{cases}$

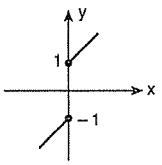
E) $y = \begin{cases} -2x, & x \geq -1 \\ 2, & x < -1 \end{cases}$

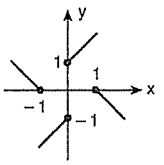
**1-D** **2-A** **3-C** **4-D** **5-D** **6-C**

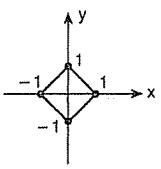
**7.** **R x R de tanımlı $|y| = |x| + 1$ bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 

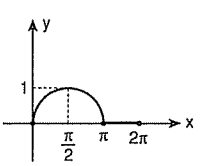

D) 

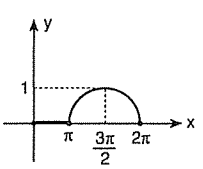

E) 

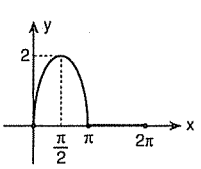

**8.** $f : [0, 2\pi] \to R$ olmak üzere

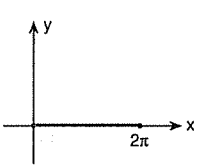
$$f(x) = |\sin x| + \sin x$$

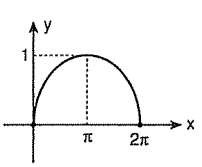
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 

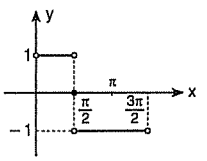

D) 

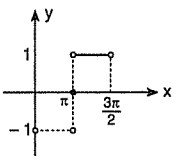

E) 

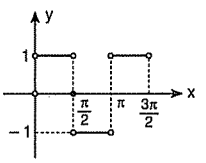

**9.** $f : \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \to R$ olmak üzere

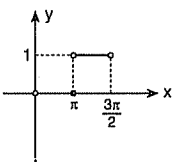
$$f(x) = \text{sgn}(\cos x)$$

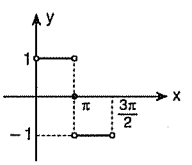
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

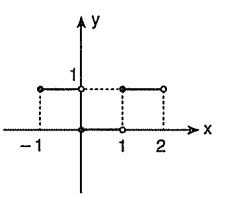

B) 


C) 


D) 


E) 


**10.** **[−1, 2) den R ye grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = |x| . [\![ x ]\!]$

B) $y = [\![ x ]\!] . \text{sgn}(x)$

C) $y = \dfrac{[\![ x ]\!]}{-\text{sgn}(x)}$

D) $y = x . \text{sgn}(x)$

E) $y = x . [\![ x ]\!]$

**11.** $f : (-2, 2) \to R$ olmak üzere

$$f(x) = x^2 - 4 + \text{sgn}(x^2 - 4)$$

**aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $y = x^2 - 4$

B) $y = 0$

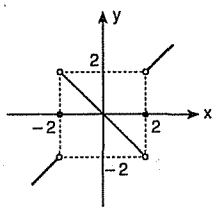
C) $y = x^2 - 3$

D) $y = x^2 + 4$

E) $y = x^2 - 5$

7-A 8-C 9-A 10-B 11-E

**12.** **R den R ye grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

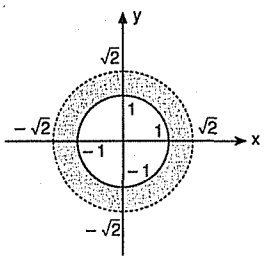



A) $y = x.sgn(x-1)$ B) $y = x.sgn(x^2-1)$

C) $y = x.sgn(x^2-2)$ D) $y = x.sgn(x^2-4)$

E) $y = x.sgn(x+2)$

**13.** **Grafiği yanda verilen bağıntı hangisidir?**




A) $[\![x.y]\!] = 1$

B) $[\![x]\!].[\![y]\!] = 1$

C) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

D) $[\![x^2 + y^2]\!] = 1$

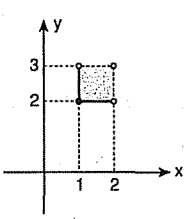
E) $[\![x^2]\!] + [\![y^2]\!] = 1$

**14.** **Aşağıdaki noktalardan hangisi R x R de tanımlı $[\![x-y]\!] = 1$ bağıntısının elemanıdır?**

A) $\left(\frac{3}{2},\frac{4}{5}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ C) $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{4}\right)$ E) $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$

**15.** **Yanda grafiği verilen bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $[\![x]\!].[\![y]\!] = 2$ B) $[\![x]\!]^{[\![y]\!]} = 2$

C) $[\![x.y]\!] = 2$ D) $[\![x^y]\!] = 2$

E) $[\![y]\!]^{[\![x]\!]} = 2$

**12-D** **13-D** **14-D** **15-E**

**16.** $[\![x^2]\!]^2 - 4[\![x^2]\!] + 3 = 0$

**denklemi aşağıdaki aralıkların hangisinde sağlanmaz?**

A) $[\sqrt{3}, 2)$ B) $[1, \sqrt{2})$ C) $(-\sqrt{2}, -1)$

D) $(-2, -\sqrt{3}]$ E) $[-2, -1)$

**17.** $x^2 + x.sgn(x) + |x| = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{-2, 0\}$ B) $\{0, 2\}$ C) $\{-2, 2\}$

D) $\{-2, 0, 2\}$ E) $\{0\}$

**18.** $sgn(x^2 - x - 6) = -1$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, 3)$ B) $(3, \infty)$ C) $(-2, 3)$

D) $(1, 3)$ E) $(0, \infty)$

**19.** $f(x) = |x - |x - |x||\,|$

**fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ B) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$ D) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$

**16-E** **17-E** **18-C** **19-D**

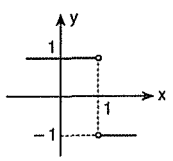
# ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

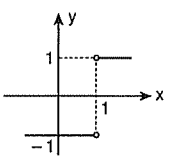
## TEST - 6

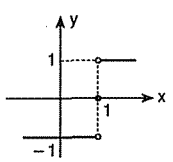
**1.** $f : R \to R$ olmak üzere

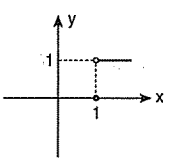
$$f(x) = \frac{1 - x}{|x - 1|}$$

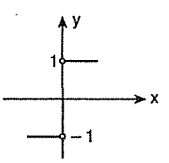
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 

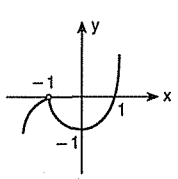

D) 

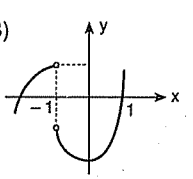

E) 

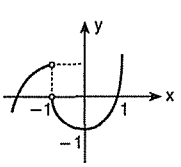

**2.** R den R ye tanımlı

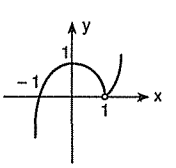
$$y = \frac{x^2 - 1}{\text{sgn}(x + 1)}$$

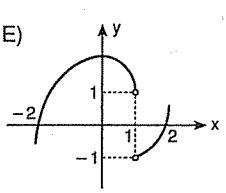
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**3.** $x^2 - x.\text{sgn}(x) - 20 = 0$

**denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

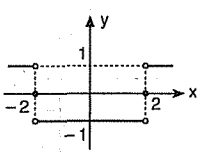
A) $\{-5, 5\}$ B) $\{-5, 3\}$ C) $\{5\}$

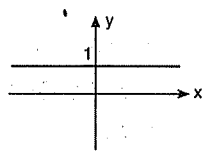
D) $\{-3, 3\}$ E) $\{-3\}$

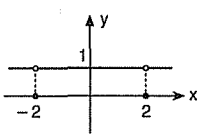
**4.** R den R ye tanımlı

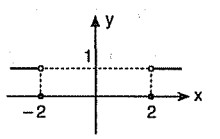
$$y = \text{sgn}[\text{sgn}(x^2 - 4)]$$

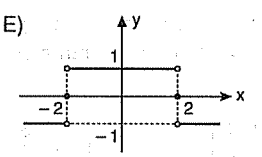
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 

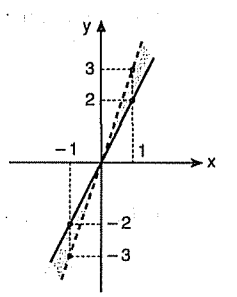

E) 


**5.** $y = \text{sgn}[(x^2 - 1).x.(x + 2)]$

**fonksiyonunun kaç farklı noktası x ekseni üzerindedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**6.** **Grafiği yanda verilen bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $[\![ y ]\!] = 2[\![ x ]\!]$

B) $[\![ y ]\!] = [\![ 2x ]\!]$

C) $[\![ 2y ]\!] = [\![ x ]\!]$

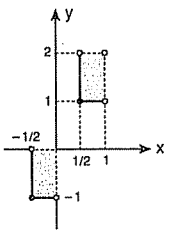
D) $[\![ y ]\!] = [\![ x ]\!]$

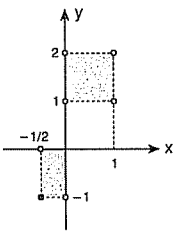
E) $[\![ \frac{y}{x} ]\!] = 2$

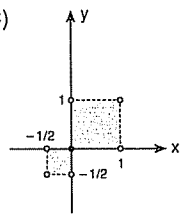
1-A 2-A 3-A 4-A 5-E 6-E

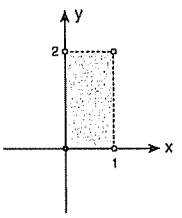
**7.** $[\![ y ]\!] = \dfrac{1}{[\![ 2x ]\!]}$

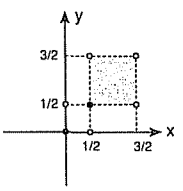
bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**8.** $|[\![ x - 10 ]\!]| = 3$

denklemini sağlayan aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) [12, 13) B) [13, 15) C) [7, 8)

D) [6, 8) E) [7, 10)

**9.** $[\![ \dfrac{x}{8} - 1 ]\!] = 1$

denklemini sağlayan kaç farklı tamsayı vardır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 1

**10.** $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{5-x}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-3, 5)$ C) $[-3, \infty)$

D) $[-3, 0)$ E) $(0, 5)$

**11.** $f(x) = [\![ 2x + 3 ]\!] - |2x + 3| + \text{sgn}(2x + 3)$

olmak üzere, a pozitif tamsayısı için f(a) kaçtır?

A) 0 B) 2a + 3 C) 4a + 6 D) a E) 1

**12.** $[\![ x + 10 ]\!] . [\![ 10.x ]\!] = 0$

denklemi aşağıdaki aralıkların hangisinde sağlanır?

A) $(-8, -7]$ B) $[-9, 8)$ C) $[-10, -9)$

D) $[0, 1)$ E) $[9, 10)$

**13.** $f(x) = [\![ \dfrac{x}{5} ]\!] + \text{sgn}(x - 5)$ ve $x \in [-25, -20)$

olduğuna göre, f(x) kaçtır?

A) −25 B) −20 C) −15 D) −10 E) −6

**14.** $x < 0$ olmak üzere

$([\![ 3x ]\!] - 3)^2 = 25$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left[-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ B) $(-3, -2)$ C) $\left[-3, -\dfrac{5}{2}\right)$

D) $[-2, -1)$ E) $\left[-\dfrac{3}{2}, -1\right)$

**7-A** **8-C** **9-B** **10-C** **11-E** **12-C** **13-E** **14-A**

## LİMİT

A = (a, b) reel sayılarda bir açık aralık ve
f: A → R veya f: A – {$x_0$} → R fonksiyonu verilmiş olsun.

**Soldan Limit:** x değişkeni $x_0$ a soldan yaklaştığında ($x \to x_0^-$) f(x) fonksiyonu da $L_1$ reel sayısına yaklaşıyor ise "f(x) in $x = x_0$ noktasında soldan limiti $L_1$ dir." denir ve $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

**Sağdan Limit:** x değişkeni $x_0$ a sağdan yaklaştığında ($x \to x_0^+$) f(x) fonksiyonu da $L_2$ reel sayısına yaklaşıyor ise "f(x) in $x = x_0$ noktasında sağdan limiti $L_2$ dir." denir ve $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

**Uyarı:**

Soldan limit, sağdan limite eşit ise fonksiyonun limiti vardır. Farklı ise fonksiyonun limiti yoktur.

1. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in R$

"f(x) in $x = x_0$ noktasında limiti vardır ve L dir." denir.

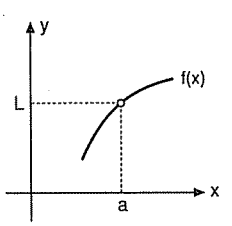
2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ise

"f(x) in $x = x_0$ noktasında limiti yoktur." denir.

**Özel Durumlar:**

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

ise $\lim_{x \to a} f(x) = L$

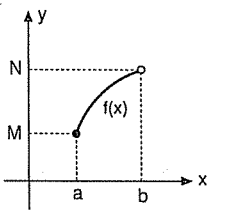



**Uyarı:**

x = a noktasında fonksiyonun limitinin olması için tanımlı olması gerekmez. Yukarıdaki şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonu x = a noktasında tanımsız olduğu halde, x = a da limiti vardır.

2. **Aralığın uç noktalarındaki limit**

f: [a, b) → R, şekildeki y = f(x) fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken:




**i. a noktasındaki limit, sadece sağdan limitle belirlenir.**

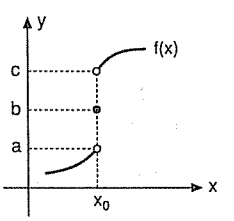
$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = M = f(a)$ dır.

**ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.**

$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = N$ dir. f(b) tanımsızdır.

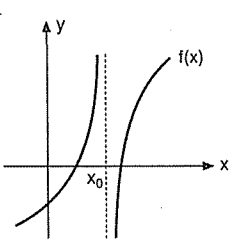
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = c$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$




y = f(x) fonksiyonu; $x = x_0$ noktasında tanımlı olduğu halde, sağdan ve soldan limitleri farklı olduğundan $x = x_0$ da limiti yoktur.

4. $x = x_0$ doğrusu f(x) fonksiyonunun düşey asimptotudur.




$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

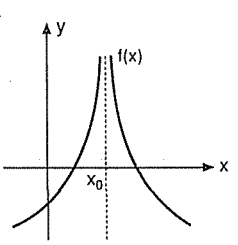
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

$x = x_0$ noktasında sağdan ve soldan limitleri farklı olduğundan limit yoktur.

5. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



**Sonuç:**

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & , \text{ n pozitif çift sayı} \\ \text{yoktur} & , \text{ n pozitif tek sayı} \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$ dır. $(n \in Z^+)$

**Örnekler:**

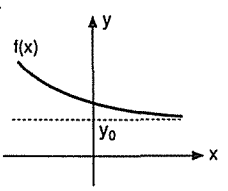
1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^3+2005} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10}{(x-2006)^4} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{(x+1)^2} = 0$

6. $y = y_0$ doğrusu f(x) fonksiyonunun yatay asimptotudur.

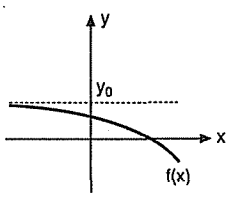



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$

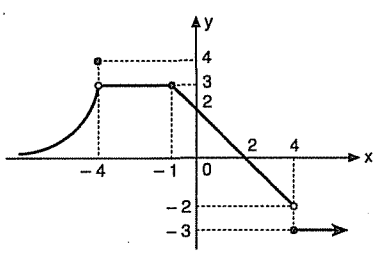
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$




**Örnek:**




**Yukarıda verilen f(x) fonksiyonu için −4, −3, −1, 0, 2, 4 ve 5 noktaları için var olan limitler toplamı kaçtır?**

**Çözüm:**

$x = -4$ için $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-4} f(x) = 3$ tür.

$x = -3$ için $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = 3$ tür.

$x = -1$ için $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 3$ tür.

$x = 0$ için $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ dir.

$x = 2$ için $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0$ dır.

$x = 4$ için $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to4} f(x)$ yoktur.

$x = 5$ için $\lim\limits_{x\to5} f(x) = -3$ tür.

O halde var olan limitler toplamı;

$3 + 3 + 3 + 2 + 0 + (-3) = 8$ dir.

## SÜREKLİLİK

f: (a, b) → R ve $x_0 \in (a, b)$ olsun.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise "f(x) fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir" denir.

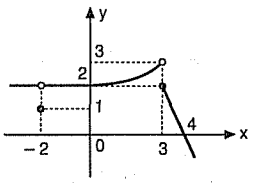
Yani, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ olmalıdır.

**Uyarı:**

Grafiği verilen fonksiyonlar için, "grafik istenilen noktada el kaldırmadan çizilebiliyor ise süreklidir" denir.

**Örnek:**

**Yanda verilen f(x) fonksiyonu için −3, −2, −1, 0, 2, 3, 4 değerlerinden kaçında süreklidir?**




**Çözüm:**

{−3, −1, 0, 2, 4} noktalarında grafik el kaldırmadan çizilebildiğinden süreklidirler.

$x = -2$ için: $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$ fakat $f(-2) = 1$ değeri limit değerine eşit olmadığından sürekli değildir.

$x = 3$ noktasında fonksiyonun limiti olmadığından sürekli değildir.

O halde 5 noktada süreklidir.

**Örnek:**

$$f: R \to R \text{ ve } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 2 \text{ ise} \\ 4, & x = 2 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

**fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli midir?**

**Çözüm:**

$x = 2$ noktasında sürekli olması için

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$\lim_{x\to 2^-} (2x - 1) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 1) = f(2)$

$3 = 3 \neq 4$ olduğundan $x = 2$ noktasında f(x) in limiti olmasına rağmen sürekli değildir.

**Limitin Özellikleri**

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right].\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]$

3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$

4. a) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, $n \in N$

   b) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, $n \in N$

   $\left(f(x) \geq 0 \text{ ve } \lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0 \text{ ise}\right)$

5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim_{x\to x_0} [\log f(x)] = \log\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$, $(f(x) > 0 \text{ ise})$

7. $\lim_{x\to x_0} c^{f(x)} = c^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, $c \in R$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}\right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}\right) = \frac{2^2 - 3.2 + 1}{2 + 1} = \frac{-1}{3} \text{ tür.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 + 4x - 4}$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 + 4x - 4} = \sqrt[3]{(-2)^2 + 4(-2) - 4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{2x^2 + 4x + 3} + 2^{\frac{x+3}{x+1}}\right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{2x^2 + 4x + 3} + 2^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2.1^2 + 4.1 + 3} + 2^{\frac{1+3}{1+1}}$$

$$= \sqrt{9} + 2^2 = 3 + 4 = 7 \text{ dir.}$$

**Uyarı:**

Bir fonksiyonun limiti hesaplanırken; kritik olmayan noktalarda sağdan ve soldan limite bakmaya gerek yoktur. Fonksiyonun kritik olmayan $x = x_0$ noktalarındaki limiti, bu noktalarda $x_0$ değeri yerine yazılarak bulunur.

Bir fonksiyonun kritik noktalarında limit soruluyorsa, bu noktalarda sağdan ve soldan limite bakılır.

**Kritik noktalar:**

**a)** Kesirli fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler,

**b)** Parçalı fonksiyonlarda fonksiyonun kuralının değiştiği (parçalandığı) noktalar,

**c)** Mutlak değer fonksiyonunda;
$y = |f(x)|$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ yapan değerler,

**d)** İşaret fonksiyonunda;
$y = \text{sgn}(f(x))$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ yapan değerler,

**e)** Tam kısım (değer) fonksiyonunda;
$y = [\![ f(x) ]\!]$ fonksiyonunda $f(x) \in Z$ yapan değerlerdir.

**Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti**

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 2} (|x-3| + |x^2 - x - 12|)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 2} (|x-3| + |x^2 - x - 12|)$$

$$= |2-3| + |2^2 - 2 - 12| = |-1| + |-10| = 11$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$x = 1$ paydayı ve mutlak değerin içini sıfır yaptığından sağdan ve soldan limitine bakalım.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{|1^+-1|}{1^+-1} = \frac{|0^+|}{0^+} = \frac{0^+}{0^+} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{|1^--1|}{1^--1} = \frac{|0^-|}{0^-} = \frac{0^+}{0^-} = -1$$

veya

$x \to 1^+$ için $|x-1| = x-1$

$x \to 1^-$ için $|x-1| = -x+1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = -1$$

Sağdan ve soldan limitleri farklı olduğundan $x = 1$ noktasında limit yoktur.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^2-4|}{x+2}$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$x = -2^+$ için $|x^2-4| = -x^2+4$ tür.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x-2).(x+2)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2^+} [-(x-2)] = \lim_{x\to -2^+} (2-x) = 2-(-2) = 4 \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 0^-} \left( \frac{x}{|x^2+x|} + \frac{|x|}{|x+1|} \right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 0^-} \left( \frac{x}{|x.(x+1)|} + \frac{|x|}{|x+1|} \right) = \lim_{x\to 0^-} \left( \frac{x}{|x|.|x+1|} + \frac{|x|}{|x+1|} \right)$$

$x \to 0^-$ için $|x| = -x$ tir.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \left( \frac{x}{-x.|x+1|} + \frac{-x}{|x+1|} \right) = \lim_{x\to 0^-} \left( \frac{-1}{|x+1|} - \frac{x}{|x+1|} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left( \frac{-1}{|0+1|} - \frac{0}{|0+1|} \right) = \left( \frac{-1}{1} - \frac{0}{1} \right) = -1 \text{ dir.}$$

**İşaret (Signum) Fonksiyonunda Limit**

Signum fonksiyonunun içini sıfır yapan değerlerde sağdan ve soldan limitlere bakılır. Sıfır yapmayan değerlerde ise sayı değeri fonksiyonda yerine konarak limit değeri bulunur.

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 4} [Sgn(8 - x) + Sgn(2 - x)]$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to 4} [Sgn(8-x) + Sgn(2-x)] = Sgn(8-4) + Sgn(2-4)$$

$$= Sgn(4) + Sgn(-2) = 1 + (-1) = 0 \text{ dır.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 2^+} [Sgn(2 - x) + Sgn(x - 2)]$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to 2^+} [Sgn(2-x) + Sgn(x-2)] = Sgn(2-2^+) + Sgn(2^+-2)$$

$$= Sgn(-0^+) + Sgn(0^+) = -1 + 1 = 0$$

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 1} [Sgn(x - 1) + |x - 1| + Sgn(x^2 - 1)]$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

x = 1, Sgn fonksiyonunun içini sıfır yaptığından sağdan ve soldan limitine bakmalıyız.

$$\lim_{x \to 1^+} [Sgn(x - 1) + |x - 1| + Sgn(x^2 - 1)]$$

$$= Sgn(1^+ - 1) + |1^+ - 1| + Sgn((1^+)^2 - 1)$$

$$= Sgn(0^+) + |0^+| + Sgn(0^+) = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} [Sgn(x - 1) + |x - 1| + Sgn(x^2 - 1)]$$

$$= Sgn(1^- - 1) + |1^- - 1| + Sgn((1^-)^2 - 1)$$

$$= Sgn(0^-) + |0^-| + Sgn(0^-) = (-1) + 0 + (-1) = -2$$

x = 1 noktasında sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan limit yoktur.

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 0} Sgn(x^2)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

x = 0 noktası Sgn fonksiyonunun içini sıfır yaptığından sağdan ve soldan limitine bakalım.

$$\lim_{x \to 0^+} Sgn(x^2) = Sgn((0^+)^2) = Sgn(0^+) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} Sgn(x^2) = Sgn((0^-)^2) = Sgn(0^+) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} Sgn(x^2) = 1 \text{ dir.}$$

**Uyarı:**

Sgn fonksiyonunun içini sıfır yapan değerlerde de limiti olabilir.

**Tam Kısım (Değer) Fonksiyonunda Limit**

Tam değerin içini tamsayı yapan değerlerde sağdan ve soldan limite bakılır. Tamsayı dışındaki değerlerde ise fonksiyonun aldığı değer bulunur.

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 1} \left( [\![ \frac{2x-1}{2} ]\!] + [\![ -x^2 - \frac{3}{2} ]\!] \right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to 1} \left( [\![ \frac{2x-1}{2} ]\!] + [\![ -x^2 - \frac{3}{2} ]\!] \right) = [\![ \frac{2.1-1}{2} ]\!] + [\![ -1^2 - \frac{3}{2} ]\!]$$

$$= [\![ \frac{1}{2} ]\!] + [\![ \frac{-5}{2} ]\!]$$

$$= 0 + (-3) = -3$$

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 1^+} \left( [\![ x ]\!] + [\![ -x ]\!] \right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to 1^+} \left( [\![ x ]\!] + [\![ -x ]\!] \right) = [\![ 1^+ ]\!] + [\![ -1^+ ]\!]$$

$$= 1 + (-2) = -1 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 1}\left([\![\, 2x+1 \,]\!]+[\![\, -2x+1 \,]\!]+[\![\, 5-x \,]\!]\right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$x = 1$ tam değerlerin içini tamsayı yaptığından sağdan ve soldan limite bakmalıyız.

$$\lim_{x\to 1^+}\left([\![\, 2x+1 \,]\!]+[\![\, -2x+1 \,]\!]+[\![\, 5-x \,]\!]\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left([\![\, 2.1^+ +1 \,]\!]+[\![\, -2.1^+ +1 \,]\!]+[\![\, 5-1^+ \,]\!]\right)$$

$$= 3 + (-2) + (3) = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left([\![\, 2x+1 \,]\!]+[\![\, -2x+1 \,]\!]+[\![\, 5-x \,]\!]\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left([\![\, 2.1^- +1 \,]\!]+[\![\, -2.1^- +1 \,]\!]+[\![\, 5-1^- \,]\!]\right)$$

$$= 2 + (-1) + 4 = 5$$

$x = 1$ için sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan limiti yoktur.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 1}[\![\, x^2-2x+1 \,]\!]$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

Sağdan ve soldan limitine bakalım.

$$\lim_{x\to 1^+}[\![\, x^2-2x+1 \,]\!]=\lim_{x\to 1^+}[\![\, (x-1)^2 \,]\!]$$

$$\lim_{x\to 1^+}[\![\, (1^+-1)^2 \,]\!]=\lim_{x\to 1^+}[\![\, (0^+)^2 \,]\!]=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}[\![\, (x^2-2x+1^2 \,]\!]=\lim_{x\to 1^-}[\![\, (x-1)^2 \,]\!]$$

$$\lim_{x\to 1^-}[\![\, (1^--1)^2 \,]\!]=\lim_{x\to 1^-}[\![\, (0^-)^2 \,]\!]=0$$

O halde, $\lim_{x\to 1}[\![\, x^2-2x+1 \,]\!]=0$ dır.

**Uyarı:**

Tam değerin içini tamsayı yapan değerlerde de limitin olabileceğine dikkat ediniz.

**Trigonometrik Fonksiyonların Limiti**

sinx, cosx fonksiyonları her x reel sayısı için süreklidir. tanx ve cotx fonksiyonları ise; $k \in Z$ olmak üzere, sırasıyla $\left(\pm\frac{\pi}{2}+k.2\pi\right)$ ve $(k.\pi)$ değerleri için süreksizdir.

**Sonuç:**

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan(bx)}=\frac{a}{b}$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}$ dir.

**Uyarı:**

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ ve $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ dır.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2\sin x}{2\tan x-3x}\right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

Pay ve paydayı x e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{x}+2\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\tan x}{x}-\frac{3x}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\tan x}{x}-3}\right)$$

$$=\frac{1+2.1}{2.1-3}=-3 \text{ tür.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(x.\sin\frac{2}{x}\right)$$

**değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(x.\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)}=2$$

## LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMLARI

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ biçimindeki belirsiz ifadeleri aşağıdaki örneklerle ele alacağız. Ancak bu durumların dışında $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ gibi belirsizlikler de vardır.

### 1. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

**limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\infty$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) 0 E) Yoktur

**Çözüm:**

$\lim_{x \to 1} (x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$ ve

$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$ olduğu için

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(x^2 + x + 1)}{(x-1).(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$= \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Cevap **B**

**Örnek:**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\sqrt{2}$

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x).(\cos x + \sin x)$ olduğu için,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x).(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ dir.

Cevap **C**

### 2. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

**Örnek:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2}$$

**limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) 3 E) $\infty$

**Çözüm:**

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}$$

$x \to \infty$ için $\frac{5}{x} \to 0$ ve $\frac{2}{x^2} \to 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$ tür.

Cevap **D**

**Örnek:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2007}{x^2}$$

**limiti aşağıdakilerin hangisidir?**

A) $-\infty$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $\infty$

**Çözüm:**

$\frac{-\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2007}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2007}{x^2}\right)$$

$$=0+0=0 \text{ dır.}$$

Cevap **C**

**Örnek:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-2}$$

**limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\infty$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $\infty$

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\infty}{1-0}=\infty$$

Cevap **E**

**Uyarı:**

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğiyle ilgili, dizilerde verilen kuralın yukarıdaki örneklerde geçerli olduğuna dikkat ediniz.

**Örnekler:**

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-8}{2x^3+x^2}=\frac{4}{2}=2$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+4x-1}{x^3-2x}=\infty$

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+4x}{x^3-2x}=\infty$

4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+2x}{x^4+3}=-\infty$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+30}{x^6}=0$

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^5}=0$

**Uyarı:**

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

limiti hesaplanırken, P(x) ve Q(x) in en büyük dereceli terimlerinin dışındaki bütün terimleri ihmal edilir. Yani sadece en büyük dereceli terimleri hesaba katılarak limit bulunur.

**Örnekler:**

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{1-x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-x^4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{-x}\right)=0$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^2-3x}{1-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^5}{-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-2x^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^3}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}(-2)=-2$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+5}{1+3x^2-4x^5}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^5}{-4x^5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{-4}\right)=-\frac{1}{2}$

**3. $0.\infty$ Belirsizliği**

$0.\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$ veya $0.\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$ dur.

Buna göre $0.\infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek sonuca gidilir.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}\cdot(2x-10)$$

**limiti kaçtır?**

**Çözüm:**

$0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}\cdot(2x-10)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-10}{x+1}=2 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ belirsizliği}\right)$$

**4. $\infty - \infty$ Belirsizliği**

$\infty - \infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek sonuca gidilir.

**Örnek:**

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$$

**limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $\infty$

**Çözüm:**

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0$$

Cevap **C**

**Örnek:**

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$$

**limiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\infty$ B) $\frac{1}{6}$ C) 0 D) $-\frac{1}{6}$ E) $-\infty$

**Çözüm:**

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{x+3-6}{x^2-9}\right)$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{x-3}{(x-3).(x+3)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Cevap **B**

**5. $1^\infty$ Belirsizliği**

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{bx+c}\right)^{dx+f} = e^{\frac{a}{b}.d} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+3}\right)^{2x-5}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $e^{-1}$ B) e C) $e^2$ D) $e^3$ E) $e^4$

**Çözüm:**

$(1+0)^\infty = 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+3}\right)^{2x-5}$$

ifadesinde $a = 1$, $b = 2$, $d = 2$ olduğu için,

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+3}\right)^{2x-5} = e^{\frac{a}{b}.d}$$

$$= e^{\frac{1}{2}.2} = e \text{ dir.}$$

Cevap **B**

**Örnek:**

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1}$$

**limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2 B) 4 C) $e^2$ D) $e^3$ E) $e^4$

**Çözüm:**

$\left(\frac{2}{2}\right)^\infty = 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3+2}{2x+3}\right)^{4x-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+3}\right)^{4x-1}$$

ifadesinde, $a = 2$, $b = 2$, $d = 4$ olduğu için

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+3}\right)^{4x-1} = e^{\frac{2}{2}.4} = e^4 \text{ tür.}$$

Cevap **E**

**Uyarı:**

1. $y = [f(x)]^{g(x)}$ biçimindeki bir fonksiyonun limiti hesaplanırken; $1^{\infty}$, $0^0$, $0^{\infty}$, $\infty^0$ belirsizlikleriyle karşılaşılırsa $\ln y = g(x).\ln f(x)$ şeklinde iki yanında e tabanına göre logaritması alındıktan sonra limit hesaplanır. Bu şekilde bulunan eşitliğin sağ tarafının limit değeri L olsun; bu durumda $y = [f(x)]^{g(x)}$ in limiti $e^L$ olur.

2. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to a}[1 + f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]}$$ olur.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$$

limitini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = 0^{\infty}$ olduğundan,

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = -(\ln x)^2$$

eşitliğinde iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}[-(\ln x)^2]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = e^{-\infty} = 0 \text{ dır.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2x+1}{1-x^2}\right)^{2+x}$$

limitini hesaplayalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2x+1}{1-x^2}\right)^{2+x} = (1+0)^{-\infty} = 1^{-\infty}$ ise,

$$L = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+1}{1-x^2}\cdot(2+x)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right) = -2$$

olduğundan,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2x+1}{1-x^2}\right)^{2+x} = e^L = e^{-2}$$ olur.

6. $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\lim\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ dır.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1} - \sqrt{4x^2+x+2}\right)$$

limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1} - \sqrt{4x^2+x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[2\left|x+\frac{3}{8}\right| - 2\left|x+\frac{1}{8}\right|\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[2\left(x+\frac{3}{8}\right) - 2\left(x+\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[2x + \frac{6}{8} - 2x - \frac{2}{8}\right] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$ dir.

# LİMİT ve SÜREKLİLİK

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** n elemanlı bir kümenin r li bütün kombinasyonlarının sayısı C(n, r) ile gösterildiğine göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n,\,0)\,.\,C(n,\,4)}{C(n,\,1)\,.\,C(n,\,3)}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

**2.** $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\pi}{3} - x}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\sqrt{3}-1$ C) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$

D) $\frac{3}{\pi}(1+\sqrt{3})$ E) $\frac{\pi}{3}$

**3.** $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8x + 8}{x^4 - 4x}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-1$ B) $-\frac{1}{7}$ C) 0 D) $\frac{1}{7}$ E) 1

**4.** $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \tan x}{\cos x}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) 0 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

**5.** $f(x) = [\![ x + 1 ]\!] - \text{Sgn}(x-1) + |x+1| + x$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**6.** $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x > -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x^2-4}, & x \le -1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu hangi x değeri için süreksizdir?

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**7.** f: R → R fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} |x-a|, & x \ge 2 \text{ ise} \\ [\![ x ]\!] + 3, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor.

f(x) fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0

**8.** $\lim_{x\to a} \frac{a - \sqrt{8 - ax}}{x - a}$ ifadesinin reel bir değerinin olması için a pozitif reel sayısı kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**9.** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 16x + 1} - 2x + 3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-1$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**10.** $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

1-A 2-D 3-C 4-C 5-C

6-A 7-C 8-B 9-A 10-B

**11.** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1 - [\![ x ]\!]}{[\![ 2 - x^2 ]\!]}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) −1 C) 0 D) $-\infty$ E) $+\infty$

**12.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} ( [\![ \cos x ]\!] + [\![ \sin 2x ]\!] )$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

**13.** $\lim\limits_{x \to 1^+} \left( 2^{[\![ x ]\!]} + 2^{[\![ 2-x ]\!]} \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**14.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \tan x$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) −1 C) $+\infty$ D) $-\infty$ E) 0

**15.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \sqrt{x^2 - 4x + 3} + x + 2 \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) −2 C) 4 D) 6 E) $-\infty$

**16.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x - \sqrt{9x^2 + 2x - 1}}{\sqrt{4x^2 + 1} - 5x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) −1 B) 1 C) 2 D) −2 E) $\infty$

**17.** $\lim\limits_{a \to x} \dfrac{x^2 - a^2}{\tan(a - x)}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) −2x B) 2x C) 2a D) −2a E) 3x

**18.** $\lim\limits_{x \to 2^+} \left( \dfrac{x + 2}{2 - x} \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 0 D) $+\infty$ E) $-\infty$

**19.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{8^x - 4^x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 2 E) −2

**20.** $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 , & x < -1 \text{ ise} \\ |x - 2a| , & x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$

**f(x) in x = −1 noktasında sürekli olması için, a nın alacağı negatif değer kaç olmalıdır?**

A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1

**11-A 12-E 13-C 14-D 15-C**

**16-A 17-A 18-E 19-A 20-E**

# LİMİT ve SÜREKLİLİK

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $C(n, 0) = 1$

$C(n, 1) = n$

$C(n, 3) = \dfrac{n.(n-1).(n-2)}{3!}$

$C(n, 4) = \dfrac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{4!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{4!}}{n.\frac{n.(n-1).(n-2)}{3!}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n-3}{4!}}{\frac{n}{3!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6(n-3)}{24n} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**2.** $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\pi}{3}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6(1+\sqrt{3})}{2\pi} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{\pi}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8x+8}{x^4-4x} = \frac{2^3-8.2+8}{2^4-4.2} = \frac{0}{8} = 0$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-\tan x}{\cos x} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $x \to 1^+ \Rightarrow |x+1| = x+1$ dir.

$$\lim_{x\to 1^+}\left([\![x+1]\!] - \text{sgn}(x-1) + (x+1) + x\right)$$

$$= \left([\![1^+ + 1]\!] - \text{sgn}(1^+ - 1) + (1^+ + 1) + 1^+\right)$$

$= 2 - 1 + 3 = 4$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** Paydayı sıfır yapan değerlerde süreksizdir.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ tanımsızdır.

Ancak $x \le -1$ olduğundan sadece $(-2)$ de süreksizdir.

Ayrıca $x = -1$ noktasında sağ, sol limitler ile $f(-1) = -\dfrac{1}{3}$ değerleri eşit olduğundan f(x) fonksiyonu $x = -1$ de süreklidir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}|x-a| = \lim_{x\to 2^-}([\![x]\!]) + 3)$$

$|x-a| = [\![2^-]\!] + 3 \Rightarrow |2-a| = 4$

$\Rightarrow 2 - a = 4$ veya $2 - a = -4$

$\Rightarrow a = -2$ veya $a = 6$ dır.

a nın alabileceği değerler toplamı 4 tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**8.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{a-a}=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{0}$

$a-\sqrt{8-a^2}=0$ olmalıdır.

Çünkü; $\dfrac{0}{0}$ durumunda reel bir limit vardır.

$a-\sqrt{8-a^2}=0 \Rightarrow \sqrt{8-a^2}=a \Rightarrow 8-a^2=a^2$

$\Rightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**9.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,.\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|$

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-16x+1}=\sqrt{4}\,.\lim\limits_{x\to\infty}\left|x-\dfrac{16}{8}\right|$

$=2\lim\limits_{x\to\infty}|x-2|$

$x\to+\infty$ olduğundan $2(x-2)=2x-4$ tür.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-16+1}-2x+3\right)=2x-4-2x+3$

$=-1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $x=1$ yazılırsa $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği elde edilir. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini yok etmek için çarpanlara ayırıp sadeleştirelim.

$\sqrt[6]{x}=t$ denilirse, $\sqrt[3]{x}=t^2$ ve $\sqrt{x}=t^3$ olur.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}=\dfrac{t^2-t^3}{t^2-t}=\dfrac{t(t-t^2)}{(t^2-t)}=-t$

$\lim\limits_{x\to1}(-t)=\lim\limits_{x\to1}\left(-\sqrt[6]{x}\right)=-1$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** $x\to1^-$ için, $[\![x]\!]=0$ ve $[\![-x^2]\!]=-1$ dir.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-[\![x]\!]}{2+[\![-x^2]\!]}=\dfrac{1-0}{2+(-1)}=1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** $x\to\dfrac{\pi^+}{2}$ için $-1<\cos x<0$ ve $-1<\sin 2x<0$ dır.

$[\![\cos x]\!]=-1$ ve $[\![\sin 2x]\!]=-1$ olur.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\left([\![\cos x]\!]+[\![\sin 2x]\!]\right)=-1-1=-2$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $x\to1^+$ için $[\![x]\!]=1$ ve $[\![2-x]\!]=0$ dır.

Buna göre,

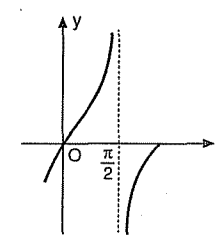
$\lim\limits_{x\to1^+}\left(2^{[\![x]\!]}+2^{[\![2-x]\!]}\right)=2^1+2^0=3$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**14.** $y=\tan x$ in grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\tan x=-\infty$ dur.




**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**15.** $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x+3}=\lim_{x\to-\infty}|x-2|$ dir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}|x-2|+x+2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x+2+x+2)$$

$$=4 \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**16.** $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-\sqrt{9x^2+2x-1}}{\sqrt{4x^2+1}-5x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-\sqrt{9x^2}}{\sqrt{4x^2}-5x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-3x}{2x-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{-3x}=-1 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17.** $a-x=t$ olsun. $a\to x$ için $t\to 0$ olur.

$$\lim_{a\to x}\frac{(x-a).(x+a)}{\tan(a-x)}=\lim_{a\to x}(x+a).\lim_{a\to x}\frac{x-a}{\tan(a-x)}$$

$$=(x+x).\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\tan t}$$

$$=2x.(-1)=-2x \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**18.** $$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2-x}=\frac{2^++2}{2-2^+}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** $$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{8^x-4^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x(2^x-1)}{4^x(2^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{4^x}=\frac{2^0}{4^0}=1$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**20.** $\lim_{x\to-1^-}(2x+3)=\lim_{x\to-1^+}|x-2a|$

$2.(-1)+3=|-1-2a|$

$1=|1+2a|$ dır.

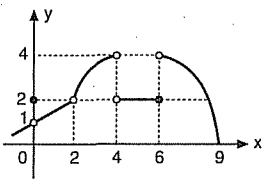
$1+2a=1$ veya $1+2a=-1$

$a=0$ veya $a=-1$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

# LİMİT ve SÜREKLİLİK

TEST - 2

**1.** 


**Grafiği yanda verilen fonksiyonun x in 0, 2, 4, 5, 6 noktalarının bazıları için var olan limitleri toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

**2.** $f: R \to R, \quad f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} + \text{sgn}(x-2)$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$ B) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -2$

C) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ D) $f(0) = -2$

E) $f(100) = 2$

**3.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2[\![x]\!]}{[\![2x]\!]}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) −1 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) Yoktur

**4.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - x + 3}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) 0 E) $\infty$

**5.** $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\tan 2a}{\sin a}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) −2 D) −1 E) 0

**6.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - \sqrt{4x^2 - 7}}{2 - x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

**7.** $\lim\limits_{x \to 5} \left[(x-6)^{100} . (4-x)^{101}\right]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) −1 C) 0 D) 2 E) −2

**8.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - (m+1).x - 3}{2x^3 + 1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) −1 D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

**1-D** **2-C** **3-E** **4-A** **5-B** **6-D** **7-B** **8-E**

**9.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+mx+8}{x^2-3x-4}$

**limitinin değeri bir reel sayı olduğuna göre, bu sayı kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

**10.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2.|x-2|-1}{x^2-1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $-\frac{7}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

**11.** $f(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(x(x^2-3))}{x^2-1}$

**fonksiyonu kaç farklı noktada süreksizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**12.** $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{27}$ D) $\frac{1}{81}$ E) $\frac{1}{243}$

**13.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) a B) b C) a.b D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

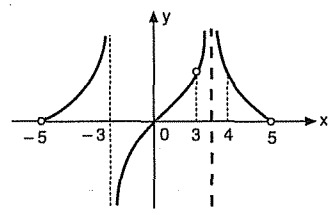
**14. Aşağıdaki fonksiyonların hangisi, x = −1 de süreklidir?**

A) $y = [\![x]\!]$ B) $y = \operatorname{sgn}(x^2-x-2)$

C) $y = |x^2-1|$ D) $y=\begin{cases} x-3, & x>-1 \\ x^2+1, & x\le -1 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x+2, & x>-1 \\ 2x+3, & x<-1 \end{cases}$

**15.**




**(−5, 5) aralığında grafiği verilen fonksiyonun bu aralıktaki x in tamsayı değerlerinin kaç tanesinde limiti vardır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{3}{x}-1\right).\left(\frac{x^2-1}{3x^2+1}\right)\right]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) −3 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) 3 E) ∞

**17.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-x^2}{1+x^2}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) −1 C) 5 D) −5 E) −∞

**18.** $a\in R,\ \lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{a}{3-x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt[a]{e}$ B) e C) $e^a$ D) 1 E) ∞

**9-B 10-A 11-E 12-C 13-D**

**14-C 15-D 16-B 17-B 18-C**

# LİMİT ve SÜREKLİLİK

## TEST - 3

**1.** $f: R \to R,\ f(x) = sgn(x^2 - 9)$

**fonksiyonunun, x in −7, −3, 0, 2, 10 noktalarının bazıları için var olan limitleri toplamı kaçtır?**

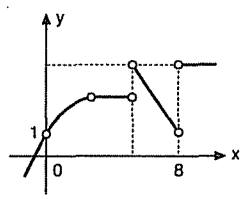
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

**2.** $$f(x) = \begin{cases} ax + 3, & x \geq -2 \\ 2x - 1, & x < -2 \end{cases}$$

**x = −2 de limiti var ise, a kaçtır?**

A) −2 B) −4 C) 0 D) 4 E) 2

**3.**




**Grafiği yanda verilen fonksiyon [−1, 8] aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**4.** $$\lim_{x \to 2} \frac{mx + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

**limiti reel sayı olduğuna göre, m kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

**5.** $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}}{\sqrt{x^2 + 3 - x}}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) −4 B) −2 C) −1 D) 1 E) 2

**6.** $$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

**limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) −1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $-\infty$

**7.** $$\lim_{x \to 1^-} \left(3^{\frac{1}{1-x}} + 2^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

**limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) −1 C) 2 D) $-\infty$ E) $\infty$

**8.** $f(x) = [\![\frac{x-1}{2}]\!] + sgn(x + 2) + |x - 3|$

**fonksiyonunun (−4, 4) aralığında kaç tamsayı değeri için limiti yoktur?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**1-C** **2-D** **3-D** **4-A** **5-A** **6-E** **7-E** **8-C**

**9.** $\lim_{x \to \infty} e^{-x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) e  B) $-e$  C) 0  D) $\infty$  E) $-\infty$

**10.** $\lim_{x \to -\infty} [(x-1).(x^2+x+1)]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1  B) $-1$  C) 0  D) $\infty$  E) $-\infty$

**11.** $\lim_{x \to 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$  B) $\frac{1}{6}$  C) $-\frac{1}{6}$  D) $\frac{1}{12}$  E) $-\frac{1}{12}$

**12.** $\lim_{x \to \infty} \left[ (ax).\sin\left(\frac{b}{x}\right)\right]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{b}{a}$  B) $-a$  C) ab  D) 0  E) $\infty$

**13.** $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+mx+4}$

**fonksiyonu reel sayılarda sürekli olduğuna göre, m hangi aralıktadır?**

A) $(-4, 4)$  B) $(-2, 2)$  C) $(4, \infty)$

D) $(-2, \infty)$  E) $(2, \infty)$

**14.** $\lim_{x \to \infty} \left( \log_2\left(\sqrt{16x^2+x+1} + 4x\right) - \log_2\sqrt{x^2+3}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

**15.** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a.x^2-x+1}{4-x^2} + b\right) = 6$

**olduğuna göre, a – b kaçtır?**

A) $-6$  B) $-4$  C) 0  D) 4  E) 6

**16.** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+1}{3x}\right)^x$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1  B) 3e  C) e  D) $e^3$  E) $\sqrt[3]{e}$

**17.** $\lim_{a \to x} \frac{\tan a - \cot x}{\cot x - \tan a}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) tanx  B) cotx  C) $-$cotx  D) 1  E) $-1$

**18.** $\lim_{x \to 2^-} \frac{[\![ 2x - 2.[\![ x-1 ]\!] ]\!]}{x-2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$  B) $-1$  C) 0  D) $\infty$  E) $-\infty$

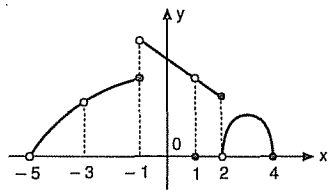
**9-C  10-E  11-C  12-C  13-A**

**14-C  15-A  16-E  17-E  18-E**

# LİMİT ve SÜREKLİLİK

TEST - 4

**1.**




**Grafiği yukarıda verilen fonksiyonun $(-5, 4)$ aralığında x in kaç tamsayı değeri için limiti vardır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**2.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{|x|}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $-1$ C) 0 D) 2 E) Yoktur

**3.** $\lim\limits_{x \to -2^-} \left( [\![ x + 2 ]\!] + |x + 2| + \text{sgn}\,(x + 2) \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**4.** $f(x) = [\![ x ]\!] + \text{sgn}(x + 3) + |1 - x|$

**fonksiyonunun $-3$, $-\frac{1}{2}$, 0, 1, $\frac{5}{2}$ değerlerinin kaçında limiti yoktur?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**5.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{(x + 3)^2}{1 + x + x^2 + x^3} \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $-1$ C) 0 D) $\infty$ E) $-\infty$

**6.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{x . \sum\limits_{k=1}^{x} 2k}{\sum\limits_{k=1}^{x} (k^2 - k)} \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 3 C) 0 D) $\infty$ E) $-\infty$

**7.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 3x}{\sqrt{x^2 + x - 5} + x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\infty$

**8.** $\lim\limits_{a \to x} \dfrac{a^5 - x^5}{x^3 - a^3}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{5a^2}{3}$ D) $-\frac{5x^2}{3}$ E) 1

**9.** $f(x) = \begin{cases} 2x - m, & x > 1 \\ mx + 6, & x \le 1 \end{cases}$

**fonksiyonu bütün reel sayılar için sürekli olduğuna göre, m kaçtır?**

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

**10.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \left( \dfrac{x^2 - |x| \tan 3x}{4x^2 - |x| \sin 2x} \right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

1-C 2-A 3-A 4-C 5-C

6-B 7-C 8-D 9-A 10-D

**11.** **Aşağıdaki fonksiyonların hangisi her x reel sayısı için süreklidir?**

A) $y = [\![x]\!]$ B) $y = \text{sgn}x$

C) $y = \tan x$ D) $y = \dfrac{|x|}{x}$

E) $y = |x^2 - 1|$

**12.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin^2(x-a)}{(x-a)^2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) –2 D) –1 E) 0

**13.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) e C) $e^2$ D) $\sqrt{e}$ E) $\infty$

**14.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

**fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde süreklidir?**

A) $(-\infty, 0)$ B) $(1, \infty)$ C) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

D) $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$ E) $[1, 3]$

**15.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 2}$

**fonksiyonunun sürekli olduğu aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

D) $(-\infty, -2]$ E) $[0, \infty]$

**11-E** **12-B** **13-C** **14-C** **15-A**

**16.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} [\![\text{sgn}(\sin x)]\!]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) –1 C) 0 D) –2 E) 2

**17.** $\lim\limits_{x \to 2^-} \left([\![x]\!] \text{sgn}(x-2)\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) –1 C) 0 D) 2 E) 4

**18.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x+3} - 27}{3^{x+1} - 3}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 3 C) 9 D) 18 E) 27

**19.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x + \sqrt{2x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) $\sqrt{6}$ C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $\infty$

**20.** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\log_2 x^4 - \log_4 x^2\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 8 B) 3 C) 1 D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{8}$

**16-A** **17-B** **18-D** **19-D** **20-B**

# 11. ÜNİTE: TÜREV ve UYGULAMALARI

## TÜREV

Bağımsız değişkendeki (x) artma veya azalma gibi bir değişime (dx) karşılık, bağımlı değişkende (y) de bir değişiklik (dy) olur. Bu iki değişim miktarının oranı $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, limit durumunda; yani serbest değişkende sıfıra yakın bir değişiklik olduğunda; **türev** adını alır.

**Tanım:**

$A \subset R$ ve $f: A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu $a \in A$ da sürekli olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti bir reel sayı ise (limiti varsa); bu limit değerine $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi denir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi $f'(a)$ veya $\frac{df}{dx}(a)$ veya $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ sembollerinden birisi ile gösterilir. Burada, $\frac{d}{dx}$ e **türev alma operatörü** denir.

Türev tanımını, şu şekilde de ifade edebiliriz:

$h > 0$ olmak üzere, $x = a + h \Rightarrow x - a = h$ olur.

$$x \to a \Leftrightarrow (x - a) \to 0$$

$$\Leftrightarrow h \to 0 \text{ olduğundan,}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olur. Eğer, yukarıdaki bu limitin bir reel değeri yoksa $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi yoktur.

**Örnek:**

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = 2x^2 + 3$ fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

Türev tanımından,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h)^2 + 3 - (2.1^2 + 3)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + 2h + h^2) - 2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{4h + 2h^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{2h(2 + h)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} [2(2 + h)] \Rightarrow f'(1) = 4 \text{ tür.}$$

### SOLDAN ve SAĞDAN TÜREV

$A \subset R$, $a \in A$ da sürekli $f: A \to R$ ye $f(x) = y$ fonksiyonunda;

1. $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ şeklinde gösterilir.

2. $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ şeklinde gösterilir.

$f'(a^-) = f'(a^+)$ ise, $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da türevlidir denir. Bu durumda;

$f'(a^-) = f'(a^+) = f'(a)$ dır.

$f'(a^-) \neq f'(a^+)$ ise, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ da türevi yoktur.

**Örnek:**

$$f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \text{ ise} \\ x^2+2, & x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x+1) = 3$ ve

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2+2) = 3$ ise

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$ tür.

$f(x) = 1^2 + 2 = 3$ ve $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ olduğundan,

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1)$$

$$= f'(1^-) = 2 \text{ dir.}$$

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de sürekli ve $f'(1^-) = f'(1^+)$ olduğundan, fonksiyon $x = 1$ de türevlidir.

O halde, $f'(1) = f'(1^-) = f'(1^+) = 2$ dir.

**Örnek:**

$$f: R \to R,\quad f(x) = |x-2|$$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini araştıralım.

**Çözüm:**

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \ge 2 \text{ ise} \\ 2-x, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$ olduğundan $f(x) = |x-2|$ fonksiyonu $x = 2$ de süreklidir.

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(2-x)-0}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'(2^-) = -1,$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)-0}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'(2^+) = 1 \text{ dir.}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+)$ olduğundan, $f(x) = |x-2|$ fonksiyonunun $x = 2$ de türevi yoktur.

**Uyarı:**

$f(x) = |x-2|$ fonksiyonu, $x = 2$ de sürekli olduğu halde, bu fonksiyonunun $x = 2$ de türevi yoktur.

## TÜREVİN SÜREKLİLİK İLE İLİŞKİSİ

**Teorem:**

$A \subset R$ ve $a \in A$ olmak üzere,

$f: A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında **türevli** ise, bu noktada **süreklidir**.

Bu teoremin **karşıtı**, her zaman doğru **değildir**. Yani, bir noktada **sürekli** olan bir fonksiyon bu noktada **türevli olmayabilir**. Ancak, bu teoremin **karşıt tersi** doğrudur. Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da **sürekli değilse**, fonksiyonun bu noktada **türevi yoktur**.

**Örnek:**

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-2x+1}$$

fonksiyonunun hangi noktada türevsiz olduğunu bulalım.

**Çözüm:**

Bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda türevi yoktur. Buna göre,

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ dir.

Bir fonksiyonun paydasının sıfır olduğu noktalarda fonksiyon sürekli değildir ve süreksiz olduğu noktalarda da türevi yoktur. O halde $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-2x+1}$ fonksiyonu, paydasının sıfır olduğu $x = 1$ noktasında türevli değildir.

## BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLME

**Tanım:**

$a, b \in R$ olmak üzere, $f : (a, b) \to R$ $y = f(x)$ fonksiyonunun **(a, b) aralığının her noktasında türevi varsa, y = f(x) fonksiyonu (a, b) aralığında türevlidir** denir. Buna göre,

$A \subset R$ olmak üzere, $f: A \to R$ $y = f(x)$ fonksiyonu **A tanım kümesinin her noktasında türevli ise, y = f(x) fonksiyonu tanım kümesinde türevlidir** denir.

**Örnek:**

$$f : R \to R,\ f(x) = x^3 + 1$$

fonksiyonunun tanım kümesinin her noktasındaki türevini veren $y = f'(x)$ türev fonksiyonun kuralını bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 + 1] - (x^3+1)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)-x].[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]$$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2$ dir.

**Örnek:**

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2} \cdot \sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \left( -2\sin\frac{2x+h}{2} \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{h} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2.\sin\frac{2x+0}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$\Rightarrow f'(x) = -\sin x$ olur.

**Örnek:**

$c \in R$ olmak üzere,

$f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} (0)$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

## TÜREV ALMA KURALLARI

Türev tanımından yararlanarak bir fonksiyonun türevinin bulunması, çoğu zaman uzun işlemleri gerektirir. Bunun için, bir fonksiyonun türevini daha kısa yollardan bulmamızı sağlayacak bazı teoremleri göreceğiz.

### 1. Sabit fonksiyonun Türevi

$c \in R$ olmak üzere; $A \subset R$, $f : A \to R$ $f(x) = c$ ile tanımlanan **sabit fonksiyonun türevi, $f'(x) = 0$** dır.

**Örnekler:**

- $y = 9$ ise, $y' = 0$,
- $\frac{d}{dx}(1 + \sqrt{3}) = 0$,
- $x \in R$ olmak üzere, $f(x) = sgn(7 + x^2)$ ise, $f'(x) = 0$ dır.

**2. $f(x) = x^n$ Fonksiyonunun Türevi**

$n \in R - \{0\}$ olmak üzere, $f: R \to R$, **$f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi, $f'(x) = n.x^{n-1}$** dir.

**Örnekler:**

- $y = x$ ise, $y' = 1$,
- $f(x) = x^3$ ise, $f'(x) = 3x^2$,
- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$ ise, $y' = -1.x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ dir.

**3. Bir Sabitle Bir Fonksiyonun Çarpımının Türevi**

$c \in R$ ve f fonksiyonu x noktasında türevli ise,

**$[c.f(x)]' = c.f'(x)$** tir. Dolayısıyla, **$[c.x^n]' = c.n.x^{n-1}$** olur.

**Örnekler:**

- $y = 2x^3$ ise, $y' = 2.3.x^2 = 6x^2$,
- $y = 4x^{-3}$ ise, $y' = 4.(-3).x^{-3-1} = -12x^{-4}$,
- $y = 5\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = 5.x^{\frac{2}{3}}$ ise, $y' = 5.\frac{2}{3}.x^{\frac{2}{3}-1}$

$\Rightarrow y' = \frac{10}{3}.x^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y' = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$ tir.

**4. İki Fonksiyonun Toplamının Veya Farkının Türevi**

f ve g, x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ise, **$f \pm g$ fonksiyonunun türevi,**

**$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$** tir.

**Örnek:**

$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 1$ olduğuna göre,

$f'(x)$ türev fonksiyonunu ve $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi olan $f'(1)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 1$ ise,

$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$ ve

$f'(1) = 5.1^4 - 6.1^2 + 3 \Rightarrow f'(1) = 2$ dir.

**Örnek:**

$$f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 40x + \sqrt{5}$$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = 3.x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} - 40x + \sqrt{5}$ şeklinde düzenlenirse,

$f'(x) = 3.\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} - 1.(-2).x^{-3} - 40.1 + 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 40$

$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2.\sqrt{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} - 40$

$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3 + 2.64 - 40 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = 91$ dir.

### 5. İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

f ve g, x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ise, **f.g fonksiyonunun türevi,**

$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$ tir.

**Örnek:**

$$f(x) = (x^2 - 1).(1 - x^3)$$

olduğuna göre, $f'(-1)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = (x^2 - 1).(1 - x^3)$ ise

$f'(x) = (x^2 - 1)'.(1 - x^3) + (1 - x^3)'.(x^2 - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = (2x).(1 - x^3) + (-3x^2).(x^2 - 1)$

$\Rightarrow f'(-1) = 2.(-1).[1 - (-1)^3] - 3.(-1)^2.[(-1)^2 - 1]$

$\Rightarrow f'(-1) = (-2).2 - 3.0 \Rightarrow f'(-1) = -4$ tür.

**Örnek:**

$$y = x^2(3x - 1)(1 - x^2)$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}(0)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$y = f(x) = x^2(3x - 1)(1 - x^2)$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (x^2)'.(3x-1).(1-x^2) + (3x-1)'.x^2(1-x^2) + (1 - x^2)'.x^2(3x - 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(3x-1).(1-x^2) + 3x^2(1-x^2) - 2x.x^2(3x-1)$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(0) = f'(0) = 0$ dır.

### 6. İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

f ve g, x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun türevi,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$ dir.

**Örnek:**

$$f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 2}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

**Çözüm:**

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)'.(3x - 2) - (3x - 2)'.(2x - 3)}{(3x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(3x - 2) - 3(2x - 3)}{(3x - 2)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x - 4 - 6x + 9}{(3x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{(3x - 2)^2}$ dir.

**Örnek:**

$y = \frac{3 + x^2}{2x - x^2}$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx} = y'$ ifadesinin eşitini bulalım.

**Çözüm:**

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(3 + x^2)'.(2x - x^2) - (2x - x^2)'.(3 + x^2)}{(2x - x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x.(2x - x^2) - (2 - 2x).(3 + x^2)}{(2x - x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x^2 - 2x^3 - 6 - 2x^2 + 6x + 2x^3}{(2x - x^2)^2}$$

$\Rightarrow y' = \frac{2x^2 + 6x - 6}{(2x - x^2)^2}$ olur.

**Uyarı:**

$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ fonksiyonunun türevi,

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}}{(px^2 + qx + r)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(aq - pb)x^2 + 2(ar - pc)x + (br - qc)}{(px^2 + qx + r)^2}$$

şeklinde de bulunabilir.

**Örnek:**

$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+2}$ ise, $\dfrac{dy}{dx}(-1)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}}{(x^2+x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+2x-3}{(x^2+x+2)^2}=\frac{dy}{dx}(-1)=-\frac{3}{4} \text{ tür.}$$

## 7. Bileşke Fonksiyonun Türevi (Türevde Zincir Kuralı)

g fonksiyonu x te, f fonksiyonu da g(x) te türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere, **$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ fonksiyonunun türevi;** g(x), f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı olduğundan, **f(g(x)) fonksiyonunun g(x) e göre türevi ile g(x) fonksiyonunun türevi olan $g'(x)$ fonksiyonuyla çarpılarak bulunur.** Buna göre,

$$(f\circ g)'(x)=[f(g(x))]'=f'(g(x)).g'(x) \text{ tir.}$$

**Örnek:**

$f(x)=3x^2+5x$ ve $g(x)=x^2-1$ ise, $y=(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y=(f\circ g)(x) \Rightarrow y'=f'(g(x)).g'(x)$

$\Rightarrow y'=[(6x+5)\circ(x^2-1)].(x^2-1)'$

$\Rightarrow y'=[6(x^2-1)+5].(2x)$

$\Rightarrow y'=12x^3-2x$ olur.

Burada, $y=(f\circ g)(x)=3(x^2-1)^2+5(x^2-1)$ bileşke fonksiyonunun kuralını bulup türevini aldığımızda da sonucun aynı olduğunu görelim.

$y'=(f\circ g)'(x)=3.2.(x^2-1)^{2-1}.(x^2-1)'+5.(x^2-1)'$

$\Rightarrow y'=6(x^2-1).(2x)+5.(2x)$

$\Rightarrow y'=12x^3-2x$

şeklinde aynı sonuç bulunmuştur.

Bu teorem, ikiden fazla fonksiyonun bileşkesinin türevinde de kullanılır.

$(f\circ g\circ h)'(x)=f'[g(h(x)].[g(h(x)]'$

$=f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x)$ tir.

Bunu şu şekilde de gösterebiliriz.

$y=f(z)$, $z=g(u)$, $u=h(x)$ olsun.

Bu durumda, $y=(f\circ g\circ h)(x)$ in türevi:

$$(f\circ g\circ h)'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$=f'(z).g'(u).h'(x)$$

$$=f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x) \text{ olur.}$$

Bu işleme, **türevde zincir kuralı** da denir.

**Uyarı:**

$y=f(t)$ şeklindeki bir fonksiyonun; t değişkeninden farklı bir değişkene göre türevi bulunurken, f(t) nin t ye göre türevi ile t nin türev alınan değişkene göre türevi çarpılır. Örneğin,

$\dfrac{df(t)}{dx}=\dfrac{df(t)}{dt}.\dfrac{dt}{dx}$, $\dfrac{df(t)}{dz}=\dfrac{df(t)}{dt}.\dfrac{dt}{dz}$ gibi

**Örnek:**

$y=f(u)=u^3+u^2$, $u=g(z)=z^2-1$, $z=h(x)=x^2-x$ olduğuna göre, $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=-1$ deki türevinin değeri, $\dfrac{dy}{dx}(-1)=f'(-1)$ i bulalım.

**Çözüm:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

$\Rightarrow f'(x)=(3u^2+2u).(2z).(2x-1)$ olur.

Burada, $x=-1$ için, z nin ve u nun değerini bulalım.

$z=x^2-x$ ise, $x=-1$ için $z=2$ ve

$u=z^2-1$ ise, $z=2$ için $u=3$ tür.

Bu değerler bulunan türev ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{dy}{dx}(-1)=f'(-1)=(3.3^2+2.3).(2.2).(2.(-1)-1)$$

$\Rightarrow f'(-1)=33.4.(-3)=-396$ olur.

Zincir kuralından yararlanarak, **$f(x)=[g(x)]^n$** biçiminde verilen **üslü fonksiyonun türevi**, bileşke fonksiyonun türev kuralı uygulanarak;

**$f'(x)=n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$** şeklinde de bulunabilir.

**Örnek:**

$y = (4x^2 - 5x)^3$ olduğuna göre, $y'$ türev fonksiyonunun kuralını bulalım.

**Çözüm:**

$y = (4x^2 - 5x)^3 \Rightarrow y' = 3(4x^2 - 5x)^2 . (4x^2 - 5x)'$

$\Rightarrow y' = 3(4x^2 - 5x)^2 . (8x - 5)$ tir.

**Örnek:**

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$$

olduğuna göre, $f'(0)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}-1} . (2x^2 - 3x + 1)'$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x - 3}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 1)^2}}$

$\Rightarrow f'(0) = \frac{-3}{3\sqrt[3]{1^2}} = -1$ dir.

**Örnek:**

$y = \frac{3}{(x^2 - 2)^4}$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y = 3(x^2 - 2)^{-4}$ şeklinde yazılırsa,

$y' = 3.(-4).(x^2 - 2)^{-5} . (x^2 - 2)'$

$\Rightarrow y' = \frac{-12}{(x^2 - 2)^5} . 2x \Rightarrow y' = \frac{-24x}{(x^2 - 2)^5}$ tir.

**Uyarı:**

1. $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ise, $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

2. $n > m$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt[n]{(g(x))^m}$ ise, $f'(x) = \frac{m.g'(x)}{n\sqrt[n]{(g(x))^{n-m}}}$ dir.

**Örnek:**

- $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ ise, $y' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

$\Rightarrow y' = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

- $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ ise, $f'(0)$ ın değeri,

$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1)'}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^{3-2}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

olduğundan, $f'(0) = 0$ olur.

**Örnek:**

$x > 0$ ve

$f(x^2 - x) = (2x - 1)^3 + x^2 + 3$

olduğuna göre, $f'(0)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$y = f(x^2 - x)$ fonksiyonunun türevi, $g(x) = x^2 - x$ olmak üzere, $y = f(x^2 - x) = (f \circ g)(x)$ fonksiyonunun türevidir.

O halde,

$f(x^2 - x) = (2x - 1)^3 + x^2 + 3$

$\Rightarrow f'(x^2 - x) . (x^2 - x)' = 3(2x - 1)^2 . (2x - 1)' + 2x + 0$

$\Rightarrow f'(x^2 - x) . (2x - 1) = 3(2x - 1)^2 . 2 + 2x$ ve

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = 1$ dir.

$x > 0$ olduğundan, $x$ yerine $x = 1$ yazılırsa,

$f'(1^2 - 1) . (2.1 - 1) = 3.(2.1 - 1)^2 . 2 + 2.1$

$\Rightarrow f'(0).1 = 6.1 + 2 \Rightarrow f'(0) = 8$ dir.

## 8. Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$u = u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

i. **$y = \sin x$** fonksiyonunun türevi, **$y' = \cos x$** ve **$f(x) = \sin u(x)$** ise, **$f'(x) = u'(x).\cos u(x)$**

ii. **$y = \cos x$** fonksiyonunun türevi, **$y' = -\sin x$** ve **$f(x) = \cos u(x)$** ise, **$f'(x) = -u'(x).\sin u(x)$**

**iii.** $y = \tan x$ fonksiyonunun türevi,

$$y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \text{ ve}$$

$f(x) = \tan u(x)$ ise,

$$f'(x) = u'(x).(1 + \tan^2 u(x)) = \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$$
$$= u'(x).\sec^2 u(x)$$

**iv.** $y = \cot x$ fonksiyonunun türevi,

$$y' = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \text{ ve}$$

$f(x) = \cot u(x)$ ise,

$$f'(x) = -u'(x).(1 + \cot^2 u(x)) = \frac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)}$$
$$= -u'(x).\operatorname{cosec}^2 u(x)$$

**Örnekler:**

- $y = 3\sin 2x + 4\cos 5x$ ise,
  $y' = 3.(2x)'\cos 2x + 4.(-(5x)'\sin 5x)$
  $\Rightarrow y' = 6\cos 2x - 20\sin 5x$

- $\frac{d}{dx}(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3\sin^2 x.(\sin x)' + 3\cos^2 x.(\cos x)'$
  $= 3\sin^2 x.\cos x + 3\cos^2 x.(-\sin x)$
  $= 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$
  $= \frac{3}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x)$

- $f(x) = \cos^2(\sin x)$ ise, $f'(x)$ türev fonksiyonu
  $f(x) = [\cos(\sin x)]^2$ olduğundan,
  $f'(x) = 2[\cos(\sin x)].[\cos(\sin x)]'$
  $= 2\cos(\sin x).[-(\sin x)'.\sin(\sin x)]$
  $= 2\cos(\sin x).\sin(\sin x).(-\cos x)$
  $= -\cos x.\sin(2\sin x)$

**Örnek:**

$f(x) = \tan(\cot x)$ ise, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

**Çözüm:**

$u = \cot x$ denilirse, $f(x) = \tan u$ olur.

$f(x) = \tan u$ ise, $f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$ olur.

$u' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ olduğundan, $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x.\cos^2(\cot x)}$

## 9. Özel Tanımlı Fonksiyonların Türevi

Özel tanımlı fonksiyonların bazı noktalarda süreksiz olduğunu biliyoruz. Bir fonksiyonun bir noktada türevinin olması için;

1. Fonksiyon bu noktada **sürekli olmalı** ve
2. Fonksiyonun bu noktadaki **soldan türevi, sağdan türevine eşit olmalıdır.**

**Örnek:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 1 \\ 3x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ de türevli olup olmadığını araştıralım.

**Çözüm:**

$x = 1$ de $f(x)$ fonksiyonunun bir kritik noktası olduğundan, bu noktada $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olup olmadığını bulalım.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 3.1 - 1 = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x) = 1^2 + 1 = 2,$$

$x \geq 1$ için $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(1) = 2$ dir. O halde,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

Şimdi de $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki sağdan ve soldan türevlerinin değerini bulalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3$$

Veya, $x \geq 1$ için $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$
$\Rightarrow f'(1^+) = 3$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

Veya, $x < 1$ için $f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3$
$\Rightarrow f'(1^-) = 3$

Buna göre, f(x) fonksiyonu $x = 1$ de sürekli ve bu noktadaki sağdan türevi, soldan türevine eşit olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ de türevi vardır ve bu noktadaki türevinin değeri,

$f'(1) = f'(1^-) = f'(1^+) = 3$ tür.

### i. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

$g: A \to R$, $y = f(x) = |g(x)|$ verilsin. $a \in A$, $g(a) \neq 0$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi:

$$y' = f'(x) = \begin{cases} -g'(x), & g(a) < 0 \text{ ise} \\ g'(x), & g(a) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

**$g(a) = 0$ için, $f(x)$ in $x = a$ daki sağdan türevi, soldan türevine eşit** ise fonksiyonun **$x = a$** da **türevi vardır**, aksi taktirde bu noktada türev yoktur.

**Örnek:**

$$f(x) = |x + 2|$$

fonksiyonunun türevinin kuralını bulalım.

**Çözüm:**

$f(x)$ fonksiyonunun $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ deki türevini öncelikle araştıralım.

$x = -2$ de $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, bu noktadaki sağdan ve soldan türevlerinin değerine bakalım.

$$f(x) = |x + 2| = \begin{cases} -x - 2, & x \leq -2 \\ x + 2, & x > 2 \end{cases}$$

$x \leq -2$ için $f'(x) = (-x - 2)' \Rightarrow f'(x) = -1$

$\Rightarrow f'(-2^-) = -1$

$x > 2$ için $f'(x) = (x + 2)' \Rightarrow f'(x) = 1$

$\Rightarrow f'(2^+) = 1$ ve

$f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$ olduğundan $x = -2$ de türev yoktur.

Buna göre, $f(x) = |x + 2|$ fonksiyonunun türevi:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \text{ ise} \\ \text{Yoktur}, & x = -2 \text{ ise} \\ 1, & x > -2 \text{ ise} \end{cases}$$

**Örnek:**

$f(x) = |(x - 1)^3|$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

**Çözüm:**

$(x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$ olduğundan, öncelikle $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki türevini bulalım.

$x = 1$ de $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, bu noktadaki sağdan ve soldan türevi bulalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)^3 - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} (x - 1)^2 \Rightarrow f'(1^+) = 0 \text{ ve}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x - 1)^3 - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left[-(x - 1)^2\right] \Rightarrow f'(1^-) = 0 \text{ dır.}$$

O halde, $f'(1) = f'(1^-) = f'(1^+) = 0$ dır.

Buna göre, $f(x) = \left|(x - 1)^3\right|$ fonksiyonunun türevi;

$$f'(x) = \begin{cases} -3(x - 1)^2, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 3(x - 1)^2, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

**Sonuç:**

$n \in Z^+$ olmak üzere,

$$f(x) = \left|(x - a)^n\right| \Rightarrow f'(a) = \begin{cases} \text{Yoktur}, & n = 1 \text{ ise} \\ 0, & n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

**Örnek:**

$f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ ise, $f'(1)$ türevini, varsa bulalım.

**Çözüm:**

$x = 1$ de $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. Ancak;
$x = 1$, $f(x)$ in kritik noktası olduğundan bu noktada sağdan ve soldan türeve bakalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1)$$

$$f'(1^+) = 1 + 1 = 2 \text{ ve}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} [-(x + 1)]$$

$$f'(1^-) = -(1 + 1) = -2 \text{ dir}$$

Buna göre, $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan; $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ fonksiyonunun $x = 1$ de türevi yoktur.

**Uyarı:**

$f(x) = |g(x)|$ için, $g(x)$ in sıfır $(g(x) = 0)$ olduğu noktalarda $f(x)$ in türevi yoktur denilemez. Sağdan ve soldan türeve bakılmalıdır.

**Örnek:**

$f(x) = x.|x|$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

**Çözüm:**

$|x|$ için $x = 0$ kritik nokta olduğundan, önce $x = 0$ da $f(x)$ in sağdan ve soldan türevini bulalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x.x - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x)$$

$$f'(0^+) = 0 \text{ ve}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x.(-x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-x)$$

$$f'(0^-) = 0 \text{ dır.}$$

O halde, $f'(0) = f'(0^+) = f'(0^-) = 0$ olur.

Buna göre, $f(x) = x|x|$ fonksiyonunun türevi:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \text{ ise, } f'(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

**Örnek:**

$$f(x) = |x^2 - 2x - 7| + 2x^2 - x + 1$$

olduğuna göre, $f'(1)$ in değerini bulalım.

**Çözüm:**

$|x^2 - 2x - 7|$ için $x = 1$ kritik nokta olmadığından, sağdan ve soldan türevine bakmaya gerek yoktur.

Buna göre,

$x = 1$ için, $x^2 - 2x - 7$ nin değeri $1^2 - 2.1 - 7 = -8$ negatif olduğundan $f(x)$ in $x = 1$ deki türevi,

$f(x) = -(x^2 - 2x - 7) + 2x^2 - x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = -(2x - 2) + 4x - 1$

$\Rightarrow f'(1) = -(2.1 - 2) + 4.1 - 1 \Rightarrow f'(1) = 3$ tür.

**ii. İşaret Fonksiyonunun Türevi**

$g: A \to R$, $y = f(x) = \text{sgn}(g(x))$ fonksiyonu verilsin.
Eğer, $y = f(x) = \text{sgn}(g(x))$ fonksiyonu $a \in A$ da noktasında **sürekli** ise, bu noktadaki **türevi sıfırdır**. Fonksiyon bu noktada **sürekli değilse**, fonksiyonun bu noktada **türevi yoktur**. Buna göre,

$$y' = f'(x) = \begin{cases} 0, & g(a) \neq 0 \text{ ise} \\ \text{Yoktur}, & g(a) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

**Örnek:**

$$f(x) = \text{sgn}(x - 2)$$

olduğuna göre, $f'(2)$ türevini araştıralım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} [\text{sgn}(x-2)] = \lim_{x\to 2^+} [\text{sgn}(2^+ - 2)] = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [\text{sgn}(x-2)] = \lim_{x\to 2^-} [\text{sgn}(2^- - 2)] = -1 \text{ dir.}$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ de limiti yoktur. Dolayısıyla bu noktada fonksiyon sürekli değildir. O halde, $f(x) = \text{sgn}(x - 2)$ fonksiyonunun $x = 2$ de türevi yoktur.

**Örnek:**

$$f(x) = x^3 + \text{sgn}(x^2 - 4)$$

olduğuna göre, $f'(-1)$ ve $f'(2)$ türevlerini araştıralım.

**Çözüm:**

**i.** $x = -1$ için, $x^2 - 4 \neq 0$ olduğundan $x = -1$, $f(x)$ in kritik noktası değildir. O halde,

$x = -1$ için, $x^2 - 4 < 0$ olduğundan,

$f(x) = x^3 + (-1)$ ve $f'(x) = 3x^2 + 0$

$\Rightarrow f'(-1) = 3.(-1)^2 = 3$ tür.

**ii.** $x = 2$ için, $x^2 - 4 = 0$ olduğundan

$x = 2$ de $\text{sgn}(x^2 - 4)$ türevlenemez. Buna göre,

$f(x) = x^3 + \text{sgn}(x^2 - 4)$ fonksiyonunun $x = 2$ de türevi yoktur.

**Örnek:**

$$f(x) = (x-1).\text{sgn}(x-1)$$

fonksiyonunun $x = 1$ deki türevini araştıralım.

**Çözüm:**

$\text{sgn}(x-1)$ için, $x = 1$ kritik noktadır. O halde, bu noktada fonksiyonun sürekli olup olmadığına ve sürekli ise sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [(x-1).\text{sgn}(x-1)] = (1-1).1 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [(x-1).\text{sgn}(x-1)] = (1-1).(-1) = 0$$

ve $f(1) = (1-1).\text{sgn}(1-1) \Rightarrow f(1) = 0$ dır.

O halde, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ olduğundan

$x = 1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $x = 1$ deki sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1).1-0}{x-1} = 1 \text{ ve}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1).(-1)-0}{x-1} = -1 \text{ dir.}$$

$f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan $f(x) = (x-1).\text{sgn}(x-1)$ fonksiyonunun $x = 1$ de türevi yoktur.

**Uyarı:**

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi, fonksiyon kritik noktasında sürekli ise, bu noktada türevinin olup olmadığını anlamak için, bu noktadaki sağdan ve soldan türevine bakılmalıdır.

Buradan fonksiyon, sürekli olduğu bütün noktalarda türevlenebilir şeklinde bir sonuç çıkarılamaz. Fonksiyonun sürekli olduğu bir kritik noktasında türevi olmayabilir.

**Örnek:**

$$f(x) = x^2.\text{sgn}x$$

fonksiyonunun $x = 0$ daki türevini araştıralım.

**Çözüm:**

$\text{sgn}x$ için, $x = 0$ kritik nokta olduğundan $f(x)$ in bu noktada sürekli olup olmadığına bakalım.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2.\text{sgn}x) = 0.1 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2.\text{sgn}x) = 0.(-1) = 0 \text{ ve}$$

$f(0) = 0^2.\text{sgn}0 \Rightarrow f(0) = 0$ dır.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ olduğundan, $x = 0$ da

fonksiyon süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $x = 0$ da sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2.1-0}{x} = 0 \text{ ve}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2.(-1)-0}{x} = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, $f'(0^+) = f'(0^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ da türevi vardır ve $f'(0) = f'(0^+) = f'(0^-) = 0$ dır.

### iii. Tam Kısım (Tam Değer) Fonksiyonunun Türevi

$g : A \to R$, $y = f(x) = [\![ g(x) ]\!]$ fonksiyonu verilsin.

Eğer, **g(x)** fonksiyonu **a ∈ A da** bir **tamsayı** değerine eşit **olmuyorsa f(x) in** $x = a$ daki **türevi sıfırdır.** Eğer **g(x)** fonksiyonu **a ∈ A da** bir tamsayı değerine eşit **oluyorsa, f(x)** in **x = a da** sürekli olup olmadığına bakılır, **sürekli ise** bu noktada **f(x) in sağdan ve soldan türevine bakılır; sürekli değilse** bu noktada **f(x) in türevi yoktur.**

**Örnek:**

$f(x) = [\![ 2x + 3 ]\!]$ ise, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$x = \frac{1}{3}$ için $2x - 3$ ün değeri $\left(2.\frac{1}{3} + 3\right)$ tamsayı olmadığından $f(x)$ in $x = \frac{1}{3}$ teki türevi vardır ve bu türevin değeri $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ dır.

**Örnek:**

$f(x) = [\![ \frac{x}{3} - 1 ]\!]$ fonksiyonunun hangi kümenin bütün noktalarında türevinin olduğunu bulalım.

**Çözüm:**

f(x) fonksiyonu, $\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ ifadesinin tamsayı olduğu noktalarda sürekli değildir. Dolayısıyla bu noktalarda türevi yoktur. $\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ in tamsayı olmadığı noktalarda da türevi vardır. O halde, $\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ ifadesinin tamsayı olduğu noktalar:

$\left(\frac{x}{3} - 1\right) \in Z$ ise, $\frac{x}{3} = k \in Z$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x = 3k$ ve $k \in Z$ için $\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ ifadesi tamsayıdır.

Buna göre, $f(x) = [\![ \frac{x}{3} - 1 ]\!]$ fonksiyonunun türevinin olmadığı noktalar kümesi $\overline{T} = \{x: x = 3k \text{ ve } k \in Z\}$ ve f(x) in türevinin olduğu noktalar kümesi de $T = R - \overline{T}$ olur.

**Örnek:**

$$f(x) = [\![ x^2 - 10x + 25 ]\!]$$

fonksiyonunun $x = 5$ teki türevini, varsa bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = [\![ (x-5)^2 ]\!]$ fonksiyonunun $x = 5$ teki değeri $f(5) = 0$ tamsayı olduğundan, bu noktada f(x) in sürekli olup olmadığına bakalım.

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} [\![ (x-5)^2 ]\!] = \lim_{x \to 5^+} [\![ 0^+ ]\!] = 0 \text{ ve}$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} [\![ (x-5)^2 ]\!] = \lim_{x \to 5^-} [\![ 0^+ ]\!] = 0 \text{ dır.}$$

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$ olduğundan, f(x) fonksiyonu $x = 5$ te süreklidir. O halde, bu noktada f(x) in sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(5^+) = \lim_{x \to 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{[\![ (x-5)^2 ]\!] - 0}{x - 5}$$

$$f'(5^+) = \frac{[\![ 0^+ ]\!]}{0^+} = 0 \text{ ve}$$

$$f'(5^-) = \lim_{x \to 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{[\![ (x-5)^2 ]\!] - 0}{x - 5}$$

$$f'(5^-) = \frac{[\![ 0^+ ]\!]}{0^-} = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, $f'(5^+) = f'(5^-) = f'(5) = 0$ dır.

**Örnek:**

$$f(x) = (x-1)[\![ x - 1 ]\!]$$

fonksiyonunun $x = 1$ deki türevini araştıralım.

**Çözüm:**

f(x) fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir. O halde, f(x) in $x = 1$ deki sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)[\![ x - 1 ]\!] - 0}{x - 1}$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1).[\![ 0^+ ]\!]}{x - 1} = 0 \text{ ve}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1).[\![ x - 1 ]\!] - 0}{x - 1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1).[\![ 0^- ]\!]}{x - 1} = -1 \text{ dir.}$$

$f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan f(x) in $x = 1$ de türevi yoktur.

## 10. Kapalı Fonksiyonların Türevi

**Tanım:** x ve y değişken olmak üzere, **F(x, y) = 0** denklemiyle verilen bağıntılara **kapalı fonksiyon** denir.

$3xy - x^2 - 2y = 0,$

$x^2 + y^2 + 3x - y = 0,$

$x^2y + 5x - \sqrt{y} + 3 = 0, \ldots$

şeklindeki ifadeler birer kapalı fonksiyon ya da kapalı bağıntıdır.

F(x, y) = 0 eşitliğinden, bazen y değeri x cinsinden kolaylıkla bulunarak $y = f(x)$ elde edilebilir. Bazen de y yi x cinsinden yazmak mümkün olmayabilir.

F(x, y) = 0 denklemiyle verilen bir kapalı fonksiyonda, $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ i hesaplarken iki yöntem kullanılır.

**I. yöntem:**

F(x, y) = 0 eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevi, zincir kuralından yararlanılarak bulunur. Elde edilen eşitlikten de $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ bulunur.

**Örnek:**

$$F(x, y) = 2x^2 - 3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3 = 0$$

olduğuna göre, $y' = F'(x, y)$ kuralını bulalım.

**Çözüm:**

$$\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 4x - (6x.y + y'.3x^2) + (3.y^2 + 2y.y'.3x) + 4y' = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 6xy - 3x^2y' + 3y^2 + 6xy.y' + 4y' = 0$$

$$\Rightarrow y'(-3x^2 + 6xy + 4) = 6xy - 4x - 3y^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6xy - 4x - 3y^2}{6xy - 3x^2 + 4} \quad \text{olur.}$$

**II. Yöntem:**

$F(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonunun türevi hesaplanırken; y sabit düşünülerek x değişkenine göre alınan türev $F_x'$ ve x sabit düşünülerek y değişkenine göre alınan türev $F_y'$ ile gösterilmek üzere; $F(x, y) = 0$ denkleminde her terimin x e göre türevi:

$F_x' + F_y' . y' = 0$ eşitliğinden $\frac{dy}{dx} = y'$ türevi,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

şeklinde bulunur.

**Örnek:**

$$F(x, y) = x.\cos y + y.\cos x = 0$$

olduğuna göre, $y'$ türevini bulalım.

**I. Çözüm:**

Verilen eşitliğin iki yanının x e göre türevi, zincir kuralı yardımıyla hesaplanırsa;

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x.\cos y) + \frac{d}{dx}(y.\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow 1.\cos y + (-y'.\sin y).x + y'.\cos x - \sin x.y = 0$$

$$\Rightarrow y'(\cos x - x.\sin y) = y.\sin x - \cos y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y.\sin x - \cos y}{\cos x - x.\sin y} \quad \text{olur.}$$

**II. Çözüm:**

$F(x, y) = x.\cos y + y.\cos x = 0$ ise

$F_x' = 1.\cos y - y.\sin x$ (y sabit)

$F_y' = -x.\sin y + 1.\cos x$ (x sabit)

olduğundan, $y' = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{\cos y - y.\sin x}{-x.\sin y + \cos x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y.\sin x - \cos y}{\cos x - x.\sin y} \quad \text{olur.}$$

## 11. Parametrik Fonksiyonların Türevi

**Tanım:** $t \in R$ olmak üzere; $y = f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri, t ye bağlı olarak

$$\left.\begin{array}{l} x = h(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \; y = f(x)$$

biçiminde tanımlanmışsa $y = f(x)$ fonksiyonuna **parametrik fonksiyon** denir. Burada $t \in R$ ye de **parametre** adı verilir.

$x = h(t)$ ve $y = g(t)$ denklemlerinden t parametresi kolaylıkla yok edilerek $y = f(x)$ bağıntısı elde edilebiliyorsa, y nin x e göre türevi alınarak $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ türevi bulunur.

Parametrik fonksiyonların türevi alınırken, t parametresini yok etmek her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda, y nin x e göre türevi, zincir kuralı yardımıyla bulunur. Buna göre, h ve g fonksiyonları t ye göre türevlenebiliyor ve $\frac{dx}{dt} = h'(t) \neq 0$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{h'(t)} \quad \text{olur.}$$

**Örnek:**

$$y = t^3 + 2t$$
$$x = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ türevinin kuralını bulalım.

**I. Çözüm:**

$x = \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow t = 2x - 3$ olduğundan, verilen birinci eşitlikte $t = 2x - 3$ yazılırsa $y = f(x)$ fonksiyonu;

$y = f(x) = (2x-3)^3 + 2(2x-3)$ olur. Buna göre,

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3.(2x-3)^2.(2x-3)' + 2.(2x-3)'$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6(2x-3)^2 + 4$ bulunur.

**II. Çözüm:**

$y = t^3 + 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2$ ve

$x = \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2}{\frac{1}{2}} = 6t^2 + 4$ olur.

Burada t yerine, $t = 2x - 3$ yazılırsa;

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6(2x-3)^2 + 4$ bulunur.

**Örnek:**

$t \in Z$ olmak üzere,

$$y = 2t^2 + 4t + 3$$
$$x = t^3 - 2t + 1$$

eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ olduğuna göre, $f'(1)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$y = 2t^2 + 4t + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 4t + 4$ ve

$x = t^3 - 2t + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2$ olduğundan,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t+4}{3t^2-2}$ olur.

$x = 1$ e karşılık gelen $t \in Z$ değerini,

$x = t^3 - 2t + 1$ eşitliğinden bulalım.

$x = 1$ için, $1 = t^3 - 2t + 1$

$\Rightarrow t^3 - 2t = 0$

$\Rightarrow t(t^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0 \in Z$ veya $t^2 = 2$

$\Rightarrow t_{2,3} = \pm\sqrt{2} \notin Z$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx} = F(t)$ eşitliğinde t yerine $t = 0$ yazılırsa $f'(1)$ in değeri,

$\frac{dy}{dx} = F(t) = \frac{4t+4}{3t^2-2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1) = f'(1) = F(0) = \frac{4.0+4}{3.0^2-2}$

$\Rightarrow f'(1) = -2$ dir.

## 12. Ters Fonksiyonun Türevi

Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun kuralı kolaylıkla elde edilebiliyorsa, bu fonksiyonun ters fonksiyonu bulunduktan sonra türevi alınabilir. Ancak, fonksiyonun tersinin kuralını bulmak kolay değilse, zincir kuralından yararlanarak; ters fonksiyonun türevi ile, bu fonksiyonun türevi arasında,

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{-1}(y)\right)$

$\Rightarrow 1 = \left(f^{-1}\right)'(y).y' \quad \left(y' = f'(x)\right)$

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

şeklinde bir bağıntı elde ederiz. Buna göre,

**Teorem:** $f : A \to B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1}: B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ olsun.
$\forall x \in A$ için, $f'(x)$ var ve $f'(x) \neq 0$ ise,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \text{ dir.}$$

$\forall x \in A$ için yazılan bu teorem, $x_0 \in A$ için de yazılabilir. Buna göre,

$(x_0, y_0) \in f \Rightarrow f'(x_0).(f^{-1})'(y_0) = 1$

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ olur.

**Örnek:**

$f: R-\left\{-\frac{3}{2}\right\} \to R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x)=\frac{x-5}{2x+3}$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(-1)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x)=\frac{x-5}{2x+3} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-3x-5}{2x-1}=\frac{3x+5}{1-2x}$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(x)=\frac{3.(1-2x)-(-2).(3x+5)}{(1-2x)^2}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{13}{(1-2x)^2}$ olur.

$x=-1$ için, $(f^{-1})'(-1)=\frac{13}{(1-2.(-1))^2}=\frac{13}{9}$ olur.

**Örnek:**

$f(x)=x^3+2$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(1)$ değerini bulalım.

**I. Çözüm:**

$y=f(x)$ in tersini bularak çözüm yapalım.

$y=x^3+2 \Leftrightarrow x^3=y-2$

$\Rightarrow x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$ olur.

Buna göre, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)'}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{3.\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

olduğundan, $x=1$ için $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{3}$ tür.

**II. Çözüm:**

$f(x)=x^3+2 \Leftrightarrow (f^{-1})(x^3+2)=x$ eşitliğinin iki yanının türevini, bileşkenin türevi kuralından (zincir kuralı) yararlanarak bulalım.

$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x^3+2)\right]=\frac{d}{dx}(x) \Rightarrow (f^{-1})'(x^3+2).(x^3+2)'=1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x^3+2)=\frac{1}{3x^2}$

$x^3+2=1$ eşitliğinden elde edilen $x=-1$ değeri, bulunan bu ifadede yerine yazılırsa,

$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{3.(-1)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{3}$ bulunur.

**III. Çözüm:**

$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ eşitliğinden,

$f(x)=x^3+2 \Rightarrow f'(x)=3.x^2$ ve

$y=f(x)=x^3+2 \Rightarrow y_0=f(x_0)={x_0}^3+2$ eşitliğinden bulunan, $y_0=1$ için, $1={x_0}^3+2 \Rightarrow x_0=-1$ değeri yukarıdaki türev bağıntısında yerine yazılırsa,

$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(-1)} \Rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{3.(-1)^2}=\frac{1}{3}$ olur.

## 13. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$y=\arcsin x$ fonksiyonunun $y'$ türevini zincir kuralından (bileşke fonksiyonun türevinden) bulalım.

$y=\arcsin x \Leftrightarrow x=\sin y$

$\Rightarrow (x)'=(\sin y)'$

$\Rightarrow 1=y'.\cos y$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Buna göre,

1. $f:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, **$f(x)=\arcsin x$** fonksiyonunun türevi, **$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$** dir. $(-1<x<1)$

**2.** $f:[-1, 1] \to [0, \pi]$, $\mathbf{f(x) = \arccos x}$ fonksiyonun türevi,

$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dir. $(-1 < x < 1)$

**3.** $f:R \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{f(x) = \arctan x}$ fonksiyonunun türevi,

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dir.

**4.** $f:R \to (0, \pi)$, $\mathbf{f(x) = \operatorname{arccot} x}$ fonksiyonunun türevi,

$f'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ dir.

Bu teoremlerden, zincir kuralını (bileşke fonksiyonun türevi) kullanarak şu sonuçlar çıkarılabilir:

**Sonuçlar:**

$u = u(x)$, x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

**1.** $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

**2.** $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

**3.** $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

**4.** $(\operatorname{arccot} u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

**Örnek:**

- $y = \arcsin(3\sqrt{x})$ ise,

$$y' = \frac{3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(3\sqrt{x})^2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2.\sqrt{x - 9x^2}}$$

- $\dfrac{d}{dx}(\arcsin(\cos x)) = \dfrac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$

$$= \frac{-\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} -1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

- $f(x) = \operatorname{arccot}\sqrt{x}$ ise, $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ün değeri

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{-1}{2.\sqrt{\frac{1}{4}}}}{1+\frac{1}{4}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{5}$$

- $f(x) = \arctan(\sin^2 x)$ ise, $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ün değeri

$$f'(x) = \frac{(\sin^2 x)'}{1+(\sin^2 x)^2} = \frac{2\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x} = \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(2.\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{1+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^4} = \frac{-1}{1+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^4}$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}$$

## 14. Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$f:R^+ \to R$ ve $a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$\mathbf{f(x) = \log_a x}$ fonksiyonunun türevi, $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$

veya $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ dır.

Buna göre, $u = u(x)$, x e göre türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e = \dfrac{u'(x)}{u(x).\ln a}$ dır.

$a = e$ için, $f(x) = \ln x$ in türevi $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ve

$(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ olur.

**Örnekler:**

- $y = \ln(x^2 - x)$ ise, $y' = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

- $f(x) = \log_3(1 + x^2)$ ise, $f'(1)$ in değeri

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\cdot\log_3 e \Rightarrow f'(1) = \frac{2.1}{1+1^2}\cdot\log_3 e$$

$$\Rightarrow f'(1) = \log_3 e = \frac{1}{\ln 3}$$

- $\dfrac{d}{dx}\left(\ln(\ln x)\right) = \dfrac{(\ln x)'}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

- $f(x) = \ln\sqrt[3]{x^3 + 6x}$ ise, $f'(1)$ in değeri,

$$f(x) = \ln\left(x^3 + 6x\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\ln\left(x^3 + 6x\right)$$

şeklinde düzenlenirse, $f'(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x^2+6}{x^3+6x}$ olur.

Sadeleştirme yapılırsa $f'(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+6x}$ ve

$x = 1$ için, $f'(1) = \dfrac{3}{7}$ dir.

**Örnek:**

$$f(x) = \sqrt{\ln\sqrt[4]{\sin x}}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

**Çözüm:**

$$f(x) = \sqrt{\ln\sqrt[4]{\sin x}} = \sqrt{\ln(\sin x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow f(x) = = \sqrt{\frac{1}{4}\ln(\sin x)} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln(\sin x)}$$

olduğuna göre, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{[\ln(\sin x)]'}{2.\sqrt{\ln(\sin x)}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{(\sin x)'}{\sin x}}{\sqrt{\ln(\sin x)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cot x}{4.\sqrt{\ln(\sin x)}} \text{ olur.}$$

## 15. Üstel Fonksiyonun Türevi

$a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: R \to R^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = a^x.\ln a$ dır.

Ayrıca, $a = e$ için, $f(x) = e^x$ ise, $f'(x) = e^x$ olur.

**Örnek:**

$y = 3^{1+x^2}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y = 3^{1+x^2}$ eşitliğinin iki yanının e tabanına göre logaritmasını alarak, $y'$ türevini bulalım.

$$\ln y = \ln 3^{1+x^2} \Rightarrow \ln y = (1+x^2).\ln 3$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = \left[(1+x^2).\ln 3\right]'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x.\ln 3$$

$$\Rightarrow y' = y.2x.\ln 3$$

$$\Rightarrow y' = 2x.3^{1+x^2}.\ln 3 \text{ olur.}$$

**Uyarı:**

Yukarıdaki örneğin çözümünde görüldüğü gibi,

$\left(\ln u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ olduğu hatırlanıyorsa üstel fonksiyonun türevi, bu fonksiyonun e tabanına göre logaritması alınarak kolaylıkla bulunabilir.

**Sonuç:**

*u = u(x), x e göre türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,*

1. $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$
2. $f(x) = a^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x).a^{u(x)}.\ln a$ dır.

**Örnekler:**

- $y = 2^x + 6^x + 12^x$ ise,
  $y' = 2^x.\ln 2 + 6^x.\ln 6 + 12^x.\ln 12$ dir.

- $f(x) = (x^2+x+1)e^x$ ise,
  $f'(x) = (x^2+x+1)'.e^x + (e^x)'.(x^2+x+1)$
  $= (2x+1)e^x + e^x(x^2+x+1)$
  $= (x^2+3x+2)e^x$ tir.

- $e^{-x}.\dfrac{d}{dx}\left(e^x \sin x\right) = e^{-x}.\left(e^x.\sin x + \cos x.e^x\right)$
  $= \sin x + \cos x$ tir.

**Örnek:**

$$y = t^3 + 2t + 3$$
$$x = \ln t$$

eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ olmak üzere, $f'(0)$ değerini bulalım.

**I. Çözüm:**

$x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$ değerini, $y = t^3 + 2t + 3$ eşitliğinde yerine yazıp, $y = f(x)$ kuralını bularak çözüm yapalım.

Bu durumda,

$y = f(x) = e^{3x} + 2.e^x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} + 2e^x$ olur.

$x = 0$ yazılırsa, $f'(0) = 3.e^0 + 2.e^0 = 5$ tir.

**II. Çözüm:**

$y = t^3 + 2t + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2$ ve

$x = \ln t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ olur. Buradan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2}{\frac{1}{t}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(t) = 3t^3 + 2t$$

bulunur.

$\frac{dy}{dx}(0) = f'(0)$ değerini bulmak için, $x = \ln t$ eşitliğinde $x = 0$ yazılarak bulunan, $0 = \ln t \Leftrightarrow t = e^0 \Rightarrow t = 1$ değeri $F(t)$ de yerine yazılırsa,

$$\frac{dy}{dx}(0) = f'(0) = F(1) = 3.1^3 + 2.1$$
$$\Rightarrow f'(0) = 5 \text{ bulunur.}$$

## 16. Logaritmik Türev Alma

$f(x) > 0$ ve $f(x) \neq 1$ olmak üzere, $y = [f(x)]^{g(x)}$ biçimindeki fonksiyonların türevi bulunurken, eşitliğin iki yanının e tabanına göre logaritması alınır ve logaritması alınan ifadenin x e göre türevi hesaplanarak $y'$ türevi bulunur.

Buna göre,

$$\left[(f(x))^{g(x)}\right]' = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x).\ln f(x) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

bulunur.

**Örnek:**

$y = x^x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x.\ln x$ olur.

Elde edilen eşitliğin iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x.\ln x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1.\ln x + \frac{1}{x}.x$$
$$\Rightarrow y' = y.(1 + \ln x)$$
$$\Rightarrow y' = x^x.(1 + \ln x) \text{ olur.}$$

**Uyarı:**

$[f(x)]^{g(x)}$ ifadesinin türevi; taban $(f(x))$ sabit olarak düşünülüp (üstel fonksiyon gibi) türev alınarak elde edilen ifade ile, üs $(g(x))$ sabit olarak düşünülüp (polinom - $x^n$ gibi) türev alınarak elde edilen ifadenin toplanmasıyla da bulunabilir.

**Örnek:**

$y = x^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

**I. Çözüm:**

Taban: x = sabit olarak düşünülürse,

$y_1' = (\sin x)'.x^{\sin x}.\ln x \Rightarrow y_1' = \cos x.x^{\sin x}.\ln x$

Üs: sinx = sabit olarak düşünülürse,

$y_2' = \sin x.x^{\sin x - 1} \Rightarrow y_2' = \frac{\sin x}{x}.x^{\sin x}$ olur.

$y = x^{\sin x}$ in türevi, $y' = y_1' + y_2'$ toplamından,

$$y' = \cos x.x^{\sin x}.\ln x + \frac{\sin x}{x}.x^{\sin x}$$
$$\Rightarrow y' = x^{\sin x}\left(\cos x.\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) \text{ olur.}$$

**II. Çözüm:**

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$$
$$\Rightarrow (\ln y)' = (\sin x.\ln x)'$$
$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x.\ln x + \frac{1}{x}.\sin x$$
$$\Rightarrow y' = x^{\sin x}\left(\cos x.\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

şeklinde yukarıdaki I. çözüm yolundan bulunan sonucun aynısı elde edilir.

## 17. Yüksek Mertebeden Türevler (Ardışık Türevler)

$A \subset R$ olmak üzere, $f: A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu A kümesinde türevli bir fonksiyon olsun.

$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$; f fonksiyonunun **1. mertebeden türevi**

$A_1 \subset A$ olmak üzere, $f'$ fonksiyonu da $A_1$ kümesinde türevli ise; $f'$ fonksiyonunun türevine, **f fonksiyonunun 2. mertebeden türevi** denir ve

$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$; f fonksiyonunun **2. mertebeden türevi**

Burada, $y'' = (y')' = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots$

Benzer şekilde; $f''$ fonksiyonunun türevine, **f fonksiyonunun 3. mertebeden türevi** denir.

$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f}{dx^3}$; f(x) in **3. mertebeden türevi**

$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = \ldots$ olur.

$y = f(x)$ fonksiyonunun 3. mertebeden türevinin türevine de **f fonksiyonunun 4. mertebeden türevi** denir.

$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4f}{dx^4}$; f(x) in **4. mertebeden türevi**

Aynı şekilde, $f(x) = y$ fonksiyonunun $(n-1)$ nci mertebeden türevinin türevi de **f fonksiyonunun n. mertebeden türevidir.**

$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf}{dx^n}$; f(x) in **n. mertebeden türevi**

$(n \in N^+ \text{ ve } n > 1)$

**Örnek:**

$$y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + \sqrt{3}$$

fonksiyonunun 4. mertebeden türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y' = f'(x) = 2x^2 + x - 5$,

$y'' = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(2x^2 + x - 5)$

$\Rightarrow y'' = 4x + 1$;

$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}(4x + 1) \Rightarrow y''' = 4$,

$y^{(4)} = \frac{d}{dx}(y''') = \frac{d}{dx}(4) \Rightarrow y^{(4)} = 0$ bulunur.

**Örnek:**

$f(x) = \ln x$ fonksiyonunun 40. mertebeden türevini bulalım.

**Çözüm:**

$y = f(x) = \ln x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\Rightarrow y'' = -1 . x^{-2}$

$\Rightarrow y''' = (-1).(-2).x^{-3}$

$= (-1)^2 . 2! . x^{-3}$

$\Rightarrow y^{(4)} = (-1).(-2).(-3).x^{-4}$

$= (-1)^3 . 3! . x^{-4}$

$\Rightarrow y^{(5)} = (-1)^{5-1} . (5-1)! . x^{-5}$

$= \frac{(-1)^4 . 4!}{x^5}$

.....

.....

.....

$\Rightarrow y^{(40)} = (-1)^{39} . 39! . x^{-40}$

$\Rightarrow y^{(40)} = -\frac{39!}{x^{40}}$ olur.

**Örnek:**

$n \in N^+$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$f(x) = e^{ax}$$

fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = e^{ax} \Rightarrow f'(x) = a.e^{ax}$

$\Rightarrow f''(x) = a^2 e^{ax}$

$\Rightarrow f'''(x) = a^3 e^{ax}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ olur.

**Örnek:**

$n \in N^+$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x$

$\Rightarrow f'''(x) = -\cos x$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$

$\Rightarrow f^{(5)}(x) = \cos x$ olduğundan,

$n \equiv 0 \pmod 4$ ise, $f^{(n)}(x) = \sin x$

$n \equiv 1 \pmod 4$ ise, $f^{(n)}(x) = \cos x$

$n \equiv 2 \pmod 4$ ise, $f^{(n)}(x) = -\sin x$

$n \equiv 3 \pmod 4$ ise, $f^{(n)}(x) = -\cos x$ olur.

**Örnek:**

$t \in R^-$ olmak üzere,

$$x = t^2 + 2t$$

$$y = t^3 - 3t$$

eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi $f''(x)$ olduğuna göre, $f''(0)$ değerini bulalım.

**Çözüm:**

$y = t^3 - 3t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$ ve

$x = t^2 + 2t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t + 2$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-3}{2t+2} = \frac{3(t^2-1)}{2(t+1)}$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(t-1) = F(t)$ olur. Buradan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dF(t)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF(t)}{dt}.\frac{dt}{dx} \quad \text{(Zincir kuralı)}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}(t-1)\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{3}{2}.1}{2t+2} = \frac{3}{4(t+1)} \text{ olur.}$$

$f''(0)$ değerini bulmak için, $x = t^2 + 2t$ eşitliğinde

$x = 0$ değerine karşılık gelen $t \in R^-$ değerini bulalım.

$x = t^2 + 2t \Rightarrow 0 = t(t+2) \Rightarrow t = -2 \in R^-$ bulunur.

$t = -2$ değeri, bulunan 2. mertebeden türev ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = f''(0) = \frac{3}{4(t+1)}\Big|_{t=-2} = \frac{3}{4.(-1)} = -\frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

**Teorem:** $f: R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu;

$$f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

biçiminde bir **polinom fonksiyon** olsun. $x = a$ sayısı **f(x) fonksiyonunun n katlı bir kökü (sıfır noktası)** ise,

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ dır.}$$

Eğer, $x = a$ sayısı $f(x) = 0$ denkleminin n katlı bir kökü ise,

$$f(x) = (x-a)^n . g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $f(a) = 0$ olduğu da göz önüne alınmalıdır.

**Örnek:**

$$f: R \to R,\ f(x) = (x^2 + 2).(x-2)^3$$

polinom fonksiyonunun yukarıdaki teoremi gerçeklediğini gösterelim.

**Çözüm:**

$x = 2$ sayısı, $f(x)$ fonksiyonunun 3 katlı bir kökü (sıfır noktası) olduğundan,

$f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$ olacaktır. O halde,

$f(x) = (x^2 + 2).(x-2)^3 \Rightarrow f(2) = 0,$

$f'(x) = 2x.(x-2)^3 + 3(x-2)^2.(x^2+2)$

$\Rightarrow f'(x) = (x-2)^2(2x^2 - 4x + 3x^2 + 6)$

$\Rightarrow f'(x) = (x-2)^2(5x^2 - 4x + 6) \Rightarrow f'(2) = 0$ ve

$f''(x) = 2(x-2)(5x^2 - 4x + 6) + (10x - 4)(x-2)^2$

$\Rightarrow f''(2) = 0$ dır.

Yani, $f(x)$ in 3 katlı bir kökü $x = 2$, $f(x)$ in ilk iki türevinin de köküdür.

**Sonuç:**

**P(x)** polinomu, **$(x-a)^n$ ile tam bölünebiliyorsa** P(x) in (n − 1) in mertebeye kadar olan bütün türevleri de (x − a) ile tam bölünür. Dolayısıyla,

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(n-1)}(a) = 0 \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 3$$

polinomunun $(x-1)^2$ ile tam bölünebilmesi için, a ve b nin alabileceği değerleri bulalım.

**Çözüm:**

P(x) polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, $P(1) = 0$ ve $P'(1) = 0$ olmalıdır. O halde,

$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax + b$

$P'(1) = 4 - 3 + 2a + b = 0$

$P(1) = \underline{-\ 1 - 1 + a + b + 3 = 0}$

$a = 2$ ve $b = -5$ olur.

**DİFERANSİYEL KAVRAMI**

**Teorem:** $A \subset R$, $f: A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu A da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. x in değerindeki değişimi $\Delta x$, buna karşılık gelen y deki değişimi $\Delta y$ ile gösterelim. x in diferansiyeli $dx = \Delta x$ olmak üzere, y nin diferansiyeli **$dy = f'(x).dx$** tir.

Bir fonksiyonun x noktasındaki türevi ile dx in (x in diferansiyelinin) çarpımı, bu fonksiyonun diferansiyeline eşittir.

**Örnekler:**

- $y = x^2 + 3x \Rightarrow dy = (x^2 + 3x)'dx = (2x + 3)dx$
- $f(x) = \sin^2 x \Rightarrow df(x) = (\sin^2 x)'dx = \sin 2x\, dx$
- $f(t) = \cos 3t \Rightarrow df(t) = -3\sin 3t\, dt$
- $d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}$
- $d(e^{\sin x}) = (e^{\sin x})'dx = \cos x\, e^{\sin x}\, dx$
- $d(3) = (3)'dx = 0.dx = 0$
- $d(\cos\pi) = (\cos\pi)'dx = 0$
- $d(x-2) = (x-2)'dx = dx$

**Uyarı:**

$y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$dy = f'(x)\,dx$ olduğundan; türev alma kuralları diferansiyel için de geçerlidir.

**Örnekler:**

- $y = e^{2x}.\sin x$ fonksiyonun diferansiyeli (dy):

  $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}.\sin x + \cos x.e^{2x}$ olduğundan,

  $dy = e^{2x}(2\sin x + \cos x)dx$

- $y = f(x^2 + 3x)$ in diferansiyeli (dy):

  $\dfrac{dy}{dx} = f'(x^2 + 3x).(x^2 + 3x)'$ olduğundan

  $\Rightarrow dy = f'(x^2 + 3x)(2x + 3)dx$ şeklinde bulunur.

## TÜREVİN UYGULAMALARI

### 1. L'HOSPİTAL (LOPİTAL) KURALI

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki limiti hesaplanırken; $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaşılırsa, L'Hospital kuralı ile bu fonksiyonun aynı noktadaki limiti bulunur.

**Teorem (L'Hospital Kuralı):** f ve g fonksiyonları [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli iki fonksiyon olsun. $c \in (a, b)$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mevcutsa,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur.}$$

L'Hospital kuralı, $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine de uygulanabilir.

Eğer, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{0}{0}$ $\left(\text{veya } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ belirsizlik durumu devam ederse L'Hospital kuralı bir kez daha uygulanır. Belirsizlik durumu ortadan kalkıncaya kadar L'Hospital kuralı art arda uygulanabilir.

**Uyarı:**

L'Hospital kuralı, bölümün türevinin alınması şeklinde uygulanmaz. Payın türevinin, paydanın türevine oranlanması biçiminde uygulanır.

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x.\cos(\pi x)+3}{x-3}$$

limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x.\cos(\pi x)+3}{x-3}=\frac{3.\cos(\pi.3)+3}{3-3}=\frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to 3}\frac{[x.\cos(\pi x)+3]'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{1.\cos(\pi x)-x.\pi.\sin(\pi x)}{1}$$

$$=\frac{\cos(3\pi)-3.\pi.\sin 3\pi}{1}=-1 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x-x-1}$$

limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x-x-1}=\frac{(\sin 0)^2}{e^0-0-1}=\frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(e^x-x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^x-1}=\frac{0}{e^0-1}=\frac{0}{0}$$

olduğundan tekrar L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{e^x}=\frac{2.\cos 0}{e^0}=2 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{e^x}=2 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{x+\ln x}$$

limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{x+\ln x}=\frac{(-\infty)^2}{0-\infty}=\frac{+\infty}{-\infty}$$ (Belirsiz)

Buna göre, L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln^2 x)'}{(x+\ln x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x.\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{x+1}=\frac{2.(-\infty)}{0+1}=-\infty$$

**Uyarı:**

$0.\infty$, $\infty-\infty$ *belirsizlikleri* $\frac{0}{0}$ *veya* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliklerinden birisine dönüştürülerek L'Hospital kuralı ile limit hesaplanabilir.*

**$0.\infty$ Belirsizliği**

$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=0.\infty$ ise, $f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

şeklinde yazılarak $\frac{0}{0}$ veya $f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ şeklinde yazılarak $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliği elde edilir.*

**Örnek:**

$\lim_{x\to\pi}(\sin 2x.\operatorname{cosec} 3x)$ limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to\pi}(\sin 2x.\operatorname{cosec} 3x)=\sin 2\pi.\operatorname{cosec} 3\pi=0.\infty$ olduğundan, $\sin 2x.\operatorname{cosec} 3x=\sin 2x:\frac{1}{\operatorname{cosec} 3x}$ şeklinde yazılırsa $\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edilir.

$$\lim_{x\to\pi}(\sin 2x.\operatorname{cosec} 3x)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\pi}\left[\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'}\right]=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{2\cos 2x}{3\cos 3x}\right)=\frac{2.1}{3.(-1)}=-\frac{2}{3}$$

**Örnek:**

$\lim_{x\to 0^+}(\tan x.\ln x)$ limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to 0^+}(\tan x.\ln x) = 0.(-\infty)$ belirsizliği olduğundan,

$\tan x.\ln x = \dfrac{\ln x}{\cot x}$ şeklinde yazılırsa $\dfrac{-\infty}{\infty}$ belirsizliği elde edilir. O halde,

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

olduğundan L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(\ln x)'}{(\cot x)'}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin^2 x}{-x}\right) = \frac{0}{0}$$

olduğundan tekrar L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\tan x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(\sin^2 x)'}{(-x)'}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{-1} = 0 \text{ olur.}$$

**$\infty - \infty$ Belirsizliği**

$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ oluyorsa, $f(x) - g(x)$ işlemi düzenlenerek $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği elde edilir.

**Örnek:**

$\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ limitini hesaplayalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

olduğundan, verilen ifadelerde düzenleme yapılırsa

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan, L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x - x + 1)'}{[(x-1).\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{1}{x}.(x-1)} = \frac{0}{0}$$

olduğundan tekrar L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

**Uyarı:**

$[f(x)]^{g(x)}$ biçimindeki fonksiyonların limitinin hesaplanmasında $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$ belirsizlikleri ile karşılaşılabilir. Bu durumda, $y = [f(x)]^{g(x)}$ eşitliğinin iki yanının e tabanına göre logaritması alınarak $\ln y = g(x).\ln f(x)$ eşitliği elde edilir. Bu durumda $0.\infty$ belirsizliğine ulaşılır.

Elde edilen logaritmalı eşitliğin iki yanının limiti hesaplanarak, $\lim(\ln y) = m$ değeri bulunur. Buradan,

$\lim(\ln y) = m \Rightarrow \ln(\lim y) = m \Rightarrow \lim y = e^m$ elde edilir.

**Örnek:**

$\lim_{x\to 0^+}(x^{\sin x})$

limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to 0^+}(x^{\sin x}) = 0^0$ olduğundan,

$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x.\ln x$ olduğundan,

$\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x) = 0.\infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bunu $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürürsek,

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \frac{-\infty}{+\infty}$$

olduğundan L'Hospital kuralını uygularsak,

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x.\cos x}\right) = \frac{0}{0}$$

olduğundan, L'Hospital kuralını tekrar uygularsak,

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(-\sin^2 x)'}{(x.\cos x)'}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin 2x}{\cos x - x\sin x}\right)$$

$= 0$ olur. Buradan,

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right) = e^0 = 1 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x$ limitinin değerini bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x = \infty^0$ olduğundan,

$y = (\cot x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\cot x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 0.\infty \text{ olur. O halde,}$$

$$\lim_{x\to 0^+}[x.\ln(\cot x)] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

olduğundan, L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln(\cot x)]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\text{cosec}^2 x}{\cot x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot x^2\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{0}{0}$$

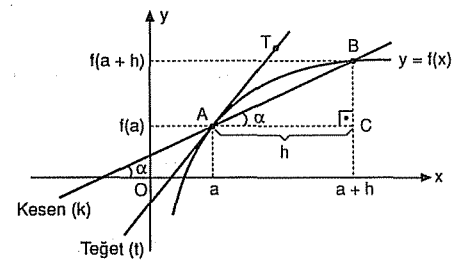
olduğundan, tekrar L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2)'}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\cos 2x} = \frac{0}{1} = 0 \text{ olur.}$$

Buna göre, $\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 0$ olduğundan,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x = e^0 = 1 \text{ dir.}$$

## 2. TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU




$A \subset R$ olmak üzere, $f:A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu türevlenebilen bir fonksiyon ve $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde birbirine çok yakın iki nokta $A(a, f(a))$ ve $B(a + h, f(a + h))$ olsun. Şekilde, [AB] bir kiriş ve AT doğrusu (t), $y = f(x)$ in A noktasındaki teğetidir.
AB doğrusunun (k) eğimi

$$m_{AB} = \tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ olur.}$$

$h \to 0$ için; B noktası eğri boyunca A ya yaklaşır ve AB keseni (k doğrusu) AT teğetinin (t doğrusunu) konumuna gelir (çakışır). Bu durumda $y = f(x)$ in $x = a$ daki teğetinin (AT teğetinin) eğimi, AB keseninin eğiminin $h \to 0$ için limitine eşit olur. Buna göre,

$$m_t = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ dır.}$$

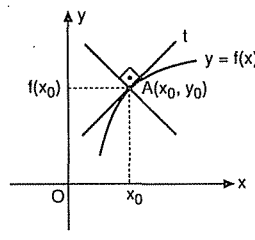
O halde, **$y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ daki teğetinin eğimi, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki türevine eşittir.**

**Uyarı:**

B noktası, $B(a - h, f(a - h))$ şeklinde alınarak da yukarıdaki yorumun benzeri yapılabilir.

**Teğet ve Normal Denklemi**

Eğimi m ve üzerindeki bir noktası $A(x_0, y_0)$ bilinen doğru denklemi $y - y_0 = m(x - x_0)$ eşitliğinden yararlanarak, $y = f(x)$ eğrisine $x = x_0$ noktasından çizilen teğetin denklemi $(m_t = f'(x_0)$ ve $y_0 = f(x_0))$




$y - y_0 = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ olur.

$y = f(x)$ eğrisinin $A(x_0, y_0)$ noktasındaki **teğetine değme noktasında dik olan doğruya, eğrinin A noktasındaki normali (n)** denir.

Birbirine dik doğruların eğimlerinin çarpımı $-1$ olduğundan,

$$m_t . m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{-1}{f'(x_0)} \text{ dır.}$$

Buna göre, A noktasındaki normalin denklemi:

$$y - y_0 = m_n(x - x_0) \Rightarrow \mathbf{y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)} \text{ dır.}$$

**Örnek:**

$f(x) = x^2$ parabolüne $x = 2$ noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini bulalım.

**Çözüm:**

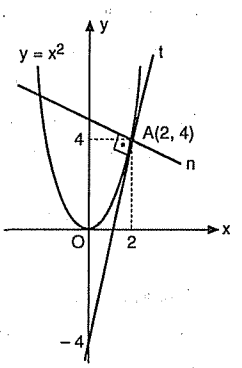
$x_0 = 2$ için,

$f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow y_0 = 4$ tür.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

olduğundan, $f(x) = x^2$ parabolüne, A(2, 4) noktasından çizilen teğetin denklemi

$(m_t = f'(2) = 2.2 = 4)$




$$y - y_0 = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2)$$
$$\Rightarrow y = 4x - 4 \text{ ve}$$

normalin denklemi:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} \Rightarrow m_n = \frac{-1}{f'(2)} \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4} \text{ olduğundan,}$$

$$y - y_0 = m_n(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$
$$\Rightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ parabolüne $x = 2$ noktasından çizilen teğetin y - eksenini kestiği noktanın ordinatını bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ parabolünün $x = 2$ deki türevini bulalım.

$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$ dir.

$y = f(x)$ eğrisi üzerinde, apsisi $x = x_0$ olan noktanın ordinatı $y_0 = f(x_0)$ olduğundan,

$y_0 = f(2) = -2^2 + 6.2 - 5 \Rightarrow y_0 = f(2) = 3$ tür.

Buna göre, $f(x)$ parabolüne $x = 2$ den yani $A(2, 3)$ noktasından çizilen teğetin denklemi:

$$y - y_0 = f'(2).(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2.(x - 2)$$
$$\Rightarrow y = 2x - 1 \text{ dir.}$$

O halde, $y = 2x - 1$ doğrusunun (teğetin) y - eksenini kestiği noktanın ordinatı (y):

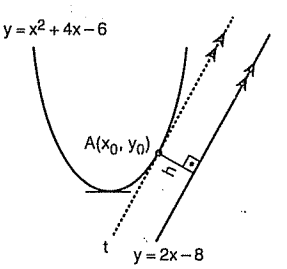
$y = 2x - 1$ denkleminde, $x = 0$ için $y = -1$ dir.

**Örnek:**

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ parabolünün $y = 2x - 8$ doğrusuna en yakın noktasının apsisini $(x_0)$ bulalım.

**Çözüm:**

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ parabolünün $y = 2x - 8$ doğrusuna en yakın olan noktası, parabole çizilen teğetlerden $y = 2x - 8$ doğrusuna paralel olan doğru üzerindedir.




Bu doğru şekildeki t doğrusu ve bu doğrunun parabole teğet olduğu nokta $A(x_0, y_0)$ olsun. t doğrusu, $y = 2x - 8$ doğrusuna paralel olduğundan t doğrusunun eğimi $y = 2x - 8$ doğrusunun eğimine eşittir. O halde, parabolün $x = x_0$ daki türevinin değeri, bu noktadaki teğetin eğimine eşit olacağından,

$f'(x_0) = m_t = 2$ olmalıdır. Buna göre,

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f'(x) = 4x + 4$ ve

$f'(x_0) = 2 \Rightarrow 4x_0 + 4 = 2 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ dir.

**Örnek:**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\cos^2 2t \\ y = 4\sin 2t \end{array}\right\}$$

denklemleriyle verilen $y = f(x)$ parametrik fonksiyonunun, ordinatı $y = \frac{4}{3}$ olan noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

**Çözüm:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(4\sin 2t)'}{(3\cos^2 2t)'}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4.2.\cos 2t}{3.2\cos 2t.(-2\sin 2t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3.\sin 2t} \text{ ve}$$

$y = 4\sin 2t$ eşitliğinden, $y = \frac{4}{3}$ için elde edilen $\frac{4}{3} = 4\sin 2t \Rightarrow \sin 2t = \frac{1}{3}$ değeri yerine yazılırsa, ordinatı $y = \frac{4}{3}$ olan noktasındaki teğetinin eğimi;

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=\frac{4}{3}} = \frac{-2}{3.\frac{1}{3}} \Rightarrow m_t = -2 \text{ bulunur.}$$

## 3. TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU

Bir eğri boyunca yol alan bir hareketlinin aldığı yol; t (zaman) ve s (yol) olmak üzere, $s = s(t)$ hareket denklemiyle veriliyor olsun. Bu hareketlinin t anındaki v hızını bulalım:

Bir hareketlinin hızı, birim zamanda aldığı yol olduğundan, eğer hareketli $\Delta t$ kadar zamanda $\Delta s$ kadar yol alıyorsa ortalama hızı $v_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ olur. Buna göre, hareketlinin t anındaki v hızı;

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t) \text{ olur.}$$

Ayrıca bir hareketlinin hızının birim zamandaki değişme miktarı da ivme olduğundan, a ivmesi;

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$$

olarak bulunur.

**Sonuç:**

1. t zamanında aldığı yolu $s = s(t)$ denklemiyle verilen bir hareketlinin, **t anındaki hızı $v = s'(t)$** yani, **yolun zamana göre birinci türevi**dir.

2. *t zamanındaki hızı $v = v(t)$ olan bir hareketlinin*, **t anındaki ivmesi $a = v'(t)$** yani; **hızın zamana göre birinci türevi, yolun da zamana göre ikinci türevi**dir.

$$a = v'(t) = s''(t) \text{ dir.}$$

**Örnek:**

Bir hareketlinin t saniyede aldığı s metre yol

$$s = s(t) = t^3 - 3t + 10$$

denklemiyle verildiğine göre, hareketlinin;

**a)** İlk 2 saniyede aldığı yolu,

**b)** 3. saniyedeki hızını ve ivmesini bulalım.

**Çözüm:**

**a)** Hareket denklemi $s(t) = t^3 - 3t + 10$ olan hareketlinin ilk 2 saniyede aldığı yol;

$s(2) = 2^3 - 3.2 + 10 = 12$ metre,

**b)** Hareketlinin 3. saniyedeki hızı,

$$v(t) = s'(t) \Rightarrow v(t) = (t^3 - 3t + 10)'$$
$$\Rightarrow v(t) = 3t^2 - 3$$
$$\Rightarrow v(3) = 3.3^2 - 3 = 24 \text{ m/sn ve}$$

Bu hareketlinin 3. saniyedeki ivmesi,

$$a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = (3t^2 - 3)'$$
$$\Rightarrow a(t) = 6t$$
$$\Rightarrow a(3) = 6.3 = 18 \text{ m/sn}^2 \text{ dir.}$$

## 4. ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

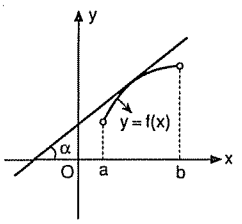
**Teorem:** $f:(a, b) \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu türevli olsun. $\forall x \in (a, b)$ için;

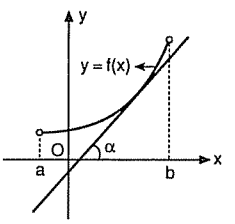
1. **$f'(x) > 0 \Leftrightarrow y = f(x)$** fonksiyonu (a, b) aralığında **artan**dır.

2. **$f'(x) < 0 \Leftrightarrow y = f(x)$** fonksiyonu (a, b) aralığında **azalan**dır.

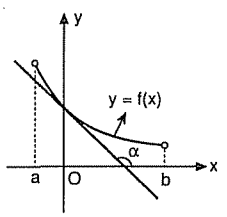
3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında **sabit fonksiyon**dur.

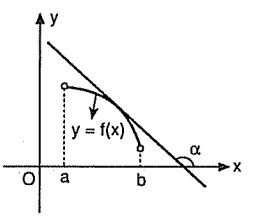
Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun **birinci türev**inin ($f'(x)$ in) **pozitif** olduğu aralıkta **f(x)** fonksiyonu **artan** fonksiyon, **negatif** olduğu aralıkta da **f(x) azalan** fonksiyondur.




Yukarıdaki şekillerde, (a, b) aralığının her noktasında y = f(x) in bütün teğetlerinin eğimi pozitif olduğundan, aynı aralıkta $f'(x)$ daima pozitiftir.




Yukarıdaki şekillerde, (a, b) aralığının her noktasında y = f(x) in bütün teğetlerinin eğimi negatif olduğundan, aynı aralıkta $f'(x)$ daima negatiftir.

**Uyarı:**

1. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ için;

   $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ **ise, f(x) artan**

   $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ **ise, f(x) azalan**dır.

2. y = f(x) in **pozitif tanımlı** olduğu aralıkta **f(x) > 0** ve **negatif tanımlı** olduğu aralıkta **f(x) < 0** dır.

**Örnek:**

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

**Çözüm:**

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ fonksiyonunun işaretini inceleyerek y = f(x) in artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ veya $x_2 = 3$

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | | Artan | | Azalan | | Artan | |

Yukarıdaki tablodan, y = f(x) fonksiyonunun;

$(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ aralığında artan,

(1, 3) aralığında azalan olduğu görülür.

**Örnek:**

$$f(x) = mx^3 + 3x^2 + x - 4$$

fonksiyonunun daima artan olabilmesi için, m nin hangi aralıkta olması gerektiğini bulalım.

**Çözüm:**

y = f(x) in daima artan olabilmesi için $f'(x)$ in daima (x in bütün reel sayı değerleri için) pozitif olması gerekir. O halde,

$f'(x) = 3mx^2 + 6x + 1 > 0$ olması için,

$3m > 0$ ve $\Delta = 6^2 - 4.(3m).1 < 0$ olmalıdır.

Buna göre, $m > 0$ ve $\Delta = 36 - 12m < 0$

$\Rightarrow m > 3$

Dolayısıyla, $m > 0$ ve $m > 3$ şartlarının ikisini birden sağlayan $m > 3$ için f(x) fonksiyonu daima artan olur.

**Örnek: 1983 - ÖYS**

**f(x) fonksiyonu $0 < x < +\infty$ için azalan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artan bir fonksiyondur?**

A) f(x) − x  B) $f(x^2)$  C) x − f(x)

D) 2f(x)  E) $[f(x)]^3$

**Çözüm:**

f(x) azalan ise $f'(x) < 0$ dır.

$g'(x) > 0$ ise g(x) artan olduğundan, seçeneklerdeki fonksiyonlardan birinci türevi pozitif olan artandır.

O halde,

A) $[f(x) - x]' = f'(x) - 1 < 0$

B) $[f(x^2)]' = f'(x^2).2x < 0$

C) $[x - f(x)]' = 1 - f'(x) > 0$ olduğundan, $x - f(x)$ artandır.

**Örnek:**

**f(x) fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan ise aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta azalandır?**

A) $\frac{-1}{f^2(x)}$ B) $f^2(x)$ C) $f^3(x)$

D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $2f(x)$

**Çözüm:**

y = f(x) pozitif tanımlı ve artan ise,
$f(x) > 0$ ve $f'(x) > 0$ dır.

Seçeneklerden azalan fonksiyonu aradığımız için, birinci türevi negatif olan fonksiyonu bulmalıyız. O halde,

A) $[-f^{-2}(x)]' = \frac{2.f'(x)}{f^3(x)} > 0 \quad \left(\frac{+}{+}\right)$

B) $[f^2(x)]' = 2f(x).f'(x) > 0$

C) $[f^3(x)]' = 3f^2(x).f'(x) > 0$

D) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} < 0$ olduğundan, $\frac{1}{f(x)}$ fonksiyonu azalandır.

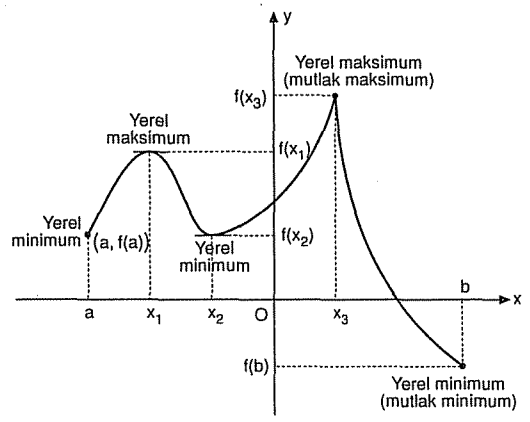
## 5. EKSTREMUM NOKTALAR VE EKSTREMUM DEĞERLER

ε yeterince küçük pozitif bir reel sayı ve $f : A \to R$, y = f(x) fonksiyonunda $a \in A$ olmak üzere, a noktasını içine alan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için; **$f(x) \le f(a)$** ise, **(a, f(a)) noktasına** f(x) fonksiyonunun **yerel (bağıl) maksimum noktası, f(a) değerine** de f(x) fonksiyonunun **yerel (bağıl) maksimum değeri** denir. Eğer, **$f(x) \ge f(a)$** ise, **(a, f(a)) noktasına** f(x) fonksiyonun **yerel (bağıl) minimum noktası, f(a) değerine** de f(x) fonksiyonun **yerel (bağıl) minimum değeri** denir.

**Uyarı:**

y = f(x) fonksiyonunun yerel (bağıl) maksimum değerlerinden en büyüğüne bu fonksiyonun **mutlak maksimum değeri**, yerel (bağıl) minimum değerlerinden en küçüğüne de bu fonksiyonun **mutlak minimum değeri** denir. Her mutlak ekstremum noktası aynı zamanda yerel (bağıl) ekstremum noktasıdır.

Aşağıdaki şekilde grafiği verilen $f: [a, b] \to R$, y = f(x) fonksiyonunun yerel (bağıl) ekstremum ve mutlak ekstremum noktalarını belirtelim.




1. $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_3, f(x_3))$ noktaları, y = f(x) fonksiyonunun yerel (bağıl) maksimum noktaları,

   $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ yerel (bağıl) maksimum değerleri,

   $(x_3, f(x_3))$ mutlak maksimum noktası ve $f(x_3)$ değeri de f(x) in mutlak maksimum (en büyük) değeridir.

2. $(a, f(a))$, $(x_2, f(x_2))$ ve $(b, f(b))$ noktaları, y = f(x) fonksiyonunun yerel (bağıl) minimum noktaları,

   f(a), $f(x_2)$ ve f(b) yerel (bağıl) minimum değerleri,

   $(b, f(b))$ mutlak minimum noktası ve

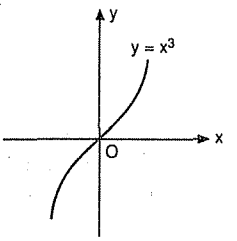
   f(b) değeri de f(x) in mutlak minimum (en küçük) değeridir.

## 1. Ekstremum Noktalar ile Türevin İlişkisi

**Teorem (Fermat Teoremi):** f: [a, b] → R, y = f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli olsun. y = f(x) fonksiyonunun $x_0 \in$ **(a, b) noktasında yerel (bağıl) ekstremumu varsa,** $f'(x_0) = 0$ dır. Bu teoremin karşıtı her zaman doğru olmayabilir. Yani, $f'(x_0) = 0$ olduğu halde $(x_0, f(x_0))$ noktası, f(x) in yerel (bağıl) ekstremum noktası olmayabilir.

**Örneğin,**

f: R → R, $f(x) = x^3$ fonksiyonu için, $f'(x) = 3x^2$ ve $f'(0) = 0$ olduğu halde, O(0, 0) noktası fonksiyonun yerel (bağıl) ekstremum noktası değildir.

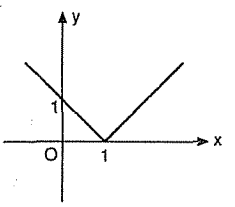



**Uyarı:**

Yerel ekstremum noktasında fonksiyonun türevi varsa, bu noktada türevin değeri sıfırdır. Ancak, fonksiyonun türevlenemediği noktalarda da yerel ekstremum noktası olabilir.

**Örneğin,**

f: R → R, f(x) = |x − 1| fonksiyonunun (1, 0) noktasında bir yerel minimum değeri olduğu halde, $f'(1^+) = 1$ ve $f'(1^-) = -1$ soldan ve sağdan türevler farklı olduğu için $f'(1)$ yoktur.




**Uyarı:**

Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktanın yerel ekstremum noktası olması için, bu noktanın kritik nokta olmaması ve bu noktada türev fonksiyonunun işaret değiştirmesi gerekir. O halde,

$f'(x) = 0$ denkleminin **tek katlı kökleri**, y = f(x) fonksiyonun **yerel ekstremum noktalarının apsisi**dir. Fonksiyonun kritik noktaları ayrıca incelenir.

**Örnek:**

$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulalım.

**Çözüm:**

$f'(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = x^2(x^2 - x - 6) = 0$ denkleminin kökleri,

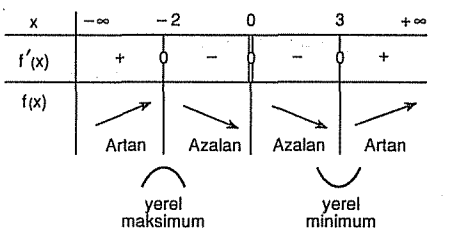
$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ veya

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 2).(x - 3) = 0 \Rightarrow x_3 = -2, x_4 = 3$

olduğundan türev fonksiyonunun tek katlı kökleri olan $x = -2$ ve $x = 3$ noktalarında y = f(x) fonksiyonunun yerel ekstremum değerleri vardır.

Burada, türevin çift katlı kökleri olan $x_1 = x_2 = 0$ noktasında ise fonksiyonun ekstremum değeri yoktur.

f(x) ve $f'(x)$ fonksiyonlarının değişimini aşağıdaki tabloda inceleyelim.




Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun yerel maksimum değeri $f(-2) = -\frac{32}{5} - \frac{16}{4} - 2.(-8) = \frac{28}{5}$ ve

yerel minimum değeri $f(3) = \frac{243}{5} - \frac{81}{4} - 2.27 = -\frac{513}{20}$ dir.

## 2. İkinci Türevin Yerel Ekstremum Noktaları İle İlişkisi

$(x_0, f(x_0))$ noktası, y = f(x) fonksiyonunun bir ekstremum noktası olsun. Bu noktada fonksiyonun ikinci türevi var ve sıfırdan farklı ise,

1. $f''(x_0) > 0$ ise $x = x_0$ da f(x) in bir **yerel minimumu**,
2. $f''(x_0) < 0$ ise $x = x_0$ da f(x) in bir **yerel maksimumu** vardır. Bunu şu şekilde de ifade edebiliriz:

$x = x_0$ da sürekli ve bu noktada birinci ve ikinci türevi mevcut olan bir y = f(x) fonksiyonu için,

1. $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ ise $(x_0, f(x_0))$ noktası, y = f(x) fonksiyonunun yerel minimum noktası
2. $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$ ise $(x_0, f(x_0))$ noktası, y = f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

**Uyarı:**

$f'(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde $y = f(x)$ in yerel maksimum değeri ya da yerel minimum değerlerinden hangisi olduğunu anlamak için;

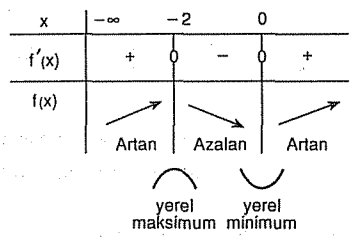
1. $f'(x)$ türev fonksiyonun işaret tablosu incelenir veya
2. $f''(x)$ ikinci türevinin bu noktalardaki işaretine bakılır.

**Örnek:**

$f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini araştıralım.

**Çözüm:**

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = -2$ ve türev fonksiyonunun işaret tablosu yapılırsa,




Tablodan, $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri $f(-2) = 8$, yerel minimum değeri de $f(0) = 4$ tür. Buna göre, $(-2, 8)$ ve $(0, 4)$ noktaları, $f(x)$ fonksiyonunun sırasıyla yerel maksimum ve yerel minimum noktalarıdır.

**Örnek:**

$f: R \to R$, $f(x) = e^x - x^2 - x + 4$ fonksiyonunun, varsa ekstremum noktalarını bulalım.

**Çözüm:**

$f'(x) = e^x - 2x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 2x + 1$ eşitliğini sağlayan tek bir değer vardır ve bu değer $x = 0$ dır. $f(0)$ değerinin yerel maksimum ya da yerel minimum değerlerinden hangisinin olduğunu anlamak için ikinci türevin bu noktadaki işaretini bulalım.

$f''(x) = e^x - 2$ ve $f''(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$

olduğundan $x = 0$ da $y = f(x)$ in bir yerel maksimum değeri vardır ve bu değer $f(0) = 5$ tir. O halde, $(0, 5)$ noktası $y = f(x)$ in yerel maksimum noktasıdır.

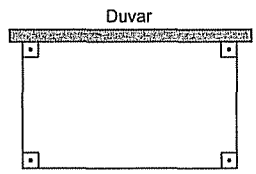
**3. Maksimum ve Minimum Problemleri**

Değişen bir miktarın en büyük ya da en küçük değeri bulunurken:

1. En büyük ya da en küçük olması istenilen ifade, tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak yazılır.
2. Yerel ekstremum değerlerini bulmak için, yazılan fonksiyonun türevinden yararlanılır.

**Örnek: 1987 - ÖYS**

Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir.

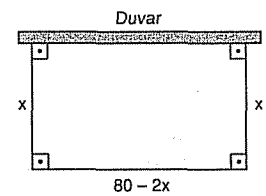



**Kullanılan telin uzunluğu 80 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç $m^2$ olabilir?**

A) 800 B) 1000 C) 1200 D) 1400 E) 2000

**Çözüm:**

Bahçenin kenarlarından birisinin uzunluğuna x denilirse, diğer kenarının uzunluğu $(80 - 2x)$ olur.




Dikdörtgenin alanı (A), x değişkenine bağlı olarak: $A = A(x) = x.(80 - 2x)$ şeklinde yazılır.

Alanın en büyük değerini aldığı x değerini bulmak için $A'(x) = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$A(x) = x(80 - 2x) \Rightarrow A(x) = 80x - 2x^2$

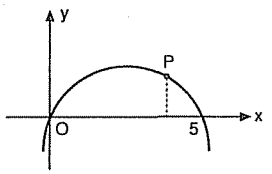
$\Rightarrow A'(x) = 80 - 4x = 0$

$\Rightarrow x = 20$ m dir.

Buna göre, alanın en büyük değeri:

$A(20) = 20.(80 - 2.20) \Rightarrow A(20) = 800\ m^2$ dir.

**Örnek: 1989 - ÖYS**




Şekilde $P(x_1, y_1)$ noktası denklemi $y = x(5 - x)$ olan parabol üzerindedir.

**$x_1$ in hangi değeri için $x_1 + y_1$ toplamı maksimumdur?**

A) 2,50 B) 2,75 C) 3,00

D) 2,25 E) 4,00

**Çözüm:**

$y_1 = 5x_1 - x_1^2$ ve $T = x_1 + y_1$ toplamı:

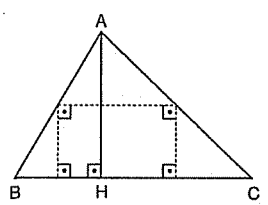
$T(x_1) = x_1 + (5x_1 - x_1^2) \Rightarrow T(x_1) = 6x_1 - x_1^2$ olur.

$T(x_1)$ ifadesi, $T'(x_1) = 0$ eşitliğini sağlayan $x_1$ değeri için en büyük olur. Buna göre,

$T'(x_1) = 6 - 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ tür.

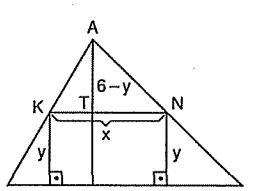
**Örnek:**

$[AH] \perp [BC]$
$|BC| = 8$ cm
$|AH| = 6$ cm
olduğuna göre, köşeleri şekildeki ABC üçgeninin kenarları üzerinde olacak şekilde çizilen dikdörtgenlerden, alanı en büyük olan dikdörtgenin alanını bulalım.




**Çözüm:**

Aradığımız dikdörtgen KLMN dikdörtgeni olsun.
$|KN| = |LM| = x$ ve
$|KL| = |MN| = y$
olmak üzere, KLMN dikdörtgeninin alanı
$A(x, y) = x.y$ dir.
Bu alan fonksiyonunu tek değişkene bağlı olarak yazabilmek için y nin x cinsinden değerini bulalım.




Şekilde, $\widehat{ABC} \sim \widehat{AKN}$ olduğundan,

$$\frac{|BC|}{|KN|} = \frac{|AH|}{|AT|} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{6}{6-y}$$

$$\Rightarrow 4.(6 - y) = 3.x$$

$$\Rightarrow 24 - 4y = 3x$$

$$\Rightarrow y = \frac{24 - 3x}{4} \text{ olur.}$$

Elde edilen bu değer, $A(x, y) = x.y$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$A(x) = x.\frac{24 - 3x}{4} \Rightarrow A(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 \text{ olur.}$$

$$A'(x) = 6 - \frac{3}{2}x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

$$A''(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow A''(4) = -\frac{3}{2} < 0 \text{ olduğundan,}$$

$x = 4$ için $A(x)$ fonksiyonu yerel maksimum değerini alır. Buna göre, dikdörtgenin alanının en büyük değeri

$$A(4) = 6.4 - \frac{3}{4}.4^2 = 12 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

**Sonuç:**

Bir üçgenin içine, köşeleri üçgenin kenarları üzerinde olan, maksimum alanlı dikdörtgenin alanı, üçgenin alanının yarısına eşittir.

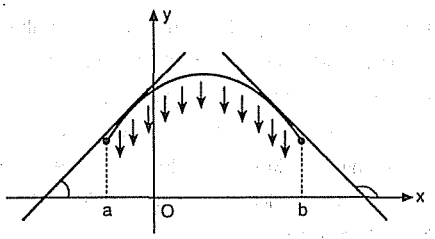
## 6. İKİNCİ TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

**Tanım:** $f : [a, b] \rightarrow R$, $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $(a, b)$ aralığında birinci türevi ve ikinci türevi alınabilen bir fonksiyon olsun.

1. Fonksiyonun grafiği; $(a, b)$ aralığının her noktasındaki **teğetlerinin altında** kalıyorsa, **eğrilik yönü aşağı** doğrudur **(İçbükeydir - konkavdır)**.

2. Fonksiyonun grafiği; $(a, b)$ aralığının her noktasındaki **teğetlerinin üstünde** kalıyorsa, **eğrilik yönü yukarı** doğrudur **(dışbükeydir - konvekstir)**.

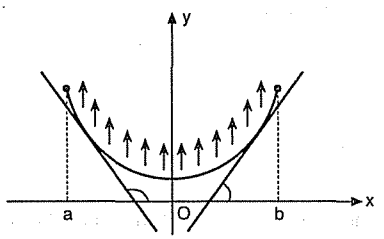
Bunu aşağıdaki şekillerle gösterelim.



Şekil - 1

**Şekil - 1:** Eğri, (a, b) aralığının her noktasındaki teğetlerin altında kalıyor.

Eğrilik yönü aşağı doğru (içbükey - konkav)



Şekil - 2

**Şekil - 2:** Eğri, (a, b) aralığının her noktasındaki teğetlerin üstünde kalıyor.

Eğrilik yönü yukarı doğru (dışbükey - konveks)

**Teorem:** $(a, b) \subset A$ ve $f : A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu, birinci türevi ve ikinci türevi alınabilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a, b)$ için:

1. **$f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ f(x) fonksiyonunun eğrilik yönü aşağı doğrudur.**  **İçbükey (Konkav)**

2. **$f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ f(x) fonksiyonunun eğrilik yönü yukarı doğrudur.**  **Dışbükey (Konveks)**

**Örnek:**

$f(x) = x^5 + 2x^3 - 7x + 1$ fonksiyonunun, konkav ve konveks olduğu aralıkları bulalım.

**Çözüm:**

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 7$ ve

$f''(x) = 20x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = 0$

$\Rightarrow 2x(10x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

$f''(x)$ fonksiyonunun işaretini tablo ile inceleyelim.

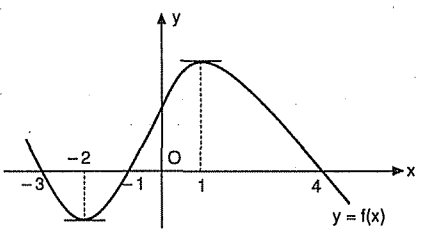
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | 0 | + |
| f(x) | ∩ | | ∪ |

Buna göre,

$x < 0 \Rightarrow$ f(x) konkav (İçbükey)

$x > 0 \Rightarrow$ f(x) konveks (Dışbükey)

**Örnek:**



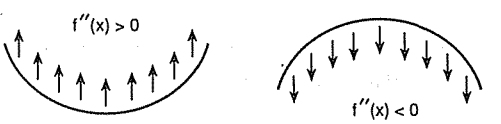

**Şekilde grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f''(-3) > 0$ B) $f''(-2) > 0$ C) $f''(-1) > 0$

D) $f''(1) < 0$ E) $f''(4) > 0$

**Çözüm:**

Eğrilik yönü yukarı olan bölgede $f''(x)$ pozitif, aşağı olan bölgede ise negatiftir.



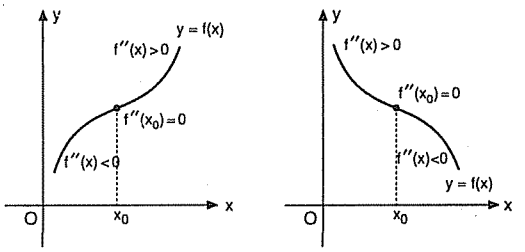

Buna göre, (E) seçeneğindeki $f''(4) > 0$ ifadesi yanlış, diğer seçeneklerde verilen ifadeler doğru olur.

**Büküm (Dönüm) Noktası**

y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin **eğrilik yönünün değiştiği** yani, **ikinci türevinin işaret değiştirdiği** noktalarda fonksiyon sürekli ise bu noktalara y = f(x) in **büküm (dönüm) noktaları** denir.

y = f(x) fonksiyonunun **büküm noktasında**, eğer bu nokta kritik nokta değilse, **ikinci türevinin değeri sıfırdır.**

Bu ifadeleri aşağıdaki şekillerde açıklayalım.



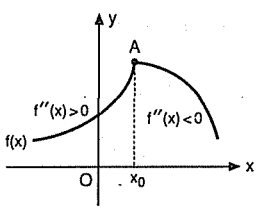

$y = f(x)$ in grafiğinin; eğrilik yönünün aşağı doğru olduğu aralıklarda $f''(x) < 0$, eğrilik yönünün yukarı doğru olduğu aralıklarda $f''(x) > 0$ ve grafiğin eğrilik yönünün değiştiği $x = x_0$ noktasında $f''(x_0) = 0$ dır.

**Uyarı:**

1. $y = f(x)$ in dönüm noktasında ikinci türev tanımlı olmayabilir.
2. Bir noktada ikinci türevin sıfır olması, o noktanın dönüm noktası olmasını gerektirmez.

**Örnek:**

Yandaki şekilde, $x = x_0$ da soldan ve sağdan türevler birbirinden farklı olduğu için $f'(x_0)$ yoktur. Birinci türevi olmadığı için, bu noktada ikinci türev de yoktur.




Ancak, fonksiyonun grafiğinin eğrilik yönü değiştiği için $A(x_0, f(x_0))$ noktası, $y = f(x)$ in dönüm noktasıdır.

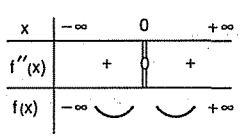
**Örnek:**

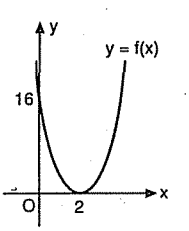
$f(x) = (x-2)^4$ fonksiyonunun büküm (dönüm) noktasının olup - olmadığını araştıralım.

**Çözüm:**

$f'(x) = 4(x-2)^3$ ve $f''(x) = 12(x-2)^2$ dir.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ ve




$\forall x \in R$ için $f''(x) = 12(x-2)^2 \geq 0$ olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonu daima konveks (dışbükey) tir. Dolayısıyla $f''(2) = 0$ olduğu halde, $x = 2$ de $f(x)$ in bir büküm noktası yoktur.

## 6. FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bir fonksiyonun grafiği, fonksiyonun kuralını sağlayan bütün noktaların koordinat düzleminde işaretlenmesiyle elde edilir. Ancak, sonsuz çokluktaki noktanın koordinat düzleminde işaretlenmesi mümkün değildir. Bu sebeple, eğrinin karakterini belirten bazı özel noktalarını ve eğrinin bazı özelliklerini bularak grafiği aslına uygun bir biçimde çizebiliriz.

Grafiğe ait özel noktalar; grafiğin eksenleri kestiği noktalar, ekstremum noktalar ve büküm noktalarıdır. Grafiğin karakterini belirleyen özellikler ise; artan ya da azalan olması, çukurluğun yönü, sonsuza uzanabilen kolunun veya kollarının bir doğru ya da eğriye **(asimptot)** teğet olmasıdır.

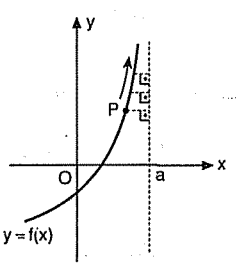
### ASİMPTOTLAR

**Tanım:** $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin sonsuza giden bir kolu varsa, bu kol üzerindeki herhangi bir P noktası sonsuza doğru gittikçe bu P noktasının sabit bir doğruya ya da eğriye olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa bu doğruya ya da eğriye, eğrinin bu koluna ait **asimptotu** denir.

Kısaca, **bir eğriye sonsuzda teğet olan bir doğruya ya da eğriye asimptot** denir.

**Düşey Asimptot:**

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan ya da sağdan limitlerinden en az birisi $+\infty$ ya da $-\infty$ ise, $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun **düşey asimptotu** denir.



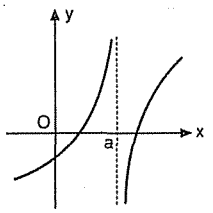

**Uyarı:**

Kesirli bir fonksiyonun paydasının köklerinde düşey asimptotlar vardır. Bu kökler;

**tek katlı kök** ise, **kelebek** durumu

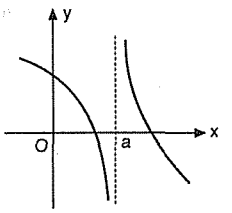
**çift katlı kök** ise, **baca** durumu olur.

**Örnek:**




$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

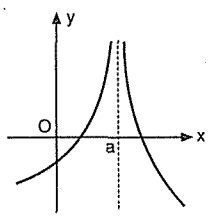



$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

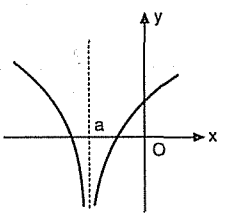
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Yukarıdaki şekillerde, $y = f(x)$ fonksiyonu için, **kelebek** durumu gösterilmiştir.

**Örnek:**




$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$




$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Yukarıdaki şekillerde, $y = f(x)$ fonksiyonu için, **baca** durumu gösterilmiştir.

**Yatay Asimptot:**

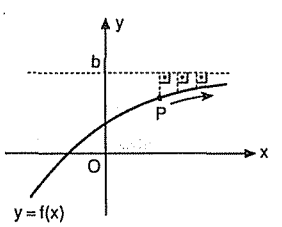
$y = f(x)$ fonksiyonu için,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ veya

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ise,

$y = b$ doğrusuna,

$y = f(x)$ fonksiyonunun **yatay asimptotu** denir.




**Örnek:**

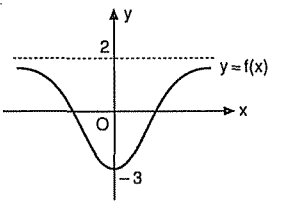
$$y = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

fonksiyonunun yatay asimptotunu bulalım.

**Çözüm:**

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1} = 2$

olduğundan $y = 2$ doğrusu yatay asimptottur.




**Eğik veya Eğri Asimptot:**

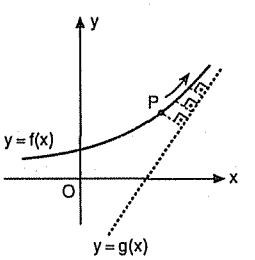
$y = f(x)$ eğrisi ve $y = g(x)$ doğrusu verilsin.

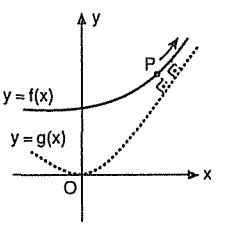
$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ veya

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ ise,

$y = g(x)$ doğrusuna $f(x)$ in **eğik asimptotu** denir.

Eğer; $y = g(x)$ in grafiği bir eğri ise, $y = g(x)$ eğrisine $f(x)$ in **eğri asimptotu** denir.




**Uyarı:**

1. Fonksiyonun grafiği, düşey asimptotları hiçbir zaman kesmez.
   Yatay ya da eğik veya eğri asimptotları ise kesebilir.

2. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde rasyonel bir fonksiyon verilsin. ($P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyondur.)

   i. Payın derecesi, paydanın derecesinden 1 fazla ise;

   $y = f(x) = ax + b + \frac{C}{Q(x)}$ biçiminde yazılabilir.

   Bu durumda,

   $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{C}{Q(x)} = 0$

   olacağından $y = ax + b$ doğrusu, fonksiyonun eğik asimptotu olur.

**ii.** Payın derecesi, paydanın derecesinden 2 fazla ise;

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{K(x)}{Q(x)}$ $\quad der[K(x)] < der[Q(x)]$

şeklinde yazılabilir.

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax^2 + bx + c)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{K(x)}{Q(x)} = 0$$

olacağından $y = ax^2 + bx + c$ eğrisi, fonksiyonun **eğri asimptotu** olur.

**Sonuç:**

Rasyonel fonksiyonlarda, payın derecesi, paydanın derecesinden büyük ise eğik veya eğri asimptot vardır. Bu asimptotları bulmak için; fonksiyonun payı, paydasına bölünür ve bölüm polinomu, f(x) in eğik ya da eğri asimptotunun denklemidir.

**Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizilmesi**

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek için, aşağıdaki adımları sırasıyla uygulamak kolaylık sağlar.

1. Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2. Fonksiyon periyodik ise periyodu bulunur. Belli bir aralıkta grafik çizildikten sonra gerekirse diğer aralıklarda eğri, periyoda göre tekrar ettirilir.
3. Fonksiyon R de tanımlı ise $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ limiti hesaplanarak uç noktaların durumu hakkında fikir edinilmiş olunur.
4. Varsa, asimptotlar bulunur.
5. Grafiğin eksenleri kestiği noktalar, varsa bulunur.
6. Fonksiyonun birinci türevi incelenerek, ekstremum noktaları bulunur.
7. Gerekirse fonksiyonun ikinci türevi incelenerek, büküm noktaları ve çukurluk yönü incelenir.
8. Elde edilen bütün değerler için değişim tablosu yapılır ve tabloya göre grafik çizilir.

**Not:**

Fonksiyonun çeşitine göre, yukarıdaki maddeler uygun bir şekilde azaltılabilir.

**Örnek:**

$y = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

**Çözüm:**

1. Fonksiyonun tanım kümesi,

   $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ değerleri dışında bütün reel sayılar için tanımlıdır.

   Dolayısıyla tanım kümesi: $R - \{-1, 1\}$ dir.

2. Eksenleri kestiği noktalar;

   $x = 0$ için $f(0) = -3$ olduğundan grafik y - eksenini $(0, -3)$ noktasında keser.

   $y = 0$ için, $\frac{x + 3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = -3$ olduğundan grafik x - eksenini $(-3, 0)$ noktasında keser.

3. Yatay ve düşey asimptotları,

   $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 3}{x^2 - 1} = 0$ olduğundan, $y = 0$ yatay asimptot

   $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ve $x = 1$ düşey asimptotlardır.

   $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x + 3}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x + 3}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

   $$\lim_{x \to -1^+} \frac{x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

   $$\lim_{x \to -1^-} \frac{x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

4. $y = f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun türevini inceleyerek, varsa ekstremum noktalarını bulalım.

   $$f'(x) = \frac{1.(x^2 - 1) - 2x.(x + 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

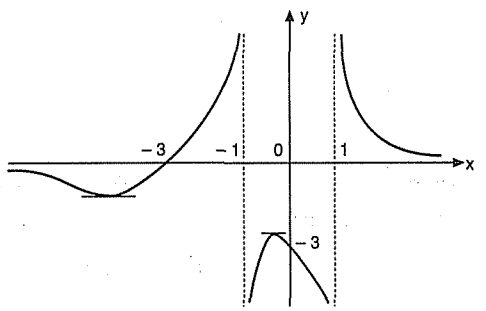
   $\Rightarrow x^2 - 1 - 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 1 = 0$ ve

   $\Delta = 6^2 - 4.1.1 = 32$, $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2}$ olduğundan

   $x_1 = -3 - 2\sqrt{2} \cong -5{,}8$ ve $x_2 = -3 + 2\sqrt{2} \cong -0{,}2$

   noktalarında yerel ekstremum değeri vardır.

Elde edilen bu bilgilere göre, $y = f(x)$ in grafiği aşağıdaki gibi olmalıdır.




**Uyarı:**

$k \neq 0$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere,

$$f(x) = k.(x-a).(x-b)^{2n+1}.(x-c)^{2n}$$

biçimindeki polinom fonksiyonu;

1. $x = a$ da x- eksinini büküm yapmadan keser.
2. $x = b$ de x- eksenini büküm yaparak keser.
3. $x = c$ de x- eksenine teğet olur.

**Örnek:**

$f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

**Çözüm:**

$y = f(x)$ polinom fonksiyon olduğundan her x reel sayısı için tanımlıdır. $T.K = R$

$x = 0$ için $f(0) = 4$ olduğundan, y- eksenini (0, 4) noktasında keser.

$y = 0$ için $(x+1)^3.(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 2$

olduğundan $(-1, 0)$ fonksiyonun büküm noktasıdır ve bu noktada fonksiyon x- eksenini büküm yaparak keser ve (2, 0) noktasında da fonksiyon x - eksenine teğet olur.

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x+1)^3.(x-2)^2] = -\infty$ ve

$\lim\limits_{x \to +\infty} [(x+1)^3.(x-2)^2] = +\infty$ dur.

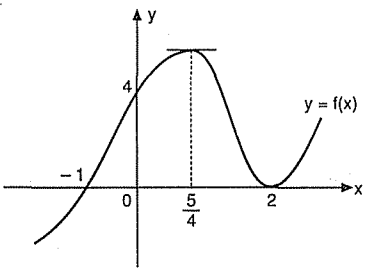
$f'(x) = 3.(x+1)^2.(x-2)^2 + 2(x-2).(x+1)^3 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)^2(3x-6+2x+2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)^2(5x-4) = 0$

olduğundan, $f'(x)$ in tek katlı kökleri olan $x = 2$ ve $x = \frac{5}{4}$ te $f(x)$ in ekstremum noktaları vardır.

Buna göre, f(x) in grafiği aşağıdaki gibi olur.




**Örnek: 1982 - ÖYS**

**$y = \frac{ax+2}{bx+c}$ eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası $(-2, 3)$ olduğuna göre, $\frac{a}{c}$ nin değeri nedir?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

**Çözüm:**

$bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{b}$ düşey asimptot

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax+2}{bx+c} = \frac{a}{b}$ olduğundan, $y = \frac{a}{b}$ yatay asimptot.

Bu iki doğrunun kesim noktası $(-2, 3)$ ise

$(x, y) = (-2, 3) = \left(-\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right)$

$\Rightarrow -\frac{c}{b} = -2$ ve $\frac{a}{b} = 3$ olmalıdır.

Buna göre, $\frac{a}{b}.\frac{b}{c} = 3.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{2}$ dir.

**Uyarı:**

$a > b$ olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

**irrasyonel fonksiyonunun eğik asimptotları:**

$y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ve $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ doğrularıdır.

**Örnek:**

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

**Çözüm:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{(x-2)^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} |x - 2| \quad \text{olduğundan}$$

f(x) fonksiyonunun eğik asimptotları;

$x \to +\infty$ için, $y = x - 2$ ve

$x \to -\infty$ için, $y = 2 - x$ doğrularıdır.

**Örnek:**

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

**Çözüm:**

1. f(x) fonksiyonu, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ şartını sağlayan x değerleri için tanımlıdır. O halde,
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ veya $x_2 = 3$ olduğundan,

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x-3$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

f(x) in tanım kümesi: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ olur.

2. Eğrinin asimptotları:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(x + 1 + \sqrt{(x-1)^2 - 4}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} (x + 1 + |x - 1|)$$

$x \to +\infty$ için, $y = x + 1 + x - 1 \Rightarrow y = 2x$ eğik asimptot

$x \to -\infty$ için, $y = x + 1 + 1 - x \Rightarrow y = 2$ yatay asimptot

3. Eğrenin eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ değeri, f(x) in tanım kümesinin elemanı olmadığından grafik y - eksenini kesmez.

$y = 0$ için, $x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)^2 = (-x - 1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow -4x = 4 \Rightarrow x = -1$$

$f(-1) = 0$ olduğundan, $(-1, 0)$ noktası grafik üzerindedir.

4. Fonksiyonun türevini incelersek,

$$f'(x) = 1 + \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

eşitliğinde içler - dışlar çarpımı yapıldıktan sonra iki tarafın karesi alınırsa

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -3 = 1$$

olduğundan $f'(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur. Tanımlı olduğu aralıkta (3 ün sağında ve $-1$ in solunda) $f'(x)$ in herhangi iki değerini bularak $f'(x)$ in işaretini tespit edelim.

$x = 4$ için $f'(4) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$ olduğundan, $x > 3$ için f(x) artan fonksiyondur.

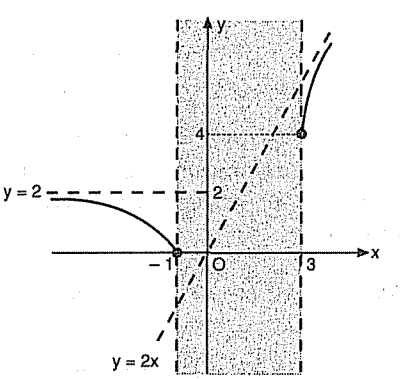
$x = -3$ için, $f'(-3) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$ olduğundan, $x < -1$ için f(x) azalan fonksiyondur.

5. $x = 3$ ve $x = -1$ için f(x) in değerlerini bulalım.

$f(3) = 3 + 1 + \sqrt{0} \Rightarrow f(3) = 4$ ve

$f(-1) = -1 + 1 + \sqrt{0} \Rightarrow f(-1) = 0$ dır.

Yukarıdan elde ettiğimiz bütün sonuçlardan yararlanarak f(x) in grafiğini aşağıdaki gibi çizebiliriz.




**Örnek:**

$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiğini $(-\pi, 2\pi)$ aralığında çizelim.

**Çözüm:**

**1.** Tanım Kümesi:

Paydayı sıfır yapan x değerlerinde tanımsız olduğundan,

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k.\pi \quad (k \in Z)$ olduğundan,

$T.K = (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ olur.

**2.** cos2x in periyodu: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ve

sinx in periyodu: $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ise

f(x) in periyodu: T = OKEK $(\pi, 2\pi) = 2\pi$ dir.

Dolayısıyla fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ veya $(0, 2\pi)$ aralığında inceleyerek grafiğin tamamını çizebiliriz.

**3.** $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{\sin(-x)} = -\frac{\cos 2x}{\sin x} = -f(x)$ olduğundan,

fonksiyon tek fonksiyondur. Dolayısıyla $(-\pi, \pi)$ aralığındaki parçası orijine göre simetriktir. O halde, eğriyi $(0, \pi)$ aralığında çizmek yeterli olacaktır.

**4.** Paydayı sıfır yapan noktalarda düşey asimptot olduğundan, $x = k.\pi \quad (k \in Z)$ doğruları düşey asimptotlardır.

**5.** $f'(x) = \frac{-2\sin 2x.\sin x - \cos x.\cos 2x}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x\ (2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x)}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ dir.

$x = \frac{\pi}{2}$ de f(x) in ekstremum değeri vardır ve

$x = \frac{\pi}{2}$ için $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ dir.

**6.** Eksenleri kestiği noktalar:

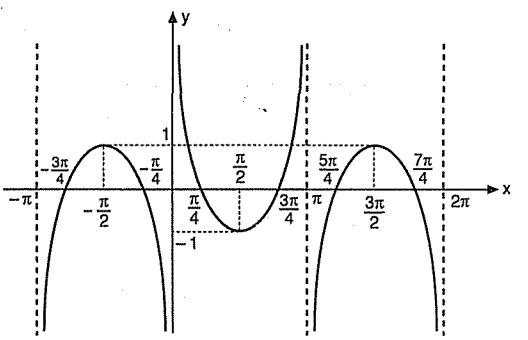
y = 0 için, cos2x = 0 eşitliğini sağlayan x değerleri

$x = \frac{\pi}{4}$ veya $x = \frac{3\pi}{4}$ olur.

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | − 0 | + | + |
| f(x) | $+\infty$ | 0 | −1 | 0 | $+\infty$ |

yerel minimum

Yukarıda elde edilen bütün sonuçlardan yararlanarak f(x) in grafiğini aşağıdaki gibi çizebiliriz.



# TÜREV ALMA

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = x.e^x + 1$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $e^e$ B) $e^e - 1$ C) $e^e + 1$

D) $e^e(1 + e)$ E) $e^e(1 - e)$

**2.** $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x + 1}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 5 B) −5 C) 15 D) −15 E) −30

**3.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{h}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 5 B) −5 C) 2 D) −2 E) 0

**4.** $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 7}$

**olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?**

A) 6 B) $\frac{49}{6}$ C) 1 D) $\frac{1}{6}$ E) 0

**5.** $f(x) = x^2.\sin x$

**olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\pi$ E) 0

**6.** $f(2x - 1) = x^2 - 6x + 4$

**olduğuna göre, $f'(1) + f(5)$ toplamı kaçtır?**

A) −7 B) −3 C) −1 D) 2 E) 6

**7.** $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2ax}$ ve $f'(1) = 0$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

**8.** $f(x) = \sin(\tan 2x)$

**olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?**

A) −1 B) 1 C) 2 D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\pi$

**9.** $g(x) = f(x^2 + 2x - 1) + (1 - x)^3 + \cos^2 3x$ fonksiyonu veriliyor.

**$f'(-1) = 1$ olduğuna göre, $g'(0)$ kaçtır?**

A) 3 B) −3 C) 0 D) 1 E) −1

**1-D** **2-E** **3-A** **4-B** **5-D** **6-A** **7-B** **8-C** **9-E**

**10.** $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^3$ fonksiyonu veriliyor.

**x = e için, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2e$ B) $2e - 3$ C) $-\frac{1}{e}$

D) $e - 3$ E) $\frac{2}{e}$

**11.**
$$y = z^3 - 2z + 1$$
$$z = u^2 + 3u$$
$$u = x^4 - 2$$

**olduğuna göre, y = f(x) fonksiyonunun x = −1 deki türevinin değeri kaçtır?**

A) −50 B) −40 C) −20 D) 0 E) 50

**12.** $f(x) = 4x^4 + 2$

**olduğuna göre, $(f^{-1})'(6)$ kaç olabilir?**

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

**13.** $x^3 + 3xy + y^3 = 1$

**olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x + y^2}{x^2 + y}$ B) $-\frac{x + y^2}{x^2 + y}$ C) $\frac{x^2 + y}{x + y^2}$

D) $-\frac{x^2 + y}{x + y^2}$ E) $\frac{3x^2 + y}{3x + y^2}$

**14.** $\ln(\sin x) + \ln(\cos y) = 1$

**olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) cosx.siny B) tanx.tany C) cotx.coty

D) cotx.tany E) tanx.coty

**15.** $y = \cos 2t$, $x = \sin^2 t$

**olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) −1 B) −2 C) sint D) cost E) sin2t

**16.** y = f(x) olmak üzere,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

**olduğuna göre, $f'(x)$ kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 0

**17.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2 - x| + 2$

**olduğuna göre, $f(1) + f'(3)$ toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**10-C** **11-B** **12-A** **13-D**

**14-C** **15-B** **16-C** **17-C**

**18.** $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 - 2x + 1|$

**olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?**

A) $-6$ B) $-5$ C) $-2$ D) 0 E) Yoktur

**19.** $f(x) = |x^2 - 4x| + [\![ x ]\!] + 7$

**olduğuna göre, $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ kaçtır?**

A) $-5$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 5

**20.** $f(x) = x^{1+x^2}$

**olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

**21.** $\frac{d^2}{dx^2}(\cos^2 4x)$

**aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-4\sin 8x$ B) $-32\cos 8x$ C) $8\sin^2 4x$

D) $4(\cos 4x + \sin 4x)$ E) $4(\cos 4x - \sin 4x)$

**22.** $f(x) = \cos^2 x$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{f'(x) - f'(\pi)}{x - \pi}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) 1 C) 0 D) $-2$ E) 2

**23.** $f(x) = \ln x + x^{17}$

**olduğuna göre, $f^{(18)}(1)$ kaçtır?**

A) $-17!$ B) $-16!$ C) $16!$

D) $17!$ E) $18! + 1$

**24.** $V_0$ ilk hızıyla aşağı doğru atılan bir cismin t zamanı içinde aldığı yol denklemi

$$S = V_0.t + \frac{1}{2}gt^2$$

dir. (g: yer çekimi ivmesi)

**$g \equiv 10$ m/sn$^2$ olmak üzere, $V_0 = 20$ m/sn hızla atılan bu cismin 3. saniyedeki hızı kaç m/sn dir?**

A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

**25.** $f(x) = \cos^2 3x$

**olduğuna göre, $\frac{d^{15}f}{dx^{15}}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-3.6^{15}$ B) $3.6^{15}$ C) $-3.6^{14}$

D) $3.6^{14}$ E) 0

**18-C** **19-B** **20-A** **21-B**

**22-D** **23-A** **24-A** **25-C**

# TÜREV ALMA

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = x.e^x + 1$

$\lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e)$ olduğundan,

$f'(x) = 1.e^x + e^x.x + 0 \Rightarrow f'(x) = e^x + x.e^x$

$f'(e) = e^e + e.e^e = e^e(e + 1)$ olur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \left[ \left(f(x) + f(-1)\right) . \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \right]$$

$= \left[f(-1) + f(-1)\right].f'(-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(-1) = 5$ ve

$f(-1) = -1 - 1 - 1 \Rightarrow f(-1) = -3$ olduğundan,

$\lim_{x \to -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x + 1} = (-3 + (-3)) . 5 = -30$ dur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ veriliyor.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2) - f(2 - h)}{h} = f'(2)$ dir.

$f'(x) = 4x - 3 \Rightarrow f'(2) = 5$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 7}$

$f'(x) = 6x - (-2) . x^{-3} + \frac{1}{3}(x^2 + 7)^{-\frac{2}{3}} . (2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 6x + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{3} . \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}}$

$\Rightarrow f'(1) = 6 + 2 + \frac{1}{3} . \frac{2}{4} \Rightarrow f'(1) = \frac{49}{6}$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = x^2.\sin x$

$f'(x) = 2x.\sin x + x^2.\cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 . \frac{\pi}{2} . \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 . \cos \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**6.** $f(2x - 1) = x^2 - 6x + 4$

$x = 3$ yazılırsa $f(5) = 3^2 - 6.3 + 4 = -5$ olarak bulunur.

$f(2x - 1)$ fonksiyonunun türevi $2.f'(2x - 1)$ olduğundan

$2.f'(2x - 1) = 2x - 6$ dır.

$x = 1$ yazılırsa,

$2.f'(1) = -4 \Rightarrow f'(1) = -2$ dir.

$f'(1) + f(5) = (-2) + (-5) = -7$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2ax}$ ise,

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 2ax)^{-\frac{3}{4}} \cdot (2x + 2a)$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2a)^{-\frac{3}{4}} \cdot (2 + 2a) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1 + 2a)^3}} \cdot (2 + 2a) = 0$

$\Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**8.** $f(x) = \sin(\tan 2x)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos(\tan 2x) \cdot (1 + \tan^2 2x) \cdot 2$

$\Rightarrow f'(\pi) = \cos(\underbrace{\tan 2\pi}_{0}) \cdot (1 + \underbrace{\tan^2 2\pi}_{0}) \cdot 2$

$\Rightarrow f'(\pi) = 2 \cdot \cos(0) \Rightarrow f'(\pi) = 2$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**9.** $g(x) = f(x^2 + 2x - 1) + (1 - x)^3 + \cos^2 3x$ ise,

$g'(x) = f'(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2) + 3(1 - x)^2 \cdot (-1)$
$+ 2\cos 3x \cdot (-3\sin 3x)$

$\Rightarrow g'(0) = f'(-1) \cdot 2 - 3 + 2\cos 0 \cdot (-3 \sin 0)$

$\Rightarrow g'(0) = 1 \cdot 2 - 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-3.0) \Rightarrow g'(0) = -1$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**10.** $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^3$ ise,

$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{3x^2}{x^3} \Rightarrow f'(e) = \frac{2 \ln e}{e} - \frac{3e^2}{e^3}$

$\Rightarrow f'(e) = \frac{2}{e} - \frac{3}{e} = -\frac{1}{e}$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** $y = z^3 - 2z + 1,\ z = u^2 + 3u,\ u = x^4 - 2$

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow f'(x) = (3z^2 - 2).(2u + 3).4x^3$

$x = -1$ için; $u = -1$ ve $z = -2$ olduğundan,

$f'(-1) = (3.4 - 2) \cdot (-2 + 3).4.(-1) = -40$ tır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.** **1. yol:**

$f(x) = 4x^4 + 2$ ise,

$f^{-1}(x) = \pm \sqrt[4]{\frac{x - 2}{4}}$ dir.

$(f^{-1})'(x) = \pm \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x - 2}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4}$

$(f^{-1})'(6) = \pm \frac{1}{16}$ bulunur.

**2. yol:**

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ kuralından,

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{16x_0^3}$ olur.

$f(x_0) = y_0 = 4x_0^4 + 2$ eşitliğinden,

$\Rightarrow 6 = 4x_0^4 + 2 \Rightarrow x_0 = \pm 1$ dir.

Bu değerler ($y_0 = 6$ ve $x_0 = \pm 1$) yukarıda elde edilen türev ifadesinde yerine yazılırsa

$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{16 \cdot (\pm 1)^3} = \pm \frac{1}{16}$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**13.** $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ ise

$F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0$ dır.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 + 3y}{3x + 3y^2} = -\frac{x^2 + y}{x + y^2}$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** $\ln(\sin x) + \ln(\cos y) = 1$ ise,

$F(x, y) = \ln(\sin x) + \ln(\cos y) - 1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\sin y}{\cos y}} = \cot x.\coty \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** $y = \cos 2t$ ve $x = \sin^2 t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{2\sin t.\cos t} = \frac{-2\sin 2t}{\sin 2t}$$

$= -2$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.** $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ ise

$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$

$y = f(x) = x$ olduğundan $f'(x) = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**17.** $f(x) = |2 - x| + 2$

$f(1) = |2 - 1| + 2 = 3$ bulunur.

$x = 3$ noktasında $|2 - x| = x - 2$ olduğundan

$f(x) = x - 2 + 2 \Rightarrow f(x) = x$ fonksiyonunun türevi alınır.

$x = 3$ için $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f'(3) = 1$ bulunur.

$f(1) + f'(3) = 3 + 1 = 4$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**18.** $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 - 2x + 1|$

$|x^2 - 2x + 1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$ dir.

O halde, $x = 1$ kritik nokta değildir. Buna göre,

$x = 1$ için, $f(x) = 4 - x^2 + (x-1)^2$ ve

$\Rightarrow f'(x) = -2x + 2(x-1)$

$\Rightarrow f'(1) = -2$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**19.** $f(x) = |x^2 - 4x| + [\![ x ]\!] + 7$

$x = \frac{5}{2}$ için $f(x) = 4x - x^2 + 2 + 7$

$f(x) = -x^2 + 4x + 9$ olur.

$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'\left(\frac{5}{2}\right) = -2.\frac{5}{2} + 4 = -1$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**20.** $f(x) = y = x^{1+x^2}$ olduğuna göre,

$\ln y = (1 + x^2)\ln x$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x.\ln x + \frac{1}{x}.(1 + x^2)$

$x = 1$ için, $y = 1^{1+1^2} = 1$ olduğundan,

$y'(1) = f'(1) = 2.1.\ln 1 + \frac{1}{1}.(1 + 1^2)$

$\Rightarrow f'(1) = 2.0 + 2 = 2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** $\frac{d^2}{dx^2}(\cos^2 4x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\cos^2 4x)\right]$

$= \frac{d}{dx}[2.\cos 4x.(-4.\sin 4x)]$

$= \frac{d}{dx}(-4.\sin 8x) = -32.\cos 8x$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**22.** $f(x) = \cos^2 x$ veriliyor.

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f'(x) - f'(\pi)}{x - \pi}$ limiti, $y = f'(x)$ fonksiyonunun $x = \pi$ deki türevi, yani $f''(\pi)$ dir.

Buna göre, $f'(x) = 2\cos x.(-\sin x) = -\sin 2x$

$\Rightarrow f''(x) = -2\cos 2x$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f'(x) - f'(\pi)}{x - \pi} = f''(\pi) = -2\cos 2\pi = -2$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**23.** $f(x) = \ln x + x^{17}$

ifadesinin 18. türevi alındığında $x^{17}$ nin türevi 0 olacaktır.

$g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$g'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$g^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4} = -\dfrac{3!}{x^4}$

$g^{(5)}(x) = \dfrac{24}{x^5} = \dfrac{4!}{x^5}$

.....

.....

.....

$g^{(18)}(x) = f^{(18)}(x) = -\dfrac{17!}{x^{18}}$

$\Rightarrow f^{(18)}(1) = -17!$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**24.** $S = S(t) = V_0.t + \dfrac{1}{2} gt^2$ ise,

$V(t) = \dfrac{dS(t)}{dt} = V_0 + g.t$ olur. O halde,

$V(3) = 20 + 10.3 \qquad (V_0 = 20,\ g = 10)$

$\Rightarrow V(3) = 50$ m/sn dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**25.** $f(x) = \cos^2 3x$ veriliyor.

$f'(x) = 2\cos 3x.(-3\sin 3x) \Rightarrow f'(x) = -3\sin 6x$

$f''(x) = -3.6.\cos 6x$

$f'''(x) = -3.6.(-6\sin 6x) \Rightarrow f'''(x) = 3.6^2 \sin 6x$

$f^{(4)}(x) = 3.6.6.(6\cos 6x) \Rightarrow f^{(4)}(x) = 3.6^3 \cos 6x$

$f^{(5)}(x) = 3.6^3.(-6\sin 6x) \Rightarrow f(5) = -3.6^4 \sin 6x$

mertebesi tek sayı olan türevlerde sin6x, çift sayı olan türevlerde cos6x çarpanı var.

Ayrıca türevin mertebesinin 4 ile bölümünden kalan 1 veya 2 olunca $-3$ çarpanı, diğer iki durumda 3 çarpanı var. 6 nın kuvvetleri ise türevin mertebesinden 1 eksik. Buna göre,

$\dfrac{d^{15} f(x)}{dx^{15}} = f^{(15)}(x) = 3.6^{14} \sin 6x$ olur. O halde,

$\dfrac{d^{15} f}{dx^{15}}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f^{(15)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3.6^{14} \sin\dfrac{3\pi}{2} = -3.6^{14}$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# TÜREV ALMA

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = (x-2)^3 - 3x^2 + 2x$ *fonksiyonu veriliyor.*

$$\lim_{x\to 1}[f(x) - f(1)] . \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-2$ C) 0 D) 1 E) 2

**2.** $y = f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

**limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f'(x)$ B) $2f'(x)$ C) $[f'(x)]^2$

D) $f(x).f'(x)$ E) $f'(x) - f(x)$

**3.** $$f(x) = \frac{4}{(x^2-3x)^2}$$

**olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?**

A) $-32$ B) $-16$ C) $-8$ D) 1 E) 4

**4.** $f(x) = x(x-1).(x-2) \ldots (x-49).(x-50)$

**olduğuna göre, $f'(48)$ kaçtır?**

A) 48! B) 2.48! C) 0

D) $-48!$ E) $-2.48!$

**1-A** **2-B** **3-D** **4-B**

**5.** $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$

**olduğuna göre, $f'(x).f(x)$ in değeri kaçtır?** $(a \in \mathbb{R})$

A) x B) $-x$ C) $2x$ D) $-2x$ E) 0

**6.** $f(x) = 5^{2x}.\ln x$

**olduğuna göre, $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 25 B) 10.ln3 C) 5 + ln5

D) 2ln5 E) 5

**7.** $f(x^2+3x-2) = x^3 + 2x^2 - 4$

**olduğuna göre, $f'(2)$ nin değeri kaçtır?**

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{5}{7}$

**8.** a, b, c reel sayı olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 1, & x \geq -1 \\ x^2 + bx + 1, & x < -1 \end{cases}$$

**olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?**

A) $-3$ B) $-2$ C) $-1$ D) 2 E) 3

**9.** $f(x) = x^2.e^{-x}$

**olduğuna göre, $f''(0)$ kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-2$

**5-B** **6-A** **7-D** **8-A** **9-A**

**10.** $f(x) = \frac{x}{2-x}$

**olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{-1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**11.** $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 1}$

**olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-5$ D) 5 E) $\frac{1}{2}$

**12.** $f(x) = \cos(\sin 2x)$

**olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**13.** $f(x) = \ln x$, $g(x) = \cos x$

**ise, $(fog)'(\frac{\pi}{4})$ kaçtır?**

A) 0 B) $-1$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\infty$

**10-E** **11-C** **12-C** **13-B**

**14.** $y = \cos 2t$

$t = u^2 + u$

$u = \sin x$

**olduğuna göre, $y = f(x)$ in $x = 0$ daki türevinin değeri kaçtır?**

A) $-2\sin 4$ B) $2\sin 4$ C) 0 D) 2 E) $-2$

**15.** $F(x, y) = e^x - e^y + xy = 0$

**fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi kaçtır?**

A) 1 B) 0 C) e D) $\frac{1}{e}$ E) $e^2$

**16.** $x = 2.\tan\theta$

$y = 3.\cot\theta$

**denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin değeri $\theta = \frac{\pi}{4}$ için kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 1 C) 0 D) $-1$ E) $-\frac{3}{2}$

**17.** $y = \sin^2 t$

$x = \sin 2t$

**eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için, $f''(0)$ ın değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

**14-C** **15-A** **16-E** **17-E**

**18.** $f(\theta) = \log(\tan\theta)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2.loge D) $\log\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**19.** $f(x) = 2^{\sin x} + e^{\cos x}$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 1 B) 0 C) $-1$ D) $\frac{1}{e}$ E) $1 + e$

**20.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}.\arccos x$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **nin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{6} - 1$ B) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1$ C) $\frac{-\sqrt{3}\pi}{6} - 1$

D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1$ E) $\frac{\pi}{6}$

**21.** $f(x) = \arcsin(\cos x)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**18-C** **19-C** **20-C** **21-A**

**22.** $f(x) = |2x-3|.x + x^2.[\![3x]\!] + x^4.\text{sgn}(x+1)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**23.** $\frac{d^3}{dx^3}(3x^2 + \cos x)$

**aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\sin x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$

D) $5 - \sin x$ E) $6 + \cos x$

**24.** t saniyede aldığı yol denklemi,

$S(t) = t^3 + 2t^2 + 5$ [metre]

**olan bir hareketlinin 5. saniyedeki ivmesi kaç m/sn² dir?**

A) 5 B) 15 C) 28 D) 30 E) 34

**25.** $f(x) = e^{e-3x}$

**olduğuna göre,** $3^{-41}.e^{-e}.f^{(41)}(-1)$ **kaçtır?**

A) $-3^{41}e^3$ B) $3^{41}e^3$ C) $-e^3$ D) $e^3$ E) $-1$

**22-D** **23-C** **24-E** **25-C**

# TÜREV ALMA

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = (x-2)^3 - 3x^2 + 2x$ veriliyor.

$$\lim_{x\to 1}[f(x) - f(1)] \cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

olur. O halde,

$f'(x) = 3(x-2)^2.1 - 6x + 2 \Rightarrow f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**2.** **1. yol:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$= f'(x) + f'(x) = 2f'(x)$ olur.

**2. yol:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{0} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralı uygulanırsa;

(Burada, değişken h olduğu için, türev h ye göre alınacaktır.)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x-h).(-1)}{1}$$

$$= \lim_{h\to 0}[f'(x+h) + f'(x-h)] = f'(x+0) + f'(x-0)$$

$= 2f'(x)$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $f(x) = \dfrac{4}{(x^2-3x)^2} \Rightarrow f(x) = 4.(x^2-3x)^{-2}$

$f'(x) = -8.(x^2-3x)^{-3}.(2x-3)$

$f'(2) = -8.(2^2-3.2)^{-3}.(2.2-3) = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = x(x-1).(x-2)\ ...\ (x-49).(x-50)$ veriliyor.

$$f'(48) = \lim_{x\to 48}\frac{f(x) - f(48)}{x-48} \quad (f(48) = 0)$$

$$\Rightarrow f'(48) = \lim_{x\to 48}\frac{x(x-1)(x-2)...(x-48)(x-49)(x-50)}{x-48}$$

$$= \lim_{x\to 48}[x(x-1)(x-2)\ ...\ (x-47)(x-49)(x-50)]$$

$= 48.47.46.\ ...\ .1.(-1).(-2)$

$= 2.48!$ olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$f'(x).f(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \sqrt{a^2-x^2}$$

$f'(x).f(x) = -x$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**6.** $f(x) = 5^{2x}.\ln x$

$f'(x) = 2.5^{2x}.\ln 5.\ln x + 5^{2x}.\dfrac{1}{x}$

$f'(1) = 2.5^2.\ln 5.\underbrace{\ln 1}_{0} + 5^2.1$

$f'(1) = 25$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $f(x^2 + 3x - 2) = x^3 + 2x^2 - 4$

$f(x^2 + 3x - 2)$ nin türevi;

$(2x+3).f'(x^2 + 3x - 2) = 3x^2 + 4x$ dir.

$x = 1$ yazılırsa; $5.f'(2) = 7 \Rightarrow$

$f'(2) = \dfrac{7}{5}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**8.** $a, b, c \in R$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 1, & x \geq -1 \\ x^2 + bx + 1, & x < -1 \end{cases}$$

$x = -1$ noktasında fonksiyonun sürekli olması için $-1$ noktadaki sağdan ve soldan limitlerinin ve $-1$ noktasında fonksiyonun aldığı değerin birbirine eşit olması gerekir.

$L^+ = (-1)^3 + a.(-1)^2 + 1 = a$

$L^- = (-1)^2 + b.(-1) + 1 = 2 - b$

$L^+ = L^- \Rightarrow a = 2 - b \Rightarrow a + b = 2$ ..... I

bulunur.

$x = -1$ noktasında türevli olması için sağdan ve soldan türevler birbirine eşit olmalıdır.

$-1^+ \rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f'(-1^+) = 3 - 2a$

$-1^- \rightarrow f(x) = x^2 + bx + 1$

$f'(x) = 2x + b$

$f'(-1^-) = -2 + b$

$f'(-1^+) = f'(-1^-)$

$3 - 2a = -2 + b$ ..... II

I ve II eşitlikleri ortak çözülürse;

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \quad a = 3 \text{ ve } b = -1 \text{ bulunur.}$$

Bu değerler sağdan türev ya da soldan türev ifadelerinden herhangi birisinde yerine yazılırsa $f'(-1) = -3$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** $f(x) = x^2.e^{-x}$ ise,

$f'(x) = 2x.e^{-x} + (-1).e^{-x}.x^2 = e^{-x}(2x - x^2)$

$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + (2 - 2x).e^{-x}$ olduğundan,

$f''(0) = -e^{-0}.0 + (2 - 0).e^{-0} = 2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ olduğundan

$y_0 = 1$ için $\dfrac{x}{2 - x} = 1 \Rightarrow x_0 = 1$ bulunur.

$f'(x) = \dfrac{1.(2 - x) - x.(-1)}{(2 - x)^2} \Rightarrow f'(1) = 2$

$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**11. 1. yol:**

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 1}$ fonksiyonu veriliyor.

$$f'(x) = \frac{(-1.1-1.3)x^2+(-1.1-1.(-2))x+(-1.3-(-1).(-2))}{(x^2 - x - 1)^2}$$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{-3 - 2}{(-1)^2} \Rightarrow f'(0) = -5$ tir.

**2. yol:**

Bölümün türevi kuralı ile türev almak uzun işlemler gerektiriyorsa, iki tarafın e tabanında logaritması alınarak da türev hesaplanabilir. O halde,

$$\ln f(x) = \ln \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 1}$$

$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(x^2 + 3x - 2) - \ln(x^2 - x - 1)$ eşitliğinde iki tarafın da türevi alınırsa,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 2} - \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1}$$

eşitliğinde $x$ yerine $x = 0$ yazılırsa,

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \frac{f'(0)}{2} = -\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow f'(0) = -5$ bulunur.

**3. yol** olarak, bölümün türevi kuralı ile sonuç bulunabilir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**12.** $f(x) = \cos(\sin 2x)$

$f'(x) = -\sin(\sin 2x).2\cos 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\sin 2\frac{\pi}{2}\right).2\cos 2\frac{\pi}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin 0.\cos\pi$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**13.** $f(x) = \ln x$, $g(x) = \cos x$

$(f \circ g)(x) = \ln(\cos x)$

$(f \circ g)'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** $y = \cos 2t$, $t = u^2 + u$, $u = \sin x$ ise,

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{du}.\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow f'(x) = -2.\sin 2t.(2u + 1).\cos x$

$x = 0$ için, $u = 0$ ve $t = 0$ olduğundan,

$f'(0) = -2\sin 0 . 1 . \cos 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** $F(x, y) = e^x - e^y + xy = 0$

$F'(x, y) = \frac{F_x}{F_y} = -\left(\frac{e^x + y}{-e^y + x}\right)$

$x = 0$ iken $e^0 - e^y + 0.y = 0 \Rightarrow e^y = 1 \Rightarrow y = 0$ olur.

$x = 0$, $y = 0$ yazılırsa;

$F'(0, 0) = -\left(\frac{e^0 + 0}{-e^0 + 0}\right) = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**16.** $x = 2\tan\theta$ .....(I)

$y = 3\cot\theta$

$y = 3.\cot\theta \Rightarrow y = 3.\frac{1}{\tan\theta}$ I. denklemden

$\tan\theta = \frac{x}{2}$ yazılırsa, $y = \frac{3}{\frac{x}{2}} \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ bulunur.

$f'(x) = y' = \left(\frac{6}{x}\right)' = -6.x^{-2}$ olur.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ise, $x = 2.\tan\theta$ denkleminden

$x = 2.\tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2$ bulunur.

Yerine yazılırsa

$f'(2) = -6.2^{-2} = -\frac{3}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17.** $y = \sin^2 t$ ve $x = \sin 2t$ ise

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\ \text{sint.cost}}{2\ \cos 2t} = \frac{\sin 2t}{2.\cos 2t}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}.\tan 2t = F(t)$

$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(F(t))$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{dF(t)}{dt}.\frac{dt}{dx}$ $\left(\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\right)$

$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{\cos^2 2t}\right).\frac{1}{2\ \cos 2t}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^3 2t}$ olur.

$x = 0$ için, $x = \sin 2t = 0$ olur.

$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ eşitliğinde $\sin 2t = 0$ için,

$\cos 2t = \pm 1$ olur. Buna göre,

$f''(0) = \frac{1}{2}.\frac{1}{(\pm 1)^3} \Rightarrow f''(0) = \pm\frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**18.** $f(\theta) = \log(\tan\theta)$

$f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = \frac{1 + \tan^2\theta}{\tan\theta} \cdot \log e$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan^2\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} \cdot \log e$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.\log e$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**19.** $f(x) = 2^{\sin x} + e^{\cos x}$

$f'(x) = \cos x\, 2^{\sin x}.\ln 2 - \sin x.e^{\cos x}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot 2^{\sin\frac{\pi}{2}} \cdot \ln 2 - \sin\frac{\pi}{2} \cdot e^{\cos\frac{\pi}{2}}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**20.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}.\arccos x$

$f'(x) = \frac{-2x}{2.\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x + \sqrt{1-x^2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x - 1$

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1$

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} - 1$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**21.** $f(x) = \arcsin(\cos x)$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{4}}} = -1$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**22.** $f(x) = |2x-3|.x + x^2.[\![3x]\!] + x^4.\text{sgn}(x+1)$

$x = \frac{1}{2}$ noktasında

$f(x) = (3-2x).x + x^2 + x^4$ olur.

$f'(x) = 3 - 4x + 2x + 4x^3$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 2.\frac{1}{2} + 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**23.** $\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(3x^2 + \cos x)\right]\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(6x - \sin x)\right]$

$= \frac{d}{dx}[6 - \cos x] = \sin x$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**24.** $S(t) = t^3 + 2t^2 + 5$ [metre]

Yolun zamana göre ikinci türevi ivmeye eşit olduğundan $S''(t)$ yi bulalım.

$S'(t) = 3t^2 + 4t$ ve

$a(t) = S''(t) = 6t + 4$ olur. Buna göre, hareketlinin 5. saniyedeki ivmesi:

$a(5) = 6.5 + 4 \Rightarrow a(5) = 34\ m/sn^2$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**25.** $f(x) = e^{e-3x} \Rightarrow f'(x) = -3e^{e-3x}$

$\Rightarrow f''(x) = -3.(-3)e^{e-3x}$

$\Rightarrow f'''(x) = (-3)^3 e^{e-3x}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\Rightarrow f^{(41)}(x) = (-3)^{41} e^{e-3x}$

olur. Buna göre,

$3^{-41}e^{-e}.f^{(41)}(-1) = 3^{-41}e^{-e}.(-3)^{41}.e^{e+3} = -e^3$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 3 (Çözümlü)

**1.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} - 1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\cos x - x - 1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 2 E) 3

**3.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{4x^2}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**4.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} - 2\sin x}{\sin x + \cos 5x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**5.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot 3x}{\cot x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-3$ B) $-\sqrt{3}$ C) 0 D) 1 E) 3

**6.** $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{e}$ B) e C) $e^2$ D) $-e$ E) $-\frac{1}{e}$

**7.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right).\sec(\pi + x)\right]$

**değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**8.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \arctan x}{\tan x + \arcsin x}$

**değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**1-D** **2-A** **3-C** **4-B** **5-E** **6-B** **7-D** **8-E**

**9.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+e^x}{3-e^{1+x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\dfrac{1}{e}$ B) $\dfrac{1}{e}$ C) $-1$ D) $1$ E) $-\infty$

**10.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\ln x}{1-x^2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) $-1$ C) $0$ D) $1$ E) $+\infty$

**11.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7+7^{1-x}}{7-7^{-x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $7$ B) $1$ C) $0$ D) $-7$ E) $-1$

**12.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x+2}{\frac{1}{x}-x^2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) $-3$ C) $0$ D) $3$ E) $+\infty$

**9-A** **10-C** **11-D** **12-B**

**13.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin 2x}{2x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $0$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $1$

**14.** $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3-\sqrt{9+2x+x^2}}{x+2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $3$ B) $-3$ C) $0$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $-\dfrac{1}{3}$

**15.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-\tan\frac{1}{x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $2$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

**16.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+2x}-x\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $0$ D) $1$ E) $2$

**13-D** **14-D** **15-E** **16-A**

**17.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) $+\infty$

**18.** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2} \cdot \tan\frac{3}{x}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 6 D) $\frac{1}{6}$ E) 1

**19.** $\lim_{x \to 0} (e^x + \sin x)^{\frac{2}{x}}$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) e C) $e^2$ D) $e^4$ E) $+\infty$

**20.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[ e^{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\tan x} \right]$

**değeri kaçtır?**

A) e B) $\frac{1}{e}$ C) $e^{\frac{2}{\pi}}$ D) 1 E) 0

**21.** $\lim_{x \to 0^+} \left(x^{x+x^2}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-e$ B) $-\frac{1}{e}$ C) $\frac{1}{e}$ D) 1 E) e

**22.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{2x-\pi}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{e}$ D) e E) $+\infty$

**23.** $\lim_{x \to \infty} (1 + x^2)^{\frac{2}{x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{2}{e}$ D) e E) $+\infty$

**24.** $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{cosec} x)^{\sin x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{e}$ B) e C) 0 D) 1 E) $+\infty$

**17-C** **18-A** **19-D** **20-A**

**21-D** **22-B** **23-A** **24-D**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 3 (Çözümleri)

**1.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}-1} = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)'}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}.x^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{6}.x^{-\frac{5}{6}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\cos x - x - 1} = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-\sin x - 1} = \frac{2}{-1} = -2 \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**3.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{4x^2}\right) = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\sin x}{8x}\right) = \frac{0}{0}, \text{ L' Hospital kuralı uygulanırsa;}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\cos x}{8}\right) = \frac{-1}{8} \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}-2\sin x}{\sin x + \cos 5x} = \dfrac{0}{0}$, L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-2\cos x}{\cos x - 5\sin 5x} = \frac{-2.\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{5\pi}{4}} = \frac{-2.\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 5.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

bulunur. $= -\dfrac{1}{3}$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot 3x}{\cot x} = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-3(1+\cot^2 3x)}{-(1+\cot^2 x)} = \frac{3}{1} = 3 \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**6.** $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty}$ belirsizlik durumu var.

$y = (x-1)^{\frac{1}{x-2}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ dir.

Her iki tarafın limitini alalım.

$$\lim_{x\to 2} \ln y = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} \cdot \ln(x-1)\right) \to \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right) \to \frac{0}{0}, \text{ L' Hospital kuralı}$$

uygulanırsa;

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1 \text{ olduğundan;}$$

$\lim\limits_{x\to 2} \ln y = \ln\left[\lim\limits_{x\to 2} y\right] = 1$ olur. Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}} = e^1 = e$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**7.** $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[ \left( x - \frac{\pi}{2} \right) . \sec(\pi + x) \right] = 0 . \infty$

$\sec(\pi + x) = \frac{1}{\cos(\pi + x)}$ yerine yazılırsa;

$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos(\pi + x)} = \frac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin(\pi + x)} = \frac{1}{-(-1)} = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**8.** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \arctan x}{\tan x + \arcsin x} = \frac{0}{0}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \frac{1}{1 + x^2}}{1 + \tan^2 x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1 + 1}{1 + 0 + 1} = 1$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** $\lim_{x \to \infty} \frac{3 + e^x}{3 - e^{1+x}} = \frac{\infty}{-\infty}$ belirsizliği olduğundan,

L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{-e^{1+x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{-e . e^x} = -\frac{1}{e}$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{1 - x^2} = \frac{\infty}{\infty}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-2x} = \frac{1 + 0}{-\infty} = 0$ dır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** $\lim_{x \to -\infty} \frac{7 + 7^{1-x}}{7 - 7^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 . 7^{1-x}}{-(-1) . 7^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7 . 7^{-x}}{-7^{-x}} = -7$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**12.** $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x + 2}{\frac{1}{x} - x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$ L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$= \lim_{x \to \infty} \frac{6x - 1}{\frac{-1}{x^2} - 2x} = \frac{\infty}{-\infty}$

L' Hospital kuralı bir kez daha uygulanırsa;

$= \lim_{x \to \infty} \frac{6}{\frac{2}{x^3} - 2} = \frac{6}{0 - 2} = -3$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** $L = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin 2x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$, L' Hospital kuralı uygulanırsa;

$L_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \sin 2x}{2}$; $x \to \infty$ için $-1 \le \sin 2x \le 1$

olduğundan $L_1$ limiti yoktur. Dolayısıyla, L' Hospital kuralından yararlanarak L limiti hesaplanamaz. O halde,

$L = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin 2x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{a}{\infty}$ $(-1 \le a \le 1)$

$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3-\sqrt{9+2x+x^2}}{x+2} = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralından;

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-\dfrac{2+2x}{2\sqrt{9+2x+x^2}}}{1} = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**15.** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x}-\tan\dfrac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$, L' Hospital kuralından;

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{-2}{x^2}\cos\dfrac{2}{x}}{\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\left(1+\tan^2\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1-2\cos\dfrac{2}{x}}{-3+\left(1+\tan^2\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{-1-2}{-3+1} = \frac{3}{2}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+2x} - x\right) = -\infty + \infty$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^3-2x^2}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{x^2+2x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x}{2x+2} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{2} = -2 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \infty - \infty$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0 \text{ dır.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**18.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2}\cdot\tan\dfrac{3}{x}\right) = \infty . 0$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan\dfrac{3}{x}}{\dfrac{2}{x}} = \frac{0}{0} \text{ olduğundan, L' Hospital kuralından}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-3}{x^2}\left(1+\tan^2\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\left(1+\tan^2\dfrac{3}{x}\right)}{2} = \frac{3}{2}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**19.** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + \sin x)^{\frac{2}{x}} = 1^{\infty}$

$y = (e^x + \sin x)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{2}{x}\ln(e^x + \sin x)$

eşitliğinde iki yanın limiti alınırsa,

$\lim\limits_{x\to 0} (\ln y) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0} y\right) = \infty . \ln 1 = \infty . 0$

$$\Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2.\ln(e^x+\sin x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2.\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}}{1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 4 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (e^x+\sin x)^{\frac{2}{x}} = e^4$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**20.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\tan x}=1^{\infty}$

$y=\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\tan x}\Rightarrow \ln y=\tan x.\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\tan x.\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)\right]$

$=\infty.\ln 1=\infty.0$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)}{\cot x}=\frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\ln y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2}{\pi}-\sin x}{\frac{2x}{\pi}+\cos x}{-(1+\cot^2 x)}$

$\Rightarrow \ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y\right)=1-\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^{1-\frac{2}{\pi}}$ olur. Buna göre,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[e^{\pi}.\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\tan x}\right]=e^{\frac{2}{\pi}}.e^{1-\frac{2}{\pi}}=e$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**21.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{x+x^2}\right)=0^0$ olduğundan,

$y=x^{x+x^2}\Rightarrow \ln y=(x+x^2).\ln x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y)=0.(-\infty)$ ise,

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}y\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x+x^2}}=\frac{-\infty}{\infty}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-(1+2x)}{(x+x^2)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x+x^2)^2}{-(x+2x^2)}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2(x+x^2).(1+2x)}{-(1+4x)}=0$

$\Rightarrow \ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}y\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{x+x^2}\right)=e^0=1$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**22.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{2x-\pi}=0^0$ olduğundan

$y=(\cos)^{2x-\pi}\Rightarrow \ln y=(2x-\pi)\ln\cos x$ ise,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\ln y)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[(2x-\pi).\ln\cos x]=0.(-\infty)$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\frac{-\infty}{-\infty}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{-2}{(2x-\pi)^2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\frac{\tan x}{2}.(2x-\pi)^2\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\ln y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y\right)=+\infty.0$

$\Rightarrow \ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\cot x}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2.2(2x-\pi)}{-2(1+\cot^2 x)}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{2x-\pi}=e^0=1$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**23.** $\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{2}{x}} = \infty^0$ olduğundan,

$y=(1+x^2)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{x}\ln(1+x^2)$

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\ln(1+x^2)\right) = 0.\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2.\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2.\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**24.** $\lim_{x\to 0^+}(\text{cosec}x)^{\sin x} = \infty^0$ olduğundan,

$y=(\text{cosec}x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \,.\, \ln\text{cosec}x$ ise,

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x \,.\, \ln\text{cosec}x) = 0.(+\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\text{cosec}x}{\text{cosec}x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(\text{cosec}x)'}{\text{cosec}x}}{(\text{cosec}x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\text{cosec}x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\text{cosec}x)^{\sin x} = e^0 = 1 \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 4 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + 1$

**fonksiyonunun x = 0 daki teğeti, Ox ekseniyle 60° lik açı yaptığına göre, a kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 1 E) 2

**2.** **f(x) = sin(cos4x) eğrisinin $x = \frac{\pi}{8}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?**

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**3.** $f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{11}{4}x - 3$ **eğrisinin x - eksenine paralel olan teğetlerinin, eğriye teğet oldukları noktaların apsislerinin toplamı kaçtır?**

A) $-\frac{8}{3}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

**4.** $y^2 + 4y = 3x + 3$

**denklemi ile verilen y = f(x) fonksiyonuna x = −1 apsisli noktadan çizilen teğetlerden birinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{8}$

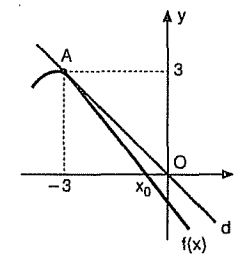
**1-B** **2-E** **3-C** **4-B**

**5.** $y = -x^2$ parabolüne üzerindeki $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ noktasından çizilen teğetin üzerinde değme noktasından itibaren |AB| = 10 birim olacak şekilde bir B noktası alınıyor.

**Buna göre, A ve B noktalarının ordinatları farkı kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

**6.** Şekilde, d doğrusu f(x) eğrisine A(−3, 3) noktasında teğettir.

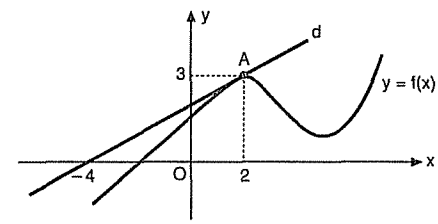



$g(x) = \frac{f(2-x)}{x-2}$

**olduğuna göre, g′(5) in değeri kaçtır?**

A) −3 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) 0 E) $\frac{2}{3}$

**7.**




Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. d doğrusu y = f(x) in A(2, 3) noktasındaki teğetidir.

**$g(x) = x^2.f(x)$ olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 14

**8.** **$y = e^{-x}$ eğrisinin orjinden geçen teğetinin eğimi kaçtır?**

A) −1 B) −2 C) −e D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{e}$

**5-E** **6-D** **7-E** **8-A**

**9.** $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ eğrisinin aşağıdaki noktaların hangisindeki teğeti $x + 3y = 4$ doğrusuna diktir?

A) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\right)$ C) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

**10.** $f(x) = y = x^3 - 4ax^2 + n$ eğrisinin $x = -1$ noktasındaki teğeti, A(3, 8) ve B(4, 4) noktalarından geçen doğruya dik olduğuna göre, a kaçtır?

A) $-\frac{11}{32}$ B) $\frac{11}{32}$ C) $\frac{1}{32}$ D) $-\frac{1}{32}$ E) $\frac{11}{34}$

**11.** $y < 0$ olmak üzere,

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinin $x = 3$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x - 4y = 25$ B) $3x + 4y = 25$

C) $4x - 3y = 25$ D) $4x + 3y = 25$

E) $3x + 4y = -7$

**12.** $y = 2x^2 - 6x + 5$ parabolünün $x = 1$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - 2y = 1$ B) $2y - x = 1$ C) $x - y = 1$

D) $y - x = 1$ E) $x + 2y = 1$

**13.** $f(x) = (3x + 1)^2$

fonksiyonuna $x = 1$ den çizilen teğet ile $x = 0$ dan çizilen teğetin kesiştiği noktanın apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**14.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ çemberine A(3, 2) noktasından çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 5 - x$ B) $y = 1 - 2x$ C) $y = x - 1$

D) $y = 2x - 1$ E) $y = 3 - 2x$

**15.** $y = -x^3$ eğrisine $x = 2$ noktasından çizilen teğetin, bu eğriyi kestiği noktanın apsisi kaçtır?

A) $-8$ B) $-4$ C) $-2$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

**16.** $y^2 = 6x$ eğrisinin (parabolünün) hangi noktasındaki teğeti, y - eksenini A(0, 3) noktasında keser?

A) $(1, \sqrt{6})$ B) $(2, 2\sqrt{3})$ C) $(3, 3\sqrt{2})$

D) $(4, 2\sqrt{6})$ E) $(6, 6)$

**9-D** **10-A** **11-A** **12-B** **13-A** **14-A** **15-B** **16-E**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 4 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + 1$ fonksiyonunun $x = 0$ daki teğeti Ox ekseniyle $60°$ lik açı yapıyorsa;

$f'(0) = \tan 60° = \sqrt{3}$ olur. Buna göre,

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2a$

$f'(0) = 2a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.** $f(x) = \sin(\cos 4x) \Rightarrow f'(x) = -4\sin 4x.\cos(\cos 4x)$ ve

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -4\sin\frac{\pi}{2}.\cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

olduğundan, $f(x)$ in $x = \frac{\pi}{8}$ deki normalinin eğimi

$$m_n = \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{-1}{-4} \Rightarrow m_n = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{11}{4}x - 3$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{11}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

olduğundan, $f(x)$ in x - eksenine paralel teğetlerinin (ekstremum noktalarındaki teğetlerinin) teğet oldukları noktaların apsisleri toplamı $-\frac{4}{3}$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $y^2 + 4y = 3x + 3 \Rightarrow y^2 + 4y - 3x - 3 = 0$ kapalı fonksiyonunun türevinin $x = -1$ noktasındaki değeri, bu noktadaki teğetin eğimini verir.

$$F'(x, y) = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{-3}{2y + 4} = \frac{3}{2y + 4} \text{ dir.}$$

$x = -1$ için $y^2 + 4y + 3 - 3 = 0$

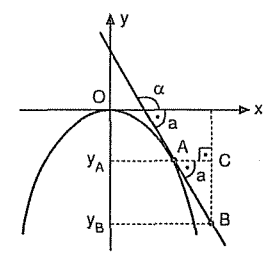
$y = 0$ veya $y = -4$ bulunur.

$y = 0$ için eğim $\frac{3}{2.0 + 4} = \frac{3}{4}$ veya

$y = -4$ için eğim $\frac{3}{2.(-4) + 4} = \frac{-3}{4}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.**




$A\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ noktasındaki teğetin (AB doğrusu) eğimi,

$\tan\alpha = f'\left(\frac{2}{3}\right)$ tür.

$f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$

$\tan\alpha = f'\left(\frac{2}{3}\right) = -2.\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$ olur.

Şekilden, $\tan a = -\tan\alpha \Rightarrow \tan a = \frac{4}{3}$ olur.

Buna göre,

$\tan a = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{4}{3}$ ise, $|BC| = 4x$ denilirse,

$|AC| = 3x$ ve $|AB| = 5x$ olur.

$|AB| = 5x = 10 \Rightarrow x = 2$ ve şekilden,

$y_A - y_B = |BC| = 4x \Rightarrow y_A - y_B = 4.2 = 8$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**6.** $g(x) = \dfrac{f(2-x)}{x-2}$ ise

$$g'(x) = \frac{-f'(2-x).(x-2) - f(2-x).1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow g'(5) = \frac{-f'(-3).3 - f(-3)}{9}$$

d doğrusunun denklemi f(x) in $x = -3$ noktasındaki teğetinin denklemidir.

(0, 0) ve (−3, 3) noktalarından geçen d doğrusunun denklemi $y = -x$ tir. Buna göre,

$f'(-3) = -1$ ve $f(-3) = 3$ değerleri yerine yazılırsa,

$g'(5) = \dfrac{-(-1).3-3}{9} = 0$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** d doğrusunun denklemi;

(−4, 0) ve (2, 3) noktalarından geçen doğru denklemidir.

d: $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ olur. $m_d = \dfrac{1}{2} = f'(2)$ dir.

$g(x) = x^2.f(x)$ ise,

$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x)$

$g'(2) = 2.2.f(2) + 2^2.f'(2)$ Şekilden, $(f(2) = 3)$

$g'(2) = 4.3 + 4.\dfrac{1}{2} = 14$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** $y = f(x) = e^{-x}$ eğrisinin, $x = a$ noktasındaki teğeti orjinden geçiyor olsun.

$x = a$ için $y = e^{-a}$ olduğundan $A(a, e^{-a})$ ve teğetin denklemi $y = kx$ olmak üzere, A noktası aynı zamanda teğetin de üzerindeki bir nokta olduğundan,

$y = kx \Rightarrow e^{-a} = k.a \Rightarrow k = \dfrac{e^{-a}}{a}$ dır.

Teğetin eğimi, $x = a$ daki türevin değerine eşit olacağından,

$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$ ve

$k = f'(a) \Rightarrow \dfrac{e^{-a}}{a} = -e^{-a} \Rightarrow a = -1$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$

$f'(x) = 2\sin x\cos x + 2.\sin 2x \Rightarrow f'(x) = 3\sin 2x$

f(x) in $x = a$ noktasındaki teğeti, $x + 3y = 4$ doğrusuna (d) dik olsun.

$f'(a) . m_d = -1$ olmalıdır. Buna göre,

$3.\sin 2a . \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$

$\Rightarrow \sin 2a = 1 \Rightarrow 2a = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow a = \dfrac{\pi}{4}$ olur.

$x = \dfrac{\pi}{4}$ yazılırsa $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin^2\dfrac{\pi}{4} - \cos\left(2.\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow y = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**10.** $f(x) = x^3 - 4ax^2 + n$ eğrisinin $x = -1$ noktasındaki teğetinin eğimi $f'(-1)$ dir.

$f'(x) = 3x^2 - 8ax \Rightarrow f'(-1) = 3 + 8a$ dır.

A(3, 8) ve B(4, 4) noktalarından geçen doğrunun denklemi; $g(x) = -4x + 20$ dir.

f(x) in $x = -1$ noktasındaki teğetinin, g(x) doğrusuna dik olması için; eğimlerinin çarpımı $-1$ olmalıdır.

$f'(-1).m_g = -1$

$(3 + 8a).(-4) = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{11}{32}$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**11.** $x^2 + y^2 = 25$ denkleminde

$x = 3$ için, $9 + y^2 = 25 \Rightarrow y = -4$ $(y < 0)$ olur.

f(x, y) eğrisinin (çemberin), A(3, −4) noktasındaki teğetinin

eğimi $f'(3)$:

$2x + 2y.y' = 0 \Rightarrow f'(x, y) = -\dfrac{x}{y}$ ise,

$x = 3$ ve $y = -4$ için, $f'(3) = \dfrac{3}{4}$ tür.

O halde, teğetin denklemi:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - (-4) = \dfrac{3}{4}(x - 3)$

$\Rightarrow 3x - 4y = 25$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** $y = f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ ve $x = 1$ için, $y = f(1) = 1$ ise

$A(1, 1)$ noktasındaki normalin eğimi $(m_n)$

$f'(x) = 4x - 6 \Rightarrow f'(1) = -2$ olduğundan,

$m_n = \dfrac{-1}{f'(1)} \Rightarrow m_n = \dfrac{1}{2}$ dir.

O halde, $A(1, 1)$ noktasındaki normalin denklemi:

$y - f(1) = m_n(x - 1) \Rightarrow y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$

$\Rightarrow 2y - x = 1$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** $f(x) = (3x + 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 6(3x + 1)$ olur.

$x = 1$ deki teğetinin eğimi $f'(1) = 24$ tür.

$x = 1$ için $f(1) = 16$ olduğundan $x = 1$ noktasındaki teğetin denklemi; $y - 16 = 24.(x - 1)$ dir. ..... (I)

$f(x)$ in $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğimi $f'(0) = 6$ dır.

$x = 0$ için $f(0) = 1$ olduğundan; $x = 0$ noktasındaki teğetin denklemi; $y - 1 = 6.(x - 0)$ dır. ..... (II)

(I) ve (II) denklemleri ortak çözülürse,

$24(x - 1) + 16 = 6x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, bu iki teğetin kesim noktasının apsisidir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ ise,

$2(x - 2) + 2(y - 3).y' = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x - 2}{y - 3}$ ve $A(3, 2)$ için,

$x = 3$ ve $y = 2$ değerleri yerine yazılırsa,

$f'(3) = -\dfrac{3 - 2}{2 - 3} \Rightarrow f'(3) = 1$ olduğundan;

$A(3, 2)$ noktasındaki normalin eğimi,

$m_n = \dfrac{-1}{f'(3)} \Rightarrow m_n = -1$ ve normalin denklemi:

$y - 2 = -1.(x - 3) \Rightarrow y = 5 - x$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $y = f(x) = -x^3$ ve $x = 2$ noktasının ordinatı

$y = f(2) = -8$ ve $f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(2) = -12$

olduğundan, $A(2, -8)$ noktasındaki teğetin denklemi

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 8 = -12(x - 2)$

$\Rightarrow y = 16 - 12x$ olur.

$y = -x^3$ ve $y = 16 - 12x$ doğrusunun (teğetin) kesiştikleri noktayı bulmak için ikisinin denklemini birbirine eşitlersek,

$y = -x^3 = 16 - 12x \Rightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$ olur.

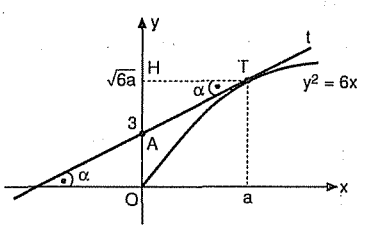
$x = 2$ de teğet olduklarından elde edilen bu denklemin kökleri; $x_1 = x_2 = 2$ ve $x_3$ olmak üzere;

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -4$ bulunur.

(Veya kökler çarpımından da $x_1.x_2.x_3 = -16$ eşitliğinden $x_3 = -4$ olur.)

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**16.**




$y^2 = 6x$ eğrisinin $T(a, \sqrt{6a})$ noktasındaki teğeti y - eksenini $(0, 3)$ noktasında kesiyor olsun.

$y^2 = 6x \Rightarrow 2y.y' = 6 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{y}$ olur.

$x = a$ için $y = \sqrt{6a}$ olduğundan teğetin eğimi,

$f'(a) = \dfrac{3}{\sqrt{6a}}$ dır.

Yukarıdaki şekilden, ATH üçgeninde $\tan\alpha$ nın değeri yazılırsa,

$\tan\alpha = \dfrac{|AH|}{|HT|} = f'(a)$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6a} - 3}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{6a}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6a} - 3}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{6a} - 6 = \sqrt{6a}$

$\Rightarrow \sqrt{6a} = 6$

$\Rightarrow a = 6$ dır.

$a = 6$ için, $y^2 = 6.6 \Rightarrow y = 6$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 5 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 4$

**fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde artandır?**

A) (0, 2) B) (1, 2) C) (– 2, 2)

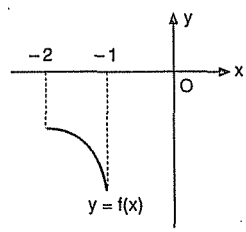
D) (2, 4) E) (1, 3)

**2.** **f(x) fonksiyonu (a, b) aralığında negatif tanımlı azalan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta azalan bir fonksiyondur?**

A) $-f(x)$ B) $\frac{1}{f(x)}$ C) $f^2(x)$

D) $f^3(x)$ E) $f^4(x)$

**3.** Yandaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




**Buna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artandır?**

A) $x^2 + f(x)$ B) $f(x) - x^3$ C) $f^2(x)$

D) $x^{-2}.f(x)$ E) $\frac{x}{f(x)}$

**4.** $f(x) = ax^3 - x^2 + 3ax + a - 1$

**fonksiyonu daima artan olduğuna göre, a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $a < 0$ B) $a > \frac{1}{3}$ C) $\frac{-1}{3} < a < 0$

D) $a < \frac{-1}{3}$ E) $a > \frac{-1}{3}$

**5.** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 1}}$

**fonksiyonunun ekstremum noktasının apsisi kaçtır?**

A) $\frac{-\sqrt{7} - 2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{7} - 2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

**6.** $f(x) = x^2 . e^{2-x}$

**fonksiyonunun ekstremum değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**7.** $f(x) = \frac{m}{2}x^2 - (m + 1)x + m^2 - 4$

**fonksiyonunun $x = \frac{3}{2}$ noktasında bir yerel minimum değeri olduğuna göre, m kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**8.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$

**fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) Yerel maksimum değeri – 1 dir.
B) Yerel minimum değeri 3 tür.
C) $x > 3$ için fonksiyon azalandır.
D) $-1 < x < 2$ için fonksiyon artandır.
E) Yerel maksimum değeri 4 tür.

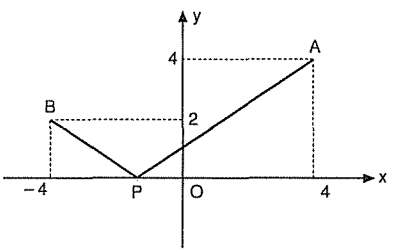
**1-D** **2-D** **3-C** **4-B** **5-B** **6-C** **7-E** **8-E**

**9.** $x^2 - (m-1)x + (m+2) = 0$

**denkleminde m nin hangi değeri için köklerin kareleri toplamı en az olur?**

A) 1 B) 2 C) 0 D) −1 E) −3

**10.**




Yukarıdaki şekilde P noktası x ekseni üzerinde ve [−4, 4] aralığında bir noktadır.

**|BP| + |AP| toplamının minimum değeri kaçtır?**

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) $4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

**11.** $f: [-1, 4] \to R$,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

**fonksiyonunun en büyük değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 4 D) 16 E) 20

**12.** **Taban yarıçapı 2 cm ve yüksekliği 6 cm olan bir dik koninin içine yerleştirilebilecek en büyük hacimdeki silindirin yüksekliği kaç cm dir?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

**13.** $f(x) = x.\sin x + \cos x$

**fonksiyonunun yerel minimum noktalarından biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ B) (0, 1) C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

D) $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ E) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**14.** $4x^2 + y^2 = 4$

**elipsinin içine çizilecek olan maksimum alanlı dikdörtgenin uzun kenarı ile kısa kenarı arasındaki fark kaç birimdir?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) 1

**15.** $f(x) = x^x$

**eğrisinin minimum noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) −1 C) ln2 D) $\frac{1}{e}$ E) e

**16.** **Yarım daire içine bir kenarı çap üzerinde olan maksimum alanlı bir dikdörtgen çizilirse, dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına oranı kaç olur?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**9-B** **10-B** **11-E** **12-C**

**13-B** **14-B** **15-D** **16-C**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 5 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 4$ fonksiyonunun artan olduğu aralıkta $f'(x) > 0$ dır. Buna göre

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 > 0 \Rightarrow (3x - 5).(x - 1) > 0$

| x | $-\infty$ | | 1 | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | | Artan | | Azalan | | Artan | |

olduğundan; $y = f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$ aralığında artandır. O halde, seçeneklerde bu kümenin alt kümesi olan $(2, 4)$ aralığında $y = f(x)$ artandır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**2.** $x \in (a, b)$ için $y = f(x)$ fonksiyonu negatif tanımlı ve azalan ise, $f(x) < 0$ ve $f'(x) < 0$ dır.

Buna göre, seçeneklerde türevi negatif olan fonksiyon;

A) $[-f(x)]' = -f'(x) > 0$

B) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} > 0$

C) $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) > 0$

D) $[f^3(x)] = 3f^2(x)f'(x) < 0$, $f^3(x)$ azalandır.

E) $[f^4(x)]' = 4f^3(x)f'(x) > 0$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu, negatif tanımlı (eğri $x-$ ekseninin altında) ve azalandır. O halde, $f(x) < 0$ ve $f'(x) < 0$ dır.

Buna göre, seçeneklerde türevi pozitif olan fonksiyon

A) $[x^2 + f(x)]' = 2x + f'(x) < 0$

B) $[f(x) - x^3]' = f'(x) - 3x^2 < 0$

C) $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) > 0$, $f^2(x)$ artandır.

D) $[x^{-2}.f(x)]' = -2x^{-3}f(x) + x^{-2}f'(x) < 0$

E) $\left[\frac{x}{f(x)}\right]' = \frac{1.f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} < 0$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = ax^3 - x^2 + 3ax + a - 1$ fonksiyonu daima artan ise, türevi daima pozitiftir. O halde,

$f'(x) = 3ax^2 - 2x + 3a > 0$ olması için,

$3a > 0$ ve

$\Delta = (-2)^2 - 4.3a.3a < 0$

$\Rightarrow (2 - 6a)(2 + 6a) < 0$ olmalıdır.

| a | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | 0 | | $\frac{1}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Δ | | − | 0 | + | | + | 0 | − |

Yukarıdaki tablodan, $3a > 0 \Rightarrow a > 0$ ve $\Delta < 0$ şartını sağlayan a değerlerinin en geniş aralığı $a > \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 1}}$ ise,

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.(x^2+1)}{(\sqrt{x+1})^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{x+1} = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}$$

$\Rightarrow 4x(x + 1) = x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4.3.(-1) = 28$ olduğundan,

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2.3} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$f(x)$ fonksiyonu $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ için tanımlı olduğundan $y = f(x)$ in ekstremum noktasının apsisi $\frac{\sqrt{7} - 2}{3}$ tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**6.** $f(x) = x^2e^{2-x}$ ise,

$f'(x) = 2xe^{2-x} + (-1).e^{2-x}x^2 = 0$

$\Rightarrow e^{2-x}(2x - x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = 2$ olduğundan,

f(x) in ekstremum değerlerinin toplamı:

$f(x_1) + f(x_2) = f(0) + f(2)$

$= 0.e^2 + 2^2.e^{2-2}$

$= 4$ tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** $f(x) = \frac{m}{2}x^2 - (m+1)x + m^2 - 4$

fonksiyonunun $x = \frac{3}{2}$ de yerel minimumu olduğuna göre, $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ dır. O halde,

$f'(x) = mx - m - 1 \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = m.\frac{3}{2} - m - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$ dir.

**2. Yol:**

$y = f(x)$ fonksiyonu 2. dereceden (parabol) olduğu için, tepe noktasının apsisi için en küçük değerini alır.

Buna göre,

$x = r = -\frac{b}{2a}$ ise, $\frac{3}{2} = -\frac{-(m+1)}{2.\frac{m}{2}}$

$\Rightarrow 3m = 2m + 2 \Rightarrow m = 2$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ fonksiyonun türevini inceleyelim.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | | ↗ | Yerel maksimum | ↘ | Yerel minimum | ↗ |

$f(-1) = -1 - 3 + 9 - 1 = 4$ yerel maksimum değeri

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.** $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$

*denkleminin köklerinin kareleri toplamı:*

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\Rightarrow f(m) = \left[-\frac{-(m-1)}{1}\right]^2 - 2.\frac{m+2}{1}$

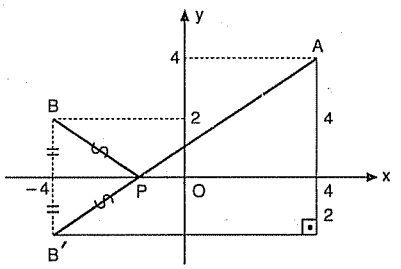
$\Rightarrow f(m) = m^2 - 2m + 1 - 2m - 4$

$\Rightarrow f(m) = m^2 - 4m - 3$

$\Rightarrow f'(m) = 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2$ için, f(m) nin yani $x_1^2 + x_2^2$ değeri en az olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.**




**1. Yol:**

A, P ve $B'$ noktaları doğrusal olmak üzere, P(x, 0) noktası şekildeki konumda olduğunda,

$|AP| + |BP| = |AP| + |PB'|$ toplamı en az olur.

Buna göre, bu toplamın en küçük değeri,

$|AB'| = \sqrt{(4+4)^2 + (4+2)^2} = 10$ birimdir.

**2. Yol:**

P noktasının apsisi x olsun.

$|BP| + |AP| = \sqrt{(x+4)^2 + 2^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 4^2}$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x+20}} + \dfrac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+20}} = \dfrac{-(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+32}}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20} = \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+32}$

eşitliğinde içler-dışlar çarpımı yapılıp elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$3x^2 + 40x + 48 = 0 \Rightarrow (3x+4)(x+12) = 0$

$\Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$ bulunur.

$x = -12 \notin [-4, 4]$ olduğundan $x = -\dfrac{4}{3}$ te f(x) fonksiyonu en küçük değerini alır.

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\left(4-\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2} + \sqrt{\left(4+\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64+36}{9}} + \sqrt{\frac{16\,.\,16 + 9\,.\,16}{9}}$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{4\,.\,5}{3} = 10 \text{ birimdir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** f: $[-1, 4] \to R$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ise,

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = 2$ dir.

$f''(x) = 6x - 6$ ikinci türevi; $x_1 = 0$ için $f''(0) = -6$ negatif, $x_2 = 2$ için $f''(2) = 6$ pozitif olduğundan, $x_1 = 0$ da f(x) in yerel maksimum değeri vardır.

(Birinci türevin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta yerel maksimum noktasıdır.)

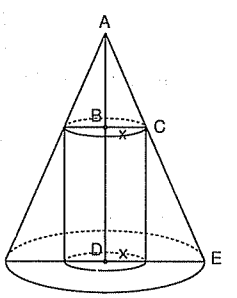
$x = 0$ için fonksiyonun yerel maksimum değeri $f(0) = 4$ tür. Fakat fonksiyonun $[-1, 4]$ aralığındaki en büyük değeri sorulduğundan; $f(-1)$ ve $f(4)$ değerlerini de bulmamız gerekir.

$f(-1) = -1 - 3 + 4 \Rightarrow f(-1) = 0$

$f(4) = 4^3 - 3.4^2 + 4 \Rightarrow f(4) = 20$ (en büyük değer)

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**12.** Silindirin taban dairesinin yarıçapı x cm, yüksekliği de y cm olsun.




$|AD| = 6$ cm

$|DE| = 2$ cm veriliyor.

Silindirin hacmi:

$V(x, y) = (\pi x^2).y$ dir.

Burada, y nin değerini x türünden yazalım.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ olduğundan,

$\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \dfrac{6-y}{6} = \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow y = 6 - 3x$ olur.

Bulunan bu değer, hacim formülünde yerine yazılırsa,

$V(x) = (\pi x^2).(6 - 3x) \Rightarrow V(x) = 3\pi(2x^2 - x^3)$

$\Rightarrow V'(x) = 3\pi(4x - 3x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = \dfrac{4}{3}$ tür.

$V''(x) = 3\pi(4 - 6x) \Rightarrow V''(0) > 0$ olduğundan $x_1 = 0$ için V(x) in değeri en küçük,

$V''\left(\dfrac{4}{3}\right) = 3\pi.(-4) < 0$ olduğundan $x_2 = \dfrac{4}{3}$ için V(x) in değeri en büyük olur. Buna göre, silindirin yüksekliği $y = 6 - 3.\dfrac{4}{3} = 2$ cm dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**13.** $f(x) = x.\sin x + \cos x$ ise,

$f'(x) = 1.\sin x + x.\cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow x.\cos x = 0$

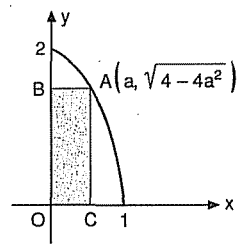
$\Rightarrow x = 0$ veya $\cos x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \quad (k \in Z)$

$f'(x) = x.\cos x \Rightarrow f''(x) = \cos x - x\sin x$ ve $x = 0$ için, $f''(0) = 1 > 0$ olduğundan $x = 0$ yerel minimum noktasının apsisidir. $x = 0$ için $f(0) = 1$ yerel minimum noktasının ordinatıdır. Buna göre, $f(x)$ in yerel minimum noktalarından birisi $(0, 1)$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**14.** Denklemi $4x^2 + y^2 = 4$ olan elips x ve y eksenlerine göre simetrik olduğundan sadece birinci bölgedeki parçasından yararlanarak problemin çözümünü yapabiliriz.




O halde, A noktasının apsisine $x = a$ dersek, ordinatı (y)

$4a^2 + y^2 = 4 \Rightarrow |y| = \sqrt{4 - 4a^2}$ ve birinci bölgede $y > 0$ olduğundan $\sqrt{4 - 4a^2}$ dir.

Buna göre, $A(ABOC) = f(a) = a.\sqrt{4 - 4a^2}$ olur.

$$f(a) = \sqrt{4a^2 - 4a^4} \Rightarrow f'(a) = \frac{8a - 16a^3}{2\sqrt{4a^2 - 4a^4}} = 0$$

$$\Rightarrow 8a(1 - 2a^2) = 0$$

olduğundan, $a = 0$ veya $a = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ veya $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir.

A noktasının apsisi pozitif olduğundan $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

Bu durumda problemde istenilen şartları sağlayan dikdörtgenin kenar uzunlukları;

$2.|AB| = 2a = \sqrt{2}$ ve

$2|AC| = 2\sqrt{4 - 4a^2} = 2.\sqrt{4 - 4.\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ dir.

Dolayısıyla bu dikdörtgenin kenar uzunluklarının farkı $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** $f(x) = y = x^x \Rightarrow \ln y = x.\ln x$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1.\ln x + \frac{1}{x}.x \Rightarrow y' = y(1 + \ln x)$$

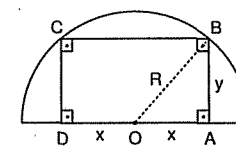
$$\Rightarrow f'(x) = x^x(1 + \ln x) = 0$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \quad (x^x \neq 0)$

$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ dir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**16. 1. yol:**




$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$ olur.

$A(ABCD) = f(x, y) = 2xy$

$\Rightarrow f(x) = 2x.\sqrt{R^2 - x^2}$

$\Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x^2R^2 - x^4}$ olur.

O halde, $f'(x) = 2.\frac{2xR^2 - 4x^3}{2\sqrt{x^2R^2 - x^4}} = 0$

$\Rightarrow 2xR^2 - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow 2x(R^2 - 2x^2) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ olur.

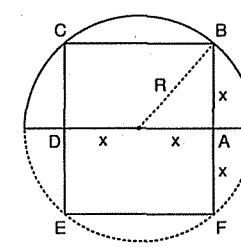
$y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{2}}$

olduğuna göre; dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğunun, kısa kenarının uzunluğuna oranı

$\frac{2x}{y} = 2$ olur. $\left(x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$

**2. yol:**

Bir daire içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgen karedir. Buna göre, yandaki şekilden, BCEF bir kare ise, ABCD dikdörtgeninin uzun kenarının uzunluğunun kısa kenarının uzunluğuna oranı 2 olur.




**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 6 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = mx^4 + nx^2 + 2x + 2$

**eğrisinin dönüm** (büküm) **noktası A(1, −1) olduğuna göre, m kaçtır?**

A) 5 B) 5 C) 4 D) 3 E) 1

**2.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 - 7x + 3$

**fonksiyonunun konveks (dış bükey) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, 3)$ B) $(3, \infty)$ C) $(-\infty, 0)$

D) $(0, \infty)$ E) $(0, 3)$

**3.** $y = x^4 + ax^3 + 6x^2 + 2$

**fonksiyonunun dönüm noktasının olmaması için a nın en büyük tamsayı değeri kaç olmalıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**4.** $y = x^4 + ax^2 + bx - 2$

eğrisi üzerinde apsisi $x = -1$ olan nokta dönüm (büküm) noktasıdır.

**Fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi −1 olduğuna göre, b nin değeri kaçtır?**

A) −6 B) −7 C) −8 D) −9 E) −10

**5.** a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere,

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6ax - 24bx + 7$

**fonksiyonunun ekstremum noktalarından birinin apsisi, dönüm noktasının apsisinin iki katı olduğuna göre, a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a = b$ B) $a = 2b$ C) $a = 2\sqrt{b}$

D) $a = 3\sqrt{b}$ E) $a = -4b$

**6.** $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 4$

**fonksiyonunun grafiği için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $x = 0$ bir bağıl ekstremum noktasının apsisidir.

B) $x > 0$ için fonksiyon artandır.

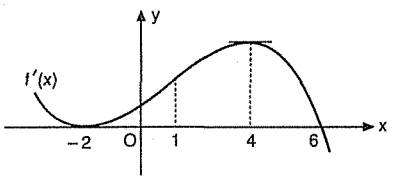
C) $x = 1$ dönüm noktalarından birinin apsisidir.

D) (1, 2) aralığındaki x değerleri için eğri konvekstir.

E) (2, 3) aralığındaki x değerleri için eğri konvekstir.

**1-E** **2-D** **3-C** **4-D** **5-E** **6-D**

**7.**

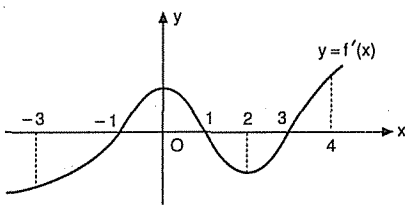



Yukarıda III. dereceden bir fonksiyonun birinci türevinin grafiği verilmiştir.

**Bu grafiğe göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $x = 6$ da $f(x)$ in yerel maksimumu vardır.
B) $x = 1$, $f'(x)$ in dönüm noktasının apsisidir.
C) $x = 4$ te $f'(x)$ in yerel maksimumu vardır.
D) $x = -2$ de $f(x)$ in yerel minimumu vardır.
E) $x = -2$ de $f'(x)$ in yerel minimumu vardır.

**8.**

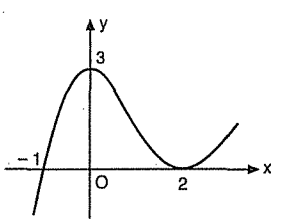



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

**Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $x > 3$ için $f(x)$ fonksiyonu artandır.
B) $y = f(x)$ fonksiyonun yerel maksimum noktasının apsisi, $x = 1$ dir.
C) $f''(-3) < 0$
D) $f''(4) > 0$
E) $2 < x < 3$ için $f(x)$ fonksiyonu azalandır.

**9.** Yandaki şekil 3. dereceden bir f(x) fonksiyonun *grafiğidir.*

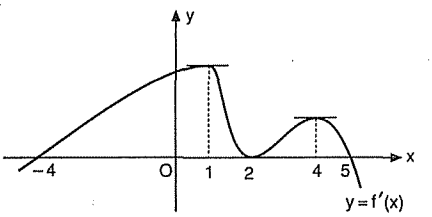



**Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $x = 2$ için $f''(2) > 0$ dır.
B) $x = 2$ için $f'(x) = 0$ dır.
C) $x = 2$, $f(x)$ in iki katlı bir köküdür.
D) $x = 1$ için $f'(x) > 0$ dır.
E) $x = -1$ için $f''(-1) < 0$ dır.

**7-D** **8-C** **9-D**

**10.**

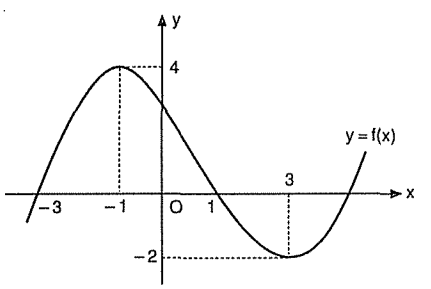



Yukarıda $y = f(x)$ *fonksiyonunun türevinin grafiği* verilmiştir.

**Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $f''(-4) = 0$ B) $f''(1) < 0$ C) $f''(2) = 0$
D) $f'(6) > 0$ E) $f''(3) < 0$

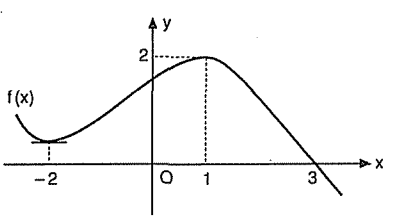
**11.**




**Yukarıdaki şekilde grafiği verilen III. dereceden y = f(x) fonksiyonuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f'(-2) > 0$ B) $f'(0) < 0$ C) $f'(-3) > 0$
D) $f''(-1) = 0$ E) $f''(2) > 0$

**12.**




**Yukarıda grafiği verilen III. dereceden f(x) fonksiyonuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f'(-2) = 0$ B) $f'(2) < 0$ C) $f''(-3) < 0$
D) $f''(2) < 0$ E) $f(1).f'(-1) > 0$

**10-C** **11-D** **12-C**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 6 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = mx^4 + nx^2 + 2x + 2$

$f'(x) = 4mx^3 + 2nx + 2$

$f''(x) = 12mx^2 + 2n$ ve

$x = 1$ de büküm noktası olduğundan,

$f''(1) = 0$ olmalıdır. O halde,

$f''(1) = 12m + 2n = 0$ dır.

$f(x)$ fonksiyonu $(1, -1)$ noktasından geçtiğine göre,

$f(1) = -1$ dir. Buna göre,

$f(x) = m + n + 2 + 2 = -1$

$\Rightarrow m + n = -5$ ve

$12m + 2n = 0$

$10.m = 10$

$\Rightarrow m = 1$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 - 7x + 3$

$f'(x) = x^4 + 6x^2 - 7$

$f''(x) = 4x^3 + 12x$

$f''(x) = 0$

$4x^3 + 12x = 0$

$4.x.(x^2 + 3) = 0$

$x = 0$ bulunur.

| x | $-\infty$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | 0 | + |
| f(x) | | Konkav | | Konveks |

$f(x)$ fonksiyonu, $(0, \infty)$ aralığında konvekstir.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**3.** $f(x) = y$ eğrisinin dönüm noktasının olmaması için,

$y = x^4 + ax^3 + 6x^2 + 2$

$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 12x$

$y'' = 12x^2 + 6ax + 12 = 0$

denkleminin reel kökünün olmaması veya reel köklerinin çift katlı kök olması, yani $y'' = 0$ denklemi için $\Delta \le 0$ olması gerekir.

$\Delta = 36a^2 - 4.12.12 < 0$

$\Rightarrow a^2 - 16 < 0$

| a | $-\infty$ | | $-4$ | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | | + | 0 | − | 0 |

$a \in [-4, 4]$ aralığında $\Delta \le 0$ olduğundan a nın alabileceği tamsayı değerleri: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ tür. a nın en büyük tamsayı değeri 4 tür.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = y = x^4 + ax^2 + bx - 2$

$x = -1$ de dönüm noktası varsa, $f''(-1) = 0$ dır.

$x = -1$ deki teğetin eğimi $= f'(-1) = -1$ veriliyor.

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$

$f'(-1) = -4 - 2a + b = -1$

$b - 2a = 3$ ve

$f''(x) = 12x^2 + 2a$

$f''(-1) = 12 + 2a = 0$

$a = -6$ dır.

$b - 2a = 3 \Rightarrow b + 12 = 3 \Rightarrow b = -9$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6ax - 24bx + 7$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 6a - 24b$

$f''(x) = 6x + 6 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ *dönüm noktasının apsisidir.*

$x_0 = -2$, $f'(x) = 0$ denkleminin kökü olacağından;

$f'(-2) = 12 - 12 - 6a - 24b = 0$

$\Rightarrow a = -4b$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**6.** $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 4$

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x$

$2.x.(2x^2 - 9x + 12) = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$

$12.(x^2 - 3x + 2) = 0$

$12.(x - 2).(x - 1) = 0$

A) $x = 0$; $f'(x)$ in işaret değiştirdiği nokta olduğundan ekstremum noktadır.

B) $2x.\underbrace{(2x^2 - 9x + 12)}_{\Delta < 0} = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′ | − | 0 | + |

$x > 0$ *için* $f'(x) > 0$ *olduğundan fonksiyon artandır.*

C) $x = 1$; $f''(x)$ in işaret değiştirdiği nokta olduğundan dönüm noktasıdır.

D)

| x | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″ | + | 0 | − | 0 | + |
| f | ∩ Konveks | | ∪ Konkav | | ∩ Konveks |

işaret tablosundan görüldüğü gibi (1, 2) aralığında fonksiyon konkavdır. D seçeneği yanlıştır.

E) D seçeneğinde düzenlenen tablodan görüldüğü gibi (2, 3) *aralığında* $f(x)$ *konvekstir.*

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** A) $x = 6$ da $f'(x)$ (+) dan (–) ye geçtiğinden, $x = 6$ da $f(x)$ in yerel maksimumu vardır.

B) Şekildeki $f'(x)$ eğrisinin eğrilik yönü; $x = 1$ in solunda yukarı doğru, sağında da aşağı doğrudur. Dolayısıyla $f'(x)$ eğrisi, $x = 1$ de dönüm (büküm) yapmaktadır.

C) $x = 4$ te, grafikten görüldüğü gibi $f'(x)$ in yerel maksimumu vardır.

D) $x = -2$ nin iki yanında da $f'(x)$ in işareti aynı olduğundan, yani $f'(x)$ işaret değiştirmediğinden $x = -2$ de $f(x)$ in yerel minimumu yoktur.
*O halde,* $x = -2$ *de* $f(x)$ *in yerel minimumu vardır* ifadesi "yanlış"tır.

E) $x = -2$ de grafikten görüldüğü gibi $f'(x)$ in yerel minimumu vardır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**8.** A) $x > 3$ *için* $f'(x) > 0$ *olduğundan* $f(x)$ *artandır.*

B) Türevin işaretinin (+) dan (–) ye geçtiği $x = 1$ noktasında yerel maksimumu vardır.

C) $f'(x)$ fonksiyonu $-\infty < x < 0$ aralığında artan olduğundan bu aralıkta $f'(x)$ in türevi olan $f''(x)$ pozitif olmalı, yani $f''(-3) > 0$ olmalıdır. C seçeneği yanlıştır.

D) $f'(x)$ *fonksiyonu* $2 < x < +\infty$ *aralığında artan* olduğundan bu aralıkta $f'(x)$ in türevi olan $f''(x)$ *pozitif olmalıdır. Dolayısıyla* $f''(4) > 0$ dır.

E) $2 < x < 3$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğundan $f(x)$ azalandır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**9.** A) $x = 2$ de $f(x)$ in yerel minimumu olduğundan, bu noktada $f(x)$ in ikinci türevi pozitiftir.

B) $x = 2$ $f(x)$ in yerel minimum noktasının apsisi olduğundan $f'(2) = 0$ *dır.*

C) $y = f(x)$ in $x$ - eksenine teğet olduğu noktalarda $f(x)$ in çift katlı (iki kat) kökü vardır.

D) $0 < x < 2$ için $f(x)$ azalan olduğundan $f'(1) < 0$ dır. Dolayısıyla $f'(x) > 0$ (Yanlış)

E) $-\infty < x < 0$ için $y = f(x)$ eğrisinin eğrilik yönü aşağı doğru olduğundan, bu aralıkta $f(x)$ in ikinci türevi $f''(x)$ *negatiftir. Dolayısıyla* $f''(-1) < 0$ *olur.*

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**10.** A) $x = -4$ te $f'(x)$ artan olduğundan $f'(x)$ in türevi $(f''(x))$ pozitif olmalı, yani $f''(-4) > 0$ olmalıdır.

B) $x = 1$ noktası $f'(x)$ in yerel maksimum noktası olduğundan $f'(x)$ in türevi $f''(x) = 0$ olmalıdır.

C) $x = 2$ noktası $f'(x)$ in x eksenine teğet olduğu noktadır. Dolayısıyla bu noktadaki türevinin değeri sıfırdır. Yani $f''(2)$ bu noktada 0 olur. (Doğru)

D) $5 < x < +\infty$ için $f'(x)$ eğrisinin parçası x - ekseninin altında kaldığından negatif değerler alır. Dolayısıyla $x = 6$ noktasında $f'(6) < 0$ olmalıdır.

E) $2 < x < 3$ için $f'(x)$ artan olduğundan $f'(x)$ in bu aralıktaki türevi $f''(x)$ pozitif olmalıdır. Dolayısıyla $x = 3$ noktasında $f''(3) > 0$ olmalıdır.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** A) $x = -2$ de $f(x)$ artan olduğundan $f'(-2) > 0$ dır.

B) $x = 0$ da $f(x)$ azalan olduğundan $f'(0) < 0$ dır.

C) $x = -3$ te $f(x)$ artan olduğundan $f'(-3) > 0$ dır.

D) $x = -1$, $f(x)$ in yerel maksimum noktasının apsisi olduğundan $f'(-1) = 0$ ve $f''(-1) < 0$ olmalıdır. Buna göre, $f''(-1) = 0$ dır. (Yanlış)

E) $x = 2$ de $f(x)$ konveks olduğundan $f''(2) > 0$ dır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**12.** A) $x = -2$ de $f(x)$ in yerel minimum noktası olduğundan $f'(-2) = 0$ dır.

B) $x = 2$ de $f(x)$ azalan olduğundan $f'(2) < 0$ dır.

C) $x = -3$ te $f(x)$ konveks olduğundan $f''(-3) > 0$ olmalıdır. $f''(-3) < 0$ (Yanlış)

D) $x = 2$ de $f(x)$ konkav olduğundan $f''(2) < 0$ dır.

E) $-2 < x < 1$ için $f(x)$ artan olduğundan bu aralıkta $f'(x)$ pozitiftir. Dolayısıyla $f'(-1) > 0$ dır. O halde, $f(1) \cdot f'(-1) = 2.(+) > 0$ dır.

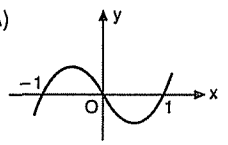
**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

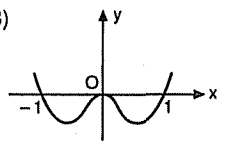
# TÜREV UYGULAMA

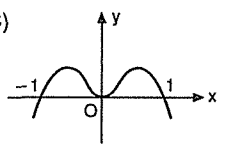
TEST - 7 (Çözümlü)

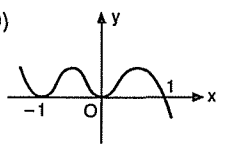
**1.** $f(x) = x^2(1 - x^2)$

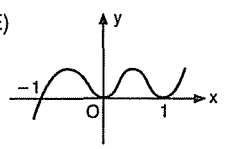
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

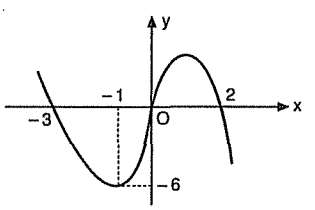
A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**2.** 


**Yukarıda grafiği verilen 5. dereceden y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x) = x^3(x + 3).(x - 2)$

B) $f(x) = -x^3(x + 3).(x - 2)$

C) $f(x) = -x(x + 3)^3.(x - 2)$

D) $f(x) = -x(x + 3).(x - 2)^3$

E) $f(x) = -x^2(x + 3)^2.(x - 2)$

**3.** $y = \frac{mx - 2}{nx + k}$

**eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası (– 1, 2) olduğuna göre, $\frac{k}{m}$ kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

**4.** $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - mx + m}$

**fonksiyonunun düşey asimptotunun olmaması için m hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $m < 0$ B) $m > 4$

C) $m < 0$ veya $m > 1$ D) $0 < m < 4$

E) $m > 1$

**5.** $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$

**eğrisinin asimptotlarının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

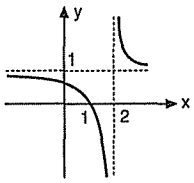
A) (–1, –5) B) (–1, 0) C) (–5, –1)

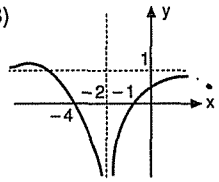
D) (0, –1) E) (–3, –1)

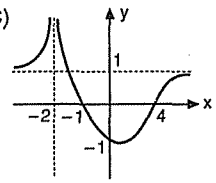
1-C 2-B 3-C 4-D 5-A

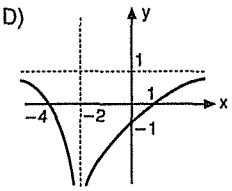
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{(x+2)^2}$

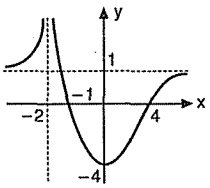
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

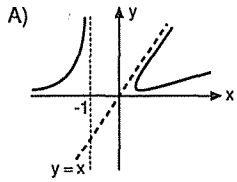

C) 

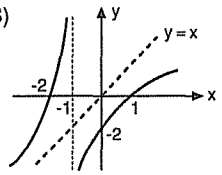

D) 

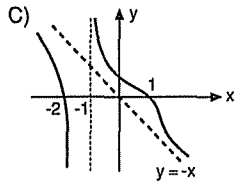

E) 

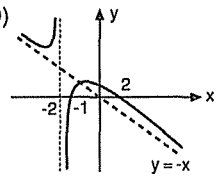

8. $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

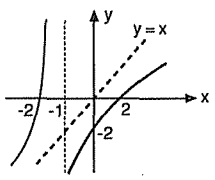
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

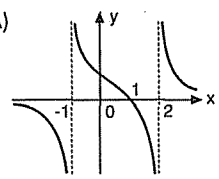

C) 

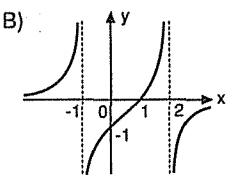

D) 

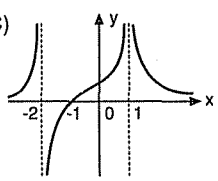

E) 

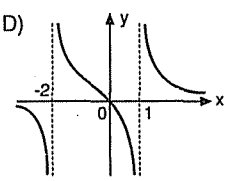

7. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2}$

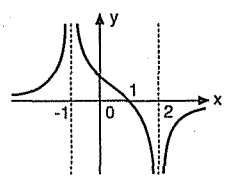
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

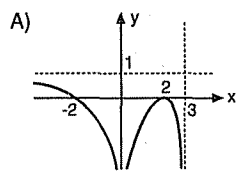

C) 

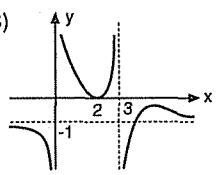

D) 

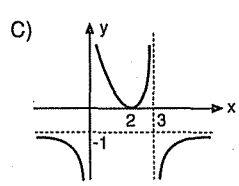

E) 

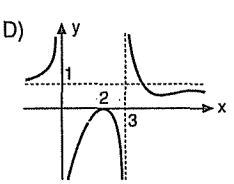

9. $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 3x}$

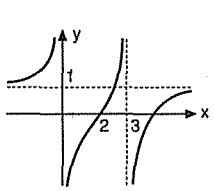
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 

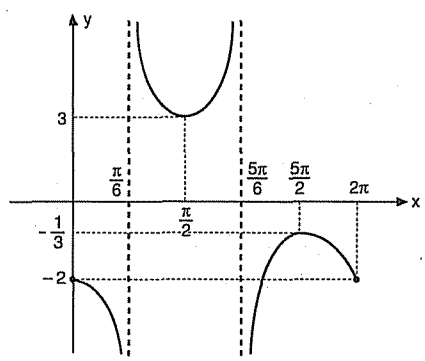

6-C 7-A 8-B 9-D

**10.** $f(x) = 3x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

**fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

**11.**




**Yukarıda grafiği verilen y = f(x) eğrisinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

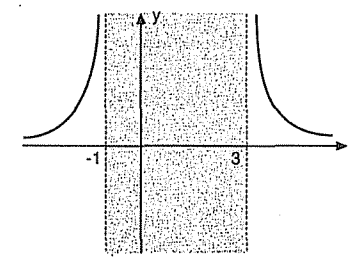
A) $y = \dfrac{\sin x + 2}{2\sin x - 1}$ B) $y = \dfrac{\sin x - 2}{2\sin x + 1}$

C) $y = \dfrac{\cos x + 2}{2\cos x - 1}$ D) $y = \dfrac{\cos x - 2}{2\cos x + 1}$

E) $y = \dfrac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}$

**10-E** **11-A**

**12.**



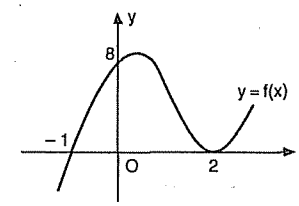

**Grafiği yukarıda verilen y = f(x) eğrisinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ B) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

C) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ D) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

E) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

**13.**




Şekilde, beşinci dereceden $f(x) = k.(ax + b)(cx + d)^{2n}$ polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre, bu fonksiyonun tek dereceli terimlerinin katsayılar toplamı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 0 E) $-\frac{1}{2}$

**12-B** **13-B**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 7 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = x^2(1 - x^2) = x^2(1 - x).(1 + x)$ olduğuna göre, $f(x)$ grafiği $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ da x - eksenine teğettir.

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$ ve $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$ noktalarında $y = f(x)$ eğrisi x - eksenini büküm yapmadan keser. Ayrıca $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ olduğundan $y = f(x)$ eğrisi hem sol taraftan hem de sağ taraftan $-\infty$ a gider.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**2.** $y = f(x)$ eğrisi $x = -3$ ve $x = 2$ de x - eksenini büküm yapmadan kestiği için, $(x + 3)$ ve $(x - 2)$ ifadeleri $f(x)$ in çarpanlarındandır. Ayrıca $x = 0$ da x - eksenini büküm yaparak kestiği için, $x^{2n+1}$ de $f(x)$ in çarpanlarındandır. $f(x)$ 5. dereceden olduğu için $n = 1$ olmalıdır.

$(-1, -6)$ noktası grafik üzerinde olduğundan

$y = f(x) = k.x^3(x + 3)(x - 2)$ eşitliğinde $x = -1$ ve $y = -6$ yazılırsa,

$f(-1) = k.(-1)^3.(-1 + 3)(-1, -2) = -6 \Rightarrow k = -1$ dir.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $y = \dfrac{mx - 2}{nx + k}$ eğrisinin yatay asimptotu $y = \dfrac{m}{n}$ ve düşey asimptotu $nx + k = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{k}{n}$ dir.

Bu asimptotların kesim noktası $(-1, 2)$ ise;

$$(x, y) = \left(-\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right) = (-1, 2)$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{n} = -1 \text{ ve } \frac{m}{n} = 2$$

$$\Rightarrow k = n \text{ ve } m = 2n$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{n}{2n} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - mx + m}$ fonksiyonunun düşey asimptotunun olmaması için, paydasını sıfır yapan herhangi bir x değerinin olmaması gerekir.

O halde, $x^2 - mx + m = 0$ için $\Delta < 0$ olmalıdır.

$\Delta = (-m)^2 - 4.1.m < 0 \Rightarrow m(m - 4) < 0$ ise,

$0 < m < 4$ olmalıdır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $x^2 - 3x - 2$ nin $x + 1$ ile bölümünden kalan,

$(-1)^2 - 3.(-1) - 2 = 2$ olduğundan,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2 - 2 + 2}{x + 1} = \frac{x^2 - 3x - 4 + 2}{x + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x - 4)(x + 1) + 2}{x + 1} = x - 4 + \frac{2}{x + 1} \text{ olur.}$$

Buna göre, $y = x - 4$ eğik asimptot ve

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ düşey asimptottur.

$y = x - 4$ ün $x = -1$ için aldığı değer $y = -5$ olduğundan asimptotların kesim noktası $(-1, -5)$ tir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**6.** $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{(x + 2)^2} = \dfrac{(x - 4)(x + 1)}{(x + 2)^2}$ olduğundan grafik $x = 4$ ve $x = -1$ noktalarında x - eksenini büküm yapmadan keser. Ayrıca, $x = -2$ paydasının çift katlı kökü olduğundan $x = -2$ de "BACA" durumu vardır.

O halde, (C) ya da (E) seçeneği cevap olabilir.

$x = 0$ için $f(0) = -1$ olduğundan, $f(x)$ eğrisi y - eksenini $y = -1$ de keser. Bu durumda cevap (C) seçeneğidir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**7.** $y=\frac{x-1}{x^2-x-2}=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

$x=-1$ ve $x=2$ düşey asimptot "KELEBEK" durumu. Dolayısıyla (C) ve ( E) seçeneklerinde "BACA" durumu olduğundan cevap olamaz. (D) seçeneğinde de asimptotların yerleri farklı olduğu için cevap olamaz.

$x=0$ için $f(0)=\frac{1}{2}$ olduğundan, (B) seçeneği $f(0)=-1$ olduğu için cevap olamaz.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $x=0$ için $f(0)=-2$ olduğundan, grafik y - eksenini $y=-2$ de keser. O halde, cevap (B) ve (E) seçeneklerinden birisidir.

$y=0$ için, $\frac{x^2+x-2}{x+1}=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$ ise,

eğrinin x - eksenini kestiği noktalar $x=-2$ ve $x=1$ dir. (E) seçeneğinde, grafik x - eksenini $x=-2$ ve $x=2$ de kestiğinden cevap olamaz.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**9.** $y=\frac{(x-2)^2}{x^2-3x}$ eğrisinin yatay asimptotu, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$ olduğundan $y=1$ dir. O halde, (A), (D) ve (E) seçeneklerinden birisi cevap olabilir.

$x^2-3x=0 \Rightarrow x=0$ ve $x=3$ doğruları, düşey asimptotlardır ve bu noktalarda "KELEBEK" durumu vardır. $x=2$ noktasında da fonksiyon x - eksenine teğet olmalıdır.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**10.** $f(x)=3x+1+\sqrt{x^2-4x+3}$

$\Rightarrow f(x)=3x+1+\sqrt{(x-2)^2-1}$

eğrisinin asimptotları;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(3x+1+|x-2|)$ olduğundan,

$x\to+\infty$ için, $y=3x+1+x-2 \Rightarrow y=4x-1$ ve

$x\to-\infty$ için, $y=3x+1+2-x \Rightarrow y=2x+3$ doğrularının kesim noktasının apsisi,

$4x-1=2x+3 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ dir.

$y=2x+3$ veya $y=4x-1$ doğrusu üzerinde apsisi $x=2$ olan noktanın ordinatı $y=2.2+3=7$ dir.

Buna göre, (2, 7) noktasının koordinatlarının toplamı $2+7=9$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**11.** Şekilde, $x=0$ için $y=-2$ dir.

A) $f(0)=-2$

B) $f(0)=-2$

C) $f(0)=3$

D) $f(0)=-\frac{1}{3}$

E) $f(0)=0$

olduğundan cevap (A) ya da (B) olabilir.

$x=\frac{\pi}{2}$ için $y=3$ değerlerini (A) ve (B) seçeneklerinde kontrol edelim.

A) $\sin\frac{\pi}{2}=1$ olduğundan $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+2}{2.1-1}=3$

B) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1-2}{2.1+1}=-\frac{1}{3}$ tür.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** (D) ve (E) seçeneklerinde verilen fonksiyonlar için düşey asimptot yoktur. O halde, bu seçenekler cevap olamaz.

Şekilde verilen grafiğin düşey asimptotları $x = -1$ ve $x = 3$ olduğundan $x = -1$ ve $x = 3$ için verilen ifadelerin paydası sıfır olmalıdır.

A) $x = -1$ için $\sqrt{1-2-3} \neq 0$

B) $x = -1$ için, $\sqrt{1+2-3} = 0$ ve

$x = 3$ için, $\sqrt{9-6-3} = 0$ olduğundan cevap olabilir.

C) $x = -1$ için $\sqrt{-1-2+3} = 0$

$x = 3$ için $\sqrt{-9+6+3} = 0$ olduğundan cevap olabilir.

(B) ve (C) seçeneklerinde kök içlerinin birbirinin ters işaretlisi olduğuna dikkat edilirse, bu seçeneklerden sadece birisi (istenilen herhangi biri) incelenerek cevap bulunabilir. (C) ye bakılırsa,

$-x^2 + 2x + 3 > 0$ tanım şartına göre,

$-x^2 + 3x - x + 3 > 0 \Rightarrow x(3-x) + (3-x) > 0$

$\Rightarrow (3-x)(x+1) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

T.K = $(-1, 3)$ olarak bulunur.

Oysa, şekilde verilen grafik $[-1, 3]$ aralığının dışında tanımlıdır. Dolayısıyla C seçeneği cevap olamaz.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** Şekildeki grafik x - eksenini $x = -1$ de büküm yapmadan kestiğine göre, $f(x)$ in çarpanlarından birisi $(x+1)$ dir. Ayrıca, $x = 2$ de x - eksenine teğet olduğundan $f(x)$ in çarpanlarından birisi de, $n \in Z^+$ olmak üzere, $(x-2)^{2n}$ ve $f(x)$ beşinci dereceden polinom bir fonksiyon olduğuna göre, $n = 2$ dir. Dolayısıyla $f(x) = k.(x+1)(x-2)^4$ olur. $(0, 8)$ noktası $f(x)$ in grafiği üzerinde olduğundan yukarıdaki denklemde $x = 0$ ve $y = 8$ yazarak k nın değerini bulalım.

$f(0) = k.1.(-2)^4 = 8 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ olur.

Buna göre, $f(x)$ in tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamı:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^4 - \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(-3)^4}{2} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# TÜREV ALMA

TEST - 8

**1.** $f: R \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos 3x$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{9}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{9}\right)}{x - \frac{\pi}{9}}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{9}{2}$ E) $\frac{6\sqrt{3}}{2}$

**2.** $f: R \to R$, $f(x) = (x^2 - x)(x + 2)$ fonksiyonu için

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

**3.** $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3$

$g: R \to R$, $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

**olduğuna göre,** $\frac{d}{dx}(g \circ f)(x)\Big|_{x=1}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $-\frac{3}{8}$ E) $-\frac{1}{2}$

**4.** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 2 \\ 4x - 2 & x < 2 \end{cases}$

**olduğuna göre,** $f'(2)$ **kaçtır?**

A) $-4$ B) $-2$ C) 4 D) 8 E) Yoktur

**5.** f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$f(3) = 4$, $f'(3) = 5$, $g'(4) = 7$

**olduğuna göre,** $(g \circ f)'(3)$ **kaçtır?**

A) 20 B) 28 C) 35 D) 49 E) 65

**6.** $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x + 1}}$

**olduğuna göre,** $f'(1)$ **kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt[6]{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt[6]{16}}{4}$ C) $\frac{\sqrt[6]{32}}{32}$ D) $\frac{5}{6.\sqrt[6]{32}}$ E) $\sqrt[6]{32}$

**7.** $f(x) = \sqrt{x}.\sin x$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$

**8.** $f(x) = 2.\sin^2(\cos x)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $-1$ D) $-\pi$ E) $\pi$

**1-B** **2-A** **3-D** **4-C** **5-C** **6-D** **7-E** **8-A**

**9.** $f(x) = \ln[\tan(\pi x)]$

**olduğuna göre,** $\frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{4}\right)$ **kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\pi$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $2\pi$

**10.** $f: R^+ \to R$, $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

**fonksiyonu için,** $(f^{-1})'(1)$ **değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

**11.** $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 5x$

**fonksiyonu için** $(f^{-1})'(6)$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

**12.** $f(x) = \arctan(e^x)$

**olduğuna göre,** $f'(\ln 2)$ **kaçtır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $2\ln 2$ C) 1 D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{8}{5}$

**13.** $f(x) = \arcsin(\cos x)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**14.** $\arctan y - \operatorname{arccot} x + 1 = 0$

**olduğuna göre,** $\frac{dy}{dx}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{y^2+1}{x^2+1}$ B) $\frac{x^2+1}{y^2+1}$ C) $-1$

D) $-\frac{y^2+1}{x^2+1}$ E) $-\frac{x^2+1}{y^2+1}$

**15.** $f(x) = e^x - \ln x$

**olduğuna göre,** $\frac{d^4}{dx^4} f(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $e^x - \frac{6}{x^4}$ B) $e^x + \frac{4}{x^4}$ C) $e^x + \frac{6}{x^4}$

D) $e^x - \frac{6}{x^3}$ E) $e^x + \frac{6}{x^3}$

**16.** $y = t^2 + 4t + 3$
$x = t + 2$

**parametrik denklemleri ile verilen** $y = f(x)$ **fonksiyonunun birinci türevinin** $x = 6$ **için değeri kaçtır?**

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

**17.** $y = \arctan t$
$x = \arcsin t$

**olduğuna göre,** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

**9-E** **10-D** **11-A** **12-A** **13-A**

**14-D** **15-C** **16-B** **17-C**

# TÜREV ALMA

TEST - 9

**1.** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$f(x) = \ln(\sin x)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

**2.** $f(x) = \ln(\ln x)$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $-1$ C) e D) $-e$ E) 0

**3.** $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2}$

**olduğuna göre,** $f'(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x}{x^2+2}$ B) $\frac{x}{x+2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}$

D) $\frac{x}{x+1}$ E) $\frac{x}{x^2+1}$

**4.** $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(e^x + e^{-x}\right)\right]$

**aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$ B) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ C) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

D) $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ E) $\frac{-2}{e^x+e^{-x}}$

**5.** $F(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 5y^2 - 5 = 0$

**olduğuna göre,** $F'(x, y)$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2x-3y^2}{6xy-10y}$ B) $\frac{2x-3y^2}{6xy+10y}$ C) $\frac{2x-y^2}{6xy-10y}$

D) $\frac{2x+y^2}{xy-10}$ E) $\frac{x^2+3y}{xy+10y}$

**6.** $g(x) = (x^2 - 1)\, f(x^2 + 6x)$

**olduğuna göre,** $g'(-3)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 3.f(3) B) 6f(3) C) 9f(9)

D) $-6f(-9)$ E) $-9f(3)$

**7.** $f(x) = |x^2 - 12x + 11|$

**olduğuna göre,** $f'(11)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-11$ B) $-9$ C) 9 D) 11 E) Yoktur

**8.** $f(x) = 3x - [\![ 4x - 1 ]\!]$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{7}{2}\right)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 3 E) Yoktur

**1-A** **2-D** **3-A** **4-B**

**5-A** **6-D** **7-E** **8-E**

**9.** $f(x) = sgn[x.(x-1).(x+2)]$

**olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**10.** $y = x^4 - x^3 + 2x - 1$

**olduğuna göre, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}$ değeri kaçtır?**

A) 18 B) 16 C) 14 D) 36 E) 0

**11.** $y = x^2.\ln x$

**olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 5 B) $2\ln x + 3$ C) $\ln x + 3$

D) $3\ln x + 2$ E) $2x\ln x + 3$

**12.** $\frac{d}{dx}(x^n.e^n)$

**ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $n.(x^{n-1}e^n + e^{n-1}x^n)$

B) $n\,e^n x^{n-1}$

C) $e^n x^{n-1}$

D) $n^2 e^{n-1} x^{n-1}$

E) $ne^{n-1} + n.x^{n-1}$

**13.** $f(x) = \sin(e^{-x})$

**olduğuna göre, $f'\left(\ln\frac{3}{\pi}\right)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) $\frac{-\pi}{6}$

**14.** $y = \sin m$
$x = \tan m$

**olduğuna göre, $x = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**15.** $f(x) = x.|x| - (1 + x^2).[\![x]\!].sgn(x)$

**olduğuna göre, $f'(-\sqrt{5})$ kaçtır?**

A) $-8$ B) $-6$ C) $-8\sqrt{5}$

D) $-6\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{5}$

**16.** $f(x) = |x^2 - 5x - 1|.sgn(x-3)$

**olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?**

A) $-4$ B) $-3$ C) $-2$ D) 2 E) 3

**17.** $f(x) = x^2.|x^2 - 9|.sgn(x+1)$

**$x > 4$ için $f''(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $x^3 - x$ B) $4x^3 - 18x$ C) $12x^2 - 18$

D) $-12x^3 + 18$ E) 0

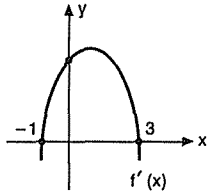
**9-C** **10-D** **11-B** **12-B** **13-E**

**14-E** **15-E** **16-B** **17-C**

# TÜREV ALMA

TEST - 10

**1.** **Türevinin grafiği yanda verilen f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olamaz?**




A) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$

B) $y = -x^3 + 3x^2 + 6x + 1$

C) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

D) $y = -2x^3 + 6x^2 + 18x - 1$

E) $y = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$

**2.** $\frac{d}{dx}(\cos^3 4x)$

**aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-6\cos 4x.\sin 8x$

B) $-6\sin 4x.\cos 8x$

C) $-6\sin^2 8x$

D) $6\sin 8x$

E) $6\sin^2 4x.\cos 8x$

**3.** $f: R \to R$, $f(x) = 5.2^{x-1}$ olmak üzere,

$f'(a) = 160.\ln 2$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**4.** $f(1 - 4x) = 3x^2 + 12x + n$

**olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?**

A) $-4$ B) $-3$ C) 3 D) 4 E) 6

**1-B** **2-A** **3-C** **4-B**

**5.** f ve g, R den R ye tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar ve

$f(3 - 2x) = e^x.g(x^2 - 4)$

$g(-4) = -8$

**olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

**6.** f ve g, R den R ye tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar ve $h(x) = (f \circ g)(x)$ olmak üzere,

$f'(3) = 4$, $g(2) = 3$ ve $g'(2) = -2$

**olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?**

A) $-10$ B) $-8$ C) $-6$ D) $-4$ E) $-2$

**7.** $F(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^4 + 1 = 0$

**olduğuna göre, $F'(x, y)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4y^3}$ B) $\frac{3x^2 - 6xy}{3x^2 - 4y^3}$ C) $\frac{x^2 - 6xy}{3x^2 - 4y^3}$

D) $\frac{-x^2 + 6xy}{x^2 + y^3}$ E) $\frac{3x^2 - 2xy}{3x^2 + 4y^3}$

**8.** $f(x) = e^{2x}$ ve $g(x) = \sin(\pi x)$ olmak üzere,

$h(x) = (g \circ f)(x)$

**olduğuna göre, $h'(0)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) $-2\pi$ C) 0 D) 2 E) $2\pi$

**5-D** **6-B** **7-B** **8-B**

**9.** $f(x) = \left[\!\left[ \frac{x-2}{5} \right]\!\right]$

**olduğuna göre, $f'(10)$ kaçtır?**

A) $-10$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**10.** $f(x) = |x^2 - 16x|$

**olduğuna göre, $f'(10)$ kaçtır?**

A) $-20$ B) $-16$ C) $-4$ D) 4 E) 20

**11.** $f(x) = \text{sgn}(3 - x^2)$

**olduğuna göre, $f'(1) + f(3)$ toplamı kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**12.** $f(x) = [\![ \text{sgn}(\cos x) ]\!]$

**olduğuna göre, $f'(\pi)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1$ B) 0 C) 1

D) sgn(sinx) E) $-\sin x$

**13.** $f(x) = |x^2 - 3| + x.[\![ x ]\!] - \text{sgn}(x^2 - 3x + 2)$

**olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?**

A) $-4$ B) $-2$ C) 0 D) 4 E) Yoktur

**14.** $y = e^x . \sin x$

**olduğuna göre, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0}$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**15.** $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$

**olduğuna göre, $\frac{d^{10}\ f(x)}{dx^{10}}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) f(x) B) 10 f(x) C) 10! f(x)

D) $3^{10} f(x)$ E) $\frac{f(x)}{3^{10}}$

**16.** $y = e^{nx}$

**olduğuna göre, $\frac{d^n y}{dx^n}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $n!\ e^{nx}$ B) $n^n e^{nx}$ C) $(nx)!\ e^{nx}$

D) $n^{n-1} e^{nx}$ E) $(nx)^n e^{nx}$

**9-C** **10-C** **11-B** **12-B**

**13-E** **14-C** **15-D** **16-B**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 11

**1.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{13}-x^{12}+x+3}{x^6-1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-26$ B) $-13$ C) $-\dfrac{13}{3}$ D) $-\dfrac{26}{3}$ E) $-\dfrac{26}{5}$

**2.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{12x+4}-4}{2-\sqrt{x+3}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-6$ B) $-3$ C) $-1$ D) 2 E) 3

**3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos x}{x+\sin x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{8}$

**4.** $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{\tan(y-x)}{\tan y-\tan x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\sec^2 x$ E) $\cos^2 x$

**5.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{2+\cot x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**6.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x.\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)+1}{x-1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**7.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x+\sin x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

**8.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-3x^2+x+1}{x^3-3x+2}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\dfrac{9}{5}$ D) $\dfrac{14}{5}$ E) $\dfrac{7}{3}$

**1-C** **2-A** **3-C** **4-E** **5-C** **6-B** **7-A** **8-E**

**9.** $\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{\cos x - 1}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) 0

**10.** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan 3x}{\sin 2x}\right)$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) $\frac{3}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-2$

**11.** $\lim_{x \to \pi^+} [(x - \pi).\cot x]$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

**12.** $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) e D) $\frac{1}{e}$ E) $\frac{1}{e^2}$

**13.** $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

**limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{e^2}$ B) $\frac{1}{e}$ C) 0 D) 1 E) e

**14.** $f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 3$

**eğrisine x = 1 noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?**

A) $-7$ B) $-6$ C) 4 D) 6 E) 9

**15.** $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 2$

**fonksiyonunun (1, −1) noktasındaki teğetinin eğimi 2 olduğuna göre, a.b kaçtır?**

A) $-\frac{17}{2}$ B) $-\frac{13}{2}$ C) $\frac{-39}{4}$ D) $-4$ E) $-3$

**16.** $f(x) = mx^3 + 2x^2 - 4x + 5$

**fonksiyonunun x = 1 noktasındaki teğeti x - ekseni ile pozitif yönde 150° lik açı yaptığına göre, m kaçtır?**

A) $-3\sqrt{3}$ B) $-3$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

**17.** $f(x) = (x + 1).e^{x+1}$

**fonksiyonuna x = 0 noktasından çizilen normalin eğimi kaçtır?**

A) $-2e$ B) $-e$ C) $-\frac{1}{2e}$ D) $-\frac{1}{e}$ E) e

**18.** $f(x) = x.\ln x$

**fonksiyonunun x = 1 noktasındaki teğeti y = mx − 3 doğrusuna paralel olduğuna göre, m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**9-E** **10-B** **11-C** **12-B** **13-D**

**14-A** **15-C** **16-E** **17-C** **18-A**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 12

**1.** $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 19$

**eğrisinin aşağıdaki noktaların hangisindeki teğetinin eğimi en küçüktür?**

A) (1, −15) B) (−2, 3) C) (3, 53)

D) (−1, −11) E) (0, −19)

**2.** $y = x^3 + 2mx^2 + 4x$

**eğrisinin x = − 2 noktasındaki teğetinin eğimi 0 olduğuna göre, m kaçtır?**

A) − 9 B) − 2 C) − 1 D) 0 E) 2

**3.** $f(x) = x^2 . e^x . \ln x$

**fonksiyonunun x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) e B) 1 C) e + 1 D) e − 1 E) − 1

**4.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

**fonksiyonunun x eksenine paralel olan teğetlerinin değme noktalarının apsisleri x = a ve x = b olduğuna göre |a − b| kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**5.** $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 1$

**fonksiyonunun teğetlerinden eğimi en büyük olanın eğimi kaçtır?**

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 28

**6.** $y = x^3 - 3x + 1$

**eğrisinin A(2, 3) noktasındaki teğetinin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

A) − 12 B) -- 15 C) − 18 D) − 24 E) − 27

**7.** f(x) fonksiyonunun A(2, 3) noktasındaki teğetinin eğimi −2 ve g(x) fonksiyonunun apsisi x = 3 olan noktadaki teğetinin eğimi 4 tür.

**Buna göre, h(x) = (g o f)(x) eğrisinin x = 2 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) − 8 B) − 4 C) 2 D) 4 E) 8

**8.** $f(x) = x^3 - x^2 . \text{sgn}(x + 2) - 3$

**eğrisinin apsisi x = 2 olan noktadaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 8x + y + 10 = 0 B) x + y − 10 = 0

C) x + 8y + 10 = 0 D) x − 8y − 10 = 0

E) x + 8y − 10 = 0

**9.** $x^2 - 3y^2 + 2xy + 4 = 0$

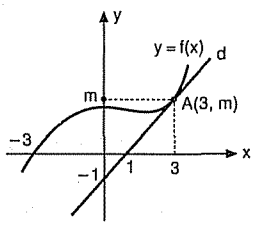
**eğrisinin A(−1, 1) noktasındaki teğeti aşağıdaki doğruların hangisine paraleldir?**

A) x + 2y = 1 B) x − 3y = 2 C) y = 1

D) 2x + y = 2 E) 3x + y = 3

**1-B** **2-E** **3-A** **4-D** **5-A** **6-B** **7-A** **8-E** **9-C**

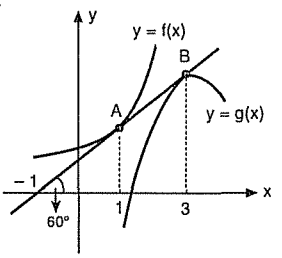
**10.** Şekilde y = d doğrusu y = f(x) fonksiyonuna A(3, m) noktasında teğettir.




**Buna göre, f(3) + f′(3) toplamının değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**11.** Şekilde y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonları d doğrusuna A ve B noktalarında teğettir.



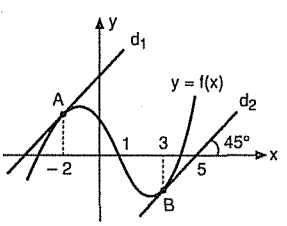

**Buna göre,**

$$\frac{f(1) + g(3)}{f'(1) + g'(3)}$$

**kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 6 D) $2\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

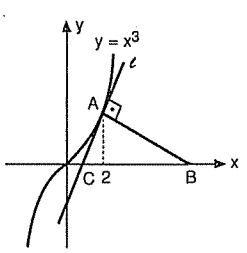
**12.** Şekilde y = f(x) fonksiyonuna teğet olan $d_1$ ve $d_2$ doğruları birbirine paraleldir.




**Buna göre, f′(−2) + f(3) toplamının değeri kaçtır?**

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 2

**13.** Şekilde $\ell$ doğrusu $y = x^3$ eğrisine A noktasında teğettir.

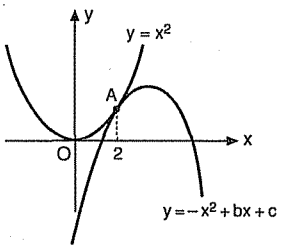



**Buna göre, B noktasının apsisi kaçtır?**

A) 72 B) 86 C) 94 D) 98 E) 102

**10-A** **11-B** **12-C** **13-D**

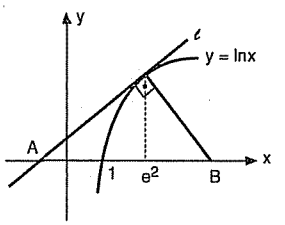
**14.** Şekilde $y = x^2$ parabolü ile $y = -x^2 + bx + c$ parabolü A noktasında teğettir.




**Buna göre, b + c toplamı kaçtır?**

A) −12 B) −4 C) 0 D) 4 E) 8

**15.** Şekilde $\ell$ doğrusu apsisi $e^2$ olan noktada $y = \ln x$ eğrisine teğettir.



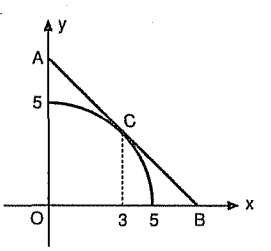

**Buna göre, |AB| kaç birimdir?**

A) $e^4 - e^2 + 2$ B) $2.(e^2 + e^{-2})$

C) $e^4 - e^2 - 2$ D) $e^4 + e^2 + 1$

E) $e^4 - e^2 - 1$

**16.** Şekilde AB doğru parçası $y^2 + x^2 = 5^2$ çemberine C(3, y) noktasında teğettir.




**Buna göre, AOB üçgeninin alanı kaç birimkaredir?**

A) $\frac{625}{24}$ B) $\frac{625}{32}$ C) $\frac{125}{4}$

D) $\frac{125}{3}$ E) $\frac{125}{2}$

**14-C** **15-B** **16-A**

# TÜREV UYGULAMA

**TEST - 13**

**1.** $x^2 + y^2 = 4$

**çemberinin A(−1, $\sqrt{3}$) noktasındaki teğetinin x ekseniyle yaptığı açı kaç derecedir?**

A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 150

**2.** $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$

**parabolünün A(1, 1) noktasındaki teğeti, normali ve x ekseni ile oluşan üçgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**3.** $y = |4 - x^2|$

**eğrisinin $x = \frac{5}{2}$ deki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) −5 D) 5 E) $\frac{5}{2}$

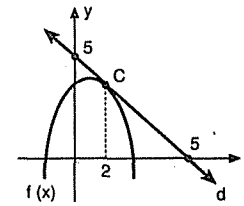
**4.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 1$

**eğrilerinde aynı apsisli her noktanın teğetleri birbirine paralel olduğuna göre, a + b kaçtır?**

A) − 4 B) − 3 C) − 2 D) 1 E) 3

**1-A** **2-C** **3-D** **4-C**

**5.** **Yanda grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolüne d doğrusu C(2, y) noktasında teğet olduğuna göre, b + c toplamı kaçtır?**

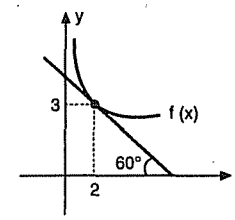



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**6.** Grafiği yanda verilen f(x) fonksiyonu için

$g(x) = \frac{x^2 . f(x)}{4}$

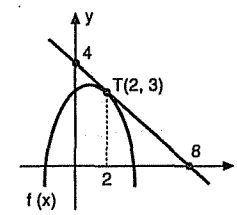
**olduğuna göre, g′(2) kaçtır?**




A) $\sqrt{3}$ B) $1 - \sqrt{3}$ C) $1 + 4\sqrt{3}$

D) $3 - \sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} + 3$

**7.** **Grafiği yanda verilen f(x) fonksiyonu için $g(x) = [f(x)]^4$ olduğuna göre, g′(2) değeri kaçtır?**




A) − 204 B) − 54 C) 102

D) 54 E) 27

**5-D** **6-D** **7-B**

**8.** $y = (x-2)^3$ eğrisinin A(3, 1) noktasındaki teğeti bu eğriyi A dan başka bir B noktasında da kesmektedir.

**Buna göre, B noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**9.** $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 148$

**çemberinin A(a, 2a) noktasındaki teğetinin eğimi $-\frac{1}{6}$ olduğuna göre, a kaçtır?**

A) – 3 B) – 2 C) 1 D) 5 E) 3

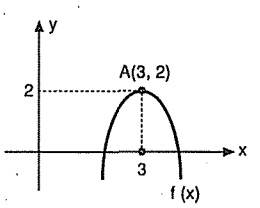
**10.** R den R ye tanımlı f(x) fonksiyonunun apsisi x = 3 olan noktasındaki teğetinin denklemi $y = -\frac{1}{3}.x + 3$ tür.

$g(x) = x.[f(x)]^2$

**olduğuna göre $g'(3)$ kaçtır?**

A) – 8 B) – 4 C) 2 D) 3 E) 8

**11.** Grafiği yanda verilmiş miş f(x) parabolünün tepe noktası A noktasıdır.




**$g(x) = [f(x)]^2$ olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?**

A) – 6 B) – 2 C) 0 D) 2 E) 6

**8-C** **9-D** **10-D** **11-C**

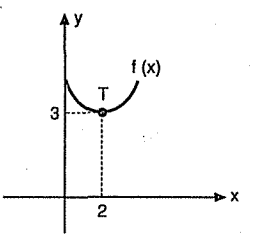
**12.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

**çemberinin A(1, 3) noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = x - 1$ B) $y = 3x - 7$ C) $y = -3x + 7$

D) $y = x + 5$ E) $y = -2x + 5$

**13.** Grafiği yanda verilen f(x) parabolünün tepe noktası T dir.




**$g(x) = x^2.f(x)$ olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

**14.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ve $h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$

**olmak üzere, f(x) fonksiyonu x = 3 noktasında g(x) e teğet olduğuna göre, $h'(3)$ kaçtır?**

A) – 81 B) – 75 C) – 64 D) – 48 E) – 32

**15.** $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2}$

**eğrisi A(– 3, 0) noktasında x - eksenine teğet olduğuna göre, a + b kaçtır?**

A) – 12 B) 6 C) – 6 D) 3 E) 15

**12-E** **13-E** **14-B** **15-E**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 14

**1.** $f(x) = x.\ln x$

**fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde artandır?**

A) $(-\infty, -e)$ B) $(-e, 0)$ C) $(-1, e)$

D) $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ E) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

**2.** $y = \frac{e^x}{x}$

**fonksiyonu hangi aralıkta daima artandır?**

A) $(-1, 1)$ B) $(1, \infty)$ C) $(-a, -1)$

D) $(-1, \infty)$ E) $R - \{1\}$

**3.** $y = 5^{\ln(x^2+4)}$

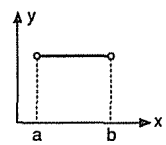
**eğrisi hangi aralıkta azalandır?**

A) $(-3, 5)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $(-2, 2)$

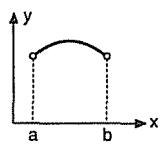
D) R E) $(0, +\infty)$

**4.** **(a, b) aralığında her x için türevi negatif olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

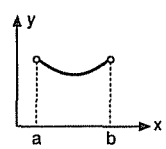
A)



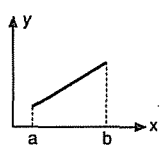

B)



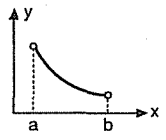

C)




D)




E)




**1-E** **2-B** **3-B** **4-E**

**5.** f(x) pozitif tanımlı azalan fonksiyon ve g(x) negatif tanımlı artan fonksiyon ise,

$$h(x) = f(x).g(x)$$

**için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

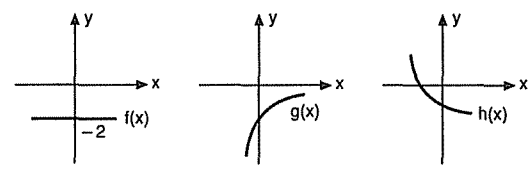
A) Negatif tanımlı artandır.
B) Negatif tanımlı azalandır.
C) Pozitif tanımlı artandır.
D) Pozitif tanımlı azalandır.
E) Sabit fonksiyondur.

**6.** f(x) negatif tanımlı artan ve g(x) negatif tanımlı azalan fonksiyonlar olmak üzere,

**$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonu için hangisi doğrudur?**

A) Negatif tanımlı artandır.
B) Negatif tanımlı azalandır.
C) Pozitif tanımlı azalandır.
D) Pozitif tanımlı artandır.
E) Sabit fonksiyondur.

**7.**




**Yukarıda grafikleri verilen fonksiyonlar için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?**

A) $f'(x) > g(x) > h'(x)$
B) $h'(x) > f'(x) > g'(x)$
C) $f'(x) > h'(x) > g'(x)$
D) $h'(x) > g'(x) > f'(x)$
E) $g'(x) > f'(x) > h'(x)$

**5-A** **6-C** **7-E**

**8.** $y = 2e^{x^2 - 4x}$

**eğrisi hangi aralıkta artandır?**

A) $(-\infty, -2)$ B) $(0, +\infty)$ C) $(-\infty, 0)$

D) $(2, +\infty)$ E) $(-2, 2)$

**9.** **y = f(x) fonksiyonu, (a,b) aralığında pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta daima artandır?**

A) $[f(x)]^2$ B) $[f(x)]^3$ C) $[f(x)]^{-2}$

D) $f(x) - x^2$ E) $f(x) + 3$

**10.** **Aşağıdaki fonksiyonların hangisi tanımlı olduğu değerler için daima azalandır?**

A) $y = \frac{x-1}{x+1}$ B) $y = (x-1)^2$

C) $y = \frac{-1}{x}$ D) $y = \frac{x+1}{x-1}$

E) $y = \frac{x^2}{x+1}$

**11.** $y = x^3 - mx^2 + 3x - 1$

**eğrisi daima artan olduğuna göre m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $m > 4$ B) $m < -4$ C) $-2 < m < 2$

D) $-3 < m < 3$ E) $m > 3$

**12.** $y = \frac{m}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$

**eğrisi daima azalan olduğuna göre, m hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $-1 < m < 1$ B) $m > 1$ C) $m < -1$

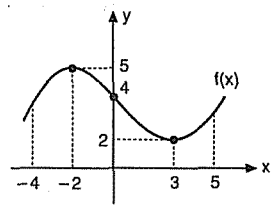
D) $m > -1$ E) $m < 1$

**13.** **y = f(x) negatif tanımlı ve artan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi pozitif tanımlı ve daima azalan bir fonksiyondur?**

A) $x^2.f(x)$ B) $x.[f(x)]^2$ C) $x^2 + f(x)$

D) $[f(x)]^2$ E) $[f(x)]^3$

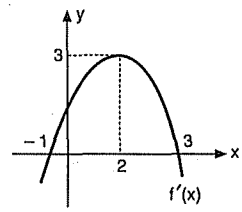
**14.** **Grafiği yanda verilen f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?**




A) $f'(-3) > 0$ B) $f'(3) = 0$ C) $f'(1) > 0$

D) $f(0).f'(0) < 0$ E) $f'(4) > f'(-1)$

**15.** **Türevinin grafiği yanda verilen f(x) fonksiyon için aşağıdakilerin hangisi yanlış olabilir?**




A) $f(0) > 0$ B) $f(2) > f(1)$ C) $f(3) > f(-1)$

D) $f(0) < f(3)$ E) $f(2) < f(3)$

**16.** $f(x) = x + \sin x$

**fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) x = 0 da yerel ekstremum değeri vardır.

B) Daima azalandır.

C) $(-\pi, \pi)$ aralığında azalandır.

D) Hiçbir aralıkta azalan değildir.

E) $x = \pi$ de yerel ekstremum değeri vardır.

**8-D** **9-C** **10-D** **11-D** **12-C**

**13-D** **14-C** **15-A** **16-D**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 15

**1.** $y = 2^{\frac{1}{x-5}}$

**eğrisinin azalan olduğu <u>en geniş</u> aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -5)$ B) $(-\infty, 5)$ C) $(-5, 5)$

D) $R - \{5\}$ E) R

**2.** $h(x) = x^3.f(x)$

**azalan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?**

A) $x.f'(x) < -3.f(x)$

B) $x^2.f'(x) > x.f(x)$

C) $x - f'(x) > 0$

D) $3x^2.f(x) - x^3f'(x) > 0$

E) $f(x) > f'(x)$

**3.** **Bir (a, b) aralığında f(x) azalan olduğuna göre, aynı aralıkta aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> artandır?**

A) $[f(x)]^2$ B) $[f(x)]^3$ C) $x - f(x)$

D) $x.f(x)$ E) $[f(x)]^{-2}$

**4.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + a, \quad a \in R$

**fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) Daima azalandır.

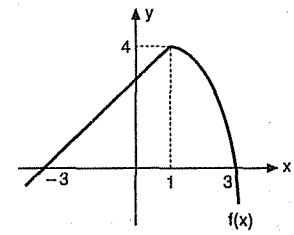
B) x = 2 de yerel maksimumu vardır.

C) x = 2 de yerel minimumu vardır.

D) R – {2} kümesinde artandır.

E) $(-\infty, -2)$ aralığında azalandır.

**5.**




**Yukarıda grafiği verilen**

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , \quad x \le 1 \\ -x^2 + 2x + 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

***fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?***

A) $f'\left(\frac{3}{2}\right) > f'(2)$ B) $f(-2).f'(-2) < 0$

C) $f''(-3).f'(3) < 0$ D) $f'(1) > f(2)$

E) $f'(-2) > f(2)$

**6.** **a < 0 < b ve (a, b) aralığında $f'(x) < 0$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>daima yanlıştır</u>?**

A) f(a) > f(b) B) f(a) > 0 > f(b)

C) f(a) > f(b) > 0 D) 0 < f(b)

E) f(b) > f(a)

**7.** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

**fonksiyonunun <u>en büyük</u> değeri kaçtır?**

A) 25 B) 16 C) 9 D) 4 E) 1

**8.** $f(x) = x^3 + mx^2 + 3mx + 1$

**fonksiyonunun x = m noktasında bir yerel minimumu olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –2 B) 0 C) –1 D) 1 E) –3/5

**1-D** **2-A** **3-C** **4-D**

**5-A** **6-E** **7-A** **8-B**

**9.** $y = x.e^x$

**eğrisinin minimum değeri kaçtır?**

A) $-e$ B) $-\frac{1}{e}$ C) $-1$ D) 0 E) $\frac{1}{3}$

**10.** $y = \frac{x-1}{x^2+ax+1}$

**eğrisi x = 2 de bir ekstremuma sahip ise a kaçtır?**

A) $-3$ B) $-2$ C) $-1$ D) 0 E) 2

**11.** $y = \frac{e^x}{x}$

**eğrisinin ekstremum noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$ B) $\left(-2, \frac{-1}{2e}\right)$ C) (1, e)

D) $\left(2, \frac{e^2}{2}\right)$ E) $\left(3, \frac{e^3}{3}\right)$

**12.** $y = \frac{x-3}{x^2+mx-1}$

**eğrisinin yerel ekstremum değeri olmadığına göre, aşağıdakilerin hangisi doğrudur?**

A) $m < -\frac{8}{3}$ B) $m > \frac{8}{3}$ C) $m > \frac{4}{3}$

D) $m < 0$ E) $-\frac{8}{3} < m < \frac{8}{3}$

**9-B** **10-C** **11-C** **12-A**

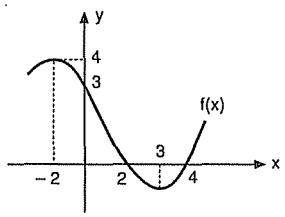
**13.** $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

**eğrisinin yerel maksimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(0, 2\sqrt{2})$ B) $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ C) $(0, \sqrt{2})$

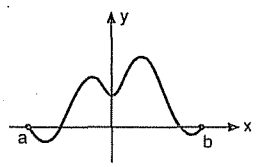
D) $\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ E) $\left(-2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

**14.** **Grafiği yanda verilen f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**




A) x = −2 de yerel maksimumu vardır.
B) (−2, 3) aralığında azalandır.
C) (3, 4) aralığında artandır.
D) x = 3 de yerel minimumu vardır.
E) x = 2 de yerel minimumu vardır.

**15.** **Yanda grafiği verilen f:[a, b] → R ye tanımlı f(x) fonksiyonunun kaç tane ekstremum noktası vardır?**




A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

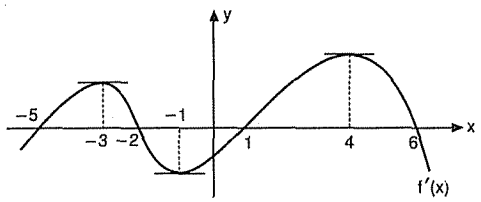
**16.** $y = \frac{x^2+1}{x}$

**fonksiyonun yerel ekstremum noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olduğuna göre, |AB| kaçtır?**

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

**13-C** **14-E** **15-E** **16-B**

**17.**




**Türevinin grafiği verilen f(x) fonksiyonunun, (−6, 6) aralığında x in hangi değeri için bir yerel maksimumu vardır?**

A) −5 B) −3 C) −2 D) 1 E) 4

**18.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x - 27$

**eğrisinin dönüm noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (3, 0) B) (1, −8) C) (−1, −64)

D) (2, −1) E) (2, 11)

**19.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

**eğrisinin dönüm** (büküm) **noktasının apsisi kaçtır?**

A) −6 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

**20.** $f(x) = ax^3 + 4x^2 + 5x + b$

***fonksiyonunun dönüm*** (büküm) ***noktası*** **A(−1, 3) noktası olduğuna göre, a − b kaçtır?**

A) $-\frac{20}{3}$ B) $-\frac{16}{3}$ C) −4 D) −2 E) $-\frac{8}{3}$

**17-C** **18-E** **19-D** **20-C**

**21.** $y = x^4 - 3ax^2 + bx + c$

eğrisinin x = 1 noktasındaki teğeti x - ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapmaktadır.

**Bu eğrinin x = −1 de dönüm noktası olduğuna göre, a.b kaçtır?**

A) 18 B) 9 C) 4 D) 2 E) 1

**22.** $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 1$

**fonksiyonunun konkav** (iç bükey) **olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ B) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ C) $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ E) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

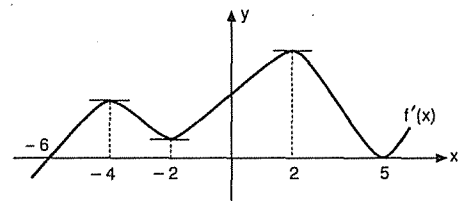
**23.** $f(x) = cos2x - sin2x$

**fonksiyonu aşağıdaki aralıklardan hangisinde konveks** (dış bükey) **tir?**

A) $\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ C) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

D) $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$ E) $(\pi, 2\pi)$

**24.**




**Yukarıda türevinin grafiği verilen f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?**

I. x = −6 da minimum değerini alır.
II. 2 < x < 5 aralığında azalandır.
III. x = 2 de maksimum değerini alır.
IV. x = 5 te minimum değerini alır.
V. (5, f(5)) dönüm noktasıdır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**21-A** **22-D** **23-D** **24-B**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 16

**1.** $2x^2 + x + 15m^2 + 8m = 0$

denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ olduğuna göre, $x_1 . x_2$ çarpımı en az kaçtır?

A) $\frac{-16}{15}$ B) $\frac{-8}{15}$ C) 0

D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{16}{15}$

**2.** x reel sayı olmak üzere,

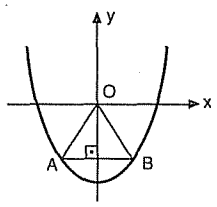
$(2x - 3).(x + 2)$

çarpımının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) $-\frac{49}{8}$ B) $-\frac{49}{16}$ C) $-\frac{7}{16}$

D) $-\frac{7}{4}$ E) $-\frac{14}{7}$

**3.** A ve B noktaları, $y = 2x^2 - 3$ parabolü üzerinde ve [AB], y - eksenine dik olduğuna göre, şekildeki OAB üçgeninin alanı en çok kaç birimkare olabilir?

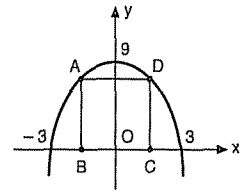



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 2

**4.** A(3, 0) noktası ile $y = x^2$ parabolü arasındaki en kısa uzunluk kaç birimdir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

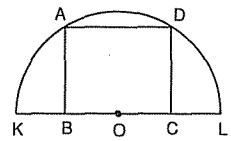
**5.** $y = 9 - x^2$ parabolü ve x ekseni arasına çizilebilecek ABCD dikdörtgenlerinden çevresi maksimum olanın çevresi kaç birimdir?




A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

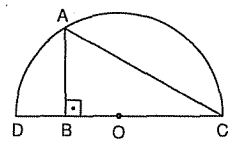
**6.** Şekildeki yarım çemberin merkezi O ve çapı [KL] dir.

|KL| = 10 cm olduğuna göre, ABCD dikdörtgeninin çevresi en çok kaç cm dir?




A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $10\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{5}$

**7.** Şekildeki O merkezli yarım çemberin çapı |DC| = 4 cm olduğuna göre, ABC üçgeninin alanı en çok kaç $cm^2$ dir?




A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

**8.** $y = x^2$ parabolünün $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$ noktasına en yakın noktasının apsisi kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

**1-B** **2-A** **3-D** **4-C**

**5-C** **6-C** **7-E** **8-C**

**9.** **İki köşesi $y = 3 - x^2$ parabolü üzerinde ve diğer iki köşesi de x - ekseni üzerinde olan ve y nin pozitif olduğu bölgede bulunan dikdörtgenlerden, alanı en büyük olanın alanı kaç birimkaredir?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

**10.** $x^2 + (m - 3)x + 2m = 0$

**denkleminin köklerinin kareleri toplamı en az kaçtır?**

A) – 25 B) – 16 C) 0 D) 1 E) 9

**11.** Bir dik kare prizmanın taban kenarı ile yüksekliğinin toplamı 9 cm dir.

**Prizmanın hacmi maksimum kaç $cm^3$ tür?**

A) 108 B) 102 C) 96 D) 112 E) 100

**12.** Bir kenarı 18 cm olan kare şeklindeki bir karton, köşelerinden eşit kareler kesilip uygun şekilde katlanarak üstü açık bir kutu yapılacaktır.

**Kutunun hacmi en çok kaç $cm^3$ olabilir?**

A) 332 B) 392 C) 400 D) 432 E) 492

**9-E** **10-B** **11-A** **12-D**

**13.** ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 5$ cm ve $|BC| = 8$ cm dir.

**Bir kenarı [BC] üzerinde olacak şekilde bu üçgen içine çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) $\frac{3}{2}$ B) 3 C) 6 D) $\frac{9}{4}$ E) 9

**14.** **Çapı 12 cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) $48\sqrt{3}\pi$ B) $96\sqrt{3}\pi$ C) $112\sqrt{3}\pi$

D) $120\sqrt{3}\pi$ E) $144\sqrt{3}\pi$

**15.** **Taban yarıçapı 8 cm, yüksekliği 12 cm olan koni içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin yarıçapı kaç cm dir?**

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 12

**16.** **Çapı 6 cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli koninin hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) $\frac{32\pi}{3}$ B) $\frac{24\pi}{3}$ C) $\frac{16\pi}{3}$

D) $\frac{12\pi}{3}$ E) $\frac{8\pi}{3}$

**13-C** **14-B** **15-C** **16-A**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 17

**1.** $y = \dfrac{x^3 - 2x + 2}{x^3 + 8}$

**eğrisinin düşey asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 2$ B) $x = 8$ C) $x = 1$

D) $x = -8$ E) $x = -2$

**2.** $y = \dfrac{x^2 - x + m}{x^2 + x + 1}$

**eğrisinin x eksenini kesmemesi için m aşağıdaki şartlardan hangisini sağlamalıdır?**

A) $m > 4$ B) $m < \dfrac{1}{4}$ C) $m > \dfrac{1}{4}$

D) $m < 0$ E) $m \leq \dfrac{1}{4}$

**3.** $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

**fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının ordinatı kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 2 D) 4 E) 5

**4.** $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x - 6}$

**eğrisinin düşey asimptotları arasındaki uzaklık kaç br dir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**5.** $y = e^{-x^2} + 2$

**eğrisinin asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = 1$ B) $y = 2$ C) $x = 0$

D) $x = 3$ E) $x = 2$

**6.** $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + x + m}$

**eğrisinin bir tane düşey asimptotu olduğuna göre m kaçtır?**

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{-1}{4}$ C) 4 D) $-4$ E) 0

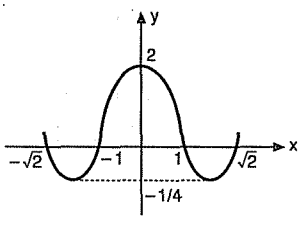
**7.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$

**eğrisinin asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 0$ B) $y = 1$ C) $y = 0$

D) $y = x$ E) $y = 1$

**8.** **Grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ B) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

C) $y = x^4 - 2x^2$ D) $y = x^4 - x^2 + 2$

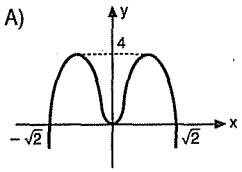
E) $y = x^4 + 2$

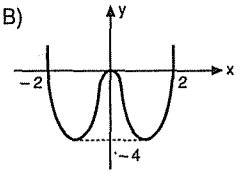
1-E 2-C 3-D 4-D

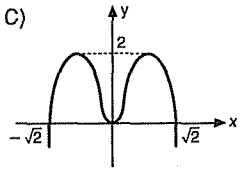
5-B 6-A 7-D 8-B

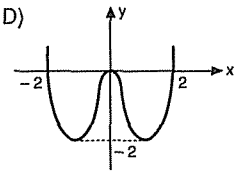
**9.** $y = (x^2 - 4)x^2$

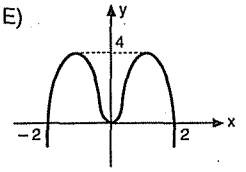
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

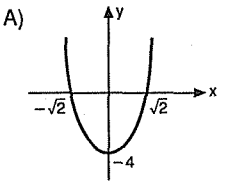

C) 

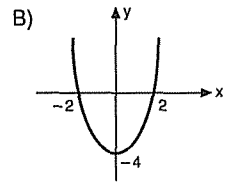

D) 

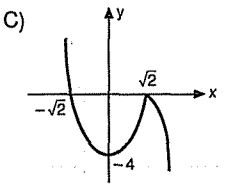

E) 

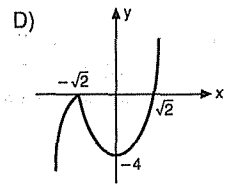

**10.** $y = x^4 - 4$

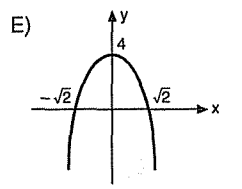
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

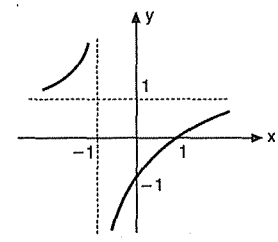

B) 


C) 


D) 


E) 

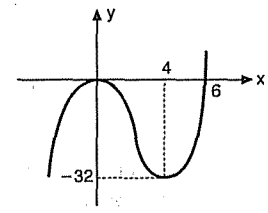

**11.** **Grafiği yanda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ B) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ C) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

D) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ E) $y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

**12.** **Grafiği yanda verilen y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

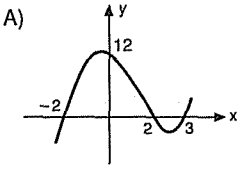


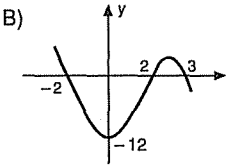

A) $y = x^3 + 6x$ B) $y = x^3 - 6x$ C) $y = x^3 + 6x^2$

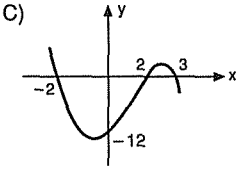
D) $y = x^3 - 6$ E) $y = x^3 - 6x^2$

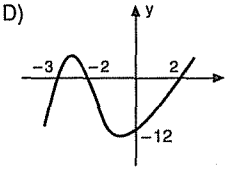
**13.** $y = (x^2 - 4).(3 - x)$

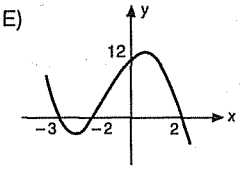
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**9-B** **10-A** **11-D** **12-E** **13-C**

# TÜREV UYGULAMA

TEST - 18

**1.** $y = \dfrac{ax^2 + b}{x^2 + cx + 4}$

**fonksiyonunun asimptotları yalnız bir noktada kesiştiğine ve a + c = 5 olduğuna göre a kaç olabilir?**

A) – 3 B) 1 C) 0 D) 5 E) 7

**2.** $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

**fonksiyonunun yatay asimptotu y = m, düşey asimptotu x = n ve $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{3}$ olduğuna göre, $\dfrac{a}{d}$ kaçtır?**

A) $-\dfrac{3}{2}$ B) $-\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{2}{5}$

**3.** $y = \dfrac{(m-3)x^3 - 4x + 1}{x^2 + x - 3}$

**eğrisinin eğik asimptotu y = 3x – 1 olduğuna göre, m kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

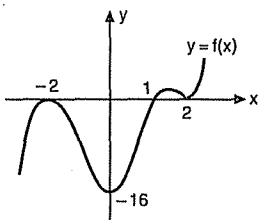
**4.** $y = \sqrt{x^2 - 1}$

**eğrisinin asimptotlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) y = 2x B) y = – 2x C) y = – x

D) $y = -\dfrac{1}{2}x$ E) $y = \dfrac{1}{2}x$

**5.** **Grafiği yanda verilen y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = (x^2 - 1).(x^2 - 2)$

B) $y = (x^2 - 2).(x - 1)$

C) $y = (x - 1).(x^2 - 4)^2$

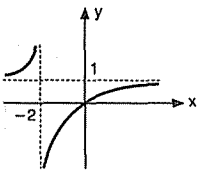
D) $y = (x + 2)^2.(x^2 - 1)$

E) $y = (x^2 - 4).(x - 16)$

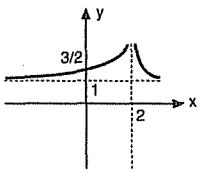
**6.** $y = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

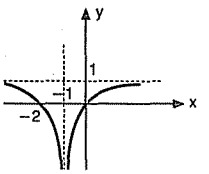
A)



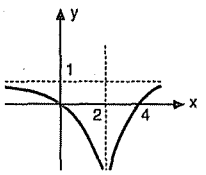

B)



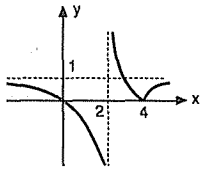

C)




D)




E)

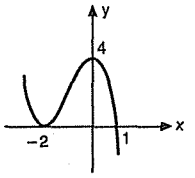


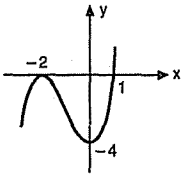

**1-B** **2-B** **3-D** **4-C**

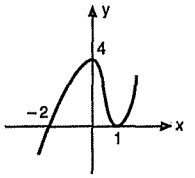
**5-C** **6-D**

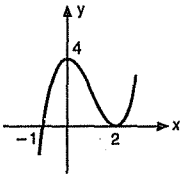
**7.** $y = (x-2)^2.(x+1)$

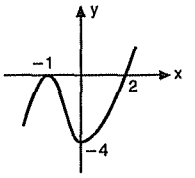
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

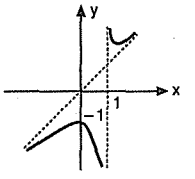

C) 

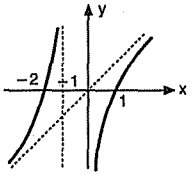

D) 

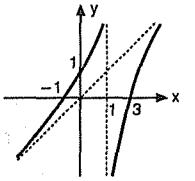

E) 

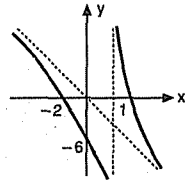

**8.** $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$

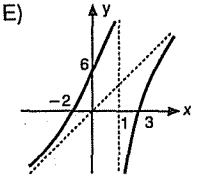
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

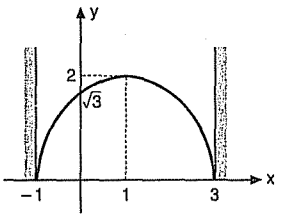

B) 


C) 


D) 


E) 


**9.** **Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

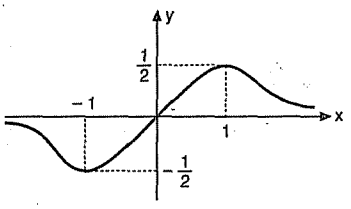
B) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

C) $y = \sqrt{-x^2 + 2x - 3}$

D) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

E) $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

**10.**




**Grafiği yukarıda verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = \dfrac{x}{x+1}$

B) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

C) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

D) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

E) $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 1}$

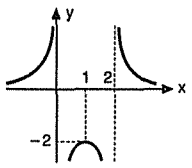
**7-D** **8-E** **9-D** **10-D**

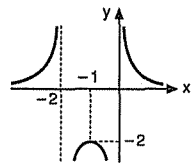
# TÜREV UYGULAMA

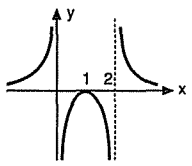
TEST - 19

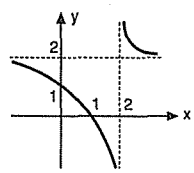
**1.** $y = \dfrac{2}{x(x-2)}$

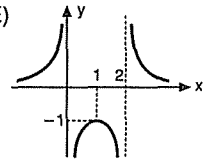
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

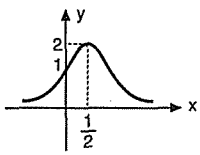

C) 

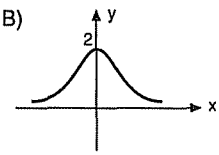

D) 

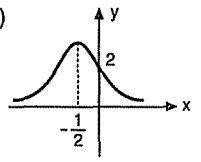

E) 

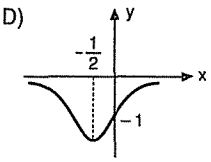

**2.** $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$

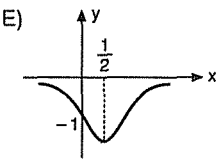
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 


B) 

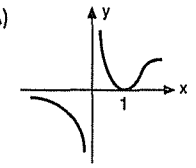

C) 

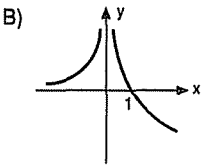

D) 

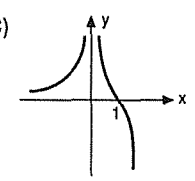

E) 

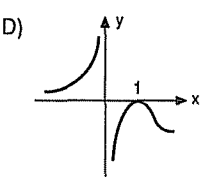

**3.** $y = \dfrac{x-1}{x^3}$

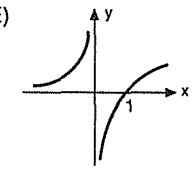
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

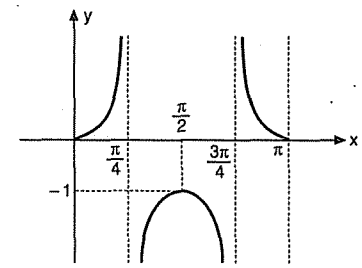
A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**4.** 


**x ∈ [0, π] için grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

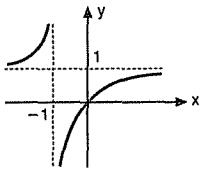
A) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ B) $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ C) $y = \dfrac{\cos x}{\sin 2x}$

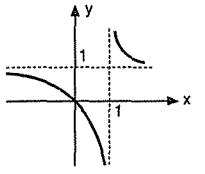
D) $y = \sec x$ E) $y = \sin x \cos 2x$

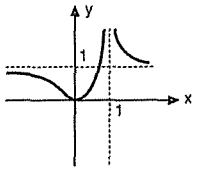
**1-A** **2-C** **3-E** **4-B**

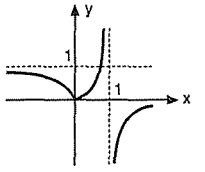
**5.** $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

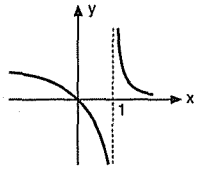
**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

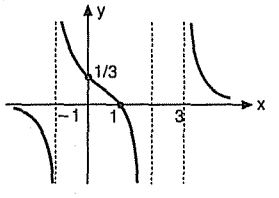

B) 


C) 


D) 


E) 


**6.** **Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = \dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$

B) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

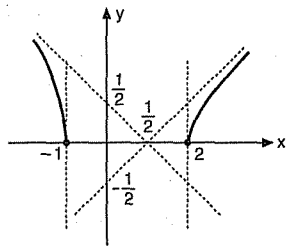
C) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$

D) $y = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

E) $y = \dfrac{-1}{x^2-2x-3}$

**5-C** **6-B**

**7.** **Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$

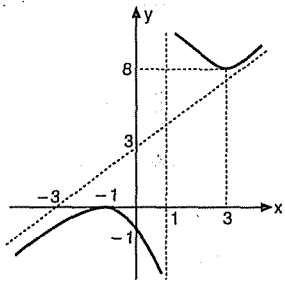
B) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$

C) $y = \sqrt{x^2-x-2}$

D) $y = \sqrt{-x^2-2x+3}$

E) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$

**8.** **Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**




A) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

B) $y = \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$

C) $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

D) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

E) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

**7-C** **8-C**

# 12. ÜNİTE: İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

## İNTEGRAL

### A) BELİRSİZ (Sınırsız) İNTEGRAL

Türevi f(x) olan F(x) ifadesine f(x) in belirsiz integrali (veya f(x) in ilkel fonksiyonu) denir.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

şeklinde gösterilir.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 + 10 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 - 99 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Buradan $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x.dx$ her iki tarafın integralini aldığımızda f(x) fonksiyonunun ilkelini bulmuş oluruz. Ancak burada bir C integral sabitinin var olabileceğini unutmamalıyız.

- $(x^2+C)' = 2x$ ise $\int 2xdx = x^2 + C$ dir.
- $(\sin x + C)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + C$

**Uyarı:**

$\int f(x)\, dx$ integralini bulmak için türevi f(x) olan fonksiyonun arandığına dikkat ediniz.

**Belirsiz İntegralin Özellikleri**

1) $d\int f(x).dx = f(x).dx$

2) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = \int\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] dx = f(x)$

3) $\int dF(x) = F(x) + C$

4) $\int a.f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx, \quad a \in R$

5) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

6) $\int f(x)\, dx = \int f(t)\, dt = \int f(u)\, du = .....$

**Örnek:**

$f(x) = \int (x^2 + x - 1)\, dx$ **fonksiyonunun x = 2 apsisli noktadaki teğetinin eğimi kaçtır?**

**Çözüm:**

Yukarıdaki 2 nolu özellik gereği $f'(x) = x^2 + x - 1$ dir.

O halde teğetinin eğimi;

$f'(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$ bulunur.

**Örnek:**

$\int x.f(x)\, dx = x^3 - 2x^2 + 3$ ise, **f(x) fonksiyonunu bulalım.**

**Çözüm:**

Tanım gereğince

$(x^3 - 2x^2 + 3)' = x.f(x)$

$3x^2 - 4x = x.f(x) \Rightarrow f(x) = 3x - 4$

bulunur.

**Örnek:**

$\int d(\cos x)$ **ifadesinin eşitini bulalım.**

**Çözüm:**

Yukarıdaki 3 nolu özellik gereği $\int d(\cos x) = \cos x + C$ dir.

**İNTEGRAL ALMA FORMÜLLERİ**

Türev konusunda gördüğümüz formüllerden yararlanarak aşağıdaki integral formüllerini yazabiliriz.

- $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$

- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

**Örnek:**

$\int \left(3x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt{x} - 5\right) dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \left(3x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt{x} - 5\right) dx$$

$$= \int 3x^2\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int 5\,dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\ln|x| + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 5x + C$$

$$= x^3 + 2\cdot\ln|x| + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} - 5x + C$$

**Örnek:**

$\int \left(e^x - 3^x + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \left(e^x - 3^x + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int e^x\,dx - \int 3^x\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + \arctan x + C$$

**Örnek**

$\int \left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

**İntegralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int \sin x\,dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\cos x - \cot x + C$$

**Örnek:**

$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\,dx$$

$$= \int (1-\cos x)\,dx = x - \sin x + C$$

## İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

### DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

Göstermiş olduğumuz integral alma formüllerine benzemeyen fonksiyonları değişken değiştirerek bu formüllere benzetip daha sonra integrallerini alacağız. Bunun için;

$\int f(x)\,dx$ integralinde

$x = g(t)$ dönüşümü yapılır ve her iki tarafın türevi alınırsa $dx = g'(t).dt$ elde edilir ve integral x değişkeninden, t değişkenine dönüştürülerek

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)).g'(t)\,dt$$

şeklinde yazılır.

**Örnek:**

$\int (x + a)^{10}\, dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = x + a$ denilirse $du = dx$ olur.

$$\int (x + a)^{10}\, dx = \int u^{10}.du = \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{11}.(x + a)^{11} + C \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$$\int \frac{x^2 - 3}{x^3 - 9x + 6}\, dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = x^3 - 9x + 6$ denilirse $du = (3x^2 - 9)\, dx$

buradan $du = 3(x^2 - 3)\, dx$

$$(x^2 - 3)\, dx = \frac{du}{3} \quad \text{yazılabilir.}$$

Bunları integralde yerine yazarsak

$$\int \frac{(x^2 - 3)}{u}.dx = \int \frac{du}{3u}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 9x + 6| + C \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$\int e^{x^2+1}.x\,.dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t = x^2 + 1$ denilirse $dt = 2x.dx$ olur.

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2+1}.2x.dx = \frac{1}{2}\int e^t.dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x\, dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = \cos^2 x$ denilirse $du = -2\cos x.\sin x\, dx$

$du = -\sin 2x.dx$ olur.

$$-\int e^u.du = -e^u + C$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$\int (x^2 - 3x + 4)^5.(2x - 3)\, dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = x^2 - 3x + 4$ denilirse $du = (2x - 3)dx$ olur.

$$\int u^5.du = \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 4)^6 + C \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$\int \cot x\,.dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \cot x.dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \quad \text{tir.}$$

$\sin x = u$ denilirse $\cos x\, dx = du$ olur.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

**Örnek:**

$\int \frac{dx}{x.\sin^2(\ln x)}$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t = \ln x$ denilirse $dt = \frac{dx}{x}$ olur.

$\int \frac{1}{\sin^2(\ln x)} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{\sin^2 t} \cdot dt$

$= -\cot|t| + C = -\cot|\ln x| + C$ bulunur.

**Örnek:**

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$x = at$ denilirse $dx = a.dt$ olur.

$\int \frac{a.dt}{a^2 + (at)^2} = \int \frac{a.dt}{a^2(1 + t^2)}$

$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan t + C$

$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ bulunur.

**Örnek:**

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$x = at$ denilirse $dx = a\,dt$ olur.

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a.dt}{\sqrt{a^2 - (at)^2}} = \int \frac{a.dt}{a\sqrt{1 - t^2}}$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

## KISMÎ (PARÇALI) İNTEGRAL YÖNTEMİ

$\int f(x) \,.\, g(x)\, dx$ biçiminde iki fonksiyonun çarpımının integrali, değişken değiştirme yöntemi ile bazen alınmayabilir. Böyle fonksiyonların daha kolayca integrallenebilmesini sağlamak amacıyla kısmî (parçalı) integralleme aşağıdaki gibi yapılır.

$\int u.dv = u.v - \int v\, du$

$u = f(x)$, $dv = g(x)dx$ dir.

u ve dv nin seçiminde kesin bir kural olmamakla birlikte türevi alındığında azalan fonksiyona, logaritmik ve ters trigonometrik fonksiyonlara u denir.

$e^x.dx$, $\sin x.dx$, ..... gibi fonksiyonlara dv denir.

Kısmi integrasyon formülü aşağıdaki çarpım durumundaki fonksiyonların integrasyonunda kolaylık sağlar.

- $\int P(x).e^{ax}\,dx$
- $\int P(x).\sin(ax).dx$, $\int P(x).\cos(ax).dx$
- $\int P(x).\ln(ax).dx$, $\int a^{ax}.\sin(ax).dx$

**Örnek:**

$\int x.e^x\,dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x.dx \Rightarrow v = e^x$ tir.

$\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x.dx$

$= x.e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$ bulunur.

**Örnek:**

$\int x^2.\sin x\ dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x.dx$

$dv = \sin x\ dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$\int x^2.\sin x\ dx = x^2(-\cos x) - \int -\cos x.2x\ dx$$

$$I = -x^2\cos x + 2\underbrace{\int x.\cos x\ dx}_{A}$$

A integralinde tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$A = \int x.\cos x\ dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\ dx \Rightarrow v = \sin x$

$A = x.\sin x - \int \sin x\ dx$

$A = x.\sin x + \cos x$ bulunur.

$I = -x^2\cos x + 2A$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$ bulunur.

**Örnek:**

$\int x.\ln x\ dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = x.dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x.\ln x\ dx = \ln x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2.\ln x - \frac{1}{2}\int x\ dx$$

$$= \frac{x^2}{4}[2\ln x - 1] + C$$

**Örnek:**

$\int \arctan x\ dx$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = \arctan x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \arctan x\,dx = \arctan x\,.\,x - \int \frac{x.dx}{1+x^2}$$

$$= x.\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= x.\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

**KESİRLİ** (RASYONEL) **FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ**

1. $\int \dfrac{m}{(ax+b)^n}\ dx$ **integrali**

**u = ax + b dönüşümüyle çözülür.**

**Örnek:**

$$\int \frac{2}{(3x-1)^{10}}\ dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$u = 3x - 1 \Rightarrow du = 3.dx$

$$\int \frac{2}{(3x-1)^{10}}\ dx = \int \frac{2}{u^{10}}.\frac{du}{3} = \frac{2}{3}\int u^{-10}.du$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{u^{-10+1}}{-10+1} + C = \frac{2}{3}.\frac{1}{-9.u^9} + C$$

$$= -\frac{2}{27}.\frac{1}{(3x-1)^9} + C \text{ bulunur.}$$

2. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **rasyonel ifadesinde payın (P(x)) derecesi paydanın (Q(x)) derecesinden büyük veya eşitse pay paydaya bölünür.**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

**Örnek:**

$$\int \frac{x^2+x+5}{1+x^2}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+5 & x^2+1 \\ \hline -\,x^2+1 & 1 \\ \hline x+4 & \end{array} \quad \Rightarrow \frac{x^2+x+5}{x^2+1} = 1 + \frac{x+4}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2+x+5}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 + \frac{x+4}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan x + C$$

**3.** $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **integrali**

i) $ax^2+bx+c$ polinomu çarpanlarına ayrılıyorsa ifade basit kesirlerine ayrılarak integrali alınır.

- $\frac{x+3}{(x+1).(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$
- $\frac{2x+1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+4}$
- $\frac{x-1}{(x+1).(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

ii) $ax^2+bx+c$ ifadesi çarpanlarına ayrılmıyorsa;

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{t}{a} + C \quad \text{veya}$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$$

ifadelerinden yararlanılarak integralleri alınır.

**Örnek:**

$$\int \frac{2x-3}{x^2+x-2}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\frac{2x-3}{(x+2).(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{2x-3}{(x+2).(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2).(x-1)}$$

$$2x-3 = (A+B)x + 2B - A$$

İki polinomun eşitliğinden

$$A+B=2$$
$$2B-A=-3$$

$3B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{7}{3}$ bulunur.

$$\int \frac{2x-3}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \frac{7/3}{x+2}\,dx + \int \frac{-1/3}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{7}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

**Uyarı:**

$\frac{2x-3}{(x+2).(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$ den

A ve B yi daha kısa yoldan şöyle bulabiliriz.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$$A = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(-2)-3}{-2-1} = \frac{7}{3}$$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$B = \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2.1-3}{1+2} = \frac{-1}{3}$$

Bu kural bu tipteki basit kesirlerde geçerlidir.

**Örnek:**

$$\int \frac{dx}{x^2+3}$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$u = \frac{x}{\sqrt{3}}$ dersek $du = \frac{dx}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,du = dx$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}.du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$ bulunur.

Bu soru $x = \sqrt{3}u$ dönüşümüyle de çözülebilir. Bu tip soruların bir formülle hemen bulunduğunu daha önce söylemiştik.

**Örnek:**

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4-4+6} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + C$$

bulunur.

**Örnek:**

$$\int \frac{x+2}{(x-1).(x^2+2)}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\frac{x+2}{(x-1).(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$x+2 = A(x^2+2) + (Bx+C).(x-1)$$

$$x+2 = Ax^2 + 2A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$x+2 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (2A-C)$$

$A+B=0$, $C-B=1$

$A=-B$ $2A-C=2$

$2A-B=3$

$2A+A=3 \Rightarrow 3A=3$

$A=1$

$A=1$, $B=-1$, $C=0$ bu durumda

$$\int \frac{x+2}{(x-1).(x^2+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+0}{x^2+2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}\right| + C \text{ bulunur.}$$

## KÖKLÜ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

**A) Basit köklü integrallerde değişkeni köklü ifadeyi ortadan kaldıracak şekilde seçmeliyiz.**

$\sqrt{P(x)} \Rightarrow t^2 = P(x)$

$\sqrt[3]{P(x)} \Rightarrow t^3 = P(x)$ dönüşümü yapılır.

**Örnek:**

$$\int \sqrt{2x-9}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t^2 = 2x-9 \Rightarrow 2t\,dt = 2dx$

$t\,dt = dx$

$$\int \sqrt{2x-9}\,dx = \int \sqrt{t^2}.t.dt = \int t^2.dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x-9}\right)^3 + C$$

**Örnek:**

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t^2 = x^2 + 5 \Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx \Rightarrow t\,dt = x\,dx$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{t.dt}{t} = \int dt$$

$$= t + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

**Örnek:**

$$\int \frac{x.dx}{\sqrt{x-2}}$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t^2 = x - 2 \Rightarrow 2t\,dt = dx$ ve $x = t^2 + 2$

$$\int \frac{(t^2+2).2t.dt}{\sqrt{t^2}} = 2\int (t^2+2)dt$$

$$= 2.\left(\frac{t^3}{3} + 2t\right) + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$$

**Örnek:**

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

Kökün dereceleri 2 ve 3 olduğundan okek (2, 3) = 6 dır.
Dolayısıyla $t^6 = x + 1$ dönüşümü yapılır.

$t^6 = x + 1 \Rightarrow 6t^5\,dt = dx$

$$= \int \frac{\sqrt{t^6}+2}{\sqrt[3]{t^6}} . 6t^5\,dt$$

$$= \int \frac{t^3+2}{t^2} . 6t^5\,dt = 6\int (t^3+2)t^3\,dt$$

$$= 6\int (t^6 + 2t^3)\,dt = 6\left(\frac{t^7}{7} + 2\frac{t^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7 + 3\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^4 + C$$

**B) Aşağıdaki köklü ifadelerin bulunduğu integrallerde karşılarındaki dönüşümler yapılır.**

$r \in R$ olmak üzere

**i)** $\sqrt{r^2-x^2}$ için $x = r\sin q$

**ii)** $\sqrt{r^2+x^2}$ için $x = r\tan q$

**iii)** $\sqrt{x^2-r^2}$ için $x = r\sec q$

**Örnek:**

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$x = 4\sin q \Rightarrow dx = 4\cos q\,dq$

$$\int \sqrt{4^2-(4\sin q)^2} . 4\cos q\,dq$$

$$= \int \sqrt{4^2.(1-\sin^2 q)} . 4\cos q\,dq$$

$$= 16\int \sqrt{\cos^2 q} . \cos q\,dq$$

$$= 16\int \cos^2 q\,dq = 16\int \frac{1+\cos 2q}{2}\,dq$$

$$= 8\int (1+\cos 2q)\,dq = 8\left(q + \frac{1}{2}\sin 2q\right) + C$$

$x = 4\sin q \Rightarrow \sin q = \frac{x}{4}$

$\Rightarrow q = \arcsin\frac{x}{4}$ tür.

Dolayısıyla integral işleminin sonucu

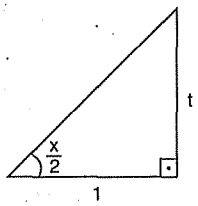
$$= 8\left[\arcsin\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right)\right] + C$$

bulunur.

## TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR CİNSİNDEN RASYONEL OLARAK İFADE EDİLEBİLEN FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ integralinde

$\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapılır.




$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Bu dönüşümler uygulandığında trigonometrik ifadeli integral t ye bağlı rasyonel bir fonksiyona dönüşmüş olur.

**Örnek:**

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$t = \tan\frac{x}{2}$ *dönüşümü ile çözelim.*

$$\int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int dt = t + C = \tan\frac{x}{2} + C$$

*bulunur.*

## SİNÜS VE KOSİNÜS CİNSİNDEN BİR POLİNOMUN İNTEGRALİ

p, q ∈ R olmak üzere

$\int \cos^p x.\sin^q x\,dx$ **bu tip integraller üç değişik şekilde karşımıza çıkar.**

**1. p ve q nun ikisi de tek sayı ise**

$p = 2m + 1,\quad q = 2n + 1,\quad m, n \in Z^+$

$$\int \cos^p x.\sin^q x\,dx = \int (\cos x)^{2m+1}.(\sin x)^{2n+1}\,dx$$

$$= \int (\cos x)^{2m}.(\sin x)^{2n+1}.\cos x\,dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^m.(\sin x)^{2n+1}.\cos x\,dx$$

şeklinde yazılır.

$u = \sin x$ ise, $du = \cos x\,dx$ dönüşümüyle integral hesaplanmış olur.

**Örnek:**

$$\int \cos^3 x.\sin^7 x\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \cos^2 x.\sin^7 x.\cos x.dx$$

$$\int (1-\sin^2 x).(\sin^7 x)\cos x\,dx$$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$$\int (1-u^2)\,u^7.du = \int (u^7 - u^9)\,du$$

$$= \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + C$$

**2. p ve q nun biri tek biri çift sayı ise**

$p = 2m,\quad q = 2n + 1,\quad m, n \in Z^+$

$$\int \cos^p x.\sin^q x\,dx = \int (\cos x)^{2m}.(\sin x)^{2n+1}.dx$$

$$\int (\cos x)^{2m}(1-\cos^2 x)^n.\sin x.dx$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$ dönüşümüyle integral hesaplanabilir.

**Örnek:**

$$\int \sin^2 x.\cos^3 x.dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\int \sin^2 x.\cos^2 x.\cos x\,dx$$

$$\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

$$\int t^2.(1-t^2)\,dt = \int (t^2 - t^4)\,dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

**3. p ve q nun her ikisi de çift sayı ise**

$p = 2m$ ve $q = 2n$ olsun.

$$\int \cos^p x.\sin^q x\,dx = \int (\cos x)^{2m}.(\sin x)^{2n}\,dx$$

$$(\cos x)^{2m} = (\cos^2 x)^m = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^m$$

$$(\sin x)^{2n} = (\sin^2 x)^n = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n$$

Bu ifadelerin yerlerine yazılmasıyla sinüs ve kosinüsün dereceleri azaltılır. Bu işleme ifade birinci dereceye indirgeninceye kadar devam edilir.

**Örnek:**

$$\int \cos^2 x.\sin^2 x\,dx$$

**integralini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right).\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right] + C \quad \text{bulunur.}$$

veya

$$\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin x.\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}.\sin^2 2x = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.(1-\cos 4x)$$

$$\int \cos^2 x.\sin^2 x\,dx$$

$$\int \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}.\sin 4x) + C \quad \text{bulunur.}$$

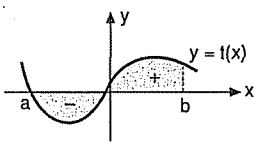
## B) BELİRLİ (Sınırlı) İNTEGRAL

**Tanım:** f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sınırlı ve sürekli olmak şartıyla f(x) in x = a, x = b doğruları ve x ekseni ile sınırlı alana f(x) fonksiyonunun bu aralıktaki **belirli integrali** denir.

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

şeklinde gösterilir.

f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki integrali Ox ekseninin üst kısmında pozitif, alt kısmında ise negatiftir.




$\int_a^b f(x)\,dx$ integrali şekildeki pozitif ve negatif alanların cebirsel toplamıdır.

Bu integralde a ya alt sınır, b ye üst sınır, x e de integral değişkeni denir.

**Örnek:**

$$\int_2^3 (4x^3 - 2x + 2)\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\int_2^3 (4x^3 - 2x + 2)\,dx = \left(4\frac{x^4}{4} - 2.\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^3$$

$$= (x^4 - x^2 + 2x)\Big|_2^3$$

$$= (3^4 - 3^2 + 2.3) - (2^4 - 2^2 + 2.2)$$

$$= (81 - 9 + 6) - (16 - 4 + 4) = 62 \quad \text{bulunur.}$$

### BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

f(x) ve g(x), [a, b] aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- a < b < c olmak üzere,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b m\,f(x)\,dx = m\int_a^b f(x)\,dx, \quad (m \in R)$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
- $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx$ ise,

$F'(x) = v'(x).f(v(x)) - u'(x).f(u(x))$ tir.

**Örnek:**

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\left[\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right] + \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= -[-1 - 0] + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$$\int_1^e \left(\frac{x^2+3}{x}\right) dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\int_1^e \left(\frac{x^2}{x}+\frac{3}{x}\right) dx = \int_1^e x\,dx + 3\int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^e + 3\ln|x|\Big|_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 3\ln e - 3\ln 1$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 3 - 0$$

$$= \frac{e^2+5}{2} \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$$\int_a^b (2x+3)\,dx = 50 \quad \text{ve} \quad b-a=5$$

**olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\int_a^b (2x+3)\,dx = \left(\frac{2x^2}{2}+3x\right)\Big|_a^b = (x^2+3x)\Big|_a^b$$

$b^2 + 3b - a^2 - 3a = 50$

$b^2 - a^2 + 3(b-a) = 50$

$(b-a)(b+a) + 3(b-a) = 50$

$5.(b+a) + 3.5 = 50$

$5.(a+b+3) = 50$

$a + b + 3 = 10 \Rightarrow a + b = 7$ bulunur.

**Örnek:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^3 2x . \sin 4x\ dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$\sin 4x = 2.\sin 2x.\cos 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^3 2x . 2.\sin 2x.\cos 2x . dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^4 2x . 2\cos 2x . dx$$

$(u = \sin 2x \Rightarrow du = 2.\cos 2x\,dx)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} u^4.du = \frac{u^5}{5} = \frac{1}{5}\sin^5 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\sin^5 2\cdot\frac{\pi}{12} - \sin^5 0\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sin^5\frac{\pi}{6} - \sin^5 0\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 0 = \frac{1}{160} \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek:**

$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} 2t^3\,dt$$

**olduğuna göre, F′(1) kaçtır?**

**Çözüm:**

$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} 2t^3 dt \text{ ise}$$

$F'(x) = (x^2)'2(x^2)^3 - (3x)'2.(3x)^3$

$= 2x.2x^6 - 3.2.3^3.x^3$

$F'(1) = 4 - 162$

$F'(1) = -158$ bulunur.

## ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

### 1) Mutlak Değer Fonksiyonunun İntegrali

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

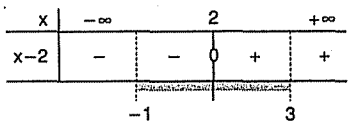
Mutlak değer fonksiyonunun işaret değiştirdiği yerde integral parçalanır.

**Örnek:**

$$\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**




$$\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx = \int_{-1}^{2} (-x+2)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{2^2}{2} + 2.2\right) - \left(-\frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{3^2}{2} - 2.3\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2.2\right)$$

$$= -2 + 4 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ bulunur.}$$

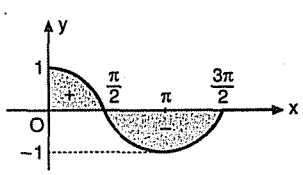
**Örnek**

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,dx$$




$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 - 0 - (-1 - 1)$$

$$= 1 - (-2)$$

$$= 3 \text{ bulunur.}$$

### 2) İşaret (Signum) Fonksiyonunun İntegrali

$$f(x) = \operatorname{sgn} g(x) = \begin{cases} 1, & g(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & g(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & g(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

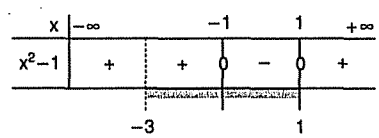
Verilen aralıkta önce işaret fonksiyonu tanımlanır. $f(x) = 0$ için fonksiyon süreksiz olduğundan integral parçalanır.

**Örnek:**

$$\int_{-3}^{1} \operatorname{sgn}(x^2 - 1)\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**




Buna göre

$$\int_{-3}^{-1} 1\,dx + \int_{-1}^{1} -1\,dx$$

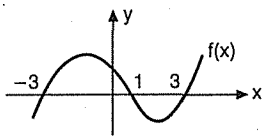
$$= x\Big|_{-3}^{-1} + (-x)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -1 - (-3) - (1 - (-1))$$

$$= -1 + 3 - 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

f(x) fonksiyonunun grafiği yanda verildiğine göre;




$\int_{-2}^{2} \text{sgn}(f(x))\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

Şekilde f(x) fonksiyonunun işareti bellidir. Buna göre;

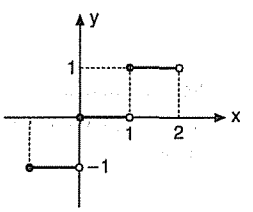
$\int_{-2}^{2} \text{sgn}(f(x))\,dx = \int_{-2}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{2} (-1)\,dx$

$= x\Big|_{-2}^{1} + (-x)\Big|_{1}^{2}$

$= 1 - (-2) - (2 - 1) = 3 - 1 = 2$ bulunur.

### 3) Tam Kısım (Değer) Fonksiyonunun İntegrali

$[\![ f(x) ]\!]$ fonksiyonunun grafiğinde de görüldüğü gibi $f(x) \in Z$ için fonksiyon süreksizdir. Dolayısıyla fonksiyon bu noktalarda integrallenemediği için integral parçalanarak sınırları değiştirilir.




$[\![ ax + b ]\!]$ fonksiyonunun sınırları parçalanırken sınır uzunluğu $\left|\frac{1}{|a|}\right|$ *birim uzunluğunda parçalanır.*

Fonksiyonun bu değişim aralığında tam değer fonksiyonunun tanımı yapılır ve integrali alınır.

**Örnek:**

$\int_{-2}^{1} [\![ x + 3 ]\!]\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

Fonksiyonun değişim aralığı 1 dir. Buna göre;

$\int_{-2}^{-1} 1\,dx + \int_{-1}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{1} 3\,dx$

$= x\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-1}^{0} + 3x\Big|_{0}^{1}$

$= [-1 - (-2)] + [2.0 - 2(-1)] + [3.1 - 3.0]$

$= -1 + 2 + 2 + 3 = 6$ bulunur.

**Örnek:**

$\int_{-1}^{4} \left( [\![ \frac{x}{2} ]\!] + 3 \right) dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

**Çözüm:**

Tamdeğer fonksiyonunun değişim aralığı

$d = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ dir.

Buna göre;




$\int_{-1}^{0} (-1+3)dx + \int_{0}^{2} (0+3)dx + \int_{2}^{4} (1+3)dx$

$= 2x\Big|_{-1}^{0} + 3x\Big|_{0}^{2} + 4x\Big|_{2}^{4}$

$= [0 - 2(-1)] + [3.2 - 0] + [4.4 - 4.2]$

$= 2 + 6 + 16 - 8 = 16$ bulunur.

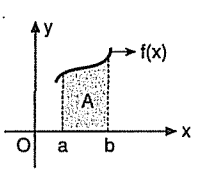
## C) İNTEGRALİN UYGULAMALARI

### EĞRİ ALTINDAKİ ALAN

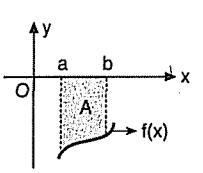
$f : [a, b] \to R$ ye tanımlı ve bu aralıkta sürekli olmak şartıyla

$\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$

integralinin değerine x = a dan x = b ye kadar f(x) eğrisi ve x - ekseni arasındaki alan denir.

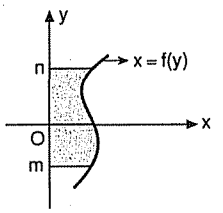



$A = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$



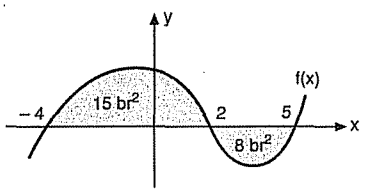

$A = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Eğer $x = f(y)$ eğrisi $y = m$ ve $y = n$ doğruları ile sınırlı, $f(y)$ eğrisi ve y - ekseni arasındaki bölgenin alanı ise




$$A = \int_m^n f(y)\,dy \quad \text{dir.}$$

**Uyarı:**




**a)** Yukarıda verilen f(x) fonksiyonuna göre,

$$\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

integral değerinin bulunması için; x - ekseninin üstünde kalan alan (+), x - ekseninin altında kalan alan (–) alınarak toplama işlemi yapılır.

$$\int_{-4}^{5} f(x)\,dx = 15 - 8 = 7$$

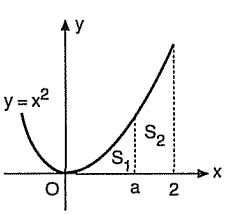
**b)** [−4, 5] aralığında f(x) eğrisi ile x - ekseni arasındaki alanın değeri kaçtır?

Alan negatif olmayacağından x ekseninin altında ve üstünde kalan alanların mutlak değerce toplamı alınır.

$$\int_{-4}^{5} |f(x)|\,dx = |15| + |-8| = 15 + 8 = 23 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

Yandaki şekilde $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $S_1$ ve $S_2$ alanları arasında $3S_1 = S_2$ bağıntısı bulunduğuna göre, a kaçtır?




**Çözüm:**

$3S_1 = S_2$ ise

$$3\int_0^a x^2\,dx = \int_a^2 x^2\,dx$$

$$3.\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{x^3}{3}\Big|_a^2$$

$$a^3 - 0 = \frac{2^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$a^3 + \frac{a^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{4a^3}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

bulunur.

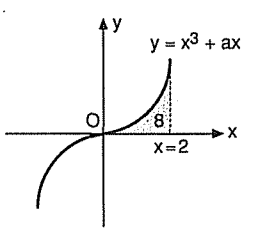
**Örnek:**

**a > 0 şartı ile $y = x^3 + ax$ eğrisi x ekseni ve $x = 2$ doğrusu ile sınırlı alan 8 br² olduğuna göre, a kaçtır?**

**Çözüm:**

$y = x^3 + ax = x(x^2 + a)$

$a > 0 \Rightarrow x^2 + a = 0$ denkleminin reel kökü yoktur.




$$\int_0^2 (x^3 + ax)dx = 8$$

$$\left(\frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 8$$

$$\left(\frac{2^4}{4} + a\frac{2^2}{2}\right) - 0 = 8$$

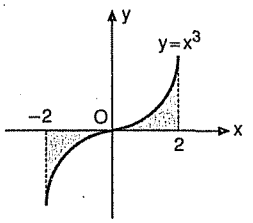
$4 + 2a = 8 \Rightarrow a = 2$ dir.

**Örnek:**

**a)** **Yandaki şekilde taralı alan kaçtır?**

**b)** $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**




**Çözüm:**

**a)** $$\int_{-2}^{2} |x^3|\,dx = \int_{-2}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= -\left[0 - \frac{(-2)^4}{4}\right] + \left[\frac{2^4}{4} - 0\right]$$

$= 4 + 4 = 8\ br^2$ bulunur.

**b)** $$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}$$

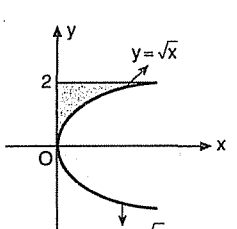
$= 4 - 4 = 0$ bulunur.

**Örnek:**

**$y^2 = x$ eğrisi, $y = 2$ doğrusu ve y - ekseni arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**

**Çözüm:**

Soruda bahsedilen kapalı bölge şekildeki gibidir.

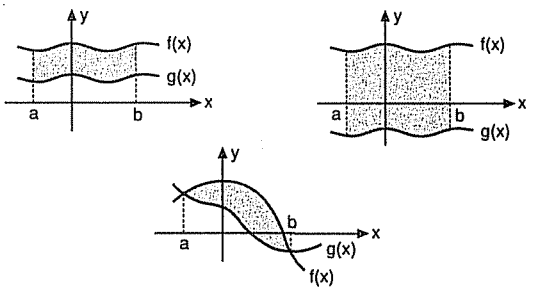



Buna göre;

$$\int_{0}^{2} x\,dy = \int_{0}^{2} y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}\ br^2 \text{ bulunur.}$$

**İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN**




Yukarıdaki üç şekilde de görülen bölgenin alanı;

$$\text{Alan} = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,dx \quad \text{tir.}$$

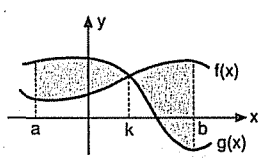
Eğer $f(x) - g(x) > 0$ ise;

$$\text{Alan} = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$$

$f(x) - g(x) < 0$ ise;

$$\text{Alan} = \int_{a}^{b} -[f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{tir.}$$

İki eğri arasındaki alan yandaki gibi ise




$$\text{Alan} = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,dx$$

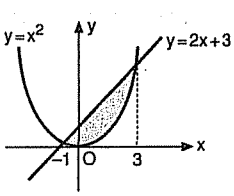
$$= \int_{a}^{k} [g(x) - f(x)]\,dx + \int_{k}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{tir.}$$

**Örnek:**

**$y = x^2$ eğrisi ile $y = 2x + 3$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**

**Çözüm:**

Doğru ile eğriyi ortak çözerek kesim noktalarını bulalım.




$x^2 = 2x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1,\ x = 3$ tür. Buna göre

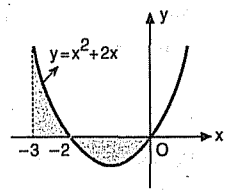
$$A = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx = \left(2\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \left(9 + 3.3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 + 9 - 9 + \frac{5}{3} = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}\ br^2 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

**Yandaki grafiği verilen fonksiyonda gösterilen taralı bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**




**Çözüm:**

$$A = \int_{-3}^{0} |f(x)|\,dx$$

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)\,dx - \int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

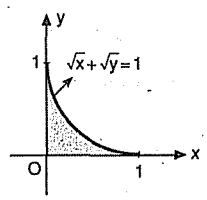
$$= \left(\frac{-8}{3} + 4\right) - \left(\frac{-27}{3} + 9\right) - \left[0 - \left(\frac{-8}{3} + 4\right)\right]$$

$$= \frac{-8}{3} + 4 + 0 + \left(\frac{-8}{3} + 4\right) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}\ br^2 \text{ dir.}$$

**Örnek:**

Yandaki şekilde denklemi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ olan fonksiyonun grafiği verilmiştir.

**Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**




**Çözüm:**

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2$$

$$= 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$A = \int_0^1 (1 + x - 2\sqrt{x})\,dx$$

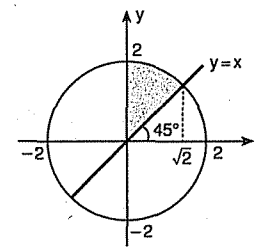
$$= \left(x + \frac{x^2}{2} - 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}\ br^2 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

**$y = \sqrt{4-x^2}$ ile $y = x$ eğrisi arasındaki alan kaç $br^2$ dir?**

**Çözüm:**




İstenilen alan şekilde de görüldüğü gibi $x^2 + y^2 = 4$ daire alanının $\frac{1}{8}$ idir.

Buna göre; $A = \frac{\pi . 2^2}{8} = \frac{\pi}{2}\ br^2$ bulunur.

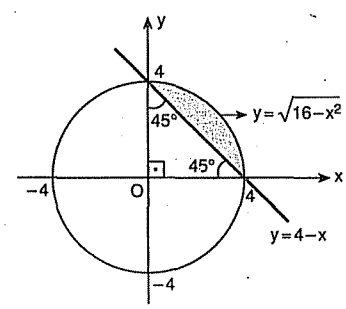
**Örnek:**

$$\int_0^4 \left[\sqrt{16 - x^2} - (4 - x)\right] dx$$

**integralinin sonucu kaçtır?**

**Çözüm:**

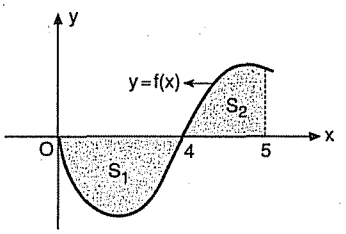
$\sqrt{16 - x^2}$ çemberi ile $y = 4 - x$ doğrusu arasındaki alan isteniyor. Buna göre;




Taralı alanı bulmak için çeyrek daireden üçgenin alanını çıkarmalıyız.

$$\frac{\pi.4^2}{4} - \frac{4.4}{2} = 4\pi - 8 = 4(\pi - 2)\ br^2 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**




f, grafiğinin bir parçası yukarıdaki şekilde verilen bir fonksiyondur.

$\int_0^5 f(x)\,dx = -\frac{25}{3}$ ve $S_1 = \frac{32}{3}$ br$^2$

**olduğuna göre, $S_2$ kaç br$^2$ dir?**

**Çözüm:**

$$\int_0^5 f(x)\,dx = -\frac{25}{3}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx = -\frac{25}{3}$$

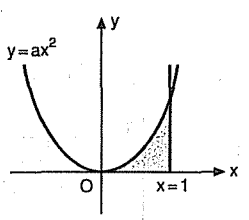
$$-\frac{32}{3} + S_2 = -\frac{25}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{3}\text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

$f : R \to R$ ye $a > 0$ koşuluyla $f(x) = ax^2$ fonksiyonu veriliyor.

**Bu fonksiyonun grafiği, Ox ekseni ve $x = 1$ doğrusu arasında kalan alan 2 br$^2$ olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?**

**Çözüm:**




$$S = \int_0^1 ax^2\,dx = 2$$

$$a\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = 2$$

$$\frac{a}{3} - 0 = 2 \Rightarrow a = 6 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

**Denklemi $y = x^2$ ve $y^2 = 8x$ olan eğrilerin sınırladığı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

**Çözüm:**

Verilen denklemler ortak çözülürse,

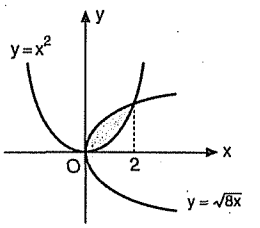
$y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4 = 8x$

$x^4 - 8x = 0$

$x.(x^3 - 8) = 0$

$x = 0$ veya

$x = 2$ bulunur.




$$S = \int_0^2 \left(\sqrt{8x} - x^2\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx$$

$$= \left(2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{3}\sqrt{2}.2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) - (0)$$

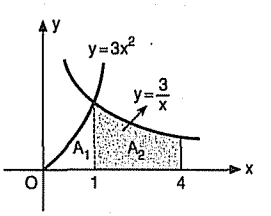
$$= \frac{8}{3}\text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

**$y = 3x^2$ ve $y = \frac{3}{x}$ eğrileri ile x - ekseni ve $x = 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

**Çözüm:**

Önce bu iki eğrinin ortak çözümünü yaparak kesim noktasını bulalım.




$$3x^2 = \frac{3}{x}$$

$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$$A_1 = \int_0^1 3x^2\,dx \quad \text{ve} \quad A_2 = \int_1^4 \frac{3}{x}\,dx$$

$$= 3.\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \qquad = 3.\ln x\,\Big|_1^4$$

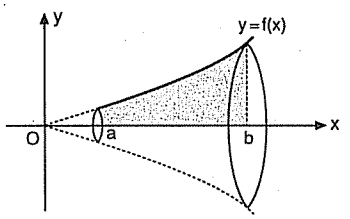
$$= 1 - 0 \qquad = 3.\ln 4 - 3\ln 1$$

$$= 3.\ln 4$$

O halde $A_1 + A_2 = 1 + 3\ln 4$ br$^2$ bulunur.

## DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ

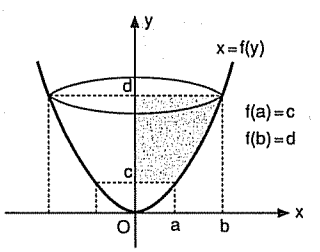
**1)** $y = f(x)$ denklemiyle tanımlanan eğrinin [a, b] aralığına ait parçanın Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesinden elde edilen cismin hacmi




$$\vartheta_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

$$= \pi\int_a^b y^2\,dx$$

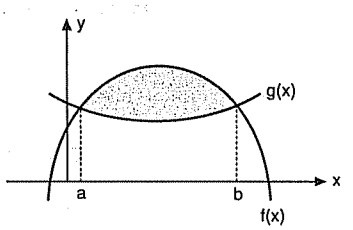
**2)** Aynı şekilde $x = f(y)$ denklemiyle tanımlanan [c, d] aralığına ait parçanın Oy ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmi:




$$\vartheta_y = \pi\int_c^d [f(y)]^2\,dy$$

$$= \pi\int_c^d x^2\,dy \text{ dir.}$$

**3)** İki eğri arasında kalan alanın Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesinden elde edilen şeklin hacmi:

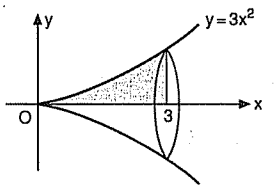



$$\vartheta_x = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,dx \text{ tir.}$$

**Örnek:**

**$y = 3x^2$ eğrisi ile $x = 3$ doğrusu ve eksenler arasında kalan alanın Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç $br^3$ tür?**

**Çözüm:**




$$\vartheta_x = \pi\int_0^3 y^2\,dx = \pi\int_0^3 9x^4\,dx$$

$$= \pi 9\frac{x^5}{5}\Big|_0^3$$

$$= \frac{9\pi}{5}(3^5 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{5}\cdot 3^7 \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**

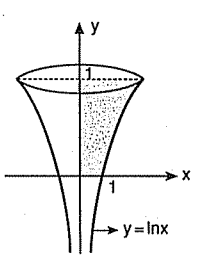
**$y = \ln x$ eğrisi ile $y = 1$ doğrusu ve eksenler arasında kalan bölgenin Oy ekseni etrafında 360° döndürülmesinden oluşan cismin hacmi kaç $br^3$ tür?**

**Çözüm:**

$y = \ln x$

$x = e^y$

$x^2 = e^{2y}$ dir.




$$\vartheta_y = \pi\int_0^1 x^2.dy = \pi\int_0^1 e^{2y}.dy$$

$$= \pi\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 - e^0)$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $\int \frac{2x^2+\sqrt{x}}{x}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $x^2+\sqrt{x}+C$ B) $x^2+2\sqrt{x}+C$ C) $2x^2-\sqrt{x}+C$

D) $2x+\sqrt{x}+C$ E) $x^2+\frac{1}{2}\cdot x+C$

**2.** $\int \sin x.\cos 2x\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2}{3}\cos^3 x+C$ B) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+C$

C) $3\cos^3 x+C$ D) $\cos x-2\cos^2 x+C$

E) $2\cos x-3\cos^3 x+C$

**3.** $\int (1+2x^2)^6.x\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{7}(1+2x^2)^7+C$ B) $(1+2x^2)^7+C$

C) $\frac{1}{28}(1+2x^2)^7+C$ D) $\frac{1}{28}(x+x^3)^7+C$

E) $\frac{1}{7}(2x^2+1)^5+C$

**4.** $\int \cos^3 x\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sin x-\cos x+C$

B) $\sin^3 x-\cos x+C$

C) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

D) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\cos x+C$

E) $\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

**5.** $\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln^4 x+C$ B) $x.\ln^5 x+C$ C) $\frac{1}{5}\ln^5 x+C$

D) $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$ E) $\frac{1}{5}\ln^5(\ln x)+C$

**6.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln x-2\sqrt{x}+C$ B) $\ln\sqrt{x}-4x+C$

C) $\sqrt{x}\ln x+C$ D) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$

E) $2x\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+C$

**1-B** **2-B** **3-C** **4-C** **5-C** **6-D**

**7.** $\int \frac{\tan^2(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\tan(\tan x) + C$ B) $\tan(\sin x) + C$

C) $\tan^2(\sin x) + C$ D) $x\tan x + \sin x + C$

E) $\tan(\tan x) - \tan x + C$

**8.** $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$

B) $\frac{2}{3}(x+1)^3 - \sqrt{x+1} + C$

C) $\sqrt{x+1} - (x+1) + C$

D) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + C$

E) $\frac{1}{2}\sqrt{x+1} + (x+1) + C$

**9.** $\int \frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\cos x}\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sin x + 2\cos x + C$ B) $\sin x - 2\cos x + C$

C) $\cos x - 2\sin x + C$ D) $\cos x + 2\sin x + C$

E) $2\sin x.\cos x + C$

**10.** $\int \sin^3 x.\cos^3 x\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $6\cos^6 x - 4\cos^4 x + C$

B) $4\sin^4 x - 6\sin^6 x + C$

C) $\frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + C$

D) $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

E) $\frac{1}{6}\sin^6 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

**11.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\arctan x + C$ B) $2\arctan\frac{1}{\sqrt{x}} + C$

C) $2\arctan 2\sqrt{x} + C$ D) $2\arctan\sqrt{x} + C$

E) $2\arctan 2x + C$

**12.** $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ B) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

C) $2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$ D) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

E) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C$

**7-E** **8-D** **9-B** **10-C** **11-D** **12-B**

**13.** $\int x^2.\ln x\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$ B) $\frac{x^3}{3}(\ln x - 3) + C$

C) $\frac{x^3}{3}(\ln x + 3) + C$ D) $x^3(\ln x - \frac{1}{3}) + C$

E) $x^3(\ln x + 3) + C$

**14.** $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\frac{1}{2}\sin^2 x - \cos x + C$

B) $\frac{1}{2}\sin^2 x - \sin x + C$

C) $\frac{1}{2}\sin x - \cos x + C$

D) $\frac{1}{2}\cos^2 x + \cos x + C$

E) $\frac{1}{2}\cos^2 x + 2\cos x + C$

**15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

**integralinde x = 4 sinu dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int \cos u\ du$ B) $\int \sin u\ du$ C) $\int \sec u\ du$

D) $\int \operatorname{cosec} u\ du$ E) $\int du$

**16.** $\int \frac{\sin 2x - 1}{\sin^2 x}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\ln|\cos x| + \cot x + C$

B) $2\ln|\sin x| + \cot x + C$

C) $2\ln|\sin x| - \cot x + C$

D) $2\ln|\cos x| - \cot x + C$

E) $2\ln|\sin 2x| + \cot x + C$

**17.** $\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + 2}{\sqrt{x+1}}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{5}{6}(x+1)^{\frac{5}{6}} + 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

B) $\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + 4(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

C) $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}} + 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

D) $3(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + C$

E) $\frac{1}{4}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^2 + C$

13-A 14-A 15-E

16-B 17-B

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $\int \frac{2x^2+\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{2x^2}{x}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$

$= 2\int x\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= 2.\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$

$= x^2 + 2.\sqrt{x} + C$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.** $\int \sin x.\cos 2x\,dx = \int \sin x\left[2.\cos^2 x - 1\right]dx$

$= -\int \sin x\,dx + \int 2.\cos^2 x.\sin x\,dx$

$= \cos x + \int 2.\cos^2 x.\sin x\,dx$

$\cos x = u$ denirse $-\sin x\,dx = du$ olur.

$= \cos x - 2\int u^2.du$

$= \cos x - 2.\frac{u^3}{3} + C$

$= \cos x - \frac{2}{3}.\cos^3 x + C$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**3.** $\int (1+2x^2)^6.x\,dx$

$1 + 2x^2 = u$ denirse $4x\,dx = du$ olur.

$\int (1+2x^2)^6.dx = \frac{1}{4}\int u^6\,du = \frac{1}{4}.\frac{u^7}{7} + C$

$= \frac{1}{28}.(1+2x^2)^7 + C$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $\int \cos^3 x.dx = \int \cos^2 x.\cos x\,dx$

$= \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x = u$ denirse $\cos x.dx = du$ olur.

$= \int (1-u^2)\,du = u - \frac{1}{3}u^3 + C$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.** $\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$

$\ln x = u$ denirse $\frac{1}{x}dx = du$ olur.

$= \int u^4.du = \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{(\ln x)^5}{5} + C$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

$\ln x = u$ ise $\frac{1}{x}dx = du$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dv$ ise $2\sqrt{x} = v$ olur.

Kısmi integrasyon formülüne göre yerlerine yazılırsa,

$= 2\sqrt{x}.\ln x - \int 2\sqrt{x}.\frac{1}{x}\,dx$

$= 2\sqrt{x}.\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= 2\sqrt{x}.\ln x - 4\sqrt{x} + C$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** $\int \frac{\tan^2(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx$

$\tan x = u$ denirse $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$ olur.

$$\int \frac{\tan^2(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan^2(u)\,du$$

$$= \int (1 + \tan^2 u - 1)\,du$$

$$= \int (1 + \tan^2 u)\,du - \int du$$

$$= \tan u - u + C$$

$$= \tan(\tan x) - \tan x + C$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$x + 1 = t^2$ denirse $dx = 2t.dt$

$$\int \frac{t^2-1}{t} 2.t.dt = 2\int (t^2 - 1)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + C$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**9.** $\int \frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\cos x}\,dx$

$$= \int \left[\frac{\cos^2 x}{\cos x} + \frac{2\sin x.\cos x}{\cos x}\right] dx$$

$$= \int (\cos x + 2\sin x)\,dx$$

$$= \sin x - 2\cos x + C$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**10.** $\int \sin^3 x.\cos^3 x\,dx$

$$= \int \sin^2 x.\cos^3 x.\sin x\,dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x).\cos^3 x.\sin x\,dx$$

$\cos x = u$ denirse $-\sin x\,dx = du$

$$= \int (u^2 - 1)\,u^3\,du$$

$$= \int (u^5 - u^3)\,du$$

$$= \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**11.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

$x = t^2$ denirse $dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{2t.dt}{(t^2+1).t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**12.** $\int \frac{dx}{x^2-1}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$1 = A(x-1) + B(x+1)$

$x = 1$ için $B = \frac{1}{2}$

$x = -1$ için $A = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|x-1| - \ln|x+1|] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**13.** $\int x^2.\ln x\ dx$

$\ln x = u$ ise $\frac{1}{x}dx = du$

$x^2.dx = dv$ ise $\frac{x^3}{3} = v$

Kısmi integrasyon formülünde yerine yazılırsa

$= \frac{1}{3}x^3.\ln x - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{3}\cdot x^3.\ln x - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}x^3 + C$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin x\ .\ \sin^2 x}{1+\cos x}dx$

$= \int \frac{(1-\cos^2 x).\sin x}{1+\cos x}dx$

$= \int (1-\cos x)\sin x\ dx$

$= \int \sin x\ dx - \int \cos x.\sin x\ dx$

$= -\cos x - \int \cos x.\sin x\ dx$

$\sin x = u$ denirse $\cos x\ dx = du$

$= -\cos x - \int u.du$

$= -\cos x - \frac{u^2}{2} + C$

$= -\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

$x = 4\sin u$ denirse $dx = 4\cos u\ du$ olur.

$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos u\ du}{\sqrt{4^2-4^2.\sin^2 u}}$

$= \int \frac{4\cos u\ du}{4\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{\cos u\ du}{\cos u}$

$= \int du$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** $\int \frac{\sin 2x - 1}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{2\sin x.\cos x - 1}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{2\sin x.\cos x}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$= 2.\ln|\sin x| + \cot x + C$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**17.** $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx$

Kök kuvvetleri 3 ve 2 olduğundan

OKEK(2, 3) = 6 dır.

$x + 1 = u^6$ denirse $dx = 6.u^5\ du$ olur.

$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{u^2+2}{u^3}6.u^5\ du$

$= 6\int (u^4 + 2u^2)\ du$

$= 6\left[\frac{u^5}{5} + 2.\frac{u^3}{3}\right] + C$

$= \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + 4.(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 2 (Çözümlü)

**1.** $\int \frac{dx}{x.\ln x}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln(\ln x) + C$ B) $\ln(\frac{1}{x}) + C$ C) $x.\ln x + C$

D) $x^2.\ln x + C$ E) $2\ln x + C$

**2.** $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\arcsin x + \sqrt{x} + C$

B) $3x + \sqrt{1+x^2} + C$

C) $\arccos x + \sqrt{1+x^2} + C$

D) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} + C$

E) $3\arcsin x + \sqrt{1+x^2} + C$

**3.** $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) a B) $\pi a$ C) $\pi a^2$

D) $\frac{\pi + a^2}{2}$ E) $\frac{a^2\pi}{2}$

**1-A** **2-E** **3-E**

**4.** $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}.\sin 2x\, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**5.** $\int_0^{2} \sqrt{x^3 + 2x + 4}.(6x^2 + 4)\, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 11 B) 14 C) $\frac{105}{4}$

D) $\frac{200}{3}$ E) $\frac{224}{3}$

**6.** $\int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{16-x^2} - x\right).dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $2\pi$

**4-A** **5-E** **6-E**

**7.** $y = \ln x$ eğrisi, x ekseni ve $x = b$ $(b > 1)$ ile sınırlı bölgenin alanı $(b + 1)$ br$^2$ olduğuna göre, b kaçtır?

A) $e^2$ B) $\frac{e^2}{2}$ C) e D) 2 E) $\frac{e}{2}$

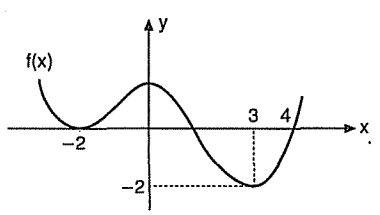
**8.** $f(x) = 1 + \ln x$ olmak üzere,

$$\int_0^{\ln c} d(f^{-1}(x)) = \frac{99}{e}$$

olduğuna göre, c kaçtır?

A) 100 B) 80 C) 66 D) 33 E) 11

**9.**




Yukarıdaki şekile göre

$$\int_{-2}^{3} (f'(x) + f''(x))\, dx$$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 2 C) 0 D) −1 E) −2

**10.** $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ eğrisi ile $x = \frac{\pi}{2}$ doğrusu ve Ox ekseni arasında kalan alanın, Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br$^3$ tür?

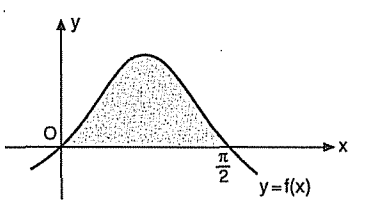
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi^2 - 8\pi}{16}$ E) $\frac{2\pi - \pi^2}{4}$

**11.** $y = x - 2$, $y = \frac{x}{2} - 2$ doğruları ile x ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin, Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br$^3$ tür?

A) $\frac{8\pi}{3}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\pi$ E) $4\pi$

**12.**




Yukarıdaki şekilde $f(x) = \sin x . \cos x$ fonksiyonu ile $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ ve Ox ekseni arasında kalan taralı bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br$^3$ tür?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{4\pi^2}{15}$

D) $\frac{\pi^2}{8}$ E) $\frac{\pi^2}{16}$

7-A 8-A 9-E

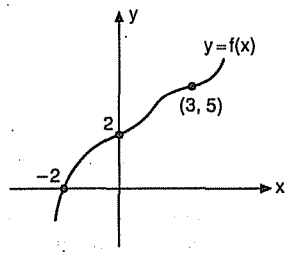
10-D 11-A 12-E

**13.** $A = \{(x, y) : x.y = 0,\ y = \ln x,\ y = 3\}$

**bölgesinin oluşturduğu alan kaç $br^2$ dir?**

A) $e^3 - 1$ B) $e^2 + 1$ C) $e - 2$ D) 3 E) 4

**14.**




f(x) fonksiyonunun grafiği ve bazı noktaları yukarıda verilmiştir.

**Buna göre,**

$$\int_0^3 [2x + f'(x)]\,dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

**15.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2-\pi}{2}$ C) $\frac{\pi-3}{2}$

D) $\frac{\pi+4}{4}$ E) $\frac{4-\pi}{4}$

**16.** $\int_0^2 \frac{(x-1).d(x^2+2x)}{x^3-3x+5}$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $\ln\frac{7}{5}$ B) $\frac{2}{3}\ln 7$ C) $\frac{2}{3}\ln 5$

D) $\frac{2}{3}\ln\frac{7}{5}$ E) $\frac{2}{3}\log_5 7$

**17.** $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin 2x}$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $1-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}-2$ E) $\sqrt{2}+2$

**18.** $\int_0^{\pi} \sin 4x.\sin x\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) −1 C) −2 D) 3 E) 4

**13-A** **14-C** **15-E**

**16-D** **17-A** **18-A**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 2 (Çözümleri)

**1.** $\int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}\cdot du = \ln u + C$

$= \ln(\ln x) + C$

$(u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ tir.)

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**2.** $I = \underbrace{3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}}_{I_2}$

olmak üzere,

$I_1 = 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3 \arcsin x + C_1$

$I_2 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{t\,.dt}{\sqrt{t^2}} = \int dt = t + C_2$

$= \sqrt{1+x^2} + C_2$

$t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx \Rightarrow t\,dt = x\,dx$ dir.

$I = I_1 + I_2 = 3\arcsin x + \sqrt{1+x^2} + C$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x = a.\sin\theta \Rightarrow dx = a.\cos\theta\,d\theta$

Bu dönüşüme göre integralin sınırlarını da değiştirelim.

$x = -a$ için $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$x = a$ için $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Buna göre integral

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta\,d\theta$

$= -a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$

$= -a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos\theta|\cdot\cos\theta = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$

$= a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right]$

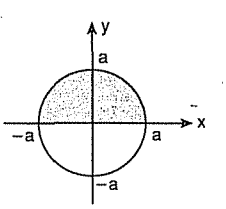
$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{2}$

$= \frac{a^2\pi}{2}$ bulunur.

**II. Yol**

$y = \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Burada merkezi orijinde, yarıçapı a olan bir çemberdir.




Taralı alan

$A_T = \frac{\pi.a^2}{2}$ br$^2$ dir.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**4.** $u = \sin^2 x \Rightarrow du = 2\sin x \cos x\, dx = \sin 2x\, dx$ olur.

$$I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx = \int e^u du$$

$$= e^u = e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\pi}$$

$$= e^{\sin^2 \pi} - e^{\sin^2 0} = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**5.** $u^2 = x^3 + 2x + 4 \Rightarrow 2u\, du = (3x^2 + 2)\, dx$ bunun her iki tarafını 2 ile çarparsak

$4u\, du = (6x^2 + 4)\, dx$ elde edilir. Buna göre integral;

$$I = \int \sqrt{u^2}.4u\, du = 4\int u^2 du$$

$$= 4\frac{u^3}{3} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3 + 2x + 4}\right)^3\Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{3}\left[\left(\sqrt{2^3 + 2.2 + 4}\right)^3 - \left(\sqrt{4}\right)^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left(4^3 - 2^3\right) = \frac{4}{3}.56 = \frac{224}{3}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

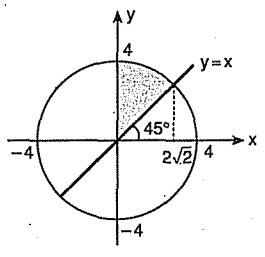
**6.** $\int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{16 - x^2} - x\right) dx$

integralini pratik yoldan çözelim

$y = \sqrt{16 - x^2}$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alan istendiğinden

$y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2$

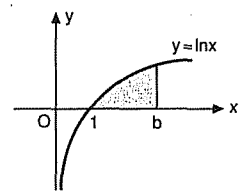
$x^2 + y^2 = 4^2$ ifadesi merkezi orijin yarıçapı 4 olan bir çember denklemidir. Buna göre;




$$A_T = \frac{\pi.4^2.45}{360} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**7.** Soruda anlatılanı şekilde gösterelim.




$A_T = (b + 1)\, br^2$

$$A_T = \int_1^b \ln x\, dx = x.\ln x - \int x.\frac{dx}{x}$$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$b + 1 = (x.\ln x - x)\Big|_1^b$$

$b + 1 = b.\ln b - b - (1.\ln 1 - 1)$

$b + 1 = b \ln b - b + 1$

$b = b(\ln b - 1)$

$\Rightarrow \ln b - 1 = 1$

$\ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$ dir.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**8.** $f(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{x-1}$

$$\int_0^{\ln c} d\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x)\Big|_0^{\ln c} = \frac{99}{e}$$

$$e^{x-1}\Big|_0^{\ln c} = \frac{99}{e}$$

$$e^{\ln c - 1} - e^{-1} = \frac{e^{\ln c}}{e} - \frac{1}{e} = \frac{99}{e}$$

$$\frac{c - 1}{e} = \frac{99}{e}$$

$c = 100$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** $\int_{-2}^{3} f'(x)\, dx + \int_{-2}^{3} f''(x)\, dx$

$$= f(x)\Big|_{-2}^{3} + f'(x)\Big|_{-2}^{3}$$

$$= f(3) - f(-2) + f'(3) - f'(-2)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$= -2 - 0 + 0 - 0$$

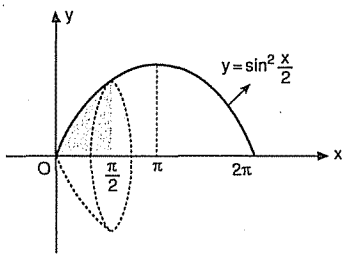
$= -2$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**Uyarı:**

$f'(3)$ ve $f'(-2)$ ifadeleri fonksiyonun sırasıyla $x = 3$ ve $x = -2$ noktalarındaki teğetinin eğimleridir.

**10.**




Yukarıdaki şekilde görülen taralı alanı Ox ekseni etrafında 360° döndürelim.

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\frac{x}{2}\,dx$$

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2=(1-\cos x)^2$$

$$4\sin^4\frac{x}{2}=1-2\cos x+\cos^2 x$$

$$4\sin^4\frac{x}{2}=1-2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$4\sin^4\frac{x}{2}=\frac{3}{2}-2\cos x+\frac{1}{2}.\cos 2x$$

$$\sin^4\frac{x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{8}\cos 2x \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{8}\right)dx$$

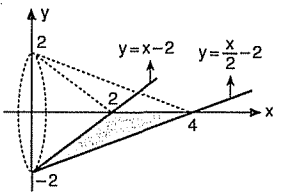
$$=\pi\left[\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{8}x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left[\frac{1}{16}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right]-(0)$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{16}\right]=\frac{-8\pi+3\pi^2}{16}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**11.** Verilen doğrular ve x ekseni arasında kalan alanı x ekseni etrafında döndürdüğümüzde yandaki şekilde görülen koni meydana gelir.




Büyük koniden küçük koninin hacmi çıkartıldığında istenilen hacim bulunur.

**1. yol:**

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi.2^2.4}{3}-\frac{\pi.2^2.2}{3}=\frac{16\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\,br^3$$

**2. yol:**

$$V_x=\pi\int_0^4\left(\frac{x}{2}-2\right)^2dx-\pi\int_0^2(x-2)^2\,dx$$

$$=\pi\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-2\right)^3\Big|_0^4-\pi\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2\pi}{3}[(0-(-8)]-\frac{\pi}{3}[0-(-8)]$$

$$=\frac{2\pi.8}{3}-\frac{8\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}\,br^3 \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.** Soruda verilen taralı alanı Ox ekseni etrafında döndürdüğümüzde meydana gelen cismin hacmi

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x.\cos^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 2x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

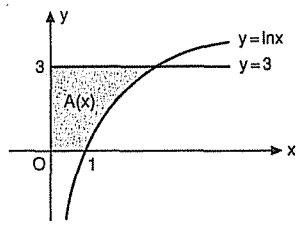
$$=\frac{\pi}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16}\,br^3 \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**13.** $xy = 0$ (x - eksenini ve y - eksenini ifade eder), $y = \ln x$, $y = 3$




$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

$$A(x) = \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 e^y\,dy$$

$$= e^y \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \text{ dir}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.** $$\int_0^3 [2x + f'(x)]\,dx = \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 f'(x).dx$$

$$= 2.\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + f(x)\Big|_0^3$$

$$= (3^2 - 0) + f(3) - f(0)$$

$$= 9 + 5 - 2 = 9 + 3 = 12$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**15.** $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x.dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-1 + 1 + \cot^2 x)\,dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)\,dx$$

$$= (-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 0 + 1 = \frac{4 - \pi}{4} \text{ tir.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**16.** $d(x^2 + 2x) = (2x + 2)\,dx$ olduğundan

$$= \int_0^2 \frac{(x-1).(2x+2)}{x^3 - 3x + 5}.dx = 2\int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 5}\,dx$$

$x^3 - 3x + 5 = u \Rightarrow (3x^2 - 3)\,dx = du$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u|$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x^3 - 3x + 5|\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\ln|2^3 - 3.2 + 5| - \frac{2}{3}\ln|5|$$

$$= \frac{2}{3}\left(\ln\frac{7}{5}\right)$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**17.** $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x.\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = [\sin x - (-\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1 \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**18.** $$\sin 4x.\sin x = -\frac{1}{2}[\cos 5x - \cos 3x]$$

olduğuna göre,

$$\int_0^{\pi} \sin 4x.\sin x.dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos 5x - \cos 3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}\sin 5\pi - \frac{1}{3}\sin 3\pi\right) - \left(\frac{1}{5}\sin 0 - \frac{1}{3}\sin 0\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}[0 - 0] = 0 \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 3 (Çözümlü)

**1.** $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

$\int_0^e f(x)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 5 C) 3 D) e E) e + 4

**2.** $f(x) = \int_1^{\sin^2 x} \sqrt{u}\,du$

**olduğuna göre,** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**3.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) $\pi$ C) $\sqrt{2}\,\pi$ D) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ E) 0

**4.** $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2|\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $-2$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) 1 E) 2

**5.** $\int_0^{\pi} [\![ \cos x ]\!] \cdot \cos x\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**6.** $\int_{-2}^{1} \sin\left( [\![ \frac{x}{2} ]\!] \cdot \frac{\pi}{3} \right) dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) $1-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

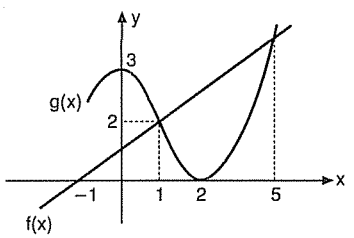
**1-B** **2-E** **3-E** **4-D** **5-C** **6-D**

**7.** $\int_{-1}^{1} [\![ x + 2 ]\!]^{\operatorname{sgn}(x-1)}\, dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

**8.**



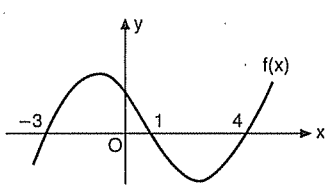

Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. **Buna göre;**

$$\int_{-1}^{0} f'(x)\, dx + \int_{-1}^{5} g'(x)\, dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**9.**



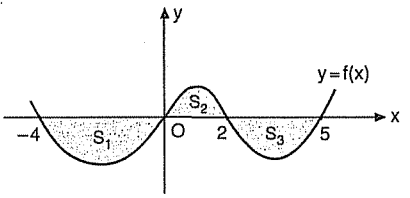

Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonu için

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn}(f(x))\, dx$$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

**10.**




Yukarıdaki şekilde y = f(x) in grafiği verilmiştir. Taralı alanlar toplamı 32 br$^2$ dir.

$$\int_{-4}^{5} f(x)\, dx = -8$$

**olduğuna göre,** $\int_{0}^{2} f(x)\, dx$ **kaçtır?**

A) −12 B) −10 C) 10 D) 12 E) 14

**11.** **$y = 4 - x^2$ eğrisi ile $y = x^2 - 4x + 4$ eğrileri arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

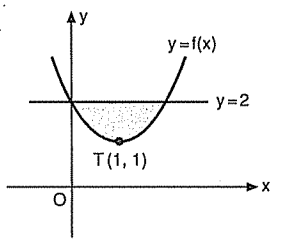
A) $\frac{8}{3}$ B) 6 C) 8 D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{24}{3}$

**12.** **$y^2 = x$ eğrisi ile $y = x - 6$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) 22 B) 25 C) $\frac{121}{6}$ D) $\frac{125}{6}$ E) $\frac{130}{7}$

**7-D** **8-E** **9-C** **10-D** **11-A** **12-D**

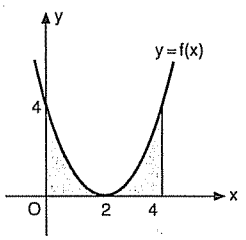
**13.**




**Yukarıdaki şekilde taralı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) 2

**14.**

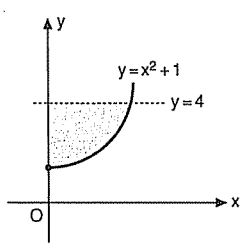



Yukarıdaki şekilde y = f(x) parabolü verilmiştir.

**Buna göre, taralı bölgelerin alanları toplamı kaç br$^2$ dir?**

A) 8 B) 9 C) $\frac{11}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{16}{3}$

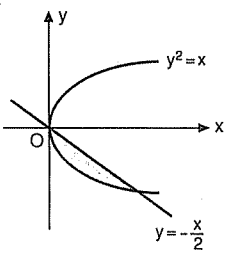
**15.**




**Yukarıdaki şekilde taralı bölgenin Oy ekseni etrafında döndürülmesinden oluşan cismin hacmi kaç br$^3$ tür?**

A) $\frac{9\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $4\pi$

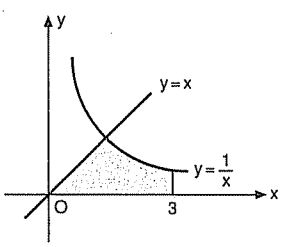
**16.**




**Yukarıdaki şekilde taralı bölgenin Oy ekseni etrafında döndürülmesinden oluşan cismin hacmi kaç br$^3$ tür?**

A) $2\pi$ B) $\frac{32\pi}{15}$ C) $\frac{16\pi}{5}$ D) $\frac{32\pi}{3}$ E) $\frac{64\pi}{15}$

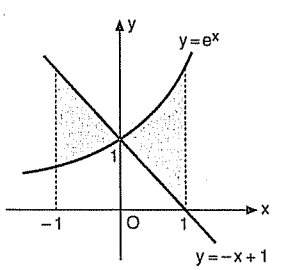
**17.**




**Yukarıdaki şekilde taralı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) ln3 D) $\frac{1+\ln 3}{2}$ E) $\frac{1+\ln 9}{2}$

**18.**




**Yukarıdaki şekilde taralı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) $e+\frac{1}{e}+1$ B) $e-\frac{1}{e}+1$ C) $e+\frac{1}{e}-1$

D) $e-\frac{1}{e}-1$ E) $e+\frac{1}{e}$

**13-A** **14-E** **15-A**

**16-E** **17-E** **18-C**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 3 (Çözümleri)

**1.** $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\int_0^e f(x)\,dx = \int_0^1 (2x+3)\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(2\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^e$$

$$= (1+3-0) + (\ln e - \ln 1)$$

$$= 4+1 = 5$$

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**2.** $f(x) = \int_1^{\sin^2 x} \sqrt{u}\,du$ ise

$$f'(x) = (\sin^2 x)' \cdot \left(\sqrt{\sin^2 x}\right) - (1)' \cdot \sqrt{1}$$

$$= 2.\sin x.\cos x.\sin x - 0$$

$f'(x) = 2\sin^2 x.\cos x$ olur.

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos\frac{\pi}{6} = 2.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**3.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapıldığında

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ oluyordu.

Buna göre

$$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(t+1)}$$

$$= -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\Big|_0^{2\pi}$$

$= (-2) - (-2) = 0$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**4.** $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2|\, dx$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$

| 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|
| + | − | + | (işaret tablosu) |

$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\, dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2$

$= \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 0\right] + \left[\left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right)\right]$

$= \frac{5}{6} - \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 1$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**5.** $\int_0^{\pi} [\![ \cos x ]\!] . \cos x\, dx$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ise, $0 < \cos x < 1$ dir.

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ise, $-1 < \cos x < 0$ dir.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0.\cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1).\cos x\, dx$

$0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = -0 + 1 = 1$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**6.** $\int_{-2}^{1} \sin\left( [\![ \frac{x}{2} ]\!] . \frac{\pi}{3} \right) dx$

$-2 \le x < 0$ ise $[\![ \frac{x}{2} ]\!] = -1$ olur.

$0 \le x < 1$ ise $[\![ \frac{x}{2} ]\!] = 0$ olur.

$\int_{-2}^{0} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) dx + \int_0^1 \sin 0\, dx$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) . x\Big|_{-2}^{0} + 0$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) . [0 - (-2)]$

$= 2.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\sqrt{3}$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**7.** $\int_{-1}^{1} [\![ x + 2 ]\!]^{\operatorname{sgn}(x-1)} dx$

$-1 \le x < 0$ ise $[\![ x+2 ]\!] = 1$ ve $\operatorname{sgn}(x-1) = -1$

$0 \le x < 1$ ise $[\![ x+2 ]\!] = 2$ ve $\operatorname{sgn}(x-1) = -1$

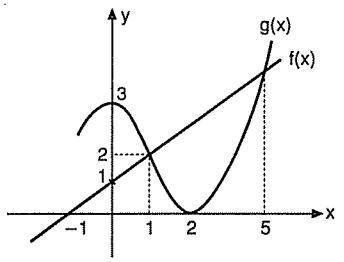
$\int_{-1}^{0} (+1)^{-1} . dx + \int_0^1 2^{(-1)}\, dx$

$\int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 \frac{1}{2} dx = x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x}{2}\Big|_0^1 = [0 + 1] + \left[\frac{1}{2} - 0\right]$

$= \frac{3}{2}$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**8.**




f(x) fonksiyonunun grafiğinden

$x = -1 \quad y = 0$

$x = 1 \quad y = 2$ olduğundan $f(x) = x + 1$

$g(5) = f(5) = 5 + 1 = 6$ ve $f(0) = 1$ bulunur.

$$\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx + \int_{1}^{5} g'(x)\,dx$$

$$= f(x)\Big|_{-1}^{0} + g(x)\Big|_{1}^{5}$$

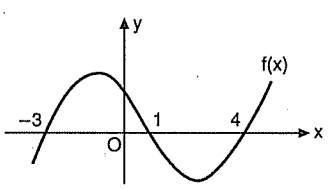
$$= [f(0) - f(-1)] + [g(5) - g(1)]$$

$$= (1 - 0) + (6 - 2)$$

$= 1 + 4 = 5$ olur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**9.**




Şekle göre

$-2 \le x < 1$ ise $\text{sgn}(f(x)) = +1$

$1 \le x < 3$ ise $\text{sgn}(f(x)) = -1$

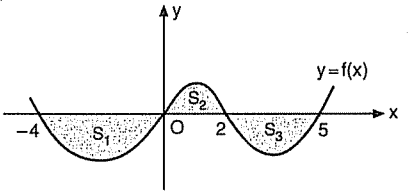
$$\int_{-2}^{1} dx - \int_{1}^{3} dx = x\Big|_{-2}^{1} - x\Big|_{1}^{3}$$

$$= (1 - (-2)) - (3 - 1)$$

$= 3 - 2 = 1$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**10.**




$$\int_{-4}^{5} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx$$

$$-S_1 + S_2 - S_3 = -8 \text{ olur.}$$

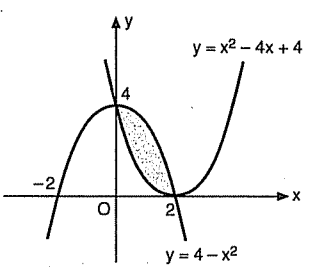
$$+\quad S_1 + S_2 + S_3 = 32 \text{ idi.}$$

$$2S_2 = 24$$

$S_2 = 12\ br^2$ olur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**11.**




$$\int_{0}^{2} [(4 - x^2) - (x^2 - 4x + 4)]\,dx$$

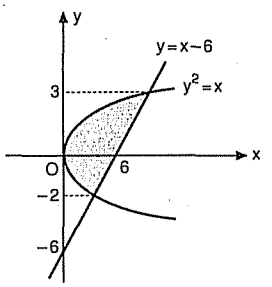
$$\int_{0}^{2} (4 - x^2 - x^2 + 4x - 4)\,dx$$

$$\int_{0}^{2} (-2x^2 + 4x)\,dx = \left(-2\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{-16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**12.**




$y = x - 6$ ise $x = y + 6$

$y + 6 = y^2$ ise $y^2 - y - 6 = 0$ ise $y = -2$ ve $y = 3$ tür.

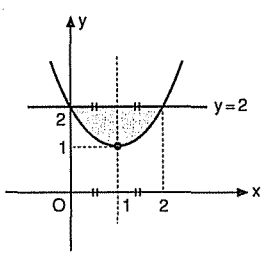
$$\int_{-2}^{3} \left[(y+6) - (y^2)\right] dy = \left(\frac{y^2}{2} + 6y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{125}{6}$$

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**13.**




$f(x) = a(x-1)^2 + 1$

$x = 0$ için $y = 2$ dir.

$2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$ olur.

$f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$

$$\int_0^2 \left[2 - [x^2 - 2x + 2]\right] dx$$

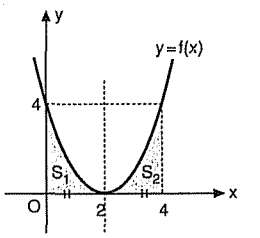
$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_0^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**14.**




$f(x) = (x-2)^2$ dir.

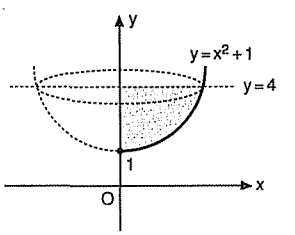
$S_1 = S_2$ olduğundan

$$T.A = 2.\int_0^2 (x-2)^2\, dx = 2\,\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= 0 - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ olur.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**15.**




$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

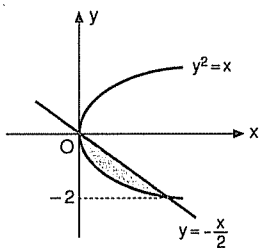
$$\pi\int_1^4 x^2\, dy = \pi\int_1^4 (y-1)\, dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(4 + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{9\pi}{2}\ br^3 \text{ tür.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**16.**




$y^2 = -2y$

$y^2 + 2y = 0$ ise $y_1 = 0$ $y_2 = -2$ olur.

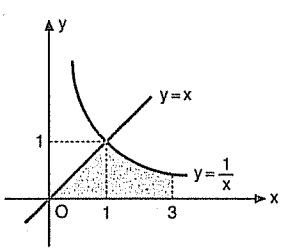
$$\pi\int_{-2}^{0}\left[(-2y)^2-(y^2)^2\right]dy = \pi\int_{-2}^{0}(4y^2-y^4)\,dy$$

$$=\pi\left[\left(4\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{0}\right]=\pi\left(+\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)$$

$$=\frac{64\pi}{15}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**17.**




$x=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ dir.

$$\int_0^1 x\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

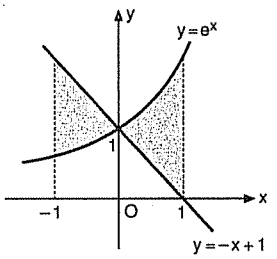
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^3$$

$$=\frac{1}{2}+\ln 3=\frac{1+2\ln 3}{2}$$

$$=\frac{1+\ln 9}{2} \text{ dir.}$$

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**18.**




$$T.A=\int_{-1}^{0}\left[(-x+1)-e^x\right]dx+\int_0^1\left[e^x-(-x+1)\right]dx$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+x-e^x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(e^x+\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1$$

$$=\left[(-1)-\left(-\frac{1}{2}-1-e^{-1}\right)\right]+\left[\left(e+\frac{1}{2}-1\right)-1\right]$$

$$=e+\frac{1}{e}-1$$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 4

**1.** $\int (e^x + e^{-x})\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x + e^{-x} + c$ B) $e^{-x} - e^x + c$

C) $e^x + x.e^{-x} + c$ D) $e^{-x} + x.e^x + c$

E) $e^x - e^{-x} + c$

**2.** $\int_{-6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[6]{e^x}}$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6(e - 1)$ B) $6(1 - e)$ C) $6(2 - e)$

D) $6(e - 2)$ E) $6(e + 1)$

**3.** $\int_{-1}^{2} 4x^3.\text{sgn}(x - 1)\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-14$ B) 0 C) 12 D) 14 E) 15

**4.** $\int_1^2 \left[ \frac{d}{dx} \int_3^x 2t\, e^{t^2 - 1}\,dt \right] dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^2 - 1$ B) $e^2 - e$ C) $e^3 - 1$

D) $e - 3$ E) 1

**5.** $\int \cos(3x - 1)\,dx$

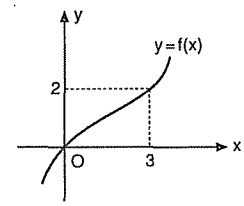
integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}\cos(3x - 1) + c$ B) $\frac{1}{3}\sin(3x - 1) + c$

C) $3\sin(3x - 1) + c$ D) $3\cos(3x - 1) + c$

E) $3\sin 3x + c$

**6.** Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




**Buna göre,**

$\int_0^3 f^2(x)\, f'(x)\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $\frac{16}{3}$

**7.** $\int 8.\cos^7 x \sin x\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sin^8 x + c$ B) $\cos^8 x + c$ C) $\sin^8 x + c$

D) $-\cos^8 x + c$ E) $\sin^4 x + c$

**8.** $\int_1^3 (x^2 - x - 3)^5.(2x - 1)\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3^5$ B) $-3^6$ C) 0 D) $3^5$ E) $3^6$

**1-E** **2-A** **3-E** **4-C** **5-B** **6-C** **7-D** **8-C**

**9.** $\int_0^2 (x+1)\, e^{(x+1)}\, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) e  B) $e^2-1$  C) $e^2+1$  D) $e^2+2$  E) $2e^3$

**10.** $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) e  B) e + 1  C) 1  D) e − 2  E) e + 2

**11.** $\int \frac{x^3+1}{x+1}\, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$  B) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

C) $x^3+x^2+x+c$  D) $\frac{x^3}{3}+x^2+2x+c$

E) $x^3-2x^2+x+c$

**12.** $\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x+c$  B) $e^{2x}+c$  C) $(e^x+1)+c$

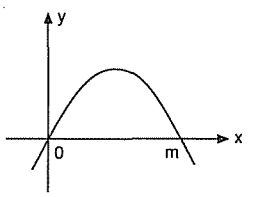
D) $\ln(e^x+1)+c$  E) $x.\ln^x+c$

**9-E** **10-D** **11-B** **12-D**

**13.** $y = 3x^2$ eğrisi ile $x = -1$ ve $x = 3$ doğruları ve x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 30  B) 28  C) 27  D) 25  E) 20

**14.** x eksenini O(0, 0) ve A(m, 0) noktalarında kesen $f(x) = x(m-x)$ parabolu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\frac{32}{3}$ $br^2$ olduğuna göre, m kaçtır?




A) 2  B) 3  C) 4  D) 5  E) 6

**15.** $y^2 = 32x$ ve $y = x^3$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) $\frac{10}{3}$  B) $\frac{20}{3}$  C) $\frac{24}{3}$  D) $\frac{28}{3}$  E) $\frac{32}{3}$

**16.** $\int_0^3 \left[\sqrt{9-x^2}-(3-x)\right] dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\pi-2$  B) $9(\pi-2)$  C) $\frac{9}{4}(\pi-2)$

D) $\frac{9}{4}(\pi+2)$  E) $\pi-8$

**13-B** **14-C** **15-B** **16-C**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 5

**1.** $\int_0^{\sqrt{3}} [\![ x^2 ]\!] . x \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

**2.** $\int_1^2 e^{-4\ln x} \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{14}{27}$

**3.** $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) secx + C B) cosecx + C C) sin2x + C

D) cosx + C E) cos2x + C

**4.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{d}{dx} (\cos 2x) \right] dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) −1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

**5.** $f(x) = 4x^2 - x + 5$ ise $\int_{-2}^{4} f'(x) \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

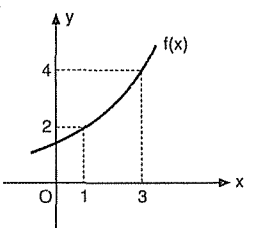
A) 28 B) 36 C) 42 D) 56 E) 62

**6.** $\int_a^b (2x - 1) \, dx = 50$ ve $a + b = 11$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**7.** Yandaki şekilde f(x) fonksiyonu verilmiştir.




**Buna göre,**

$\int_1^3 \frac{f'(x) \, dx}{f(x)}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) ln2 B) ln3 C) ln4 D) ln6 E) ln8

**8.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{11}{12}$ B) $\frac{13}{12}$ C) $\frac{11}{24}$ D) $\frac{13}{24}$ E) $\frac{15}{24}$

**1-C** **2-D** **3-A** **4-B**

**5-C** **6-C** **7-A** **8-C**

**9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2x.\cos^3x\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{15}$

**10.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) arctan x + c B) arctan $(x^2+1)$ + c

C) arctan (x + 1) + c D) arctan (x − 1) + c

E) arctan $(x^2-1)$ + c

**11.** $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 + 2e B) 1 − 2e C) $1-\frac{2}{e^2}$

D) $1-\frac{2}{e}$ E) $1+\frac{2}{e^2}$

**12.** $\int_0^2 \frac{x^2+1}{x-1}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**13.** $\int_1^5 \frac{x^2+5x+7}{x+3}\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 10 + ln2 B) 20 + ln2 C) 10 + ln3

D) 20 + ln3 E) 15

**14.** $\int_1^e \ln x\ dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) e C) e − 1 D) e + 1 E) 0

**15.** $\int x e^{1+x^2} dx$

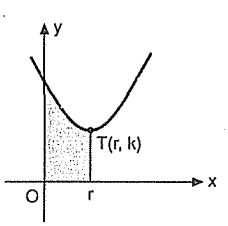
**integralinde $e^{1+x^2}$ = ccsu dönüşümü yapılırsa aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $-\frac{1}{4}\int \sin u\ du$ B) $-\frac{1}{2}\int \sin u\ du$

C) $-\frac{1}{4}\int \sin 2u\ du$ D) $\frac{1}{2}\int \sin^2 u\ du$

E) $\frac{1}{2}\int \cos^2 u\ du$

**16.** **Şekildeki parabolün denklemi $y = x^2 - 2x + 4$ ve tepe noktası T(r, k) olduğuna göre, taralı alan kaç $br^2$ dir?**




A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**9-E** **10-C** **11-D** **12-D**

**13-B** **14-A** **15-B** **16-A**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 6

**1.** $\int_{-1}^{1} (1 + x^3)^2 \, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{11}{7}$ B) $\frac{16}{7}$ C) $\frac{11}{5}$ D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{16}{5}$

**2.** $\int_{1}^{64} \frac{5.dx}{6.\sqrt[6]{x}}$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 21 C) 31 D) 41 E) 51

**3.** $\int 2.e^{-2x} \, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^{-2x} + C$ B) $-e^{-2x} + C$ C) $\frac{e^{-2x}}{4} + C$

D) $-\frac{e^{-2x}}{4} + C$ E) $-4\,e^{-2x} + C$

**4.** $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ ise $\int_{2}^{4} d(f^{-1}(x))$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) −14 B) −10 C) −6 D) −2 E) 0

**5.** $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$ ve $f(-1) = 0$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

**6.** $f(x) = \int_{x}^{0} \sqrt{4 + t^5} \, dt$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

A) −6 B) 6 C) 2 D) −2 E) $\sqrt{2}$

**7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} 64.\sin^2 x.\cos^2 x \, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\pi - 8$ B) $\pi + 1$ C) $\pi + 2$

D) $\pi - 2$ E) $2\pi + 1$

**8.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 8.\cos^2 x.\sin 2x \, dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) −3 E) −1

1-B 2-C 3-B 4-A

5-E 6-A 7-D 8-D

**9.** $\int_1^{e^4} \frac{\ln x \, dx}{x}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

**10.** $\int_0^1 (x^2 - 2x + 5) \cdot e^x \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $6e - 9$ B) $6e - 5$ C) $5e - 6$

D) $9 - 5e$ E) $5 - 6e$

**11.** $\int_0^1 e^x (x + 1) \, dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e B) $e - 1$ C) $e + 1$

D) $-e - 1$ E) 0

**12.** $\int_1^2 \frac{dx}{x(x + 1)}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln\frac{2}{3}$ B) $\ln\frac{4}{3}$ C) $\ln 4$

D) $\ln\frac{3}{4}$ E) $\ln 6$

**13.** $\int_1^2 \frac{(x^3 + 1) \, dx}{x^4 + 4x - 1}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln\sqrt{20}$ B) $\ln\sqrt[3]{20}$ C) $\ln\sqrt[4]{\frac{21}{4}}$

D) $\ln\sqrt[5]{20}$ E) $\ln\sqrt[4]{\frac{23}{4}}$

**14.** $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x - \ln(1 + e^x) + c$ B) $x + \ln(1 + e^x) + c$

C) $x^2 - x\ln(1 + e^x) + c$ D) $x^2 + x\ln(1 + e^x) + c$

E) $x - \ln(1 - e^x) + c$

**15.** **$y = x(x - 2)^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan alan kaç $br^2$ dir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

**16.** $\int_2^3 \left(\sqrt{1 - (x - 2)^2} + 1\right) dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi + 4}{4}$ B) $\frac{\pi + 3}{3}$ C) $\frac{\pi + 8}{8}$

D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**9-C** **10-A** **11-A** **12-B**

**13-E** **14-A** **15-E** **16-A**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 7

**1.** $\int_1^3 x.|x^2-4|\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{17}{2}$ B) 18 C) 16 D) 14 E) $\frac{11}{2}$

**2.** $\int_{-1}^{1} x^2.[\![x]\!]\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**3.** $f(x) = \int_1^{\ln x} e^t\,dt$

olduğuna göre, $f'(e)$ kaçtır?

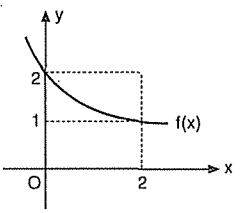
A) $1000e^6$ B) $100\,e^5$ C) $10e^6$ D) $10e^5$ E) 1

**4.** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\pi$ B) $2\pi$ C) $\pi$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

**5.** Yandaki verilen grafiğe göre,




$\int_0^2 \frac{f'(x)\,dx}{f^3(x)}$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{7}{5}$ B) $-\frac{7}{12}$ C) $-\frac{7}{14}$ D) $-\frac{3}{8}$ E) $-\frac{7}{24}$

**6.** $\int_{-1}^{0} 26(2x+1)^{12}\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1$ B) 2 C) $-3$ D) 4 E) 5

**7.** $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x.\ln^2 x}$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

**8.** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

**1-A** **2-B** **3-E** **4-C** **5-D** **6-B** **7-B** **8-A**

**9.** $\int_1^2 \frac{x^2 - x + 1}{x}\,dx$

**integralinin değeri kaçtır?**

A) $2-\ln 2$ B) $2+\ln 2$ C) $\frac{3}{2}+\ln 2$

D) $\frac{1}{2}+\ln 4$ E) $\frac{1}{2}+\ln 2$

**10.** $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 + 2x}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln\sqrt{2}$ B) $\ln 2$ C) $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\ln\frac{1}{2}$ E) $\ln 2\sqrt{2}$

**11.** $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln|x^2 + 4| + c$ B) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| + c$

C) $x^2 + 4x + c$ D) $\sqrt{x^2 + 4} + c$

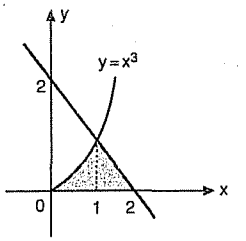
E) $x.\ln\sqrt{x^2 + 4} + c$

**12.** **$y = 4 - x^2$ parabolü ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{22}{3}$ D) $\frac{28}{3}$ E) $\frac{32}{3}$

**9-E** **10-A** **11-B** **12-E**

**13.** **Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**




A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{3}{2}$

**14.** **$y = x^3$ ve $y = mx$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı 2 $br^2$ olduğuna göre, m nin pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**15.** $\int_0^3 \left(\frac{2x - 6}{3} + \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\right) dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3\pi}{2} - 1$ B) $\frac{3\pi}{2} - 3$ C) $\frac{2\pi}{3} - 1$

D) $\frac{3\pi}{2} - 2$ E) $\frac{\pi}{3} - 1$

**16.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 x\,.\,dx$

**integralinde u = sinx dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - u^2)\,du$ B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (u^2 - 1)\,du$

C) $\int_{-1}^0 u^2\,du$ D) $\int_{-1}^0 (u^2 - 1)\,du$

E) $\int_{-1}^0 (1 - u^2)\,du$

**13-A** **14-B** **15-B** **16-E**

# İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

TEST - 8

**1.** $a > 0$ ve $\int_0^a (x^3 - x)\,dx = 2$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**2.** $\int_{-1}^{1} (x - [\![ x ]\!])\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

**3.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (8 - 8\cos^2 x)\,dx$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

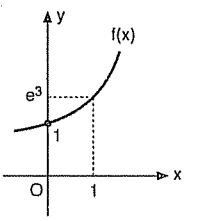
A) 1 B) 2 C) $\pi$ D) $\pi - 2$ E) $\pi + 8$

**4.** $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

**integraline göre $f'(1)$ kaçtır?**

A) 1 B) 0 C) e D) $\frac{1}{e}$ E) $-\frac{1}{e}$

**5.** Yanda verilen grafiğe göre




$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e B) $e^3$ C) 3 D) 2 E) 1

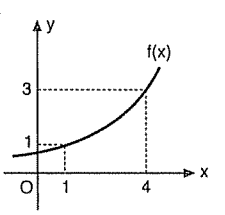
**6.** $\int_a^b f'(x).f''(x)\,dx = 0$

**olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?**

A) $f(a) = f(b)$ B) $f(a) = -f(b)$ C) $f'(a) = -f(b)$

D) $f'(a) = f'(b)$ E) $f(a) = f'(a)$

**7.** **Yandaki şekle göre,**




$$\int_1^2 f'(3x - 2).f(3x - 2)\,dx$$

**integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 3 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**1-B** **2-B** **3-D** **4-D** **5-C** **6-D** **7-D**

**8.** $\int_{-2}^{3} x.\text{sgn}x\ dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $\frac{13}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

**9.** $\int_{0}^{1} \frac{[\![ 2x ]\!] \cdot x}{[\![ 2x ]\!] + x^2} dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) ln2 B) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$ C) ln3

D) $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$

**10.** $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) ln2 B) ln3 C) $\ln\frac{3}{4}$

D) $\ln\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

**11.** $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

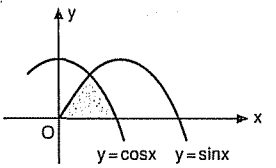
integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}\arctan e^x + C$ B) $\arctan e^x + C$

C) $-\arctan e^x + C$ D) $-\frac{1}{2}\arctan e^x + C$

E) $\arctan(e^x + 1) + C$

**12.** Şekildeki taralı alan kaç $br^2$ dir?




A) 1 B) $2-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

**13.** $y = x^2 + 4x + 4$ parabolü, x ekseni ve y ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**14.** $y^3 = x$ eğrisi, $x = 1$, $x = 27$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

**15.** $\int_{-3}^{0} \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\ dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\pi$ B) $3\pi$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\pi$ E) $\frac{5\pi}{2}$

**16.** $y^2 = 4x$ parabolü ve $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin x - ekseni etrafında 180° döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi kaç $br^3$ tür?

A) $4\pi$ B) $6\pi$ C) $8\pi$ D) $10\pi$ E) $12\pi$

8-D 9-B 10-D 11-B

12-B 13-A 14-A 15-C 16-C

# 13. ÜNİTE: MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

## MATRİSLER

i ve j sayma sayıları,

$1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ ve $a_{ij} \in R$ olmak üzere, m tane satır ve n tane sütundan oluşan

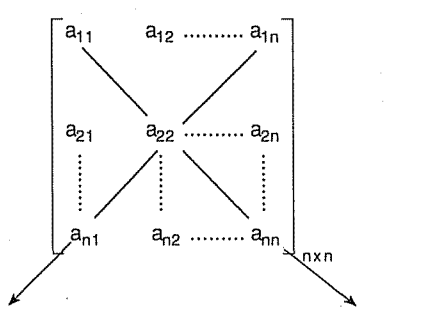
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tablosuna m x n boyutlu bir matris denir. Matrisler büyük harflerle gösterilirler. m satırlı ve n sütunlu bir A matrisi $A_{mxn}$ şeklinde veya $A = [a_{ij}]_{mxn}$ şeklinde gösterilir. Burada i ve j ye **indis** adı verilir. Bu gösteriliş tarzında $a_{ij}$ matrisin herhangi bir elemanını temsil etmektedir. Mesela $i = 2$, $j = 3$ ise 2. satır ve 3. sütundaki elemanı gösterir. Kısaca $a_{ij}$ elemanı, matrisin i. satır ve j. sütunun kesim noktasındaki elemanıdır.

### KARE MATRİS

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise denir.

Mesela; $A_{2x2}$, $A_{3x3}$ gibi matrisler kare matrislerdir.




### BİRİM MATRİS

Köşegenindeki elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 olan kare matrise **birim matris** denir ve I ile gösterilir.

Boyutunu belirtmek için $I_{nxn}$ şeklinde de gösterilebilir.

$$I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

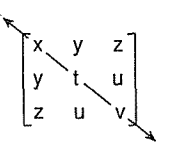
### SIFIR MATRİS

Bütün elemanları sıfır olan matrise denir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

### SİMETRİK MATRİS

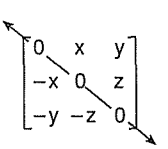
Asal köşegene göre simetrik olan elemanlar birbirine eşit iseler, bu matrise simetrik matris denir.




$i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$

### TERS - SİMETRİK MATRİS

Asal köşegen elemanları sıfır, asal köşegene göre simetrik olan elemanlarının oranı $-1$ olan matrislere denir.




$i = j$ için $a_{ij} = 0$

$i \neq j$ için $a_{ij} = -a_{ji}$

### MATRİSLERİN EŞİTLİĞİ

mxn boyutlu A ve B matrislerinde her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $A = [a_{ij}]_{mxn}$ matrisi $B = [b_{ij}]_{mxn}$ matrisine eşittir denir. A = B şeklinde gösterilir.

**Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -3 & b \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ c-2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

**A = B olduğuna göre, a + b + c toplamını bulalım.**

**Çözüm:**

Her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ olmalı.

$a_{11} = b_{11} \Rightarrow a + 1 = 4$ den $a = 3$

$a_{12} = b_{12} \Rightarrow 2 = 2$

$a_{21} = b_{21} \Rightarrow -3 = c - 2$ den $c = -1$

$a_{22} = b_{22} \Rightarrow b = 1$ bulunur.

$a + b + c = 3 + 1 + (-1) = 3$ olur.

## İKİ MATRİSİN TOPLAMI VE FARKI

m x n boyutlu iki matris $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ve $B = [b_{ij}]_{mxn}$ olsun. $C = A \pm B$ dersek her i, j için $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ şeklinde bulunur. Yani her iki matriste de aynı konumlu elemanlar toplanır veya çıkarılırlar.

**Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

matrisi veriliyor.

**C = A + B ve D = A − B olduğuna göre, C ve D matrislerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+4 & -2+8 & 3+(-1) \\ 5+0 & 0+(-6) & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1-4 & -2-8 & 3-(-1) \\ 5-0 & 0-(-6) & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -10 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

## BİR MATRİSİN BİR GERÇEL SAYI İLE ÇARPIMI

$k \in R$ ve A matrisi veriliyor. kA matrisi $k.A = [k.a_{ij}]$ şeklinde bulunur. Yani; A matrisinin bütün elemanları k gerçel sayısı ile çarpılır.

**Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$ **olduğuna göre, 3A matrisini bulalım.**

**Çözüm:**

$$3A = 3.\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 12 & 0 \\ 15 & 0 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

## İKİ MATRİSİN ÇARPIMI

$A_{m\,x\,n}$ matrisi ile $B_{k\,x\,p}$ matrisinin çarpılabilmesi için n = k olması gerekir. Sonuca C matrisi diyecek olursak, $C_{m\,x\,p}$ şeklinde bir matris olur.

$$A_{mxn} \times B_{kxp} = C_{mxp}$$

$$n = k$$

$$[c_{ij}]_{mxp} = [a_{ij}]_{mxn} \times [b_{ij}]_{kxp}$$

Çarpma işlemi şu şekilde yapılmaktadır: A matrisinin satırları ile B matrisinin sütunları çarpılır, A matrisinin u. satırı ile B matrisinin v. sütunu çarpılmışsa $c_{uv}$ elemanı bulunur. Mesela A matrisinin 2. satırı ile B matrisinin 3. sütunu çarpılmışsa $c_{23}$ elemanı bulunur.

**Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}_{3x2} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$$

matrisleri veriliyor.

**C = A.B ve D = B.A matrislerini bulalım.**

**Çözüm:**

$C = A_{3x2} \times B_{2x2} \Rightarrow C_{3x2}$ lik bir matris olur.

$D = B_{2x2} \times A_{3x2}$ olduğu için B.A çarpımı mümkün değildir.

$2 \neq 3$

C = A.B yi bulalım.

$c_{22}$ yi A nın 2. satırı ile B nin 2. sütununu çarparak buluruz.

$c_{22} = 3.2 + 1.4 = 6 + 4 = 10$

$c_{31}$ i A nın 3. satırı ile B nin 1. sütununu çarparak buluruz.

$c_{31} = -4.3 + 5.(-1) = -12 - 5 = -17$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.3 + (-2).(-1) & 1.2 + (-2).4 \\ 3.3 + 1.(-1) & 3.2 + 1.4 \\ -4.3 + 5.(-1) & -4.2 + 5.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 10 \\ -17 & 12 \end{bmatrix}$$

**Not:**

Görüldüğü gibi matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. A.B mümkün olduğu halde B.A mümkün olmayabilir. Mümkün olsa da A.B ile B.A nın sonucu farklı matrisler olurlar. Bunun istisnası olabilir. Yani, A.B nin B.A ya eşit olabileceği durumlar karşımıza çıkabilir, ancak genel olarak $A.B \neq B.A$ dır.

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3x2} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

veriliyor.

**a)** C = A.B matrisini bulalım.

**b)** D = B.A matrisini bulalım.

**Çözüm:**

**a)** $A_{3x2}.B_{2x3} = C_{3x3}$ boyut analizinden anlaşıldığı gibi sonuç 3x3 lük bir matristir.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4.2 + (-1).1 & 4.0 + (-1).6 & 4.(-3) + (-1).4 \\ 2.2 + 3.1 & 2.0 + 3.6 & 2.(-3) + 3.4 \\ 0.2 + 5.1 & 0.0 + 5.6 & 0.(-3) + 5.4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8-1 & 0-6 & -12-4 \\ 4+3 & 0+18 & -6+12 \\ 0+5 & 0+30 & 0+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -16 \\ 7 & 18 & 6 \\ 5 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

**b)** $B_{2x3}.A_{3x2} = D_{2x2}$ boyut analizinden anlaşıldığı gibi sonuç 2x2 lik bir matristir.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.4 + 0.2 + (-3).0 & 2.(-1) + 0.3 + (-3).5 \\ 1.4 + 6.2 + 4.0 & 1.(-1) + 6.3 + 4.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8+0+0 & -2+0-15 \\ 4+12+0 & -1+18+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -17 \\ 16 & 37 \end{bmatrix}$$

**Not:**

Görüldüğü gibi A.B ile B.A matrislerinin boyutları farklı çıktı. Boyutlar aynı bile olsaydı sonuçlar farklı çıkabilirdi.

## BİR KARE MATRİSİN KUVVETLERİ

$A_{nxn}$ kare matrisi veriliyor olsun;

$A^2 = A.A$

$A^3 = A.A.A = A^2.A$

şeklinde işlem yapılarak istenen kuvvete ulaşılmaya çalışılır.

**Uyarı:**

I, birim matrisinin bütün kuvvetleri kendisine eşittir. ($I^n = I$)

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**olmak üzere, $A^{15}$ matrisini bulalım.**

**Çözüm:**

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-1 \\ 3+3 & -3+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-6 & 2-2 \\ 6-6 & -6-2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8 . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^3 = -8.I = (-2)^3.I$

Her iki tarafın 5. kuvvetini alalım.

$(A^3)^5 = [(-2)^3.I]^5$

$$A^{15} = (-2)^{15}.I^{15} = (-2)^{15}.I = (-2)^{15}. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Özellik:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n.a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## BİR MATRİSİN TRANSPOZESİ (DEVRİĞİ)

Bir matrisin satırlarını sütun yapmak suretiyle bulunur. 1. satır, 1. sütun yapılır, 2. satır, 2. sütun yapılır, benzer şekilde, n. satır da, n. sütun yapılır.

$A_{mxn}$ matrisinin transpozesi;

$A^T$ veya $A^D$ şeklinde gösterilir.

Matrisin boyutu m x n ise transpozesinin boyutu n x m olur.

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

**matrislerinin transpozelerini bulalım.**

**Çözüm:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ ise } B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Transpozenin Özellikleri:**

1. $(A^T)^T = A$ dır.
2. $(k.A^T) = k.A^T$ dir. $(k \in R)$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dir.
4. $(A.B)^T = B^T.A^T$ dir.
5. $A^{-1}$ : A matrisinin tersini göstermek üzere (Bir matrisin tersi daha sonra anlatılacak)
   $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.
6. $A = A^T$ ise A matrisi simetrik matristir.
7. $A = -A^T$ ise A matrisi ters-simetrik matristir.

## DETERMİNANTLAR

Reel sayılarla oluşturulan bütün kare matrislerin kümesi M olsun.

M kümesinden reel sayılar kümesine bir D fonksiyonu tanımlayalım.

$D : M \to R$ fonksiyonunun, kare matrisi eşlediği reel sayıya, bu kare matrisin determinantı denir.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ şeklinde gösterilir.

**2x2 boyutlu matrisin determinantı:**

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$ dir.

Köşegen çarpımından, ters köşegen çarpımı çıkarılarak bulunur.

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

**matrisinin determinantını bulalım.**

**Çözüm:**

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - (-1).2 = 12 + 2 = 14$ bulunur.

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} a+2 & b+1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

**matrisinin determinantı sıfır olduğuna göre, a sayısı b nin kaç katıdır?**

**Çözüm:**

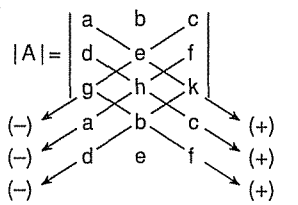
$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & b+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$2.(a+2) - 4(b+1) = 0 \Rightarrow 2a + 4 - 4b - 4 = 0$

$2a = 4b \Rightarrow a = 2b$ den 2 katı olduğu bulunur.

**3x3 boyutlu determinant hesabı için Sarrus kuralı:**

Determinantın ilk iki satırı alta eklenerek, asal köşegen hizasındaki 3 lü grupların çarpımı yapılarak toplanır. Ters köşegen hizasındaki 3 lü grupların çarpımı yapılarak toplanır. İlk toplam ile ikinci toplamın farkı alınır.




$|A| = (a.e.k + d.h.c + g.b.f) - (c.e.g + f.h.a + k.b.d)$

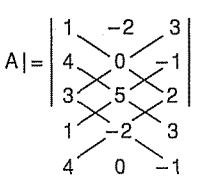
**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**olduğuna göre, |A| determinantını hesaplayalım.**

**Çözüm:**

Sarrus kuralı uygulanırsa,

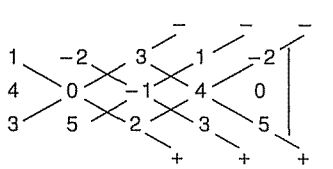



$|A| = (0 + 60 + 6) - (0 + (-5) + (-16))$

$|A| = 66 - (-21) = 87$ olur.

**Not:**

Sarrus kuralı, ilk iki sütunun sağa eklenmesi ile de uygulanabilir.




$|A| = (0 + 6 + 60) - (0 - 5 - 16) = 66 - (-21) = 87$

**Bir determinantın bir elemanının minörü (küçüğü):**

n x n boyutlu bir determinantta bir $a_{ij}$ elemanının minörünü bulmak için bu elemanın bulunduğu satır ve sütun silinir, diğer elemanlarla oluşturulan $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu determinant alınır. Buna $M_{ij}$ ($a_{ij}$ nin minörü) *denir.*

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**$a_{23}$ teriminin minörünü bulalım.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ den } M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Buna göre;

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**Bir determinantın bir elemanının kofaktörü (eşçarpanı):**

n x n boyutlu bir determinantta bir $a_{ij}$ elemanının kofaktörünü bulmak için $M_{ij}$ minörü göstermek üzere $(-1)^{i+j} . M_{ij}$ çarpımı bulunur. Buna $A_{ij}$ ($a_{ij}$ nin kofaktörü) *denir.*

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} \text{ veriliyor.}$$

**|A| da 2. satır, 3. sütun elemanının ve 2. satır, 2. *sütun elemanının kofaktörlerini bulalım.***

**Çözüm:**

$$A_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(2.4 - 0.(-1)) = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = +(2.(-6) - 0.3) = -12$$

**n x n boyutlu determinantın hesabı:**

Determinantın herhangi bir satırındaki veya sütunundaki elemanları ile kofaktörlerinin çarpımları toplanarak bulunur.

Bu durumu 3 x 3 boyutlu determinant için örnekleyelim.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A| = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$ (1. satıra göre)

$= a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23}$ (2. satıra göre)

$= a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$ (3. sütuna göre)

**Örnek:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

**determinantını hesaplayalım.**

**Çözüm:**

2. satıra göre açalım.

$5.A_{21} + 0.A_{22} + 4.A_{23}$ tür.

$A_{22}$ *nin katsayısı sıfır olduğundan bu kofaktörü hesaplamaya gerek yoktur.*

$$A_{21} = (-1)^{2+1} . \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(2 - 18) = 16$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -(12 - 3) = -9$$

Determinantın değeri

$= 5.16 + 4.(-9) = 80 - 36 = 44$

**Not:**

Bir determinantı hesaplarken, hangi satır veya sütunda daha çok sıfır varsa, o satır veya sütuna göre açılım yaparsak işlemimiz daha kolay olacaktır.

**DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ**

**1.** Bir determinantın herhangi bir satırındaki veya sütunundaki bütün elemanları sıfır ise, determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ olur.}$$

elemanları sıfır olan satıra göre açılım yapılırsa, elemanlar ile kofaktörlerinin çarpımlarından sonuç sıfır olur.

**2.** Bir determinantın herhangi iki satır elemanları veya herhangi iki sütun elemanları karşılıklı olarak birbirine eşit veya orantılı ise, determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k.a & k.b & k.c \end{vmatrix} = 0 \text{ olur.}$$

Yukarıdaki determinantta 1. satır ile 3. satır elemanları orantılıdır.

**3.** Bir determinantın herhangi iki satırı veya herhangi iki sütunu yer değiştirilirse, determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = t \text{ ise } \underbrace{\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{vmatrix}}_{\substack{\text{1. sütun ile} \\ \text{3. sütun yer değiştirdi.}}} = -t \text{ dir.}$$

**4.** Bir determinantın herhangi bir satırındaki elemanların k katı, diğer bir satır elemanlarına eklenirse, determinantın değeri değişmez. Bu özellik sütunlar için de geçerlidir.

**Örnek: 1988 - ÖYS**

$$\begin{vmatrix} 99876 & 99877 \\ 99874 & 99875 \end{vmatrix}$$

**determinantının değerini hesaplayalım.**

**Çözüm:**

1. satırın $-1$ katını 2. satıra ekleyelim.

$$\begin{vmatrix} 99876 & 99877 \\ 99874 + (-1).99876 & 99875 + (-1).99877 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 99876 & 99877 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

1. sütunun $-1$ katını 2. sütuna ekleyelim.

$$\begin{vmatrix} 99876 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 . 99876) - (-2).1) = 2 \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

**determinantını hesaplayalım.**

**Çözüm:**

1. satırın $(-2)$ katını 2. satıra

1. satırın 4 katını 3. satıra eklersek

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir.

1. sütuna göre açalım.

$1.A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31}$ dir.

$$A_{11} = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}$$

Determinantın değeri $= 1.(-42) = -42$ olur.

**5.** Bir determinantın herhangi bir satırı veya sütunu $k \in R$ sayısı ile çarpılırsa, determinantın değeri k ile çarpılmış olur.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c.k & d.k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k.b \\ c & k.d \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

**6.** Bir A matrisinin determinantı ile, transpozesinin ($A^T$) determinantı birbirine eşittir. $|A| = |A^T|$ dir.

**7.** n x n boyutlu iki kare matris A ve B olsun. Bu matrislerin çarpımlarının determinantı, determinantlarının çarpımına eşittir.

$|A.B| = |A|.|B|$ dir.

Bu özellikten yararlanarak $A^n$ nin determinantını bulalım.

$$\underbrace{|A.A.A \dots A|}_{\text{n tane}} = \underbrace{|A|.|A|.|A| \dots |A|}_{\text{n tane}}$$

$$\boxed{|A^n| = |A|^n} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

**$A^5$ matrisinin determinantını bulalım.**

**Çözüm:**

$|A^5| = |A|^5$ dir.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - (-2) = 22$$

$|A|^5 = (22)^5$ bulunur.

**Bir kare matrisin Adjointi (Ek matrisi):**

Matristeki her elemanın yerine, kofaktörünün yazılarak, transpozesinin alınmış şekline denir. Adj (A) ya da Ek (A) şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ise } \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

**Bir kare matrisin tersi:**

n x n boyutlu bir A kare matrisi için $A.B = B.A = I$ olacak şekilde bir B matrisi var ise B matrisine A nın tersi denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

$$\boxed{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I}$$

**Matrisin tersinin bulunuşu için genel formül:**

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\text{Ek}(A)}$$

2 x 2 den daha büyük boyutlu matrislerde, bu işlem test tekniğine pek uygun olmayacağından, bu formülü 2 x 2 boyutlu bir matris için açıkça yazalım.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

**matrisinin tersini bulalım.**

**Çözüm:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}.\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

**Not:**

A.X = B şeklindeki eşitliklerde bilinmeyen matrisi, ters matris vasıtasıyla bulabiliriz. Mesela X matrisi bilinmeyen matris olsun. Denklemin her iki tarafını soldan $A^{-1}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{I}.X = A^{-1}.B \Rightarrow \underbrace{I.X}_{X} = A^{-1}.B$$

$X = A^{-1}.B$ olur.

**Bir matrisin bir noktayı, başka bir noktaya dönüştürmesi**

Nokta, sütun matris olarak alınıp, dönüşüm matrisi ile sağdan çarpılırsa, yeni noktanın koordinatları bulunur.

Dönüşüm matrisi D matrisi olsun, nokta ise A noktası olsun.

$D=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve A(x, y) verilsin.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a.x+b.y \\ cx+dy \end{bmatrix}$ olur.

D matrisi A(x, y) noktasını $A'(ax+by, cx+dy)$ noktasına dönüştürür.

**Örnek: 1982 - ÖYS**

$$T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**matrisi A(1, 2) noktasını $A'(-2, 3)$ noktasına dönüştürüyor ise B(2, 4) noktasını hangi noktaya dönüştürür?**

**Çözüm:**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dir.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

**çarpımının sonucunu bulalım.**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.2.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=2.\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

Buradan $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ bulunur.

Demek ki $T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi (2, 4) noktasını

(−4, 6) noktasına dönüştürür.

**Bir Matrisin Rankı:**

Bir $A=[a_{ij}]_{m\times n}\neq 0$ matrisi verilsin. Bu matrisin terimlerinden meydana getirilecek bütün karesel alt matrisler arasında, determinantı sıfırdan farklı olanlardan mertebesi en büyük olanına A matrisinin rankı denir ve Rank(A) ile gösterilir.

**Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisin bütün karesel alt matrisleri

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$

$[2], [0], [4], [-3], [0], [-6]$ dır.

Determinantı sıfır olan karesel alt matrisler

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, [0], [0]$ dır.

Determinantı sıfırdan farklı olan karesel matrisler

$[2], [4], [-3], [-6]$ dır.

Bu matrislerden mertebeleri en büyük olanların mertebesi 1 dir. Dolayısıyla Rank(A) = 1 olur.

**Vektörlerin Lineer bağımlılığı ve bağımsızlığı:**

Düzlemde bir $\vec{v}$ vektörü $\vec{v}=(a, b)$ şeklinde gösterilir.

Bu vektörü matrisyel formda sütun matris olarak yazarız.

$\vec{v}=(a, b)=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ olur.

Uzayda bir $\vec{v}$ vektörü $\vec{v}=(a, b, c)$ şeklinde gösterilir.

Bu vektörü matrisyel formda sütun matris olarak yazarız.

$\vec{v}=(a, b, c)=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ olur.

Düzlemde herhangi iki vektörün veya uzayda herhangi üç vektörün bileşenleri ile oluşturulan determinantın değeri sıfır ise vektörler lineer (doğrusal) bağımlıdırlar denir. Determinant sıfırdan farklı olursa vektörler lineer bağımsızdırlar.

**Düzlemde:**

$\vec{v}_1=(a, b)$, $\vec{v}_2=(c, d)$ olsun.

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=0$ ise, $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$ vektörleri lineer bağımlıdırlar.

**Uzayda:**

$\vec{v}_1 = (a, b, c)$, $\vec{v}_2 = (d, e, f)$, $\vec{v}_3 = (g, h, k)$ olsun.

$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = 0$ ise, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ve $\vec{v}_3$ vektörleri lineer bağımlıdır.

**Örnek: 1991 - ÖYS**

$$[1 \;\; 2 \;\; a \;\; 5].\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [0]$$

**olduğuna göre a kaçtır?**

**Çözüm:**

1x4 lük bir matrisle 4x1 lik bir matris çarpılırsa 1x1 lik bir matris olur.

$[1.a + 2.2 + a.3 + 5.4] = [0]$

$[4a + 24] = [0]$

$4a + 24 = 0 \Rightarrow 4a = -24 \Rightarrow a = -6$ bulunur.

**Örnek: 1990 - ÖYS**

K, 2x2 türünden bir matris olmak üzere,

$K.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $K.\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $K.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ kaçtır?

**Çözüm:**

$K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ den $\begin{matrix} 3a + 2b = 0 \\ 3c + 2d = 1 \end{matrix}$ olur.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ den $\begin{matrix} -a + 0 = 2 \\ -c + 0 = 1 \end{matrix}$ olur.

$a = -2$ ve $c = -1$ bulunur. Bu değerler bir üstteki işlemde elde edilen denklemlerde yerine yazılırsa,

$3a + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0 \Rightarrow b = 3$ olur.

$3c + 2d = 1 \Rightarrow -3 + 2d = 1 \Rightarrow d = 2$ olur.

$$K.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

**Örnek: 1989 - ÖYS**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & x \end{bmatrix}$$

**matrisinin elemanları k ($k \neq 0$) kadar arttırıldığında determinantı değişmediğine göre, x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a + b + c$ B) $b + c - a$ C) $c + a - b$

D) $a + b + c$ E) $-a - b - c$

**Çözüm:**

$$\begin{vmatrix} a + k & b + k \\ c + k & x + k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & x \end{vmatrix}$$

$(a + k) . (x + k) - (b+k) . (c + k) = ax - bc$

$ax + ak + kx + k^2 - (bc + bk + kc + k^2) = ax - bc$

$ak + kx + k^2 - bc - bk - kc - k^2 = bc$

$kx = bk + ck - ak$

$kx = (b + c - a).k$

$x = b + c - a$ bulunur.

Cevap **B**

**Örnek: 1985 - ÖYS**

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix}$$

**matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{17}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{35}}{6}$

**Çözüm:**

Bir matris ile tersinin çarpımı birim matrise eşit olduğundan;

$A.A^{-1} = I$ yazabiliriz.

$A^{-1} = A$ verildiğine göre,

$A.A = I$ olur.

Yani, matrisin kendisiyle çarpımı birim matrisi verir.

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. matrisin 1. satırı ile 2. matrisin 1. sütununu çarparak, çarpım matrisinin 1. satır, 1. sütun elemanını buluruz.

$$a.a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} = 1$$

$$a^2 = 1 - \frac{1}{36}$$

$$a^2 = \frac{35}{36} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{35}}{6} \text{ olur.}$$

Cevap **E**

**Örnek: 1987 - ÖYS**

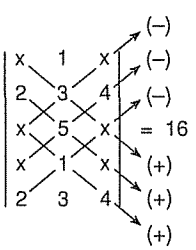
$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 \\ x & 5 & x \end{vmatrix} = 16$$

**denkleminin kökü kaçtır?**

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

**Çözüm:**

Sarüs kuralını uygulayalım.




$(3x^2 + 10x + 4x) - (3x^2 + 20x + 2x) = 16$

$3x^2 + 14x - 3x^2 - 22x = 16$

$-8x = 16$

$x = -2$ olur.

Cevap **C**

**Örnek: 1986 - ÖYS**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{1986}$$

**matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\begin{bmatrix} 3^{1986} & 2^{1986} \\ 0 & 3^{1986} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3^{993} & 2^{993} \\ 0 & -3^{993} \end{bmatrix}$

D) $3^{1986}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $9^{993}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Çözüm:**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 = 9.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her iki tarafın 993. kuvvetini alalım.

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2\right)^{993} = \left(9.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{993}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{1986} = 9^{993}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Cevap **E**

**Örnek: 1988 - ÖYS**

**$A_{m\times m}$ matrisi ve $B = A^T + A$ verildiğine göre, $B^T$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $B^{-1}$ B) B C) $A^{-1}$ D) $A^T$ E) A

**Çözüm:**

$B = A^T + A$ idi $B^T = (A^T + A)^T$ olur.

$B^T = (A^T)^T + A^T = A + A^T$ bulunur.

Görülüyor ki $B^T = B$ dir.

Cevap **B**

# MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

TEST - 1 (Çözümlü)

**1.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

**A . X = B eşitliğini sağlayan $X=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ matrisinde a + b kaçtır?**

A) – 1 B) 0 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

**2.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

**$A^T$ . B = $C^T$ olduğuna göre, det(C) kaçtır?**

A) – 4 B) – 2 C) 2 D) 3 E) 4

**3.** $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

**A . X = X + B eşitliğini sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -9 \\ -9 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix}$

**4.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 2a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix} \cdot & a \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, a . b çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 10 B) 6 C) 5 D) 4 E) – 2

**5.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

**matrisinin tersinin olmaması için a kaç olmalıdır?**

A) 4 B) 2 C) 0 D) – 2 E) – 4

**6.** $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**Rank(A) = 2 olduğuna göre, a kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

**7.** $A=\begin{bmatrix} -2^2+b & 1 & 0 \\ 2 & b^2-a & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 1 \end{bmatrix}$

**matrisi için a . b = 2 ve Rank(A) = 2 olabilmesi için $b^3 + a^3$ değeri kaç olmalıdır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**8.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ ve $A^T+A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**9.** $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

**Buna göre, $A^{2007}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) A B) $A^2$ C) $A^3$.2007

D) 2007 . $A^{2007}$ E) 2007 . I

**10.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

**matrisinin her bir elemanına 1 eklenince elde edilen matris B olduğuna göre, A . B matrisinin elemanları toplamı kaçtır?**

A) 72 B) 74 C) 56 D) 52 E) 48

**1-E 2-C 3-C 4-C 5-B 6-A 7-E 8-A 9-A 10-B**

**11.** $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & m\end{bmatrix}$

**matrisinin tersinin olmaması için m aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?**

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

**12.** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**$A^{-1}$ matrisinin 2. satır ve 3. sütunundaki elemanı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) – 1 D) 2 E) – 2

**13.** $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & ı\end{bmatrix}$ ve $\det(A) = 10$

**olduğuna göre, det(2A) kaçtır?**

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 120

**14.** $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = m$ olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix}a_1k & a_2k & a_3k\\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3\\ 3kc_1 & 3kc_2 & 3kc_3\end{vmatrix}$$

**determinantının değeri m nin kaç katıdır?**

A) $3k-1$ B) $-6k^2$ C) $3k^2-6$ D) $-2k^2$ E) k

**15.** $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$

**şeklinde ifade edilen doğrunun eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç $br^2$ dir?**

A) 0,8 B) 1 C) 1,2 D) 1,6 E) 2

**16.** $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

**$A^{-1} \cdot B = C$ olduğuna göre, det(B) kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

**17.** $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

**$A^T \cdot B = C^T$ olduğuna göre, det (C) kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) – 2 E) – 4

**18.** x pozitif reel sayıdır.

$$\begin{vmatrix}1453 & 1071 & 0\\ 1454 & 1073 & x\\ 1455 & 1075 & 2x\end{vmatrix} = A$$

**olduğuna göre, A nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x B) $\frac{x}{2}$ C) $3x+2$ D) 1 E) 0

**19.** $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**$|A^D + A^{-1}|$ determinantının değeri kaçtır?**

($A^D$: A matrisinin (transpozesi) devriğidir.)

A) 2 B) 8 C) 41 D) 42 E) 45

**20.** $\begin{vmatrix}5 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & -4\end{vmatrix}$

**Determinantının değeri kaçtır?**

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 10

**11-B 12-C 13-D 14-B 15-D**

**16-A 17-C 18-E 19-C 20-A**

# MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

TEST - 1 (Çözümleri)

**1.** $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matris çarpımı yapılırsa,

$2a + 2b = 5$

$a + b = \frac{5}{2}$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**2.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$A^T \cdot B = C^T$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + 3.4 & 2.(-2) + 3.(-3) \\ 4.3 + 5.4 & 4.(-2) + 5.(-3) \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 18 & -13 \\ 32 & -23 \end{bmatrix}$$

Buradan; $C^T = \begin{bmatrix} 18 & 32 \\ -13 & -23 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$|C| = 18.(-23) - (-13).32$

$= 2$ dir.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**3.** $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ alınırsa

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a + 2b \\ 3a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 9 \\ b - 9 \end{bmatrix}$$

$4a + 2b = a + 9 \Rightarrow 3a + 2b = 9$

$3a + b = b - 9 \Rightarrow a = -3$

$b = 9$ bulunur.

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$ olur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**4.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} . & a \\ . & . \end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$ olacağından;

$$\begin{bmatrix} 2 & 2a \\ b & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & a \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ olsun.

Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki çarpma işleminde, çarpım matrisinin ikinci sütununun elemanlarını yazarsak,

$2.a + 2a.z = 0 \Rightarrow z = -1 \quad (a \neq 0)$

$b.a + 4.z = 1 \Rightarrow a.b = 1 - 4.(-1) = 5$ bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**5.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$ olmalıdır.

1 2 −1 / 2 4 a / 0 1 4 / 1 2 −1 / 2 4 a

$(16 - 2 + 0) - (-4 + a + 16) = 0$

$14 - 12 - a = 0$

$a = 2$ olmalıdır.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**6.** $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{bmatrix}$$

Rank (A) = 2 ise det(A) = 0 dır.

det(A) da 3. satırın elemanları 1. satırın elemanlarının (– 2) katı olduğu görülmektedir.

Buna göre, $1.(-2) = a$ yani $a = -2$ olur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**7.** $A=\begin{bmatrix} -a^2+b & 1 & 0 \\ 2 & b^2-a & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 1 \end{bmatrix}$

Rank(A) = 2 ise,

$\det(A)=0$ yani $1.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -a^2+b & 1 \\ 2 & b^2-a \end{vmatrix}=0$ dır.

$(b-a^2).(b^2-a)-2=0$

$b^3-ab-a^2b^2+a^3-2=0$

$b^3+a^3=8$ bulunur.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**8.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ olmak üzere, $A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$ dır.

$A^T+A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}+A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 8-a \end{bmatrix}$

$A.A^{-1}=I$ olduğundan

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 8-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7-6 & -3+24-3a \\ 14-2a & -6+8a-a^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow -3+24-3a=0 \Rightarrow a=7$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**9.** Buradan $A^2$ hesaplanırsa

$A^2=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dır.

$A^{1997}=A^{1996}.A$

$=(A^2)^{998}.A$

$=I^{998}.A$

$=I.A=A$ dır.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**10.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere, her elemana 1 eklenirse,

$\begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+1 & 4+1 \end{bmatrix}=B$ olur.

$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$A.B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$A.B=\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$ olur.

Buradan, 10 + 13 + 22 + 29 = 74 tür.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**11.** $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & m \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin olmaması için

det(B) = 0 olmalıdır.

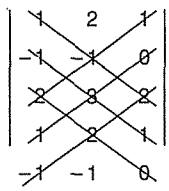
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & m \end{vmatrix}=0$ ise, $m-8=0$

$m=8$ bulunur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**12.** A matrisinin tersi, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Ek(A)$ eşitliğinden bulunur.

Önce $|A|$ yı bulalım.



= det(A) (Sarrus kuralı)

$$det(A)=[1.(-1).2+(-1).3.1+1.2.0]-[2.(-1).1+1.3.0+(-1).2.2]$$

$$=[-2-3]-[-2-4]=1 \text{ bulunur.}$$

A matrisi için Ek(A) matrisi, bu matrisin her elemanının yerine, o elemanın kofaktörleri yazılarak elde edilen kofaktörler matrisinin devriği alınarak bulunur.

$$Ek(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \text{ dir.}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1$$ olduğuna göre,

$$Ek(A)=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Ek(A)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ olduğundan,

$A^{-1}$ matrisinin $a_{23}$ elemanı $-1$ bulunur.

Daha kısa olarak, $A^{-1}$ in $a_{23}$ elemanı Ek(A) matrisinin $A_{23}$ kofaktörünün $\frac{1}{|A|}$ ile çarpımından da bulunabilirdi.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**13.** $A_{nxn}$ matrisi için $det(A)=d$ ise $det(c.A)=c^n.d$ dir.

Soruda verilen A matrisi için $det(A)=10$ ve A matrisi 3x3 matris olduğu için,

$det(2A)=2^3.det(A)=8.10=80$ bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**14.** $|A|=m$ olmak üzere, determinantın bir satırı veya sütunu k gibi bir reel sayı ile çarpılırsa yeni determinantın değeri k.m olur.

Soru verilen determinantın 1. satırı k ile, 2. satırı $-2$ ile ve 3. satırı 3k ile çarpıldığından, ilk başta verilen determinantın değeri m ise, yeni determinantın değeri $(k).(-2)(3k).m=-6k^2.m$ olur.

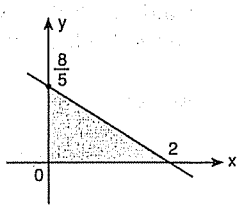
Yani $-6k^2$ katı olur.

**Doğru cevap "B" seçeneğidir.**

**15.** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4x + 2y) - (8 - 3y) = 0$

$4x + 5y - 8 = 0$

$4x + 5y - 8 = 0$ doğrusunun grafiğini çizersek, yandaki üçgenin alanı,




$$\text{Alan} = \frac{2 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

bulunur.

**Doğru cevap "D" seçeneğidir.**

**16.** $A^{-1} . B = C$ eşitliğinin her iki tarafını soldan A matrisi ile çarpalım.

$A . A^{-1} . B = A . C \qquad (A . A^{-1} = I)$

$I . B = A . C$

$B = A . C$ olur.

$\det(B) = \det(A . C)$

$\det(B) = \det(A) . \det(C)$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det(B) = 1 . (-2) = -2$ bulunur.

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

**17.** $A^T . B = C^T$ eşitliğinin iki tarafının determinantını alalım.

$\det(A^T . B) = \det(C^T)$

$\det(A^T . \det(B) = \det(C^T)$ dir. $(\star)$

$\det(A^T) = \det(A)$ olduğundan, $(\star)$ eşitliğini,

$\det(A) . \det(B) = \det(C)$ şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \det(C)$$

$(-2) . (-1) = \det(C)$

$2 = \det(C)$

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**18.** $$A = \begin{vmatrix} 1453 & 1071 & 0 \\ 1454 & 1073 & x \\ 1455 & 1075 & 2x \end{vmatrix}$$

determinantının 2. satırını $(-1)$ ile çarpıp 3. satıra ve 1. satırını $(-1)$ ile çarpıp 2. satıra ekleyelim.

$$A = \begin{vmatrix} 1453 & 1071 & 0 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir. Bu determinantın iki satırı aynı olduğundan değeri 0 dır.

**Doğru cevap "E" seçeneğidir.**

**19.** $|A^d + A^{-1}|$ determinantı için önce $A^d$ ve $A^{-1}$ matrislerini bulalım.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ ise } A^d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ olur.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \text{Ek}(A) = \frac{1}{1} . \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \text{Ek}(A) = \frac{1}{1} . \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Buna göre, $A^d + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^d + A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ bulunur.

Buradan $|A^d + A^{-1}| = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 25 + 16 = 41$

bulunur.

**Doğru cevap "C" seçeneğidir.**

**20.** $$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = A \text{ olsun.}$$

Determinantını 3. sütuna göre açalım.

$A = a_{13} . A_{13} + a_{23} . A_{23} + a_{33} . A_{33} + a_{34} . A_{34}$

$A = 0 . A_{13} + 0 . A_{23} + (-1) . A_{33} + 0 . A_{34}$

$A = (-1) . A_{33}$ olur.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} . \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ bulunur.}$$

**Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

# MATRİSLER

TEST - 2

**1.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**matrisinin asal köşegen elemanları toplamı kaçtır?**

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

**2. Aşağıdaki matrislerden hangisi simetrik matristir?**

A) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**3.** $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

**A + B işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

**4.** $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, 3A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

**1-D** **2-C** **3-A** **4-B**

**5.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**matrisinin** (satır x sütun) **sayısını veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3 x 2 B) 6 x 1 C) 1 x 6

D) 2 x 3 E) 2 x 2

**6.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

**matrisinin $a_{32}$ elemanı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**7.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

**A – B matrisinin elemanları toplamı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**8.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**A matrisinin transpoze** (devrik) **sinin 2. satır elemanları aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (1 2 3) B) (2 –1) C) (3 –1 2)

D) (3, 2) E) (2 –1 3)

**5-D** **6-E** **7-A** **8-C**

**9.** $I_{2x2}$ **birim matris olduğuna göre,** $5I$ **matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

**10.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

**ise** $2A - I$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

**11.** $A_{3x5}$ **matrisi ile** $B_{kx4}$ **matrisinin çarpılabilmesi için k sayısı kaç olmalıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**12.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

**A . B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

**13.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**$A^2$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

**14.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre,** $A . I$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**15.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

**C = A . B ise, C matrisindeki $c_{22}$ elemanının değeri kaçtır?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

**16.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ve $B = [-1 \quad 1]$

**B . A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [4 4 4] B) [6 8 10] C) [3 4 5]

D) [3 2 1] E) [−1 1 2]

**9-C** **10-A** **11-D** **12-E**

**13-D** **14-A** **15-D** **16-A**

**17.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

**C = A . B olduğuna göre, $C^T$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

**18.** $A.B=A$ ve $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, B + C nin elemanları toplamı kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**19.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 3 \\ l & 2 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ... & x \\ ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$

**Yukarıda verilen çarpma işlemine göre, x kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

**20.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 3 & -2 & 5 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

**matrisi simetrik matris olduğuna göre, k kaçtır?**

A) −4 B) −2 C) 1 D) 3 E) 4

**17-C** **18-C** **19-D** **20-A**

# MATRİSLER

## TEST - 3

**1.** $\left(\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$

**matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\begin{bmatrix}0&2\\2&2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0&4\\4&-4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}0&6\\8&3\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}0&8\\8&-8\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0&16\\-16&-16\end{bmatrix}$

**2.** $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}0&3\\2&1\end{bmatrix}-3\,I$

**işleminin sonucu kaçtır?** (I : birim matristir.)

A) $\begin{bmatrix}1&8\\6&3\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2&8\\6&3\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2&8\\8&3\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-2&8\\8&3\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2&8\\8&2\end{bmatrix}$

**3.** $[a\ a\ a\ 2]\cdot\begin{bmatrix}a\\-2\\-3\\3\end{bmatrix}=[0]$

**olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) −1 B) 6 C) −6 D) 5 E) −5

**4.** $A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-3\end{bmatrix}$

**olduğuna göre, $A^{24}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3^{12}.A$ B) $3^{24}.A$ C) $3^{12}.I$

D) $3^{24}.I$ E) $3^{8}.I$

**1-B** **2-E** **3-D** **4-D**

**5.** $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\5&2&x\end{bmatrix}$

**matrisinin rankı 2 olduğuna göre, x değeri kaçtır?**

A) 0 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

**6.** $\begin{bmatrix}a&4&c\\6&b&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet&18\\-2&\bullet\end{bmatrix}$

**olduğuna göre, a + b + c işleminin sonucu kaçtır?**

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

**7.** $\begin{bmatrix}4&a\\6&9\end{bmatrix}$

**matrisinin tersinin olmaması için a kaç olmalıdır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**8.** $T=\begin{bmatrix}a&b\\2&c\end{bmatrix}$

matrisi A(1, 2) noktasını B(4, 6) noktasına dönüştürüyor.

**T matrisinin transpozesi C(2, 1) noktasını D(6, 4) noktasına dönüştürüyor ise, a + b kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

**5-B** **6-C** **7-D** **8-C**

**9.** $A=\begin{bmatrix} a & 8 \\ -4 & d \end{bmatrix}_{2x2}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$

matrisleri verilmektedir.

**A = 2B olduğuna göre, a + d değeri kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 D) 14

**10.** $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**$f(x) = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonuna göre, f(A) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**11.** $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c+3 \\ 7 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, a.b.c.d çarpımı kaçtır?**

A) 12 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

**12.** $A=\begin{bmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, $A + A^T$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

($A^T$: A nın transpozesidir.)

A) 0 B) A C) $A^T$ D) $-A$ E) 2I

**13.** $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ ve $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

**14.** $\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & 78 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 5

**15.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

**$(A.B)A^{-1}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**16.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$

**9-D** **10-D** **11-C** **12-E**

**13-B** **14-A** **15-A** **16-C**

**17.** $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & a-3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**Rank(A) = 2 olması için, a kaç olmalıdır?**

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

**18.** $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B=[3 \;\; 2 \;\; 1]$

matrisleri veriliyor.

**$A.B^T = C^T$ olduğuna göre, C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?** ($B^T$ = B nin devriği)

A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ B) $[9 \;\; -4]$ C) $[4 \;\; -7]$

D) $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

**19.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$A=\begin{bmatrix} i & i & i \\ -i & -i & -i \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor.

$$A.A^T=\begin{bmatrix} x & \bullet & \bullet \\ \bullet & y & \bullet \\ \bullet & \bullet & z \end{bmatrix}$$

**olduğuna göre, x + y + z değeri kaçtır?**

A) −6 B) −9 C) 3i D) −3 E) −3i

**20.** $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ **matrisi** $[0 \;\; 3]$ **matrisini** $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ **matrisine dönüştürüyorsa (a, b) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (−3, 2) B) (3, 2) C) (2, 3)

D) (−2, −3) E) (2, −3)

**17-D** **18-B** **19-D** **20-E**

# MATRİSLER ve DETERMİNANTLAR

TEST - 4

**1.** $A=\begin{bmatrix} a & 2a \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

**$|A| = 8$ olduğuna göre, a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**2.** $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

**det(A.B) kaçtır?**

A) 64 B) 72 C) 81 D) 84 E) 96

**3.** A ve B, 3x3 boyutlu kare matrislerdir.

$$A.B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } \det(A)=2$$

**B matrisinin determinant değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**4.** $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**$|A| = |A^{-1}.A^{T}|$ olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) −6 B) −5 C) 5 D) 6 E) 0

**5.** $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b-c \\ a-b+c & a-b-c \end{vmatrix}$

**determinantının değeri kaçtır?**

A) 4ab B) 4bc C) −4ac D) −4bc E) 0

**6.** A, 2x2 boyutlu bir matris

**$|A| = 5$ olduğuna göre, $|3A|$ kaçtır?**

A) 15 B) 20 C) 35 D) 45 E) 50

**7.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}_{2x2}$, $\det(A)=1$ ve $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.B_{2x2}=I_{2x2}$

**olduğuna göre, B matrisinin elemanları toplamı kaçtır?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**8.** $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & b \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$

**determinantında a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{-1}{2}$ D) 3 E) 4

**1-D** **2-D** **3-C** **4-E**

**5-D** **6-D** **7-B** **8-B**

**9.** $A=\begin{bmatrix} 1010 & 1020 \\ 2021 & 2042 \end{bmatrix}$

**olduğuna göre, det A kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 10 D) 1000 E) 1010

**10.** $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\begin{vmatrix} i & i+1 & -1 \\ -i & 0 & 1 \\ 1 & -i & i-1 \end{vmatrix}$$

**determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) i C) 1 + i D) 1 – i E) –1

**11.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

**determinantının değeri kaçtır?**

A) –18 B) –9 C) 3 D) 18 E) 27

**12.** $A=\begin{bmatrix} 2222 & 5555 \\ 3333 & 8888 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**Buna göre, det A kaçtır?**

A) 111 B) 2222 C) $(1111)^2$

D) $2(1111)^2$ E) $(1111)^2.3$

**13. Aşağıdaki matris çarpımlarından hangisinin determinantı hesaplanabilir?**

A) $|A_{2x3} \times B_{3x3}|$ B) $|A_{3x2} \times B_{2x2}|$

C) $|A_{2x2} \times B_{2x4}|$ D) $|A_{2x2} \times B_{2x3}|$

E) $|A_{2x3} \times B_{3x2}|$

**14.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 4b & 6c \\ a & 3b & 5c \end{vmatrix}$

**determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) a.b.c B) 6.a.b.c C) $a^2.b^3.c^4$

D) 48.a.b.c E) 0

**15.** $\begin{vmatrix} 1811 & 1812 & 1813 \\ 8 & 6 & 4 \\ 1807 & 1809 & 1811 \end{vmatrix}$

**determinantının değeri kaçtır?**

A) 0 B) –1 C) –2 D) 1 E) 2

**16.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

**Buna göre, det($A^T$ + A) kaçtır?**

A) 4 B) 6 C) 10 D) 16 E) 20

**9-D** **10-D** **11-C** **12-C**

**13-E** **14-E** **15-A** **16-D**

**17.** $k \in R$ ve A, B ve C birer matris olmak üzere,

I. $k.A_{2x2}$
II. $B_{3x2}$
III. $C = [2]$

**Yukarıdaki ifadelerden hangisi veya hangilerinin determinantı hesaplanabilir?**

A) I B) I - II C) III

D) I - III E) I - II - III

**18.** $\begin{vmatrix} 2 & x^2 & -2 \\ 1 & y^3 & 4 \\ 3 & z & 5 \end{vmatrix} = A$

**olduğuna göre,** $\begin{vmatrix} 2 & x^2-1 & -2 \\ 1 & y^3+2 & 4 \\ 3 & z-3 & 5 \end{vmatrix}$ **determinantının**

**değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $A+25$ B) $A+35$ C) $\frac{A}{2}+25$

D) $2A+45$ E) $A+55$

**19.** $A=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $B=[a \ b]$

matrisleri veriliyor.

**A.B = C olduğuna göre, C matrisinin determinant değeri kaçtır?**

A) a + b B) 4a – 46 C) 2ab

D) 8 E) 0

**20.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \\ -2 & -3 & x \end{vmatrix} = 0$

**olduğuna göre, x kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

**17-D** **18-E** **19-E** **20-D**