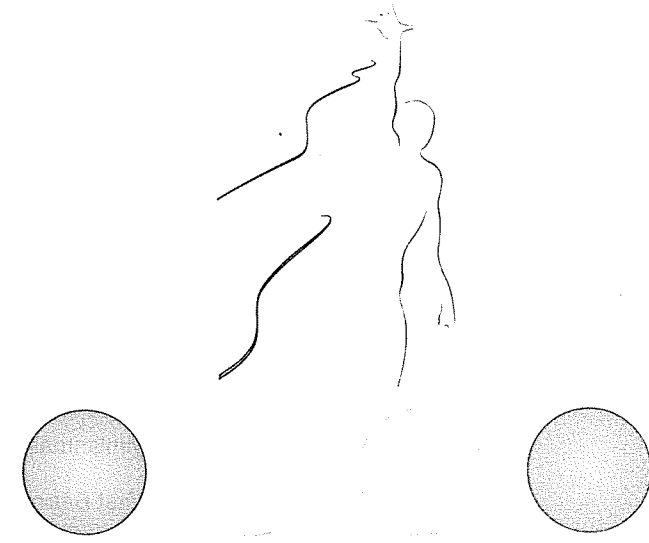
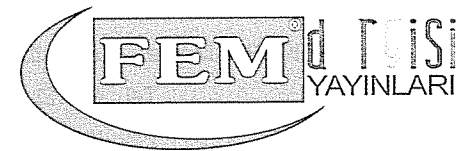




MATEMATİK 2

3. KİTAP



İÇİNDEKİLER

POLİNOMLAR
ÇARPANLARA AYIRMA
İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER
EŞİTSİZLİKLER
PARABOL

TRİGONOMETRİ
KARMAŞIK SAYILAR
LOGARİTMA

PERMÜTASYON
KOMBİNASYON - BİNOM
OLASILIK
İSTATİSTİK
TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ
DİZİLER
MATRİS, DETERMİNANT VE DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR
LİMİT - SÜREKLİLİK
TÜREV
İNTEGRAL

1 BÖLÜM 1

.....PERMÜTASYON

45 BÖLÜM 2

.....KOMBİNASYON - BİNOM

105 BÖLÜM 3

.....OLASILIK

151 BÖLÜM 4

.....İSTATİSTİK

187 BÖLÜM 5

.....TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

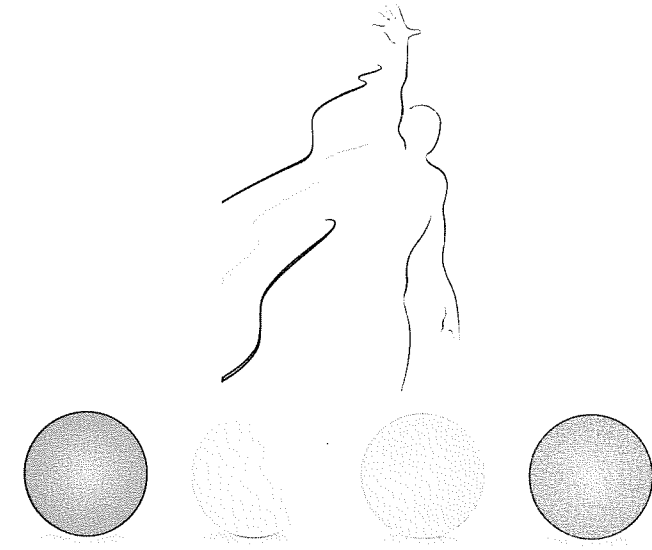
227 BÖLÜM 6

.....DİZİLER

265 BÖLÜM 7

.....MATRİS, DETERMİNANT VE

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ



BÖLÜM I

PERMÜTASYON

SAYMANIN TEMEL KURALLARI

Bilgi

Birbirinden farklı r tane işten,

1. iş n_1 değişik yoldan,
2. iş n_2 değişik yoldan,
3. iş n_3 değişik yoldan,
- ...

r iş n_r değişik yoldan gerçekleştirilebiliyorsa,

Bu r tane işten biri,

(1. si veya 2. si veya ... veya r . si)

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **toplama kuralı** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir lokantanın listesinde 5 çeşit yemek, 3 çeşit çorba, 2 çeşit pilav ve 4 çeşit tatlı vardır.

Bu lokantaya gelen bir öğrencinin, bu listeden 1 çeşit yemek veya 1 çeşit çorba veya 1 çeşit pilav veya 1 çeşit tatlı siparişini kaç farklı şekilde verebileceğini bulalım.

Çözüm:

YEMEK LİSTESİ

YEMEKLER	ÇORBALAR
Haşlama	Mercimek
Adana	Ezo gelin
Urfa	İşkembe
Kuru fasulye	
İşkender	
PILAVLAR	TATLILAR
Pirinç	Sütlüç
Bulgur	Kadayıf
	Tavuk göğsü
	Kazan dibi

Öğrenci listedeki bütün seçeneklerden yalnızca birini seçeceği için, (1 çeşit yemek veya 1 çeşit çorba veya 1 çeşit pilav veya 1 çeşit tatlı)

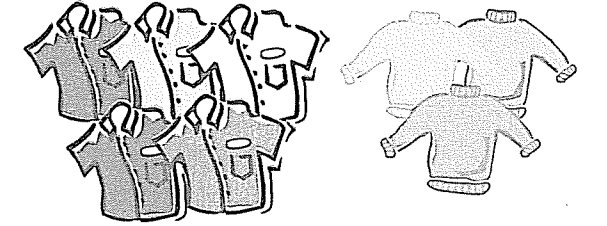
$5 + 3 + 2 + 4 = 14$ değişik seçim yapılabilir.

Örnek 2:

5 farklı gömleği ve 3 farklı kazağı olan bir kişinin 1 gömlek veya 1 kazağı kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Bu kişi sonuçta bir tane giyecek seçeceği için (1 gömlek veya 1 kazak)



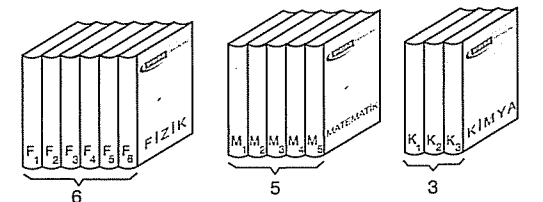
$5 + 3 = 8$ farklı şekilde seçim yapılabilir.

Örnek 3:

Raflarında 6 farklı fizik kitabı, 5 farklı matematik kitabı, 3 farklı kimya kitabı bulunan bir kırtasiyeden, bir öğrencinin 1 fizik kitabı veya 1 matematik kitabı veya 1 kimya kitabını kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Öğrenci raflardaki bütün kitaplardan yalnızca birini seçeceği için, (1 fizik kitabı veya 1 matematik kitabı veya 1 kimya kitabı)



$6 + 5 + 3 = 14$ değişik şekilde seçim yapılabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir bakkalın tezgahında 6 çeşit çikolata, 4 çeşit gofret, 4 çeşit şeker vardır.

Bu bakkala gelen bir çocuk, bu listeden 1 çeşit çikolata veya 1 çeşit gofret veya 1 çeşit şeker kaç farklı şekilde alabilir?

- A) 12 B) 14 C) 36 D) 48 E) 96

Soru 2:

4 farklı çift kösele ayakkabısı, 3 farklı çift spor ayakkabısı ve 2 farklı çift sandalet ayakkabısı olan bir kişi giyebileceği bir çift ayakkabı kaç farklı şekilde seçebilir?

- A) 9 B) 12 C) 16 D) 24 E) 48

Soru 3:

Bir koli; A firması ile 3 farklı yoldan, B firması ile 2 farklı yoldan, C firması ile 4 farklı yoldan gönderilmektedir.

Bu koli, A, B veya C firması ile kaç farklı yoldan gönderilebilir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 24 E) 36

Bilgi

Birbirinden farklı r tane işten,

1. iş n_1 değişik yoldan,
2. iş n_2 değişik yoldan,
3. iş n_3 değişik yoldan,

r. iş n_r değişik yoldan gerçekleştirilebiliyorsa, Bu r tane iş birlikte, sıralı bir biçimde (1. si ve 2. si ve ... ve r. si birlikte ve sıralı bir biçimde)

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **çarpma kuralı** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir lokantanın listesinde 5 çeşit yemek, 3 çeşit çorba, 2 çeşit pilav ve 4 çeşit tatlı vardır.

Bu lokantaya gelen bir öğrencinin, bu listeden 1 çeşit yemek, 1 çeşit çorba, 1 çeşit pilav ve 1 çeşit tatlı siparişini kaç farklı şekilde verebileceğini bulalım.

Çözüm:

Öğrenci listedeki bütün seçeneklerin herbirinden birer tane seçeceği için, (1 çeşit yemek, 1 çeşit çorba, 1 çeşit pilav ve 1 çeşit tatlı)

YEMEK LİSTESİ	
YEMEKLER	ÇORBALAR
Haşlama	Mercimek
Adana	Ezo gelin
Urfa	İşkembe
Kuru fasulye	
İskender	
PİLAVLAR	TATLILAR
Pirinç	Sütlüç
Bulgur	Kadayıf
	Tavuk göğsü
	Kazan dibi

5 . 3 . 2 . 4 = 120 değişik şekilde seçim yapabilir.

Örnek 2:

3 farklı ceket, 5 farklı gömleği ve 3 farklı pantolonu olan bir kişinin 1 ceket, 1 gömlek ve 1 pantolonu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Bu kişi her bir giyecekten bir tane seçeceği için (1 ceket, 1 gömlek ve 1 pantolon)

Ceket	Gömlek	Pantolon
Siyah	Beyaz	Siyah
Lacivert	Mavi	Lacivert
Gri	Gri	Gri
	Pembe	
	Yeşil	

3 . 5 . 3 = 45 değişik şekilde seçim yapabilir.

Örnek 3:

Raflarında 5 farklı fizik kitabı, 6 farklı matematik kitabı, 3 farklı kimya kitabı bulunan bir kırtasiyeden, bir öğrencinin 1 fizik kitabı, 1 matematik kitabı ve 1 kimya kitabını kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Öğrenci raflardaki fizik, kimya, matematik kitaplarından birer tane seçeceği için,

Fizik	Matematik	Kimya
Fem Fizik 1 KA	Fem Mat 1 KA	Fem Kimya KA
Fem Fizik 2 KA	Fem Mat 2 KA	Fem Kimya SB
Fem Fizik 1 SB	Fem Mat 1 SB	Fem Kimya DEN
Fem Fizik 2 SB	Fem Mat 2 SB	
Fem Fizik DEN	Fem Mat 1 İlkadım	
	Fem Mat 2 İlkadım	

5 . 6 . 3 = 90 değişik şekilde seçim yapabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

4 farklı defteri ve 5 farklı renkte kalem olan bir öğrenci bir defter ve bir kalem kaç farklı şekilde seçebilir?

- A) 9 B) 10 C) 20 D) 24 E) 30

Soru 2:

Bir lokantada 3 çeşit çorba, 4 çeşit yemek ve 3 çeşit tatlı vardır.

Bir çorba, bir yemek ve bir tatlıdan oluşan menü kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 E) 36

■ Bilgi

Saymanın temel prensibi ile ilgili soruların çözümünde şunlara dikkat edilir;

- I. Yapılacak işlerin tesbiti
- II. Her bir işin kaç farklı yoldan gerçekleştirilebildiği
- III. Sonuca ulaşmak için işlerin hangilerinin gerçekleşmesi gerektiği.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

24 kişilik bir sınıfta 5 kişilik boş sıra vardır.

Bu sınıfa sonradan kayıt olan 3 öğrencinin bu boş sıralara kaç farklı şekilde oturabileceklerini bulalım.

Çözüm:

Birinci iş; Üç arkadaştan birincisi boş olan 5 sıradan birini 5 değişik şekilde seçip oturabilir.

İkinci iş; Birinci oturduktan sonra ikincisi boş kalan 4 sıradan birini 4 değişik şekilde seçip oturabilir.

Üçüncü iş; İkincisi oturduktan sonra üçüncüsü boş kalan 3 sıradan birini 3 değişik şekilde seçip oturabilir.

O halde, bu üç işin üçünün de sıralı bir şekilde yapılması istenildiğinden, bu üç arkadaş, boş olan 5 sıraya,

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş
5	4	3

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

değişik şekilde oturabilir.

Örnek 2:

11 kişilik bir futbol takımında 7 yerli, 4 yabancı oyuncu vardır.

Bu takımda kaptan ve ikinci kaptan seçilecektir.

I. Kaç farklı seçim yapılabileceğini,

II. Kaptanın da, ikinci kaptanın da yerli futbolcu olduğu kaç farklı seçim yapılabileceğini,

III. Kaptanın yerli, ikinci kaptanın yabancı futbolcu olduğu kaç farklı seçim yapılabileceğini, bulalım.

Çözüm:

I. Kaptan ve ikinci kaptanın seçilebilmesi için sıralı bir biçimde iki iş birlikte yapılacaktır.

Buna göre,

Birinci iş; takımdaki 11 futbolcudan bir kaptan 11 değişik şekilde seçilebilir.

İkinci iş; kaptan seçildikten sonra kalan 10 futbolcudan ikinci kaptan 10 değişik şekilde seçilebilir. Bu iki seçim birlikte ve sıralı bir biçimde yapılacağından,

Birinci iş	İkinci iş
11	10

$$11 \cdot 10 = 110$$

değişik şekilde seçim yapılabilir.

II. Seçim bu sefer 7 yerli oyuncu arasından yapılacaktır. Buna göre,

Birinci iş; takımdaki 7 yerli oyuncudan kaptan 7 değişik şekilde,

İkinci iş; kaptan seçildikten sonra kalan 6 yerli futbolcudan ikinci kaptan ise 6 değişik şekilde seçilebilir.

Bu iki seçim birlikte ve sıralı bir biçimde yapılacağından,

Birinci iş	İkinci iş
7	6

$$7 \cdot 6 = 42$$

değişik şekilde seçim yapılabilir.

III. Birinci iş; takımdaki 7 yerli oyuncudan kaptan 7 değişik şekilde seçilebilir.

İkinci iş; takımdaki 4 yabancı futbolcudan ikinci kaptan ise 4 değişik şekilde seçilebilir.

Bu iki seçim birlikte ve sıralı bir biçimde yapılacağından,

Birinci iş	İkinci iş
7	4

$$7 \cdot 4 = 28$$

değişik şekilde seçim yapılabilir.

Örnek 3:

A şehrinden B şehrine 4 farklı yol ve B şehrinden C şehrine 3 farklı yol vardır.

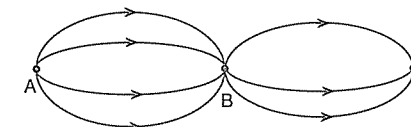
B şehrine uğramak koşuluyla,

I. A şehrinden C şehrine kaç değişik yolla gidilebileceğini,

II. A şehrinden C şehrine kaç değişik yolla gidilip dönülebileceğini,

III. Giderken kullanılan yollar dönüşte kullanılmamak koşuluyla A şehrinden C şehrine kaç değişik yolla gidilip dönülebileceğini, bulalım.

Çözüm:



Yolların yukarıdaki şemadaki gibi olduğu düşünülürse

I. Birinci iş; A şehrinden B şehrine gidiş 4 farklı yolla yapılabilir.

İkinci iş; B şehrinden C şehrine gidiş 3 farklı yolla yapılabilir.

Buna göre, A şehrinden C şehrine gidilebilmesi bu iki işin sıralı şekilde yapılması gerektiğinden, A şehrinden C şehrine,

Birinci iş	İkinci iş
A - B	B - C
4	3

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ farklı yolla gidilebilir.}$$

II. A şehrinden B şehrine gidiş 4 farklı yolla ve B şehrinden C şehrine gidiş 3 farklı yolla C şehrinden B şehrine dönüş 3 farklı yolla ve B şehrinden A şehrine dönüş 4 farklı yolla belirlenebileceği için; A şehrinden C şehrine gidiş dönüş ,

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş
A - B	B - C	C - B	B - A
4	3	3	4

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$$

farklı yolla olabilir.

III. Birinci iş; A şehrinden B şehrine gidiş 4 farklı yolla yapılabilir.

İkinci iş; B şehrinden C şehrine gidiş 3 farklı yolla yapılabilir.

Üçüncü iş; giderken kullanılan yol dönüşte kullanılmayacağı için C şehrinden B şehrine dönüş 2 farklı yolla yapılabilir.

Dördüncü iş; giderken kullanılan yol dönüşte kullanılmayacağı için B şehrinden A şehrine dönüş 3 farklı yolla yapılabilir.

Buna göre, A şehrinden C şehrine gidiş dönüş ,

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş
A - B	B - C	C - B	B - A
4	3	2	3

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72 \text{ farklı yolla olabilir.}$$

Örnek 4:

4 mektup 6 posta kutusuna atılacaktır.

I. Kaç farklı şekilde atılabileceğini,

II. Her mektup farklı posta kutusuna atılmak şartıyla kaç farklı şekilde atılabileceğini, bulalım.

Çözüm:

- I. Bir mektup, bir posta kutusuna 6 farklı seçim yapılarak atılabilir.
O halde, 4 mektup,

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş
Birinci mektubun posta kutusuna atılması	İkinci mektubun posta kutusuna atılması	Üçüncü mektubun posta kutusuna atılması	Dördüncü mektubun posta kutusuna atılması
6	6	6	6

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296 \text{ farklı şekilde atılabilir.}$$

- II. Bir mektup bir posta kutusuna 6 farklı seçim yapılarak atıldıktan sonra ikinci bir mektup aynı posta kutusuna atılamayacağından ikinci mektup için 5 farklı seçim, aynı şekilde üçüncü mektup için 4 farklı, dördüncü mektup için 3 farklı seçim yapılarak atılabilir.

O halde, 4 mektup,

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş
Birinci mektubun posta kutusuna atılması	İkinci mektubun posta kutusuna atılması	Üçüncü mektubun posta kutusuna atılması	Dördüncü mektubun posta kutusuna atılması
6	5	4	3

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ farklı şekilde atılabilir.}$$

Örnek 5:

7 katlı bir binanın her bir katı 3 farklı renkten biriyle boyanacaktır.

I. Binanın kaç farklı şekilde boyanabileceğini,

II. Art arda iki kat aynı renkte boyanmamak şartıyla binanın kaç farklı şekilde boyanabileceğini, bulalım.

Çözüm:

- I. Binanın her bir katı 3 farklı renkle boyanabilir.

O halde, 7 katlı bina

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş	Beşinci iş	Altıncı iş	Yedinci iş
Birinci katın boyası	İkinci katın boyası	Üçüncü katın boyası	Dördüncü katın boyası	Beşinci katın boyası	Altıncı katın boyası	Yedinci katın boyası
3	3	3	3	3	3	3

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$$

farklı şekilde boyanabilir.

- II. Binanın birinci katı 3 farklı renkten biriyle, ikinci kat birinci katın boyandığı renkle boyanamayacağından 2 farklı renkle, üçüncü kat ikinci katın boyandığı renkle boyanamaz ama birinci katın rengiyle boyanabileceğinden 2 farklı renkle ve bundan sonraki her bir kat bu şekilde 2 farklı renkle boyanabilir.

O halde, 7 katlı bina

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş	Beşinci iş	Altıncı iş	Yedinci iş
Birinci katın boyası	İkinci katın boyası	Üçüncü katın boyası	Dördüncü katın boyası	Beşinci katın boyası	Altıncı katın boyası	Yedinci katın boyası
3	2	2	2	2	2	2
{S,M,Y}	{S,Y}	{M,Y}	{S,M}	{,}	{,}	{,}
↓ örneğin M	↓ örneğin S	↓ örneğin Y	↓ örneğin M	↓ örneğin	↓ örneğin	↓ örneğin

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^6 \text{ farklı şekilde boyanabilir.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

6 kişilik bir gruptan bir başkan, bir başkan yardımcısı ve bir sekreter kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 60 B) 90 C) 120 D) 130 E) 140

Soru 2:

İki zarın birlikte atılması işleminde, olabilecek bütün durumların kaç tanesinde üst yüze gelen sayıların çarpımı çift sayıdır?

- A) 18 B) 21 C) 24 D) 27 E) 32

Soru 3:

Bir okulun öğrencilerine, alfabemizdeki sesli harfler ve rakamlar kullanılarak ilk iki hanesi rakam, son hanesi harf olan üç haneli numaralar verilecektir.

Bu okulda kaç öğrenciye numara verilebilir?

- A) 200 B) 250 C) 300 D) 400 E) 800

Soru 4:

A köyünden B köyüne 3 farklı yoldan, B köyünden C köyüne 4 farklı yoldan, A köyünden C köyüne direk olarak 2 farklı yoldan gidilebilmektedir.

Gidişte herhangi iki köy arasında kullanılan bir yol dönüşte kullanılmamak şartıyla, A köyünden C köyüne kaç farklı yoldan gidilip dönülebilir?

- A) 72 B) 80 C) 122 D) 132 E) 144

Soru 5:

7 katlı bir binanın girişinden asansöre binen 4 kişi her katta en fazla 1 kişi inmek şartıyla kaç farklı şekilde inebilirler?

- A) 336 B) 420 C) 446 D) 560 E) 840

Soru 6:

60 soruluk bir sınavda her sorunun 4 cevap şıkkı bulunmaktadır.

Bu sınav için art arda gelen 3 sorunun cevap şıkkının farklı olduğu kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

- A) 3^{60} B) 2^{60} C) $3 \cdot 2^{60}$ D) 2^{120} E) 3^{120}

Soru 7:

4 farklı oyuncak 6 çocuğa verilecektir.

Bu oyuncaklar çocuklara kaç değişik biçimde verilebilir?

- ✓ A) 6^4 B) 4^6 C) 120 D) 240 E) 360

Soru 8:

4 farklı oyuncak 6 çocuğa verilecektir.

Her çocuğa en fazla bir oyuncak vermek şartıyla bu oyuncaklar çocuklara kaç değişik biçimde verilebilir?

- A) 64 B) 46 C) 120 D) 240 E) 360

Soru 9:

Bir tren istasyonundaki işaret memuru 5 farklı renkteki bayrakların 3 ünü bir direğe sırasıyla asarak trenlere işaret gönderiyor.

Memur, kaç değişik işaret gönderebilir?

- A) 25 B) 45 C) 60 D) 120 E) 125

Bilgi

Elemanları harfler olan n elemanlı bir kümenin elemanlarını kullanarak anlamlı veya anlamsız m harfli ($n \geq m$) kelimelerin yazılacağı sorularda şunlara dikkat edilir:

- Yazılacak m harfin herbiri sırayla yapılacak m farklı iş olarak düşünülerek çarpmanın temel prensibi kuralına göre soru çözülür.
- Soruda şart varsa şart hangi sıradaki harfi ilgilendiriyorsa çözüme öncelikle oradan başlanır.
- "Harfleri birbirinden farklı" veya bu anlamda bir cümle soruda geçmiyorsa bir harf kelimenin her harfi olarak kullanılabilir.
- Alfabemizdeki sesli (ünlü) harfler, a, e, ı, i, o, ö, u, ü olmak üzere sekiz tanedir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \{S, P, O, R, T, M, E, N\}$$

kümesindeki harfler kullanılarak, anlamlı ya da anlamsız,

- Altı harfli, kaç farklı kelime yazılabileceğini,
- Altı harfli, "S" harfi ile başlayıp "R" harfi ile biten kaç kelime yazılabileceğini,
- Dört harfli, sesli (ünlü) harfle başlayıp sessiz (ünsüz) harfle biten, harfleri tekrarsız kaç kelime yazılabileceğini,
- Dört harfli, "S" harfinin mutlaka bulunduğu kaç kelime yazılabileceğini,
- Dört harfli, harfleri birbirinden farklı, "O" harfinin mutlaka bulunduğu kaç kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

- abcdef biçiminde altı harfli kelimeler yazılıyor olsun. İstenen şartlarda kelimelerin yazılabilmesi için;

a, b, c, d, e, f seçilmesi gibi altı işlem bir arada, sıralı bir biçimde yapılacaktır. Dolayısıyla istenen durumların sayısı çarpma kuralıyla bulunur.

O halde, a, b, c, d, e ve f den her birinin yerine 8 harften herhangi biri yazılabilir.

Birinci iş	İkinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş	Beşinci iş	Altıncı iş
a	b	c	d	e	f
8	8	8	8	8	8

Buna göre, altı harfli $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^6$ farklı kelime yazılabilir.

- a yerine S, f yerine R, b, c, d, e yerine de 8 harften herhangi biri yazılabilir.

Birinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş	Beşinci iş	Altıncı iş	İkinci iş
a	b	c	d	e	f
1	8	8	8	8	1
S					R

Buna göre, "S ile başlayıp "R" ile biten altı harfli, $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1 = 8^4$ değişik kelime yazılabilir.

- abcd şeklinde dört harfli kelimeler yazılıyor olsun. a yerine sesli harflerden biri (E veya O) 2 değişik şekilde, d yerine sessiz harflerden biri, (S, P, R, T, M, N) 6 değişik şekilde seçilip yazılabilir. Harfleri tekrarsız kelimeler yazılacağından, a yerine ve d yerine yazılan birer harfin (2 harfin) dışında geriye kalan $8 - 2 = 6$ harften biri 6 değişik şekilde b yerine ve bundan sonra geriye kalan 5 harften biri 5 değişik şekilde c yerine yazılabilir.

Birinci iş	Üçüncü iş	Dördüncü iş	İkinci iş
a	b	c	d
2	6	5	6
{E, O}			{S, P, R, T, M, N}

Buna göre, sesli ile başlayıp sessiz ile biten, harfleri tekrarsız, dört harfli, $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ değişik kelime yazılabilir.

- 4 harfli bütün kelimelerin sayısından, "S" nin bulunmadığı 4 harfli kelimelerin sayısı çıkarılırsa, "S" nin kesinlikle bulunduğu 4 harfli kelimelerin sayısı bulunmuş olur. "S" dışında, diğer 7 harften herhangi biri 7 değişik şekilde yazılarak oluşturulabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
a	b	c	d
8	8	8	8

Tüm durumlar

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
a	b	c	d
7	7	7	7

S nin bulunmadığı durumlar

Buna göre, "S" nin bulunmadığı dört harfli, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ değişik kelime yazılabilir.

Dört harfli bütün kelimelerin sayısı, $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4$ olduğundan, "S" harfinin bulunduğu dört harfli kelimelerin sayısı, $8^4 - 7^4$ tür.

- abcd şeklinde dört harfli kelimeler yazılıyor olsun. Harfleri farklı, dört harfli kelimeler; a yerine, 8 harften herhangi biri, b yerine kalan 7 harften herhangi biri, c yerine kalan 6 harften herhangi biri, d yerine kalan 5 harften herhangi biri yazılarak oluşturulur.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
a	b	c	d
8	7	6	5

Tüm durumlar

Buna göre, harfleri farklı dört harfli,

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ değişik kelime yazılabilir.

"O" harfinin bulunmadığı, harfleri farklı dört harfli kelimeler ise, a yerine "O" hariç kalan 7 harften biri, b yerine kalan 6 harften biri, c yerine kalan 5 harften biri, d yerine kalan 4 harften biri yazılarak oluşturulabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
a	b	c	d
7	6	5	4

O nun bulunmadığı durumlar

Buna göre, "O" harfinin bulunmadığı, harfleri farklı dört harfli kelimelerin sayısı, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ tır. O halde, harfleri farklı, "O" harfinin mutlaka bulunduğu, dört harfli, $1680 - 840 = 840$ kelime yazılabilir.

Örnek 2:

"SPORCU" kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek altı harfli kelimeler yazılacaktır.

Kaç kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

Bir kelimenin harflerinin yerleri değiştirilerek yeni kelimeler yazılacaksa her harf yalnızca bir kere kullanılacaktır.

Buna göre, her harfin bir kere kullanıldığı altı harfli kelime $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ tane farklı kelime yazılabilir.

Örnek 3:

$$A = \{e, k, l, m, i, n\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, sesli harfle başlayıp sessiz harfle biten 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

abcd şeklinde 4 harfli kelimeler yazılıyor olsun.

a yerine sesli harf, d yerine de sessiz harf gelmesi isteniyor.

O halde bu durum,

1. iş	3. iş	4. iş	2. iş
a	b	c	d
2	6	6	4

{e,i} {e,k,l,m,i,n} {k,l,m,n}

$$2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 288 \text{ biçimde oluşur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

kümesinin elemanlarını kullanarak, içerisinde "e" harfinin bulunduğu, harfleri tekrarsız 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?

- A) 120 B) 240 C) 260 D) 300 E) 320

Soru 2:

$$A = \{a, k, l, m, e, n\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, "a" harfi ile başlayan fakat "e" harfi ile bitmeyen, harfleri tekrarsız 4 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?

- A) 24 B) 32 C) 48 D) 50 E) 58

Soru 3:

"TAKVİM" kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek altı harfli kelimeler yazılacaktır.

T ile başlayıp M ile biten kaç kelime yazılabilir?

- A) 6 B) 12 C) 24 D) 120 E) 720

Bilgi

Elemanları rakamlar olan n elemanlı bir kümenin elemanlarını kullanarak m basamaklı ($n \geq m$) sayıların yazılacağı sorularda şunlara dikkat edilir:

- Yazılacak m basamağın herbiri sırayla yapılacak m farklı iş olarak düşünülerek çarpmanın temel prensibi kuralına göre soru çözülür.
- Soruda şart varsa şart hangi basamaktaki rakamı ilgilendiriyorsa soruya öncelikle oradan başlanır.
- "Rakamları birbirinden farklı" veya bu anlamda bir cümle soruda geçmiyorsa bir rakam sayının her basamağında kullanılabilir.
- Kümenin elemanlarından biri 0 (sıfır) ise sıfır sayının başına geldiğinde o sayının basamak sayısını bir azaltacağı düşünülmelidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, dört basamaklı,

- Kaç farklı sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı, kaç değişik sayı yazılabileceğini,
- Kaç değişik çift sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı kaç değişik çift sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı kaç değişik tek sayı yazılabileceğini, bulalım.

Çözüm:

Harflerle yapılan işlemlerdeki gibi abcd biçiminde dört basamaklı sayılar yazılıyor olsun. İstenen şartlarda sayıların yazılabilmesi için; a, b, c, d seçilmesi gibi dört işlem bir arada, sıralı bir biçimde yapılacaktır. Dolayısıyla istenen durumların sayısı çarpma kuralıyla bulunur. O halde,

I. Binler basamağına altı rakamdan herhangi biri, yüzler, onlar ve birler basamağına da altı rakamdan

herhangi biri yazılabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
6	6	6	6

Buna göre, dört basamaklı, $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ sayı yazılabilir.

II. Altı rakamdan herhangi biri binler basamağına yazıldıktan sonra, rakamları tekrarsız olduğundan, binler basamağına yazılan rakamın dışında kalan beş rakamdan herhangi biri yüzler basamağına, binler ve yüzler basamağına yazılan iki rakamın dışında geriye kalan dört rakamdan herhangi biri onlar basamağına aynı şekilde geriye kalan üç rakamdan herhangi biri de birler basamağına yazılabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
6	5	4	3

Buna göre, dört basamaklı ve rakamları farklı, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ sayı yazılabilir.

III. Sayının çift olması için birler basamağının çift olması gerektiğinden çözüme şartlı bu basamaktan başlayalım. Üç tane çift (2, 4, 6) sayıdan herhangi biri birler basamağına yazıldıktan sonra binler, yüzler ve onlar basamağına yazılacak rakamlarda şart olmadığından buralara altı rakamdan herhangi biri yazılarak çift sayılar oluşturulabilir.

2. iş	3. iş	4. iş	1. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
6	6	6	3
			{2, 4, 6}

Buna göre, dört basamaklı, $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$ çift sayı yazılabilir.

IV. Üç tane çift (2, 4, 6) sayıdan herhangi biri birler basamağına yazıldıktan sonra, rakamları farklı olacağından geri kalan beş sayıdan biri binler ba-

samağına, kalan dört sayıdan biri yüzler basamağına, kalan üç sayıdan biri onlar basamağına yazılarak çift sayılar oluşturulabilir.

3. iş	4. iş	1. iş	2. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	4	3	3
			{2, 4, 6}

Buna göre, dört basamaklı, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ çift sayı yazılabilir.

V. Üç tane tek (1, 3, 5) sayıdan herhangi biri birler basamağına; rakamları tekrarsız olduğundan, birler basamağına yazılan rakam hariç diğer beş rakamdan herhangi biri binler basamağına; birler ve binler basamağına yazılan iki rakam hariç, diğer dört rakamdan herhangi biri yüzler basamağına biri de onlar basamağına yazılarak, dört basamaklı, rakamları tekrarsız tek sayılar oluşturulabilir.

2. iş	3. iş	4. iş	1. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	4	3	3
			{1, 3, 5}

Buna göre, rakamları farklı dört basamaklı, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ tek sayı yazılabilir.

Örnek 2:

$$A = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, dört basamaklı,

- Kaç farklı sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı, kaç değişik sayı yazılabileceğini,
- Kaç değişik çift sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı kaç değişik tek sayı yazılabileceğini,
- Rakamları farklı kaç değişik çift sayı yazılabileceğini, bulalım.

Çözüm:

I. Binler basamağına 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri, yüzler, onlar ve birler basamağına da altı rakamdan herhangi biri yazılabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	6	6	6
{5, 6, 7, 8, 9}			

Buna göre, üç basamaklı, $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ sayı yazılabilir.

II. Binler basamağına 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri, rakamları tekrarsız olduğundan, binler basamağına yazılan rakamın dışında kalan beş rakamdan herhangi biri yüzler basamağına, binler ve yüzler basamağına yazılan iki rakamın dışında geriye kalan dört rakamdan herhangi biri onlar basamağına geriye kalan rakamlardan biri de birler basamağına yazılabilir.

1. iş	2. iş	3. iş	4. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	5	4	3
{5, 6, 7, 8, 9}			

Buna göre, dört basamaklı ve rakamları farklı, $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ sayı yazılabilir.

III. 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri binler basamağına, yüzler ve onlar basamağına da bu altı sayıdan herhangi biri, birler basamağına ise sayının çift olması için üç tane çift (0, 6, 8) sayıdan herhangi biri yazılarak çift sayılar oluşturulabilir.

1. iş	3. iş	4. iş	2. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	6	6	3
{5, 6, 7, 8, 9}			{0, 6, 8}

Buna göre, dört basamaklı, $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ çift sayı yazılabilir.

IV. Üç tane tek (5, 7, 9) sayıdan herhangi biri birler basamağına; rakamları tekrarsız olduğundan, birler basamağına yazılan rakam ve 0 hariç diğer dört rakamdan herhangi biri binler basamağına; birler ve binler basamağına yazılan iki rakam hariç, diğer dört rakamdan herhangi biri yüzler basamağına; geri kalan üç sayıdan biride onlar basamağına yazılarak, dört basamaklı, rakamları tekrarsız tek sayılar oluşturulabilir.

2. iş	3. iş	4. iş	1. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
4	4	3	3
{6, 7, 8, 9}			{5, 7, 9}

{0, 5} hariç geri kalan sayılar

Örneğin {5} yazılsın.

Buna göre, rakamları farklı dört basamaklı $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ tane tek sayı yazılabilir.

V. I. Yol

Dört basamaklı rakamları farklı tüm sayılardan, dört basamaklı rakamları farklı tek sayılar atılırsa geriye dört basamaklı, rakamları farklı çift sayılar kalır ve bunların sayısı, $300 - 144 = 156$ dir.

Yani, IV.deki değer in II.deki değerden çıkarılmasıdır.

II. Yol

Birler basamağı 6 ve 8 olan durumların sayısı birbirine eşit, birler basamağı 0 (sıfır) olan durumların sayısı bunlardan farklı olur. O halde, bu iki durumu ayrı ayrı hesaplayalım.

2. iş	3. iş	4. iş	1. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	4	3	1
{0}			{0}

hariç

+

2. iş	3. iş	4. iş	1. iş
Binler basamağı	Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
4	4	3	2
{0, 6}			{6, 8}

hariç geri kalan 4 sayı

Örneğin {6} yazılsın

Buna göre, rakamları farklı, dört basamaklı, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 156$ tane çift sayı yazılabilir.

Örnek 3:

$$A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, üç basamaklı, 500 ile 750 arasında, rakamları tekrarsız kaç değişik sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

500 ile 750 arasında sayılar yazılabilmesi için yüzler basamağı 5, 6, 7 olmalıdır. Yüzler basamağına 5 ve 6 yazıldığında olabilecek durumların sayısı birbirine eşit ama yüzler basamağına 7 yazıldığında olabilecek durumların (onlar basamağına 5 ten küçük gelmesi) sayısı bu ikisinden farklı olduğundan, yüzler basamağının 7 olduğu durumların sayısını ayrıca hesaplayalım.

1. iş	2. iş	3. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
2	6	5
{5, 6}		

+

1. iş	2. iş	3. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
1	3	5
{7}	{0, 3, 4}	

Buna göre, 500 ile 750 arasında, rakamları tekrarsız, üç basamaklı, $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 75$ tane sayı yazılabilir.

Örnek 4:

$$A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, 500 den küçük rakamları tekrarsız 5 ile tam bölünebilen kaç değişik doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

Üç basamaklı 500 den küçük sayı yazılabilmesi için yüzler basamağı kümenin elemanlarından 1 veya 3 olabilir. Sayının 5 ile tam bölünebilmesi için birler basamağının 0 veya 5 olması gerekir.

1. iş	3. iş	2. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
2	4	2
{1, 3}		{0, 5}

Buna göre, üç basamaklı 500 den küçük, rakamları tekrarsız 5 ile tam bölünebilen, $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ tane doğal sayı yazılabilir.

Ancak sayının 500 den küçük olması için üç basamaklı olması gerekmez, iki basamaklı ve bir basamaklı doğal sayıların hepsi 500 den küçüktür.

O halde, iki basamaklı 5 ile tam bölünebilen sayının birler basamağı 0 veya 5 olması gerektiğinden bunların sayısını hesaplayalım.

1. iş	2. iş		1. iş	2. iş
Onlar basamağı	Birler basamağı		Onlar basamağı	Birler basamağı
5	1	+	4	1
	{0}			{5}

Buna göre, iki basamaklı rakamları tekrarsız 5 ile bölünebilen, $5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$ tane doğal sayı yazılabilir.

Bir basamaklı doğal sayılardan 0 ve 5 de beşe tam bölünebildiğinden 500 den küçük, rakamları tekrarsız 5 ile bölünebilen $16 + 9 + 2 = 27$ tane doğal sayı vardır.

Örnek 5:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek, üç basamaklı, rakamları farklı bütün doğal sayıların toplamını bulalım.

Çözüm:

A kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı,

1. iş	2. iş	3. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
5	4	3

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ tane doğal sayı yazılabilir.

Bu beş tane rakamın herbirinin basamaklarda bulunma sayıları eşittir.

Buna göre, $\frac{60}{5} = 12$ olduğundan,

bu rakamlardan biri, onikişer defa birler, onlar ve yüzler basamağında bulunur.

O halde, bu rakamlar birler basamağına geldiğinde basamak değerlerinin toplamı,

$12 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 300$, bu rakamlar onlar basamağına geldiğinde basamak değerlerinin toplamı,

$10 \cdot 300 = 3000$, bu rakamlar yüzler basamağına geldiğinde basamak değerlerinin toplamı,

$100 \cdot 300 = 30000$ olacağından, bu rakamlarla yazılabilecek 60 sayının toplamı,

$30000 + 3000 + 300 = 33300$ olur.

Örnek 6:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek, üç basamaklı, bütün doğal sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanıyor.

Buna göre, 72 inci sırada hangi sayının olduğunu bulalım.

Çözüm:

Yüzler basamağında 1 in bulunduğu üç basamaklı

1. iş	2. iş	3. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
1	5	5
{1}		

$1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ tane doğal sayı yazılabilir.

Aynı şekilde yüzler basamağında 5 veya 3 ün bulunduğu üç basamaklı 25'er tane sayı vardır.

Buna göre, sıralamada 75 inci sırada bulunan sayı yüzler basamağı 3 olan yazılabilecek 399 dur. O halde, geriye doğru gidilirse,

599	597	595	593
↓	↓	↓	↓
75. sayı	74. sayı	73. sayı	72. sayı

393 sıralamadaki baştan 72 inci sayı olur.

Örnek 7:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 9 ile tam bölünebilen rakamları farklı, üç basamaklı kaç sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

9 ile bölünebilen sayıların rakamları toplamı 9 un katı olacağından, yazılacak sayıların rakamları, 1, 3, 5 ; 2, 3, 4 veya 0, 4, 5 olarak seçilebilir.

Buna göre, 1, 3 ve 5 rakamları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı,

1. iş	2. iş	3. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
3	2	1

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ değişik sayı yazılabilir.

Aynı şekilde 2, 3 ve 4 rakamları kullanılarak da rakamları farklı üç basamaklı, 6 sayı yazılabilir.

Ancak 0, 4 ve 5 rakamları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı,

1. iş	3. iş	2. iş
Yüzler basamağı	Onlar basamağı	Birler basamağı
2	2	1
{4, 5}		

$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ değişik sayı yazılabilir.

Buna göre, 9 ile tam bölünebilen rakamları farklı, üç basamaklı $6 + 6 + 4 = 16$ değişik sayı yazılabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak dört basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

- A) 120 B) 125 C) 320 D) 550 E) 625

Soru 2:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı kaç tane tek sayı yazılabilir?

- A) 100 B) 108 C) 110 D) 120 E) 148

Soru 3:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 5 ile tam bölünebilen üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

- A) 12 B) 20 C) 24 D) 32 E) 36

Soru 4:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 400 den büyük üç basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

- A) 44 ☒ B) 54 C) 60 D) 64 E) 80

Soru 5:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

- A) 16 ☒ B) 48 C) 100 D) 120 E) 124

Soru 6:

$$A = \{ 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

- A) 90 B) 95 C) 100 ☒ D) 105 E) 120

Soru 7:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 400 den büyük rakamları tekrarsız üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

- A) 20 B) 30 ☒ C) 40 D) 45 E) 50

Soru 8:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 5 ile tam bölünebilen rakamları farklı üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

- A) 45 B) 50 ☒ C) 55 D) 60 E) 80

Soru 9:

300 ile 600 arasındaki doğal sayıların kaç tanesinde 3 rakamı bulunur?

- A) 123 B) 136 ☒ C) 137 D) 145 E) 163

Soru 10:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek, dört basamaklı, bütün doğal sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanıyor.

Buna göre, 3205 sayısı kaçinci sırada bulunur?

- ☒ A) 510 B) 536 C) 586 D) 592 E) 595

Soru 11:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

kümesinin elemanlarıyla en az iki basamağında ki rakamı aynı olan dört basamaklı kaç sayı yazılabilir?

- A) 450 B) 485 ☒ C) 505 D) 555 E) 625

Soru 12:

Rakamları toplamı 5 ile tam bölünemeyen iki basamaklı kaç sayı yazılabilir?

- A) 68 ☒ B) 72 C) 74 D) 76 E) 78

Soru 13:

Rakamları çarpımı 5 ile tam bölünebilen dört basamaklı kaç sayı yazılabilir?

- A) 4724 B) 4824 ☒ C) 4904 D) 4924 E) 5024

Soru 14:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak 3 ile tam bölünebilen rakamları farklı, üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

- ☒ A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 52

Soru 15:

$$A = \{ 0, 1, 3, 5, 6, 7 \}$$

kümesinin elemanları ile yazılabilecek doğal sayılardan kaç tanesi 3000 ile 6000 arasındadır?

- A) 215 B) 216 C) 430 ☒ D) 431 E) 432

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

PERMÜTASYON (SIRALAMA)

r ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, sonlu n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farklı r ($r \leq n$) elemanının her bir sıralanışına (dizilişine) A kümesinin r li bir permütasyonu denir.

Bilgi

n elemanlı bir kümenin r li tüm permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ biçiminde gösterilir.

$$P(n, r) = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}_{r \text{ tane çarpan}} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ dir.}$$

- * $P(n, 1) = n$,
- * $P(n, n) = n!$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$P(n, 2) + P(n, 1) = 6 \cdot P(4, 3)$$

olduğuna göre, n yi bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(n, 2) + P(n, 1) &= 6 \cdot P(4, 3) \\ \Rightarrow n \cdot (n-1) + n &= 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ \Rightarrow n^2 &= 6^2 \cdot 2^2 \Rightarrow n = 6 \cdot 2 = 12 \text{ bulunur} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$P(n+1, n) + P(n, n-1) = 840$$

olduğuna göre, n yi bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(n+1, n) + P(n, n-1) &= 840 \\ \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-n)!} + \frac{n!}{(n-(n-1))!} &= 840 \\ \Rightarrow \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{n!}{1!} &= 840 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n+1)! + n! &= 840 \\ \Rightarrow (n+1) \cdot n! + n! &= 840 \\ \Rightarrow (n+2) \cdot n! &= 7 \cdot 120 \\ \Rightarrow (n+2) \cdot n! &= (5+2) \cdot 5! \\ \Rightarrow n &= 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ kümesinin}$$

- I. Üçlü permütasyonlarının sayısını,
- II. 4 ün bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısını,
- III. 4 ün bulunmadığı fakat 5 in bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısını,
- IV. 2 veya 6 dan en az birinin bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısını hesaplayalım.

Çözüm:

- I. 7 elemanlı A kümesinin, 3 lü permütasyonlarının sayısı,
 $P(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ dur.
- II. 7 elemanlı A kümesinin, 3 lü permütasyonlarının sayısından, içerisinde 4 ün bulunmadığı (4 ün A kümesinde olmadığı düşünülerek) 3 lü permütasyonların sayısı, $P(6, 3)$ nu çıkartırsak, A kümesinin 4 ün bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısı, $P(7, 3) - P(6, 3) = 90$ bulunur.
- III. 4 ün bulunmadığı 3 lü permütasyonların sayısı $P(6, 3)$ tür. Bunlardan, içerisinde 5 in de bulunmadığı (4 ve 5 in her ikisinin de bulunmadığı) 3 lü permütasyonların sayısı $P(5, 3)$ tür.
O halde, A kümesinin 3 lü permütasyonlarının $P(6, 3) - P(5, 3) = 60$ tanesinde 4 bulunmaz, fakat 5 bulunur.
- IV. A kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısı, $P(7, 3)$, içerisinde 2 ve 6 nın her ikisinin de bulunmadığı 3 lü permütasyonlarının sayısı da $P(5, 3)$ nu olduğundan A kümesinin 3 lü permütasyonlarının $P(7, 3) - P(5, 3) = 150$ tanesinde 2 veya 6 dan en az biri bulunur.

Örnek 4:

8 farklı matematik kitabından herhangi üçünün yan yana kaç değişik şekilde sıralanabileceğini bulalım.

Çözüm:

8 farklı matematik kitabından herhangi üçünün, 8 in 3 lü permütasyonlarının sayısı kadar sayıda sıralanabileceği durum vardır.
O halde, $P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ dir.

Veya, 8 farklı matematik kitabından 3 ünün yan yana sıralanışları xyz biçiminde olsun. x yerine 8 kitaptan herhangi biri, y yerine kalan 7 kitaptan herhangi biri, z yerine kalan 6 kitaptan herhangi biri gelebilir. Bu durumda xyz şeklindeki bütün sıralanışların sayısı: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ dir.

✎ Permütasyonla çözülebilen soruların çarpma kuralıyla da çözülebileceğine; ancak çarpma kuralıyla çözülebilen soruların bazılarının (bir elemanın birden fazla yerde sıraya konulabilirdiği) permütasyonla çözülemeyeceğine dikkat ediniz.

Örnek 5:

$$A = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları birbirinden farklı, dört basamaklı kaç değişik sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

Binler basamağına 0 gelmemek şartıyla; 6 elemanlı A kümesinin 4 lü permütasyonlarının her biri, rakamları birbirinden farklı 4 basamaklı bir sayıdır. O halde 6 elemanlı A kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısı,

$$P(6, 4) = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}_{4 \text{ tane}} = 360 \text{ dir.}$$

Binler basamağına 0 in gelmediği permütasyonların sayısı,

$$360 \cdot \frac{5}{6} = 300 \text{ olduğundan rakamların birbirinden farklı 4 basamaklı 300 tane değişik sayı yazılabilir.}$$

(Bu soru daha önce çarpma kuralıyla çözülmüştü.)

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$P(5, 2) + 3 \cdot P(4, 4) + 4 \cdot P(5, 1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 50 B) 58 C) 60 D) 112 E) 158

Soru 2:

$$P(4, 2) = \frac{(n+1)!}{n!}$$

olduğuna göre, n değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Soru 3:

$$A = \{b, c, d, e, f\}$$

kümesinin üçlü permütasyonlarının kaçında "e" eleman olarak bulunur?

- ✓ A) 36 B) 32 C) 28 D) 20 E) 18

Soru 4:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

kümesinin dörtlü permütasyonlarının kaçında "e" veya "f" eleman olarak bulunur?

- ✓ A) 336 B) 332 C) 328 D) 320 E) 318

Soru 5:

4 kişi, 6 tane boş koltuğa kaç farklı şekilde oturabilir?

- A) 210 B) 250 ✓ C) 360 D) 620 E) 720

Bilgi

n tane elemanın sıralamasında m tane elemanın yan yana olması isteniyorsa bu m tane eleman, bir eleman gibi düşünülerek sıralamaların sayısı bulunur. Daha sonra bu m elemanın kendi arasında sıralamalarının sayısı ikinci bir iş gibi düşünülerek çarpma kuralına göre çözüme gidilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

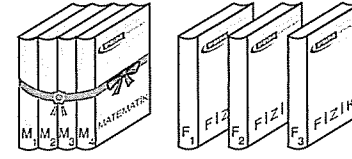
4 farklı matematik kitabı ile 3 farklı fizik kitabı bir rafta sıralanacaktır.

- Kaç farklı şekilde sıralanabileceğini,
- Matematik kitapları yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabileceğini,
- Aynı branşın kitapları yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabileceğini,
- İki matematik kitabı arasına bir fizik kitabı gelmek şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabileceğini,
- Her iki kenarda birer matematik kitabı bulunması ve fizik kitaplarının da yan yana olması şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabileceğini, bulalım.

Çözüm:

- 7 farklı kitap bir rafta yan yana $P(7, 7) = 7!$ farklı şekilde sıralanabilir.
- Matematik kitaplarının tümü bir arada olacağına göre, matematik kitaplarının tümünü bir cilt halinde (M_c) bir eleman gibi düşünerek sıralama yaparsak, M_c ve farklı 3 fizik kitabı ile birlikte 4 elemanın farklı sıralanışlarının sayısı $P(4, 4) = 4!$ ve matematik kitaplarının cilt yapılırken kendi aralarındaki yer değiştirmelerinin sayısı $P(4, 4) = 4!$ dir.

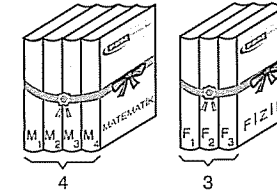
Bu iki iş birlikte yapıldığında istenilen şekildeki dizilişler gerçekleşeceğinden;



$$P(4, 4) \cdot P(4, 4) = 4! \cdot 4! \text{ dir.}$$

- Aynı branşın kitaplarının tümü bir arada olacağına göre, herhangi bir branşın tüm kitaplarını bir cilt yapılmış gibi düşünerek sıralama yaparsak, fizik (F_c) ve matematik (M_c) ciltlerinin farklı sıralanışlarının sayısı $P(2, 2) = 2!$ dir; fizik ve matematik kitaplarının kendi aralarındaki yer değiştirmelerinin sayısı sırasıyla $P(4, 4) = 4!$, $P(3, 3) = 3!$ dir.

Bu üç iş birlikte yapıldığında istenilen şekildeki dizilişler gerçekleşeceğinden;



$$P(2, 2) \cdot P(4, 4) \cdot P(3, 3) = 2! \cdot 4! \cdot 3! \text{ dir.}$$

IV.



Yukarıdaki şekilden görüleceği gibi matematik kitapları $P(4, 4) = 4!$ farklı şekilde, fizik kitapları da $P(3, 3) = 3!$ farklı şekilde sıralanabilir. O halde iki matematik kitabı arasına bir fizik kitabı gelecek şekilde, $4! \cdot 3! = 144$ farklı şekilde sıralanabilirler.

- 4 matematik kitabından 2 si kenarlara $P(4, 2)$ farklı şekilde sıralanabilir. Fizik kitapları da yan yana sıralanacağından bir cilt olarak düşünülürse geriye kalan 2 matematik kitabı ile birlikte 3 eleman $P(3, 3) = 3!$ farklı şekilde, fizik kitapları da kendi aralarında cilt yapılırken $P(3, 3) = 3!$ farklı şekilde sıralanabilir.

O halde her iki kenarda birer matematik kitabı ve fizik kitapları da yan yana olmak şartıyla,



$$P(4, 2) \cdot 3! \cdot 3! = 432 \text{ farklı şekilde sıralanabilirler.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

İki farklı matematik, iki farklı geometri kitabı düz bir rafa yan yana yerleştirilecektir.

Aynı branşa olan kitaplar yan yana olmamak şartıyla kaç farklı yerleştirme işlemi yapılabilir?

- A) 4 B) 6 ✓ C) 8 D) 12 E) 16

Soru 2:

Anne, baba ve 3 çocuktan oluşan bir aile yan yana fotoğraf çektirecektir.

Anne ile baba yan yana olmak şartı ile kaç değişik şekilde yan yana sıralanabilirler?

- A) 5! B) 4! · 2! ✓ C) 4!
D) 4! · 3! E) 4! · 3! · 2!

Soru 3:

4 kız ile 6 erkek öğrenci, kızlardan biri başta biri sonda olmak üzere 10 kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde yan yana sıralanabilirler?

- ✓ A) 12.8! B) 9! C) 6.8! D) 6.9! E) 8.9!

Soru 4:

3 farklı roman, 5 farklı hikaye ve 2 farklı masal kitabı düz bir rafa hikaye kitapları masal kitaplarının arasında olacak şekilde yanyana sıralanacaktır.

Bu sıralama kaç farklı şekilde yapılabilir?

- A) 4!.5! B) 5!.3!.2! ✓ C) 4!.5!.2!
D) 6!.2! E) 5!.4!.3.!

Soru 5:

2 antrenör ve 7 futbolcu fotoğraf çektirecektir.

Antrenörler aynı sıranın iki kenarında ve 4 kişi arka sırada, 5 kişi ön sırada durmak şartıyla kaç değişik poz verebilirler?

- ✓ A) 4.7! B) 9! C) 8! D) 2.7! E) 6.7!

Bilgi

Önde, arkada veya arada olma sorularında, önce istenilen kişiler, istenilen şartlarda sıralanır, daha sonra geri kalanların sıralamada gelebileceği yerler tespit edilerek, çarpım kuralı ile sonuca gidilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Akif ve Burhan'ın da aralarında bulunduğu 5 kişi yan yana sıralanacaktır.

Burhan'ın Akif'in hemen sağında olduğu kaç farklı durum olabileceğini bulalım.

Çözüm:

Burhan ile Akif'i bir kişi düşünüp, yer değiştirmeleri gerektiğini söyleyebiliriz.

x,y,z,(AB)

şeklinde 5 kişiyi 4 kişi gibi düşünüp yan yana sıralarsak sonuç $4! = 24$ bulunur.

Örnek 2:

Akif ve Burhan'ın da aralarında bulunduğu 5 kişi bir kuyrukta durmaktadır.

Burhan'ın Akif'in önünde olduğu kaç farklı durum olabileceğini bulalım.

Çözüm:

I.yol

Burhan, Akif ' in önünde olsun, BA

3. kişi Burhan ile Akif yan yana durduğu durumda üç farklı yerde durabilir,
• B • A • (3. kişinin durabileceği üç yer)

3. kişi sıralamada yerini aldıktan sonra 4. kişi dört farklı yerde durabilir,
• B • A • C • (4. kişinin durabileceği dört yer)

4. kişi sıralamada yerini aldıktan sonra 5. kişi beş farklı yerde durabilir,
• B • A • C • D • (5. kişinin durabileceği beş yer)

Buna göre,

Burhan'ın Akif'in önünde olduğu, saymanın temel prensibine göre,

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ durum vardır.}$$

II. yol

Tüm sıralamaların yarısında Akif Burhan'ın önünde diğer yarısında ise Burhan Akif'in önündedir.

Buna göre, istenilen durumları sayısı tüm sıralamaların yarısıdır. Yani,

$$\frac{5!}{2} = 60 \text{ dir.}$$

Örnek 3:

Ahmet, Recep ve Samet 6 kişilik bir kuyruktadırlar.

Ahmet'in, hem Recep'in hem de Samet'in önünde olduğu kaç durum olabileceğini bulalım.

Çözüm:

I.yol

Ahmet, Recep ve Samet'in önünde olacak şekilde, ARS şeklinde sıralansın.

4. kişi bu üçünün yan yana olduğu durumda dört farklı yerde durabilir,
• A • R • S • (4. kişinin durabileceği dört yer)

4. kişi (K) sıralamada yerini aldıktan sonra 5. kişi beş farklı yerde durabilir,
• A • R • S • K • (5. kişinin durabileceği beş yer)

5. kişi (L) sıralamada yerini aldıktan sonra 6. kişi altı farklı yerde durabilir,
• A • R • S • K • L • (6. kişinin durabileceği altı yer)

Buna göre,

Ahmet, Recep ve Samet'in önünde olmak üzere, saymanın temel prensibine göre,

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \text{ durum vardır.}$$

ARS sıralaması için 120 durum,

aynı şekilde Samet ile Recep'in sıralaması için birşey söylenmediğinden, ASR sıralaması içinde 120 durum söz konusu olur.

Buna göre,

$$120 + 120 = 240 \text{ durum vardır.}$$

II. yol

Üç kişi birbirine göre durumları sorulduğu için, tüm sıralamaların; $\frac{1}{3}$ ünde Ahmet, Recep ile Samet'in önünde, $\frac{1}{3}$ ünde Ahmet, Recep ile Samet'in arasında, $\frac{1}{3}$ ünde Ahmet, Recep ile Samet'in arkasındadır.

Buna göre, istenilen durumları sayısı tüm sıralamaların $\frac{1}{3}$ üdür. Yani,

$$\frac{6!}{3} = 240 \text{ tır.}$$

Örnek 4:

Aralarında Ayhan ve Selami'nin de bulunduğu 6 kişi yan yana sıralanacaktır.

Ayhan ile Selami'nin arasında iki kişinin olduğu kaç farklı sıralamanın olabileceğini bulalım.

Çözüm:

1. durum Δ — — Δ — —
2. durum — Δ — — Δ —
3. durum — — Δ — — Δ

Şekildeki işaretli yerlere Ayhan ve Selami gelecek şekilde 3 farklı durum vardır. Bu durumların sayıları birbirine eşit olduğundan 1. durumu bulup sonucu 3 ile çarparak bulabiliriz.

1. durumda Δ sembollerinin olduğu yerlere Ayhan ile Selami $2! = 2$ farklı şekilde, diğer 4 yere 4 kişi $4! = 24$ sıralanır.

Böylece bu 6 kişi yan yana $2 \cdot 24 = 48$ farklı şekilde sıralanır.

1. durumda 48 farklı sıralama olduğundan bu 3 durumun sayısı,

$$3 \cdot 48 = 144 \text{ tür.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

İçinde sarı ve mavi renkte de bayrakların bulunduğu 4 farklı renkte bayrak bir duvara yan yana asılacaktır.

Sarı bayrağın, mavi bayrağın solunda olduğu kaç farklı sıralama yapılabilir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

Soru 2:

Ömer ve Hakan'ın da aralarında bulunduğu 6 kişilik voleybol takımının oyuncularını yan yana dizilip fotoğraf çekilecektir.

Takımdaki Ömer ile Hakan'ın arasında bir kişi olacak şekilde kaç farklı poz verilebilir?

- A) 96 B) 144 C) 168 D) 192 E) 216

Tekrarlı Permütasyon

n_1 tanesi birinci türden, n_2 tanesi ikinci türden, n_3 tanesi üçüncü türden, ... , n_r tanesi r ninci türden olmak üzere toplam, $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$ tane elemanın birbirinden farklı sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!} \text{ dir.}$$

Bilgi

Tekrarlı permütasyonların hesaplanmasında, sıralanacak bütün elemanlar birbirinden farklı düşünülerek istenilen şartlardaki sıralamaların sayısı bulunduğundan sonra, aynı tür elemanların kendi aralarındaki yer değiştirmelerinden dolayı ortaya çıkan azalmalar hesaba katılarak çözüm yapılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

"TARAFTAR" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek, sekiz harfli,

- I. Kaç değişik kelime yazılabileceğini,
- II. T ile başlayan fakat T ile bitmeyen kaç değişik kelime yazılabileceğini,
- III. Her T harfinden hemen sonra A harfi gelecek şekilde (TA biçiminde) kaç değişik kelime yazılabileceğini, bulalım.

Çözüm:

- I. 2 tane T, 3 tane A, 2 tane R harfi olduğundan yazılabilecek 8 harfli farklı kelimelerin sayısı,

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \text{ dir.}$$

- II. İlk harf T harfi olacağından buraya yazılabilecek harf sayısı kelimenin içerisinde 2 tane T olduğundan 2 dir. T lerden bir tanesi ilk harf olarak yazılınca geriye kalan 7 harften birisi yine T harfidir. O halde, kelimenin sonuna T harfi gelemeyeceğinden

buraya yazılabilecek harf sayısı 6 olur. Bir harf başa, bir harf sona yazılınca geriye kalan 6 harf araya $6!$ biçimde sıralanabilir. Kesrin payı bu şekilde bulunduğundan sonra, paydasına kelimenin içerisinde 2 tane T, 3 tane A, 2 tane de R harfi olduğundan $2! \cdot 3! \cdot 2!$ yazılarak, istenilen kelimelerin sayısı,

$$\frac{2 \cdot 6! \cdot 6}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \text{ bulunur.}$$

1. iş	3. iş	4. iş	5. iş	6. iş	7. iş	8. iş	2. iş
2				6!			6
{T, T}							{A, R, A, F, A, R}

- III. Her T harfinden hemen sonra A harfi gelecekse, TA yı tek bir harf gibi örneğin X olarak düşünelim. O halde, verilen kelime XRAFXR olur, kelimenin içerisinde 2 tane X, 2 tane R harfi, 1 tane A, 1 tane F harfi olduğundan yazılabilecek 6 harfli farklı kelimelerin sayısı,

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

111334466 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek, 9 basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

2. iş	3. iş	4. iş	5. iş	6. iş	7. iş	8. iş	9. iş	1. iş
				8!				5
								{3, 3, 1, 1, 1}

1,1,1, 3, 3 rakamlarından biri birler basamağına yazıldıktan sonra, kalan 8 rakam diğer basamaklara $8!$ kadar değişik sayıda sıralanabilir. Buna göre, istenen tek sayıların sayısı,

$$\frac{8! \cdot 5}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 4200 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

5002227779 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek, 10 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

I. Yol:

10 basamaklı tüm sayılardan, 10 basamaklı tek sayılar atılırsa geriye 10 basamaklı çift sayılar kalır. Buna göre,

1. iş		2. iş
8	9!	
{5, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 9}		

Birler basamağında yazılan rakam ve sıfırlar hariç

1. iş		2. iş
7	8!	5
		5, 7, 7, 7, 9

iki tane 0 (sıfır), üç tane 2 ve üç tane 7 olduğundan,

$$\frac{8 \cdot 9! - 7 \cdot 8! \cdot 5}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{37 \cdot 8!}{72} \text{ bulunur.}$$

II. Yol:

Birler basamağı 0 (sıfır) olan sayılarla, birler basamağı 0 (sıfır) olmayan çift sayıların adedini ayrı ayrı bulalım ve toplayalım.

1. iş		2. iş
8	8!	2
{5, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 9}		{0, 0}

+

1. iş		2. iş
7	8!	3
{5, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 9}		{2, 2, 2}

$$\frac{8 \cdot 8! \cdot 2 + 7 \cdot 8! \cdot 3}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{37 \cdot 8!}{72} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

TANTANA

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 7 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

- A) 110 B) 120 C) 210 D) 230 E) 240

Soru 2:

KARANLIK

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 8 harfli, N ile başlayıp R ile biten anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

- A) 80 B) 100 C) 120 D) 180 E) 240

Soru 3:

ÜNİVERSİTELİ

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek "ÜN" ile başlayan "Lİ" ile biten 12 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

- A) 8! B) 2.7! C) 7! D) 7.5! E) 6!

Soru 4:

001122

rakamlarının yerleri değiştirilerek altı basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

- A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 120

Soru 5:

ALATURKA

kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşturulabilecek, anlamlı ya da anlamsız sekiz harfli farklı kelimelerin kaç tanesi sesli harfle başlayıp sessiz harfle biter?

- A) 120 B) 480 C) 720
D) 1080 E) 1920

Soru 6:

66611334

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 8 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

- A) 420 B) 620 C) 800 D) 840 E) 960

Soru 7:

SERENAY

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız yazılacak 7 harfli farklı kelimelerden kaç tanesi "S" ile başlayıp "AY" ile biter?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 24 E) 26

Soru 8:

5 sarı, 4 siyah ve 3 yeşil özdeş bilye yan yana dizilecektir.

İki kenarında siyah bilyelerin bulunduğu kaç farklı sıralama vardır?

- A) $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$ B) $\frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!}$ C) $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$
D) $\frac{10!}{9! \cdot 4!}$ E) $\frac{11!}{5! \cdot 5!}$

Soru 9:

UYGULAMA

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız yazılabilecek 8 harfli farklı kelimelerin kaç tanesinin başlangıç ve bitiş harfleri aynıdır?

- A) $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$ B) $\frac{8!}{2! \cdot 2!}$ C) $\frac{6!}{2!}$ D) 6! E) 2.6!

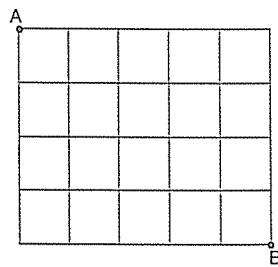
Bilgi

Tekrarlı permütasyon soru tiplerinde, tekrar edilen durumlar tespit edilerek tekrarlı permütasyon kuralı ile çözüm yapılır.

Bilgi Kavrama

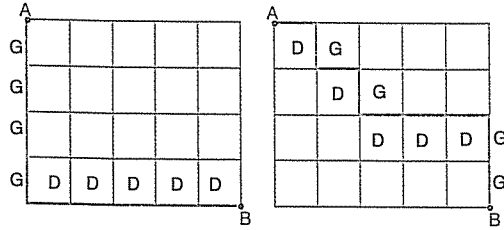
Örnek 1:

Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir.



A dan hareket edip B noktasına en kısa yoldan gidecek olan bir kimsenin kaç değişik yol izleyebileceğini bulalım.

Çözüm:



A dan B ye en kısa yollardan ikisi yukarıdaki şekilde gösterilmiştir.

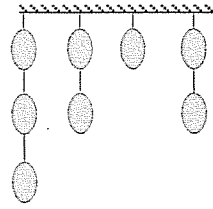
G(güney), D(doğu) yönlerini göstermek üzere; birinci şekilde GGGGDDDD yönleri doğrultusunda, ikinci şekilde DGDGDDGG yönleri doğrultusunda gidilmiştir.

Yani A dan B ye en kısa yolların sayısı, 4 tane G ve 5 tane D nin farklı permütasyonları sayısına eşittir. Buna göre, A dan B ye en kısa yolların sayısı;

$$\frac{9!}{4!.5!} = \frac{9.8.7.6}{4!} = 126 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

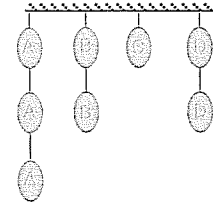
Yandaki şekilde asılı olan özdeş 8 balon vardır. Bir atıcı 8 atış yaparak bu balonları patlatacaktır. Atıcı aynı ipte asılı olan balonlardan alttakini patlatmadan bir üsttekine atış yapamayacaktır.



Bu atıcının, her atışında bir balon patlatmak koşuluyla balon seçiminin kaç farklı şekilde yapabileceğini bulalım.

Çözüm:

Aynı ipte asılı olan balonları aynı harfle adlandıralım. Bu durumda balonların seçimi, AABBADDC AAABBDCC ADDABACB

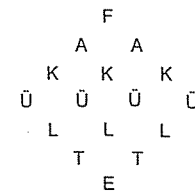


..... sıralamalarından biri olacaktır. Aynı ipte asılı olan balonların patlamasında yer değiştirmesi söz konusu olmadığından sorunun çözümü tekrarlı permütasyon ile yapılır.

Buna göre, atıcı balon seçimini,

$$\frac{8!}{3!.2!.1!.2!} = 1680 \text{ farklı şekilde yapar.}$$

Örnek 3:



Baştaki F harfinden başlayıp E arfine kadar komşu harfleri izleyerek FAKÜLTE kelimesinin kaç farklı şekilde okunabileceğini bulalım.

Çözüm:

F nin bulunduğu kutucuğun içinden E nin bulunduğu kutucuğa en kısa yoldan (toplamda 3 sağ ve 3 aşağıya hareketle) giderek ulaşılmalıdır.

F	A	K	Ü
A	K	Ü	L
K	Ü	L	T
Ü	L	T	E

Oluşabilecek tüm FAKÜLTE yazılarının sayısı,

$$\frac{6!}{3!.3!} = 20 \text{ dir.}$$

Örnek 4:

Rakamları toplamı 5 olan üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

Kullanılan rakamlar	Sayı adedi
0, 0, 5	1
0, 1, 4	4
0, 2, 3	4
1, 1, 3	3
1, 2, 2	3
Toplam	15

Örnek 5:

4 mavi, 3 sarı ve 2 siyah özdeş flama yan yana duvara asılacaktır.

Sarı flamalar yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Sarı flamaların hepsini bir flama kabul edip kendi aralarındaki yer değiştirmelerin hepsi aynıdır. 3 sarı flamayı 1 sarı flama gibi düşünüp, 4 mavi, 2 siyah özdeş 7 flama yanyana $\frac{7!}{4!.2!} = 105$ farklı şekilde dizilebilir.

Örnek 6:

3 tane madeni 1 YTL, kumbaralara istenilen sayıda atılmak suretiyle değişik bankalardan alınmış 5 farklı kumbaraya kaç değişik şekilde atılabilir?

A) 10 B) 21 C) 24 D) 35 E) 45
(2005 - ÖSS)

Çözüm:

Madeni paraların kumbaralara atılışındaki değişik dağılımları göstermek için; paraların dağıtılması işleminde ayraçlardan yararlanalım. O halde, paralar; bir ayraçla iki gruba,

iki ayraçla üç gruba,

üç ayraçla dört gruba,

dört ayraçla beş gruba

ayrıldığından; aynı türden 4 ayraçla, özdeş 3 madeni paranın birlikte kaç değişik şekilde sıralanabileceğini inceleyerek sonuca ulaşalım.

Burada, elde edilecek sıralamalardan bir kaç tanesinin anlamını açıklayalım.

1. 2. 3. 4. 5.

sıralaması 1., 3. ve 4. kumbaralara birer madeni para atıldığı, 2. ve 5. kumbaranın da boş olduğu

II. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \hline \end{array}$
1. 2. 3. 4. 5.

sıralaması 1., 4. ve 5. kumbaraların boş olduğu,
2. kumbaraya iki, 3. kumbaraya da bir para atıldığı

III. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$
1. 2. 3. 4. 5.

sıralaması üç paranın da 4. kumbaraya atıldığı

IV. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \hline \end{array}$
1. 2. 3. 4. 5.

sıralaması da 1., 2. ve 3. kumbaralara birer paranın atıldığı, 4. ve 5. kumbaranın da boş olduğu anlamına gelmektedir.

Özdeş üç nokta ile özdeş dört çizginin sıralamalarının sayısı tekrarlı permütasyonla bulunursa sonuç,

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$a + b + c = 6 \text{ denklemini sağlayan,}$$

I. Doğal sayılarda kaç değişik (a, b, c) sıralı üçlüsü olduğunu,

II. Pozitif tamsayılarda kaç değişik (a, b, c) sıralı üçlüsü olduğunu, bulalım.

Çözüm:

I. 6 tane 1 ve bu altı tane 1 i üçe ayırmak için 2 tane ayraç (•) ele alalım ve birinci çeşitten 6 nesne ile ikinci bir çeşitten 2 nesne olmak üzere, toplam 8 nesnenin sıralanışlarını göz önüne alalım.

Örneğin;

1111•1•1 sıralaması; a = 4, b = 1, c = 1

veya

•111•111 sıralaması da; a = 0, b = 3, c = 3 durumuna karşılık gelecektir.

O halde, bu 8 nesnenin değişik sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28 \text{ bulunur.}$$

II. Sayılar pozitif tam sayı olacağına göre yukarıdaki duruma göre sayıların sıfır olması istenilmemektedir.

Buna göre, 6 tane 1 den birer tanesini a ya b ye ve c ye verdiğimiz düşünürsek bu sayıların sıfır olması durumu ortadan kalkar. O halde, geri kalan 3 tane 1 i istediğimiz gibi dağıtabiliriz.

3 tane 1 ve bu üç tane 1 i üçe ayırmak için 2 tane ayraç (•) ele alalım ve birinci çeşitten 3 nesne ile ikinci bir çeşitten 2 nesne olmak üzere, toplam 5 nesnenin sıralanışlarını göz önüne alalım.

Örneğin,

1•1•1 sıralaması; a = 1, b = 1, c = 1

veya

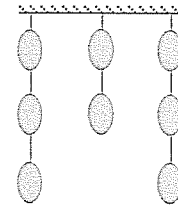
•1•11 sıralaması da; a = 0, b = 1, c = 2 durumuna karşılık gelecektir.

O halde, bu 5 nesnenin değişik sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

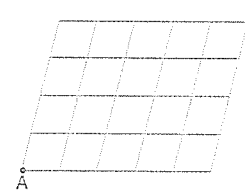
Soru 1:



Şekildeki balonlara, her iptekinin en alttakinden başlayarak atışı yapmaya başlayan atıcı, balonları kaç değişik sıra ile patlatabilir? (Her atış tam isabettir ve atış yapılan balon patlar.)

A) 180 B) 240 C) 380 D) 440 E) 560

Soru 2:



Yukarıdaki şekilde verilen telden yapılmış paralelkenarlardan oluşan ızgaranın A noktasında bulunan bir karınca B noktasına en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidebilir?

A) 51 B) 61 C) 94 D) 126 E) 136

Soru 3:

7000 TL parası bulunan bir kişi parasını üç farklı yatırım alanında değerlendirmek istiyor.

Her bir yatırım alanında en az 1000 TL ve 1000 TL nin katları olacak şekilde dağıtacağına göre, bu kişi parasını bu yatırım alanlarında kaç değişik biçimde değerlendirebilir?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 21

Soru 4:

$$a + b + c = 9$$

denkleminin pozitif tamsayılarda kaç değişik çözümü vardır?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

Soru 5:

1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarını kullanarak tek ve çift rakamların kendi arasında küçükten büyüğe doğru sıralandığı 6 basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir? (Tek ve çift sayılar yan yana olmak zorunda değildir.)

- A) 15 B) 20 C) 21 D) 35 E) 70

Soru 6:

Sol üst köşedeki B harfinden başlayıp komşu harfler takip edilerek sağ alt köşedeki U harfine kadar olan harfleri işleyerek BEYOĞLU kelimesi kaç farklı yolla okunabilir?

B	E	Y	O
E	Y	O	Ğ
Y	O	Ğ	L
O	Ğ	L	U

- A) 15 B) 20 C) 21 D) 35 E) 70

Dairesel (Dönel) Permütasyon

Bilgi

Sonlu n elemanlı bir kümenin elemanlarının birbirinden farklı dairesel permütasyon (dönel sıralanış) sayısını hesaplamak için, kümenin herhangi bir elemanının, yerini değiştirmemek üzere sabit bir noktaya konulduğu düşünülür. Sonra, kalan $(n - 1)$ elemanın her permütasyonu farklı bir sıralanış olur. Dolayısıyla kalan $(n - 1)$ eleman toplam $(n - 1)!$ sayıda farklı biçimde sıralanabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

8 öğretmenin, toplantı salonundaki yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı biçimde oturabileceğini bulalım.

Çözüm:

8 eleman, dairesel olarak $(8 - 1)! = 7!$ değişik biçimde sıralanabilir.

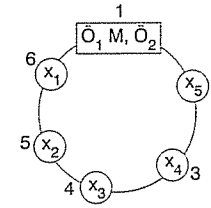
Örnek 2:

Bir müdür, iki öğretmen ve beş öğrenci, sadece müdür, öğretmenlerin arasında olacak şekilde, toplantı masasının etrafında kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulalım.

Çözüm:

Müdür (M) ve öğretmenler ($\bar{O}_1$ ve $\bar{O}_2$) bir eleman gibi düşünülürse, diğer beş öğrenci ile birlikte toplam altı elemanın dairesel sıralanışı (masanın yuvarlak olması şart değildir) söz konusu olur.

Bununla birlikte öğretmenler de kendi arasında, $2! = 2$ değişik şekilde yer değiştirilebilir. O halde, bu şekildeki bütün sıralanışlarının sayısı,



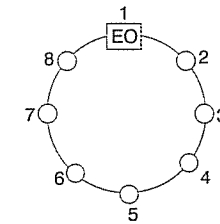
$$(6 - 1)! \cdot 2! = 240 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

Aralarında Esat ve Onur'un da bulunduğu 9 arkadaş, yuvarlak bir masa etrafında oturuyorlar.

Esat ile Onur'un yan yana olmadığı kaç farklı sıralanış olduğunu bulalım.

Çözüm:



Esat ile Onur'un yan yana oturdukları durumlar

Esat (E) ile Onur (O) bir eleman (EO) gibi düşünersek, diğer 7 arkadaşıyla beraber 8 elemanın dairesel sıralanışlarının sayısı $(8 - 1)! = 7!$ dir. Esat ile Onur'un kendi aralarında yer değiştirmelerini ($2!$) de hesaba katarsak, Esat ile Onur'un yan yana oturduğu durumların sayısını $2! \cdot 7!$ olarak buluruz.

9 elemanın dairesel sıralanışlarının sayısı da $(9 - 1)! = 8!$ bütün durumların sayısı $8!$ olarak bulunur.

Bütün durumların sayısından Esat ile Onur'un yan yana oturdukları durumların sayısı çıkarılırsa, Esat ile Onur'un yan yana oturmadıkları durumların sayısı bulunur. O halde, Esat ile Onur'un yan yana oturmadıkları durumların sayısı,

$$\left(\begin{array}{c} \text{Bütün} \\ \text{durumlar} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Esat ile Onur'un} \\ \text{yan yana olduğu} \\ \text{durumlar} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Esat ile Onur'un} \\ \text{yan yana olmadığı} \\ \text{durumlar} \end{array} \right)$$

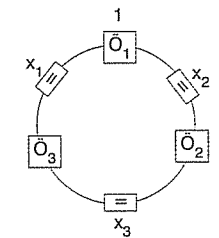
$$(9 - 1)! - 2! \cdot (8 - 1)! = 8! - 2! \cdot 7! \\ = 6 \cdot 7! \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

Herhangi iki öğretmen arasında bir öğrenci olmak şartıyla 3 öğretmen ile 3 öğrencinin bir yuvarlak masa etrafında kaç değişik şekilde oturabileceğini bulalım.

Çözüm:

Önce, 3 öğretmen yuvarlak masa etrafına $(3 - 1)! = 2!$ değişik şekilde öğrenciler de öğretmenlerin arasında kalan 3 yere $3!$ değişik şekilde oturabilirler.



Buna göre 3 öğretmen ile 3 öğrenci bir yuvarlak masa etrafında herhangi iki öğretmen arasında bir öğrenci olmak şartıyla $2! \cdot 3!$ değişik şekilde oturabilirler.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir aile, anne ile baba daima yan yana olacak şekilde bir yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?

- A) 21.6! B) 21.5! C) 5! D) 6! E) 3.6!

Soru 2:

8 kişilik bir toplantı grubu, yardımcısı başkanın sağında ve sekreteri solunda olmak üzere, bir yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?

- A) 4! B) 2.4! C) 5! D) 2.5! E) 6!

Soru 3:

5 doktor ile 5 hemşire, iki doktor arasında bir hemşire gelmek şartıyla yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?

- A) 5! B) 4! C) 4!.4! D) 5!.4! E) 4.5!

Soru 4:

Anne, baba ve 6 çocuktan oluşan 8 kişilik bir aile, en küçük çocuk daima anne ile baba arasında olmak şartıyla, yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı biçimde oturabilir?

- A) 3!.2! B) 5! C) 6! D) 2.5! E) 2.6!

1. 4 mektup, 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

- A) 5⁵ B) 5⁴ C) 4⁵ D) 4⁴ E) 5³

2. Ali'nin sekiz farklı gömleği vardır. Ali prensibi gereği giydiği bir gömleği bir daha giymemektedir.

Buna göre, Ali hergün bir gömlek giymek üzere, art arda 3 gün kaç farklı şekilde giyinebilir?

- A) 336 B) 343 C) 396 D) 512 E) 546

$$3. \frac{(2n)!. (n-2)!}{n!. (2n-3)!} = 28$$

olduğuna göre, n değeri kaçtır ?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$$4. A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin elemanları ile rakamları birbirinden farklı olan, iki basamaklı, 5 ile tam bölünebilen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

5. 4 mektup 5 posta kutusuna atılacaktır.

Her kutuya en çok bir mektup atılmak şartıyla bu mektuplar kaç farklı şekilde atılabilir?

- A) 58 B) 96 C) 108 D) 120 E) 140

6. 5 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?

- A) 32 B) 31 C) 28 D) 24 E) 16

$$7. A = \{ a, k, l, m, n, i \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak, harfleri farklı dört harfli sessiz harfle başlayıp, sesli harfle biten anlamlı veya anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

- A) 48 B) 56 C) 72 D) 90 E) 96

8. 0, 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabilir?

- A) 36 B) 43 C) 49 D) 56 E) 64

$$9. A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı 200 ile 350 arasında kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

- A) 40 B) 50 C) 55 D) 60 E) 80

10. Onlar basamağındaki rakamı 7 olan 4000 den küçük kaç farklı doğal sayı vardır?

- A) 200 B) 250 C) 300 D) 350 E) 400

11. a, b, c, d, e, f harfleri kullanılarak, üç harfli, harfleri tekrarsız, anlamlı ya da anlamsız kelimeler yazılacaktır.

Bu kelimelerden a ile başlayanlarının sayısı, a ile başlayıp c ile bitenlerin sayısından kaç fazladır?

- A) 5 B) 6 C) 9 D) 12 E) 16

12. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı, 200 den büyük kaç çift sayı yazılabilir?

- A) 24 B) 48 C) 50 D) 71 E) 72

13. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak, rakamlarından sadece biri 2 olan üç basamaklı kaç tane tek sayı yazılabilir?

- A) 21 B) 24 C) 27 D) 31 E) 33

14. $C = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek, anlamlı ya da anlamsız;

- Harfleri birbirinden farklı dört harfli 360 değişik kelime vardır.
- Sessiz harfle başlayıp sessiz harfle biten dört harfli 576 değişik kelime vardır.
- Harfleri birbirinden farklı 4 harfli sesli harf ile başlayıp sesli harf ile biten 24 değişik kelime vardır.
- İçerisinde "a" harfinin bulunduğu, harfleri tekrarsız 4 harfli 240 değişik kelime vardır.

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

$$15. \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} \right] \cdot \frac{n!}{2n-1}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $n-1$ B) n C) 1 D) $\frac{1}{n-1}$ E) $\frac{1}{n}$

16. $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ $B = \{0, 1, 3, 5, 6\}$

$A \cap B$ kümesindeki rakamları kullanarak üç basamaklı rakamları farklı kaç tek sayı yazılabilir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

17. $A = \{0, 2, 3, 5\}$

rakamları kullanılarak 300 den büyük rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabilir?

- A) 12 B) 18 C) 30 D) 40 E) 48

18. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

kümesinin elemanları kullanılarak, rakamlarından en az biri 2 olan üç basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

- A) 8 B) 11 C) 16 D) 18 E) 20

19. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak dört basamaklı 2 ile başlayıp 5 ile biten ve 2300 den küçük olan kaç farklı sayı yazılabilir?

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 10 E) 15

FEM YAYINLARI

1. Özdeş 3 fizik, özdeş 4 kimya, 5 farklı matematik kitabı düzgün bir rafa aynı cins kitaplar yanyana olacak şekilde kaç değişik biçimde dizilebilir?

- A) $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3!$ B) $3! \cdot 7! \cdot 5!$ C) $3! \cdot 12!$
D) $5! \cdot 7!$ E) $3! \cdot 5!$

2. Ali, Veli ve 4 arkadaşı düz bir banka oturacaktır.

Ali ve Veli bankın iki kenarına oturması şartıyla bu arkadaşlar kaç farklı şekilde oturabilirler?

- A) 120 B) 60 C) 48 D) 24 E) 12

3. Bir öğrenci ek kontenjanlarda 10 değişik fakülteyi yazabiliyor.

Bu öğrenci belirli 5 fakülteyi ilk beş tercihine, yine belirli 3 fakülteyi son üç tercihine yazmak şartıyla kaç değişik şekilde tercih yapabilir?

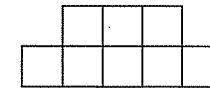
- A) 10! B) $5! \cdot 2!$ C) $5! \cdot 3! \cdot 2!$
D) $5! \cdot 3!$ E) $10! \cdot 2!$

4. Bir apartmanın giriş zemin katından başka 7 katı daha vardır.

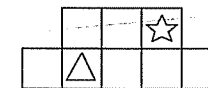
Bu apartmanın giriş katından asansöre binen üç kişiden her biri farklı katlarda inceklerine göre, bu üç kişi katlarda kaç değişik şekilde inebilir?

- A) 100 B) 102 C) 150 D) 200 E) 210

- 5.



Şekil - I



Şekil - II

Bir oyuncakçı dükkanının vitrini, II. şekildeki gibi herbir kutuya bir oyuncak gelecek biçimde düzenleyecektir.

4 farklı oyuncak bu kutulara kaç değişik şekilde konulabilir?

- A) 4! B) 1440 C) $8 \cdot 4!$ D) 1680 E) 8!

6. Özdeş 3 mavi ve özdeş 4 kırmızı kalem bir rafa yan yana kaç farklı şekilde sıralanır?

- A) $\frac{7!}{4! \cdot 3!}$ B) $\frac{7!}{4!}$ C) $\frac{7!}{3!}$ D) 6! E) 7!

7. $A = \{a, b, c, d, e\}$

kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde "c" vardır?

- A) 72 B) 60 C) 36 D) 24 E) 18

8. ÇİÇEK

kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek K ile başlamayan fakat E ile biten, beş harfli, anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?

- A) 60 B) 24 C) 18 D) 9 E) 3

9. "KARAKAŞ"

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 7 harfli, anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

- A) 320 B) 360 C) 400 D) 410 E) 420

10. 130201

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek altı basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

- A) 60 B) 80 C) 120 D) 88 E) 66

FEM YAYINLARI

11. "PATATES"

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek P harfi ile başlayan fakat T harfi ile bitmeyen anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

A) 80 B) 90 C) 110 D) 120 E) 150

12. 210102 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilebilecek altı basamaklı sayıların kaç tanesinin birler basamağındaki rakam 1 dir?

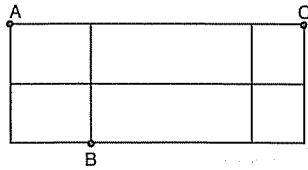
A) 60 B) 32 C) 20 D) 18 E) 12

13. ÜNİVERSİTE

kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek on harfli, anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

A) $\frac{10!}{2! \cdot 2!}$ B) $\frac{10!}{4!}$ C) $\frac{10!}{4! \cdot 2!}$
D) 10! E) $10! \cdot 2! \cdot 2!$

14.



Yukarıdaki şekilde, bir semtin birbirini dik kesen sokakları gösterilmiştir.

B noktasından geçmek şartıyla, A noktasından C noktasına en kısa yoldan kaç değişik şekilde gidilebilir?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

15. 7 kişilik bir grup, yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturarak toplantı yapabilir?

A) 6! B) 7! C) 7! \cdot 6 D) 6! \cdot 5! E) 5!

16. 4 erkek, 3 kız öğrenci elele tutuşarak dairesel bir şekilde sıralanacaklardır.

Buna göre, kız öğrencilerin hepsi yan yana gelmek şartıyla, dairesel bir biçimde kaç değişik sıralama oluşturabilirler?

A) 36 B) 72 C) 144 D) 158 E) 286

17. Özdeş 3 mavi, özdeş 4 sarı, özdeş 5 kırmızı bilye yan yana sıralanacaktır.

Kırmızılardan hepsi birarada, mavilerin hepsi birarada olmak şartıyla kaç farklı sıralanış yapılabilir?

A) $6! \cdot 5!$ B) $6!$ C) $3! \cdot 4! \cdot 5!$
D) $6! \cdot 5! \cdot 3!$ E) 30

18. İki öğretmen dördü öğrenci olan 6 kişi, yuvarlak bir masa etrafına öğretmenler yan yana gelmek koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 24 B) 36 C) 40 D) 48 E) 60

19. 110556 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek, altı basamaklı 5 ile tam bölünebilen kaç sayı yazılabilir?

A) 38 B) 42 C) $\frac{5!}{2!}$ D) 78 E) $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$

20. Bir öğrencinin gireceği 6 farklı sınavın 2 tanesi matematik ve fizik sınavıdır.

Fizik ile matematik sınavları art arda gelecek şekilde bu öğrencinin sınavlarının sıralaması kaç değişik şekilde yapılabilir?

A) 60 B) 120 C) 180 D) 240 E) 480

$$1. \frac{12! - 4 \cdot 11!}{10! - 2 \cdot 8!}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 110 B) 90 C) 84 D) 72 E) 63

$$2. \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

3. İstanbul'dan İzmit'e 5, İzmit'ten Bolu'ya ise 3 değişik yolla gidilebilmektedir.

Buna göre, İstanbul'dan Bolu'ya, İzmit'e uğramak şartıyla kaç farklı yoldan gidilebilir?

A) 3 B) 5 C) 15 D) 20 E) 21

4. 3 kişi, 5 tane boş koltuğa kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 48 B) 60 C) 75 D) 90 E) 120

5. Asım'ın 8 farklı gömleği vardır. Asım prensibi gereği giydiği bir gömleği bir daha giymemektedir.

Buna göre, Asım her gün bir gömlek giymek üzere, art arda 3 gün kaç farklı şekilde gömlek giyilebilir?

A) 336 B) 343 C) 396 D) 512 E) 546

6. $B = \{e, y, z, t, n, ü\}$

kümesinin elemanları kullanılarak, harfleri farklı, 4 harfli, sesli harfle başlayıp sessiz harfle biten, anlamlı veya anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

A) 48 B) 56 C) 72 D) 96 E) 144

7. Farklı özelliğe sahip 5 mavi ve 4 kırmızı bilye, her iki mavi bilye arasında bir kırmızı bilye gelmek şartıyla yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) $4! \cdot 2!$ B) 240 C) 360
D) $4! \cdot 5!$ E) $4! \cdot 5! \cdot 2!$

8. Dört basamaklı doğal sayıların kaç tanesi çift sayıdır?

A) 5000 B) 4750 C) 4600
D) 4500 E) 4200

9. $B = \{2, 4, 6, 8\}$

kümesinin elemanları kullanılarak, üç basamaklı ve rakamları farklı, 800 den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 36 B) 30 C) 24 D) 18 E) 12

10. $B = \{0, 1, 3, 5\}$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları birbirinden farklı, 300 den büyük kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

11. Aynı branştaki kitaplar birbirinden farklı olmak üzere, 3 matematik, 4 tarih ve 6 felsefe kitabı arasından farklı branşta üç kitap, kaç değişik şekilde seçilebilir?

- A) 13 B) 26 C) 60 D) 72 E) 276

12. 0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak yazılabilecek üç basamaklı ve rakamları birbirinden farklı sayıların kaç tanesinin rakamlarından biri "2" dir?

- A) 52 B) 50 C) 48 D) 40 E) 36

13. 0, 1, 2, 4, 5, 8 rakamları birer defa kullanılarak yazılabilecek üç basamaklı sayıların kaç tanesi 5 ile bölünebilir?

- A) 40 B) 36 C) 32 D) 30 E) 24

14. İki şehrin telefon kodu 216 ve 204 tür. Şehirlerdeki telefon numaraları tekrarsız ve telefon kodundaki numaralar bulunmamaktadır.

7 haneli telefon numaralarının başında sıfır bulunmadığına göre, bu iki şehirde toplam kaç aboneye telefon numarası verilebilir?

- A) 6.7! B) 7.7! C) 13.6! D) 7.6! E) 6.6!

15. 1, 2, 4, 7, 8

rakamları kullanılarak 1000 ile 7500 arasında rakamları tekrarsız kaç farklı sayı yazılabilir?

- A) 60 B) 68 C) 74 D) 82 E) 90

16. Bir okulun öğrencilerine, alfabemizdeki sessiz harfler ve rakamlar kullanılarak ilk hanesi harf, son iki hanesi rakam olan üç haneli numaralar verilecektir.

Bu okulda en çok kaç öğrenciye numara verilebilir?

- A) 1680 B) 1720 C) 1800
D) 1960 E) 2100

17. 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamları ile yazılabilen, rakamları farklı üç basamaklı doğal sayıların kaç tanesinde; "1" in basamak değeri, "3" ün basamak değerinden büyüktür?

- A) 36 B) 24 C) 18 D) 16 E) 12

18. 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamları kullanılarak yazılabilen altı basamaklı, rakamları tekrarsız bütün doğal sayılar, bir A kümesini oluşturmaktadır.

Buna göre, A kümesinin elemanlarından kaç tanesinde 1 rakamı, 4 ün solunda bulunur?

- A) 60 B) 120 C) 360 D) 480 E) 540

19. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

kümesinin elemanları kullanılarak altı basamaklı, rakamları farklı, 4 ün katı olan kaç farklı sayı yazılabilir?

- A) 27 B) 54 C) 81 D) 108 E) 192

1. Birbirinden farklı 5 kimya kitabı ve birbirinden farklı 2 fizik kitabı bir rafa dizilecektir.

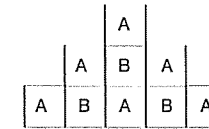
Fizik kitapları başta ve sonda birer tane olmak koşulu ile kitaplar bu rafa yan yana kaç değişik şekilde sıralanabilir?

- A) 120 B) 240 C) 270 D) 300 E) 330

2. 4 çocuk, belli ikisi yan yana olmamak şartı ile kaç farklı şekilde sıralanabilir?

- A) 24 B) 18 C) 12 D) 9 E) 4

3.



Yukarıdaki eş karelerden oluşan şekilde 6 tane A ve 3 tane B harfi rastgele yazılıyor.

Buna göre, kaç farklı görüntü oluşur?

- A) 72 B) 84 C) 96 D) 112 E) 120

4. 10 koşucunun katıldığı bir yarışın ilk üç derecesi kaç değişik şekilde sonuçlanır?

- A) 30 B) 120 C) 180 D) 360 E) 720

5. $A = \{ \ddot{U}, L, K, E, M \}$

kümesinin 3 lü permütasyonlarının kaç tanesinde "Ü" elemanı vardır?

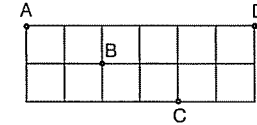
- A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) 72

6. "GÜLBEŞEKER"

kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilecek 10 harfli kelimelerin kaçında G, Ü, L harfleri "GÜL" şeklinde bulunur?

- A) $\frac{8!}{3.4!}$ B) $\frac{8!}{4.3!}$ C) 8.3! D) $\frac{10!}{3!}$ E) $\frac{8!}{3!}$

7.

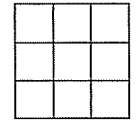


Yukarıdaki şekilde, bir semtin birbirini dik kesen sokakları gösterilmiştir.

B ve C ye uğramak şartı ile A dan D ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?

- A) 42 B) 48 C) 54 D) 56 E) 72

8. 1 den 9 a kadar olan rakamlar, herhangi bi satırda veya herhangi bir sütunda iki tane tek rakam art arda gelmemek şartıyla, şekildeki kutulara kaç farklı şekilde yazılabilir?



- A) 6! B) 4!.5! C) 5! D) 5!.5! E) 4!.4!

9. "ÇANAKKALE"

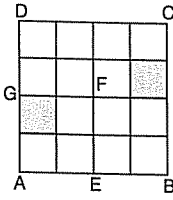
kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilecek anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kelimelerin kaç tanesi L ile başlar E ile biter?

- A) 840 B) 420 C) 280 D) 140 E) 60

10. İ harfi 2 kez, N ve C harfleri birer kez kullanılarak dört harfli, anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazılabilir?

- A) 24 B) 18 C) 16 D) 12 E) 8

11. Şekildeki ABCD kare yüzeyi alanı 1 cm^2 olan 16 küçük kareden oluşmuştur. Bu yüzey (AEFG) karesi ve (EBCDGF) yüzeyi olmak üzere iki parçaya ayrılmıştır. Her iki parçadan da alanı 1 cm^2 olan birer kare seçilecek ve seçilen bu kareler boyanacaktır.



Seçilen karelerin hiçbir ortak noktası olmamak şartı ile bu seçim kaç değişik şekilde yapılabilir?

- A) 31 B) 36 C) 39 D) 42 E) 47

12. Özdeş 4 kırmızı ve özdeş 5 mavi boncuk başlangıç ve bitim boncukları aynı renkte olmak üzere, bir sırada kaç değişik biçimde dizilebilir?

- A) 112 B) 92 C) 64 D) 56 E) 46

13. "RECEPFIRAT"

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilecek on harfli kelimelerden kaç tanesinde her R harfinden hemen sonra E harfi gelebilir?

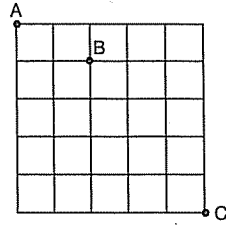
- A) 9! B) 8! C) $\frac{8!}{2}$ D) 7! E) $\frac{7!}{2}$

14. "33300221"

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek sekiz basamaklı kaç değişik tek sayı yazılabilir?

- A) 250 B) 375 C) 500 D) 600 E) 700

- 15.



Yukarıdaki şekilde, bir semtin birbirini dik kesen sokakları gösterilmiştir.

A dan C ye gitmek isteyen bir kişi B ye uğramamak ve en kısa yoldan gitmek şartı ile kaç farklı şekilde C ye gidebilir?

- A) 105 B) 120 C) 141 D) 147 E) 153

16. "11002233"

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek sekiz basamaklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?

- A) 300 B) 360 C) 720 D) 990 E) 1200

17. 7 öğrenci, içlerinden birisinin etrafını çevreleyerek, el ele tutuşup oyun oynayacaklardır.

Buna göre, bu öğrenciler kaç farklı şekilde sıralanarak oyun oynayabilirler?

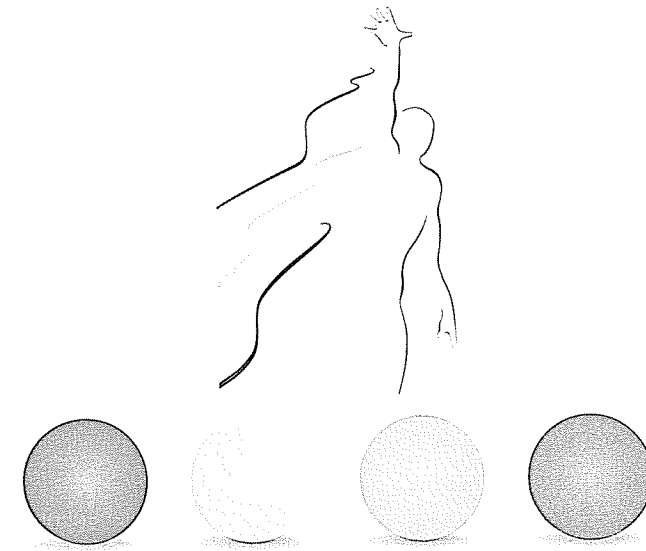
- A) 5! B) 6! C) 7.5! D) 6.6! E) 7!

18. Anne, baba, nine, dede ve belli sayıda çocuktan oluşan bir aile, yuvarlak masa etrafına dede ile ninenin arasında anne ile baba olmak şartıyla 96 değişik şekilde oturabileceklerine göre, bu ailede ki birey sayısı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

19. Bir grup öğrencinin bir doğru boyunca farklı sıralanışlarının sayısı, yuvarlak bir masa etrafındaki farklı sıralanışlarının sayısının 6 katına eşit olduğuna göre, bu grupta öğrenci sayısı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



BÖLÜM 2

KOMBİNASYON - BİNOM

KOMBİNASYON

Tanım

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine bu kümenin r li bir kombinasyonu denir. n elemanlı bir kümenin r li kombinasyonlarının sayısı,

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{P(n, r)}{r!} \\ = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

şeklinde gösterilir.

$$C(9, 2) = \binom{9}{2} = \frac{P(9, 2)}{2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

$$C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{P(7, 3)}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C(6, 4) = \binom{6}{4} = \frac{P(6, 4)}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

Bilgi

i. n elemandan r eleman seçiliyorsa, (r -li bir grup (küme) oluşturuluyorsa) sıralamanın önemi yoktur. Çünkü kümenin elemanlarının yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. Bu durumda kombinasyonla hesap yapılır.

ii. n elemandan r tanesi seçilip bu eleman sıralanıyorsa permütasyonla hesap yapılır. Buna göre, permütasyon hesabı; n elemandan r elemanın seçilmesi (birinci iş) kombinasyonla hesaplandıktan sonra, bu r elemanın sıralanmaları (ikinci iş) hesaplanarak ($r!$) birlikte gerçekleştirilen iki iş olarak düşünülüp ikisinin çarpımı şeklinde yapılabilir.

O halde,

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$

$$\Rightarrow C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \{a, b, c\}$$

kümesinin ikili kombinasyonlarını ve permütasyonlarını bulalım.

Çözüm:

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerini yazalım. $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ ve $\{b, c\}$ dir. Bu alt kümeler A kümesinin 2 li kombinasyonlarıdır. Şimdi de A kümesinin, 2 li kombinasyonları ile 2 li permütasyonlarını karşılaştıralım.

Kombinasyonlar		Permütasyonlar
$\{a, b\}$	$\longleftrightarrow$	$(a, b), (b, a)$
$\{a, c\}$	$\longleftrightarrow$	$(a, c), (c, a)$
$\{b, c\}$	$\longleftrightarrow$	$(b, c), (c, b)$

Görüldüğü gibi A kümesinin 2 li kombinasyonlarının sayısı 3 olmasına rağmen 2 li permütasyonlarının sayısı 6 dır. Her satırdaki 2 permütasyondan bir tek kombinasyon elde edilir.

$$\binom{3}{2} = \frac{P(3, 2)}{2!} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3 \text{ tür.}$$

Örnek 2:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

kümesinin üçlü kombinasyonlarını yazalım.

Çözüm:

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerini yazalım.

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d} ve {b, c, d} dir.
Bu alt kümeler A kümesinin 3 lü kombinasyonlarıdır. 4 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kombinasyonların sayısı;

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4.3.2}{3!} = 4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

6 elemanlı kümenin, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$C(6,3) = \frac{P(6,3)}{3!} = \frac{6.5.4}{3!} = 20 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

kümesinin, içinde a nın bulunduğu üçlü kombinasyonlarını yazalım.

Çözüm:

A = {a, b, c, d, e} kümesinin içinde a nın bulunduğu 3 elemanlı alt kümelerini yazalım.

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e} dir.

Bu alt kümeler A kümesinin içinde a nın bulunduğu 3 lü kombinasyonlarıdır.

Görüldüğü gibi alt kümelerde a sabit kalmakta ya-
nındaki iki eleman kümedeki dört elemandan yazıl-
maktadır. Buna göre, A kümesinin içinde a nın bu-
lunduğu 3 elemanlı kombinasyonların sayısı;

$$C(4,2) = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{4.3}{2!} = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

15 farklı oyuncak arasından 5 tanesinin, kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

Çözüm:

15 oyuncak arasından 5 tanesini seçmek, 5 ele-
manlı alt kümelerin (yani 5 li kombinasyonların)
sayısını bulmak demektir.

Buna göre,

$$\binom{15}{5} = \frac{15.14.13.12.11}{5!}$$

$$= 3.14.13.11 = 3003$$

farklı şekilde seçim yapılabilir.

Örnek 6:

Bir oyuncakçıda, 7 farklı oyuncak otomobil, 5 farklı
oyuncak bebek bulunmaktadır.

Bu oyuncaklardan 4 tane almak isteyen bir kişi-
nin kaç farklı şekilde oyuncak seçebileceğini
bulalım.

Çözüm:

7 oyuncak araba, 5 oyuncak bebek olmak üzere,
toplam 12 farklı oyuncaktan 4 tane seçebileceğine
göre, 12 nin 4 lü kombinasyonlarının sayısını bul-
mamız yeterli olacaktır.

Buna göre,

$$\binom{12}{4} = \frac{12.11.10.9}{4!} = 495$$

farklı şekilde seçim yapılabilir.

Örnek 7:

21 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabile-
cek ikişerli alt grupların sayısı bu sınıftaki erkek
öğrencilerin sayısına eşittir.

Buna göre, sınıfta kaç erkek öğrenci olduğunu
bulalım.

Çözüm:

Sınıfta k tane kız öğrenci varsa, 21 - k tane erkek
öğrenci vardır.

Buna göre,

$$\binom{k}{2} = 21 - k$$

$$\Rightarrow \frac{k.(k-1)}{2!} = 21 - k$$

$$\Rightarrow k^2 - k = 42 - 2k$$

$$\Rightarrow k^2 + k - 42 = 0$$

$$\Rightarrow (k + 7).(k - 6) = 0$$

$$k_1 = -7 \text{ veya } k_2 = 6$$

O halde,

Sınıfta 6 tane kız 21 - 6 = 15 tane erkek öğrenci
vardır.

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

kümesinin üçlü kombinasyonlarını ve permütas-
yonlarını yazınız.

Soru 2:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin dörtlü kombinasyonlarını yazınız.

Soru 3:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin içinde 2 nin bulunduğu dörtlü kombi-
nasyonlarını yazınız.

Soru 4:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin içinde 3 ün bulunmadığı üçlü kombi-
nasyonlarını yazınız.

Soru 5:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

kümesinin, 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 35 B) 40 C) 55 D) 70 E) 105

Soru 6:

12 farklı kalem arasından 5 tanesi kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 647 B) 679 C) 712 D) 742 E) 792

Soru 7:

6 farklı tükenmez kalem, 5 farklı dolma kalem, 4 farklı kurşun kalem arasından, 3 farklı kalem kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 270 B) 375 C) 455 D) 475 E) 535

Soru 8:

Özdeş 5 bilye 8 çocuğa dağıtılacaktır.

Her çocuk en çok 1 bilye alacağına göre, dağıtım kaç farklı şekilde yapılabilir?

- A) 56 B) 64 C) 81 D) 116 E) 132

Soru 9:

İngiliz ve Alman turistlerin bulunduğu 28 kişilik bir turist kafilesinde, İngilizlerle yapılabilecek ikişerli grupların sayısı Alman turist sayısına eşittir.

Buna göre, bu kafilede kaç Alman turist vardır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 20 E) 21

Soru 10:

Bir toplantı salonunda 15 kişi birbiriyle tokalaşiyor.

Kaç değişik tokalaşma gerçekleşir?

- A) 135 B) 120 C) 115 D) 105 E) 90

Bilgi

i. $C(n, r) = C(n, n - r)$ dir.

Buradan,

$$\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow x = y \text{ veya } x + y = n \text{ olur.}$$

ii. $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ dir.

iii. $C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$C(20, 19) + C(21, 20) + C(22, 21)$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\binom{20}{19} = \binom{20}{1} = 20 \text{ dir.}$$

$$\binom{21}{20} = \binom{21}{1} = 21 \text{ dir.}$$

$$\binom{22}{21} = \binom{22}{1} = 22 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$C(20, 19) + C(21, 20) + C(22, 21) = 20 + 21 + 22 = 63 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$P(n, 4) = 30.C(n, 3)$$

olduğuna göre, n yi bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(n, 4) &= 30.C(n, 3) \\ \Rightarrow n(n-1).(n-2).(n-3) &= 30. \frac{n(n-1).(n-2)}{3!} \\ \Rightarrow n-3 &= \frac{30}{6} \\ \Rightarrow n-3 &= 5 \\ \Rightarrow n &= 8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\binom{15}{a} = \binom{15}{2a-6}$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\binom{15}{a} = \binom{15}{2a-6}$$

$$\Rightarrow a = 2a - 6 \text{ veya } a + 2a - 6 = 15 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$a = 2a - 6 \Rightarrow a = 6 \text{ dir.}$$

$$a + 2a - 6 = 15 \Rightarrow 3a = 21$$

$$\Rightarrow a = 7 \text{ dir.}$$

Buna göre, a nın alabileceği değerler toplamı, $6 + 7 = 13$ bulunur.

Örnek 4:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

olduğuna göre, n nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + n = \frac{(n+1).n}{2!}$$

$$\Rightarrow 2.(n+1) = (n+1).n$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ bulunur.}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$C(18, n + 2) = C(18, 3n - 8)$$

olduğuna göre, n nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 17

Soru 2:

$$C(2n, 2n - 1) = C(n, 2)$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Soru 3:

$$\frac{P(n + 1, 3)}{C(n + 1, 2)} = C(8, 3)$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Soru 4:

10 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümeleri sayısı, n elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümeleri sayısından 65 fazla olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

■ Bilgi

Sonlu n elemanlı bir kümenin;

0 elemanlı alt kümelerinin sayısı = $C(n, 0)$

1 elemanlı alt kümelerinin sayısı = $C(n, 1)$

2 elemanlı alt kümelerinin sayısı = $C(n, 2)$

.....

.....

n elemanlı alt kümelerinin sayısı = $C(n, n)$

olduğundan tüm alt kümelerinin sayısı,

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n \text{ dir.}$$

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

kümesinin,

I. Alt kümelerinin sayısını

II. En az 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını

III. En çok 4 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

I. 6 elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı, $2^6 = 64$ dür.

II. 6 elemanlı bir kümenin en az 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı; 2, 3, 4, 5 ve 6 elemanlı alt küme sayıları toplanarak veya tüm alt kümelerin sayısından istenilmeyen alt kümelerin sayısı çıkartılarak bulunur.

O halde,

$$\begin{aligned} \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} &= 2^6 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1} \\ &= 64 - 1 - 6 \\ &= 57 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

III. 6 elemanlı bir kümenin en çok 4 elemanlı kümelerinin sayısı; 0, 1, 2, 3, 4 elemanlı alt küme sayılarının toplanarak veya tüm alt kümelerin sayısından istenilmeyen alt kümelerin sayısı çıkartılarak bulunur.

O halde,

$$\begin{aligned} \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} &= 2^6 - \binom{6}{5} - \binom{6}{6} \\ &= 2^6 - 6 - 1 \\ &= 57 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

7 kişinin katıldığı bir sınavın başarı yönünden (başarılı yada başarısız) kaç farklı şekilde sonuçlanabileceğini bulalım.

Çözüm:

I.yol

7 kişiden hiç biri başarılı olamaz : $C(7, 0)$

7 kişiden yalnızca bir kişi başarılı olur : $C(7, 1)$

7 kişiden yalnızca iki kişi başarılı olur : $C(7, 2)$

7 kişiden yalnızca üç kişi başarılı olur : $C(7, 3)$

7 kişiden yalnızca dört kişi başarılı olur : $C(7, 4)$

7 kişiden yalnızca beş kişi başarılı olur : $C(7, 5)$

7 kişiden yalnızca altı kişi başarılı olur : $C(7, 6)$

7 kişiden yedisi de başarılı olur : $C(7, 7)$

Buna göre, 7 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden,

$$\begin{aligned} \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \\ &= 2^7 = 128 \text{ farklı şekilde sonuçlanabilir.} \end{aligned}$$

II.yol

Bu soru saymanın temel prensibiyle de gözlelebilir.

Bir kişi için başarılı veya başarısız olmak üzere 2 durum söz konusudur.

O halde,

$$\frac{2}{1.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{2.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{3.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{4.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{5.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{6.\text{kişi}} \cdot \frac{2}{7.\text{kişi}} = 2^7$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 179 B) 199 C) 203 D) 209 E) 219

Soru 2:

$$A = \{a, r, t, v, i, n\}$$

kümesinin en az üç elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 34 B) 36 C) 38 D) 42 E) 48

Soru 3:

Bir kişi, 8 farklı hedefin herbirine bir atış yapıyor.

Bu atışlar hedeflerin vurulup - vurulmaması yönünde kaç farklı biçimde sonuçlanabilir?

- A) 8 B) 64 C) 128 D) 244 E) 256

Soru 4:

Bir kümenin eleman sayısı n dir.

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{4}$$

olduğuna göre, bu kümenin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 513 ☒ B) 466 C) 432 D) 400 E) 346

Soru 5:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesinin, eleman sayısı tek sayı olan kaç tane alt kümesi vardır?

- A) 16 B) 24 ☒ C) 32 D) 48 E) 64

Soru 6:

4 çocuklu bir ailede çocukların cinsiyet dağılımı kaç farklı şekilde olabilir?

- ☒ A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4

Bilgi

n elemanlı bir kümenin elemanlarından oluşturulacak, belli şartlar içeren r elemanlı alt kümelerin sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde,

- I. a nın bulunmayacağını,
 - II. a nın bulunacağını,
 - III. c ve d nin bulunacağını,
 - IV. c veya d nin bulunacağını,
- bulalım.

Çözüm:

I. a nın bulunmadığı üç elemanlı alt kümelerin sayısı, A kümesinin a nın dışındaki elemanlarından meydana gelen $\{b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin üç elemanlı alt küme sayısı kadardır.

O halde, istenilen durumların sayısı,

$$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3!} = 20 \text{ olarak bulunur.}$$

II. I.yol

a nın mutlaka bulunduğu üç elemanlı alt kümelerin sayısını bulmak için; seçilecek üç elemandan biri a belli olduğuna göre, a nın yanına A kümesinin a nın dışındaki elemanlarından meydana gelen $\{b, c, d, e, f, g\}$ kümesinden iki elemanın seçilmesi yeterli olacaktır.

O halde, istenilen durumların sayısı,

$$\binom{6}{2} = \frac{6.5}{2!} = 15 \text{ olarak bulunur.}$$

II. yol

A kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3!} = 35 \text{ dir.}$$

A kümesinin, a nın bulunmadığı üç elemanlı alt kümelerinin sayısı da 20 olduğundan a nın bulunduğu alt kümelerinin sayısı, $35 - 20 = 15$ olarak bulunur.

III. c ve d nin mutlaka bulunduğu üç elemanlı alt kümelerin sayısını bulmak için; seçilecek üç elemandan ikisi (c ve d) belli olduğuna göre bunların yanına A kümesinin c ve d nin dışındaki elemanlarından meydana gelen $\{a, b, e, f, g\}$ kümesinin bir elemanının seçilmesi yeterli olacaktır.

O halde, istenilen durumların sayısı,

$$\binom{5}{1} = 5 \text{ olarak bulunur.}$$

IV. I. yol

c nin bulunduğu üç elemanlı alt kümelerin kümesi B , d nin bulunduğu üç elemanlı alt kümelerin kümesi ise C olsun.

$$s(B) = s(C) = \binom{6}{2} = 15 \text{ tir.}$$

c ve d nin birlikte bulunduğu üç elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$s(B \cap C) = \binom{5}{1} = 5 \text{ tir.}$$

O halde, c veya d nin mutlaka bulunacağını üç elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C) = 15 + 15 - 5 = 25 \text{ olarak bulunur.}$$

II. yol

A kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{7}{3} = 35 \text{ tir.}$$

A kümesinin c ve d yi çıkardığımızda oluşacak üç elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10 \text{ dur.}$$

O halde, c veya d nin bulunduğu alt kümelerin sayısı $35 - 10 = 25$ olarak bulunur.

Örnek 2:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesinin elemanlarıyla oluşturulabilecek 4 elemanlı alt kümelerin kaç tanesinde bütün tek sayıların eleman olarak bulunacağını bulalım.

Çözüm:

A kümesinin dört elemanlı alt kümelerinden, içerisinde tek sayıların (1, 3 ve 5) bulunduğu alt kümelerinin sayısını bulmak için, seçilecek dört elemandan üçü belli olduğuna göre, bunların yanına A kümesinin bu elemanlar dışındaki elemanlardan meydana gelen, $\{2, 4, 6\}$ kümesinden bir elemanın seçilmesi yeterli olacaktır.

O halde, istenilen durumların sayısı

$$\binom{3}{1} = 3 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 3:

18 futbolcu arasından 11 kişilik bir takım ve bu takım içerisinde 2 kaptan seçilecektir.

Kaç farklı şekilde seçim yapılabileceğini bulalım.

Çözüm:

Önce 11 kişilik takım seçme işi ve ardından kaptanları seçme işi art arda yapılacağından her bir durum ayrı ayrı bulunarak çarpma yoluyla sayma kuralına göre işlem yapılır.

O halde, istenilen durumların sayısı,

$$\underbrace{\binom{18}{11}}_{1. \text{ iş}} \cdot \underbrace{\binom{11}{2}}_{2. \text{ iş}} = \binom{18}{7} \cdot \binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot \binom{18}{7} = 55 \cdot \binom{18}{7}$$

olarak bulunur.

Örnek 4:

Ayhan ile Selami'nin de aralarında bulunduğu 9 kişi arasından 4 kişilik bir grup oluşturulacaktır.

Ayhan'ın bulunup Selami'nin bulunmadığı kaç farklı grubun oluşturabileceğini bulalım.

Çözüm:

4 kişilik grupta Ayhan bulunacağına göre, Ayhan'ın yanına 3 kişi daha seçilmelidir. Fakat Selami'nin grupta olması istenilmediğinden seçilen bu 3 kişi Ayhan ve Selami hariç geri kalan 7 kişi arasından olmalıdır.

O halde, istenilen durumların sayısı

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

10 soruluk bir sınavda bir öğrenci 6 soru seçecektir.

Bu öğrenci ilk 3 soruyu seçmek zorunda olduğuna göre, 6 soruyu kaç değişik şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

İlk 3 sorunun üçü de seçileceğine göre kalan 7 sorudan 3 tanesini seçmesi öğrenci için yeterli olacaktır.

O halde, istenilen durumların sayısı,

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ olarak bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

20 öğrenci arasından 12 öğrenci seçilecektir.

Bu 20 öğrenciden seçilecek olan 5 öğrenci belli olduğuna göre, kaç farklı seçim yapılabilir?

✓ A) $\binom{15}{7}$ B) $\binom{20}{7}$ C) $\binom{15}{12}$ D) $\binom{20}{12}$ E) $\binom{8}{7}$

Soru 2:

$$A = \{\Delta, *, \square, \odot, \triangle\}$$

Kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde, * ve $\square$ elemanları eleman olarak bulunur?

✓ A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Soru 3:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kümesinin üçlü kombinasyonlarının kaç tanesinde "b" eleman olarak bulunmayıp "c" eleman olarak bulunur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

Soru 4:

Bir öğrenciden 10 soruluk bir sınavda, soruların en az 8 tanesini cevaplaması istenmektedir.

İlk 4 soruyu cevaplamak mecburi olduğuna göre, bu öğrenci, seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

A) 10 B) 15 C) 22 D) 30 E) 35

Soru 5:

Ehliyetli 8 kişiden bir otomobile binecek 5 kişi ve bu 5 kişi içerisinde de arabayı kullanacak birisi seçilecektir.

Kaç farklı şekilde seçim yapılabilir?

A) 54 B) 112 C) 256 D) 260 E) 280

Soru 6:

Aralarında bir kitap ve bir kalemin de bulunduğu 10 farklı eşya arasından 5 tanesi hediye paketi yapılacaktır.

Kitap ve kalemin bulunduğu kaç farklı hediye paketi yapılabilir?

A) 24 B) 36 C) 46 D) 56 E) 64

Bilgi

n elemanlı ve m elemanlı iki kümenin elemanlarından oluşturulacak, belli şartlar içeren r elemanlı alt kümelerin sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

5 bay ve 6 bayan arasından, 4 kişilik bir grup seçilecektir. Bu grubun;

I. Kaç farklı şekilde seçilebileceğini,

II. Hiç bayan bulunmamak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini,

III. 2 si bay olmak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini,

IV. En az 2 si bayan olmak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini,

V. En az 1 tane bayan ve en az 1 tane bay olmak şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini, bulalım.

Çözüm:

I. 5 bay ve 6 bayan olmak üzere toplam 11 kişiden 4 kişilik bir grup,

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330$$

farklı şekilde seçilebilir.

II. Hiç bayan bulunmayacaksa grubun tamamı 5 bay arasından seçileceğinden bu grup,

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

farklı şekilde seçilebilir.

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

III. Seçilecek 4 kişiden 2 si bay ise 2 si de bayan olacaktır. Buna göre,

6 bayandan 2 si $\binom{6}{2}$,

5 baydan 2 si $\binom{5}{2}$

değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte saymanın temel prensibine göre,

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 150$$

değişik şekilde seçilebilir.

IV. Seçilecek 4 kişiden en az 2 si bayan olacağına göre, bu gruptakilerin 2 si veya 3 ü veya 4 ü bayan olmalıdır.

Buna göre,

6 bayan arasından 2 si $\binom{6}{2}$,

5 bay arasından 2 si $\binom{5}{2}$

değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte saymanın temel prensibine göre,

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 150$$

değişik şekilde seçilebilir.

6 bayan arasından 3 ü $\binom{6}{3}$,

5 bay arasından 1 i $\binom{5}{1}$

değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte saymanın temel prensibine göre

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 5 = 100$$

değişik şekilde seçilebilir.

6 bayan arasından 4 ü $\binom{6}{4}$,

5 bay arasından 0 kişi, $\binom{5}{0}$

değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte saymanın temel prensibine göre

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{5}{0} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 1 = 15$$

değişik şekilde seçilebilir.

O halde, en az 2 si bayan olmak şartıyla bu grup,

2 BY, 2B veya 3BY, 1B veya 4BY, 0B

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{5}{1} + \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{0}$$

$$= 150 + 100 + 15 = 265$$

değişik seçim yapılabilir.

V. Seçilecek 4 kişiden en az 1 inin bayan ve en az birinin bay olması; tamamının bayan olmaması veya tamamının bay olmaması ile mümkündür. Bunu da seçilebilecek tüm 4 erli grupların sayısından, tamamının bayan ve tamamının bay olduğu 4 erli grupların sayısını çıkararak bulabiliriz.

Tüm 4 erli grupların sayısı $\binom{11}{4}$,

Tamamının bayan olduğu 4 erli grupların sayısı

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} \text{ dir.}$$

Tamamının bay olduğu 4 erli grupların sayısı

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} \text{ dir.}$$

O halde, en az 1 tane bayan ve en az 1 tane bay olmak şartıyla bu grup,

$$\binom{11}{4} - \binom{6}{4} - \binom{5}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} - \frac{6 \cdot 5}{2!} - 5$$

$$= 330 - 15 - 5$$

$$= 310$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek 2:

Bir öğrenci 15 tane sorudan 10 tanesini cevaplayacaktır.

İlk 5 sorudan en az 3 tanesini cevaplamak şartıyla bu 10 soruyu kaç değişik şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Bu öğrenci, ilk 5 sorudan 3 tanesini veya 4 tanesini veya 5 tanesini cevaplandırabilir.

İlk 5 sorudan 3 ü $\binom{5}{3}$, sonraki 10 sorudan 7 si

$\binom{10}{7}$ ve ikisi birlikte $\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{7}$ değişik şekilde

seçilebilir.

Veya,

İlk 5 sorudan 4 ü $\binom{5}{4}$, sonraki 10 sorudan 6 sı

$\binom{10}{6}$ ve ikisi birlikte $\binom{5}{4} \cdot \binom{10}{6}$ değişik şekilde

seçilebilir.

Veya,

İlk 5 sorudan 5 i $\binom{5}{5}$, sonraki 10 sorudan 5 i

$\binom{10}{5}$ ve ikisi birlikte $\binom{5}{5} \cdot \binom{10}{5}$ değişik şekilde

seçilebilir.

O halde 10 soru,

İlk 5 sorudan 3 ü veya ilk 5 sorudan 4 ü veya ilk 5 sorudan 5 i ;

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{7} + \binom{5}{4} \cdot \binom{10}{6} + \binom{5}{5} \cdot \binom{10}{5}$$

$$= 1200 + 1050 + 252 = 2502$$

değişik şekilde seçilebilir.

Örnek 3:

Aralarında Kadem adlı mühendisin bulunduğu 5 mühendis ile aralarında Giray adlı mimarın bulunduğu 4 mimar arasından 2 si mimar olmak şartıyla 5 kişilik bir ekip seçilecektir. Bu grubun;

I. Kadem adlı mühendis ile Giray adlı mimarın birlikte grupta bulunması şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini,

II. Kadem adlı mühendisin bulunduğu, Giray adlı mimarın ise bulunmaması şartıyla kaç farklı şekilde seçilebileceğini

bulalım.

Çözüm:

Seçilecek 5 kişilik grubun 2 si mimar olacağına göre, 3 ü mühendis olacaktır. Buna göre,

I. Kadem adlı mühendis grupta bulunacağına göre, 3 mühendisten biri seçilmiş olacağından geriye kalan 4 mühendis arasında 2 mühendis $\binom{4}{2}$ farklı şekilde seçilebilir.

Giray adlı mimar grupta bulunacağına göre, 2 mimardan biri seçilmiş olacağından geriye kalan 3 mimar arasından 1 mimar $\binom{3}{1}$ farklı şekilde seçilebilir.

O halde, istenilen şartlarda,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 3 = 18 \text{ farklı grup seçilebilir.}$$

II. Kadem adlı mühendis grupta bulunacağına göre, 3 mühendisten biri seçilmiş olacağından geriye kalan 4 mühendis arasında 2 mühendis $\binom{4}{2}$ farklı şekilde seçilebilir.

Giray adlı mimar grupta bulunmayacağına göre, Giray çıkartılınca geriye kalan 3 mimar arasından 2 mimar $\binom{3}{2}$ farklı şekilde seçilebilir.

O halde, istenilen şartlarda,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 3 = 18 \text{ farklı grup seçilebilir.}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

3 doktor 3 hemşire arasından 2 doktor ve 1 hemşire kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Soru 2:

Hülya, Fulya ve Oya'nın aralarında bulunduğu 12 kişilik basketbolcu grubundan 5 kişilik bir takım oluşturulacaktır.

Hülya, Fulya ve Oya'dan en az birinin takımda bulunması şartıyla bu takım kaç değişik şekilde seçilebilir?

- A) 666 B) 686 C) 696 D) 846 E) 850

Soru 3:

4 subay, 4 er arasından 3 kişilik bir ekip seçilecektir.

En az bir subayın bulunduğu kaç değişik ekip oluşturulabilir?

- A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 56

Soru 4:

Bir öğrenci 5 i kurşun kalem olan, 12 farklı kalem arasından 7 tanesini seçecektir.

Bu öğrenci kurşun kalemlerden en az 3 ünü seçmek zorunda olduğuna göre, 7 kalemi kaç değişik şekilde seçebilir?

- A) 546 B) 547 C) 548 D) 556 E) 557

Soru 5:

Bir okulda 6 seçmeli dersten 2 tanesi aynı saatte okutulmaktadır.

3 ders seçmek isteyen bir öğrenci kaç değişik biçimde seçim yapabilir?

- A) 10 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Soru 6:

Aralarında 4 kişinin ehliyetli olduğu 9 kişiden 5 i bir arabaya binecektir.

Arabayı kullanan kişinin ehliyetli olması şartıyla, arabaya binecek bu 5 kişi kaç değişik şekilde seçilebilir?

- A) 126 B) 125 C) 124 D) 123 E) 20

Soru 7:

Aralarında Ahmet adlı öğretmenin bulunduğu 6 öğretmen ile aralarında Ahmet öğretmenin çocuğu olan Esat adlı öğrencinin bulunduğu 8 öğrenci arasından 2 si öğretmen olmak üzere 5 kişilik bir ekip seçilecektir.

Ahmet adlı öğretmen ile Esat adlı öğrenci seçilseler de seçilmeseler de birbirinden ayrılmaması gerektiğine göre, kaç değişik seçim yapılabilir?

- A) 435 B) 445 C) 455 D) 465 E) 475

Soru 8:

Bir kasada 3 tane 5 TL lik, 5 tane 10 TL lik, 4 tane 20 TL lik banknot şeklinde paralar vardır.

Seri numaraları farklı, bu paralardan 40 TL lik bir deste para kaç değişik şekilde oluşturulabilir?

- A) 81 B) 135 C) 136 D) 141 E) 146

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

Bilgi

n elemanlı bir kümenin elemanlarının, eleman sayısı farklı olacak şekilde gruplara parçalandığında oluşacak durumların sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir kafiledeki 9 turistten 4 ü Ayasofya'ya, 3 ü Topkapı Sarayı'na, 2 si de Sultanahmet'e gönderilecektir.

Bu üç grubun kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulalım.

Çözüm:

9 kişiden 4 ü Ayasofya'ya $\binom{9}{4}$, geriye kalan 5 kişiden 3 ü Topkapı Sarayı'na $\binom{5}{3}$, geriye kalan 2 kişiden 2 si Sultan Ahmet'e $\binom{2}{2}$ ve çarpma kuralına göre,

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 1260$$

değişik şekilde oluşturulabilir.

⚡ Bu işlemler yapılırken hangi grubun önce seçildiğinin bir önemi yoktur.

Örnek 2:

Aralarında Kemal ile Zeki'nin de bulunduğu 8 kişilik bir gruptaki öğrencilerin 5 i sinemaya, 3 ü tiyatroya gönderilecektir.

Kemal ile Zeki aynı grupta bulunmaması şartıyla sinemaya ve tiyatroya gidecek olan bu iki grubun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

Çözüm:

I. yol:

Kemal ile Zeki birlikte bulunmayacaksa, Kemal'in sinemaya, Zeki'nin tiyatroya gideceğini kabul edelim. Bu durumda Kemal'in yanına 4, Zeki'nin yanına 2 kişi gereklidir. Bu şekilde

Sinemaya gidenler	Tiyatroya gidenler
• Kemal	• Zeki
• 2. kişi	• 2. kişi
• 3. kişi	• 3. kişi
• 4. kişi	
• 5. kişi	

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 15$$

farklı şekilde grup oluşturulabilir.

Ancak, Kemal sinemaya Zeki tiyatroya gidecek diye bir şart olmadığından bunların yer değiştirdiği, yine 15 farklı durum vardır.

Buna göre, Kemal ile Zeki'nin birlikte bulunmadığı grupların sayısı $15 + 15 = 30$ olarak bulunur.

II. yol:

Oluşabilecek tüm durumların sayısından $\left(\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3}\right)$,

Kemal ile Zeki'nin birlikte sinemaya gittiklerinde oluşacak durumların sayısı $\left(\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}\right)$ ve Kemal ile

Zeki'nin birlikte tiyatroya gittiklerinde oluşacak durumların sayısı $\left(\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1}\right)$ çıkartılarak sonuca gidilebilir. Bu durumda,

$$\begin{array}{c} \text{Tüm durumlar} \\ \hline \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} - \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} - \binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1} \end{array}$$

$$= 56 - 20 - 6 = 30 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 3:

9 farklı oyuncak 3 çocuğa dağıtılacaktır.

I. Her bir çocuğa 3 oyuncak vermek şartıyla,

II. Belirli bir çocuğa 5, diğerlerine 2 şer oyuncak vermek şartıyla,

III. Herhangi bir çocuğa 5, diğerlerine 2 şer oyuncak vermek şartıyla

kaç değişik biçimde dağıtılabilirliğini bulalım.

Çözüm:

I. 9 oyuncaktan 3 ü çocuklardan birincisine $\binom{9}{3}$, geriye kalan 6 oyuncaktan 3 ü çocuklardan ikincisine $\binom{6}{3}$, geriye kalan 3 oyuncakta çocuklar-

dan üçüncüsüne $\binom{3}{3}$ ve bu üç iş birlikte,

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1680$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

II. 9 oyuncaktan 5 i, 5 tane alacağı belli olan çocuğa $\binom{9}{5}$, geriye kalan 4 oyuncaktan 2 si geriye

kalan çocuklardan birincisine $\binom{4}{2}$, geriye kalan

2 oyuncaktan 2 si geriye kalan ikinci çocuğa

$\binom{2}{2}$ ve bu iş birlikte,

$$\binom{9}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 756$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

III. 3 çocuktan hangi çocuğun beş oyuncak alacağı $\binom{3}{1}$ farklı şekilde seçildikten sonra bu se-

çilen çocuğa 5 oyuncak $\binom{9}{5}$, geriye kalan 4 oyuncaktan 2 si geriye kalan çocuklardan birincisine $\binom{4}{2}$, geriye kalan 2 oyuncak geriye

kalan ikinci çocuğa $\binom{2}{2}$ ve bu dört iş birlikte,

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 2268$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

Örnek 4:

Bir pansiyonda 2 yataklı bir, 3 yataklı iki oda boştur.

8 kişinin, belirli ikisi farklı odalarda kalmak şartıyla bu pansiyona kaç değişik şekilde yerleştirilebileceğini bulalım.

Çözüm:

2 kişilik oda A, 3 kişilik odalardan birisi B ve diğeri C odası olsun. Önce herhangi bir şart olmaksızın bu 8 kişinin pansiyona kaç değişik şekilde yerleştirilebileceğini bulalım.

8 kişiden 2 si A odasına $\binom{8}{2}$, geriye kalan 6 kişiden

3 ü B odasına $\binom{6}{3}$, geriye kalan 3 kişiden 3 ü C

odasına $\binom{3}{3}$ ve üçü birlikte;

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 560$$

değişik şekilde yerleştirilebilir.

Şimdi de belirli iki kişi aynı odada kalmak şartıyla kaç değişik şekilde yerleştirilebileceğini bulalım.

Belirli iki kişi A odasında kalabilir.

Geriye kalan 6 kişiden 3 ü B odasına $\binom{6}{3}$, geriye

kalan 3 kişiden 3 ü C odasına $\binom{3}{3}$ ve ikisi birlikte;

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20$$

değişik şekilde yerleştirilebilir.

Veya,

Belirli iki kişi B odasında kalabilir.

Bu durumda B odasına 1 kişi, C odasına 3 kişi, A odasına 2 kişi yerleştirilecektir.

Geriye kalan 6 kişiden 1 i B odasına $\binom{6}{1}$,

geriye kalan 5 kişiden 3 ü C odasına $\binom{5}{3}$,

geriye kalan 2 kişiden 2 si A odasına $\binom{2}{2}$

ve üçü birlikte;

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 60$$

değişik şekilde yerleştirilebilir.

Veya,

Belirli iki kişi C odasında kalabilir.

Bu durumda yerleştirme yukarıda anlatıldığı şekle benzer olarak 60 değişik şekilde yapılabilir.

O halde belirli ikisi farklı odalarda kalmak şartıyla 8 kişi bu odalara,

$$560 - (20 + 60 + 60) = 420$$

değişik şekilde yerleştirilebilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

7 katlı bir binanın 3 katı maviye, 2 katı sarıya, 2 katı da pembeye boyanacaktır.

Bu bina kaç farklı şekilde boyanabilir?

- A) 180 B) 210 C) 240 D) 270 E) 290

Soru 2:

Bir binada biri 4, diğeri 5 kişilik iki asansör vardır.

9 kişiden belirli 2 kişinin aynı asansöre binmesi koşuluyla, asansörlere kaç farklı şekilde binilebilir?

- A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

Soru 3:

Ayşe, 6 farklı şapkayı iki arkadaşından her birine üçer üçer hediye edecektir.

Ayşe belli iki şapkayı aynı kişiye vermek şartıyla, bu 6 şapkayı kaç farklı biçimde verebilir?

- A) 16 B) 12 C) 8 D) 4 E) 3

Soru 4:

Bir pansiyonda iki tane 2 kişilik, bir tane 3 kişilik boş oda vardır.

7 kişiden belirli iki kişinin aynı odada kalması şartıyla bu pansiyona kaç değişik şekilde yerleştirilebilir?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

Bilgi

n elemanlı bir küme elemanlarının eleman sayısı aynı olacak şekilde gruplara parçalandığında gruplar arasında ayırt edici bir özellik yoksa oluşacak durumların sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

4 kişilik bir öğrenci grubundan seçilen öğrencilerin,

- 2 si sinemaya, 2 si de tiyatroya gidecektir.
- Bu öğrenciler, ikişerli iki takıma ayrılarak maç yapacaklardır.

Kaç değişik seçim yapılabileceğini bulalım.

Çözüm:

- Bu dört kişi a, b, c ve d kişileri olsun. Sinemaya gidecek 2 kişi ile tiyatroya gidecek 2 kişi aşağıdaki gibi gruplanabilir.

Grup numarası	Sinema	Tiyatro
1	a, b	c, d
2	a, c	b, d
3	a, d	b, c
4	b, c	a, d
5	b, d	a, c
6	c, d	a, b

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi 6 değişik seçim yapılabilir.

Şimdi de kaç değişik seçim yapılabileceğini kombi-nasyon yardımıyla bulalım.

4 kişilik öğrenci grubundan sinemaya gidecek 2 kişi

$\binom{4}{2}$, geriye kalan 2 öğrenciden de tiyatroya 2 kişi

$\binom{2}{2}$ değişik şekilde seçilebilir.

O halde, sinema ve tiyatroya gidecek öğrenciler,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6 \text{ değişik şekilde seçilebilir.}$$

II. Yukarıdaki tablodan 1 numaralı ekiple 6 numaralı ekibin, 2 numaralı ekiple 5 numaralı ekibin ve 3 numaralı ekiple 4 numaralı ekibin birbirinin aynısı olduğu görülüyor.

O halde bu ikili ekiplerden yarısı diğer yarısının aynısı olduğundan,

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2} = 3$$

değişik seçim yapılabilir.

Örnek 2:

9 kişilik bir grup eşit sayıda üç takıma ayrılarak maç yapacaklardır.

Bu üç takımın kaç değişik şekilde oluşturulabileceğini bulalım.

Çözüm:

9 kişi eşit sayıda üç takıma ayrılacağından,

9 kişiden 3 kişilik bir takım $\binom{9}{3}$, geriye kalan 6 kişi-

den de 3 kişilik bir takım $\binom{6}{3}$, Geriye kalan 3 kişi-

den de 3 kişilik bir takım $\binom{3}{3}$ değişik şekilde seçile-

bilir. Bu üçlü takımlar arasında bir fark olmadığından,

$$\frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}{3!} = 280$$

değişik şekilde üçerli takım meydana getirilebilir.

⚡ Gruplara farklı birer isim verilseydi veya gruplar farklı yerlere gönderilecek olsaydı sorunun çözümünde 3! e bölme işlemi yapılmayacaktı.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

10 farklı oyuncak beşerli iki gruba kaç farklı şekilde ayrılabilir?

- A) 108 B) 114 C) 126 D) 142 E) 252

Soru 2:

8 kişi ikiye bölünürse dört gruba ayrılarak dört tane yarışma ekibi kurulacaktır.

Bu ekipler kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

- A) 120 B) 105 C) 90 D) 60 E) 30

Bilgi

Seçme işlemi yapıldıktan sonra sıralamaların söz konusu olduğu yani hem kombinasyon hem de permütasyon içeren soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

9 farklı matematik kitabından 4 tanesi seçilip bir rafta dizilecektir.

Kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

9 farklı matematik kitabından 4 ü $\binom{9}{4}$ değişik şekilde seçilebilir.

Seçilen bu 4 kitap $P(4, 4) = 4!$ değişik şekilde sıralanabilir.

O halde 9 farklı matematik kitabından 4 ü,

$$\binom{9}{4} \cdot 4! = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot 4! = 3024 \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca,

$$\binom{9}{4} \cdot 4! = P(9, 4) \text{ olduğundan bu problemin bir permütasyon problemi olduğu görülür.}$$

Örnek 2:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, i\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak dört harfli, harfleri birbirinden farklı, harflerinin ikisi ünlü ve ikisi de ünsüz olan kaç değişik kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

A kümesinin ünlü harfleri a, e, ve i den iki tanesi $\binom{3}{2}$ değişik şekilde seçilebilir.

A kümesinin ünsüz harfleri b, c, d ve f den iki tanesi $\binom{4}{2}$ değişik şekilde seçilebilir.

Seçilen bu 4 harf $P(4, 4) = 4!$ değişik şekilde sıralanabilir.

O halde dört harfli, harfleri birbirinden farklı, harflerinin ikisi ünlü ve ikisi de ünsüz olan,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 4! = 432 \text{ değişik kelime yazılabilir.}$$

Örnek 3:

6 doktordan 2 si ve 4 asistandan 3 ü 5 kişilik yuvarlak bir masa etrafında oturacaklardır.

Doktorlar yanyana gelmek şartıyla kaç değişik şekilde oturabileceklerini bulalım.

Çözüm:

6 doktordan 2 si $\binom{6}{2}$ değişik şekilde seçilebilir.

4 asistandan 3 ü $\binom{4}{3}$ değişik şekilde seçilebilir.

Doktorlar yan yana olacağına göre 2 doktor 1 eleman olarak düşünülürse 4 eleman (3 asistan ile 1 eleman kabul edilen doktorlar) yuvarlak masa etrafına $P(4, 4) = 4!$ değişik şekilde sıralanabilir.

Bu sıralamaların her birinde doktorlar kendi aralarında $P(2, 2) = 2!$ değişik şekilde sıralanabilir.

O halde, doktorlar yan yana gelmek şartıyla elde edilebilecek dizilişlerin sayısı,

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 2! = 720 \text{ olarak bulunur.}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

7 kişilik bir aileden, anne ve babanın aralarında bulunduğu 4 kişi yanyana durarak fotoğraf çektirecektir.

Bu şekildeki pozlarda, kaç farklı sıralama yapılabilir?

- A) 120 B) 160 C) 280 D) 240 E) 300

Soru 2:

Aralarında Murat ile Hakan'ın bulunduğu 10 kişi yuvarlak masa etrafında, Murat ile Hakan arasında 2 kişi olmak şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?

- A) $\binom{8}{2} \cdot 6! \cdot 2!$ B) $\binom{8}{2} \cdot 6! \cdot 2! \cdot 2!$
C) $\binom{8}{2} \cdot 7! \cdot 2! \cdot 2!$ D) $\binom{10}{2} \cdot 6! \cdot 2! \cdot 2!$
E) $\binom{10}{2} \cdot 7! \cdot 2! \cdot 2!$

Soru 3:

A = {1, 2, 3, 4}

B = {a, b, c, d, e} kümeleri veriliyor.

A kümesinde farklı 2 rakam, B kümesinde farklı 2 harf seçilerek 4 haneli şifreler oluşturulacaktır.

Rakam ile başlayıp rakam ile biten kaç değişik şifre yazılabilir?

- A) 40 B) 60 C) 80 D) 120 E) 240

■ Bilgi

Herhangi üç tanesi doğrusal olmayan n tane noktayı kullanarak çizilebilecek doğruların, üçgenlerin veya çokgenlerin sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

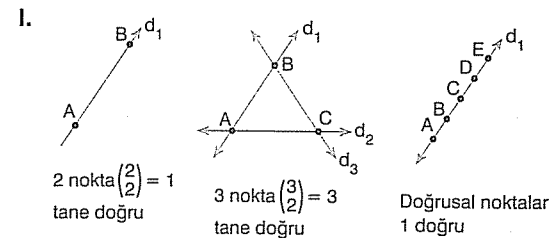
Herhangi üç tanesi doğrusal olmayan 10 noktadan,

I. Bu noktaların herhangi ikisinden geçen kaç farklı doğru çizilebileceğini

II. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebileceğini,

III. Köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı dörtgen çizilebileceğini, bulalım.

Çözüm:

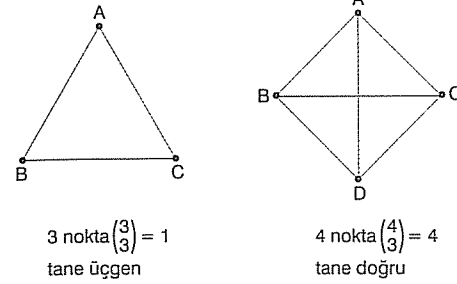


Yukarıdaki şekillerden görüldüğü gibi herhangi 2 noktadan bir doğru çizilebilir. Doğrusal olmayan 3 tane noktadan; herhangi ikisini alınca bir doğru çizileceğinden $\binom{3}{2} = 3$ tane farklı doğru çizilebilir.

Doğrusal n tane noktadan ise yalnızca bir tane doğru çizilebilir. Buna göre, herhangi üçü doğrusal olmayan 10 tane noktadan,

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45 \text{ tane farklı doğru çizilebilir.}$$

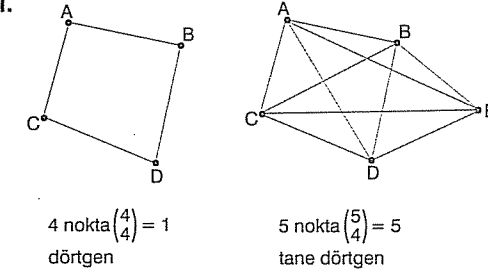
II.



Herhangi 3 ü doğrusal olmayan 3 noktadan bir üçgen çizileceğinden, herhangi 3 ü doğrusal olmayan 10 noktadan köşeleri bu noktalar üzerinde olan

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120 \text{ tane farklı üçgen çizilebilir.}$$

III.



Herhangi 3 ü doğrusal olmayan 4 noktadan köşeleri bu noktalar üzerinde olan bir dörtgen çizileceğinden, herhangi 3 ü doğrusal olmayan 10 noktadan köşeleri bu noktalar üzerinde olan,

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ tane farklı dörtgen çizilebilir.}$$

■ Bilgi Uygulama

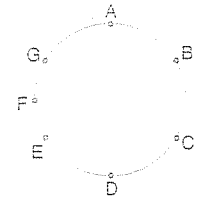
Soru 1:

Herhangi üç tanesi doğrusal olmayan 12 noktadan, köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

- A) 110 B) 140 C) 220 D) 240 E) 280

Soru 2:

Şekildeki çember üzerindeki 7 noktayı (A, B, C, D, E, F, G) kullanarak köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı dörtgen çizilebilir?



- A) 21 B) 35 C) 40 D) 70 E) 280

Soru 3:

Herhangi üç tanesi doğrusal olmayan 8 noktadan, köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı beşgen çizilebilir?

- A) 48 B) 54 C) 56 D) 64 E) 75

Soru 4:

10 kenarlı bir düzgün çokgenin köşegen sayısı kaçtır?

- A) 35 B) 45 C) 55 D) 60 E) 75

Bilgi

k ($k > 2$) tanesinin doğrusal olduğu, n tane noktayı kullanarak çizilebilecek doğruların, üçgenlerin veya çokgenlerin sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

4 ü doğrusal 9 farklı noktanın en az ikisinden geçen, en çok kaç doğru çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Herhangi 3 ü doğrusal olmayan 9 farklı noktadan,

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36 \text{ doğru çizilebilir.}$$

Ancak doğrusal olan 4 noktadan oluşabilecek,

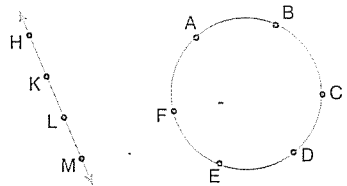
$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \text{ doğru çizilemeyecektir.}$$

Bunların yerine yalnız 1 tane doğru çizilebilir.

Buna göre, 4 ü doğrusal 9 farklı noktadan en çok,

$$\binom{9}{2} - \binom{4}{2} + 1 = 36 - 6 + 1 = 31 \text{ tane doğru çizilebilir.}$$

Örnek 2:



Yukarıdaki şekilde çember üzerinde 6 nokta (A, B, C, D, E, F) ile çemberin dışındaki doğru üzerinde 4 nokta (H, K, L, M) verilmiştir.

Bu noktalarla en çok kaç tane üçgen çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 10 nokta ile

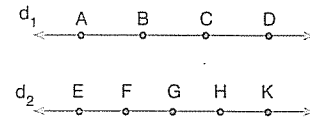
$$\binom{10}{3} \text{ tane üçgen çizilebilir.}$$

Fakat bu noktalardan 4 ü bir doğru üzerinde olduğundan bu noktalarla üçgen çizilemez. Bundan dolayı $\binom{4}{3}$ tane üçgen meydana gelemez.

O halde, şekildeki noktalarla en çok

$$\binom{10}{3} - \binom{4}{3} = 116 \text{ tane üçgen çizilebilir.}$$

Örnek 3:



Şekildeki d_1 doğrusu üzerindeki 4 nokta (A, B, C, D) ile d_2 doğrusu üzerindeki 5 noktayı (E, F, G, H, K) kullanarak,

I. En fazla, kaç doğru çizilebileceğini,

II. Köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç üçgen çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

I. I.yol:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 9 noktadan

$$\binom{9}{2} = 36 \text{ tane farklı doğru çizilebilir.}$$

Ancak, doğrusal olan d_1 doğrusu üzerindeki 4 noktadan $\binom{4}{2} = 6$ tane doğru, doğrusal olan d_2 doğrusu

üzerindeki 5 noktadan $\binom{5}{2} = 10$ tane doğru çizilemeyecektir. Bunların yerine d_1 ve d_2 doğruları çizilmiş olduğundan bunları saymamız gerekir.

Buna göre, bu noktalardan,

$$\begin{aligned} \binom{9}{2} - \binom{4}{2} - \binom{5}{2} + 2 &= 36 - 6 - 10 + 2 \\ &= 22 \text{ tane doğru çizilebilir.} \end{aligned}$$

II. yol

d_1 doğrusu üzerindeki 4 noktadan 1 i, d_2 doğrusu üzerindeki 5 noktadan 1 i alınarak bir doğru çizilebilir.

Bu şekilde,

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1} &= 4 \cdot 5 \\ &= 20 \text{ farklı doğru çizilebilir.} \end{aligned}$$

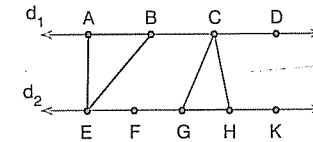
Bu 20 doğru dışında çizilmiş olan d_1 ve d_2 doğrularını da sayarsak toplam, $20 + 2 = 22$ tane doğru çizilebilir.

II. I. yol:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 9 noktadan oluşabilecek üçgen sayısından, d_1 üzerindeki 4 noktadan çizilebilecek ve d_2 üzerindeki 5 noktadan çizilebilecek üçgenlerin sayısı çıkartılarak şekilde istenilen noktalardan çizilebilecek üçgenlerin sayısı bulunur.

$$\begin{aligned} \binom{9}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} &= 84 - 4 - 10 \\ &= 70 \text{ tane üçgen çizilebilir.} \end{aligned}$$

II. yol:

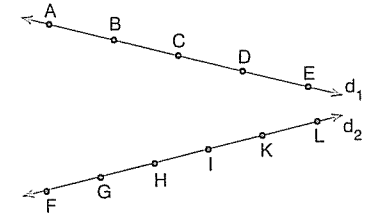


Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi d_1 doğrusu üzerindeki noktalardan 1 i, $\binom{4}{1}$, d_2 doğrusu üzerindeki noktalardan 2 si $\binom{5}{2}$, seçilerek veya

d_1 doğrusu üzerindeki noktalardan 2 si $\binom{4}{2}$, d_2 doğrusu üzerindeki noktalardan 1 i $\binom{5}{1}$, seçilerek,

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} &= 40 + 30 \\ &= 70 \text{ tane farklı üçgen çizilebilir.} \end{aligned}$$

Örnek 4:



Yukarıdaki şekilde d_1 doğrusu üzerinde 5, d_2 doğrusu üzerinde 6 nokta vardır.

Bu 11 nokta ile kaç tane dörtgen çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 4 nokta ile 1 dörtgen meydana getirilebileceğinden d_1 doğrusu üzerindeki 5 noktadan 2 si $\binom{5}{2}$, d_2 doğrusu üzerinde-

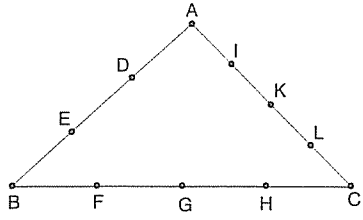
ki 6 noktadan 2 si $\binom{6}{2}$ ve ikisi birlikte,

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$$

değişik şekilde seçilebilir.

O halde, bu 11 nokta ile 150 tane dörtgen çizilebilir.

Örnek 5:



Yukarıdaki şekilde verilen 11 nokta (A, D, E, B, F, G, H, C, L, K, I) ile köşeleri bu noktalar üzerinde olan kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 3 nokta ile 1 üçgen meydana getirilebilir. Şekildeki 11 nokta noktadan 3 ü $\binom{11}{3}$ değişik şekilde seçilebildiğinden $\binom{11}{3}$ kadar üçgen meydana gelmesi gerekirken |AB| kenarı üzerindeki 4 nokta (A, D, E, B) doğrusal olduğundan $\binom{4}{3}$, |AC| kenarı üzerindeki 5 nokta (A, I, K, L, C) doğrusal olduğundan $\binom{5}{3}$ ve |BC| kenarı üzerindeki 5 nokta (B, F, G, H, C) doğrusal olduğundan $\binom{5}{3}$ kadar daha az üçgen meydana gelir.

O halde, şekildeki noktalarla,

$$\binom{11}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} - \binom{5}{3}$$

$$= 165 - 4 - 10 - 10 = 141$$

tane üçgen çizilebilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

5 i doğrusal 12 noktadan köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç tane üçgen çizilebilir?

- A) 160 B) 170 C) 190 D) 200 E) 210

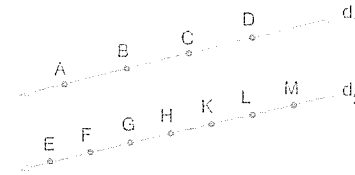
Soru 2:

d_1 ve d_2 doğruları veriliyor.

Şekildeki 8 noktanın en az ikisinden geçen en çok kaç farklı doğru çizilebilir?

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 28 E) 34

Soru 3:

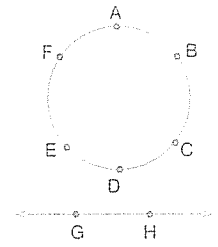


Şekildeki d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki toplam 11 nokta (A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M) kullanılarak köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç dörtgen çizilebilir?

- A) 280 B) 210 C) 150 D) 126 E) 80

Soru 4:

Şekildeki çemberin ve d doğrusunun üzerinde bulunan 8 noktadan (A, B, C, D, E, F, G, H) köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç farklı üçgen çizilebilir?



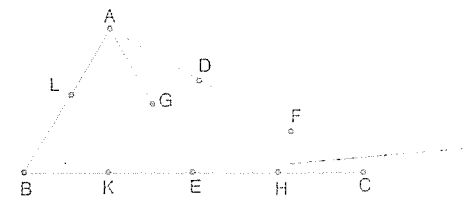
- A) 60 B) 56 C) 54 D) 50 E) 48

Soru 5:

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 6 nokta ile köşeleri bu noktalar üzerinde olan en fazla kaç çokgen çizilebilir?

- A) 7 B) 22 C) 36 D) 42 E) 60

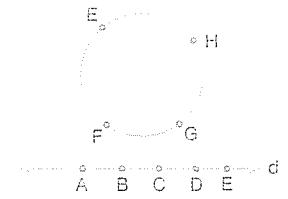
Soru 6:



Şekildeki ABC ve AEC üçgenlerinin kenarları üzerindeki A, B, C, D, E, F, G, H, L, K noktaları kullanılarak köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç farklı üçgen oluşturulabilir?

- A) 32 B) 42 C) 45 D) 49 E) 104

Soru 7:

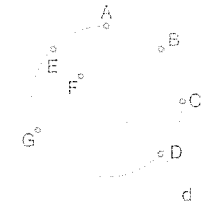


Yukarıdaki şekilde; A, B, C, D, E noktaları d doğrusu, E, F, G, H noktaları ise çember üzerindedir.

Buna göre, köşeleri bu noktalar üzerinde olan ve en az bir köşesi d doğrusu üzerinde olacak şekilde kaç üçgen çizilebilir?

- A) 40 B) 50 C) 70 D) 80 E) 90

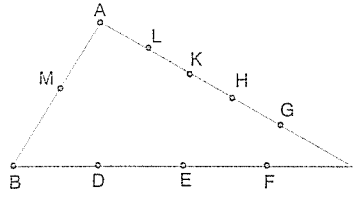
Soru 8:



E, F, D ∈ d olmak üzere, şekilde verilen 7 nokta (A, B, C, D, E, F, G) ile köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç tane dörtgen çizilebilir?

- A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 35

Soru 9:



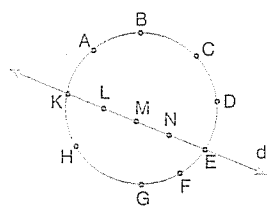
Şekildeki ABC üçgeninin kenarları üzerinde 10 (A, B, D, E, F, G, H, K, L, M) nokta verilmiştir.

Köşeleri bu 10 noktadan üçü olan kaç üçgen çizilebilir?

- A) 120 B) 119 C) 110 D) 105 E) 100

Soru 10:

Şekildeki çemberin ve d doğrusunun üzerinde bulunan 12 nokta kullanılarak köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç farklı üçgen çizilir?



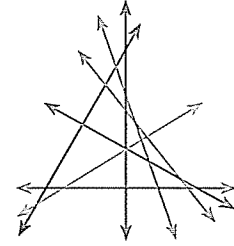
- A) 220 B) 210 C) 108 D) 192 E) 189

Bilgi

n tane doğrunun kesişmesiyle meydana gelebilecek noktaların sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

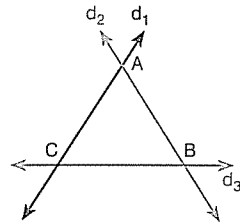
Bilgi Kavrama

Örnek 1:



Şekildeki herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen 7 doğrunun kaç farklı noktada kesiştiğini bulalım.

Çözüm :



Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan 2 doğrunun $\binom{2}{2} = 1$ tane kesişme noktası vardır.

Buna göre, şekildeki 7 doğrunun herhangi ikisi birbirine paralel olmadığına ve herhangi üçü aynı noktadan geçmediğine göre bu 7 doğru,

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21 \text{ tane kesişme noktası vardır.}$$

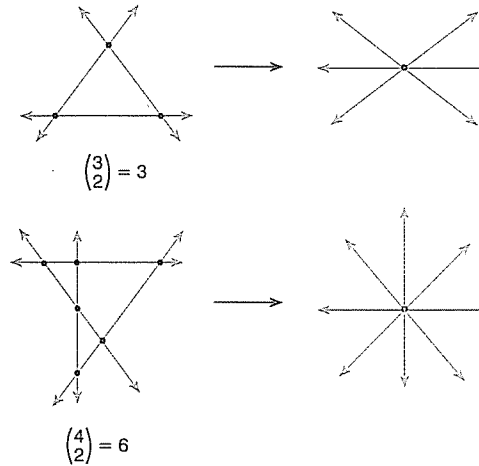
Örnek 2:

Bir düzlem üzerinde bulunan 9 doğrudan 3 ü bir A noktasından, geri kalanlardan 4 ü de bir B noktasından geçmektedir.

Herhangi ikisi birbirine paralel olmayan doğruların A ve B ile birlikte en çok kaç kesişme noktası olduğunu bulalım.

Çözüm:

Herhangi bir şart olmaksızın 9 doğru $\binom{9}{2}$ farklı noktada kesişir. Fakat bu doğrulardan 3 ü bir A noktasından geçtiğinden $\binom{3}{2}$ kesişme noktası yerine 1 kesişme noktası (A noktası) meydana gelir. Bunun dışındaki doğrulardan da 4 ü bir B noktasından geçtiğinden $\binom{4}{2}$ kesişme noktası yerine 1 kesişme noktası (B noktası) meydana gelir.



O halde, bu 9 doğrunun A ve B ile birlikte

$$\binom{9}{2} - \binom{3}{2} - \binom{4}{2} + 1 + 1 = 29$$

A B

kesişme noktası vardır.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen 13 doğru kaç farklı noktada kesişir?

- A) 110 B) 78 C) 55 D) 45 E) 25

Soru 2:

Bir düzlem üzerinde bulunan 11 doğrudan 6 sı bir A noktasından geçmektedir.

Herhangi ikisi birbirine paralel olmayan bu doğruların A noktası ile birlikte en çok kaç kesişme noktası vardır?

- A) 74 B) 56 C) 45 D) 41 E) 31

Soru 3:

Bir düzlem üzerinde bulunan 11 doğrudan 3 ü birbirine paraleldir. Geri kalanlardan 4 ü de bir K noktasından geçmektedir.

Bu doğruların K ile birlikte en çok kaç kesişme noktası vardır?

- A) 63 B) 51 C) 47 D) 41 E) 35

Bilgi

n tane doğrunun kesişmesiyle meydana gelebilecek, üçgenlerin veya dörtgenlerin sayısı ile ilgili soruların çözümü için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü bir noktadan geçmeyen 12 doğrunun kaç farklı üçgen meydana getirebileceğini bulalım.

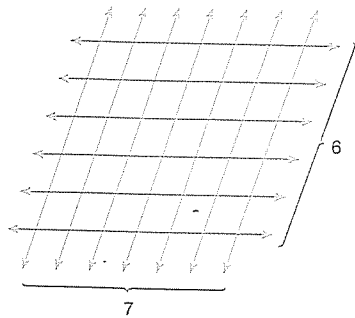
Çözüm:

Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü bir noktadan geçmeyen 3 doğru, 1 üçgen meydana getirir.

Buna göre bu 12 doğru ile meydana getirilebilecek üçgen sayısı 12 doğrunun 3 lü gruplarının sayısı kadardır.

O halde,
 $\binom{12}{3} = 220$ tane üçgen meydana gelir.

Örnek 2:



Yukarıdaki şekilde bir düzlemde birbirine paralel 6 doğru ile bu doğruları kesen, birbirine paralel 7 doğru verilmiştir.

Şekilde kaç tane paralelkenarın olduğunu bulalım.

Çözüm:

Birbirine paralel 2 doğru ile bunları kesen, birbirine paralel 2 doğru kesiştiğinde bu 4 doğru 1 paralelkenar meydana getirir.

Buna göre birbirine paralel 6 doğrudan 2 si ile bunları kesen, birbirine paralel 7 doğrudan 2 si seçilerek meydana getirilebilecek 4 lü grupların sayısı kadar paralelkenar elde edilir.

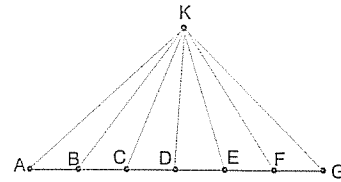
O halde,

Birbirine paralel 6 doğrudan 2 si $\binom{6}{2}$ bunları kesen, birbirine paralel 7 doğrudan 2 si $\binom{7}{2}$ değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte,

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{2} = 315$$

değişik şekilde seçilebilir ve 315 tane paralelkenar meydana gelir.

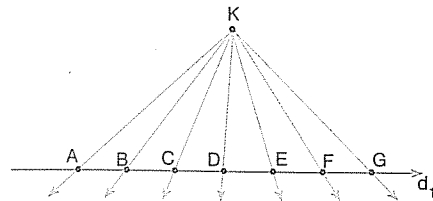
Örnek 3:



Şekildeki A, B, C, D, E, F, G noktaları doğrusal noktalardır.

Buna göre, şekilde kaç tane üçgen olduğunu bulalım.

Çözüm:

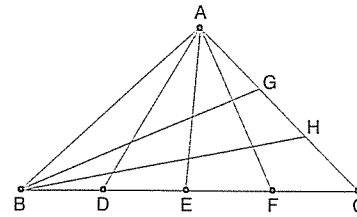


K noktası ile d_1 doğrusu üzerindeki 7 noktanın herhangi ikisi bir üçgen oluşturur.

Buna göre, şekilde

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21 \text{ tane üçgen vardır.}$$

Örnek 4:



Yukarıdaki şekilde kaç tane üçgen olduğunu bulalım.

Çözüm:

I. yol:

A köşesinden çıkan AB, AD, AE, AF ve AC doğrularından 2 si $\binom{5}{2}$, B köşesinden çıkan BG, BH ve BC doğrularından 1 i $\binom{3}{1}$ değişik şekilde seçilebilir.

O halde bu 10 doğru ile,

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30 \text{ tane üçgen meydana gelir.}$$

Veya,

B köşesinden çıkan BG, BH ve BC doğrularından 2 si $\binom{3}{2}$, A köşesinden çıkan AD, AE, AF, ve

AC doğrularından 1 i $\binom{3}{1}$ değişik şekilde seçilebilir.

O halde bu 9 doğru ile,

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = 12 \text{ tane üçgen meydana gelir.}$$

Buna göre şekilde,

$$30 + 12 = 42 \text{ tane üçgen vardır.}$$

II. yol:

Aynı düzlemdeki herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve üçü birden bir noktadan geçmeyen n tane doğru ile $\binom{n}{3}$ sayıda farklı üçgen meydana getirilebilir.

O halde, şekildeki 8 tane doğru ile; A ve B noktalarından ikiden fazla doğru geçmeyecek olsaydı;

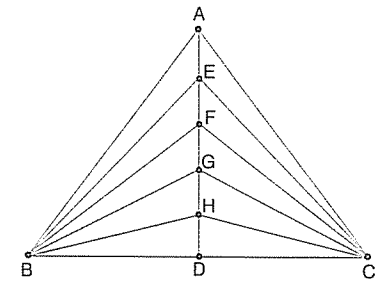
$\binom{8}{3}$ sayıda farklı üçgen meydana gelecekti.

Ancak, A ve B noktalarından sırasıyla 5 ve 4 doğru birden geçtiğinden üçgenlerin sayısı $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$

sayıda daha azdır. Buna göre şekildeki üçgenlerin sayısı,

$$\binom{8}{3} - \left[\binom{5}{3} + \binom{4}{3} \right] = 42 \text{ dir.}$$

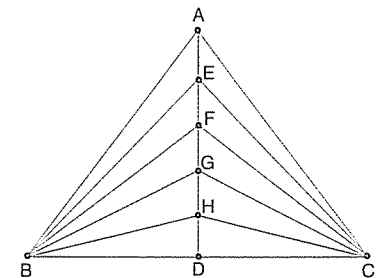
Örnek 5:



Yukarıdaki şekilde kaç tane üçgen olduğunu bulalım.

Çözüm:

I. yol:



Herhangi üçü doğrusal olmayan 3 nokta ile 1 üçgen meydana getirilebilir. Şekildeki 8 noktadan 3 ü $\binom{8}{3}$ değişik şekilde seçilebileceğinden $\binom{8}{3}$ kadar üçgen meydana gelmesi gerekirken, AD kenarı üzerindeki 6 nokta doğrusal olduğundan $\binom{6}{3}$ ve BC kenarı üzerindeki 3 nokta doğrusal olduğundan $\binom{3}{3}$ kadar daha az üçgen meydana gelir.

O halde şekilde,

$$\binom{8}{3} - \binom{6}{3} - \binom{3}{3} = 56 - 20 - 1 = 35 \text{ tane üçgen vardır.}$$

II. yol

AD kenarı üzerindeki 6 noktadan 2 si $\binom{6}{2}$ değişik şekilde seçilebileceğinden bir köşesi B noktasında ve tabanı da AD kenarı üzerinde bulunan $\binom{6}{2} = 15$ tane üçgen vardır.

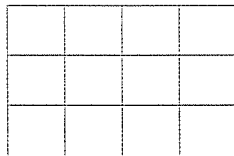
Aynı şekilde bir köşesi C noktasında ve tabanı da AD kenarı üzerinde bulunan 15 tane üçgen vardır. Ayrıca tabanı BC kenarı ve bir köşesi A, E, F, G ve H olan 5 tane üçgen vardır.

O halde, şekilde toplam,

$$15 + 15 + 5 = 35 \text{ tane üçgen vardır.}$$

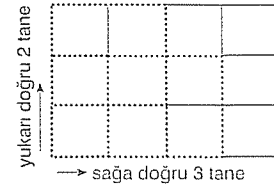
Örnek 6:

Yandaki şekil alanı 1 cm^2 olan özdeş 12 tane kare-den oluşmuştur.



Buna göre, şekilde kaç tane kare olduğunu bulalım.

Çözüm:



Kenarı 2 cm olan sağa doğru 3 tane, yukarı doğru 2 tane kare çizilebildiğinden alanı 4 cm^2 olan $2.3 = 6$ tane kare vardır.



Kenarı 3 cm olan sağa doğru 2 tane, yukarı doğru 1 tane kare çizilebildiğinden alanı, 9 cm^2 olan $2.1 = 2$ tane kare vardır.

Buna göre, alanı 1 cm^2 olan 12 tane, alanı 4 cm^2 olan 6 tane ve alanı 9 cm^2 olan 2 tane kare olduğundan şekilde,

$$12 + 6 + 2 = 20 \text{ tane kare vardır.}$$

II. yol:

$$\text{Alanı } 1 \text{ cm}^2 \text{ olan kare sayısı} = 4.3$$

$$\text{Alanı } 4 \text{ cm}^2 \text{ olan kare sayısı} = 3.2$$

$$\text{Alanı } 9 \text{ cm}^2 \text{ olan kare sayısı} = 2.1$$

$$\text{Toplam kare sayısı} = 20$$

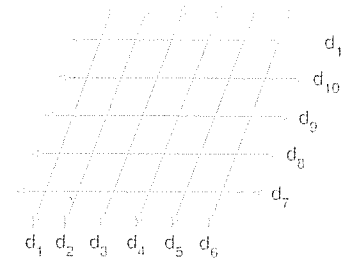
Elle Uygulama

Soru 1:

3 ü birbirine paralel 12 tane doğrunun kesişmesiyle en fazla kaç üçgen oluşur?

- A) 220 B) 192 C) 54 D) 44 E) 37

Soru 2:



Şekilde $d_1 // d_2 // d_3 // d_4 // d_5 // d_6$ ve

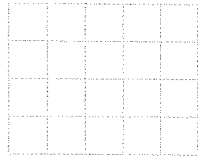
$d_7 // d_8 // d_9 // d_{10} // d_{11}$ dir.

Buna göre, şekilde bir kenarı d_7 doğrusu olan kaç paralelkenar vardır?

- A) 210 B) 150 C) 120 D) 72 E) 60

Soru 3:

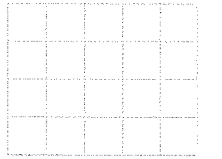
Yandaki şekilde kaç tane dikdörtgen vardır?



- A) 210 B) 150 C) 120 D) 60 E) 40

Soru 4:

Yandaki şekil özdeş 20 kare-den oluşmuştur.

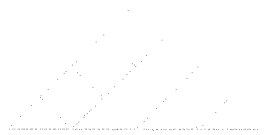


Buna göre, şekilde kaç tane kare vardır?

- A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

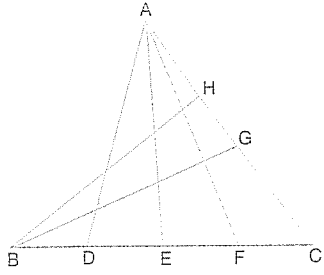
Soru 5:

Yandaki şekilde kaç üçgen vardır?



- A) 20 B) 16 C) 15 D) 10 E) 9

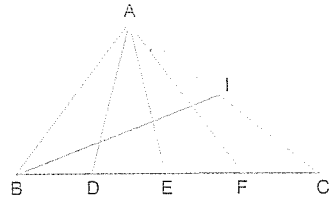
Soru 6:



Yukarıdaki şekilde kaç tane üçgen vardır?

- A) 45 B) 36 C) 30 D) 24 E) 18

Soru 7:



Yukarıdaki şekilde kaç üçgen vardır?

- A) 30 B) 24 C) 20 D) 14 E) 10

TEKRARLI KOMBİNASYON

Bir kümenin alt kümelerini oluşturma işleminde aynı türden elemanlar olmadığından n- nin r- li kombi- nasyonlarında tekrar eden eleman yoktur.

Aynı cinsten (özdeş) nesnelerin de bulunduğu durumlarda yapılacak seçme işlemlerinin sayısını hesaplanması ile ilgili olarak tekrarlı kombinasyon yöntemi kullanılır.

Bilgi

r tane özdeş nesne, n farklı kutuya;

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}$$

değişik şekilde konulabilir. (paylaştırılabilir)

Bilgi Kavrama

Örnek 1

3 tane madeni 1 YTL, kumbaralara istenilen sa- yıda atılmak suretiyle 5 farklı kumbaraya kaç de- ğişik şekilde atılabilir?

- A) 10 B) 21 C) 24 D) 35 E) 45
(2005 - ÖSS)

Çözüm

I. yol

Daha önce bu soru tekrarlı permütasyon konusu içerisinde tekrarlı permütasyon kullanılarak çözülmüşü.

II. yol

Burada 3 özdeş nesnenin (madeni 1 YTL), 5 fark- lı kumbaraya atılmasındaki durumların sayısı, r = 3 ve n = 5 olduğundan,

$$\binom{3+5-1}{3} = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ bulunur.}$$

III. yol

Paraları atacağımız kumbaraları seçip, seçtiğimiz kumbaralara paraları atalım.

1. Durum: 5 kumbaradan herhangi birisini seçip, üç parayı da bu kumbaraya atabiliriz.

Bu işlem, $\binom{5}{1} = 5$ değişik şekilde yapıla- bilir.

2. Durum: 5 kumbaradan 3 ünü seçip, paraların her birini bu 3 kumbaraya birer birer atabiliriz.

Bu işlem, $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$ değişik şekilde yapılabilir.

3. Durum: 5 kumbaradan 2 sini seçip, paraların ikisi- ni bu 2 kumbaradan birine, bir parayı da öteki kumbaraya atabiliriz. Bu işlem,

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ değişik şekilde yapılabilir.}$$

Buna göre, 3 madeni 1 YTL, 5 farklı kumbaraya toplam: $5 + 10 + 20 = 35$ değişik şekilde atılabilir.

Cevap D

Örnek 2:

20 adet 1 TL lik banknottan oluşan toplam 20 TL nin, üç çocuğa kaç değişik biçimde dağı- tılabileceğini bulalım.

Çözüm :

r = 20 ve n = 3 olduğundan, 20 adet 1 TL lik banknot üç çocuğa,

$$\binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{3-1} = \binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2!} = 231$$

değişik şekilde dağıtılabilir.

Örnek 3:

Özdeş 15 oyuncağın 4 çocuğa;

I. Kaç değişik şekilde dağıtılabilir,

II. Her çocuğa en az bir oyuncak verilmek şartıyla kaç değişik şekilde dağıtılabilirini bulalım.

Çözüm:

I. r = 15 ve n = 4 olduğundan;

özdeş 15 oyuncak, 4 çocuğa,

$$\binom{4+15-1}{15} = \binom{18}{4-1} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 816$$

değişik şekilde dağıtılabilir.

II. Her öğrenciye en az bir oyuncak verileceğine göre, oyuncaklar özdeş olduğundan, önce oyuncakların dördünü 4 çocuğa birer birer verelim. Bu şekilde her çocuk kesin olarak en az bir oyuncak almış olur.

Bundan sonra, geriye kalan 11 oyuncağın bu 4 çocuğa herhangi bir şart olmaksızın dağıtıla- bilmek.

Bu durumda,

n = 4 ve r = 11 olacağından, geriye kalan 11 oyuncak 4 çocuğa,

$$\binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{4-1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$$

değişik şekilde dağıtılabilir.

Buna göre, her çocuğa en az bir oyuncak veril- mek şartıyla özdeş 15 oyuncak 4 çocuğa 364 değişik şekilde dağıtılabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Özdeş 5 bilye 7 farklı kutuya kaç farklı biçimde atılabilir?

- A) 512 B) 462 C) 326 D) 288 E) 256

Soru 2:

Birbirinin aynısı olan 20 broşür 6 farklı posta kutusuna, her kutuya en az bir tane broşür atmak şartıyla kaç değişik biçimde atılabilir?

- A) $\binom{20}{6}$ B) $\binom{19}{6}$ C) $\binom{19}{5}$ D) $\binom{18}{5}$ E) $\binom{18}{6}$

Soru 3:

6 adet 100 TL lik banknot, 4 işçiye dağıtılacaktır.

İşçilerin ellerindeki para miktarı bakımından kaç farklı durum oluşabilir?

- A) 108 B) 84 C) 72 D) 35 E) 28

Bilgi

Her bir çeşitten en az r adet olmak üzere n çeşit nesne olsun. Bu n çeşit nesneden r tane nesne,

$$\binom{n+r-1}{r}$$

farklı şekilde seçilebilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir marketteki ayran, gazoz ve meyve suyu içeceklerinden toplam 6 tane alacak bir kişinin kaç farklı seçeneğinin olabileceğini bulalım.

Çözüm:

$n = 3$ ve $r = 6$ olduğundan, üç çeşit içecekten 6 tanesi,

$$\begin{aligned} \binom{3+6-1}{6} &= \binom{8}{6} \\ &= \binom{8}{2} \\ &= \frac{8 \cdot 7}{2!} \\ &= 28 \end{aligned}$$

değişik şekilde alınabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir tatlıcıda bulunan tatlı çeşitlerinden sütlaç, baklava, kazandibi ve künefe tatlılarının herbirinden en az 5 porsiyon vardır.

Bu dört çeşit tatlıdan toplam 5 porsiyon tatlı, kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 130 B) 80 C) 60 D) 56 E) 28

Soru 2:

Özdeş sarı, mavi, kırmızı bilyelerden en az 4'er tane vardır.

Bu bilyelerden 4 tanesi kaç değişik biçimde seçilebilir?

- A) 35 B) 18 C) 20 D) 15 E) 10

BİNOM AÇILIMI

$(x + y)^n$ ifadesinin x ve y nin kuvvetlerinin toplam ve çarpımı şeklinde yazılmasına $x + y$ nin n inci kuvvetten açılımı denir.

x ve y reel sayılar, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \dots + \binom{n}{n}y^n \text{ dir.}$$

Binom açılımında katsayılar aşağıdaki üçgen yardımıyla kolaylıkla bulunur.

$$(x + y)^0 : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x + y)^1 : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x + y)^2 : \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(x + y)^3 : \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(x + y)^4 : \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Yani,

$$(x + y)^0 : \quad 1$$

$$(x + y)^1 : \quad \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \end{array}$$

$$(x + y)^2 : \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \end{array}$$

$$(x + y)^3 : \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \end{array}$$

$$(x + y)^4 : \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

dir.

Bilgi

$(x + y)^n$ ifadesinin açılımı $K \cdot x^a \cdot y^b$ şeklindeki terimlerin toplamı ile oluşur.

$K: \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ dir.

x^a nın üssü n den başlayarak 0 (sıfır) a kadar azaltılırken, y^b nin üssü 0 (sıfır) dan başlayarak n ye kadar artırılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$(x + y)^5$ ifadesinin açılımını yapalım.

Çözüm:

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0} x^5 \cdot y^0 + \binom{5}{1} x^{5-1} \cdot y + \binom{5}{2} x^{5-2} \cdot y^2 +$$

$$\binom{5}{3} x^{5-3} \cdot y^3 + \binom{5}{4} x^{5-4} \cdot y^4 + \binom{5}{5} y^5 \cdot x^0$$

$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Örnek 2:

$(x - 2y)^4$ ifadesinin açılımını yapalım.

Çözüm:

$$(x - 2y)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^{4-1} (-2y) +$$

$$\binom{4}{2} x^{4-2} \cdot (-2y)^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} (-2y)^3 + \binom{4}{4} (-2y)^4$$

$$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

Örnek 3:

$(2x^2 - 3y)^3$ ifadesinin açılımını yapalım.

Çözüm:

$$(2x^2 - 3y)^3 = \binom{3}{0} (2x^2)^3 + \binom{3}{1} (2x^2)^2 \cdot (-3y)^1$$

$$+ \binom{3}{2} (2x^2)^1 \cdot (-3y)^2 + \binom{3}{3} (-3y)^3$$

$$= 8x^6 - 36x^4y + 54x^2y^2 - 27y^3$$

Örnek 4:

$x = 6$ ve $y = 2$ için

$$x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

$$= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \cdot (-2y) + \binom{4}{2} x^2 \cdot (-2y)^2$$

$$+ \binom{4}{3} x \cdot (-2y)^3 + \binom{4}{4} (-2y)^4$$

$$= (x - 2y)^4 \text{ dür.}$$

Buna göre, $x = 6$ ve $y = 2$ için

$$(x - 2y)^4 = [6 - 2 \cdot (2)]^4 = 2^4 = 16 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(x - y)^5$$

ifadesinin açılımını yapınız.

Soru 2:

$$(2x + y)^4$$

ifadesinin açılımını yapınız.

Soru 3:

$$(x^2 - 2y^3)^3$$

ifadesinin açılımını yapınız.

Soru 4:

$x = 4$ ve $y = 6$ için,

$$16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

Soru 5:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} \cdot 5 + \binom{n}{2} \cdot 5^2 - \binom{n}{3} \cdot 5^3 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 5^n = 2^{40}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Bilgi

$(x \pm y)^n$ açılımında $(n + 1)$ tane terim vardır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(2a - 3b)^{2n-4}$$

İfadesinin açılımında 25 tane terim olduğuna göre, n yi bulalım.

Çözüm:

Terim sayısı, $(2n - 4) + 1$ dir.

Buna göre,

$$(2n - 4) + 1 = 25 \Rightarrow 2n - 3 = 25 \\ \Rightarrow n = 14 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$(x + y + z)^3$$

açılımında kaç tane terim olduğunu bulalım.

Çözüm:

I. yol:

$$[x + (y + z)]^3 = \overbrace{\binom{3}{0}x^3}^{1. \text{ terim}} + \overbrace{\binom{3}{1}x^2(y + z)}^{2. \text{ terim}} \\ + \overbrace{\binom{3}{2}x(y + z)^2}^{3. \text{ terim}} + \overbrace{\binom{3}{3}(y + z)^3}^{4. \text{ terim}}$$

Buna göre, açılımında,

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ tane terim vardır.}$$

II. yol:

$(x + y + z)^n$ açılımında

$$\frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2} \text{ tane terim vardır.}$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(x + 2y)^{2n-1}$$

İfadesinin açılımında 16 tane terim olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Soru 2:

$$(x + y - 2z)^5$$

açılımında kaç tane terim vardır?

- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Soru 3:

$$(a - 3b)^{n+4}$$

açılımındaki terim sayısı, $(x - 2y + 4)^3$ açılımındaki terim sayısına eşit olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 14 B) 10 C) 6 D) 5 E) 3

Bilgi

$(x \pm y)^n$ açılımında her terimdeki x ve y çarpanlarının üslerinin toplamı n sayısına eşittir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(3x + 2y)^n$$

İfadesinin açılımındaki bir terim $k \cdot x^4 \cdot y^5$ olduğuna göre, n doğal sayısını bulalım.

Çözüm:

$(3x + 2y)^n$ açılımında herhangi bir terimdeki x ve y nin üsleri toplamı n yi vermesi gerektiğinden,

$$k \cdot x^4 \cdot y^5 \Rightarrow 4 + 5 = n \Rightarrow n = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$(2a^2 - b)^n$$

İfadesinin açılımındaki bir terim $k \cdot a^8 \cdot b^5$ olduğuna göre, n doğal sayısını bulalım.

Çözüm:

$$(2a^2 - b)^n = \dots + k \cdot a^8 \cdot b^5 + \dots \\ = \dots + k \cdot (2a^2)^4 \cdot (-b)^5 + \dots$$

$(2a^2 - b)^n$ ifadesinin açılımı yukarıdaki gibi düşüldüğünde birinci terimin $(2a^2)$ üssü 4, ikinci terimin $(-b)$ üssü 5 olduğundan üsler toplamı n yi vermelidir. Buna göre,

$$k \cdot (2a^2)^4 \cdot (-b)^5 \Rightarrow 4 + 5 = n \Rightarrow n = 9 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(2a + b)^n$$

İfadesinin açılımında bir terim $k \cdot a^5 \cdot b^7$ olduğuna göre, n doğal sayısı kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Soru 2:

$$(x^2 - y^3)^n$$

açılımındaki bir terim $k \cdot x^{12} \cdot y^{12}$ olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Soru 3:

$$(a + b^4 - c^2)^n$$

açılımındaki bir terim $k \cdot a^4 \cdot b^{12} \cdot c^{10}$ olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 12 E) 16

Bilgi

Binom açılımında polinomlarda olduğu gibi,

- Katsayılar toplamını bulmak için değişkenlerin her birinin yerine 1 yazılır.
- Sabit terimi bulmak için (eğer tanımlı ise) değişkenler yerine sıfır yazılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$(x - 3y)^5$ açılımında,

- I. Katsayılar toplamını,
 - II. Sabit terimini,
- bulalım.

Çözüm:

- I. $x = 1$ ve $y = 1$ için katsayılar toplamı
 $(x - 3y)^5 = (1 - 3.1)^5 = (-2)^5 = -32$ bulunur.
- II. $x = 0$ ve $y = 0$ için sabit terim
 $(x - 3y)^5 = (0 - 3.0)^5 = 0$ bulunur.

Örnek 2:

$(2x - y + 3)^6$ açılımında,

- I. Katsayılar toplamını,
 - II. Sabit terimini,
- bulalım.

Çözüm:

- I. $x = 1$ ve $y = 1$ için katsayılar toplamı,
 $(2x - y + 3)^6 = (2.1 - 1 + 3)^6$
 $= 4^6 = 2^{12}$ bulunur.
- II. $x = 0$ ve $y = 0$ için sabit terim,
 $(2x - y + 3)^6 = (2.0 - 0 + 3)^6$
 $= 3^6$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(3x + y - 2)^6$$

İfadesinin açılımındaki terimlerin katsayılarının toplamı kaçtır?

- A) 16 B) 32 C) 48 D) 56 ☒ E) 64

Soru 2:

$$(4x + 2y - 2)^3$$

İfadesinin açılımındaki terimlerin katsayılarının toplamı, sabit terimden kaç fazladır?

- A) 32 B) 56 C) 64 ☒ D) 72 E) 80

Soru 3:

$$(x^2 - 3xy + z)^{10}$$

İfadesinin açılımındaki terimlerin katsayılar toplamı kaçtır?

- A) 0 ☒ B) 1 C) 2^{10} D) 3^{10} E) 2^{20}

Bilgi

$(x + y)^n$ nin açılımı x in azalan kuvvetlerine göre, düzenlenirse baştan $r + 1$ inci terim;

$$\binom{n}{r} x^{n-r} \cdot y^r \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$(2x - 3y)^n$ açılımında bir terim $A \cdot x^3 \cdot y^2$ olduğuna göre, $A + n$ değerini bulalım.

Çözüm:

$A \cdot x^3 \cdot y^2$ ifadesinde üsler toplamından,

$$n = 3 + 2 = 5 \text{ olmalıdır.}$$

$$n = 5 \Rightarrow (2x - 3y)^5 = \dots + A \cdot x^3 \cdot y^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot (-3y)^2 = A \cdot x^3 \cdot y^2$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 8 \cdot x^3 \cdot 9 \cdot y^2 = A \cdot x^3 \cdot y^2$$

$$\Rightarrow 720 \cdot x^3 \cdot y^2 = A \cdot x^3 \cdot y^2$$

Eşitliğinden, $A = 720$ bulunur.

O halde, $A + n = 725$ bulunur.

Örnek 2:

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ ifadesinin açılımında beşinci terimi bulalım.

Çözüm:

$(a + b)^n$ nin açılımında baştan $(r + 1)$ inci terim

$$\binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r \text{ dir.}$$

Buna göre, $r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4, n = 10$ alınır,

a yerine x^2 ve b yerine $\frac{1}{x}$ yazılırsa, baştan 5 inci terim,

$$\binom{10}{4} \cdot (x^2)^{10-4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 210 \cdot x^8 \text{ olarak bulunur.}$$

$(a + b)^n$ nin açılımında sondan k nıncı terim baştan $(n + 2 - k)$ inci terimdir.

Örnek 3:

$(\sqrt{x} - 3y)^{12}$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında sondan 9 uncu terimi bulalım.

Çözüm:

Burada $(\sqrt{x} - 3y)^{12}$ un açılımında, sondan 9 uncu terim baştan,

$$n + 2 - k = 12 + 2 - 9 = 5 \text{ inci terim olur.}$$

O halde, sondan 9 uncu terimi bulmak için baştan 5 inci terimi bulalım.

$r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4, n = 12$ alınır, x yerine $\sqrt{x}$ ve y yerine $(-3y)$ yazılırsa, baştan 5 inci (sondan 9 uncu) terim,

$$\binom{12}{4} \cdot (\sqrt{x})^{12-4} \cdot (-3y)^4 = 40095 \cdot x^4 \cdot y^4 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 4:

$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^9$ un açılımında, x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

Çözüm:

$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^9$ un açılımında baştan $(r + 1)$ inci terimi yazarak bu terimin x^3 lü terim olması için r yi bulalım.

$$\binom{9}{r} x^{9-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{9}{r} (-1)^r \cdot x^{9-r-2r}$$

$$\Rightarrow 9 - 3r = 3$$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ bulunur.}$$

O halde, x^3 lü terim;

$$\binom{9}{2} \cdot x^{9-2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 36 \cdot x^7 \cdot \frac{1}{x^4} = 36 \cdot x^3$$

olduğundan katsayısı 36 bulunur.

Örnek 5:

$(\sqrt{x} + x)^n$ açılımında bir terim $A.x^3$ olduğuna göre, en küçük n doğal sayısı için A nın kaç olacağını bulalım.

Çözüm:

$$(\sqrt{x} + x)^n = \dots + A.x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2}.(x)^2.(\sqrt{x})^2 = A.x^3 \text{ ya da}$$

$$\Rightarrow \binom{3}{0}.(x)^3.(\sqrt{x})^0 = A.x^3 \text{ ya da}$$

$$\Rightarrow \binom{6}{6}.(x)^0.(\sqrt{x})^6 = A.x^3 \text{ şeklinde olmalıdır.}$$

En küçük n değeri için,

$$\binom{3}{0}.(x)^3.(\sqrt{x})^0 = A.x^3$$

$$\Rightarrow 1.x^3.1 = A.x^3$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{x}\right)^n$$

açılımında bir terim $a.x^{-3}.y$ olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$\left(\frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{x}\right)^n$ nin açılımında baştan $(r + 1)$ inci terim yazarak bu terimin $a.x^{-3}.y$ li terim olması için n

ve r yi bulalım.

$$\binom{n}{r} \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^{n-r} \left(-\frac{y}{x}\right)^r = a.x^{-3}.y$$

$$\Rightarrow \binom{n}{r} (-1)^r . x^{\frac{n-r}{2}-r} . y^{r-n+r} = a.x^{-3}.y$$

$$\Rightarrow \binom{n}{r} (-1)^r . x^{\frac{n-3r}{2}} . y^{2r-n} = a.x^{-3}.y^1$$

Bu eşitlikten,

$$\frac{n-3r}{2} = -3 \Rightarrow n-3r = -6 \text{ dir.... (I)}$$

$$2r-n=1 \text{ dir..... (II)}$$

(I) ve (II) denklemlerinin ortak çözümünden, $n=9$ ve $r=5$ bulunur.

O halde,

$$a = \binom{n}{r} (-1)^r = \binom{9}{5} (-1)^5 = -126 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 7:

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})^9$$

açılımında kaç tane rasyonel terim olduğunu bulalım.

Çözüm:

Baştan $(r + 1)$. terim rasyonel terim olsun.

O halde,

$$\binom{9}{r} . (\sqrt[3]{2})^{9-r} . (\sqrt{3})^r = \binom{9}{r} . 2^{\frac{9-r}{3}} . 3^{\frac{r}{2}}$$

ifadesinde, $\frac{r}{2}$ ve $\frac{9-r}{3}$ sayıları tamsayı olmalıdır.

Buna göre,

$r=6$ ve $r=0$ olabilir.

O halde, bu açılımda iki tane terim rasyonel sayıdır.

■ Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$(x + ay)^6$$

ifadesinin açılımında $k.a.x^5.y$ li teriminin katsayısı $k.a$ olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Soru 2:

$$(x + 3)^5$$

ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre, açıldığında baştan 3. terimin katsayısı $9.a$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 40 B) 30 C) 25 D) 20 E) 10

Soru 3:

$$(a + 2b)^6$$

ifadesi a nın azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 4. terim aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2.a^3.b^3$ B) $160.a^2.b^3$ C) $20.a^3.b^2$
D) $80.a^3.b^3$ E) $160.a^3.b^3$

Soru 4:

$$(2a - 3b)^5$$

ifadesinin açılımında a^2 li terimin, b^2 li terime oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{3b}{2a}$ B) $-\frac{2b}{3a}$ C) $-\frac{3a}{2b}$ D) $\frac{3}{2b}$ E) $3a$

Soru 5:

$$\left(2x - \frac{y}{2}\right)^n = \dots + k.x^3.y^4 + \dots$$

olduğuna göre, $n + k$ kaçtır?

- A) 49 B) 35 C) $\frac{49}{2}$ D) $\frac{35}{2}$ E) $\frac{17}{2}$

Soru 6:

$$\left(6x^2 - \frac{1}{x^4}\right)^8$$

açılımında x^4 lü terimin katsayısı kaçtır?

- A) $\binom{8}{2}.6$ B) $\binom{8}{2}.6^6$ C) $-\binom{8}{2}.6^3$
D) 216 E) -1024

Soru 7:

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{a}\right)^5$$

İfadesinin açılımındaki a lı terimin katsayısı kaçtır?

- A) 45 B) $\frac{45}{2}$ C) $\frac{45}{4}$ D) 25 E) $\frac{25}{4}$

Soru 8:

$$(x^2 + 2xy)^8 = x^{16} + \dots + k \cdot x^a \cdot y^b + \dots$$

olduğuna göre, a + b toplamının değeri kaçtır?

- A) 16 B) 14 C) 8 D) 6 E) 4

Soru 9:

$$\left(\frac{2x^2 + 3y^2}{xy}\right)^5$$

açılımında bir terim $A \cdot x \cdot y^{-1}$ olduğuna göre, A kaçtır?

- A) 720 B) 640 C) 480 D) 360 E) 180

Bilgi

$(x \pm y)^{2n}$ açılımında $n \in \mathbb{Z}^+$ ve açılım x in azalan kuvvetlerine göre düzenlenmiş ise ortanca terim

$$\binom{2n}{n} x^n \cdot y^n \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(x^2 + \sqrt{x})^8$$

İfadesinin açılımında ortanca terimi bulalım.

Çözüm:

$(x + y)^{2n}$ nin açılımında ortanca terim,

$$\binom{2n}{n} x^n \cdot y^n \text{ olduğuna göre,}$$

$$2n = 8 \Rightarrow n = 4 \text{ alınır,}$$

x yerine x^2 ve y yerine $\sqrt{x}$ yazılırsa, ortanca terim,

$$\binom{8}{4} \cdot (x^2)^4 \cdot (\sqrt{x})^4 = 70 \cdot x^{10} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$$

İfadesinin açılımında ortanca terimi bulalım.

Çözüm:

$$\left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12} \text{ açılımında,}$$

$$2n = 12 \Rightarrow n = 6 \text{ olduğundan,}$$

ortanca terim,

$$\binom{12}{6} \cdot (\sqrt{y})^6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6 = \binom{12}{6} \cdot y^3 \cdot \frac{1}{x^2} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(2x^5 + y)^6$$

İfadesinin açılımında ortanca terimin katsayısı kaçtır?

- A) 100 B) 120 C) 140 D) 160 E) 180

Soru 2:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^8$$

İfadesinin açılımında ortanca terim aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) $10 \cdot x^4$ B) $30 \cdot x^4$ C) $70 \cdot x^4$ D) $40 \cdot x^5$ E) $50 \cdot x^5$

Soru 3:

$$(\sqrt[6]{6} - 1)^6$$

İfadesinin açılımında ortanca terim kaçtır?

- A) -120 B) -60 C) $-20\sqrt{6}$ D) $\frac{20}{3}$ E) $10\sqrt{3}$

Bilgi

Sabit terimi bulmak için, $(r + 1)$ inci terim sabit terim olarak düşünülerek ifade düzenlenir ve x in üzeri 0 (sıfır) a eşitlenir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\left(2x - \frac{3}{x}\right)^6$$

açılımında sabit terimi bulalım.

Çözüm:

$2x - \frac{3}{x}$ ifadesi polinom şeklinde bir ifade olmadığı için, $x = 0$ için sabit terim bulunamaz.

O halde, sabit terim (A) baştan $(r + 1)$. terim olsun.

$$\binom{6}{r} \cdot (2x)^{6-r} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^r = A \cdot x^0$$

$$\Rightarrow \binom{6}{r} \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-r} \cdot (-3)^r \cdot x^{-r} = A \cdot x^0$$

$$\Rightarrow \binom{6}{r} \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-2r} \cdot (-3)^r = A \cdot x^0$$

Eşitliğinden,

$$6 - 2r = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ ve}$$

$$A = \binom{6}{r} \cdot 2^{6-r} \cdot (-3)^r \text{ olmalıdır.}$$

Sonuçta sabit terim,

$$A = \binom{6}{r} \cdot 2^{6-r} \cdot (-3)^r$$

$$= \binom{6}{3} \cdot 2^{6-3} \cdot (-3)^3$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^3 \cdot (-27)$$

$$= 160 \cdot (-27)$$

$$= -4320 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^9$$

açılımında sabit terimi bulalım.

Çözüm:

Baştan $(r + 1)$. terim sabit terim (A) olsun.

$$\binom{9}{r} \cdot (2\sqrt{x})^{9-r} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = A \cdot x^0$$

$$\Rightarrow \binom{9}{r} \cdot x^{\frac{9-r}{2}} \cdot 2^{9-r} \cdot (-1)^r \cdot 2^{-r} \cdot x^{-r} = A \cdot x^0$$

$$\Rightarrow \binom{9}{r} \cdot 2^{9-2r} \cdot (-1)^r \cdot x^{\frac{9-r}{2}-r} = A \cdot x^0$$

Eşitliğinden,

$$\frac{9-r}{2} - r = 0 \quad \text{ve} \quad A = \binom{9}{r} \cdot 2^{9-3r} \cdot (-1)^r$$

olmalıdır.

$$\frac{9-r}{2} = r \Rightarrow r = 3 \quad \text{bulunur.}$$

Sonuçta sabit terim,

$$A = \binom{9}{3} \cdot 2^{9-2 \cdot 3} \cdot (-1)^3$$

$$= \binom{9}{3} \cdot 2^{9-2 \cdot 3} \cdot (-1)^3$$

$$= - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^3$$

$$= -8 \cdot 8$$

$$= -672 \quad \text{bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\left(x + \frac{3}{x}\right)^6$$

İfadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?

- ✓ A) 540 B) 270 C) 180 D) 90 E) 70

Soru 2:

$$\left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right)^4$$

İfadesinin açılımındaki sabit terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 36 ✓ B) 54 C) 72 D) 100 E) 130

Soru 3:

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{x^2}{3}\right)^6$$

İfadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?

- A) 75 B) 90 C) 105 ✓ D) 135 E) 180

Soru 4:

$$\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

İfadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

- A) 60 ✓ B) 45 C) 30 D) 15 E) 10

Soru 5:

$$\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$$

açılımında sabit terim kaçtır?

- A) 802 B) 712 ✓ C) 672 D) 516 E) 448

Bilgi

$(px + qy + mz)^n$ nin açılımında $x^a \cdot y^b \cdot z^c$ li terimin katsayısı $p^a \cdot q^b \cdot m^c \cdot \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$(x - 2y - 3z)^{10}$ un açılımında $x^2 y^3 z^5$ li terimin katsayısını bulalım.

Çözüm:

Yukarıdaki sonuçta x yerine x, y yerine $-2y$, z yerine $-3z$, p yerine 1, q yerine -2 ve m yerine -3 yazılırsa, $(x - 2y - 3z)^{10}$ un açılımında $x^2 y^3 z^5$ lü terimin katsayısı,

$$p^a \cdot q^b \cdot m^c \cdot \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} = 1^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-3)^5 \cdot \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$$

$$= \frac{27}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(2a - 3b + c)^8$$

İfadesinin açılımında $a^3 \cdot b^2 \cdot c^3$ lü terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) 8! B) 7! C) 32.8! D) 15.7! E) 21.7!

$$1. \quad \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{8}{1}\right) = 2x$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. n kişinin bulunduğu bir topluluktan oluşturulabilecek 4 erli grupların sayısı 3 erli grupların sayısına eşit olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

3. 5 bay, 4 bayan arasından 2 bay ve 2 bayan olmak üzere 4 kişilik bir grup ve bu grup içerisinde bir başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 120 B) 150 C) 180 D) 200 E) 240

4. Bir voleybol oyunu için 7 kişi bulunmaktadır.

3 er kişilik A ve B takımları kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

5. 12 kişilik bir kafileden 5 kişi Kars'a, 4 kişi, İzmir'e 3 kişi İstanbul'a gidecektir.

Bu üç grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

- A) $\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)$ B) $2 \cdot \left(\frac{12}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)$ C) $\frac{\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)}{3!}$
D) $\frac{\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)}{2!}$ E) $\left(\frac{12}{5}\right) \cdot 7!$

6. İçinde 5 şiir ve 5 türkünün bulunduğu, A ve B yüzleri bulunan bir kaset hazırlanmak isteniyor.

Kasetin bir yüzünde 4 şiir 1 türkü diğer yüzünde 4 türkü 1 şiir bulunacağına göre, bu kaset kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

- A) 25 B) 50 C) 75 D) 100 E) 125

7. Birbirlerinden farklı, 10 kalem ve 6 silginin olduğu bir kutudan seçim yapılacaktır.

Bu kutudan 2 kalem ve 1 silginin seçimi kaç farklı şekilde yapılır?

- A) 540 B) 270 C) 135 D) 45 E) 35

8. Bir yüksekokulda 8 dersten 2 si aynı saatte, 3 ü bunlardan farklı birbirleriyle aynı başka bir saatte verilmektedir. Diğerlerinin saatleri bunlardan ve birbirlerinden farklıdır.

Buna göre, bir öğrenci 8 dersten 3 tanesini kaç değişik şekilde seçebilir?

- A) 35 B) 34 C) 24 D) 19 E) 15

9. 15 soruluk bir sınavda, son 5 sorudan sadece 3 tanesini cevaplamak zorunludur.

Buna göre, 8 soru cevaplayacak öğrenci kaç farklı şekilde soru seçebilir?

- A) 220 B) 280 C) 2500 D) 2520 E) 2800

10. $A = \{ a, b, c, d, e \}$

kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçında a veya b eleman olarak bulunur?

- A) 6 B) 7 C) 9 D) 12 E) 15

$$11. \quad P(x, y) = [(x-2)^3 + (2y-1)^4]^5$$

ifadesinin açılımındaki terimlerin katsayıları toplamı kaçtır?

- A) -32 B) -1 C) 0 D) 8 E) 243

$$12. \quad (\sqrt{2x} - y^3)^5 = \dots + a \cdot xy^b + \dots$$

olduğuna göre, a + b kaçtır?

- A) -11 B) -2 C) 3 D) 5 E) 11

13. $(x^2 - 3y)^{10}$ ifadesinin açılımında bir terim $k \cdot x^8 \cdot y^6$ dir.

Buna göre, k kaçtır?

- A) $3^6 \left(\frac{10}{6}\right)$ B) $3^6 \left(\frac{10}{3}\right)$ C) $3^5 \left(\frac{10}{5}\right)$
D) $3^4 \left(\frac{10}{4}\right)$ E) $3^4 \left(\frac{10}{6}\right)$

14. n pozitif tek tamsayı olmak üzere;

$$(ax^3 - 2x^2 + 1)^n$$

açılımındaki katsayılar toplamı 64 dür.

Buna göre a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 70 B) 65 C) 14 D) 9 E) 5

$$15. \quad (2x^2 - x)^6$$

ifadesinin açılımında x in en küçük dereceli teriminin katsayısı kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 6 D) 30 E) 64

$$16. \quad \left(x^3 \cdot y^3 - \frac{x^2}{y^6}\right)^6$$

ifadesinin açılımında y çarpanının olmadığı terimde x in derecesi kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 24

$$17. \quad (2x - 3)^4 + cx^3$$

ifadesinde x^3 lü terimin bulunmaması için c kaç olmalıdır?

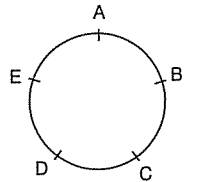
- A) -96 B) -74 C) 74 D) 96 E) 100

$$18. \quad (x - y + 3z)^6$$

açılımında xy^2z^3 ün katsayısı kaçtır?

- A) -820 B) -400 C) 260 D) 790 E) 1620

19. Çember üzerindeki A, B, C, D, E noktalarıyla kaç farklı çember yayı oluşturulabilir?



- A) 10 B) 15 C) 20 D) 21 E) 30

20. Bir sınıftan seçilen 7 öğrenci, iki gruba ayrılıyor ve bu iki gruptan birisi İstanbul'a öteki de Ankara'ya gönderiliyor.

Her iki şehire de en az birer öğrenci gönderileceğine göre, bu iki grup kaç değişik şekilde oluşturulabilir?

- A) 128 B) 126 C) 124 D) 96 E) 62

$$1. \quad \left(\frac{5}{2} \right) + \left(\frac{4}{3} \right) - \left(\frac{7}{7} \right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

2. Bir çiftlikteki 5 at, 10 koyun, 4 kuzu arasından 2 at, 3 koyun, 1 kuzu olmak şartıyla 6 hayvan kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 480 B) 1200 C) 2400
D) 4000 E) 4800

$$3. \quad \left(\frac{n}{3} \right) = \left(\frac{n}{5} \right)$$

olduğuna göre, $\left(\frac{n}{2} \right)$ kaçtır?

- A) 7 B) 14 C) 21 D) 28 E) 34

4. 10 elemanlı bir kümenin en az bir elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 2^9 B) 2^{10} C) 2^{11} D) 2^{12} E) $2^{10} - 1$

5. 12 kişilik bir basketbol takımında 5 kişilik bir A takımı oluşturulacaktır.

Sabri ve Bahadır adlı basketbolcular takımda yer alacaklarına göre, kaç farklı A takımı oluşturulabilir?

- A) 30 B) 60 C) 90 D) 120 E) 240

$$6. \quad A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 veya 3 bulunur?

- A) 8 B) 12 C) 14 D) 24 E) 32

$$7. \quad A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 eleman olarak bulunur ama 5 bulunmaz?

- A) 24 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

8. 7 kişi üç arabayla geziye çıkacaklardır. Arabaların birinde 3, diğer ikisinde 2 şer kişilik yer bulunmaktadır.

Belli iki kişi aynı arabada gitmeme şartı ile en fazla kaç farklı şekilde gidebilirler?

- A) 160 B) 205 C) 210 D) 220 E) 240

9. 30 kişilik bir sınıfın $\frac{2}{15}$ i sadece futbol, $\frac{3}{10}$ u sadece basketbol oynamaktadır.

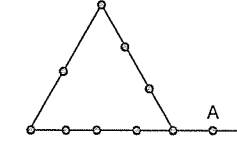
Bu sınıftan futbol ve basketbol oynayan en çok kaç farklı öğrenci grubu oluşturulur?

- A) 2^{13} B) 2^{15} C) 2^{17} D) $2^{17} - 1$ E) 2^{26}

10. 5 öğretmen ve 4 öğrenci bulunan bir ekip içerisinde 3 öğretmen ve 2 öğrenciden oluşan 5 kişilik bir ekip, yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilir?

- A) 760 B) 1260 C) 1380
D) 1440 E) 1570

11. Bir köşesi A noktası üzerinde olan ve üçgenindeki 9 noktadan, köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç üçgen çizilebilir?



- A) 84 B) 74 C) 36 D) 32 E) 26

12. $(2x - y)^8$ açılımında baştan dördüncü teriminin katsayısı $128.a$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -28 B) -14 C) 1 D) 14 E) 28

13. a bir reel sayıdır.

$$(a.x - 4.y)^{10}$$

açılımının katsayılar toplamı 1 olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 15

$$14. \quad \left(\frac{x^6 - 1}{x^3} \right)^7$$

açılımında baştan 3. terim kaçtır?

- A) $12x$ B) $2x^9$ C) $21x^9$ D) $\frac{21}{x^3}$ E) 1

$$15. \quad \left(a^5 + \frac{1}{a^3} \right)^8$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

- A) 28 B) 56 C) 70 D) 75 E) 84

$$16. \quad (x^3 - 2y)^n = x^{21} + \dots + a.x^6.y^5 + \dots$$

açılımında a reel sayısı kaçtır?

- A) -672 B) -630 C) -34 D) 630 E) 672

$$17. \quad (2x + 3y + 5z)^{12}$$

açılımında katsayılar toplamı 10^{2k+4} olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$$18. \quad \left(x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)^{12}$$

ifadesinin açılımında ortanca terim aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left(\frac{12}{3} \right) . 8.x^{18}$ B) $\left(\frac{12}{3} \right) . x^{24}$ C) $\left(\frac{12}{4} \right) . 16.x^{16}$
D) $\left(\frac{12}{6} \right) . x^{18}$ E) $\left(\frac{12}{6} \right) . 64.x^{16}$

$$19. \quad (3x + y)^8$$

açılımında terimlerden biri $a.x^3.y^b$ olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

- A) 640 B) 840 C) 960 D) 1200 E) 1517

$$20. \quad (x^3 + my^2)^8$$

açılımında $x^{18}.y^4$ lü terimin katsayısı 448 olduğuna göre, m'nin değeri kaç olabilir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. 7 kişilik bir ailenin en çok 4 kişi alabilen bir arabaları vardır.

Arabayı anne kullanacağına göre, arabaya binecek 4 kişi kaç değişik şekilde belirlenebilir?

A) 20 B) 25 C) 28 D) 32 E) 35

2. 3 doktor ve 5 hemşire arasından, 3 kişilik bir sağlık ekibi oluşturulacaktır.

En az biri doktor olmak şartıyla, bu sağlık ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) 15 B) 30 C) 37 D) 46 E) 61

3. Bir okulun A sınıfında 15 kız 10 erkek, B sınıfında da 10 kız 20 erkek öğrenci vardır.

Her iki sınıftan da birer kız ya da birer erkek öğrencinin karşılıklı olarak yarışacağı kaç değişik bilgi yarışması yapılabilir?

A) 250 B) 300 C) 350 D) 400 E) 450

4. Aralarında Aslı ve Kerem'in de bulunduğu 6 kız ve 5 erkek arasından, 3 kız ve 2 erkekten oluşan 5 kişilik bir grup oluşturulacaktır.

Aslı veya Kerem'in bu grupta olduğu kaç farklı durum vardır?

A) 100 B) 120 C) 140 D) 160 E) 180

5. 6 fizik, 4 matematik ve 5 kimya öğretmeni arasından oluşturulacak 4 kişilik bir disiplin kurulundaki öğretmenlerden en az biri matematik öğretmeni olacağına göre, bu kurul kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) 330 B) 660 C) 1035 D) 1305 E) 1365

6. Üç basamaklı doğal sayıların kaç tanesinin onlar basamağındaki rakam, yüzler basamağındaki rakamdan küçük, birler basamağındaki rakamdan ise büyüktür?

A) 120 B) 112 C) 96 D) 90 E) 84

7. 40 kişinin bulunduğu bir salondaki her bir kişi, diğer 39 kişiyle birer kez tokalaştığına göre, toplam kaç değişik tokalaşma olmuştur?

A) 40 B) 400 C) 720 D) 780 E) 800

8. Aralarında Esat'ın da bulunduğu 7 erkek ve 5 kız öğrenciden oluşan 12 kişilik bir gruptan 5 kişilik bir takım seçilecektir.

Esat kesinlikle takımda olacağına göre, 2 kız ve 3 erkek öğrenciden oluşan bu takım kaç farklı şekilde seçilebilir?

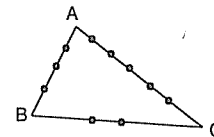
A) 150 B) 200 C) 250 D) 300 E) 320

9. Bir pansiyonda 1, 2, 3, 4 ve 5 kişilik birer oda boştur. Pansiyona 6 kişi geliyor.

Kalınacak odalar tamamen doldurulmak şartıyla bu 6 kişi pansiyona kaç farklı şekilde yerleşebilir?

A) 90 B) 81 C) 76 D) 72 E) 58

- 10.

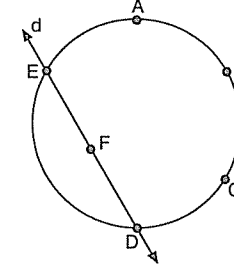


Şekildeki ABC üçgeninin kenarları üzerinde 10 nokta verilmiştir.

Köşeleri bu 10 noktadan üçü olan kaç üçgen çizilebilir?

A) 120 B) 119 C) 110 D) 109 E) 100

- 11.



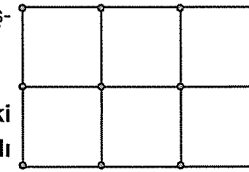
E, F, D ∈ d olmak üzere, şekilde verilen 6 nokta ile (A, B, C, D, E, F) köşeleri bu noktalar üzerinde olan en çok kaç tane üçgen çizilebilir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

12. Beş farklı çember en çok kaç noktada kesişir?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

13. Şekil 6 eş kareden oluşmuştur.



Buna göre, şekildeki 12 nokta ile kaç farklı üçgen elde edilebilir?

A) 208 B) 200 C) 196 D) 152 E) 120

- 14.

$$\left(\frac{3}{x} - x^2\right)^9$$

açılımında x^{12} li terimin katsayısı kaçtır?

A) -214 B) -316 C) -324
D) -426 E) -433

- 15.

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^4$$

ifadesinin açılımında baştan 2. terimin son-
dan 2. terime oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^8}{8}$ B) $\frac{x^4}{4}$ C) $\frac{x^4}{16}$ D) $\frac{x^8}{16}$ E) $\frac{x^2}{2}$

- 16.

$$\left(a^3 + \frac{1}{a^4}\right)^{15}$$

açılımındaki terimlerden birisi $k \cdot a^{10}$ olduğuna göre, k aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\binom{10}{5}$ B) $\binom{10}{6}$ C) $\binom{15}{6}$ D) $\binom{15}{7}$ E) $\binom{15}{5}$

- 17.

$(\sqrt[3]{x} + x)^7$ ifadesinin açılımında x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

A) 7 B) 21 C) 35 D) 56 E) 70

- 18.

$$(a + b)^n$$

ifadesinin açılımında baştan 7. terimle, sondan 7. terim birbirine eşittir.

Buna göre, n kaçtır?

A) 7 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

- 19.

$$\left(3x^6 - \frac{1}{x^8}\right)^7$$

ifadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?

A) -2835 B) -1842 C) -1056
D) 1056 E) 2835

1. $\left(\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{5}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{5}{1}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 41 B) 36 C) 31 D) 25 E) 22

2. $A = \{a, b, c, d, e, \{e\}, \{f\}\}$
 $B = \{b, c, \{e\}, e, d, \{a\}, \{\{f\}\}\}$

$A \cap B$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde "e" elemanı vardır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 13

3. 3 doktor ve 5 hemşire arasından 4 kişilik sağlık ekibi oluşturulacaktır.

En az 2 doktorun bulunduğu en çok kaç farklı sağlık ekibi oluşturulur?

- A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

4. Aralarında Fatih ve Aydın'ın da bulunduğu 18 kişilik sporcu kafilesinden, Fatih ve Aydın'ın da bulunduğu 11 kişilik bir futbol takımı kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) $\binom{18}{11}$ B) $\binom{16}{11}$ C) $\binom{16}{6}$
D) $\binom{18}{9}$ E) $\binom{16}{9}$

5. Bir otelde kapı numaraları farklı 3 yataklı bir oda ve 2 yataklı iki oda bulunmaktadır.

İçinde Zeki ve Metin'in de bulunduğu 7 kişilik bir grup Zeki ve Metin aynı odada olmak şartıyla kaç farklı şekilde yerleşebilirler?

- A) 60 B) 100 C) 140 D) 150 E) 160

6. 2 çocuğa, birbirinden farklı 2 oyuncak ve birbirlerinden farklı 3 kitap kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

- A) 16 B) 20 C) 28 D) 32 E) 48

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinin elemanlar toplamı çift sayıdır?

- A) 84 B) 74 C) 44 D) 40 E) 14

8. İki tane 10 TL, üç tane 20 TL ve iki tane 50 TL lik paralarla 110 TL kaç farklı şekilde oluşturulabilir? (Paraların seri numaraları farklıdır.)

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

9. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(i - \sqrt{2})^{10}$$

açılımında baştan dokuzuncu terim kaçtır?

- A) -720 B) 720 C) -520 D) 250 E) 120

10. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$

açılımındaki sabit terim kaçtır?

- A) 84 B) 86 C) 515 D) 672 E) 686

11. $x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - 2\right)^{10}$

açılımındaki $\frac{1}{x}$ in katsayısı kaçtır?

- A) -30.2⁹ B) -2¹⁰ C) 10.2⁸ D) 2⁹ E) 2¹⁰

12. $(4a - 2b + 1)^n$

açılımında katsayılar toplamı 729 olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})^8$

ifadesinin açılımındaki x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

- A) -24 B) -16 C) -8 D) 8 E) 28

14. n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^n$$

açılımında sabit terimin olması için n nin alabileceği en küçük değer kaç olmalıdır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

15. $(x^3 - y + z)^n$

ifadesinin açılımındaki $ax^6.y^3.z^2$ terimi için; n - a farkı kaçtır?

- A) 217 B) 240 C) 420 D) 630 E) 1680

16. n ve m birer pozitif tamsayı olmak üzere,

$$(a^n + b^m)^5 = \dots + ka^8b^9 + \dots$$

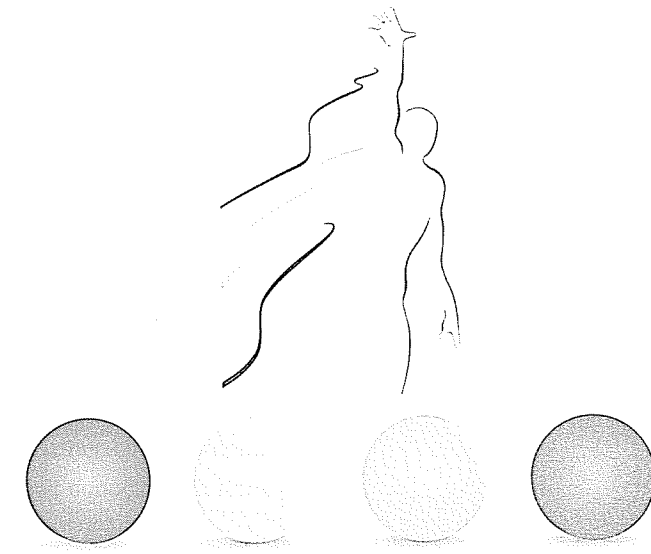
açılımında k nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

17. $(x^3 - 2y^4 + z^4)^{13}$

açılımındaki $k.x^9.y^a.z^b$ terimindeki a ve b tamsayılarının toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 16 C) 20 D) 40 E) 44



BÖLÜM 3

OLASILIK

Olasılık, hem günlük hayatta hem de değişik ilim dallarında çok sık kullanılır. Bugün olasılığın ekonomi, temel bilgiler, milli savunma, meteoroloji, ... vb. birçok uygulama alanı vardır.

Deney ve Çıktı:

Bir madeni paranın yazı tura için havaya atılması. Tavla oyununda oynanacak sayıyı belirlemek için zarın atılması. Farklı renklerde bilyeler bulunan torbadan bir bilye çekilmesi.

Yukarıda yapılan işlemlerden her birine **matematiksel deney** denir. Gelebilecek sonuçlara da **deneyin çıktıları** adı verilir.

Örneklem(Örnek) Uzay ve Örneklem Nokta

Bir deneyde elde edilebilecek tüm çıktıların kümesine **örneklem(örnek) uzay** denir ve **E** ile gösterilir. Örnek uzayın herhangi bir elemanına ise **örneklem nokta** denir.

Bilgi

Bir deneyde örneklem uzayı belirlemek çok önemlidir. Örneklem uzayın belirlenmesinde kesin bir yol yoktur. Bazen permütasyon, bazen kombinasyon, bazen tablo, bazen grafik çizimi kullanılarak örneklem uzay belirlenir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir tane madeni paranın düz bir zemine atılması deneyin de örneklem uzayı bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay,
 $E = \{\text{Yazı}(Y), \text{Tura}(T)\}$ ve $s(E) = 2$ dir.

Örnek 2:

İki tane madeni paranın düz bir zemine atılması deneyinde örnek uzayı bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay,
 $E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$
ve $s(E) = 4$ tür.

Örnek 3:

Üç tane madeni paranın düz bir zemine atılması deneyinde örnek uzayı bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay,
 $E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}$
ve $s(E) = 8$ dir.

n tane paranın düz bir zemine atılması deneyinde örneklem uzayın eleman sayısı saymanın temel prensibinden;

$$\frac{2}{1.\text{para}} \cdot \frac{2}{2.\text{para}} \cdot \frac{2}{3.\text{para}} \cdots \frac{2}{n.\text{para}} = 2^n \text{ dir.}$$

Örnek 4:

Bir zarın düz bir zemine atılması deneyinde örneklem uzayı bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay,
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şeklindedir.
Buradan; $s(E) = 6$ dir.

Örnek 5:

İki zarın düz bir zemine atılması deneyinde örneklem uzayı bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay,

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), \dots, (2, 6), \\ (3, 1), \dots, (3, 6), \\ \vdots \\ (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

şeklindedir.

Buradan, örneklem uzayın eleman sayısı,

$$s(E) = 6.6 = 36 \text{ dir.}$$

n tane zarın düz bir zemine atılması deneyinde örneklem uzayın eleman sayısı saymanın temel prensibinden;

$$\frac{6}{1.\text{zar}} \cdot \frac{6}{2.\text{zar}} \cdot \frac{6}{3.\text{zar}} \dots \frac{6}{n.\text{zar}} = 6^n \text{ dir.}$$

İki tane zarın düz bir zemine atılması deneyinde zarların üst yüzeyine gelen sayıları gösteren ikililerin sıralı ikili olduğuna dikkat ediniz. Yani zarın (1, 2) gelmesi ile (2, 1) gelmesi farklı durumlardır.

Örnek 6:

İçerisinde 2 mavi, 3 kırmızı bilye bulunan bir torbadan bir tane bilye çekme olayının örnek uzayını yazalım.

Çözüm:

Bu deneyin örneklem uzayının elemanının sayısı, toplam 5 elemandan herhangi birinin seçilmesi işidir. Bu da kombinasyon ile bulunur.

$$s(E) = C(5, 1) = \binom{5}{1} = 5 \text{ dir.}$$

Örneklem uzayın elemanlarını yazalım,

$$E = \{M_1, M_2, K_1, K_2, K_3\} \text{ dır.}$$

Örnek 7:

İçerisinde 2 mavi, 3 kırmızı bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç tane bilye çekilmesi olayının örnek uzayını yazalım.

Çözüm:

Bu deneyin örneklem uzayının elemanının sayısı, toplam 5 elemandan 3 tanesinin seçilmesi işidir. Bu da kombinasyon ile bulunur.

$$s(E) = C(5, 3) = \binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10 \text{ dur.}$$

Örneklem uzayın elemanlarını yazalım.

$$E = \{\{M_1, M_2, K_1\}, \{M_1, M_2, K_2\}, \{M_1, M_2, K_3\}, \\ \{M_1, K_1, K_2\}, \{M_1, K_2, K_3\}, \{M_1, K_1, K_3\}, \\ \{M_2, K_1, K_2\}, \{M_2, K_2, K_3\}, \{M_2, K_1, K_3\}, \\ \{K_1, K_2, K_3\}\}$$

şeklindedir.

Örnek 8:

5 mavi, 4 yeşil, 2 sarı bilye bulunan bir torbadan iki bilye çekiliyor.

Bu deneyin örneklem uzayının kaç elemanlı olduğunu bulalım.

Çözüm:

Bu deneyin örneklem uzayının elemanının sayısı, toplam 11 elemandan herhangi iki tanesinin seçilmesi işidir. Bu da kombinasyon ile bulunur.

$$s(E) = C(11, 2) = \binom{11}{2} \\ = \frac{11.10}{2.1} = 55 \text{ bulunur.}$$

Örnek 9:

$$A = \{k, m, n, p, r, s\}$$

kümesinin elemanlarını kullanarak harfleri tekrarsız 4 harfli anlamlı veya anlamsız kelimeler yazılıyor.

Bu deneyin örneklem uzayının kaç elemanlı olduğunu bulalım.

Çözüm:

6 elemanlı bir kümenin 4 lü permütasyonlarının sayısı bu deneyin örneklem uzayının eleman sayısını verir.

Buna göre,

$$P(6,4) = 6.5.4.3 = 360 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Onluk tabanda bir rakam seçme deneyinin örneklem uzayı kaç elemanlıdır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 99

Soru 2:

4 mavi, 3 kırmızı, 2 sarı top bulunan bir torbadan üç top çekiliyor.

Bu deneyin örneklem uzayı kaç elemanlıdır?

- A) 76 B) 80 C) 84 D) 90 E) 96

Soru 3:

Bir okulda, 3 matematik, 5 türkçe, 2 kimya öğretmeni vardır. Bu okulda iki kişilik nöbetçi öğretmen ekibi kuruluyor.

Bu deneyin örneklem uzayı kaç elemanlıdır?

- A) 45 B) 55 C) 75 D) 90 E) 100

Soru 4:

Eşit büyüklükteki kartlar 1 den 20 ye kadar numaralanıp bir torbaya konuluyor.

Bu torbadan üç kart çekilmesi deneyinde örneklem uzay kaç elemanlıdır?

- A) 450 B) 780 C) 940 D) 1100 E) 1140

Soru 5:

$$R = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

kümesinin elemanlarını kullanarak rakamları tekrarsız 5 basamaklı 5 ile tam bölünebilen farklı sayılar yazılıyor.

Bu deneyin örneklem uzayı kaç elemanlıdır?

- A) 12 B) 24 C) 64 D) 120 E) 720

Soru 6:

$$H = \{g, e, n, ç, l, i, k\}$$

kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri yazılıyor.

Bu deneyin örneklem uzayı kaç elemanlıdır?

- A) 6 B) 15 C) 21 D) 30 E) 60

Olay, İmkansız Olay ve Kesin Olay

❑ Bilgi

Örneklem uzayın her bir alt kümesine **olay** denir. Boş kümeye **imkansız olay**, E örneklem uzayına ise **kesin olay** denir.

❑ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir zar düz bir zemine atılıyor.

- I. Zarın üst yüzeyine asal sayı gelmesi olayını,
- II. Zarın üst yüzeyine 2 den büyük sayı gelmesi olayını,
- III. Zarın üst yüzeyine 7 gelmesi olayını,
- IV. Zarın üst yüzeyine 7 den küçük sayı gelmesi olayını yazalım.

Çözüm:

Bir zarın atılması deneyinde örneklem uzay

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ olduğundan}$$

I. Bu kümenin alt kümelerinden, zarın üst yüzeyine asal sayı gelmesi olayına ait kümeye A denilirse;

$$A = \{2, 3, 5\} \text{ dir.}$$

II. Bu kümenin alt kümelerinden, zarın üst yüzeyine 2 den büyük sayı gelmesi olayına ait kümeye B denilirse;

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \text{ dir.}$$

III. Bu kümenin elemanları içerisinde 7 elemanı olmadığından, bu olaya ait alt küme boş kümedir. Bu olay da **imkansız olaydır**.

IV. Bu kümenin elemanlarının hepsi 7 den küçük olduğundan, bu olaya ait alt küme E kümesinin aynısıdır. Bu olay da **kesin olaydır**.

Örnek 2:

Üç tane madeni para düz bir zemine atılıyor.

- I. Paraların üçünün de aynı olması olayının eleman sayısını,
- II. Paraların ikisinin tura, birinin yazı gelmesi olayının eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

Üç tane madeni para atılması deneyinde örneklem uzay;

$$E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}$$

şeklindedir.

I. Bu kümenin alt kümelerinden, paraların üçünün de aynı olması olayına ait kümeye A denilirse;

$$A = \{(T, T, T), (Y, Y, Y)\} \text{ ve } s(A) = 2 \text{ dir.}$$

II. Bu kümenin alt kümelerinden, ikisinin tura, birinin yazı olması olayına ait kümeye B denilirse;

$$B = \{(Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, Y)\} \text{ ve } s(B) = 3 \text{ tür.}$$

Örnek 3:

İki tane zarın düz bir zemine atılması olayında üst yüze gelen sayılar toplamının 8 olması olayını yazıp eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

İki zar için örneklem uzay,

$$E = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} \text{ ve } s(E) = 36 \text{ dir.}$$

Üst yüze gelen sayılar toplamının 8 olması olayı A olsun,

$$A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4), (2, 6), (6, 2)\} \text{ ve}$$

$$s(A) = 5 \text{ tir.}$$

Örnek 4:

İçerisinde 4 mavi, 3 kırmızı bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekiliyor.

İkisinin mavi, birinin kırmızı olması olayının eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$$4 \text{ mavi bilyeden ikisi } \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6,$$

$$3 \text{ kırmızı bilyeden birisi } \binom{3}{1} = 3$$

farklı şekilde seçilebildiğinden çekilen üç bilyeden ikisinin mavi, birinin kırmızı olması olayının eleman sayısı;

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

Birbirinden farklı 3 gömlek ve 4 kazak yan yana bir dolaba dizilecektir.

Gömlüklerin hepsinin yan yana olduğu olayın eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

3 tane gömlek bir eleman gibi düşünülürse, 4 kazak ile birlikte yanyana gelişi güzel dizilişlerin sayısı,

$$P(5, 5) = 5! \text{ dir.}$$

Ayrıca bu üç tane gömleğin kendi içinde dizilişleri sayısı 3! dir.

O halde, bu olayın eleman sayısı;

$$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 6:

Bir çift zarın düz bir zemine atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayılar toplamının en az 9 olması olayını bulalım.

Çözüm:

Bu olaya ait küme A olsun.

Zarların üst yüzüne gelen sayılar toplamının 9, 10, 11 veya 12 olduğu durumlar istenilen durumlardır.

Bu durumların sayısı,

$$12 \rightarrow (6, 6) \rightarrow 1 \text{ durum,}$$

$$11 \rightarrow (5, 6), (6, 5) \rightarrow 2 \text{ durum,}$$

$$10 \rightarrow (6, 4), (4, 6), (5, 5) \rightarrow 3 \text{ durum,}$$

$$9 \rightarrow (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4) \rightarrow 4 \text{ durum,}$$

olduğundan,

$$A = \{(6, 6), (6, 5), (5, 6), (4, 6), (6, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4), (3, 6), (6, 3)\}$$

$$\text{ve } s(A) = 10 \text{ olur.}$$

✎ Bir çift zarın düz bir zemine atılması deneyinde örneklem uzayın elemanları aşağıdaki gibi yazılabilir,

Üst yüzüne gelen sayılar toplamı	Elemanlar	Durum sayısı
2	$\rightarrow (1, 1)$	1
3	$\rightarrow (1, 2), (2, 1)$	2
4	$\rightarrow (1, 3), (3, 1)$ $(2, 2)$	3
5	$\rightarrow (1, 4), (4, 1)$ $(3, 2), (2, 3)$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$\rightarrow (6, 6)$	1

Genel olarak;

Üst yüzüne gelen sayılar toplamı	Durum sayısı
2	$\rightarrow 1$
3	$\rightarrow 2$
4	$\rightarrow 3$
5	$\rightarrow 4$
6	$\rightarrow 5$
7	$\rightarrow 6$
8	$\rightarrow 5$
9	$\rightarrow 4$
10	$\rightarrow 3$
11	$\rightarrow 2$
12	$\rightarrow 1$

şeklindeki tablo iki zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamı ile ilgili sorularda kullanılabilir.

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

3 tane madeni para düz bir zemine atılıyor.

Paralardan en az birinin yazı olma olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Soru 2:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının en az 8 olması olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 13 D) 15 E) 17

Soru 3:

4 mavi, 3 kırmızı, 2 sarı top bulunan bir torbadan üç top çekiliyor.

Topların ikisinin mavi, birinin sarı olma olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 6 B) 10 C) 12 D) 18 E) 24

Soru 4:

Bir okulda, 3 matematik, 5 türkçe, 2 kimya öğretmeni vardır. Bu okulda, iki kişilik nöbetçi öğretmen ekibi kuruluyor.

Ekiptekilerden en az birisinin matematik öğretmeni olması olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 21 B) 24 C) 28 D) 35 E) 42

Soru 5:

Eşit büyüklükteki kartlar 1 den 20 ye kadar numaralanıp bir torbaya konuluyor.

Bu torbadan üç kart çekildiğinde, üçünün de asal sayı olması olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 16 B) 32 C) 48 D) 56 E) 72

Soru 6:

$$R = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

kümesinin elemanlarını kullanarak rakamları tekrarsız 5 basamaklı 5 ile tam bölünebilen farklı sayılar yazılıyor.

Bu sayıların 70000 den küçük olma olayının eleman sayısı kaçtır?

- A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 72

Ayrık Olaylar

Bilgi

Bir örneklem uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise bu iki olaya **ayrık olaylar** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

İki zar birlikte düz bir zemine atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 5 olması olayı A, zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olması olayı B olsun.

Bu olayları inceleyelim.

Çözüm:

$A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ ve

$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

olduğundan, $A \cap B = \emptyset$ dir.

Yani, A ile B **ayrık olaylardır**.

Örnek 2:

İki madeni paranın düz bir zemine atılması deneyinde paraların aynı gelmesi olayı A, paraların farklı gelmesi olayı B olsun.

Bu olayları inceleyelim.

Çözüm:

İki madeni para atılması deneyinin örneklem uzayı,

$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ dir.

Bu örneklem uzay içerisindeki A, B olayları,

$A = \{(Y, Y), (T, T)\}$ ve

$B = \{(Y, T), (T, Y)\}$

olduğundan, $A \cap B = \emptyset$ dir.

Yani A ile B olayları **ayrık olaylardır**.

Örnek 3:

Bir zarın düz bir zemine atılması deneyinde, zarın çift sayı gelmesi olayı A, tek sayı gelmesi olayı B, asal sayı gelmesi olayı C olsun.

Bu olayları inceleyelim.

Çözüm:

Bir zarın düz bir zemine atılması deneyin de örneklem uzay; $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dir.

Bu örneklem uzay içerisindeki A, B ve C olayları,

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 3, 5\}$

olduğundan,

$A \cap B = \emptyset$ ve A ile B **ayrık olaylardır**.

$A \cap C = \{2\}$ olduğundan, A ile C **ayrık olaylar değildir**.

$B \cap C = \{3, 5\}$ olduğundan, B ile C **ayrık olaylar değildir**.

Örnek 4:

Eşit büyüklükteki kartlar 1 den 17 ye kadar numaralanıp bir torbaya konuluyor.

Bu torbadan bir kart çekilmesi deneyinde kartın 10 dan büyük ve 9 un katı olması olayının eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

Bu torbadan bir kart çekilmesi deneyinde örneklem uzay; $E = \{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ dir.

Bu örneklem uzay içerisinde kartın 10 dan büyük olması olayı A olsun,

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ dir.

Bu örneklem uzay içerisinde kartın 9 un katı olması olayı B olsun,

$B = \{9\}$ dir.

$A \cap B = \emptyset$ olduğundan, A ile B **ayrık olaylardır**.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir zar düz bir zemine atılıyor.

Örnek uzay E olmak üzere, zarın çift sayı gelmesi olayı A, 4 ten büyük gelmesi olayı B, 3 ten küçük gelmesi olayı C, 3 ile 6 arasındaki sayıların gelmesi olayı D olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi ayrık iki olaydır?

- A) A ile B B) A ile C C) B ile D
D) C ile D E) A ile E

Soru 2:

İçerisinde 3 siyah, 4 beyaz bilye bulunan bir torbadan iki tane bilye seçiliyor.

Örnek uzay E olmak üzere, bilyelerin ikisinin de siyah olması olayı A, ikisinin de beyaz olması olayı B, ikisinin de farklı renkte olması olayı C, en az birinin siyah olması olayı D olduğuna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $s(E) = 21$ II. $s(A) = 3$
III. $s(B) = 10$ IV. $s(A \cap B) = 0$
V. $s(A \cap C) = 6$ VI. $s(C \cap D) = 12$

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

OLASILIK FONKSİYONU

E örnek uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme E_A olsun.

$P : E_A \rightarrow [0, 1]$

şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan P fonksiyonuna E_A üzerinde **olasılık fonksiyonu** denir.

A, E_A örneklem uzayında bir olay olmak üzere,

I. $0 \leq P(A) \leq 1$ dir.

Olasılık daima 0 ile 1 arasındadır.

II. Evrensel kümenin meydana gelme olasılığı

$P(E) = 1$ dir. (kesin olay)

III. $A, B \in E_A$ için $A \cap B = \emptyset$ (ayrık olaylar) ise,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Bilgi

I. $A \cap B \neq \emptyset$ ise,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

II. A nın tümleyeni A' olmak üzere;

A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)$,

A olayının gerçekleşmeme olasılığı $P(A')$ ise,

$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$ dir.

III. İmkansız olayın meydana gelme olasılığı , $P(\emptyset) = 0$ (imkansız olay)

IV. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi E_A dir. $P : E_A \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için;

$P(e_1) = \frac{1}{7}$, $P(e_2) = \frac{5}{14}$, $P(e_3) = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, P nin olasılık fonksiyonu belirtip belirtmediğini inceleyelim.

Çözüm:

$$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3)$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{5}{14} + \frac{1}{2} = \frac{14}{14} = 1$$

olduğundan, P fonksiyonu olasılık fonksiyonudur.

Örnek 2:

A ve B olayları, E örnek uzayında iki olaydır.

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{8}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre,

I. $P(A \cap B)$

II. $P(A - B)$

III. $P(B - A)$

ifadelerinin değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$I. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

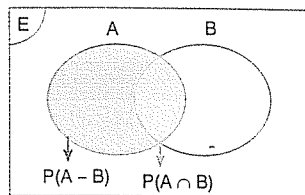
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{8}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

II.

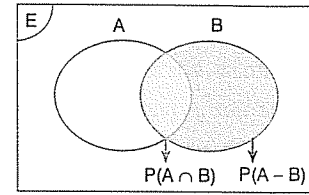


$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A - B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(A - B) = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

III.



$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B - A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(B - A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

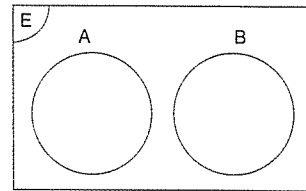
A ve B olayları, E örnek uzayında ayrık iki olaydır.

$$P(A) = \frac{3}{4} \text{ ve } P(B - A) = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $P(A') + P(B')$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

A ile B ayrık olaylar olduğundan, $(A \cap B) = \emptyset$ dir.



O halde,

$$P(B - A) = P(B) = \frac{1}{4} \text{ olduğundan,}$$

$$P(B') = \frac{3}{4} \text{ tür. } P(A) = \frac{3}{4} \text{ olduğundan,}$$

$$P(A') = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Buradan,

$$P(A') + P(B') = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \text{ olur.}$$

Örnek 4:

E örnek uzayı A ve B gibi iki ayrık olaydan oluşmaktadır.

$P(A) = \frac{4}{7}$ olduğuna göre, $P(B) + P(A')$ ifadesini bulalım.

Çözüm:

$$E = A \cup B \text{ ve } A \cap B = \emptyset \text{ dir.}$$

O halde,

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow \frac{4}{7} + P(B) = 1$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{7} \text{ dir.}$$

Ayrıca,

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \frac{4}{7} + P(A') = 1$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{3}{7} \text{ dir.}$$

Buradan,

$$P(B) + P(A') = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

Esat, Akif ve Burhan'ın yarıştığı üç kişilik bir yarışta, yarışı Esat'ın kazanma olasılığı Akif'in kazanma olasılığının üç katı, Burhan'ın kazanma olasılığı Akif'in kazanma olasılığının iki katıdır.

Buna göre, yarışı Akif'in kazanma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Yarışı Akif'in kazanma olasılığı, $P(a) = x$ ise, Esat'ın kazanma olasılığı, $P(e) = 3x$ ve Burhan'ın kazanma olasılığı, $P(b) = 2x$ olur.

$$P(E) = P(a) + P(e) + P(b)$$

$$\Rightarrow 1 = x + 3x + 2x$$

$$\Rightarrow P(a) = x = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

A, B, C olayları ayrık olaylar ve E örnek uzayını oluşturmaktadır. A olayının gerçekleşme olasılığı B olayının gerçekleşme olasılığının 3 katı, C olayının gerçekleşme olasılığı B olayının gerçekleşme olasılığının 4 katıdır.

Buna göre, B olayının gerçekleşme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ ☒ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

Soru 2:

Yalnız A, B, C atlarının katıldığı bir yarışta A atının yarışı kazanma olasılığı, B atının kazanma olasılığının 3 katı, C atının kazanma olasılığının 2 katıdır.

Buna göre, bu yarışı C atının kazanma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{11}$ ☒ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{9}{11}$

Soru 3:

A ve B olayları, E örnek uzayının elemanıdır.

$$P(A') = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{15}{16}$ D) $\frac{13}{16}$ E) $\frac{11}{16}$

Soru 4:

A ve B olayları E örnek uzayına ait iki olaydır.

$$P(A) = \frac{5}{16}, \quad P(B') = \frac{3}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{16}$$

olduğuna göre, $P((A \cup B)')$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{11}{16}$ E) $\frac{13}{16}$

Soru 5:

Hileli bir zar düz bir zemine atıldığında üst yüze gelen sayının olasılığı kendisi ile doğru orantılıdır.

Buna göre, üst yüze gelen sayının asal sayı olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{7}{23}$ ✓ C) $\frac{10}{21}$ D) $\frac{14}{23}$ E) $\frac{17}{21}$

EŞ OLumlu ÖRNEK UZAY VE OLASILIK HESABIBir deneyde tüm çıktıkların olasılıkları birbirine eşit ise bu şekildeki örnek uzaylara **eş olumlu örnek uzay** denir.**Bilgi**

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

sonlu bir eş olumlu örnek uzay olsun.

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \dots = P(e_n) \text{ dir.}$$

A $\subset$ E olmak üzere, A olayının olasılığı $P(A)$;

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\text{istenilen durumların sayısı}}{\text{tüm durumların sayısı}} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

Bir zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze bir çift sayının gelmesi olasılığını bulalım.**Çözüm:**Deneyin örneklem uzayı $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve zarın herbir yüzünün üste gelme olasılığı birbirine eşit olduğundan E eş olumlu örneklem uzaydır.Yani, $P(1) = P(2) = \dots = P(6)$ dir.İstenilen olay, $A = \{2, 4, 6\}$ olduğundan

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 2:Hileli bir para atılımında paranın yazı gelmesi olasılığı $\frac{1}{3}$ ve paranın tura gelmesi olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.**Bu örnek uzayın eş olumlu olup olmadığını bulalım.****Çözüm:**

Örneklem uzay,

$$E = \{Y, T\} \text{ ve } P(Y) = \frac{1}{3}, \quad P(T) = \frac{2}{3}$$

olmak üzere, $P(Y) \neq P(T)$ olduğundan bu deney eş olumlu örnek uzay değildir.**Örnek 3:**

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

olmak üzere, E örneklem uzayı eş olumlu örneklem uzayıdır.

Buna göre, $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3)$ toplamını bulalım.**Çözüm:**

Eş olumlu örnek uzay olduğundan,

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = \frac{1}{5} \text{ tir.}$$

Buna göre,

$$P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{6}{5} \text{ tir.}$$

Örnek 4:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayıların aynı olması olasılığını bulalım.**Çözüm:**Bir çift zarın atılması deneyinde örneklem uzayın eleman sayısı $s(E) = 36$ dir.

Zarların aynı geldiği olay A olsun.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \text{ dir.}$$

Buna göre, A olayının olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar çarpımının çift sayı olması olasılığını bulalım.**Çözüm:**

Bir çift zar atıldığında zarların üst yüzüne gelen sayılar,

$$(Tek, Tek) \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \text{ durum}$$

$$(Tek, Çift) \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \text{ durum}$$

$$(\text{Çift}, Tek) \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \text{ durum}$$

$$(\text{Çift}, \text{Çift}) \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \text{ durum}$$

olacak şekilde bulunur.

Bunlar içerisinde çarpımı çift sayı olan durumların sayısı; (T, Ç), (Ç, T), (Ç, Ç) durumları istenilen durumlar olduğundan, bu durumların sayısı 27 bulunur.

Buradan istenilen olasılık,

$$P(C) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Zarların üst yüzüne gelen sayılar toplamının 7 gelmesi olasılığını bulalım.**Çözüm:**

Zarların üst yüzüne gelen sayılar toplamının 7 gelmesi olayı B olsun.

$$B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

ve örneklem uzayın eleman sayısı, $s(E) = 36$ olduğundan,

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ olur.}$$

Örnek 7:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar toplamının en az 10 olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Üst yüze gelen sayılar toplamının en az 10 olduğu olay C olsun.

$C = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ ve örneklem uzayın eleman sayısı, $s(E) = 36$ olduğundan,

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ olur.}$$

Örnek 8:

İki zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar toplamının 5 ile 10 arasında olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

İstenilenlere göre, üst yüze gelen sayılar toplamı 6, 7, 8, 9 olabilir. Bunların sayısı aşağıdaki tablodan;

Üst yüze gelen sayılar toplamı	Adedi
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

$5 + 6 + 5 + 4 = 20$ olarak bulunur.

Örneklem uzayın eleman sayısı, $s(E) = 36$ olduğundan,

$$P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \text{ bulunur.}$$

Örnek 9:

İki madeni para düz bir zemin üzerine birlikte atılıyor.

Paraların ikisinin de farklı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Örneklem uzay, $E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ ve istenilen olay, $A = \{(Y, T), (T, Y)\}$

olduğundan, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek 10:

Üç madeni para düz bir zemin üzerinde birlikte atılıyor.

Paralardan en az birinin yazı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

I. yol:

Örneklem uzay, $E = \{(Y, Y, Y), (Y, T, Y), (Y, Y, T), (Y, T, T), (T, Y, Y), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}$ ve istenilen olay, $A = \{(Y, Y, Y), (Y, T, Y), (Y, Y, T), (Y, T, T), (T, Y, Y), (T, Y, T), (T, T, Y)\}$

olduğundan, $P(A) = \frac{7}{8}$ bulunur.

II. yol:

Üç madeni para atılması olayında örneklem uzay $2^3 = 8$ dir.

Atılan 3 paranın üçünün de tura gelmesi olasılığı 1 den çıkarıldığında elde edilen olasılık en az birinin yazı gelmesi olasılığı olacağından

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ dir.}$$

I. üçünün de tura gelme olasılığı

Örnek 11:

İçerisinde 4 mavi, 3 kırmızı bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekiliyor.

I. İkisinin mavi, birinin kırmızı olma olasılığını,

II. Üçünün de aynı renkli olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

$$I. 4 mavi bilyeden ikisi $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6,$$$

$$3 kırmızı bilyeden birisi $\binom{3}{1} = 3$$$

farklı şekilde seçilebildiğinden çekilen üç bilyeden ikisinin mavi, birinin kırmızı olması olayının eleman sayısı;

$$s(A) = \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

$$4 + 3 = 7 \text{ bilyeden üçü } \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ farklı}$$

şekilde seçilebildiğinden bu deneyin örneklem uzayının eleman sayısı, $s(E) = 35$ dir.

Buna göre, torbadan çekilen üç bilyeden ikisinin mavi, birinin kırmızı olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{18}{35} \text{ bulunur.}$$

II. Seçilen her üç bilyenin de aynı renkte yani üçünün de mavi veya üçünün de kırmızı olması olayları sırasıyla B ve C olsun.

$$4 mavi bilyeden üçü, $s(B) = \binom{4}{3} = 4,$$$

$$3 kırmızı bilyeden üçü, $s(C) = \binom{3}{3} = 1 \text{ dir.}$$$

B ve C olayları ayrık olduğundan,

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$P(B \cup C) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}$$

$$P(B \cup C) = \frac{4}{35} + \frac{1}{35}$$

$$P(B \cup C) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek 12:

Bir torbada 3 sarı, 4 mavi bilye vardır.

Bu torbadan aynı anda çekilen üç bilyeden en az birisinin sarı renkli olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Çekilen üç bilyeden; birisi sarı olabilir, ikisi sarı olabilir, üçü sarı olabilir, bunların her birinin olma olasılıkları bulunup toplanarak sonuç bulunabilir. Ancak, istenilmeyen tek durum olan hiç birinin sarı olmama olasılığından (üçünün de mavi olması) giderek soruyu çözelim.

Buna göre,

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

bulunur.

Örnek 13:

6 evli çiftten meydana gelen bir topluluktan iki kişi seçiliyor.

Bu iki kişinin evli çift olma olasılığını hesaplayalım.

Çözüm:

$$12 \text{ kişiden 2 kişi, } \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

farklı şekilde seçilebilir.

$$6 \text{ evli çiftten evli çift seçimi, } \binom{6}{1} = 6$$

farklı şekilde yapılabilir.

O halde istenilen olasılık,

$$P = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek 14:

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

kümesinden rastgele iki sayı seçiliyor.

Bu sayılar toplamının tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

A kümesinden iki sayı seçimi,

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ farklı şekilde yapılabilir.}$$

A kümesinin alt kümelerinden ,

tek sayıların kümesi, $T = \{5, 7, 9\}$ ve

çift sayıların kümesi, $\bar{C} = \{4, 6, 8, 10\}$ dur.

Toplamin tek sayı olabilmesi için; bir tane tek sayı, bir tane de çift sayı

$$s(T) = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 12 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

O halde, kümesinden rastgele seçilen iki sayının toplamının tek sayı olma olasılığı,

$$P(T) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek 15:

4 pozitif ve 5 negatif sayı arasından rastgele 3 sayı seçiliyor.

Bu sayılar çarpımının negatif olması olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bu 9 tane sayı arasından 3 tane sayının seçimi,

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ farklı şekilde yapılabilir.}$$

Çarpımlarının negatif olması için üç sayının; üçünün de negatif veya birisinin negatif ikisinin pozitif olması gerekir

Buna göre,

$$P(N) = P(A) + P(B)$$

$$P(N) = \frac{\binom{5}{3}}{84} + \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}{84}$$

$$= \frac{10}{84} + \frac{30}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21} \text{ olur.}$$

Örnek 16:

4 kız, 5 erkek öğrenci yan yana bir sıraya oturacaklardır.

Kız öğrencilerin bir arada olmaları olasılığını bulalım.

Çözüm:

9 kişinin bir sırada gelişi güzel dizilişlerinin sayısı $s(E) = 9!$ dir.

Kız öğrencilerin bir arada olmaları istenildiğinden onlar tek bir eleman olarak alınırsa, 5 erkek öğrenci ile birlikte beraber dizilişlerinin sayısı $6!$ dir.

Ayrıca kız öğrencilerin kendi içinde dizilişlerinin sayısı $4!$ olduğundan, istenilen dizilişlerin sayısı, $s(A) = 6! \cdot 4!$ dir.

O halde istenilen olasılık,

$$P = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6! \cdot 4!}{9!} = \frac{6! \cdot 24}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{1}{21} \text{ bulunur.}$$

Örnek 17:

4 tane madeni para birlikte düzgün bir zemine atılıyor.

Birinin yazı diğerlerinin tura gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

4 tane madeni para atıldığında örneklem uzayın eleman sayısı $2^4 = 16$ dir.

Birinin yazı diğerlerinin tura geldiği durumların kümesi

$$A = \{(Y, T, T, T), (T, Y, T, T), (T, T, Y, T), (T, T, T, Y)\}$$

ve $s(A) = 4$ dür.

O halde istenilen olasılık,

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Bir torbada 3 kırmızı, 4 mavi bilye vardır.

Bu torbadan rastgele seçilen iki bilyenin ikisinin de farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Soru 2:

İki basamaklı doğal sayılardan rastgele bir tanesi seçiliyor.

Bu sayının 5 ile tam bölünebilen bir sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Soru 3:

3 erkek, 2 kız öğrenci arasından seçilecek 3 kişiden en az birinin kız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{9}{10}$

Soru 4:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{x, b, d, y, z\}$$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesi içerisinde rastgele seçilen 2 elemanın ikisinin de sadece A kümesine ait olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{28}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{28}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{1}{28}$

Soru 5:

İçerisinde bir kısmı siyah bir kısmı beyaz olan 8 tane bilye vardır.

Bu torbadan iki adet bilye çekildiğinde ikisinin de beyaz gelme olasılığı $\frac{3}{28}$ olduğuna göre, siyah bilye sayısı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Soru 6:

4 evli çift arasından seçilen üç kişiden ikisinin evli çift olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Soru 7:

3 kişinin alınacağı bir işe aralarında Fırat'ın da bulunduğu 10 kişi başvurmuştur.

Fırat'ın işe alınma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{10}$

Soru 8:

3 ü pozitif, 4 ü negatif olan 7 farklı sayı arasından seçilen iki farklı sayının çarpımlarının pozitif olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Soru 9:

3 sarı, 4 yeşil, 5 beyaz kalem arasından seçilen üç kalemin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{45}{182}$ B) $\frac{24}{91}$ C) $\frac{5}{66}$ D) $\frac{3}{40}$ E) $\frac{3}{11}$

Soru 10:

7 farklı çift ayakkabı bir çuvala konuluyor.

Rastgele çekilen 4 ayakkabının giyilebilir iki çift olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{121}$ B) $\frac{1}{132}$ C) $\frac{1}{143}$ D) $\frac{1}{192}$ E) $\frac{3}{143}$

Soru 11:

Bir torbadaki yeşil topların sayısı mavi topların sayısının 3 katının 3 fazlası kadardır.

Torbadan çekilen 2 topun birinin yeşil, birinin mavi olma olasılığı $\frac{12}{35}$ olduğuna göre, çekilen

iki topun ikisinin de mavi olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{35}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{22}$ D) $\frac{5}{33}$ E) $\frac{5}{12}$

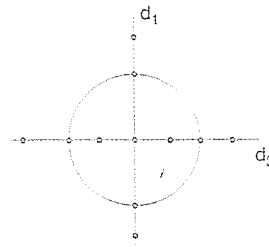
Soru 12:

$(x + y)^7$ ifadesinin açılımından elde edilecek terimlerin katsayıları birer karta yazılarak torbaya atılıyor.

Bu torbadan rastgele çekilen bir kartın üzerindeki sayının 10 dan küçük olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Soru 13:



Şekildeki 11 noktadan seçilen 4 noktadan sadece birinin çember üzerinde olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{14}{33}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{16}{33}$ D) $\frac{17}{33}$ E) $\frac{6}{11}$

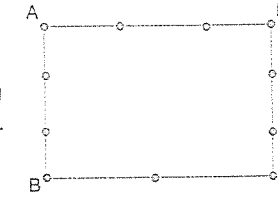
Soru 14:

Sayıları 1 den 50 ye kadar numaralandırılmış bir kitaptan rastgele açılan bir sayfanın numarasında 3 ve 5 ten sadece birinin olma ihtimali kaçtır?

- A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{5}{25}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{9}{25}$ E) $\frac{10}{25}$

Soru 15:

Şekildeki ABCD dikdörtgeni üzerindeki 11 noktanın herhangi üçü kullanılarak köşeleri bu noktalar olan üçgenler çiziliyor.



Çizilen bu üçgenlerden seçilen bir üçgenin köşelerinden en az birinin A, B, C, D noktalarından biri olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{7}{33}$ B) $\frac{13}{33}$ C) $\frac{29}{41}$ D) $\frac{113}{152}$ E) $\frac{117}{152}$

Soru 16:

$$A = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15\}$$

kümesinin elemanlarından rastgele 2 tane sayı seçiliyor.

Seçilen bu iki sayının çarpımının 6 nın katı olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{20}{21}$ B) $\frac{19}{21}$ C) $\frac{17}{21}$ D) $\frac{16}{21}$ E) $\frac{13}{21}$

A veya B Olayının Olma Olasılığı

Bilgi

E örnek uzayında herhangi iki olay A ve B olmak üzere,

i. $A \cap B \neq \emptyset$ ise, A veya B olayının olma olasılığı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ dir.}$$

ii. $A \cap B = \emptyset$ (Ayrık Olaylar) ise, A veya B olayının olma olasılığı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir zar düz bir zemine atılıyor.

I. Zarın üst yüzeyine 3 den büyük sayı veya asal sayı gelme olasılığını,

II. Zarın üst yüzeyine 3 den küçük sayı veya 3 ile bölünebilen sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:

I. Zarın üst yüzeyine 3 den büyük sayı gelmesi olayına ait kümeye A denilirse;

$$A = \{4, 5, 6\} \text{ ve } P(A) = \frac{3}{6} \text{ dir.}$$

Zarın üst yüzeyine asal sayı gelmesi olayına ait kümeye B denilirse;

$$B = \{2, 3, 5\} \text{ ve } P(B) = \frac{3}{6} \text{ dir.}$$

$$A \cap B = \{5\} \text{ ve } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ dir.}$$

Buna göre, A veya B olayının olma olasılığı,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

II. Zarın üst yüzeyine 3 den küçük sayı gelmesi olayına ait kümeye A denilirse;

$$A = \{1, 2\} \text{ ve } P(A) = \frac{2}{6} \text{ dir.}$$

Zarın üst yüzeyine 3 ile bölünebilen sayı gelmesi olayına ait kümeye B denilirse;

$$B = \{3, 6\} \text{ ve } P(A) = \frac{2}{6} \text{ dir.}$$

$A \cap B = \emptyset$ olduğundan, bu iki olay **ayrık olaylardır**. Buna göre, A veya B olayının olma olasılığı,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{2}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar toplamının 6 veya çarpımlarının tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olması olayının kümesi,

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \text{ ve } s(A) = 5 \text{ olur.}$$

$$P(A) = \frac{5}{36} \text{ dir.}$$

Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının tek sayı olması durumları için zarların her ikisinin de üst yüzüne tek sayı gelmelidir. Bu olayın kümesi,

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\} \text{ ve } s(B) = 9 \text{ olur.}$$

$$P(B) = \frac{9}{36} \text{ dir.}$$

Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 ve çarpımlarının tek sayı olması olayının kümesi,

$$A \cap B = \{(1, 5), (3, 3), (5, 1)\} \text{ ve } s(A \cap B) = 3 \text{ olur.}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} \text{ dir.}$$

O halde,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Üst yüze gelen sayıların her ikisinin de aynı veya toplamalarının 7 olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Zarların üst yüzüne gelen sayıların her ikisinin de aynı olması olayının kümesi,

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \text{ ve } s(A) = 6 \text{ olur.}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} \text{ dir.}$$

Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olması olayının kümesi,

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \text{ ve } s(B) = 6 \text{ olur.}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} \text{ dir.}$$

Zarların üst yüzüne gelen sayıların her ikisinin de aynı ve sayıların toplamının 7 olması olayının kümesi,

$$A \cap B = \emptyset \text{ olduğundan, bu iki olay } \textbf{ayrık olaylardır.}$$

Buna göre, A veya B olayının olma olasılığı,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

30 kişilik bir sınıfta 8 kişi gözlüklü, 22 kişi de gözlüksüzdür. Hem gözlüklü hem de gözlüksüz öğrencilerin yarısı kahverengi gözlüdür.

Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin gözlüklü veya kahverengi gözlü olması olasılığını bulalım.

Çözüm:

I. yol:

Seçilen bir öğrencinin, gözlüklü olması olayı G ise $s(G) = 8$, Kahverengi gözlü olması olayı K ise

$$s(K) = \frac{8}{2} + \frac{22}{2} = 4 + 11 = 15,$$

Gözlüklü ve kahverengi gözlü olması olayı $G \cap K$ ve $s(G \cap K) = 4$ olur.

O halde seçilen bir öğrencinin gözlüklü veya kahverengi gözlü olması olasılığı,

$$\begin{aligned} P(G \cup K) &= P(G) + P(K) - P(G \cap K) \\ &= \frac{s(G)}{s(E)} + \frac{s(K)}{s(E)} - \frac{s(G \cap K)}{s(E)} \\ &= \frac{8}{30} + \frac{15}{30} - \frac{4}{30} = \frac{19}{30} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

II. yol:

Seçilen bir öğrencinin gözlüklü veya kahverengi gözlü olması olayı

$$G \cup K \text{ ise } s(G \cup K) = 8 + \frac{22}{2} = 19 \text{ olur.}$$

$$P(G \cup K) = \frac{s(G \cup K)}{s(E)} = \frac{19}{30} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir kutudaki 9 sarı yumurtanın 3 ü büyük boy; 8 beyaz yumurtanın 5 i büyük boydur. Kutudan bir yumurta alınıyor.

Alınan yumurtanın büyük boy veya beyaz olma olasılığı kaçtır?

$$A) \frac{2}{17} \quad B) \frac{8}{17} \quad C) \frac{10}{17} \quad D) \frac{11}{17} \quad E) \frac{16}{17}$$

Soru 2:

Bir sınıfta 8 erkek öğrenci ve 3 ü gözlüklü 8 kız öğrenci vardır. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız veya gözlüklü bir öğrenci olma olasılığı $\frac{3}{4}$ tür.

Buna göre, bu sınıfta kaç gözlüklü erkek öğrenci vardır?

$$A) 2 \quad B) 3 \quad C) 4 \quad D) 5 \quad E) 6$$

Soru 3:

Bir çift zar havaya atılıyor.

Üst yüze gelen sayıların toplamının tek sayı veya 3 ün katı bir sayı olma olasılığı kaçtır?

$$A) \frac{3}{4} \quad B) \frac{2}{3} \quad C) \frac{1}{3} \quad D) \frac{1}{6} \quad E) \frac{1}{18}$$

ARDIŞIK DENEYLER

Bilgi

Bir deney sonlu sayıda tekrar edilmiş olsun.

Birinci deneyde A_1 olayının,

İkinci deneyde A_2 olayının,

.....

.....

n yinci deneyde A_n olayının

gerçekleşme olasılığı bu olayların olasılıklarının çarpımına eşittir.

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir zar art arda üç defa havaya atılıyor.

I. Üst yüze birinci atışta 4, ikinci atışta 5 ve üçüncü atışta 6 gelme olasılığını,

II. Zarın bir kere 4, bir kere 5, bir kere 6 gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:

I. Üst yüze birinci atışta 4 gelmesi olasılığı $P(4)$, ikinci atışta 5 gelmesi olasılığı $P(5)$ ve üçüncü atışta 6 gelmesi olasılığı $P(6)$ olsun.

$$P(4, 5, 6) = P(4) \cdot P(5) \cdot P(6)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \text{ bulunur.}$$

II. Zarın bir kere 4, bir kere 5, bir kere 6 geldiği sıralanışlardan birisi (4, 5, 6) dir. Bütün sıralanışların sayısı ise üç elemanın sıralamalarının sayısından, $3! = 6$ bulunur.

O halde ,Zarın bir kere 4, bir kere 5, bir kere 6 gelme olasılığı,

$$P((4, 5, 6)) \cdot 6 = \frac{1}{216} \cdot 6 = \frac{1}{36} \text{ bulunur.}$$

Ardeşik deneyler de sıralama verilmemiş ise olasılığın sıralama sayısı ile çarpıldığına dikkat edelim.

Örnek 2:

Bir madeni para 6 defa art arda havaya atılıyor.

I. İlk iki atışta yazı, sonraki dört atışta tura gelmesi olasılığını,

II. Herhangi iki atışta yazı, dört atışta tura gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

$$I. P((Y, Y, T, T, T, T)) = P(Y) \cdot P(Y) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

olarak bulunur.

II. İki atışta yazı, dört atışta tura geldiği sıralanışlardan birisi (Y, Y, T, T, T, T) dir. Bütün sıralanışların sayısı ise 2 Y ve 4 T olduğundan,

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15 \text{ dir.}$$

O halde, herhangi iki atışta yazı, dört atışta tura gelme olasılığı,

$$P((Y, Y, T, T, T, T)) \cdot 15 = \frac{1}{64} \cdot 15$$

$$= \frac{15}{64} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 3:

Bir torbada 3 mavi, 6 kırmızı top vardır. Bu torbadan arka arkaya rastgele 3 top çekiliyor.

Çekilen toplar rengine bakıldıktan sonra geriye konduğuna göre, ikisinin mavi, birinin kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Önce birinci çekilişte mavi, ikinci çekilişte mavi ve üçüncü çekilişte kırmızı gelme olasılığını bulalım.

Birinci çekilişte mavi gelme olasılığı

$$P(M_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ dür.}$$

Çekilen biye rengine bakıldıktan sonra tekrar torbaya konduğuna göre ikinci çekilişte mavi gelmesi olasılığı

$$P(M_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ dür.}$$

Üçüncü çekilişte kırmızı gelmesi olasılığı

$$P(K) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ dür.}$$

Bu 3 olayın birden gerçekleşme olasılığı,

$$P((M, M, K)) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(K)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} \text{ dir.}$$

Üç çekilişten 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı geldiği sıralanışlardan birisi (M, M, K) dir. Bütün sıralanışların sayısı ise, 2 tane M ve 1 tane K olduğundan,

$$\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 \text{ tür.}$$

O halde, topların ikisinin mavi, birinin kırmızı olması olasılığı,

$$P((M, M, K)) \cdot 3 = \frac{2}{27} \cdot 3 = \frac{2}{9} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 4:

Bir avcının bir atışta belli bir hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

Art arda beş atış yaptığında, üç kez hedefin vurulma olasılığını bulalım.

Çözüm:

(+) vurmak, (-) vuramamak olmak üzere, avcının hedefi üç kez vurduğu durumlardan birisi (+ + + --) dir. Bütün sıralanışların sayısı ise üç tane (+) ve iki tane (-) olduğundan,

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ dur.}$$

O halde, avcı art arda beş atış yaptığında, üç kez hedefi vurma olasılığı,

$$P(+ + + --) \cdot 10 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{243} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 5:

Bir madeni para dört kez atıldığında en az bir kere tura gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:

Para; 1 kere T, 3 kere Y veya 2 kere T, 2 kere Y veya 3 kere T, 1 kere Y veya 4 kere T gelse istenilen şart sağlanmış olur. Bu durumların hepsini ayrı ayrı bulup toplamak çözümü uzatır.

O halde, istenilmeyen durumun yani paranın 4 kere Y gelme olasılığından giderek çözüm yapalım.

En az bir kere tura olma olasılığı $= P((Y, Y, Y, Y))$

$$P((Y, Y, Y, Y)) = 1 - P((Y, Y, Y, Y))$$

$$= 1 - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{15}{16} \text{ olarak bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir madeni para art arda K kez havaya atılıyor.

Her seferinde bir öncekinden farklı gelme olasılığı $\frac{1}{128}$ olduğuna göre, K kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Soru 2:

Beş zar art arda havaya atılıyor.

Beş atışta da aynı sayı gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{6^4}$ B) $\frac{1}{6^3}$ C) $\frac{1}{3^6}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{2}$

Soru 3:

Üzerinde sadece 29 harf bulunan bir klavyeye rastgele 3 kez basan bir kişinin "FEM" yazması olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{29}$ C) $\frac{1}{29^2}$ D) $\frac{3}{29}$ E) $\frac{1}{29^3}$

Soru 4:

"ÇİÇEK"

kelimesinin harfleri birer karta yazılıp bir torbaya atılıyor.

Çekilen kart geri atılmamak şartıyla art arda 5 çekiliş yapılıyor sırasıyla Ç, İ, Ç, E, K harflerinin gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{30}$ C) $\frac{1}{40}$ D) $\frac{1}{50}$ E) $\frac{1}{60}$

Soru 5:

Bir zarın bir yüzünde F, iki yüzünde E, üç yüzünde M harfi bulunmaktadır.

Bu zar arka arkaya üç kez atıldığında sırasıyla F, E, M harflerinin gelmesi olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{72}$

Soru 6:

FATİH, KEREM, EMRAH kendi isimlerindeki her bir harfi birer kağıda yazarak ayrı ayrı kutulara atıyorlar. Sonra birer kağıt çekiyorlar.

Kutulardan çekilen kağıtlardaki harflerin FEM kelimesinin harfleri olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{125}$ B) $\frac{3}{125}$ C) $\frac{7}{125}$ D) $\frac{9}{125}$ E) $\frac{11}{125}$

Soru 7:

Bir apartmanın giriş (zemin) katından başka 6 katı daha vardır. Bu apartmanın giriş katından 3 kişi asansöre biniyor.

Asansör, zemin katıan yukarı doğru (6. kata kadar) geriye dönmeksizin hareket etmek şartıyla, bu üç kişiden her biri farklı katlarda indiğine göre, üçünün de tek numaralı katlarda inmiş olmaları olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{1}{120}$ D) $\frac{5}{140}$ E) $\frac{7}{150}$

Soru 8:

Bir dikiş kutusunda ikisi mavi, ikisi siyah, biri kırmızı olmak üzere, 3 farklı renkte makara bulunmaktadır.

Çekilen makarayı geriye koymamak şartıyla bu dikiş kutusundan art arda üç makara çekildiğinde 3. çekilişte kırmızı makara çekilmesi olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Bilgi

Bir torbadan çekiliş yapma deneyinde A olayının olma olasılığı bulunurken; bu torbadan rastgele r tane eleman seçmekle, çekilen eleman geri atılmaksızın art arda r tane eleman seçmek olasılığın sonucunu değiştirmez.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir torbada 3 mavi, 4 yeşil bilye vardır.

Bu torbadan art arda geri bırakmadan iki tane bilye çekildiğinde ikisinin de aynı renk olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$$4 + 3 = 7 \text{ bilyeden üçü } \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

farklı şekilde seçilebildiğinden bu deneyin örneklem uzayının eleman sayısı, $s(E)=21$ dir.

$$4 \text{ yeşil bilyeden ikisi } \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6,$$

$$3 \text{ mavi bilyeden ikisi } \left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

Buna göre, torbadan çekilen iki bilyeden ikisinin de aynı renk olma olasılığı,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{4}{2}\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)} \\ &= \frac{3}{21} + \frac{6}{21} \\ &= \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

II. yol:

Bilyelerin ikisi de mavi veya ikisi de yeşil olabilir.

Birinci çekilişte mavi gelme olasılığı,

$$P(M_1) = \frac{3}{7} \text{ dir.}$$

Geriye kalan 6 bilyeden 2 si mavi olacağından

ikinci çekilişte mavi gelmesi olasılığı,

$$P(M_2) = \frac{2}{6} \text{ dir.}$$

O halde, bilyelerin ikisinin de mavi olma olasılığı,

$$P(M_1).P(M_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7} \text{ dir.}$$

Birinci çekilişte yeşil gelme olasılığı,

$$P(Y_1) = \frac{4}{7} \text{ dir.}$$

Geriye kalan 6 bilyeden 3 ü yeşil olacağından

ikinci çekilişte yeşil gelmesi olasılığı,

$$P(Y_2) = \frac{3}{6} \text{ dir.}$$

O halde, bilyelerin ikisinin de mavi olma olasılığı,

$$P(M_1).P(M_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \text{ dir.}$$

Buna göre, çekilen iki bilyenin ikisinin de aynı

renk olma olasılığı,

$$P(A) = P(M_1).P(M_2) + P(Y_1).P(Y_2) \\ = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

Bir madeni para yedi defa art arda havaya atılıyor.

**Herhangi üç atışta yazı, dört atışta tura gelme-
si olasılığını bulalım.**

Çözüm:**I. yol**

Üç atışta yazı, dört atışta tura geldiği sıralanışlar-
dan birisi (Y, Y, Y, T, T, T, T) dir. Bütün sıralanışların
sayısı ise 3 Y ve 4 T olduğundan,

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35 \text{ dir.}$$

O halde, herhangi iki atışta yazı, dört atışta tura
gelme olasılığı,

$$P((Y, Y, Y, T, T, T, T)) \cdot 35 = \frac{1}{128} \cdot 35 \\ = \frac{35}{128} \text{ olarak bulunur.}$$

II.yol

Bir madeni paranın 7 defa art arda havaya atılması
yerine, bu soruyu 7 madeni paranın aynı anda ha-
vaya atılması gibi düşünerek çözelim.

Buna göre, 7 madeni paradan 3 ünün yazı, 4 ünün
tura gelmesi olayı A olsun.

7 madeni paradan yazı olacak 3 ü $\binom{7}{3}$, geriye ka-

lan 4 madeni paradan tura olacak 4 ü $\binom{4}{4}$ değişik
şekilde seçilebilir.

İkisi birlikte,

$$s(A) = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 35 \text{ değişik şekilde seçilebilir.}$$

7 tane paranın atılmasında örneklem uzayın ele-
man sayısı $2^7 = 128$ dir.

O halde,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{35}{128} \text{ olarak bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Altı madeni para aynı anda atılıyor.

Yazının turadan fazla gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{11}{32}$ E) $\frac{21}{64}$

Soru 2:

Altı karttan üç tanesine F, iki tanesine E, bir tane-
sine de M harfi yazılıp kartlar bir torbaya atılıyor.
Çekilen kart torbaya geri atılmamak şartıyla torba-
dan art arda üç kart çekiliyor.

Çekilen üç kartın birinde F, birinde E ve birinde
M harflerinin olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{3}{10}$

Soru 3:

Bir madeni para arka arkaya beş kez atılıyor.

En az bir tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{15}{16}$ D) $\frac{29}{32}$ E) $\frac{31}{32}$

Soru 4:

Bir torbada 5 mavi ve 3 kırmızı bilye vardır.

Torbadan, geri bırakılmamak şartıyla art arda
çekilen iki bilyenin birisinin mavi birisinin kır-
mızı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{15}{16}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{15}{28}$ E) $\frac{15}{56}$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

Bilgi

İki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi diğerinin gerçekleşme olasılığını değiştiriyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir.

A ve B bağımsız iki olaylar olmak koşuluyla

$P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ şeklinde gösterilir.

■ A'nın ve B'nin gerçekleşme olasılığı,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ dir.}$$

■ A'nın veya B'nin gerçekleşme olasılığı,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir zar ve bir madeni para düzgün bir zemine atılıyor.

Paranın tura, zarın asal sayı gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

Paranın tura gelmesi olayı T ve zarın asal sayı gelmesi olayı A olsun.

O halde,

$$P(T \cap A) = P(T) \cdot P(A)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

A ve B bağımsız iki olaydır.

$$P(B) = \frac{2}{3} \text{ ve } P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

olduğuna göre, $P(A)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A ile B bağımsız olduğundan,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ yazılırsa,}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{5}{6} = P(A) + \frac{2}{3} - P(A) \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + P(A) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = P(A) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} = P(A) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} = P(A) \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

Recep'in üniversite sınavını kazanma olasılığı $\frac{2}{3}$,

Rifat'ın $\frac{3}{4}$ ve Ahmet'in $\frac{1}{2}$ dir.

Bu üç olay birbirinden bağımsız olduğuna göre, üçünün de sınavı kazanması olasılığını bulalım.

Çözüm:

Sırasıyla bu üç kişinin üniversite sınavını kazanma olayları,

R, r, A olsun.

O halde,

$$P(R \cap r \cap A) = P(R) \cdot P(r) \cdot P(A)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

Bir zar ile bir madeni para atılıyor.

Zarın üst yüzüne çift sayının veya paranın tura yüzünün gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

$$\text{Zarın çift sayı gelmesi olasılığı } P(\text{Ç}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{paranın tura yüzünün gelmesi olasılığı } P(T) = \frac{1}{2}$$

Ç ve T olayları bağımsız olduğundan,

$$P(\text{Ç} \cup T) = P(\text{Ç}) + P(T) - P(\text{Ç} \cap T)$$

$$= P(\text{Ç}) + P(T) - P(\text{Ç}) \cdot P(T)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

Bir soruyu Suat, Rifat ve Murat'ın çözebilme olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ tür.

Bu soruyu çözmek için Suat, Rifat ve Murat ayrı ayrı uğraştıklarına göre problemin çözülebileme olasılığını bulalım.

Çözüm:

Sırasıyla soruyu çözebilme olasılıkları,

$$P(S) = \frac{1}{2}, \quad P(R) = \frac{1}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, çözememe olasılıkları sırasıyla;

$$P(S') = \frac{1}{2}, \quad P(R') = \frac{2}{3}, \quad P(M') = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

Bu soruyu Suat veya Rifat veya Murat'ın çözebilme olasılığı,

$$P(S \cup R \cup M) = 1 - P((S \cup R \cup M)')$$

$$= 1 - P(S' \cap R' \cap M')$$

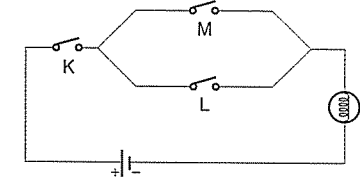
$$= 1 - P(S') \cdot P(R') \cdot P(M')$$

(S, R, M bağımsız olaylar olduğundan)

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:



Şekildeki devrede K, L ve M anahtarlarının kapalı olması olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ ve $\frac{2}{3}$ tür.

Buna göre, lambanın ışık vermesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

K anahtarının kapalı olması olasılığı $P(K) = \frac{1}{4}$,

açık olması olasılığı ise $P(K') = 1 - P(K) = \frac{3}{4}$ tür.

L anahtarının kapalı olması olasılığı $P(L) = \frac{2}{5}$,

açık olması olasılığı ise $P(L') = 1 - P(L) = \frac{3}{5}$ tir.

M anahtarının kapalı olması olasılığı $\frac{2}{3}$,

açık olması olasılığı ise $P(M') = 1 - P(M) = \frac{1}{3}$ tür.

Lambanın ışık vermesi için devrenin tamamlanması gerekir. Bunun için K anahtarı kapalı, L anahtarı kapalı ve M anahtarı açık veya K anahtarı kapalı, L anahtarı açık ve M anahtarı kapalı veya her üç anahtar da kapalı olmalıdır.

O halde lambanın ışık vermesi olasılığı,

$$P = P(K \cap L \cap M') + P(K \cap L' \cap M) + P(K \cap L \cap M)$$

$$= P(K) \cdot P(L) \cdot P(M') + P(K) \cdot P(L') \cdot P(M)$$

$$+ P(K) \cdot P(L) \cdot P(M)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

İki zar ve iki madeni para birlikte düzgün bir zeminde atılıyor.

Zarların aynı ve paraların farklı gelmesi olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Soru 2:

A torbasında 3 mavi, 2 kırmızı bilye, B torbasında 4 mavi, 3 kırmızı bilye vardır. A ve B torbalarından rastgele birer bilye seçiliyor.

Bilyelerin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{12}{35}$ B) $\frac{17}{35}$ C) $\frac{24}{35}$ D) $\frac{28}{35}$ E) $\frac{31}{35}$

Soru 3:

Bir sınavı Taner, Burak ve Ahmet'in kazanma olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ ve $\frac{3}{4}$ tür.

Buna göre, sınavı sadece Burak'ın kazanma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{8}{15}$

Soru 4:

Bordo torbada 4 bordo, 3 mavi; mavi torbada 3 bordo, 4 mavi top vardır.

Rastgele alınan bir torbadan seçilen bir topun, torbayla aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{7}$

Soru 5:

Bir zar ile iki madeni para birlikte havaya atılıyor.

Zarın 4 ten büyük ve paraların en az birinin tura gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{11}{24}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

BAĞIMLI OLAYLAR

Bilgi

Bir olayın olma olasılığı ikinci bir olayın olasılığına göre değişiyorsa bu iki olay bağımlı olaydır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

A torbasında 4 mavi, 3 kırmızı, B torbasında 3 mavi, 4 kırmızı bilye vardır.

Rastgele seçilen bir torbadan bir bilye çekildiğinde bu bilyenin kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Seçilen torba A torbası olduğunda çekilen bilyenin kırmızı olma olasılığı ;

$$P(A_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \text{ tür.}$$

Torbalarından A'nın seçilme olasılığı

Seçilen torba B torbası olduğunda çekilen bilyenin kırmızı olma olasılığı ;

$$P(B_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{14} \text{ tür.}$$

Torbalarından B'nin seçilme olasılığı

Buna göre, rastgele seçilen bir torbadan bir bilye çekildiğinde bu bilyenin kırmızı olma olasılığı;

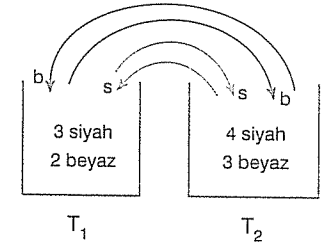
$$\frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

Bir torbada 3 siyah, 2 beyaz diğer bir torbada 4 siyah, 3 beyaz bilye vardır. Birinci torbadan bir bilye çekip ikinci torbaya atılıyor, sonra ikinci torbadan bir bilye alınıp birinci torbaya atılıyor.

Renk bakımından ilk durumun oluşması olasılığını bulalım.

Çözüm:



Renk bakımından ilk durumun oluşması için; T_1 ve T_2 torbalarının her ikisinden de siyah bilye veya beyaz bilye çekilmelidir.

Buna göre, istenen durumun olasılığı,

$$P(A) = P(S_1) \cdot P(S_2) + P(B_1) \cdot P(B_2)$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$$

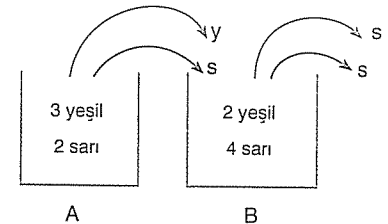
$$P(A) = \frac{23}{40} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

A torbasında 3 yeşil, 2 sarı; B torbasında 2 yeşil, 4 sarı bilye vardır. A torbasından rastgele bir bilye alınıp rengine bakılmadan B torbasına atılıyor, sonra da B torbasından bir bilye çekiliyor.

Çekilen bu bilyenin sarı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:



İstenen durum; A torbasından yeşil bilye, B torbasından sarı bilye veya A torbasından sarı bilye, B torbasından sarı bilye çekme şeklindedir. Buna göre, istenen durumun olasılığı,

$$P(A) = P(Y_A) \cdot P(S_B) + P(S_A) \cdot P(S_B)$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{22}{35} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

Üç atıcının bir hedefi vurabilme olasılıkları sırası ile $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{7}$ ve $\frac{2}{7}$ tir. Bu üç atıcı birer atış yapıyor.

Sadece ikisinin hedefi vurma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Üç atıcı birer atış yaptığında sadece ikisinin hedefi vurması için; hedefi birinci ile ikinci vurmali, üçüncü vuramamalı veya birinci ile üçüncü vurmali, ikinci vuramamalı veya ikinci ile üçüncü vurmali, birinci vuramamalıdır.

$$\text{Birincinin vurma olasılığı } P(A) = \frac{3}{7},$$

$$\text{ikincinin vurma olasılığı } P(B) = \frac{1}{7}$$

$$\text{ve üçüncünün vurma olasılığı } P(C) = \frac{2}{7} \text{ dir.}$$

O halde üç atıcıdan sadece ikisinin hedefi vurma olasılığı,

$$\begin{aligned} P((A, B, C')) + P((A, B', C)) + P((A', B, C)) \\ = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') + P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) \\ + P(A') \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7}$$

$$= \frac{59}{343} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir avcının hedefi vuramama olasılığı $\frac{1}{4}$ tür.

Avcı 4 atış yaptığında sadece 2. ve 4. atışta hedefi vurma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{125}$ B) $\frac{7}{125}$ C) $\frac{7}{256}$ D) $\frac{9}{256}$ E) $\frac{11}{256}$

Soru 2:

4 sarı, 4 kırmızı, 4 mavi top bulunan bir torba içinden alınan top geri torbaya atılmak şartı ile art arda 3 top çekiliyor.

Çekilen bu toplardan en az ikisinin mavi gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{5}{27}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{7}{27}$ E) $\frac{1}{8}$

Soru 3:

Biri beyaz diğeri siyah iki torbanın her birinde 2 beyaz 4 siyah top vardır.

Rastgele bir torbadan, gelişigüzel bir top çekildiğinde çekilen top ile torbanın aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

Soru 4:

Bir torbada 7 kırmızı 5 mavi bilye vardır.

Torbadan bir bilye çekilip diğer renkte bir bilye torbaya konduktan sonra torbadan çekilecek bir bilyenin mavi olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{11}{72}$ B) $\frac{21}{72}$ C) $\frac{31}{72}$ D) $\frac{41}{72}$ E) $\frac{51}{72}$

Soru 5:

Bir torbada 3 mavi, 3 yeşil bilye vardır. Bu torbadan çekilen bilye geri bırakılmamak şartıyla önce Hakan sonra Hasan sırasıyla birer birer bilyeleri çekiyorlar.

Mavi bilyeleri Hakan'ın çekme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{3}{20}$ E) $\frac{3}{40}$

Soru 6:

I. torbada 1 den 9 a kadar numaralandırılmış 9 tane, II. torbada 3 ü kırmızı 7 si yeşil olmak üzere, 10 tane top vardır. Bir zar havaya atılıyor ve her iki torbadan birer tane top seçiliyor.

I. torbadan çekilen topun numarasının tek sayı, II. torbadan çekilen topun kırmızı ve zarın asal sayı gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

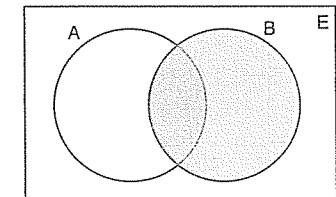
ŞARTLI (KOŞULLU) OLASILIK

A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun.

B olayının gerçekleşmesi halinde, A olayının gerçekleşmesi olasılığı $P(A | B)$ şeklinde gösterilir ve A olayının B ye bağlı şartlı (koşullu) olasılığı denir.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (P(B) \neq 0) \text{ dir.}$$

Burada, E örnek uzayı eş olumlu ise,



$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} \text{ olur.}$$

O halde,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ dir.}$$

Burada B olayı gerçekleştiğine göre örnek uzay B ye indirgenmiştir.

Bilgi

A ile B, eş olumlu bir E örnek uzayında iki olay olmak üzere, A nın B koşulu olasılığı ($s(B) \neq 0$)

$$P(A | B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \text{ olur.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir zar havaya atılıyor.

Üst yüze bir çift sayı geldiğine göre, bu sayının asal sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

E örneklem uzayında üst yüze çift sayı gelme olayı B ve asal sayı gelme olayı A olsun.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 3, 5\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ olduğundan $A \cap B = \{2\}$ olur.

I. yol

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \frac{1}{\frac{6}{6}} = \frac{1}{3} \text{ dür.}$$

II. yol

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{1}{3}$$

Örnek 2:

Bir çift zar düz bir zemine atılıyor.

Zarların üst yüzüne aynı sayının geldiği bilindiğine göre, üst yüze gelen sayılar toplamının 6 dan küçük gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:

Zarların aynı gelmesi olayı A ise,

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Zarların aynı olduğu durumda toplamının 6 dan küçük gelmesi olayı B ise,

$$B = \{(1, 1), (2, 2)\} \text{ olur.}$$

O halde, zarların aynı geldiği bilindiğine göre, üst yüze gelen sayılar toplamının 6 dan küçük gelme olasılığı,

$$P(B | A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Örnek 3:

İçerisinde 4 kırmızı, 5 mavi bilye bulunan bir torbadan aynı anda üç tane bilye çekiliyor.

Çekilen bilyelerin üçünün de aynı renkli olduğu bilindiğine göre, üçünün de kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Aynı renkli üç tane bilye çekme olayı A ise

$$s(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14 \text{ dür.}$$

Üçünün de kırmızı olma olayı B ise,

$$s(B) = \binom{4}{3} = 4 \text{ dür.}$$

B kümesini oluşturan elemanlar aynı zamanda A kümesinin de elemanı olduğundan,

$$s(B) = s(A \cap B) = 4 \text{ dür.}$$

Buna göre, çekilen bilyelerin üçünün de aynı renkli olduğu bilindiğine göre, üçünün de kırmızı olma olasılığı,

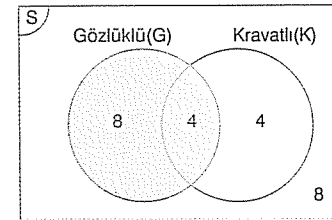
$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{s(A \cap B)}{s(A)} \\ &= \frac{4}{4 + 10} \\ &= \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

24 kişilik grupta 12 kişi gözlüklü 8 kişi kravatlıdır. 8 kişi ise ne gözlüklü ne de kravatlıdır.

Buna göre, rastgele seçilen bir kişinin gözlüklü olduğu bilindiğine göre, bu kişinin kravatlı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:



Yukarıdaki venn şemasına göre, istenilen olasılık,

$$P(K | G) = \frac{s(K \cap G)}{s(G)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

İki basamaklı doğal sayılardan rastgele seçilen bir tanesinin 5 ile tam bölünen bir sayı olduğu bilindiğine göre, çift sayı olması olasılığını bulalım.

Çözüm:

5 ile tam bölünebilen iki basamaklı sayıların kümesi, $B = \{10, 15, 20, \dots, 95\}$ olacak şekilde, $\frac{95 - 10}{5} + 1 = 18$ tane elemandan oluşur.

Bunlar içerisinde çift olan sayıların kümesi,

$$A = \{10, 20, \dots, 80, 90\} \text{ olacak şekilde,}$$

$$\frac{90 - 10}{10} + 1 = 9 \text{ tane dir.}$$

O halde,

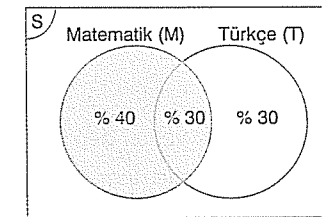
$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \\ &= \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

Bir sınıftaki öğrencilerin % 70 i Matematik'ten, % 60 ı ise Türkçe'den geçmiştir. Her iki dersten de kalan öğrenci yoktur.

Seçilen bir öğrencinin Matematikten geçtiği bilindiğine göre, Türkçe'den de geçmiş olması olasılığını bulalım.

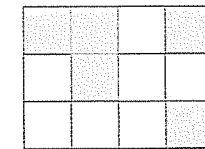
Çözüm:



Yukarıdaki venn şemasına göre, istenilen olasılık,

$$\begin{aligned} P(T | M) &= \frac{s(T \cap M)}{s(M)} \\ &= \frac{30}{70} = \frac{3}{7} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 7:



Yukarıdaki şekilde 5 tanesi taranmış olan 12 tane özdeş kare vardır.

Bu şekilden rastgele seçilen iki tane karenin taralı kare olduğu bilindiğine göre, bu karelerin soldaki bitişik üç kareden olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bu 5 tane taralı kareden iki tane kare seçme işlemi

$$s(A) = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ farklı şekilde yapılabilir.}$$

Soldaki bitişik üç tane kareden iki tane kare seçme işlemi,

$$s(B) = s(A \cap B) = \binom{3}{2} = 3 \text{ farklı şekilde yapılabilir.}$$

O halde , istenilen olasılık,

$$P(B | A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} = \frac{3}{10} \text{ dur.}$$

Örnek 8:

888556

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilecek altı basamaklı farklı tüm sayılardan rastgele bir tanesi seçiliyor.

Bu sayının çift bir sayı olduğu bilindiğine göre, birler basamağının 6 olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Çift bir sayı yazma olayı A ise,

$$s(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{\downarrow \{8, 8, 8, 6\}}$$

$$= \frac{4 \cdot 5!}{3! \cdot 2!} = 40 \text{ tir.}$$

Birler basamağı 6 olacak şekilde yazılabilecek çift sayıların kümesi B ise,

$$s(B) = s(A \cap B) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{\downarrow \{6\}} = \frac{5! \cdot 1}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ dur..}$$

O halde , istenilen olasılık,

$$P(B | A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir zar havaya atılıyor.

Üst yüze gelen sayının asal olduğu bilindiğine göre, çift olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Soru 2:

T_1 torbasında 3 kırmızı, 2 sarı, T_2 torbasında 2 kırmızı, 3 sarı bilye vardır. Aynı anda her iki torbadan birer bilye alınıyor.

Alınan bilyelerin farklı renkte olduğu bilindiğine göre, sarı renkli bilyenin T_1 torbasından çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{9}{13}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{4}{13}$ D) $\frac{2}{13}$ E) $\frac{1}{13}$

Soru 3:

Üç tane madeni para aynı anda düzgün bir zemine atılıyor.

Paraların üçünün de aynı gelmediği bilindiğine göre, iki tanesinin yazı birinin tura gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Soru 4:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesinden aynı anda iki tane sayı seçiliyor.

Seçilen sayıların çarpımının çift sayı olduğu bilindiğine göre, iki sayının da çift olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Soru 5:

Bir çift zar havaya atılıyor.

Zarlardan en az birinin 2 geldiği bilindiğine göre, zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının asal sayı olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{2}{3}$

Soru 6:

1 den 9 a kadar (1 ve 9 dahil) olan sayılardan 2 tanesi rastgele seçiliyor.

Sayıların toplamının çift sayı olduğu bilindiğine göre, her iki sayının da tek olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{4}{7}$

SONSUZ ÖRNEK UZAY

E örnek uzayı sayılamayacak çoklukta örnek noktalardan (uzunluk, alan, hacim gibi geometrik ölçümler) meydana geliyorsa **sonsuz örnek uzay** adını alır.

Bilgi

E sonsuz örneklem uzayına ait bir A olayının gerçekleşme olasılığı,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{A \text{ nın ölçüsü}}{E \text{ nin ölçüsü}} \text{ dır.}$$

Yani,

$$P(A) = \frac{A \text{ nın uzunluğu}}{E \text{ nin uzunluğu}}$$

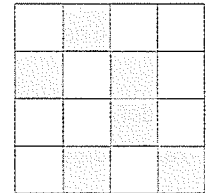
$$P(A) = \frac{A \text{ nın alanı}}{E \text{ nin alanı}}$$

$$P(A) = \frac{A \text{ nın hacmi}}{E \text{ nin hacmi}} \text{ olur.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Yandaki şekilde 16 tane özdeş kare vardır.



Bu 16 kareden rastgele bir tanesi seçildiğinde bu karenin taralı karelerden biri olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Toplam 16 tane özdeş kareden istenilen 6 tane kare olduğundan,

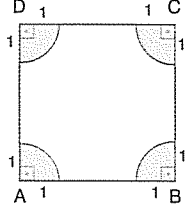
$$P(A) = \frac{\text{İstenilen durumların sayısı}}{\text{Tüm durumların sayısı}}$$

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

Bir kenarı 3 birim olan kare içerisinde seçilen herhangi bir noktanın, köşelerden en fazla 1 birim uzaklıkta olma olasılığını bulalım.

Çözüm:



Seçilecek olan noktanın yukarıdaki şekilde verilen taralı alanlardan herhangi birisinde olması isteniyor.

$$P = \frac{\text{Taralı alanlar toplamı}}{\text{Karenin alanı}}$$

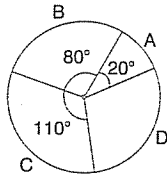
$$P = \frac{\frac{\pi \cdot 1^2}{4} + \frac{\pi \cdot 1^2}{4} + \frac{\pi \cdot 1^2}{4} + \frac{\pi \cdot 1^2}{4}}{3 \cdot 3} = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{4}}{9} = \frac{\pi}{9}$$

bulunur.

Örnek 3:

Şekildeki hedefe bir atış yapılıyor.

Hedef isabet ettirildiğine göre, D bölgesine isabet etmesi olasılığını bulalım.



Çözüm:

Şekilde;

A bölgesi 20° lik açıyla,

B bölgesi 80° lik açıyla,

C bölgesi 110° lik açıyla,

D bölgesi 150° lik açıyla gösterilmiştir.

O halde,

$$P(D) = \frac{D \text{ nin açısı}}{\text{Tüm açı}} = \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{12} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

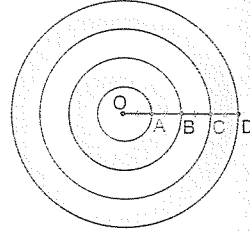
Bir kenarı 4 birim olan kare levhaya bir nokta işaretleniyor.

Bu noktanın karenin herhangi bir köşesine en fazla 2 birim uzaklıkta olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{2\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{11}$ C) $\frac{7\pi}{19}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Soru 2:

Yandaki şekilde, merkezi O noktası olan daire biçiminde bir hedef tahtası veriliyor. Bu hedef tahtası yarıçapları r, 2r, 3r ve 4r olan eş merkezli daire dilimleri şeklinde bölmele-re ayrılıyor.



Buna göre, bu hedef tahtasına isabet ettirilen bir atışın taralı bölmelerden herhangi birinin sınırladığı bölgeye isabet etme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{16}$

1. Bir torbada 3 kırmızı, 5 mavi top vardır.

Bu torbadan rastgele çekilen iki topun ikisinin de mavi olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{9}{14}$ E) $\frac{11}{14}$

2. 2 yeşil, 4 mavi topun bulunduğu bir torbadan çekilen top geri atılmak şartıyla art arda iki top çekiliyor.

Çekilen topların farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

3. İçerisinde 1 den 7 ye kadar numaralandırılmış 7 adet top bulunan bir torbadan rastgele 2 top çekiliyor.

Çekilen toplar üzerindeki sayıların, çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{8}{21}$

4. 4 evli çift arasından rastgele seçilen iki kişinin evli bir çift olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

5. A ve B, aynı örnek uzayın iki olayıdır.

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A' \cup B') = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?

- A) $\frac{11}{12}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{7}{12}$

6. Bir torbada 3 mavi, 4 sarı ve 5 yeşil bilye vardır. Torbadan geri atılmamak koşulu ile üç bilye art arda çekiliyor.

Bu torbadan birincisinde mavi, ikincisinde sarı, üçüncüsünde yeşil bilye çekme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{55}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{5}{44}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{1}{22}$

7. Bir kutudaki 11 kalemten 5 i bozuktur.

Bu kutudan rastgele seçilen üç kalemin üçünün de sağlam olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{4}{33}$ B) $\frac{2}{33}$ C) $\frac{5}{33}$ D) $\frac{1}{22}$ E) $\frac{3}{22}$

8. A torbasında 3 mavi, 5 siyah; B torbasında 4 mavi, 2 siyah bilye vardır. A torbasından çekilen bir bilye B torbasına atılıyor.

Bundan sonra B torbasından çekilen bir bilyenin siyah olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{5}{14}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{23}{56}$ E) $\frac{19}{28}$

9. İki zar havaya atılıyor.

Üst yüze gelen sayıların toplamının 8 den büyük olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{7}{12}$

10. 4 pozitif, 6 negatif sayı arasından rastgele seçilecek iki sayının çarpımının pozitif olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{17}{30}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{8}{15}$

11. Bir sepette 3 gül, 3 lüle ve 3 karanfil vardır.

Sepetten rastgele alınan üç çiçeğin üçünün de farklı türden olma olasılığı kaçtır?

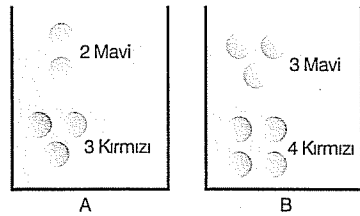
- A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{9}{28}$ C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{11}{28}$ E) $\frac{3}{7}$

12. Bir torbada 2 sarı, 5 kırmızı top vardır.

Bu torbadan rastgele çekilen 3 toptan birinin sarı, diğer ikisinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{9}{14}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

- 13.



A ve B torbalarında belirtilen adet ve renklerde bilyeler vardır.

Aynı anda her iki torbadan alınan birer bilyenin aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{16}{35}$ B) $\frac{17}{35}$ C) $\frac{18}{35}$ D) $\frac{19}{35}$ E) $\frac{21}{35}$

14. 4 madeni para atılıyor.

İkisinin yazı, ikisinin tura gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{11}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{13}{16}$

15. Bir madeni para 3 defa atılıyor.

En çok 2 kez yazı gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

16. Sadece siyah ve beyaz bilyelerin bulunduğu bir kutudaki siyah bilye sayısı beyaz bilye sayısının 2 katıdır.

Kutudan rastgele seçilen 2 bilyenin farklı renklerde olma olasılığı $\frac{10}{21}$ olduğuna göre, başlangıçta kutuda kaç bilye vardır?

- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

17. Bir sınıfta 12 erkek, 20 kız öğrenci vardır. Erkeklerin yarısı, kızların $\frac{1}{4}$ ü sarıdır.

Seçilen bir öğrencinin sarışın olduğu bilindiğine göre, kız olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{3}{11}$ E) $\frac{2}{11}$

18. Bir düzgün dörtyüzlünün üç yüzü sarı, bir yüzü de mavi renktedir.

Bu düzgün dörtyüzlü bir kez atıldığında görünen tüm yüzlerinin aynı renk olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

1. 8 elmadan 3 ü çürüktür.

Bu elmalardan seçilen iki elmanın ikisinin de sağlam olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{14}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

2. 3 ü kız ve 4 ü erkek olan 7 öğrenci yan yana sıralanmışlardır.

3 kızın yan yana gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{34}{35}$ D) $\frac{41}{42}$ E) $\frac{50}{51}$

3. abc4 şeklindeki dört basamaklı bir doğal sayının 4 ile tam bölünebilme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

4. 5 erkek, 4 kız öğrenci arasında seçilen 2 kişiden birinin erkek diğerinin kız olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

5. İki torbadan birincisinde 5 sarı, 3 beyaz, ikincisinde 3 sarı, 5 beyaz top vardır. Her iki torbadan birer top çekiliyor.

Birinci torbadan sarı, ikinci torbadan beyaz top çekme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{64}$ B) $\frac{15}{64}$ C) $\frac{5}{32}$ D) $\frac{15}{32}$ E) $\frac{25}{64}$

6. Eda ile Seda'nın bir sınavı kazanma olasılıkları sırasıyla $\frac{3}{5}$ ve $\frac{3}{4}$ tür. İkiside bir sınava giriyorlar.

En az birinin sınavı kazanma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{19}{20}$

7. Bir atıcının hedefi vuramama olasılığı $\frac{1}{3}$ tür.

Atıcı 3 atış yaptığında sadece son atışta hedefi vuramama olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{7}{27}$ D) $\frac{4}{27}$ E) $\frac{1}{9}$

8. İçinde; 5 mavi, 3 kırmızı, 1 yeşil top bulunan bir torbadan aynı anda üç bilye çekiliyor.

Üçünün de aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{4}{25}$ B) $\frac{5}{42}$ C) $\frac{5}{84}$ D) $\frac{7}{84}$ E) $\frac{11}{84}$

9. İki futbolcudan birinin attığı penaltıyı gole çevirebilmesi olasılığı $\frac{2}{5}$, diğerinin ise $\frac{3}{4}$ tür.

İlk penaltı atışları sonucunda bu iki futbolcudan en az birinin penaltıyı gole çevirme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{7}{20}$ B) $\frac{11}{20}$ C) $\frac{13}{20}$ D) $\frac{17}{20}$ E) $\frac{19}{20}$

10. Bir madeni para 6 kez atılıyor.

Bu atışlardan en az birinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{33}{64}$ C) $\frac{63}{64}$ D) $\frac{63}{128}$ E) $\frac{31}{32}$

11. 4 madeni para atılıyor, paralardan en az ikisinin tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{11}{16}$ E) $\frac{13}{4}$

12. Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayılar toplamının 6 dan büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{5}{7}$

13. Bir sınıftaki öğrencilerin % 40 ı erkektir. Erkeklerin % 30 u, kızların ise % 70 i sınıflarını geçmiştir.

Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin erkek veya sınıfını geçememiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{14}{50}$ B) $\frac{15}{50}$ C) $\frac{23}{50}$ D) $\frac{26}{50}$ E) $\frac{29}{50}$

14. Bir zar ve iki madeni para birlikte atılıyor.

Zarın 2 den büyük veya paraların farklı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{9}$

15. "GÜLNİHAL" kelimesindeki her harf bir karta yazılarak torbaya atılıyor.

Torbadan rastgele çekilen iki kartta A ve L harflerinin yazılı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{14}$ D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{28}$

16. Bir çift zar atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar toplamının 9 dan küçük olduğu bilindiğine göre, 5 ten büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{8}{13}$

17. Bir torbada 3 mavi, 2 yeşil ve 4 beyaz bilye vardır. Çekilen bilye torbaya konmaksızın bu torbadan 3 bilye çekiliyor.

Buna göre, ilk bilyenin mavi, son bilyenin yeşil renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{11}$ E) $\frac{1}{12}$

18. E örnek uzayının A ve B alt kümeleri için

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{2} \text{ ve } P(A') = \frac{7}{15}$$

olduğuna göre, $P(A \cap B)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{7}{30}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{3}{10}$

19. Bir torbada 3 sarı, 4 mavi top vardır. Önce torbadan rastgele iki top çekilmekte ve rengine bakılmadan üçüncü bir top daha çekilmektedir.

Üçüncü topun renginin sarı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{35}$ B) $\frac{14}{35}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{7}$

20. Bir yarışa katılan üç attan; A'nın yarışı kazanma olasılığı, B'nin kazanma olasılığının 3 katı; B'nin kazanma olasılığı da C'nin kazanma olasılığının 4 katıdır.

Bu yarış B'nin kazanma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{4}{17}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{4}{19}$

1. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

kümesinin elemanları kullanılarak dört basamaklı sayı yazılacaktır.

Yazılan sayının 3 ile başlayan çift sayı olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

2. $A = \{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

kümesinin elemanlarından seçilen farklı iki sayının toplamının çift sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

3. Bir zar arka arkaya 4 kez atılıyor.

Arka arkaya 3 kez aynı değeri farklı sayı gelmesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{108}$ B) $\frac{6}{108}$ C) $\frac{7}{108}$ D) $\frac{11}{108}$ E) $\frac{13}{108}$

4. Düzgün bir oniki yüzlünün 7 yüzü kırmızı, 2 yüzü mor, 3 yüzü de turuncu renklidir.

Bu düzgün on iki yüzlü, düzgün bir zemine atıldığında görünen yüzeylerinde mor yüzey sayısının turuncu yüzey sayısına eşit olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{12}$

5. Bir kutudaki 15 bardaktan 4 ü çatlaktır.

Kutudan peşpeşe alınan 3 bardaktan ikisinin sağlam olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{22}{91}$ B) $\frac{44}{91}$ C) $\frac{66}{91}$ D) $\frac{77}{91}$ E) $\frac{90}{91}$

6. Bir sınıftaki öğrencilerin 24 tanesi erkek, 16 tanesi kızdır. Erkeklerin 8 tanesi, kızların 7 tanesi gözlüklüdür.

Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin gözlüksüz olduğu bilindiğine göre, kız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{13}{25}$ B) $\frac{11}{25}$ C) $\frac{9}{25}$ D) $\frac{8}{25}$ E) $\frac{6}{25}$

7. $A = \{ x : |x - 2| < 3, x \in \mathbb{Z} \}$
 $B = \{ y : |2y - 1| < 4, y \in \mathbb{Z} \}$

kümeleri veriliyor.

B kümesi içerisinde alınan bir elemanın A kümesine ait olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

8. Bir torbada 3 siyah, 4 beyaz bilye vardır. Torbadan geri konmamak şartıyla 4 bilye çekiliyor.

Art arda çekilen bilyelerin farklı renkte olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{35}$ B) $\frac{2}{21}$ C) $\frac{6}{35}$ D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{7}$

9. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

kümesinin elemanları ile oluşturulan rakamları farklı üç basamaklı sayılardan birisi seçiliyor.

Seçilen bu sayının çift sayı olması veya 4 rakamını içermesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{9}{10}$

10. Evli altı çiftin bulunduğu bir gruptan rastgele seçilen üç kişiden ikisinin karı-koca olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{8}$

11. $\binom{n}{n-4} + \binom{n}{n-5} = \binom{n+1}{8}$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

12. Birinci torbada 3 kırmızı, 2 siyah, ikinci torbada 2 kırmızı, 1 siyah, 2 yeşil top vardır. Birinci torbadan bir top çekilip ikinci torbaya atılıyor ve daha sonra ikinci torbadan bir top çekiliyor.

2. torbadan çekilen topun siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{30}$ D) $\frac{11}{30}$ E) $\frac{13}{30}$

13. Bir torbada 1 den 8 e kadar numaralandırılmış 8 top vardır. Bu torbadan, aynı anda 4 top çekiliyor.

Çekilen topların üzerinde yazılı olan en küçük sayının 2 olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{35}$ B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{6}{35}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{2}{7}$

14. Yarıçapı 3 birim olan daire biçimindeki bir levhanın içine, alanı en büyük olacak şekilde bir kare çiziliyor.

Daire biçimindeki bu levha içinde alınan herhangi bir noktanın karenin dışında kalma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{\pi-2}{\pi}$ B) $\frac{3\pi}{22}$ C) $\frac{3\pi}{17}$
D) $\frac{\pi+2}{2\pi}$ E) $\frac{\pi}{2\pi+1}$

15. Bir çift zar ile bir madeni para birlikte atılıyor.

Zarlardan en az birinin 5 geldiği bilindiğine göre, zarların üst yüzüne gelen sayılar toplamı 7 veya paranın yazı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{19}{36}$ B) $\frac{17}{28}$ C) $\frac{13}{20}$ D) $\frac{13}{22}$ E) $\frac{11}{30}$

16. İçinde 3 mavi, 4 kırmızı top bulunan bir torbadan aynı anda ve rastgele çekilen üç top-
tan sadece ikisinin aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{13}{35}$ B) $\frac{17}{35}$ C) $\frac{23}{35}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

17. Ali'nin iki aşamalı bir sınavla üniversiteyi kazanma olasılığı $\frac{3}{8}$ dir. Ali'nin birinci aşamayı geçme olasılığı $\frac{3}{4}$ dir.

Ali'nin ikinci aşamayı geçme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{8}{9}$

18. $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 3x + 7$ ve

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ olmak üzere,

$f(A)$ kümesinden rastgele seçilen bir elemanın çift sayı olma ihtimali kaçtır?

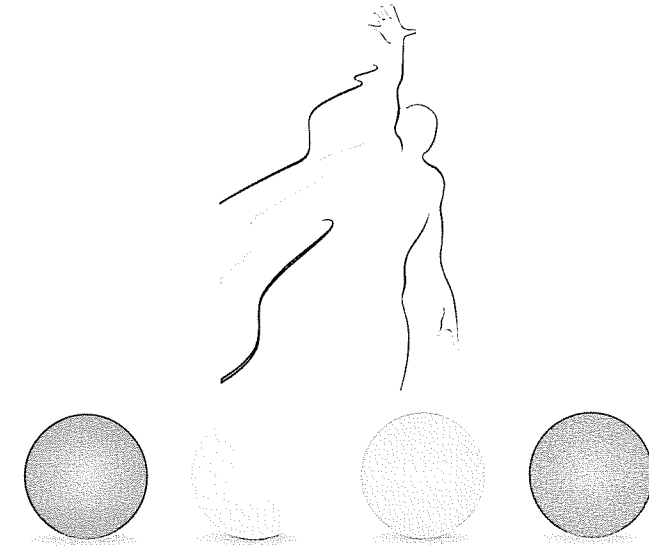
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{6}{7}$

19. A ve B aynı örnek uzayda iki olaydır.

$$P(A) = \frac{7}{12}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $P(A \cup B)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{6}$



BÖLÜM 4

İSTATİSTİK

İSTATİSTİK

Tanım

Bir amaç için, toplanan verileri işleyen (tasnif eden, yorumlayan, genelleyen) bilimin adı istatistiktir.

Günümüzde hemen hemen bütün sektörler performansın ölçülmesi, karar alternatiflerinin değerlendirilmesi vb. konularda istatistikten yararlanır.

İstatistiksel veriler, tablolar halinde düzenlenirse, grafiklerle gösterilirse ve istatistiksel ölçülerle değerlendirilirse daha anlaşılır bir hale gelir.

Bilgi

Verileri tablo halinde göstermek değerlendirmeyi kolaylaştırır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir gruba, yeme alışkanlıklarını ölçmek için bir anket uygulanıyor.

Ankette,

- 1) Ne sıklıkla fast food yiyecekler tüketiyorsunuz?
- 2) Ne sıklıkla sebze yemeği yiyorsunuz?
- 3) Ne sıklıkla asitli içecekler tüketiyorsunuz?
- 4) Ne sıklıkla süt içiyorsunuz?

sorularına;

A) Sık sık B) Ara sıra C) Nadiren

cevaplarından biri verilmesi isteniyor.

1. Kişi: Sık sık, Ara sıra, Ara sıra, Nadiren
 2. Kişi: Sık sık, Ara sıra, Sık sık, Nadiren
 3. Kişi: Sık sık, Ara sıra, Sık sık, Nadiren
 4. Kişi: Sık sık, Ara sıra, Sık sık, Nadiren
 5. Kişi: Nadiren, Sık sık, Ara sıra, Nadiren
- cevaplarını veriyor.

Bu cevapları tabloyla göstererek anket sonuçlarını değerlendirelim.

Çözüm:

	1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru
1. Kişi	A	B	B	C
2. Kişi	A	B	A	C
3. Kişi	A	B	A	C
4. Kişi	A	B	A	C
5. Kişi	C	A	B	C

Verilen cevaplara göre yukarıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

Bu tabloya göre,

“Grubun % 80 i sık sık fast food yiyecekler tüketmektedir.

“Fast food yiyecek tüketenlerin % 75 i sıklıkla asitli içecek tüketiyor.”

“Grup, nadiren süt içenlerden oluşmuştur.

sonuçlarına ulaşılabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

	x gazetesi	y gazetesi	z gazetesi
A mahallesi	20	80	100
B mahallesi	10	90	80
C mahallesi	20	30	50

Yukarıdaki tabloda bir semtin A, B ve C mahallelerinde x, y ve z gazetelerinin abone sayıları verilmiştir.

Bu semtlerde herkes sadece bir gazeteye abone olduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- I. A mahallesinde gazete aboneleri içinde y gazetesinin abone oranı, % 80 dir.
- II. Üç mahallenin gazete aboneleri içinde y gazetesine abone olanların oranı $\frac{5}{12}$ dir.
- III. x gazetesine abone olanların % 20 si B mahallesindedir.

(II ve III)

GRAFİKLER

Grafikler verilerin şekil, nokta veya çizgilerle gösterilmiş şeklidir.

Grafikle göstermek verileri özet olarak görmek ve ilişkilendirmek açısından önemlidir.

Bilgi

Bir bütünün parçalarını karşılaştırmak için daire grafiği çizilir.

Daire dilimine yerleştirilecek olan bir verinin merkez açısı α ise,

$$\frac{\text{Yerleştirilecek veri}}{\text{Tüm veriler}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

orantısı sağlanmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

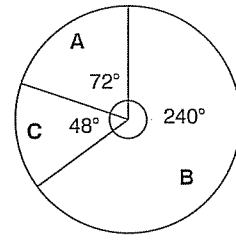
Bir kitapçıda satılan YGS hazırlık kitaplarının $\frac{1}{5}$ i A yayınevine, $\frac{2}{3}$ ü B yayınevine kalanı da C yayınevine aittir.

Bu kitapçıdaki YGS kitaplarının yayınevlerine göre dağılımını dairesel grafikte gösterelim.

Çözüm:

Kitapçıdaki toplam kitap sayısı 360 olsun. Buradan, A yayınevine ait daire diliminin açısı $360^\circ \cdot \frac{1}{5} = 72^\circ$, B yayınevine ait daire diliminin açısı $360^\circ \cdot \frac{2}{3} = 240^\circ$, C yayınevine ait daire diliminin açısı da $360^\circ - (240^\circ + 72^\circ) = 48^\circ$ olarak bulunur.

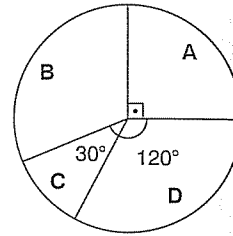
Bu verilere uygun daire grafiği,



şeklinde dir.

Örnek 2:

Yanda bir markette bir günde satılan A, B, C ve D marka dondurmaların dağılımı verilmiştir.



Bu markette satılan A marka dondurma sayısı B marka dondurma sayısından 20 adet daha az ise, bir günde kaç tane D marka dondurma satıldığını bulalım.

Çözüm:

B marka dondurmaya ait daire diliminin açısı, $360^\circ - (30^\circ + 120^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$ dir.

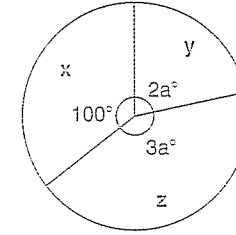
A marka dondurma sayısı, B markaninkinden 20 adet daha az ise, $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ye 20 dondurma $D \rightarrow 120^\circ$ ye x dondurma

Doğru orantı; $30x = 120 \cdot 20 \Rightarrow x = 80$ dondurma
Buradan D marka dondurma sayısı 80 bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Yandaki daire grafiği, bir karışımda bulunan x, y ve z maddelerinin ağırlıklarına göre oluşturulmuştur.

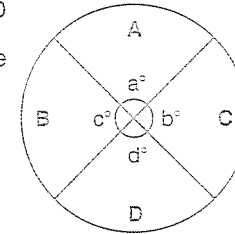


Karışımda x maddesinden 200 gr bulunduğu göre, karışımdaki z maddesinin ağırlığı y maddesinden kaç gr fazladır?

- A) 312 B) 218 C) 142 D) 118 E) 104

Soru 2:

Yanda bir ailenin A, B, C, D giderleri dairesel bir grafikte gösterilmiştir.



Giderler arasında,

$$3D = 6A = \frac{3B}{2} = 2C$$

bağıntısı olduğuna göre; a, b, c ve d merkez açıları sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- | | a | b | c | d |
|----|-----|------|------|------|
| A) | 36° | 72° | 105° | 147° |
| B) | 72° | 144° | 60° | 84° |
| C) | 36° | 144° | 108° | 72° |
| D) | 36° | 72° | 108° | 144° |
| E) | 30° | 60° | 90° | 180° |

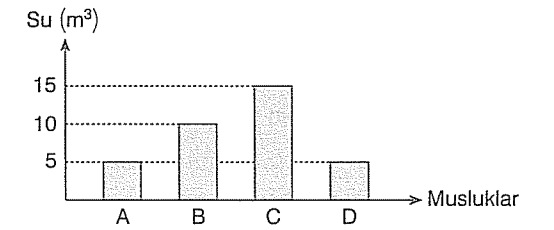
Bilgi

Sütun Grafik

Verilerin yatay eksen üzerinde sütunlarla gösterilmesiyle oluşturulan grafik sütun grafiğidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:



Yukarıdaki sütun grafikte A, B, C ve D muslukları birlikte boş bir havuzu doldurdıklarında muslukların her birinin havuza akıttıkları su miktarları gösterilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) B musluğu havuzun $\frac{1}{7}$ sini doldurmuştur.
B) A ve D musluklarından akan su miktarı toplam 5 m^3 tür.
C) Havuza akan toplam su miktarı 30 m^3 tür.
D) A ve B musluklarının akıttığı toplam su miktarı, C musluğundan akan su miktarına eşittir.
E) Havuzdaki suyun $\frac{3}{5}$ i C musluğundan akmıştır.

Çözüm:

A musluğundan 5 m^3
B musluğundan 10 m^3
C musluğundan 15 m^3
D musluğundan 5 m^3 su akmıştır.

Buna göre,

B musluğu havuzun $\frac{10}{5 + 10 + 15 + 5} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$ sini doldurmuştur.

A ve D musluklarından akan su miktarı toplamı 10 m^3 tür.

Havuzda akan toplam su miktarı 35 m^3 tür.

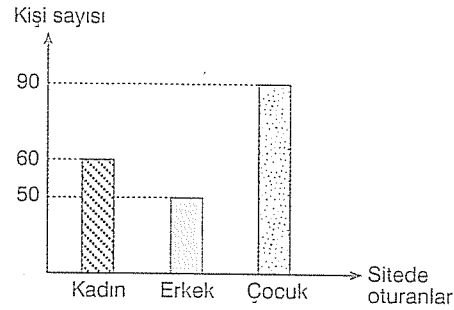
A ve B musluklarının akıttıkları toplam su miktarı 15 m^3 olup C musluğundan akan su miktarına eşittir.

Havuzdaki suyun $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ si C musluğundan akmıştır.

Buradan D seçeneğinin doğru olduğu görülür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

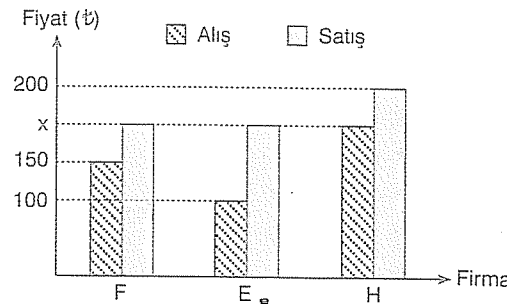


Yukarıdaki sütun grafikte, bir sitede oturanların dağılımları verilmiştir.

Bu dağılım dairesel grafikte gösterilirse kadın, erkek ve çocuklara düşen daire dilimlerinin açıları sırasıyla kaç derece olur?

(108°, 90°, 162°)

Soru 2:

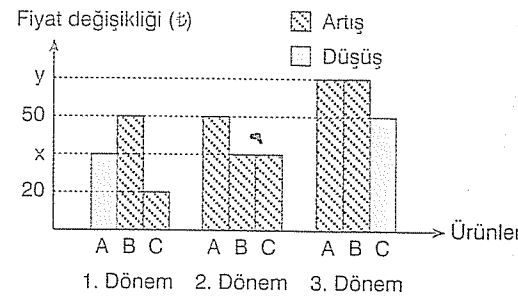


Yukarıdaki sütun grafikte, F, E, H firmalarının aynı ürünü alış ve satış fiyatları verilmiştir.

F firması bu ürünün satışından %20 kâr elde ettiğine göre, E ve H firmalarının bu ürünün satışında elde ettikleri kârların toplamı kaç ₺'dir?

A) 40 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

Soru 3:



Yukarıdaki grafik, başlangıçtaki satış fiyatları sırasıyla 100 ₺, 150 ₺ ve 200 ₺ olan A, B ve C ürünlerinin satış fiyatlarında üç dönemde yapılan değişiklikleri göstermektedir.

Üç dönem sonunda A ürününün satış fiyatı 220 ₺, C ürününün fiyatı satış 200 ₺ olduğuna göre, B ürününün üç dönem sonunda satış fiyatı kaç ₺ olur?

A) 220 B) 250 C) 280 D) 330 E) 360

Bilgi

Histogram

Veri sayısının fazla olması durumunda verilerin gruplandırılarak grafiğe yerleştirilmesi kolaylık sağlar. Gruplandırılmış verilerle oluşturulan sütun grafiğe **histogram** denir.

Histogram oluşturulurken,

- En büyük veri ile en küçük veri arasındaki fark (**veri grubunun açıklığı**) bulunur.
- Bulunan fark oluşturulmak istenen grup sayısına bölünür.
- Bulunan sayının bir üstündeki tam sayı grup genişliği olarak alınabilir.
- Bu gruplar sütun grafiğe yerleştirilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir derse ait bir sınavdan 15 öğrencinin aldığı notlar aşağıda verilmiştir.

30, 30, 35, 40, 40, 45, 45, 50, 60, 60, 65, 70, 70, 75, 78

Bu verilerle 4 gruptan oluşan bir histogram oluşturalım.

Çözüm:

En büyük veri: 78

En küçük veri: 30

olup fark $78 - 30 = 48$ dir.

Veriler 4 gruba ayrılacağı için;

$$\frac{48}{4} = 12$$

12 sayısının bir üstündeki tam sayı 13 olduğundan veri grubunun genişliği 13 tür.

Buna göre gruplar,

30-42, 43-55, 56-68, 69-78

şeklinde dir.

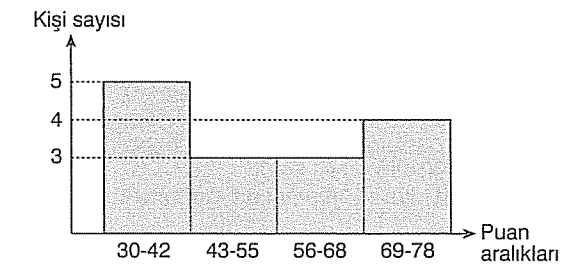
30-42 grubunda 5 veri

43-55 grubunda 3 veri

56-68 grubunda 3 veri

69-78 grubunda 4 veri vardır.

Çizilecek histogram;



şeklinde dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Bir grupta bulunan kişilerin bildikleri İngilizce kelime sayıları aşağıdaki gibidir.

5, 10, 15, 18, 25, 30, 36, 40
45, 48, 50, 50, 65, 67, 70, 90

Bu veriler 5 gruptan oluşan bir histograma yerleştirildiğinde 65 kelime bilen kişinin bulunduğu grup kaç kişiden oluşur?

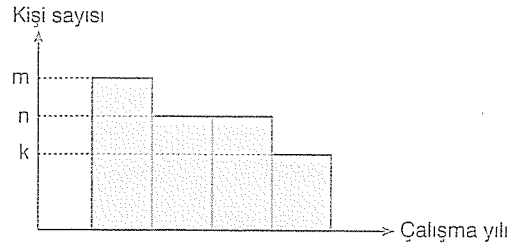
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

Bir işyerinde çalışan 8 personelin işyerindeki çalışma süreleri yıl olarak

6, 8, 8, 10, 11, 12, 14, 16

şeklindedir. Bu verilerle oluşturulan histogram



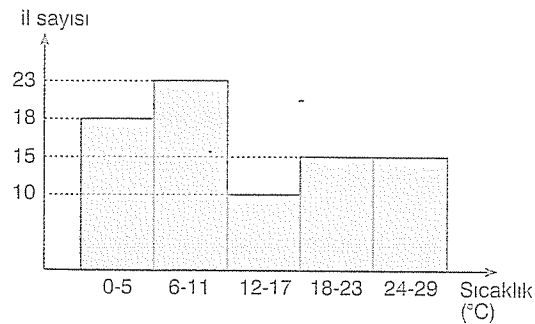
olduğuna göre,

- I. n değeri 2 dir.
- II. Grubun veri genişliği 3 tür.
- III. Histogramda 16 yıl çalışan personelin bulunduğu grupta 2 kişi vardır.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

Soru 3:



Yukarıdaki histogramda 81 ilin Mart ayındaki hava sıcaklıkları gruplandırılmıştır.

Buna göre;

- a) Bu veri grubunun açıklığı kaçtır?
- b) En düşük sıcaklık grubunda kaç il vardır?
- c) Kaç grup vardır?
- d) Grup genişliği kaçtır?

(29, 18, 5, 6)

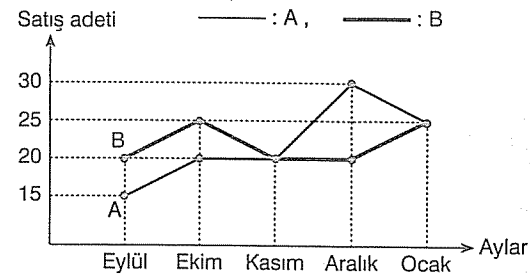
Bilgi

Çizgi Grafik

Çizgi grafik, verilerin zamana karşı değişimini göstermek için uygun bir grafik türüdür.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:



Yukarıda çizgi grafikte otomobil satışı yapan A ve B şirketlerinin beş aylık satış miktarları verilmiştir.

Bu grafiğe bakarak A ve B şirketlerinin satışlarını inceleyelim.

Çözüm:

Ekim ayında her iki şirketin önceki aya göre satışları artmıştır.
Kasım ve Ocak aylarında her iki şirketin satış miktarları aynıdır.
A şirketi en çok otomobili Aralık ayında satarken, B şirketi Ekim ve Ocak aylarında satmıştır.

Örnek 2:

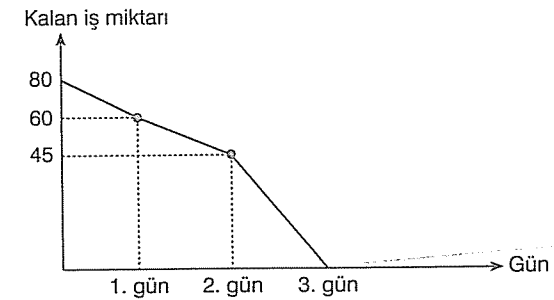
Bir işçi 80 m² lik bir duvarın $\frac{1}{4}$ ünü 1. gün, kalanın $\frac{1}{4}$ ünü 2. gün en son kalanı da 3. gün boyayarak bitiriyor.

Bu işçinin her günün sonunda kalan iş miktarını çizgi grafikle gösterelim.

Çözüm:

1. gün $80 \cdot \frac{1}{4} = 20 \text{ m}^2$ boyar.
 $80 - 20 = 60 \text{ m}^2$ boyanmamış duvar kalır.
2. gün $60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ m}^2$ boyar.
 $60 - 15 = 45 \text{ m}^2$ boyanmamış duvar kalır.
3. gün 45 m² yi boyar.

Buna göre, grafik



şeklindedir.

Örnek 3:

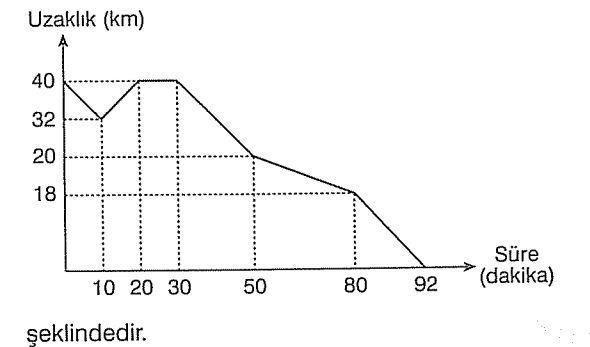
Ahmet evinden 40 km uzaklıkta bulunan işine gitmek için arabasıyla 48 km/sa hızla yola çıkıyor ve 10 dakika sonra evde çantasını unuttuğunu fark edip aynı hızla evine geri dönüyor. Evde 10 dk oyalandıktan sonra 60 km/sa hızla tekrar yola çıkıyor. Yolum yarısına gelince trafikten dolayı 30 dakikada 2 km yol gidiyor. Kalan yolu 90 km/sa hızla tamamlıyor.

Bu bilgiye göre, Ahmet'in işine olan uzaklığını gösteren yol - zaman grafiğini çizelim.

Çözüm:

Ahmet, arabasıyla 10 dk = $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ saatte 48 km/sa hızla, $48 \cdot \frac{1}{6} = 8 \text{ km}$ yol gider.
Çantasını unuttuğunu farkedince aynı hızla 10 dakikada evine geri döner. 10 dk oyalandıktan sonra evden çıkana kadar toplam 30 dk geçmiştir.
Yolum yarısına kadar yani 20 km yi 60 km/sa hızla $\frac{20}{60} \text{ saat} = \frac{1}{3} \text{ saat} = \frac{1}{3} \cdot 60 \text{ dk} = 20 \text{ dakikada}$ gider.
Trafikten dolayı 30 dakikada 2 km yol gider ve kalan 18 km yolu 90 km/sa hızla $\frac{18}{90} \text{ saat} = \frac{1}{5} \text{ saat} = \frac{1}{5} \cdot 60 \text{ dk} = 12 \text{ dakikada}$ gider.

Grafik;



şeklindedir.

■ Bilgi

- 1) Aritmetik ortalama veri grubuna veri eklenmesi veya çıkarılmasından, veri grubundaki sayıların büyüklüklerinden etkilenen duyarlı bir ortalama değildir.
- 2) Veri grubundaki tüm terimlerin kullanıldığı bir ortalama değildir. Veri grubundaki terimlerin merkez noktasıdır.
- 3) Bir veri grubunda uç değerler (en büyük ve en küçük değer) arasındaki fark çok büyük değilse, aritmetik ortalama veri grubu hakkında doğru bir değerlendirme yapmaya imkan sağlar.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

20 kişilik bir sınıfta türkçe dersinin 1. sınavından; 6 öğrenci 65, 4 öğrenci 45, 2 öğrenci 70, 8 öğrenci 60 puan almıştır.

Buna göre, bu sınıfın türkçe dersinin 1. sınavındaki not ortalamasını bulalım.

Çözüm:

Tüm öğrencilerin aldıkları notların toplamı;

$$60.6 + 45.4 + 70.2 + 60.8 = 1190 \text{ ve}$$

Öğrenci sayısı; 20 olduğundan

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{\text{Notların Toplamı}}{\text{Öğrenci Sayısı}} = \frac{1190}{20}$$

$$= 59,5$$

bulunur.

Örnek 2:

15 kişilik bir grubun yaş ortalaması 25 tir.

Bu gruptaki en küçük 3 kişinin yaş ortalaması 20, en büyük 5 kişinin yaş ortalaması 35 olduğuna göre, gruptaki diğer kişilerin yaşlarının ortalamasını bulalım.

Çözüm:

En küçük 3 kişinin yaş ortalaması 20 ise yaşları toplamı $3.20 = 60$ tir.

En büyük 5 kişinin yaş ortalaması 35 ise yaşları toplamı $5.35 = 175$ tir. Diğerlerinin yaşları toplamı x olsun. 15 kişinin yaş ortalaması 25 ise,

$$\frac{60 + 175 + x}{15} = 25$$

$$\Rightarrow 235 + x = 375$$

$$\Rightarrow x = 140 \text{ tir.}$$

Buna göre, yaşları toplamı 140 olan kalan 7 kişinin yaşlarının ortalaması,

$$\frac{140}{7} = 20 \text{ dir.}$$

Örnek 3:

Fatih girdiği üç sınavdan 60, 65 ve 75 puan almıştır.

İki sınava daha girecek olan Fatih'in beş sınavdaki not ortalamasının en az 70 olabilmesi için son iki sınavının ortalamasının en az kaç olması gerektiğini bulalım.

Çözüm:

Fatih'in son iki sınavda alması gereken notları x ve y ile gösterelim.

$$\text{Not ortalaması} = \frac{60 + 65 + 75 + x + y}{5}$$

$$70 \leq \frac{200 + x + y}{5}$$

$$350 \leq 200 + x + y$$

$$150 \leq x + y \text{ olur.}$$

O halde son iki sınavda alması gereken notların toplamı en az 150 olduğundan son iki sınavın not ortalaması en az $\frac{150}{2} = 75$ olmalıdır.

Örnek 4:

Bir dershanedeki F, E ve M sınıflarındaki öğrencilerin yaş ortalaması sırasıyla 12, 16, 19 dur.

F ile E sınıflarındaki öğrencilerin yaş ortalaması 14, E ile M sınıflarındakilerin yaş ortalaması 17 olduğuna göre, bu üç sınıfın yaş ortalamasını bulalım.

Çözüm:

Sorunun çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki eşitliği öncelikle inceleyelim.

A grubunun ortalaması : a

B grubunun ortalaması : b

A ile B nin ortalaması : c ise

$$|c - a| \cdot s(A) = |c - b| \cdot s(B)$$

şeklinde bir eşitlik yazılabilir.

O halde F ile E sınıflarının yaş ortalaması sırasıyla 12 ile 16 ve bu iki sınıfın ortalaması 14 olduğundan

$$|14 - 12| \cdot s(F) = |14 - 16| \cdot s(E) \\ s(F) = s(E) \text{ olur.}$$

Yani F ve E sınıflarının öğrenci sayıları eşittir.

E ile M sınıflarının yaş ortalaması sırasıyla 16 ile 19 ve bu iki sınıfın yaş ortalaması 17 olduğundan

$$|17 - 16| \cdot s(E) = |17 - 19| \cdot s(M) \\ s(E) = 2 \cdot s(M) \text{ olur.}$$

E sınıfının öğrenci sayısı, M sınıfının öğrenci sayısının 2 katıdır.

Buna göre, F, E, M sınıflarının öğrenci sayılarına sırasıyla $2x, 2x, x$ denilirse üç sınıfın yaş ortalaması

$$\frac{12.2x + 16.2x + 19.x}{5x} = 15 \text{ bulunur.}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

15 öğrencinin A dersinden oldukları bir sınavın puan ortalaması 55 tir.

Bu öğrencilerden üçünün sınav ortalaması 50 puan olduğuna göre, diğerlerinin sınav ortalaması kaçtır?

A) 55,25 B) 55,75 C) 56

D) 56,25 E) 56,5

Soru 2:

10 tane sayının ortalaması 120 dir. Bu sayılara biri diğerinin $\frac{1}{3}$ ü olan 2 sayı daha eklenirse, ortalama 130 oluyor.

Buna göre, eklenen sayılardan büyük olanı kaçtır?

- A) 90 B) 180 C) 270 D) 360 E) 450

b. Medyan

Küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir veri grubunda tam ortadaki sayı **ortanca (medyan)** dir.

Veri grubundaki terim sayısı tekse tam ortadaki sayı, çiftse ortadaki iki sayının aritmetik ortalaması medyandır.

Bilgi

- Medyan, veri grubunu eşit iki gruba ayırır.
- Medyan, veri grubundaki sayıların büyüklüklerinden etkilenmez.
- Veri grubunda uç değerler (en büyük ve en küçük değer) arasındaki fark çok büyük olduğunda medyan, aritmetik ortalamaya göre daha doğru bir değerlendirmeye imkan sağlar.
- Medyan, veri grubunun elemanı olmayabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

10, 8, 6, 15, 24, 18, 20

sayı dizisinin medyanını bulalım.

Çözüm:

Sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

6, 8, 10, 15, 18, 20, 24

↓
ortadaki terim

Terim sayısı 7, tek olduğundan ortadaki sayı medyanı verir.

Bu dizinin medyanı 15 tir.

Örnek 2:

28, 36, 36, 38, 40, 42, 50, 100

sayı dizisinin medyanını bulalım.

Çözüm:

Terimler sıralı olarak verilmiştir.

Terim sayısı çift olduğundan ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması olan $\frac{38 + 40}{2} = \frac{78}{2} = 39$ sayısı medyandır.

Burada medyan değeri 39'un sayı dizisinin elemanı olmadığına dikkat ediniz.

Örnek 3:

Madde Sayısı	Kaynama Noktası °C
3	100
5	96
4	90
4	120

Yukarıdaki tablo bir kimya laboratuvarında incelenen maddelerin kaynama noktalarına göre dağılımını göstermektedir.

Bu 16 maddenin kaynama noktalarından oluşturulan veri grubuna ait herhangi bir maddenin kaynama noktası, bu veri grubunun medyanı ile aritmetik ortalaması arasında ise bu madde "ideal bir madde" sayılacağına göre, bu grupta kaç tane ideal madde olduğunu bulalım.

Çözüm:

Bu veri grubunu

90, 90, 90, 90, 96, 96, 96, 96, 96, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120

şeklinde sıralayalım.

Terim sayısı 16 olup medyan ortadaki 8. ve 9. terimlerin ortalaması olan $\frac{96 + 96}{2} = 96$ dir.

$$A.O = \frac{4.90 + 5.96 + 3.100 + 4.120}{16} = 101,25$$

Kaynama noktası 96 ile 101,25 arasında olan yani 100 olan 3 madde ideal maddedir.

Örnek 4:

a > 5 olmak üzere,

3, 5, 1, 8, a, 13 sayı dizisinin medyanı 6 olduğuna göre, a yı bulalım.

Çözüm:

Sayıları küçükten büyüğe sıralamalıyız.

a nın değeri 5 ten büyük ve sayı dizisinin medyanı 6 olduğundan a sayısı 5 ile 8 arasında olmalıdır.

1, 3, 5, a, 8, 13 şeklinde dizilirse terim sayısı çift olduğundan medyan $\frac{5 + a}{2}$ dir.

$$\frac{5 + a}{2} = 6 \Rightarrow a = 7 \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

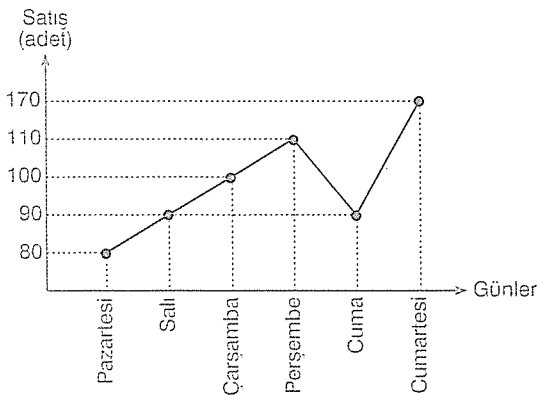
Soru 1:

Aşağıdaki sayı dizilerinin medyanlarını bulunuz.

- I. -3, -5, -5, -3, -3
 II. -4, -3, -2, 0, 1, 2
 III. 2^5 , 2^5 , 2^5 , 0, 2^5 , 2^5
 IV. -100, -10, 10, 100

(-3, -1, 2^5 , 0)

Soru 2:



Yukarıda bir mağazanın 6 gün boyunca sattığı ürünlerin adetleri gösterilmiştir.

Satış adetlerinden oluşan veri grubunun medyanı ile aritmetik ortalaması arasında olan satışın yapıldığı gün halk günü seçilecektir.

Buna göre, halk günü hangi gün olarak belirlenir?

- A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba
 D) Perşembe E) Cuma

Soru 3:

$$x, x, x + 6, x + 4, x + 6, x + 2, x + 3$$

sayı dizisinin aritmetik ortalaması 17 olduğuna göre, medyanı kaçtır?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 19

Soru 4:

5 ile tam bölünebilen iki basamaklı tüm doğal sayıların

- Her birinin birer kez bulunduğu bir veri grubunun medyanı x
- Çift olanlarının ikişer, diğerlerin birer kez bulunduğu bir veri grubunun medyanı y

olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?

- A) 85 B) 87,5 C) 95 D) 102,5 E) 105

Soru 5:

a pozitif tam sayıdır.

$$[-a + 10, 3a + 20]$$

aralığındaki tüm tamsayılar kullanılarak oluşturulan sayı dizisinin medyanı $a^2 + 3$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

c. Mod (Tepe Değer)

Bir veri grubunda en çok tekrar eden sayı **mod (tepe değer)** olarak adlandırılır. Veri grubundaki verilerin tekrar sayısına **frekans** da denilir.

Bilgi

- Veri grubunda en çok tekrar eden sayı birden fazla ise bu sayıların herbiri mod olarak alınır. Yani mod birden fazla olabilir.
- Veri grubunda tekrar eden sayı yoksa modu da yoktur.
- Veri grubundaki tüm terimler eşit sayıda tekrar ediyorsa mod yoktur.
- Mod veri grubundaki sayıların büyüklüklerinden etkilenmez.
- Mod, bir veri grubunun en belirgin özelliğini ortaya çıkarır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

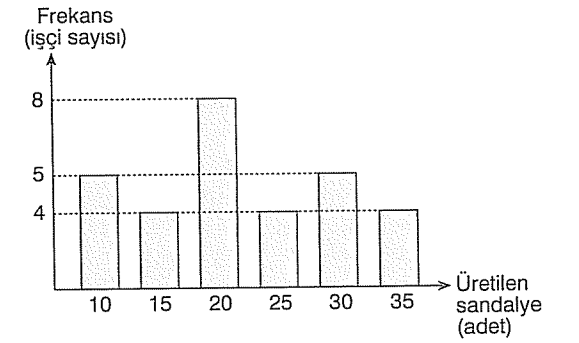
Aşağıdaki dizilerin modlarını bulalım.

- I. 1, 3, 3, 13, 13, 15, 3, 15, 13
 II. 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 10, 10, 10, 10
 III. -2, -1, 0, 1, 2, 3
 IV. 1, 1, 10, 10, 100, 100

Çözüm:

- I. En fazla tekrar eden sayılar üçer tekrarla 3 ve 13 olduğundan mod 3 ve 13 tür.
 II. En çok tekrar eden sayı 3 olduğundan mod 3 tür.
 III. Tekrar eden sayı olmadığından mod yoktur.
 IV. Verilerin hepsi ikişer kez eşit sayıda tekrar ettiğinden mod yoktur.

Örnek 2:



Bir fabrikada çalışan işçilerin günlük ürettikleri sandalye sayılarının dağılımı yukarıdaki gibidir.

Üretim sayılarından veri grubu oluşturuluyor ve modun üzerinde üretim yapan işçilere ek ücret veriliyor.

Buna göre, kaç işçiye ek ücret verildiğini bulalım.

Çözüm:

Grafiğe göre en çok tekrar sayısı (frekans) 8 dir. Buna göre mod, bu frekansa ait üretim sayısı olan 20 olur.

8 işçi günlük 20 şer adet sandalye ürettiğine göre, günde 20 adedin üstünde sandalye üreten işçiler ek ücret alacaktır.

4 işçi → 25 er adet

5 işçi → 30 ar adet

4 işçi → 35 er adet ürettiğine göre,

ek ücret alacak olan işçi sayısı $4 + 5 + 4 = 13$ tür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdaki veri gruplarının modlarını, varsa bulunuz.

- I. 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10
 II. 15, 5, 15, 5, 15, 5
 III. 14, 15, 15, 18, 10, 10, 21, 20, 10, 15
 IV. -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5
 (Yok, Yok, 10 ve 15, Yok)

Soru 2:

Netler	20	50	40	30	55
Öğrenci Sayısı	2	5	8	3	2

Yukarıda bir sınıfın YGS denemesindeki sayısal net-leri gösterilmiştir.

Netlerden oluşan veri grubunda modun altında olan öğrencilerin ortak çalışma yapması gerek-tiğine göre, kaç öğrenci bu kategoridedir?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 10 E) 11

Soru 3:

- I. Bir mağazada en çok satılan ürün
 II. Bir sınavda en çok cevaplanan soru
 III. Bir sınıfın bir sınavdaki başarı düzeyi

Yukarıda verilen durumların hangileri hakkında en iyi fikri mod verir?

(I ve II)

2. MERKEZİ YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Merkezi eğilim ölçülerinin grup ortalamasının ne kadar altında ya da üstünde olduğunu tespit eden ölçülere merkezi yayılım ölçüleri denir.

Merkezi yayılım ölçüleri açıklık ve çeyrekler açıklığı, standart sapmadır.

a. Açıklık (Aralık, Ranj)

Bir veri grubunda en büyük değer ile en küçük de-ğer arasındaki farktır.

Medyanın alt ve üst diye iki gruba ayırdığı veri gru-bunda alt grubun ortancasına "alt çeyrek" üst gru-bun ortancasına "üst çeyrek" denir. Üst çeyrek ile alt çeyrek arasındaki fark "çeyrekler açıklığı"dır.

Bilgi

- Açıklığı fazla olan veri grubunda terimler daha geniş alana yayılmıştır.
- Çeyrekler açıklığı veri grubunun ortasında yer alan %50 ilk kısım hakkında bilgi verir.
- Çeyrekler açıklığı uçlarda yer alan verilerden daha az etkilendiği için, verilerin yayılımı ile ilgi-li açıklıktan daha net bilgi verir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Frekans	3	2	2	3	2
Veri	10	12	14	15	19

Tablodaki veri grubunun açıklığını, alt ve üst grubunu, alt çeyrek ve üst çeyreğini, çeyrekler açıklığını bulalım.

Cözüm:

Veri grubunun açılımı,

10, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 15, 15, 15, 19, 19
 şeklinde olup,

Açıklık: $19 - 10 = 9$

Ortanca: $\frac{14 + 14}{2} = 14$

Alt grup: 10, 10, 10, 12, 12, 14

Alt çeyrek: $\frac{10 + 12}{2} = 11$

Üst grup: 14, 15, 15, 15, 19, 19

Üst çeyrek: $\frac{15 + 15}{2} = 15$

Çeyrekler Açıklığı:

Üst çeyrek - Alt çeyrek = $15 - 11 = 4$ tür.

Örnek 2:

A, A + 3, A + 4, 2A, 2A + 7, 2A + 10

küçükten büyüğe sıralı şekilde verilen yukarıda-ki sayı dizisinin çeyrekler açıklığı 9 olduğuna göre, açıklığını bulalım.

Cözüm:

Alt grup	Üst grup
A, A + 3, A + 4	2A, 2A + 7, 2A + 10
↓	↓
Alt çeyrek	Üst çeyrek

Çeyrekler açıklığı, $(2A + 7) - (A + 3) = A + 4$ tür.

$A + 4 = 9 \Rightarrow A = 5$ tir.

Açıklık, $(2A + 10) - A = A + 10 = 5 + 10 = 15$ tir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 9, 7, 5, 3, 1

veri grubunun

- I. Alt grubunu
 II. Üst grubunu
 III. Alt çeyreğini
 IV. Üst çeyreğini
 V. Açıklığını
 VI. Çeyrekler açıklığını

bulunuz.

(I. 1, 1, 3, 3, 5; II. 7, 7, 9, 9, 11;
 III. 3; IV. 9; V. 10; VI. 6)

Soru 2:

n, n - 2, n - 3, 2n - 14, 2n - 15, 2n - 30

şeklinde büyükten küçüğe doğru verilmiş sayı dizi-sinin çeyrekler açıklığı 3 tür.

Buna göre, açıklık kaçtır?

- A) 40 B) 30 C) 20 D) 15 E) 10

Soru 3:

x reel sayı olmak üzere,

x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x

sayı dizisinin çeyrekler açıklığının alabileceği de-ğerler çarpımı $8x - 1$ olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) $-\frac{8}{9}$ B) $-\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{2}$

Bilgi

Kutu Grafiği

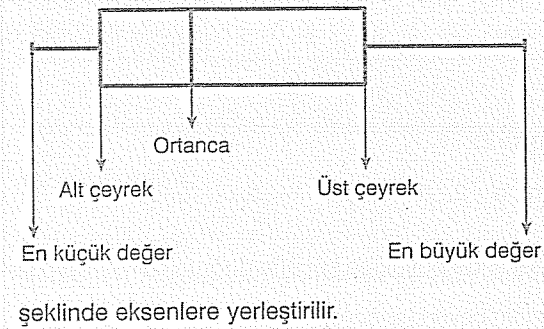
Bir veri grubunda çok fazla veri olması durumunda grafik çizmeyi kolaylaştırmak için bu veri grubundan elde edilen beş verili özetleme tablosu ile grafik çizilir. Bu grafiğe **kutu grafiği** denir.

5 verili özetleme tablosu

Ortanca
Alt çeyrek Üst çeyrek
En küçük değer En büyük değer

şeklinde.

Grafik,



Uyarı:

- Kutu grafiğinde sadece beş veri gösterilir, grubun diğer verileri gösterilmez.
- Bu beş verinin oluşturduğu dört aralıkta grubun diğer verileri birbirlerine eşit sayıdadır.
- Ortanca, alt çeyrek ve üst çeyrek; veri grubuna ait birer veri olabileceği gibi olmayabilir de.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

20, 25, 30, 30, 35, 45, 50, 50, 50, 55, 60
60, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 80

Yukarıdaki veriler bir spor salonuna gelen 21 kişinin salonda geçirdikleri süreleri dakika cinsinden göstermektedir.

Bu verilere ait kutu grafiğini çizelim.

Çözüm:

Ortanca, 11. terim olan 60 tır.

Alt çeyrek ilk 10 verinin ortancası olan

$$\frac{35 + 45}{2} = 40$$

Üst çeyrek son 10 verinin ortancası olan

$$\frac{70 + 70}{2} = 70 \text{ tir.}$$

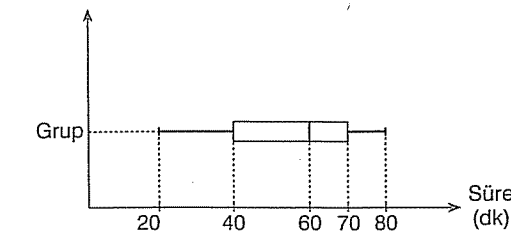
En büyük değer = 80

En küçük değer = 20

olduğundan 5 verili özetleme tablosu

60
40 70
20 80

şeklinde. Buna göre grafik



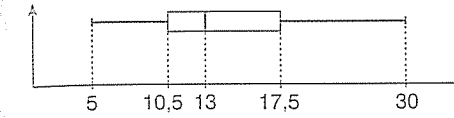
şeklinde.

Bilgi Uygulama

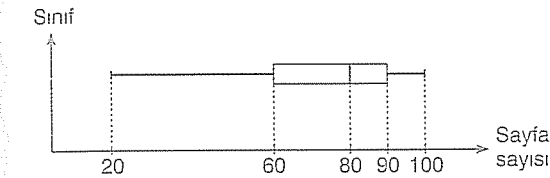
Soru 1:

8, 8, 7, 5, 12, 10, 11, 11, 13, 12, 15, 20
22, 24, 22, 12, 13, 13, 15, 15, 30

Yukarıdaki veri grubunun kutu grafiğini çiziniz.



Soru 2:



Yukarıdaki kutu grafik bir sınıftaki öğrencilerin bir haftada okudukları sayfa sayılarından oluşan bir veri grubunun değerlendirmesi sonucu çizilmiştir. Sınıfta her öğrencinin okuduğu sayfa sayısı birbirlerinden farklı ve 80 sayfanın üzerinde okuyan 16 öğrenci vardır.

Buna göre,

- Okunan sayfa sayıları 60 ve üzerinde yoğunlaşmıştır.
- 80 sayfa altında okuyan 16 öğrenci vardır.
- Okunan sayfa sayılarının çeyrekler açıklığı 20 dir.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III
D) I ve III E) I, II ve III

b. STANDART SAPMA

Bilgi

Standart sapma, bir veri grubundaki her bir verinin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığını gösteren bir merkezi yayılım ölçüsüdür.

Veri grubunun standart sapması bulunurken;

- Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.
- Tüm verilerin aritmetik ortalama ile farklarının kareleri toplamı bulunur.
- Bulunan toplam, veri sayısının 1 eksiğine bölünür.
- Bölümün karekökü alınır. Elde edilen sayı standart sapmadır.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sayılarının aritmetik ortalaması a ise, bu verilerin standart sapması (S)

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{n - 1}}$$

şeklinde.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Beş öğrencinin bir sınavda aldıkları notlar

10, 20, 30, 40, 50

şeklinde.

Bu notların standart sapmasını bulalım.

Çözüm:

Notların aritmetik ortalaması;

$$\frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = 30 \text{ dur.}$$

$$S = \sqrt{\frac{(10 - 30)^2 + (20 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (40 - 30)^2 + (50 - 30)^2}{5 - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{400 + 100 + 0 + 100 + 400}{4}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1000}{4}} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

a, b, c, d sayılarının standart sapması 10 olduğuna göre, 3a, 3b, 3c, 3d sayılarının standart sapmasının kaç olduğunu bulalım

Çözüm:

Bir sayı dizisinin tüm terimleri ortak bir sabit sayı ile çarpılması durumunda bu sayıların standart sapması da o ortak çarpanla çarpılarak kolaylıkla hesaplanır. Buna göre,

a, b, c, d sayılarının standart sapması 10 ise 3a, 3b, 3c, 3d sayılarının standart sapması $3 \cdot 10 = 30$ dur.

Örnek 3:

$$x, x - y, z - 4, 2x - 2$$

sayı dizisinin standart sapması sıfır olduğuna göre, $x + y + z$ toplamını bulalım.

Çözüm:

Sayı dizisinin standart sapmasının sıfır olabilmesi için tüm terimleri eşit olmalıdır. O halde

$$x = 2x - 2 = x - y = z - 4 \text{ olmalıdır.}$$

$$x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = x - y \Rightarrow y = 0$$

$$x = z - 4 \Rightarrow z = 6 \text{ olur.}$$

Buna göre, $x + y + z = 2 + 0 + 6 = 8$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$F, F + 2, F + 4$$

sayılarının standart sapması kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Soru 2:

$$12, 14, 20, 24, 30$$

sayılarının standart sapması x olduğuna göre,

$$18, 21, 30, 36, 45$$

sayılarının standart sapması aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2x$ B) $3x$ C) $\frac{3x}{2}$ D) $\frac{x}{3}$ E) $\frac{2x}{3}$

Soru 3:

a reel sayı olmak üzere,

$$a^2 - 4, 2a - 1, a + 2$$

sayı dizisinde a yerine aşağıdaki sayılardan hangisi yazılırsa bu sayıların standart sapması sıfıra eşit olur?

- A) -2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

Bilgi

- Veriler arasında açıklık arttıkça standart sapma büyür.
- Aritmetik ortalamaları eşit olan veri gruplarındaki farklılık standart sapma yardımıyla belirlenir.
- Bir veri grubunun standart sapması, veri grubunda bulunan terimlerin aritmetik ortalamasının ne kadar uzağına yayıldığını gösterir. Büyük standart sapma terimlerin ortalamadan uzağına yayıldığını, küçük standart sapma ise terimlerin ortalamasının yakınına yayıldığını gösterir.
- Standart sapma,

Küçükse	Büyükse
Risk az	Risk fazla
Veriler arası fark az	Veriler arası fark fazla
İstikrar var	İstikrar yok
Veri grubu homojen	Veri grubu heterojen
Ayırt edicilik az	Ayırt edicilik fazla

şeklinde yorumlanabilir.

NOT: Merkezi eğilim ölçüleri, etrafında yığılma eğilimi görülen değerlerdir. Merkezi yayılım ölçüleri ise bu yığılmanın derecesini anlatır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

- 1, 2, 3, 4, 5 sayılarının standart sapması A, 2, 3, 3, 3, 4 sayılarının standart sapması B, 1, 2, 2, 2, 8 sayılarının standart sapması C

olduğuna göre, A, B, C sayıları arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm:

Sayı dizileri incelendiğinde üç sayı dizisinin de aritmetik ortalaması eşittir. Aritmetik ortalamaları eşit olan bu sayı dizilerinde, açıklığı en büyük olanın, standart sapması da en büyük olacaktır. O halde,

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{ dizisinde açıklık } 5 - 1 = 4 \text{ tür.}$$

$$2, 3, 3, 3, 4 \text{ dizisinde açıklık } 4 - 2 = 2 \text{ dir.}$$

$$1, 2, 2, 2, 8 \text{ dizisinde açıklık } 8 - 1 = 7 \text{ dir.}$$

Bu durumda

en büyük standart sapma değeri C

en küçük standart sapma değeri B dir.

Buna göre, A, B, C sayılarının sıralaması

$C > A > B$ şeklinde olacaktır.

Örnek 2:

Kavşak	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
A	7	10	2	6
B	11	5	3	6
C	3	12	4	6
D	8	9	2	6

Yukarıdaki tabloda bir şehirde araç trafiğinin yoğun olduğu dört kavşakta gerçekleşen dört aylık trafik kazalarının sayıları verilmiştir.

Bu kavşaklardan hangisinde kaza riskinin en az olduğunu tespit edelim.

Çözüm:

Kavşakların tümünde dört ayda toplam 25 kazası meydana gelmiştir.

Dolayısıyla kavşaklardaki dört aylık kaza sayısındaki ortalama eşittir.

Aritmetik ortalamanın eşit olduğu veri gruplarındaki farklılıkların anlaşılabilmesi için standart sapmadan yararlanılabilir.

Veri grubunda veriler arasında açıklık ne kadar az ise standart sapma o kadar küçüktür. Standart sapmanın küçük olması ise riskin az olması anlamına gelmektedir. Buna göre, tablo incelendiğinde veriler arasındaki açıklığın en az olduğu kavşak D dir. Yani trafik kazası riski en az olan kavşak D'dir.

Örnek 3:

Sınıf	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
M	110	4
R	130	5
H	110	6
A	130	7

Yukarıdaki tablo bir dersanedeki eşit sayıda öğrenci bulunan dört sınıfa yapılan YGS denemesi sonucunda öğrencilerin elde ettiği notlar kullanılarak oluşturulmuştur.

Bu tabloya bakılarak sınıfların başarı durumlarını yorumlayalım.

Çözüm:

Ortalaması yüksek olan sınıfın başarısı yüksektir. Buna göre, R ve A sınıfları M ve H sınıflarına göre daha başarılıdır.

Standart sapmanın küçük olması verilerin birbirine yakın olması ve veriler arasında açıklığın az olması anlamına gelmektedir. O halde,

M sınıfındaki öğrencilerin netleri, H sınıfındaki öğrencilere göre birbirine daha yakındır.

R sınıfındaki öğrencilerin netleri, A sınıfındaki öğrencilere göre birbirine daha yakındır.

M sınıfındaki öğrencilerin netlerinin açıklığı, H sınıfındaki öğrencilerin netlerinin açıklığından daha küçüktür.

R sınıfındaki öğrencilerin netlerinin açıklığı, A sınıfındaki öğrencilerin netlerinin açıklığından daha küçüktür.

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Rota	2009	2010	2011	2012
I	3	8	4	5
II	2	8	5	5
III	6	4	5	5
IV	8	3	3	6
V	1	9	4	6

Yukarıda bir seyahat gemisinin turistik gezi için kullandığı beş farklı rotada bazı yılların Mart ayında meydana gelen fırtınaların sayıları gösterilmiştir.

Mart ayında seyahate çıkacak geminin hangi rotayı izlemesi durumunda fırtınaya yakalanma riski daha azdır?

- A) I B) II C) III D) IV E) V

Soru 2:

Aşağıda verilen sayı dizilerinden hangisinde standart sapma daha büyüktür?

- ✓ A) 2, 2, 6, 8, 12
B) 4, 4, 4, 9, 9
C) 2, 5, 6, 8, 9
D) 3, 3, 6, 10, 8
E) 2, 4, 5, 9, 10

Soru 3:

Sınıf	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
A	65	3
B	70	2
C	65	7
D	80	4

Yukarıdaki tablo bir okulda mevcutları aynı olan dört sınıfa yapılan Matematik sınavı sonucunda öğrencilerin puanlarına göre oluşturulmuştur.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) B sınıfındaki öğrenciler, A sınıfına göre daha başarılıdır.
B) C sınıfındaki öğrencilerin puanlarının açıklığı A sınıfına göre daha fazladır.
C) D sınıfındaki öğrenciler, B sınıfındaki öğrencilere göre daha başarılıdır.
✓ D) B sınıfındaki öğrenciler, D sınıfındaki öğrencilere göre daha başarılıdır.
E) D sınıfı en yüksek puan ortalamasına sahip sınıftır.

STANDART PUANLAR

Farklı ölçümlerden elde edilen puanların birlikte değerlendirilmesi (farklı derslere ait puanların karşılaştırılması, öğrencinin grup içindeki başarısı vb.) için bu puanların aynı birime dönüştürülmesi gerekir. z ve T puanları bu işlemi gerçekleştiren standart puanlardır.

z puanı;

$$z = \frac{\text{Ham puan} - \text{Aritmetik ortalama}}{\text{Standart sapma}}$$

T puanı;

$$T = 10 \cdot z + 50$$

formülüyle hesaplanır.

Bilgi

- z puanı, yapılan ölçümlerden elde edilen puanların aritmetik ortalamasının 0, standart sapmasının 1 kabul edildiği puandır.
- z puanının tamsayı çıkmadığı durumlarda yorumlamayı kolaylaştırmak için z puanı T puanına çevrilir.
- Standart puanlar, ölçülen puanların ortalamadan olan farklarını standart sapma cinsinden belirler.

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

Aritmetik ortalaması 45 ve standart sapması 4 olan bir sınavda Ali 55, Veli 45, Selami 35 almıştır.

Bu öğrencilerin z ve T puanlarını bulalım.

Çözüm:

Ali'nin z puanı;

$$z = \frac{\text{Ham puan} - \text{Aritmetik ortalama}}{\text{Standart sapma}}$$

$$z = \frac{55 - 45}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ ve}$$

$$T = 10 \cdot z + 50 = 10 \cdot 2,5 + 50 = 75$$

Veli'nin z puanı;

$$z = \frac{45 - 45}{4} = 0 \text{ ve}$$

$$T = 10z + 50 = 10 \cdot 0 + 50 = 50$$

Selami'nin z puanı;

$$z = \frac{35 - 45}{4} = -\frac{10}{4} = -2,5 \text{ ve}$$

$$T = 10z + 50 = 10 \cdot (-2,5) + 50 = 25 \text{ tir.}$$

Örnek 2:

	z puanı	T puanı
A	-1,20	m
B	n	42
C	0	y

Yukarıda bir öğrencinin A, B ve C derslerinden yapılan sınavların sonuçlarına göre, z ve T puanlarından bazıları verilmiştir.

Buna göre, n, m ve y yi bulup bu öğrencinin bu derslerdeki başarı durumlarını yorumlayalım.

Çözüm:

A dersinin sınav sonuçlarına göre z puanı -1,20 ise

$$T = 10z + 50 \Rightarrow m = 10 \cdot (-1,20) + 50$$

$$m = 38 \text{ dir.}$$

B dersinin sınav sonuçlarına göre T puanı 42 ise

$$T = 10z + 50 \Rightarrow 42 = 10 \cdot n + 50$$

$$n = -0,8 \text{ dir.}$$

C dersinin sınav sonuçlarına göre z puanı 0 ise

$$T = 10 \cdot z + 50 \Rightarrow y = 50 \text{ dir.}$$

Buna göre, bu öğrencinin T puanları sıralaması

$$T_C > T_B > T_A \text{ olup}$$

en başarılı dersi C, en başarısız dersi A dir.

C dersinden $z = 0$ olduğu için sınıf ortalaması ile aynı puanı almış diğer derslerde sınıf ortalamasının altında kalmıştır.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

	Not	Aritmetik ortalama	Standart sapma
A	30	35	5
B	52	50	10
C	55	60	2

Yukarıda bir öğrencinin A, B, C derslerinden yapılan sınavlarda aldığı notlar, sınıfın aritmetik ortalaması ve standart sapması verilmiştir.

Buna göre, bu öğrencinin A, B ve C derslerindeki T puanlarının toplamı kaçtır?

- A) 120 B) 117 C) 115 D) 110 E) 100

Soru 2:

	A	B	C
Puan	70	a	65
Aritmetik ortalama	60	40	50
Standart sapma	b	10	15
z puanı	1	c	d
T puanı	e	49	f

Yukarıdaki tablo bir öğrencinin A, B ve C derslerinden yapılan sınavların sonuçlarına göre, oluşturulmuştur.

Buna göre, $a + b + c + d + e + f$ kaçır?

- A) 155,1 B) 160,2 C) 169,9
D) 170,1 E) 172,5

KORELASYON

İki değişken arasındaki ilişkiyi ve bu ilişkinin yönünü ve derecesini gösteren katsayıya "korelasyon katsayısı" denir ve r ile gösterilir.

Bilgi

A ve B iki değişken olsun.

- $-1 \leq r_{AB} \leq 1$ dir.
- $r_{AB} = 0$ ise A ve B arasında bir ilişkiden söz edilemez.
- $r_{AB} \in (0,1]$ ise ilişki pozitif yönlü olup 1 e yaklaştıkça kuvvetlenir.
- $r_{AB} \in [-1,0)$ ise ilişki negatif (zıt) yönlü olup -1'e yaklaştıkça kuvvetlenir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

İki değişken arasındaki ilişkiyi gösteren korelasyon katsayısı $\frac{2x-1}{4}$ olduğuna göre, x in alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm:

Korelasyon katsayısı $[-1, 1]$ aralığında değerler aldığından,

$$-1 \leq \frac{2x-1}{4} \leq 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$-4 \leq 2x-1 \leq 4$$

$$-3 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

O halde, x sayısı -1, 0, 1, 2 tam sayı değerlerini alabilir.

Örnek 2:

A, B ve C değişkenleri arasındaki korelasyon katsayıları

$$r_{AB} = -0,9$$

$$r_{BC} = 0,75$$

$$r_{AC} = -0,12$$

şeklindedir.

Buna göre; A, B ve C değişkenleri arasındaki ilişkileri yorumlayalım.

Çözüm:

$r_{AB} = -0,9$ olduğundan A ile B arasında zıt yönlü ve kuvvetli bir ilişki vardır.

$r_{BC} = 0,75$ olduğundan B ile C arasında pozitif yönlü kuvvetli denebilecek bir ilişki vardır.

$r_{AC} = -0,12$ olduğundan A ile C arasında ilişki çok zayıf ve zıt yönlüdür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

x ve y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı $\frac{a}{3} + 1$ olduğuna göre, a'nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

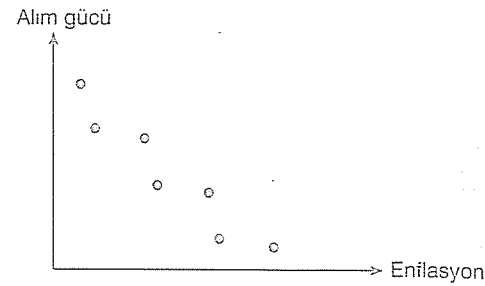
- A) -42 B) -21 C) -12
D) 0 E) 15

Soru 2:

Aşağıdakilerden hangisinde değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı 0,95 olabilir?

X	Y
A) Enflasyon	Sporcu sayısı
B) Dağların yükseltisi	Araç sayısı
C) Petrol fiyatları	Kredi kartı sayısı
D) Trafikteki araç sayısı	Harcanan benzin
E) Altın fiyatları	Elektrik tüketimi

Soru 3:



Yukarıdaki grafik bir ülkedeki enflasyon ve alım gücü arasındaki ilişkiyi gösteren korelasyon grafiğidir.

Buna göre, bu ilişkiye uyan korelasyon katsayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) -0,1 B) 0,1 C) -0,3 D) -0,8 E) 0

1. Bir bütünün parçalarını karşılaştırmak için en uygun grafik türü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Kutu grafiği B) Çizgi grafiği
C) Serpilme grafiği D) Daire grafiği
E) Histogram

2. I. Bir veri grubunda en çok tekrar eden sayıya medyan denir.
II. Bir veri grubuna veri eklendiğinde aritmetik ortalama kesinlikle değişir.
III. Çeyrekler açıklığı bir merkezi yayılım ölçüsüdür.

yukarıda verilen bilgilerden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

3. Aşağıdaki sayı dizilerinden hangisinin modu yoktur?

- A) 1, 1, 2, 3, 3, 4
B) 1, 3, 1, 3, 1
C) 2, 2, 2, 3, 3, 3
D) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4
E) 1, 2, 3, 4, 5, 5

4. xx, xy, yx, yy

soldan sağa doğru küçükten büyüğe sıralanmış iki basamaklı sayılardan oluşan, yukarıdaki sayı dizisinin medyanı 44 olduğuna göre, bu sayı dizisinin aritmetik ortalaması kaçtır?

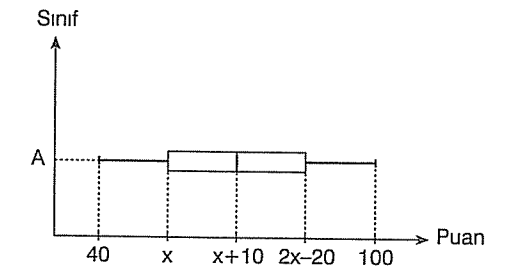
- A) 22 B) 44 C) 66 D) 88 E) 90

5. a^2 , 2, a + b, b^2

Yukarıda soldan sağa doğru küçükten büyüğe sıralanmış sayı dizisinin medyanı $\frac{5}{2}$, açıklığı 3 olduğuna göre, a.b kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 2 D) 3 E) 4

6.



Yukarıda bir sınıfa uygulanan bir sınav sonucunda elde edilen verilerle oluşturulan kutu grafiği verilmiştir.

Alınan puanların çeyrekler açıklığı 30 olduğuna göre, bu puanların medyanı kaçtır?

- A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

7. a, b, c, d, e

sayılarından oluşan sayı dizisinin standart sapması sıfıra eşit olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) Sayıların bir kısmı pozitif bir kısmı negatif değildir.
 B) Sayıların tümü negatif sayıdır.
 C) Sayıların tümü pozitif sayıdır.
 D) Sayılar birbirine eşittir.
 E) Sayıların aritmetik ortalaması, sayıların toplamından küçüktür.

8. 100, 200, 300, 400

sayılarının standart sapması x ise 150, 300, 450, 600 sayılarının standart sapması aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) x B) $x + 2$ C) $\frac{3x}{2}$ D) $\frac{4x}{3}$ E) $3x$

9. 2, 4, 6

rakamları ile yazılabilecek iki basamaklı tüm sayılardan oluşan sayı dizisinin üst çeyreği kaçtır?

- A) 44 B) 54 C) 55 D) 63 E) 64

10. z puanı $[1, 2]$ aralığında olan bir kişinin T puanı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 60 B) 62,5 C) 63 D) 66 E) 72

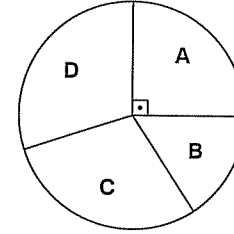
11. İki değişken arasındaki ilişkinin korelasyon katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşit olamaz?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{7}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

12. Aşağıda verilen değişkenlerden hangisinde korelasyon katsayısı -1 'e yakındır?

- | x | y |
|----------------------|-------------------|
| A) Kuraklık | Yağmurlu gün |
| B) Petrol kaynakları | Altın fiyatları |
| C) Altın fiyatları | Üniversite sayısı |
| D) Gidilen yol | Harcanan yakıt |
| E) Araç sayısı | Turist sayısı |

1. Aşağıdaki daire grafiğinde, A, B, C, D olmak üzere dört bölüme ayrılmış bir sağlık birimindeki doktorların sayısının bölümlere dağılımı gösterilmiştir.

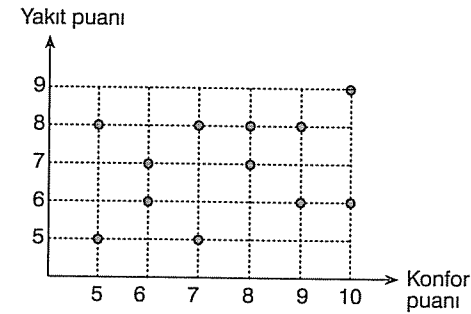


D bölümündeki doktorların sayısı A dakinden 4, C bölümündekiler de B dekilerden 6 fazladır. B bölümündeki doktorların sayısı, A dakilerin yarısı kadardır.

Buna göre, A bölümünde kaç doktor çalışmaktadır?

- A) 12 B) 10 C) 6 D) 5 E) 4

2.



12 farklı marka otomobile, uzmanlar tarafından yakıt ve konfor özelliklerine göre puanlar verilmiştir. Bu puanlara göre yukarıdaki gibi bir serpilme grafiği oluşturulmuştur.

Yakıt puanı ve konfor puanı 7 nin üstünde olan otomobiller ideal araba olarak adlandırılacaksa bu otomobillerden kaç tanesi ideal arabadır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

3. Bir okulda mevcutları aynı ve yaş ortalamaları 12, 13, 17 olan üç sınıf bulunmaktadır.

Okulda, mevcudu bu üç sınıftaki toplam öğrenci sayısına eşit ve yaş ortalaması 10 olan bir sınıf açılırsa tüm okulda bulunan öğrencilerin yaş ortalaması kaç olur?

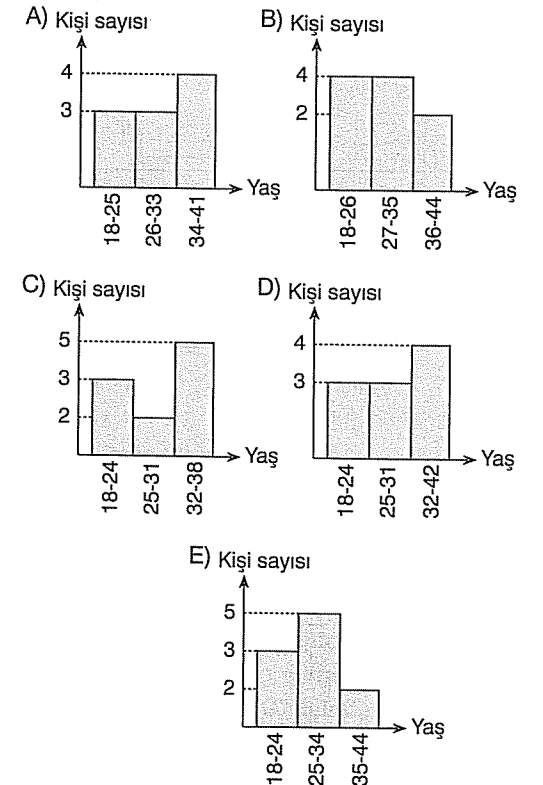
- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14,5 E) 15,5

4. Bir bilgisayar kursunda bulunan 10 öğrencinin yaşları

18, 20, 24, 26, 28, 32, 34, 34, 36, 38

şeklinde.

Bu verilerle oluşturulan histogram aşağıdakilerden hangisidir?



5. I. Aritmetik ortalama
II. Mod
III. Çeyrekler açıklığı
IV. Standart sapma

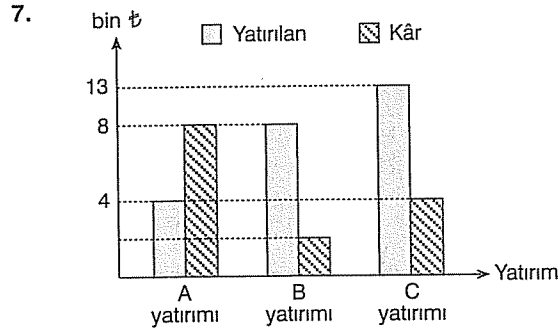
yukarıda verilenlerden hangileri merkezi eğilim ölçülerindendir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız IV
D) I ve II E) I, II ve III

6. 8, 12, 16, 20, 8, 24

sayı dizisinin medyanı, modundan kaç fazladır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14



Yukarıdaki sütun grafikte elindeki sermayesini üç parçaya ayırarak A, B, C yatırımlarını yapan bir işadının bu yatırımlardan elde ettiği kâr miktarları gösterilmiştir.

İşadamı yaptığı yatırımlar sonucunda %60 kâr elde ettiğine göre, B yatırımından kaç ₺ kâr elde etmiştir?

- A) 100 B) 500 C) 1000 D) 2000 E) 3000

8. a pozitif tam sayıdır.

$$a, a + 1, a + 2, a^3, a^3 + 1, a^3 + 6$$

küçükten büyüğe doğru sıralı sayı dizisinde çeyrekler açıklığı 24 olduğuna göre, bu sayı dizisinin açıklığı kaçtır?

- A) 3 B) 12 C) 16 D) 24 E) 30

9. Aşağıda verilen sayı dizilerinden hangisinde mod iki tanedir?

- A) 1, 1, 1, 1, 2
B) 2, 3, 2, 3, 2, 3
C) 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6
D) 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6
E) 0, 0, 0, 1, 2, 3, 0

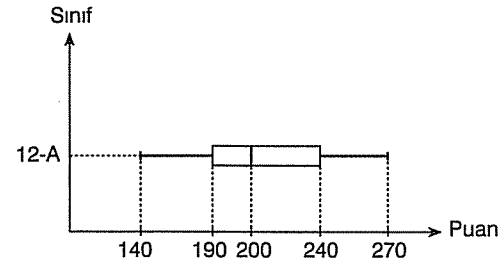
10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$

kümeleri veriliyor. A kümesinden iki, B kümesinden bir eleman rastgele seçiliyor.

Seçilen sayılarla oluşturulan sayı dizisinin modunun 2 olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

- 11.



Yukarıdaki kutu grafiği 12-A sınıfına yapılan YGS denemesi sonucunda elde edilen puanlar kullanılarak oluşturulmuştur. Öğrencilerin tümü birbirlerinden farklı puanlar elde etmiştir.

Bu sınıfta 200'ün üzerinde puan alan 11 öğrenci bulunduğuna göre, 190'ın altında puan alan kaç öğrenci bulunmaktadır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

12. 7, 7, 10, 16

sayılarının standart sapması kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 3 D) 6 E) 18

13. Aşağıdaki sayı dizilerinden hangisinin standart sapması daha büyüktür?

- A) 1, 2, 3, 4, 5
B) 1, 1, 1, 4, 8
C) 2, 2, 3, 4, 4
D) 2, 3, 3, 3, 4
E) 1, 3, 3, 4, 4

14. Bir öğrencinin girdiği bir sınavdaki ham puanı bu sınavdaki z puanının sekiz katına eşittir.

Uygulanan bu sınavın; standart sapması 3,5 ve ortalaması 18 olduğuna göre, öğrencinin ham puanı kaçtır?

- A) 24 B) 32 C) 36 D) 48 E) 54

- 15.

Ders	Matematik	Geometri
z puanı	x	
T puanı		5x + 60

Yukarıdaki tabloda Ahmet'in girdiği iki sınavla ilgili bilgiler verilmiştir.

Ahmet'in her iki sınavdaki T puanları birbirine eşit olduğuna göre, Geometri sınavındaki z puanı kaçtır?

- A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 5

16. x : Trafik sıkışıklığı
y : Trafikteki araç sayısı

Yukarıdaki değişkenler arasındaki ilişkinin korelasyon katsayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) -0,92 B) -0,5 C) 0 D) 0,2 E) 0,86

1. Dört adayın yarıştığı bir başkanlık seçiminde adayların aldıkları oy sayıları A, B, C, D arasında

$$2A = 3B = 6C = D$$

bağıntısı vardır.

Seçim sonucu dairesel grafikte gösterildiğinde B tane oy alan adaya ait daire diliminin merkez açısı kaç derece olur?

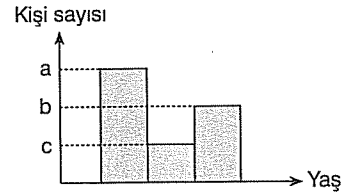
- A) 45 B) 60 C) 72 D) 75 E) 90

2. 12 kişiden oluşan bir gruptakilerin yaşları

14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 28, 32, 36, 38, 38

şeklindedir.

Bu kişilerin yaşları kullanılarak oluşturulan histogram



şeklindedir.

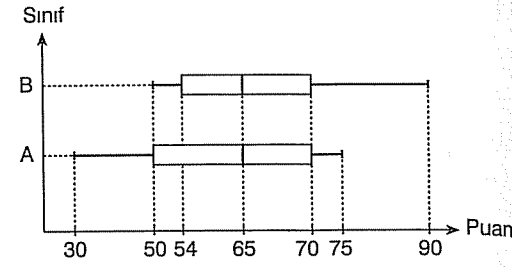
Buna göre,

- I. $a + c - b = 5$ tir.
II. Histogramda bir grupta en fazla 5 kişi bulunmaktadır.
III. Veri grubunun genişliği 9 dur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) II ve III

3.



Yukarıdaki kutu grafikler mevcutları birbirine eşit olan A ve B sınıflarına uygulanan matematik sınavı sonucunda elde edilen verilerle oluşturulmuştur.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) A sınıfında en düşük not alan öğrenci 30 puan almıştır.
B) B sınıfında en yüksek not alan öğrenci 90 puan almıştır.
C) A sınıfının not ortalaması 70'ten büyüktür.
D) A sınıfında puanların çeyrekler açıklığı 20 dir.
E) B sınıfındaki puanların medyanı 65 tir.

4. Bir sınıfta uygulanan bir sınav sonucunda tüm öğrencilerin aldığı puanlar birbirlerinden farklıdır.

Buna göre, puanların değerlendirilmesinde aşağıdaki istatistiksel kavramlardan hangisinden yararlanılamaz?

- A) Aritmetik ortalama
B) Medyan
C) Çeyrekler açıklığı
D) Mod
E) Standart sapma

5. a, b, c en az ikisi birbirinden farklı olan rakamlardır.

Buna göre, bu üç rakamla oluşturabilecek a, b, c sayı dizisinin modu kaç farklı değer alabilir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

6. Bir sınıfa uygulanan bir sınavda z puanı sıfıra eşit çıkan bir öğrenci ile ilgili aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) Sınıfın en başarılı öğrencisidir.
B) Sınıfın en başarısız öğrencisidir.
C) Ham puanı sınıf ortalamasına eşittir.
D) Ham puanı sınıf ortalamasının üstündedir.
E) T puanı en az 60 tir.

7. $1, \log 8, 2\log 5, 1 + \log 3, \log 20, 4$

sayı dizisinin medyanı kaçtır?

- A) $\log 2$ B) $3\log 5$ C) $\log 50$
D) $\frac{3 - \log 2}{2}$ E) $\frac{1 + \log 5}{2}$

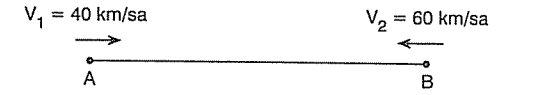
8. $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^2$$

$f(a), f(b), f(c)$ sayılarının standart sapması K olduğuna göre, $f(2a), f(2b), f(2c)$ sayılarının standart sapması aşağıdakilerden hangisidir?

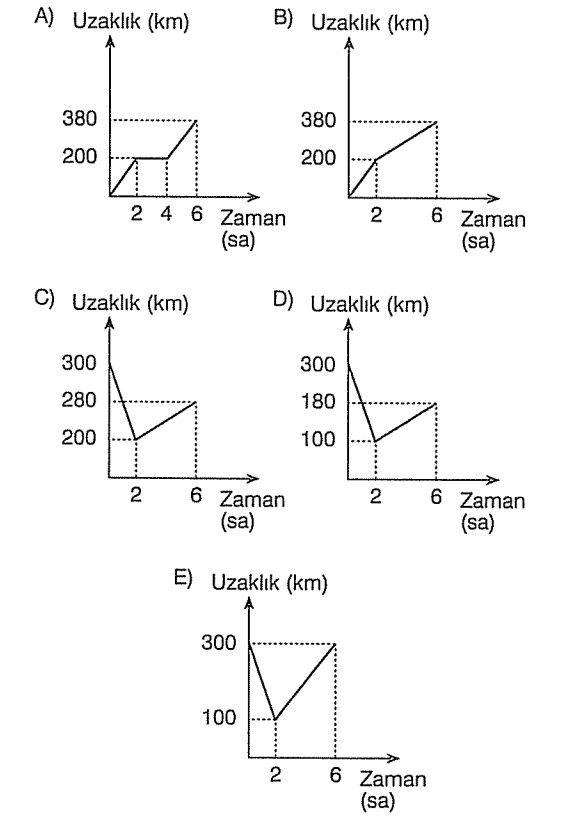
- A) $\frac{K}{2}$ B) $2K$ C) $4K$ D) $8K$ E) 16

9.



Aralarında 300 km mesafe bulunan A ve B şehirlerinden aynı anda birbirlerine doğru hareket eden iki araçtan B şehirden yola çıkan araç A şehrine doğru 2 saat yol aldıktan sonra aynı hızla geri dönüyor ve yoluna devam ediyor.

İki aracın başlangıçtan itibaren 6 saat boyunca aralarındaki uzaklığı gösteren grafik aşağıdakilerden hangisidir?



10.

	1. hafta	2. hafta	3. hafta	4. hafta
A	8	4	2	10
B	4	6	6	8
C	3	9	2	10

Yukarıda bir ilin üç semtinde 4 hafta boyunca işlenen suçların sayısı verilmiştir.

Buna göre, suç işleme oranı açısından;

- I. En riskli semt B semtidir.
- II. Riski en az olan semt B dir.
- III. C semti, A semtine göre daha risklidir.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) I ve III
- B) Yalnız II
- C) I ve II
- D) Yalnız III
- E) II ve III

11.

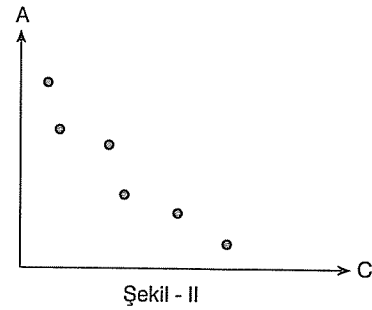
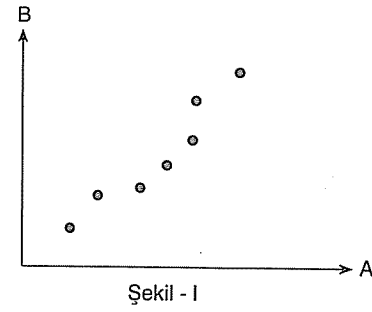
Dersler	Puan	Sınıfın ortalaması	Standart Sapma
A	60	50	10
B	40	50	15
C	45	60	10
D	40	40	5
E	60	55	10

Yukarıda bir öğrencinin 5 dersten girmiş olduğu sınavlardan aldığı puanlar ve sınavlarla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Buna göre, bu öğrencinin en başarılı olduğu ders hangisidir?

- A) A
- B) B
- C) C
- D) D
- E) E

12.

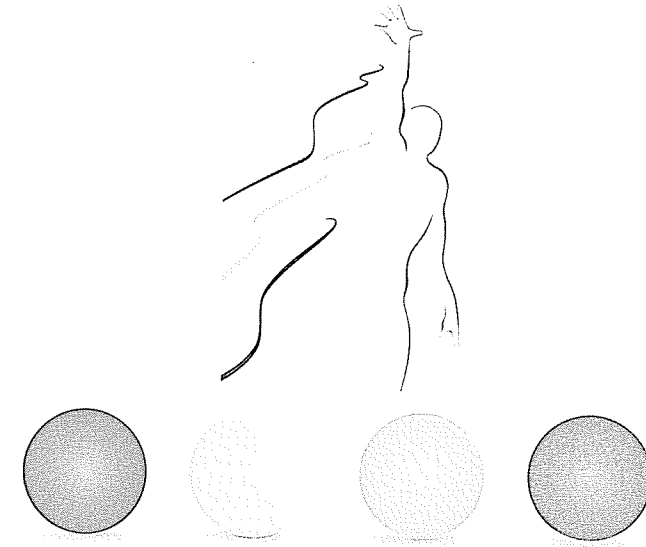


Şekil I, A ve B değişkenleri arasındaki ilişkiyi gösteren, Şekil II de A ve C değişkenleri arasındaki ilişkiyi gösteren korelasyon grafiğidir.

Buna göre, bu değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

(r_{xy} : x ile y nin korelasyon katsayısı)

- A) $r_{AB} < r_{AC}$
- B) $r_{AB} = -0,2$
- C) $r_{AC} = 0,8$
- D) $r_{AC} = -0,75$
- E) $r_{AB} = -0,98$



BÖLÜM 5

TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ

TOPLAM SEMBOLÜ

Bilgi

■ $n > 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ toplamı,

$\sum$ (sigma) sembolü kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ şeklinde gösterilir.}$$

■ n ve p tamsayı ve $n > p$ olmak üzere,

$$\sum_{k=p}^n f(k) = f(p) + f(p+1) + \dots + f(n) \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^4 k$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$k = 1, k = 2, k = 3$ ve $k = 4$ için bu işlemi yapalım,

$$\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sum_{k=0}^3 2^{-k}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$k = 0, k = 1, k = 2$ ve $k = 3$ için bu işlemi yapalım,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 2^{-k} &= 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{15}{8} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=-1}^3 (2k - 4) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^3 (2k - 4) &= (2 \cdot (-1) - 4) + (2 \cdot 0 - 4) + (2 \cdot 1 - 4) \\ &\quad + (2 \cdot 2 - 4) + (2 \cdot 3 - 4) \\ &= -6 - 4 - 2 + 0 + 2 \\ &= -10 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) &= \sqrt{1} - \sqrt{2} \\ &\quad + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ &\quad + \sqrt{3} - \sqrt{4} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sqrt{15} - \sqrt{16} \\ &\quad + \\ &\Rightarrow 1 - \sqrt{16} = 1 - 4 = -3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\sum_{k=5}^{12} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{12} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \\ &\quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \\ &\quad + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{13} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$k = 6 \text{ için } \frac{1}{7} - \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$k = 12 \text{ için } \frac{1}{13} - \frac{1}{12}$$

$$+ \frac{1}{13} - \frac{1}{5} = -\frac{8}{65} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$f(x) = 2x + 3$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^2 k.f(k)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 k.f(k) &= 0.f(0) + 1.f(1) + 2.f(2) \\ &= 0.3 + 1.5 + 2.7 \\ &= 0 + 5 + 14 \\ &= 19 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 7:

$f(x) = 2x - 3$ ve $x_1 = 2, x_2 = 3$

olduğuna göre; $\sum_{i=1}^2 x_i.f(x_i)$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x - 3, x_1 = 2, x_2 = 3$ olduğu için;
 $f(x_1) = f(2) = 2.2 - 3 = 1$ ise $f(x_1) = 1$
 $f(x_2) = f(3) = 2.3 - 3 = 3$ ise $f(x_2) = 3$ olur.
 istenen toplam ise;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 x_i.f(x_i) &= x_1.f(x_1) + x_2.f(x_2) \\ &= 2.1 + 3.3 = 11 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=0}^4 (k - 2^k)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -22 B) -21 C) -20 D) -19 E) -18

Soru 2:

$$\sum_{k=1}^4 (k^2 - 2)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Soru 3:

$$\sum_{k=1}^9 \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 3

Soru 4:

$$\sum_{k=1}^3 (k+1)^k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 60 B) 64 C) 70 D) 72 E) 75

Soru 5:

$f(x) = 4x - 3, x_1 = 2, x_2 = 3$ olduğuna göre,

$$\sum_{i=1}^2 (x_i - 1) \cdot f(x_i)$$

toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 11 C) 18 D) 21 E) 23

Soru 6:

1 den $(2n - 1)$ e kadar olan ardışık tek tamsayıların kareleri toplamı,

$$T = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 \text{ dir.}$$

Bu sayılardan her biri 2 şer artırıldığında T ne kadar artar?

- A) $4n + 1$ B) $2n^2 + 4n$ C) $4n^2 + 1$
 D) $4n^2 - 4n$ E) $4n^2 + 4n$

Bilgi

1 den n ye kadar olan ardışık doğal sayıların toplamı,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^{25} k$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} k &= 1 + 2 + 3 + \dots + 25 = \frac{25.26}{2} \\ &= 25.13 \\ &= 325 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

3 ile 29 arasındaki ardışık pozitif tamsayıların toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{Bu sayıların toplamı,} \\ 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 28 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 28) - (1 + 2 + 3) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{28} k \right) - (6) \\ &= \frac{28.29}{2} - 6 \\ &= 400 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=1}^{12} k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 68 B) 72 C) 76 D) 78 E) 81

Soru 2:

$$\sum_{k=3}^{20} (k-2)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 162 B) 171 C) 190 D) 198 E) 209

Soru 3:

$$\sum_{k=-5}^{13} (k+6)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 151 B) 172 C) 190 D) 199 E) 208

Bilgi

2 den 2n ye kadar olan ardışık pozitif tamsayıların toplamı,

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=0}^{12} 2k$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=0}^{12} 2k = 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 24$$

$$= 12 \cdot 13$$

$$= 156 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

5 ile 31 arasındaki ardışık pozitif çift tamsayıların toplamını bulalım.

Çözüm:

Bu sayıların toplamı,

$$6 + 8 + 10 + 12 + \dots + 30$$

$$= (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 30) - (2 + 4)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{15} 2k \right) - (6)$$

$$= 15 \cdot 16 - 6$$

$$= 240 - 6$$

$$= 234 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=0}^{20} 2k$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 420 B) 410 C) 400 D) 240 E) 200

Soru 2:

$$-4 - 2 + 0 + 2 + \dots + 50$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 650 B) 644 C) 638 D) 625 E) 606

Soru 3:

$$\sum_{k=0}^{10} (2k+4)$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 148 B) 150 C) 154 D) 160 E) 166

Bilgi

1 den (2n - 1) e kadar olan ardışık pozitif tamsayıların toplamı,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

0 ile 22 arasındaki ardışık pozitif tek tamsayıların toplamını bulalım.

Çözüm:

Bu sayıların toplamı,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 9 + \dots + 21 &= \sum_{k=1}^{11} (2k-1) \\ &= 11^2 \\ &= 121 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$5 + 7 + 9 + \dots + 89$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 5 + 7 + 9 + \dots + 89 &= (1 + 3 + 5 + \dots + 89) - (1 + 3) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{45} (2k-1) \right] - (4) \\ &= 45^2 - 4 \\ &= 2021 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{m=2}^{13} (2m - 3)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 576 B) 144 C) 100 D) 74 E) 49

Soru 2:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 101$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 2301 B) 2401 C) 2505 D) 2601 E) 2655

Soru 3:

$$\sum_{k=-2}^7 (2k + 5)$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 64 B) 72 C) 81 D) 91 E) 100

Bilgi

1 den n ye kadar olan ardışık pozitif doğal sayıların karelerinin toplamı,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 &= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= 5 \cdot 11 \cdot 7 \\ &= 385 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$5^2 + 10^2 + 15^2 + 20^2 + \dots + 55^2$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 5^2 + 10^2 + 15^2 + 20^2 + \dots + 55^2 \\ &= (1 \cdot 5)^2 + (2 \cdot 5)^2 + (3 \cdot 5)^2 + (4 \cdot 5)^2 + \dots + (11 \cdot 5)^2 \\ &= 5^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 11^2) \\ &= 5^2 \cdot \sum_{k=1}^{11} k^2 = 5^2 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} \\ &= 25 \cdot 22 \cdot 23 \\ &= 12650 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=0}^{20} k^2$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 2870 B) 2830 C) 2770 D) 2730 E) 2670

Soru 2:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 1580 B) 1540 C) 1440 D) 1400 E) 1340

Soru 3:

$$4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 50^2$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 22084 B) 22090 C) 22096 D) 22100 E) 22106

Bilgi

1 den n ye kadar olan ardışık pozitif tamsayıların küplerinin toplamı,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + 19^3$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + 19^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 19^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3) \\ &= \left(\frac{19 \cdot 20}{2} \right)^2 - (1 + 8 + 27) \\ &= (190)^2 - 36 \\ &= 36064 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot 10^3$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot 10^3 \\ &= 3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) \\ &= 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{10} k^3 \right) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 \\ &= 3 \cdot 55^2 \\ &= 3 \cdot 3025 \\ &= 9075 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=4}^{13} (k-3)^3$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2045 B) 3725 C) 3025 D) 3625 E) 4055

Soru 2:

$$\sum_{k=-1}^{11} k^3 + \sum_{m=-9}^1 m^3$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2001 B) 2111 C) 2221 D) 2331 E) 2441

Soru 3:

$$\sum_{k=1}^5 (-1)^k \cdot k^3$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -11 C) -64 D) -70 E) -81

Bilgi

$r \neq 1$ olmak üzere; $1, r, r^2, \dots, r^n$ şeklinde, her bir terimi bir önceki teriminin r katı olan $(n+1)$ tane sayının toplamı,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$3 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 512$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & + & 4 & + & 8 & + & 16 & + & 32 & + & \dots & + & 512 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\ (1+2) & 2^2 & 2^3 & 2^4 & & & & & & & & & 2^9 \end{array}$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = \sum_{k=0}^9 2^k = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}$$

$$= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sum_{k=1}^{19} 2 \cdot 3^{k-1}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{c} 19 \\ \sum_{k=1} 2 \cdot 3^{k-1} \\ = 2 \cdot 3^{1-1} + 2 \cdot 3^{2-1} + 2 \cdot 3^{3-1} + 2 \cdot 3^{4-1} + \dots + 2 \cdot 3^{19-1} \end{array}$$

$$= 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{18})$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - 3^{19}}{1 - 3}$$

$$= 2 \cdot \frac{3^{19} - 1}{3 - 1}$$

$$= 3^{19} - 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{1024}$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{1024}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right) \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{19}}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^9}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

Soru 2:

$$3 - \sum_{k=2}^{23} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{2^{20}}{3^{21}}$ B) $\frac{2^{21}}{3^{21}}$ C) $\frac{2^{22}}{3^{22}}$ D) $\frac{2^{21}}{3^{22}}$ E) $\frac{2^{22}}{3^{21}}$

Soru 3:

$$\sum_{k=1}^{10} 2^{k+1} + \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $5 \cdot 2^{10}$ B) $5 \cdot (2^{10} - 1)$ C) $5 \cdot (2^{11} + 1)$
D) $5 \cdot (2^{11} - 1)$ E) $5 \cdot (2^{10} + 1)$

Bilgi

n pozitif tamsayı olmak üzere daima,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

şeklinde dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20}$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20}$$

$$= \sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{19}{20}$$

Örnek 2:

$$\sum_{k=3}^{12} \frac{1}{k^2 - k} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k(k-1)} \text{ ifadesi basit kesirlere}$$

ayırma kuralı ile

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k}$$

$$1 = A.k + B(k-1)$$

$$k = 0 \text{ için, } -1 = B$$

$$k = 1 \text{ için, } 1 = A \text{ bulunur.}$$

Buna göre;

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

O halde formül kullanılmadan hesap yapılırsa,

$$\sum_{k=3}^{12} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=3}^{12} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \text{ olur.}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=5}^{24} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Örnek-2 de olduğu gibi basit kesirlere ayırma metodu kullanılarak,

$$\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{(k+2).(k+1)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

$$1 = A(k+2) + B(k+1)$$

$$\Rightarrow k = -1 \text{ için, } A = 1$$

$$\Rightarrow k = -2 \text{ için, } B = -1 \text{ bulunur.}$$

Buna göre,

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \text{ dir.}$$

$$\sum_{k=5}^{24} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{26}$$

$$= \frac{10}{78}$$

$$= \frac{5}{39} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{2}{4k^2 - 1}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{2}{4k^2 - 1} \text{ ifadesini basit kesirlere ayıralım.}$$

$$\frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{A}{(2k-1)} + \frac{B}{(2k+1)}$$

$$2 = A(2k+1) + B(2k-1)$$

$$2 = 2Ak + A + 2Bk - B$$

$$2 = \underbrace{(2A+2B)}_{=0} . k + \underbrace{(A-B)}_{=2}$$

$$\Rightarrow A = -B \text{ ve } A - B = 2 \text{ dir.}$$

Buradan,

$$A = 1. \text{ ve } B = -1 \text{ olur.}$$

O halde;

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{2}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^{13} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} +$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} +$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{25} - \frac{1}{27} = 1 - \frac{1}{27}$$

$$= \frac{26}{27} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=2}^{19} \frac{24}{k^2 + 9k + 20}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 6

Soru 2:

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k^2 - 1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{110}{53}$

B) $\frac{121}{55}$

C) $\frac{121}{110}$

D) $\frac{143}{110}$

E) $\frac{36}{55}$

Soru 3:

$$\sum_{k=4}^{10} \frac{1}{k^2 + k}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{7}{22}$

B) $\frac{7}{44}$

C) $\frac{1}{22}$

D) $\frac{1}{44}$

E) $\frac{13}{144}$

Bilgi

a ve n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\blacksquare 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = \sum_{k=0}^n k.k! = (n+1)! - 1 \text{ dir.}$$

$$\blacksquare \sum_{k=a}^n k.k! = (n+1)! - a! \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^{20} k.k!$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} k.k! &= \sum_{k=1}^{20} (k.k! + k! - k!) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (k!(k+1) - k!) \\ &= \sum_{k=1}^{20} ((k+1)! - k!) \\ &= 2! - 1! + \\ &\quad 3! - 2! + \\ &\quad 4! - 3! + \\ &\quad \vdots \\ &\quad 21! - 20! = 21! - 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + 10.10!$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + 10.10! =$$

$$\sum_{k=1}^{10} k.k! = (10+1)! - 1$$

$$= 11! - 1 \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3.3! + 4.4! \dots + 15.15!$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $15! - 2$ B) $15!$ C) $16! - 6$ ✓
D) $16! - 3$ E) $17!$

Soru 2:

$$\sum_{k=0}^{10} (k+1).(k+1)!$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $12! + 1$ B) $13! + 1$ C) $12!$
D) $13! - 1$ E) $12! - 1$ ✓

Soru 3:

$$\sum_{k=2}^{11} k.k! - \sum_{k=1}^9 (k+1).(k+1)!$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $11!$ B) $11.11!$ ✓ C) $11!.12$
D) $11! + 1$ E) $12! + 1$

Bilgi

Daima,

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \text{ olmak üzere}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^{19} \frac{k}{(k+1)!}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{k}{(k+1)!} \text{ ifadesinde } k \text{ ya } 1 \text{ ekleyip } 1 \text{ çıkaralım ve}$$

yukarıda verilen formül dışında başka bir yolla çözelim.

$$\sum_{k=1}^{19} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{19} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{k+1}{(k+1).k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} +$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} +$$

$$\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{19!} - \frac{1}{20!} = 1 - \frac{1}{20!} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{11}{12!}$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{11}{12!} &= \sum_{k=1}^{11} \frac{k}{(k+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{12!} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=5}^{20} \frac{k}{(k+1)!}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{20} \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{5}{6!} + \frac{6}{7!} + \dots + \frac{20}{21!} \\ &= \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{20}{20!} \right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{20!} \right) - \left(1 - \frac{1}{5!} \right) \\ &= \frac{1}{5!} - \frac{1}{20!} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=1}^{16} \frac{k}{(k+1)!}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{16!}{17!}$ B) $1 + \frac{1}{16!}$ C) $1 - \frac{1}{16!}$
D) $1 + \frac{1}{17!}$ E) $1 - \frac{1}{17!}$

Soru 2:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{19} \frac{k}{(k+1)!}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{21!}{22!}$ B) $\frac{20}{21!}$ C) $1 - \frac{1}{21!}$
D) $\frac{20}{22!}$ E) $1 - \frac{1}{20!}$

Soru 3:

$$\sum_{k=-1}^{10} \frac{k+2}{(k+3)!}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $1 - \frac{1}{13!}$ B) $1 - \frac{1}{12!}$ C) $1 + \frac{1}{12!}$
D) $1 - \frac{1}{11!}$ E) $\frac{1}{13!}$

Bilgi

$$\sum_{k=1}^n c = n \cdot c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

ifadesinde terim sayısı,

$$\left(\frac{\text{Son terim} - \text{ilk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1 \right) \text{ formülünden,}$$

$$\frac{n-p}{1} + 1 = n - p + 1 \text{ tanedir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{4}{5}$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{4}{5} = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$$

1. 2. 3. 10.
10 tane

Örnek 2:

$$\sum_{k=-2}^{10} \frac{2}{13}$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=-2}^{10} \frac{2}{13} = \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \dots + \frac{2}{13}$$

-2. -1. 0. 10.
13 tane = $\frac{\text{Son terim} - \text{ilk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$
= $\frac{10 - (-2)}{1} + 1 = 13$
= $13 \cdot \frac{2}{13}$
= 2 bulunur.

Örnek 3:

$$\sum_{k=1}^{20} 4 \cdot k$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{20} 4 \cdot k = 4 \cdot \sum_{k=1}^{20} k = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 20)$$

= $4 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$
= $4 \cdot 10 \cdot 21$
= 840 bulunur.

Örnek 4:

$$\sum_{a=-4}^5 (2k + 4) = 100$$

olduğuna göre, k yı bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{a=-4}^5 (2k + 4) = 100$$

$\Rightarrow [5 - (-4) + 1](2k + 4) = 100$
 $\Rightarrow 10(2k + 4) = 100$
 $\Rightarrow k = 3$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{22} + \sum_{m=-5}^6 \frac{1}{12}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

Soru 2:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{4}{5} \cdot k^2$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 208 B) 278 C) 300 D) 306 E) 308

Soru 3:

$$\sum_{k=-4}^5 \left(2a - \frac{1}{10} \right) = 119$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -9 B) -8 C) 6 D) 10 E) 11

Bilgi

Toplam sembolü ($\sum$); toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağıtılabilir.

Yani daima,

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^9 (k^2 - k) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 (k^2 - k) &= \sum_{k=1}^9 k^2 - \sum_{k=1}^9 k \\ &= \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \cdot 19 - 45 = 240 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\sum_{k=-3}^{10} (2k - 4)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-3}^{10} (2k - 4) &= 2 \cdot \sum_{k=-3}^{10} k - \sum_{k=-3}^{10} 4 \\ &= 2(-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + \dots + 10) - 4 \cdot (10 - (-3) + 1) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} - 6 \right) - 56 \\ &= 110 - 12 - 56 = 42 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=1}^{12} (2 \cdot k^2 + 3k - 4) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{12} (2 \cdot k^2 + 3k - 4) &= \sum_{k=1}^{12} 2k^2 + \sum_{k=1}^{12} 3k - \sum_{k=1}^{12} 4 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{12} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{12} k - \sum_{k=1}^{12} 4 \\ &= 2 \cdot \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} + 3 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} - 4 \cdot 12 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 25 + 3 \cdot 6 \cdot 13 - 4 \cdot 12 \\ &= 13 \cdot 118 - 48 = 1486 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k^3}{10} - \frac{3k^2}{4} + \frac{k}{2} - \frac{2}{5} \right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k^3}{10} - \frac{3k^2}{4} + \frac{k}{2} - \frac{2}{5} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{10} - \sum_{k=1}^{10} \frac{3k^2}{4} + \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2} - \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{10} k^3 - \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) - 10 \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{55^2}{10} - \frac{55 \cdot 21}{4} + \frac{55}{2} - 4 \\ &= 55 \left(\frac{55}{10} - \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \right) - 4 \\ &= \frac{149}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\sum_{k=1}^8 (k-1)(k+3)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (k-1)(k+3) &= \sum_{k=1}^8 (k^2 + 2k - 3) \\ &= \sum_{k=1}^8 k^2 + 2 \sum_{k=1}^8 k - \sum_{k=1}^8 3 \\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} - 3 \cdot 8 = 252 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

$$\sum_{k=0}^9 (3 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} - 2k + 3)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^9 (3 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} - 2k + 3) &= \sum_{k=0}^9 3 \cdot 2^{k-1} + \sum_{k=0}^9 2 \cdot 3^{k-1} - \sum_{k=0}^9 2k + \sum_{k=0}^9 3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=0}^9 2^k + \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=0}^9 3^k - 2 \sum_{k=0}^9 k + \sum_{k=0}^9 3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1-2^{10}}{1-2} \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1-3^{10}}{1-3} \right) - 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= \frac{3}{2} \cdot (2^{10} - 1) + \frac{3^{10} - 1}{3} - 90 + 30 \\ &= 3 \cdot 2^9 - \frac{3}{2} + 3^9 - \frac{1}{3} - 60 \\ &= 3 \cdot 2^9 + 3^9 - \frac{371}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=1}^{12} (2 \cdot k + a) = 288$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Soru 2:

$$\sum_{k=1}^n (5k - 2) = 24$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Soru 3:

$$\sum_{k=1}^6 (3k^2 - 2k + 1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 273 B) 261 C) 243 D) 237 E) 232

Bilgi

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k \quad (1 < p < n)$$

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p-m}^{n-m} a_{k+m} = \sum_{k=p+m}^{n+m} a_{k-m} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^7 k^2 + \sum_{k=8}^{11} k^2 + \sum_{k=12}^{20} k^2 + \sum_{k=21}^{24} k^2$$

toplamlarının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^7 k^2 + \sum_{k=8}^{11} k^2 + \sum_{k=12}^{20} k^2 + \sum_{k=21}^{24} k^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2) + (8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2) + (12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) + (21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 24^2$$

$$= \sum_{k=1}^{24} k^2$$

$$= \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6}$$

$$= 4.25.49$$

$$= 4900 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sum_{k=4}^{13} (2k - 1)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=4}^{13} (2k - 1) = \sum_{k=4-3}^{13-3} (2(k+3) - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2k + 6 - 1) = 2 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 5$$

$$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 5 \cdot 10 = 160 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=-3}^7 (3k + 5) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\sum_{k=-3}^7 (3k + 5) = \sum_{k=-3+4}^{7+4} (3(k-4) + 5)$$

$$= \sum_{k=1}^{11} (3k - 7) = 3 \cdot \sum_{k=1}^{11} k - \sum_{k=1}^{11} 7$$

$$= 3 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} - 7 \cdot 11 = 121 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\sum_{m=3}^{20} (m-2)(m-1) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\sum_{m=3}^{20} (m-2)(m-1) = \sum_{m=3-2}^{20-2} [(m+2)-2][(m+2)-1]$$

$$\sum_{m=1}^{18} m \cdot (m+1) = \sum_{m=1}^{18} m^2 + \sum_{m=1}^{18} m$$

$$= \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} + \frac{18 \cdot 19}{2}$$

$$= 2280 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=6}^{10} k + \sum_{k=10}^{13} k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 91 B) 97 C) 101 D) 107 E) 112

Soru 2:

$$\sum_{k=-1}^n (2k + 1) = 80$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Soru 3:

$$\sum_{k=-4}^{10} 12 \cdot 2^k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{3}{4} (2^{15} - 1)$ B) $2^{14} + 1$ C) $\frac{2}{3} (2^{14} - 1)$
D) $2^{15} - 1$ E) $2^{14} - 1$

Bilgi

Daima,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m a_{kp} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=1}^m a_{kp} \right) = \sum_{p=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{kp} \right)$$

eşitliği doğrudur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^3 (k + m)$$

toplamlarının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^3 (k + m) = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{m=1}^3 k + \sum_{m=1}^3 m \right)$$

$$= \sum_{k=1}^2 \left(3k + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) = 3 \sum_{k=1}^2 k + \sum_{k=1}^2 6$$

$$= 3 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + 6 \cdot 2 = 9 + 12 = 21 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sum_{a=2}^3 \sum_{p=1}^{16} ap \text{ toplamının sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\sum_{a=2}^3 \sum_{p=1}^{16} ap = \sum_{p=1}^{16} \left(\sum_{a=2}^3 ap \right) = \sum_{p=1}^{16} (2p + 3p)$$

$$= 5 \cdot \sum_{p=1}^{16} p = 5 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} = 680 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\sum_{k=0}^3 \sum_{p=1}^3 (k-p+2) = A$$

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{k=0}^3 (k-p+2) = B$$

olduğuna göre, $A = B$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$A = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{p=1}^3 (k+2) - \sum_{p=1}^3 p \right)$$

$$A = \sum_{k=0}^3 \left(3(k+2) - \frac{3 \cdot 4}{2} \right) = \sum_{k=0}^3 (3k + 6 - 6)$$

$$A = \sum_{k=0}^3 (3k) = 3 \sum_{k=0}^3 k$$

$$A = 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 4}{2} \right) = 18 \text{ bulunur.}$$

$$B = \sum_{p=1}^3 \left(\sum_{k=0}^3 (2-p) + \sum_{k=0}^3 k \right)$$

$$B = \sum_{p=1}^3 \left(4(2-p) + \frac{3 \cdot 4}{2} \right)$$

$$B = \sum_{p=1}^3 (8 - 4p + 6)$$

$$B = \sum_{p=1}^3 (14 - 4p)$$

$$B = \sum_{p=1}^3 14 - 4 \cdot \sum_{p=1}^3 p$$

$$B = 3 \cdot 14 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$B = 42 - 24 = 18 \text{ bulunur.}$$

Yani, $A = B$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sum_{k=0}^3 \sum_{m=0}^2 (2k + 3m - 1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 42 B) 48 C) 50 D) 54 E) 60

Soru 2:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{p=1}^4 3$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 4! B) 3! C) 24 D) 3.4! E) 5!

Soru 3:

$$\sum_{n=1}^3 \left(\sum_{m=2}^3 (m^2n - 2n) \right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 51 B) 54 C) 60 D) 62 E) 67

ÇARPIM SEMBOLÜ

Bilgi

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ şeklindeki k tane sayının çarpımı,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k = \prod_{k=1}^n a_k$$

şeklinde gösterilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{k=1}^{10} k \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{10} k = 1.2.3 \dots 8.9.10 = 10! \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=1}^{20} \frac{k+1}{k+2} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{20} \frac{k+1}{k+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{21}{22}$$

$$= \frac{2}{22} = \frac{1}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\prod_{k=4}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{11}{4}$$

olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=4}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{11}{4}$$

$$\prod_{k=4}^n \left(\frac{k+1}{k} \right) = \frac{11}{4}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{n+1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$n+1 = 11$$

$$n = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\prod_{k=1}^n 3^k = 3^{36}$$

olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^n 3^k = 3^{36}$$

$$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots 3^n = 3^{36}$$

$$3^1 + 2 + 3 + \dots + n = 36$$

$$3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 36$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 36$$

$$n(n+1) = 72$$

$$n = 8 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$\prod_{k=3}^{100} (k^2 - 10k) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=3}^{100} (k^2 - 10k) = (3^2 - 30)(4^2 - 40)(5^2 - 50)$$

$$\dots (10^2 - 100) \dots (100^2 - 100)$$

$$= (-21)(-24)(-25) \dots 0 \dots 9900$$

$$= 0 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\prod_{k=1}^{20} (k+1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 19! C) 20! D) 21! E) 22!

Soru 2:

$$\prod_{k=1}^{10} \frac{k^2-4}{k}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -10 C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{10}$

Soru 3:

$$\prod_{k=1}^{20} \frac{k+3}{k+5}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

Bilgi

$$\prod_{k=1}^n c = c^n \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\prod_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c^n \cdot \prod_{k=1}^n a_k \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\prod_{k=p}^n (c \cdot a_k) = c^{n-p+1} \cdot \prod_{k=p}^n a_k$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{k=1}^5 3 \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^5 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243 \text{ tür.}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=1}^9 (2k+2) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^9 (2k+2) = \prod_{k=1}^9 2(k+1) = 2^9 \prod_{k=1}^9 (k+1)$$

$$2^9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 10 = 2^9 \cdot 10! \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\prod_{p=3}^{62} 3 \log_{(p+1)}(p+2) \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\prod_{p=3}^{62} 3 \log_{(p+1)}(p+2) = 3^{62-3+1} \prod_{p=3}^{62} \log_{(p+1)}(p+2)$$

$$= 3^{60} \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \dots \log_{63} 64$$

$$= 3^{60} \cdot \log_4 64 = 3^{60} \cdot \log_4 4^3 = 3^{60} \cdot 3 = 3^{61} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\prod_{k=0}^9 \left(\frac{1}{4} \right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2^{-20} B) 2^{-10} C) 2^{-1} D) 0 E) 2

Soru 2:

$$\prod_{k=1}^{12} 2 \cdot 3^k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 12^6 B) 6^{12} C) $2^{12} \cdot 3^{13}$
D) $2^{78} \cdot 3^{12}$ E) $2^{12} \cdot 3^{78}$

Soru 3:

$$\prod_{k=4}^{14} (3k-3)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{3^{11} \cdot 13!}{4}$ B) $3^{11} \cdot 13!$ C) $\frac{3^{11}}{4} \cdot 15!$
D) $\frac{3^{11} \cdot 13!}{2}$ E) $3^{11} \cdot 12!$

Bilgi

$$\prod_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k \text{ ve}$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k : b_k) = \prod_{k=1}^n a_k : \prod_{k=1}^n b_k, \quad \prod_{k=1}^n b_k \neq 0$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{k=1}^5 2^k \cdot k$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^5 2^k \cdot k = \left(\prod_{k=1}^5 2^k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^5 k \right)$$

$$= (2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5) (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$= 2^{\frac{5 \cdot 6}{2}} \cdot 5!$$

$$= 2^{15} \cdot 5! \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=4}^{20} \frac{k^2-1}{k^2-4}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=4}^{20} \frac{k^2-1}{k^2-4} = \frac{\prod_{k=4}^{20} (k^2-1)}{\prod_{k=4}^{20} (k^2-4)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=4}^{20} (k-1)(k+1)}{\prod_{k=4}^{20} (k-2)(k+2)} \\
&= \frac{\prod_{k=4}^{20} (k-1) \prod_{k=4}^{20} (k+1)}{\prod_{k=4}^{20} (k-2) \prod_{k=4}^{20} (k+2)} \\
&= \frac{(3.4.5 \dots 19).(5.6.7 \dots 21)}{(2.3.4 \dots 18)(6.7 \dots 22)} \\
&= \frac{19 \cdot 5}{2 \cdot 22} = \frac{95}{44} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\prod_{k=2}^{10} \frac{k-1}{2^k}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{10} \frac{k-1}{2^k} &= \frac{\prod_{k=2}^{10} (k-1)}{\prod_{k=2}^{10} 2^k} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^{10}} \\
&= \frac{9!}{2^{2+3+4+\dots+10}} \\
&= \frac{9!}{2^{54}} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

a ve b pozitif tamsayıdır.

$$\prod_{k=1}^5 4^k \cdot k = a \cdot 2^b$$

olduğuna göre, a'nın en küçük değeri kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 32 D) 120 E) 130

Soru 2:

$$\prod_{k=1}^{10} 2 \cdot k \cdot t = \prod_{p=2}^{11} 4 \cdot p \cdot u$$

olduğuna göre, $\frac{t}{u}$ kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{11}$ C) 2^{10} D) $2 \cdot \sqrt{11}$ E) $10\sqrt{11}$

Soru 3:

$$\frac{\prod_{m=1}^3 \prod_{k=1}^2 km}{\prod_{k=1}^2 \prod_{m=1}^3 km}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{6}$ C) 0 D) 1 E) 6

Bilgi

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^p a_k \cdot \prod_{k=p+1}^n a_k \quad (1 < p < n)$$

$$\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p-m}^{n-m} a_{k+m} = \prod_{k=p+m}^{n+m} a_{k-m} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{\prod_{k=4}^{20} k}{\prod_{k=1}^{21} k}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{k=4}^{20} k}{\prod_{k=1}^{21} k} &= \frac{\prod_{k=4}^{20} k}{\prod_{k=1}^3 k \cdot \prod_{k=4}^{20} k \cdot \prod_{k=21}^{21} k} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^3 k \cdot \prod_{k=21}^{21} k} \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21} \\
&= \frac{1}{126} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=-4}^{10} (k+3)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=-4}^{10} (k+3) &= \prod_{k=-4+5}^{10+5} (k+3-5) \\
&= \prod_{k=1}^{15} (k-2) = (-1) \cdot (0) \cdot (1) \dots (13) \\
&= 0 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\prod_{k=3}^{17} (k+5)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=3}^{17} (k+5) &= \prod_{k=3-2}^{17-2} (k+2+5) = \prod_{k=1}^{15} (k+7) \\
&= (1+7) \cdot (2+7) \cdot (3+7) \dots (15+7) \\
&= 8 \cdot 9 \cdot 10 \dots 22 \\
&= \frac{1 \cdot 2 \dots 7 \cdot 8 \cdot 9 \dots 22}{1 \cdot 2 \dots 7} \\
&= \frac{22!}{7!} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\prod_{k=7}^{17} (2k - 6) = a \cdot 2^{12} \cdot 14!$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Soru 2:

$$A = \prod_{k=3}^{22} k^2$$

$$B = \prod_{k=2}^{21} k^2$$

olarak veriyor.

Buna göre, A sayısı B sayısının kaç katıdır?

- A) 64 B) 81 C) 100 D) 121 E) 144

Soru 3:

$$\prod_{k=3}^{13} (2k - 2)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2^9 \cdot 13!$ B) $2^{10} \cdot 11!$ C) $2^{11} \cdot 12!$
D) $2 \cdot 12!$ E) $13!$

Bilgi

Çarpım formülleri,

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \text{ ve}$$

$$\prod_{k=1}^n a^k = a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots a^n = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{k=1}^{10} k + \prod_{k=2}^{12} k = a \cdot 11!$$

olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{10} k + \prod_{k=2}^{12} k = a \cdot 11!$$

$$10! + 12! = a \cdot 11!$$

$$10!(1 + 12 \cdot 11) = a \cdot 11 \cdot 10!$$

$$133 = a \cdot 11$$

$$a = \frac{133}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=6}^{15} k$$

işleminin sonucu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=6}^{15} k = 6 \cdot 7 \cdot 8 \dots 15 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{15!}{5!} \text{ dir.}$$

Örnek 3:

$$\prod_{k=0}^{15} 2^k + \prod_{k=1}^{14} 2^{k+1} = x \cdot 2^{120}$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=0}^{15} 2^k + \prod_{k=1}^{14} 2^{k+1} = x \cdot 2^{120}$$

$$(2^0 \cdot 2^1 \dots 2^{15}) + (2^2 \cdot 2^3 \dots 2^{15}) = x \cdot 2^{120}$$

$$2^{\frac{15 \cdot 16}{2}} + 2^{\frac{15 \cdot 16}{2} - 1} = x \cdot 2^{120}$$

$$2^{120} + 2^{119} = x \cdot 2^{120}$$

$$2^{119}(2 + 1) = x \cdot 2^{120}$$

$$2^{119} \cdot 3 = x \cdot 2^{120}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\prod_{k=1}^{10} k \cdot 2^k$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{10} k \cdot 2^k = \prod_{k=1}^{10} k \cdot \prod_{k=1}^{10} 2^k$$

$$= (1 \cdot 2 \dots 10) \cdot (2^1 \cdot 2^2 \dots 2^{10})$$

$$= 10! \cdot 2^{\frac{10 \cdot 11}{2}}$$

$$= 10! \cdot 2^{55} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \prod_{k=2}^{50} k$$

$$B = \prod_{k=1}^{49} k$$

olduğuna göre, A sayısı B sayısının kaç katıdır?

- A) $\frac{1}{50}$ B) $\frac{1}{49}$ C) 49 D) 50 E) 51

Soru 2:

$$\prod_{k=0}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right)^{5 \cdot a}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -22 B) -11 C) $-\frac{11}{2}$ D) $-\frac{2}{11}$ E) $-\frac{1}{11}$

Soru 3:

$$\prod_{k=2}^{20} (k-1) \cdot 3^{k+1} = A \cdot 3^B$$

olduğuna göre, $\frac{A}{B}$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{19!}{232}$ B) $\frac{19!}{228}$ C) $\frac{228}{19!}$ D) $\frac{19!}{237}$ E) $\frac{232}{19!}$

Bilgi

Daima, $\prod_{k=1}^n \left(\prod_{p=1}^m a_{kp} \right) = \prod_{p=1}^m \left(\prod_{k=1}^n a_{kp} \right)$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{p=1}^3 \prod_{k=1}^2 (k.p)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{p=1}^3 \prod_{k=1}^2 (k.p) = \prod_{k=1}^2 \left(\prod_{p=1}^3 (k.p) \right)$$

$$= \prod_{k=1}^2 \left(\left(\prod_{p=1}^3 k \right) \cdot \left(\prod_{p=1}^3 p \right) \right)$$

$$= \prod_{k=1}^2 (k^3 \cdot (1.2.3))$$

$$= \left(\prod_{k=1}^2 k^3 \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^2 6 \right)$$

$$= 1^3 \cdot 2^3 \cdot 6 \cdot 6$$

$$= 1^3 \cdot 2^3 \cdot 6^2$$

$$= 8 \cdot 36$$

$$= 288 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\prod_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 \prod_{m=2}^3 m$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 \prod_{m=2}^3 m = \prod_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 (2.3) \quad (2.3)$$

$$\prod_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 6 = \prod_{k=0}^1 6^2 = \prod_{k=0}^1 36$$

$$= 36^2 = 6^4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\prod_{n=1}^{27} \left(\prod_{m=1}^{20} (3n-m) \right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{n=1}^{27} \left(\prod_{m=1}^{20} (3n-m) \right) = \prod_{n=1}^{27} ((3n-1)(3n-2) \dots (3n-20))$$

$$= (3-1) \cdot (3-2) \cdot \overbrace{(3-3)}^{=0} \dots (3-20)$$

$$(6-1) \cdot (6-2) \cdot (6-3) \dots (6-20)$$

$$\vdots$$

$$(81-1) \cdot (81-2) \dots (81-20)$$

$$= 0 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\prod_{k=4}^7 \prod_{m=1}^{10} [(k-6)m^2]$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 2:

$$\prod_{p=0}^2 \prod_{k=1}^2 (k.p+1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 108 B) 90 C) 72 D) 64 E) 40

Soru 3:

$$\prod_{k=0}^2 \prod_{k=0}^1 \prod_{k=1}^2 k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 8 C) 27 D) 64 E) 125

Bilgi

Bağız istisnalar dışında,

$$\prod_{p=1}^m \sum_{k=1}^n a_{kp} \neq \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^m a_{kp} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\prod_{p=1}^3 \sum_{k=1}^2 (k+p)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\prod_{p=1}^3 \sum_{k=1}^2 (k+p)$$

$$= \prod_{p=1}^3 ((1+p) + (2+p))$$

$$= \prod_{p=1}^3 (2p+3)$$

$$= (2.1+3) \cdot (2.2+3) \cdot (2.3+3)$$

$$= 5 \cdot 7 \cdot 9$$

$$= 315 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sum_{m=-1}^2 \prod_{p=0}^2 \sum_{k=1}^2 k$$

işleminin sonucunu bulalım.

FEM YAYINLARI

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^2 \prod_{p=0}^2 \sum_{k=1}^2 k &= \sum_{m=-1}^2 \prod_{p=0}^2 (1+2) \\ &= \sum_{m=-1}^2 \prod_{p=0}^2 3 \\ &= \sum_{m=-1}^2 3^3 \\ &= \sum_{m=-1}^2 27 = 4 \cdot 27 = 108 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\prod_{p=1}^2 \sum_{k=0}^1 (kp) + \sum_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 (kp)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^2 \sum_{k=0}^1 (kp) + \sum_{k=0}^1 \prod_{p=1}^2 (kp) \\ &= \prod_{p=1}^2 (0 \cdot p + 1 \cdot p) + \sum_{k=0}^1 ((1 \cdot k)(2 \cdot k)) \\ &= \prod_{p=1}^2 p + \sum_{k=0}^1 2k^2 \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 \\ &= 2 + 0 + 2 \\ &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\prod_{k=1}^5 \sum_{p=1}^4 3kp$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5! · 30 B) 5⁵ · 30! C) 30⁵
D) 5! E) 5! · 30⁵

Soru 2:

$$\sum_{k=0}^3 \prod_{m=1}^2 k \cdot m + \prod_{p=1}^2 \sum_{n=0}^3 n \cdot p$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 84 B) 90 C) 96 D) 100 E) 110

Soru 3:

$$\sum_{n=1}^3 \prod_{m=2}^4 (mn + n)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2160 B) 1860 C) 360 D) 240 E) 0

Soru 4:

$$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k+2} \text{ ve } b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

olduğuna göre, $a_{10} + b_{10}$ kaçtır?

- A) $\frac{71}{76}$ B) $\frac{1}{71}$ C) $\frac{71}{66}$ D) $\frac{66}{71}$ E) $\frac{1}{66}$

Soru 5:

$$f(x) = \sum_{n=1}^x n \text{ ve } g(x) = \sum_{n=1}^x n^2$$

olduğuna göre, $(f \circ g)(3)$ kaçtır?

- A) 95 B) 100 C) 105 D) 110 E) 115

Soru 6:

$$\prod_{k=-1}^2 \sum_{k=0}^2 \prod_{k=1}^2 k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2⁶ B) 2⁹ C) 6² D) 6⁴ E) 6⁸

Soru 7:

$$f(x) = \prod_{n=1}^x x$$

$$g(x) = \prod_{k=1}^x k$$

olduğuna göre, $(f \circ g)(2) + (g \circ f)(2)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 30 B) 28 C) 27 D) 26 E) 24

Soru 8:

$$f\left(\sum_{n=1}^4 n \cdot x\right) = \prod_{n=1}^x x$$

$$g\left(\prod_{n=1}^3 x\right) = \sum_{n=1}^x x$$

olduğuna göre, $(f \circ g)(1000)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 10 B) 10! C) 2¹⁰ D) 5¹⁰ E) 10¹⁰

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

$$1. \sum_{n=1}^{20} (3n - 7)$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) 370 B) 390 C) 420 D) 450 E) 490

$$2. \sum_{k=1}^n (3.k - 1) = 77$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

$$3. \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^3 (2k + i)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 40 B) 56 C) 78 D) 84 E) 92

$$4. \sum_{k=1}^7 (k + n) = 56$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

$$5. \sum_{k=-4}^5 (2k - 1)$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) 20 B) 10 C) 0 D) -20 E) -10

$$6. \sum_{k=4}^n m = 27.m$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 21 B) 24 C) 28 D) 30 E) 32

$$7. i = \sqrt{-1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_{n=1}^4 (i^n + n) \text{ ifadesinin değeri kaçtır?}$$

- A) -3 B) -4i C) -5i D) 10 E) 9i

$$8. \prod_{k=1}^n 2^k = 1024$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

$$9. \prod_{k=10}^{15} (k-9) = \sum_{k=1}^6 (2.k + a)$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 120 B) 113 C) 71 D) 42 E) 21

$$10. 7 + 10 + 13 + \dots + 58$$

toplamı aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

- A)
- $\sum_{k=1}^{50} (k + 8)$
- B)
- $\sum_{k=3}^{20} (3k - 2)$
- C)
- $\sum_{k=2}^{27} (2k + 3)$

- D)
- $\sum_{k=5}^{30} (2k - 3)$
- E)
- $\sum_{k=3}^8 (k^2 - 2)$

FEM YAYINLARI

$$11. \sum_{k=4}^{13} (2k - 2)$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 120 B) 130 C) 145 D) 150 E) 200

$$12. \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{20}{21}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

$$13. \sum_{k=1}^n n = 16$$

olduğuna göre, n doğal sayısı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$$14. \sum_{k=1}^8 (2k^2 + 1)$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 402 B) 416 C) 424 D) 426 E) 432

$$15. \sum_{n=1}^k (2n - 1) = 25$$

olduğuna göre, $\prod_{m=2}^k \left(1 + \frac{1}{m} \right)$ nin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C)
- $\frac{6}{5}$
- D)
- $\frac{5}{3}$
- E)
- $\frac{2}{3}$

$$16. \sum_{n=1}^2 \prod_{m=1}^2 n^m$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

$$17. \prod_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{5}$$

olduğuna göre, n değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$$18. \sum_{k=2}^5 \sum_{t=1}^4 (k + 2t + 1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 40 B) 112 C) 132 D) 140 E) 152

$$19. \sum_{k=1}^{16} k = a$$

olduğuna göre, $\sum_{k=1}^{16} k^2$ ifadesinin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 11.a B) 12.a C) 13.a D) 14.a E) 15.a

$$20. \prod_{k=1}^6 \left[\sum_{n=1}^7 \frac{nk}{4} \right]$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 7! B)
- $7^3 \cdot 7!$
- C)
- $7^4 \cdot 7!$
-
- D)
- $7^5 \cdot 7!$
- E)
- $7^7 \cdot 6!$

FEM YAYINLARI

1. $3.3 + 4.8 + 5.15 + \dots + 11.99$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 3335 B) 3340 C) 3345
D) 3350 E) 3355

2. $\sum_{k=1}^n a_k = 3^{n+1}$

olduğuna göre, $a_2 + a_3$ kaçtır?

- A) 45 B) 63 C) 72 D) 81 E) 90

3. $\sum_{k=4}^{n+4} (k-2) = an^2 + bn + c$

olduğuna göre, a.b.c kaçtır?

- A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

4. $\sum_{k=1}^n f(k) = (n+1)!$

olduğuna göre, $f(6)$ değeri kaçtır?

- A) 7.6! B) 6.6! C) 7! D) 6! E) 5!

5. $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+\dots+10}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2+3+\dots+11}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) -3^{10} D) $\frac{1}{3}$ E) 3^{10}

6. $Q(x+1)$ polinomunun katsayılar toplamı 4 ve sabit terimi 2 olduğuna göre,

$$\sum_{x=2}^3 Q(x-1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 10 E) 6

7. $f(x) = \sum_{k=1}^x k$ ve $g(x) = \sum_{k=1}^x k^2$

olduğuna göre, $(f \circ g)(2)$ kaçtır?

- A) 23 B) 20 C) 17 D) 15 E) 13

8. $\sum_{k=0}^4 (a+2b) = 25$ ve $\sum_{k=1}^3 (2a-b) = 45$

olduğuna göre, a.b kaçtır?

- A) 7 B) 5 C) -1 D) -5 E) -7

9. $\sum_{k=1}^n 2 \cdot k^3 = \sum_{k=1}^9 2$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. $\log 2 = 0,301$ olmak üzere,

$$\sum_{k=2}^5 \log \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

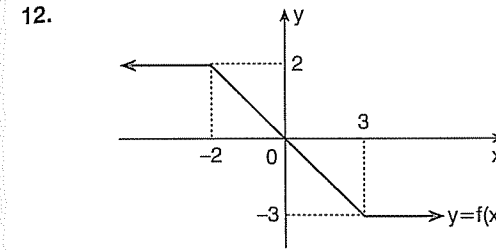
toplamının değeri kaçtır?

- A) -0,699 B) -0,301 C) 0,301
D) 0,699 E) 1

11. $\prod_{k=1}^n 10^{\frac{k}{6}} = 10$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\sum_{x=-3}^4 x \cdot f(x)$ toplamının değeri kaçtır?

- A) -37 B) -27 C) -17 D) -7 E) 0

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-5| + 1$ fonksiyonu veriliyor.

$$\sum_{k=-10}^{10} f(k)$$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 135 B) 140 C) 147 D) 151 E) 156

14. $\sum_{k=0}^{12} 2^{k-2}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2^{11} - 2^{-1}$ B) $2^{11} + 1$ C) $2^{11} - 2^2$
D) $2^{11} - 2^{-2}$ E) $2^{11} - 1$

15. $\sum_{k=1}^3 k + \prod_{k=1}^3 2^k$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 48 B) 52 C) 56 D) 64 E) 70

16. $2x^2 - mx + n + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\sum_{k=1}^2 x_k = 3 \text{ ve } \sum_{k=1}^2 \frac{1}{x_k} = \frac{2}{5}$$

olduğuna göre, m.n kaçtır?

- A) 72 B) 78 C) 84 D) 90 E) 96

17. $\prod_{k=1}^{15} \log_{(k+1)} k$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 0

18. $a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{14} + a_{15}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit değildir?

A) $\sum_{k=6}^{17} a_{k-2}$ B) $\sum_{k=5}^{16} a_{k-1}$ C) $\sum_{k=5}^{17} a_{k-2}$

D) $\sum_{k=4}^{15} a_k$ E) $\sum_{k=3}^{14} a_{k+1}$

19. $\sum_{k=1}^2 \prod_{k=1}^2 \sum_{k=1}^2 k$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 27 B) 18 C) 15 D) 9 E) 6

20. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\prod_{k=1}^{12} i^k + \sum_{k=1}^{13} i^k$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2i B) $i+1$ C) -i D) i E) $i-1$

1. 3 ile 187 arasında 9 ile kalansız bölünen sayıların toplamı kaçtır?

A) 1890 B) 1980 C) 2773
D) 3780 E) 5229

2. $m > n + 1$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n}^m k + \sum_{k=1}^{n+1} k = 2n + 11$$

eşitliği sağlanıyorsa, m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

3. $\sum_{k=1}^3 k^{k-1}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

4. $3.9.27.81.243.729.2887$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3^{30} B) 3^{28} C) 3^{27}
D) 3^{24} E) 3^{20}

5. $\sum_{k=-n}^{3n} (k + 2n)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $12n^2 - n$ B) $n^2 - n$ C) $n^2 + 12n$
D) $12n^2 + 4n$ E) $12n^2 + 3n$

6. $\sum_{k=1}^x k^2 = 55$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = x$ ve $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = y$

olduğuna göre, $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2+k}$ ifadesinin x ve

y türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + y$ B) $x \cdot y$ C) $x - y$
D) $2x + y$ E) $x + 2y$

8. $x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre,

$$\sum_{k=1}^2 \left(\prod_{n=1}^2 (x_k \cdot x_n) \right)$$

değeri kaçtır?

A) 57 B) 54 C) 51 D) 49 E) 45

9. $\sum_{k=0}^4 2^k + \prod_{k=1}^3 2^k$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 72 B) 84 C) 95 D) 100 E) 102

10. $\sum_{k=1}^n (8 - x_k) = 8n - 5$

$$\sum_{k=1}^n (a - y_k) \cdot x_k = 0$$

olduğuna göre, $\sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$ ifadesinin eşiti

aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3a B) 4a C) 5a D) 6a E) 7a

11. $2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + \dots + 2^{-20}$

toplamının sonucu kaçtır?

A) $1 - 2^{-19}$ B) $1 - 2^{-20}$ C) $2^{-3} - 2^{-19}$
D) $2^{-4} - 2^{-20}$ E) $2^{-5} - 2^{-20}$

12. $\sum_{k=0}^{24} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13. $\sum_{k=-3}^{19} k^3 = A$

olduğuna göre, $\sum_{k=-1}^{19} k^3$ ifadesinin A türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A - 1$ B) $A + 34$ C) $A - 34$
D) $A + 35$ E) $A - 35$

14. $x^4 \cdot x^6 \cdot x^8 \dots x^{40}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\prod_{k=2}^{10} k^x$ B) $\prod_{k=2}^{10} k^k$ C) $\prod_{k=2}^{20} x^{2k}$

D) $\prod_{k=2}^{10} x^{3k}$ E) $\prod_{k=2}^{10} x^k$

15. $\prod_{k=1}^4 \left(\sin \frac{k\pi}{2} + \cos \frac{k\pi}{2} \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

16. $\prod_{k=1}^2 2 + \prod_{k=2}^3 3 + \prod_{k=3}^4 4 + \dots + \prod_{k=10}^{11} 11$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 506 B) 505 C) 504 D) 503 E) 502

17. $\ln \left(\prod_{k=1}^{10} e^k \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 110 E) 165

18. $\sum_{n=-2}^2 \cos(n\pi)$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

19. $\prod_{k=4}^9 \frac{k^2 - 4}{k^2 - 9}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2,5 B) 2,8 C) 3,2 D) 3,5 E) 3,7

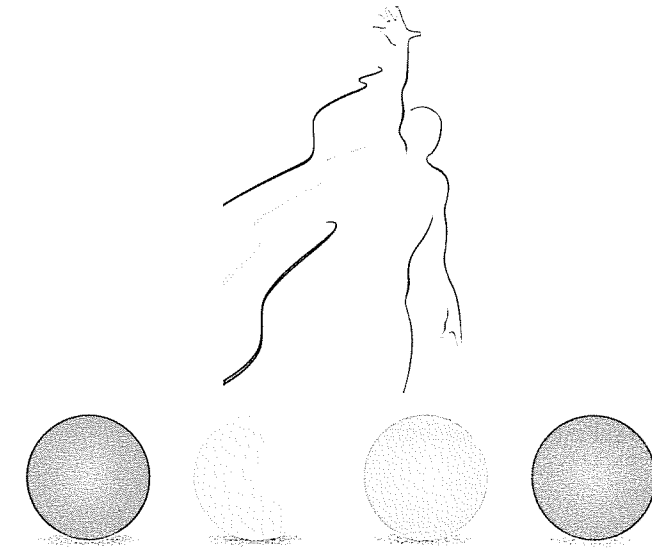
20. $\prod_{k=1}^2 \prod_{k=2}^3 \sum_{k=3}^4 \sum_{k=10}^{11} 2$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2^{11} B) 2^{12} C) 2^{13} D) 2^{14} E) 2^{16}

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI



BÖLÜM 6

DİZİLER

Bilgi

N^+ (sayma sayılar) kümesinden R (Reel sayılar) kümesine tanımlanan her fonksiyona, gerçek sayı dizisi yada kısaca dizi denir.

$$f: N^+ \rightarrow R$$

$$f(n) = a_n \text{ dizisi veya}$$

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

$$\text{veya } (a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

şeklinde gösterilir.

(a_n) dizisinde elemanlar sıralıdır ve yerleri değiştirilemez.

a_1, a_2, a_3 gerçek sayılarına sırasıyla dizinin 1. terimi, 2. terimi, 3. terimi ve a_n gerçek sayısına ise dizinin n . terimi veya genel terimi denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

dizisinin ilk 10 teriminin çarpımını bulalım.

Çözüm:

(a_n) dizisini açık olarak yazalım.

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n} \right) = \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{11}{10}, \dots \right)$$

İlk 10 terim çarpımı,

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10}$$

= 11 bulunur.

Örnek 2:

$$I. (a_n) = \left(\frac{1-3n}{n+1} \right)$$

$$II. (b_n) = \left(\frac{n+2}{n-3} \right)$$

$$III. (c_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$$

ifadelerinin dizi olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$$I. \text{ Her } n \in N^+ \text{ için } \frac{1-3n}{n+1} \in R \text{ dir.}$$

O halde, (a_n) dizidir.

$$II. n = 3 \text{ için } b_3 = \frac{5}{0} \notin R \text{ dir.}$$

O halde, (b_n) dizi değildir.

$$III. \text{ Her } n \in N^+ \text{ için } \frac{1}{n} \in R \text{ dir.}$$

O halde, (c_n) dizidir.

Örnek 3:

Genel terimi;

$$a_n = \begin{cases} n+2, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ n^2+1, & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

olan dizi için $a_4 + a_3$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$n = 4$ için $4 \equiv 0 \pmod{2}$ olduğundan,

$$a_4 = 4 + 2 = 6 \text{ dir.}$$

$n = 3$ için $3 \equiv 1 \pmod{2}$ olduğundan,

$$a_3 = 3^2 + 1 = 10 \text{ dur.}$$

O halde, $a_3 + a_4 = 16$ dir.

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdakilerden hangisi bir reel sayı dizisinin genel terimi değildir?

- A) $(5n - 2)$ B) $(2n)$ C) $(n + 2)$
 D) $\left(\frac{4}{n-1}\right)$ E) $\left(\frac{5}{n^2 + 1}\right)$

Soru 2:

$$(a_n) = ((n-2)(n-3))$$

dizisinin ilk dört teriminin toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 0

Soru 3:

$$(a_n) = ((-1)^n \cdot n)$$

dizisinin ilk 50 teriminin toplamı kaçtır?

- A) 50 B) 40 C) 25 D) 20 E) 10

Soru 4:

Bir (a_n) dizisinde, her $\forall \in \mathbb{N}^+$ için,

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \text{ ve } a_{20} = 10!$$

olduğuna göre, a_1 kaçtır?

- A) 10! B) 5! C) $\frac{10!}{9}$ D) $\frac{10!}{19!}$ E) $\frac{10!}{20!}$

Soru 5:

$$(a_n) = (n^2 - 2n - 48)$$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Soru 6:

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 - 2n + 12}{n}\right)$$

dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

- A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

■ Bilgi

$k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$A_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ olsun.

A_k kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

Bu sonlu dizinin terimleri;

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ dir.

Sonlu olduğu belirtilmedikçe dizi denilince **sonsuz elemanlı dizi** anlaşılmalıdır.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$A_3 = \{1, 2, 3\}$ ve

$f: A_3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f(n)) = (n^2 - 3n)$$

sonlu dizisinin terimlerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$$

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow f(1) + f(2) + f(3) = -4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$A_{10} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ olmak üzere,

$(a_n): A_{10} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

dizisinin terimlerinin çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{4}{5}, \dots, a_{10} = \frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{11}{12} = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere,

$(a_n): A_5 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a_n) = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

dizisinin terimlerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$a_2 = \sin \pi = 0$$

$$a_3 = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$a_4 = \sin 2\pi = 0$$

$$a_5 = \sin \frac{5\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 = 1 \text{ bulunur.}$$

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $(a_n) : A_5 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(a_n) = \left(\frac{5}{n} \right)$$

dizisinin terimlerinin toplamı kaçtır?

- A) $\frac{133}{12}$ B) $\frac{137}{12}$ C) $\frac{139}{12}$ D) $\frac{141}{6}$ E) $\frac{137}{6}$

Soru 2:

$A_{50} = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ ve $(a_n) : A_{50} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \right)$$

dizisinin terimlerinin toplamı kaçtır?

- A) $\frac{1}{104}$ B) $\frac{23}{52}$ C) $\frac{24}{51}$ D) $\frac{26}{51}$ E) $\frac{25}{52}$

Soru 3:

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $(a_n) : A_5 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(a_n) = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

dizisinin terimlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

■ Bilgi

• $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = c$ ise $(a_n) = (c) = (c, c, c, \dots, c, \dots)$ şeklindeki dizilere **sabit dizi** denir.

Yani sabit dizinin bütün terimleri birbirine eşit ve sabit sayıdır.

• $(a_n) = \left(\frac{xn + b}{yn + c} \right)$ dizisi sabit dizi ise,

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c} \text{ dir.}$$

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = (5), (b_n) = ((-1)^n), (c_n) = (\sin(n\pi))$$

dizilerinin sabit dizi olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$(a_n) = (5) = (5, 5, 5, \dots, \dots)$$

$5 \in \mathbb{R}$ olduğundan (a_n) sabit dizidir.

$$(b_n) = ((-1)^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ çift sayı} \\ -1, & n \text{ tek sayı} \end{cases}$$

$b_1 \neq b_2$ olduğundan, (b_n) sabit dizi değildir.

$$(c_n) = (\sin(n\pi)) = (\sin\pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \dots)$$

$$(c_n) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

$(c_n) = (0), 0 \in \mathbb{R}$ olduğuna göre, (c_n) sabit dizidir.

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{2n + k}{n + 3} \right)$$

dizisi sabit dizi olduğuna göre, k değerini bulalım.

Çözüm:

I. yol:

$(a_n) = (c)$ olacak şekilde, (a_n) sabit dizisi için, $c = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \dots$ dir.

O halde, $a_1 = a_2$ için,

$$\frac{2 \cdot 1 + k}{1 + 3} = \frac{2 \cdot 2 + k}{2 + 3}$$

$$5(2 + k) = 4(4 + k)$$

$$10 + 5k = 16 + 4k$$

$$k = 6 \text{ bulunur.}$$

II. yol:

Sabit dizi olma kuralına göre,

$$\frac{2}{1} = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$(a_n) = ((a - 2) \cdot n + a + 1)$$

$$(b_n) = (b - 1 + (b - 3) \cdot n^2)$$

dizileri sabit dizi olduğuna göre, $a_n + b_n$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$(a_n) = (c), c \in \mathbb{R} \text{ olması için } a = 2 \text{ olmalıdır.}$$

O halde,

$$a = 2 \text{ için } (a_n) = (0 \cdot n + 3) = (3) \text{ tür.}$$

$$(b_n) = (d), d \in \mathbb{R} \text{ olması için } b = 3 \text{ olmalıdır.}$$

O halde,

$$b = 3 \text{ için } (b_n) = (0 \cdot n^2 + 3 - 1) = (2) \text{ dir.}$$

O halde,

$$a_n + b_n = 3 + 2 = 5 \text{ bulunur.}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdakilerden hangisi sabit dizi değildir?

A) $(a_n) = (2)$ B) $(b_n) = (0)$

C) $(c_n) = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$ D) $(d_n) = ((-1)^{2n})$

E) $(e_n) = (-5)$

Soru 2:

$$(a_n) = \left(\frac{mn - 2}{n + 2} \right)$$

dizisi sabit dizi olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 3:

$$(a_n) = (a \cdot n^2 + (b + 1)n + a + b)$$

dizisi sabit olduğuna göre, $a + b + a_n$ kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) 0 D) 2 E) 1

Bilgi

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = b_n$ ise,

(a_n) ile (b_n) dizilerine eşit diziler denir.

$(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilir.

Bir başka ifadeyle genel terimleri eşit olan dizilere eşit diziler denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^n 2k \right) \text{ ve } (b_n) = (n^2 + n)$$

dizilerinin eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^n 2k \right) = (2 + 4 + 6 + \dots + 2n)$$

$$(a_n) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$(a_n) = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = (n(n+1)) = (n^2 + n)$$

olmak üzere, görüldüğü gibi her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$(a_n) = (b_n) \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$(a_n) = (10.n), (b_n) = \left(\sum_{k=1}^{10} n \right)$$

$$(c_n) = \left(\sum_{k=1}^{10} k \right), (d_n) = (4)$$

dizilerini inceleyelim.

Çözüm:

$$(a_n) = (10.n)$$

$$(b_n) = \left(\sum_{k=1}^{10} n \right) = \underbrace{(n + n + n + \dots + n)}_{10 \text{ tane}} = (10.n)$$

$$(c_n) = \left(\sum_{k=1}^{10} k \right) = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = (55)$$

$$(d_n) = (4)$$

olduğuna göre, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $(a_n) = (b_n)$ dir.

(c_n) ve (d_n) dizileri sabit dizi olup, birbirlerinden

ve (a_n) ile (b_n) dizilerinden farklıdır.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^n k \right), (b_n) = \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$(c_n) = \left(\frac{n^2 + n}{2} \right), (d_n) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

$$A) (a_n) = (d_n) \quad B) (a_n)' = (b_n)$$

$$C) (a_n) = (d_n) \quad D) (a_n) = (c_n)$$

$$(c_n) = (b_n) \quad (b_n) = (d_n)$$

$$E) (a_n) \neq (c_n)$$

Soru 2:

$$(a_n) = \left(\frac{2n + a}{bn + 3} \right)$$

$$(b_n) = \left(\frac{2n + 5}{4n + 3} \right)$$

dizileri için, $(a_n) = (b_n)$ olduğuna göre, a.b kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 10 E) 20

Bilgi

Bir (a_n) dizisinin grafiği $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesidir.

Analitik düzlemde; $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3) \dots$

ikilileri ile eşlenen noktalar (a_n) dizisinin grafiğidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = (n + 2)$$

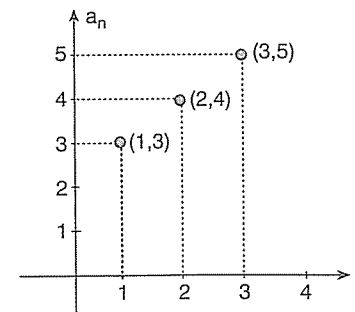
dizisinin grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow (1, 3)$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 \Rightarrow (2, 4)$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5 \Rightarrow (3, 5)$$



Örnek 2:

$(a_n) = (3)$ dizisinin grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow (1, 3)$$

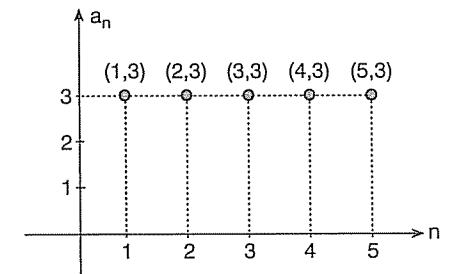
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \Rightarrow (2, 3)$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \Rightarrow (3, 3)$$

$$\vdots$$

$$n = k \Rightarrow a_k = 3 \Rightarrow (k, 3)$$

$$\vdots$$



Örnek 3:

$(a_n) = (n^2 - 4n + 6)$ dizisinin grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \text{ dir.}$$

$$k = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2 \text{ dir.}$$

Ayrıca,

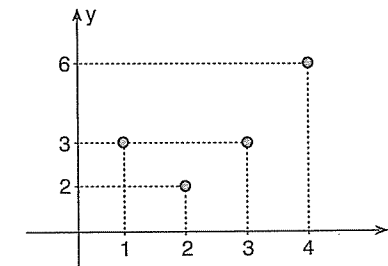
$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 6$$

Buna göre,

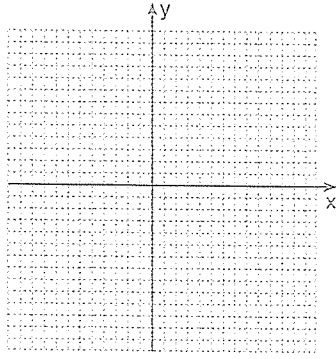


■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(a_n) = (-1)^n$$

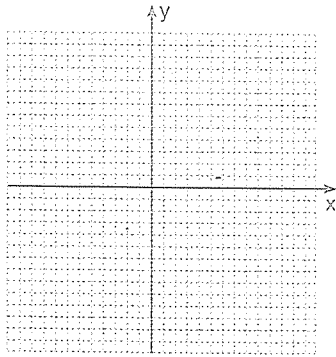
dizisinin grafiğini çiziniz.



Soru 2:

$$(a_n) = (n^2 + 6n)$$

dizisinin grafiğini çiziniz.



■ Bilgi

(a_n) ve (b_n) birer dizi, $c \in \mathbb{R}$ olsun.

Bu iki dizinin toplamı;

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \text{ dir.}$$

Bu iki dizinin farkı;

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) \text{ dir.}$$

Bu iki dizinin çarpımı;

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \text{ dir.}$$

Bu iki dizinin bölümü;

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \text{ dir.}$$

$(\forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } b_n \neq 0 \text{ dir.})$

Bu dizinin bir gerçek sayı ile çarpımı;

$$c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n) \text{ dir.}$$

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = (5 - 2n) \text{ ve } (b_n) = (3n - 2)$$

dizileri için $(a_n) + (b_n)$ ve $(a_n) - (b_n)$ dizilerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n) = (5 - 2n + 3n - 2) \\ &= (n + 3) \text{ tür.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_n) - (b_n) &= (a_n - b_n) = (5 - 2n - 3n + 2) \\ &= (7 - 5n) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{2}{n} \right) \text{ ve } (b_n) = \left(\frac{n+1}{3n} \right)$$

dizileri için $(a_n) \cdot (b_n)$ ve $(a_n) : (b_n)$ dizilerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (a_n) \cdot (b_n) &= (a_n \cdot b_n) = \left(\frac{2}{n} \right) \cdot \left(\frac{n+1}{3n} \right) \\ &= \left(\frac{2n+2}{3n^2} \right) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_n) : (b_n) &= \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \left(\frac{2}{n} \right) : \left(\frac{n+1}{3n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{n} \right) \cdot \left(\frac{3n}{n+1} \right) = \left(\frac{6}{n+1} \right) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$(a_n) = (2), (b_n) = (n+1), (c_n) = (n-5)$$

dizileri için,

$$(a_n)^2 \cdot (c_n) - (b_n)$$

dizisini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (a_n)^2 \cdot (c_n) - (b_n) &= (2^2 \cdot (n-5) - (n+1)) \\ &= (4(n-5) - n - 1) \\ &= (4n - 20 - n - 1) \\ &= (3n - 21) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(a_n) = (2), (b_n) = (n), (c_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$$

olduğuna göre, $(a_n) + (b_n) + (c_n)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left(\frac{n}{n+1} \right)$ B) $\left(\frac{n+1}{n} \right)$ C) $\left(\frac{(n+1)^2}{n} \right)$
D) (2) E) $\left(\frac{2}{n} \right)$

Soru 2:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right), (b_n) = (3n), (c_n) = (3)$$

olduğuna göre, $\frac{(a_n) + (c_n)}{(a_n) \cdot (b_n)}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left(\frac{3n}{n+1} \right)$ B) $\left(\frac{n+1}{n+3} \right)$ C) $\left(\frac{n+1}{n} \right)$
D) $\left(\frac{1+3n}{3n} \right)$ E) $\left(\frac{3}{1+n} \right)$

Bilgi

(a_n) bir dizi olsun, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için;

1. $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton artan dizidir.
2. $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton azalan dizidir.
3. $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton azalmayan dizidir.
4. $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ monoton artmayan dizidir.
5. $a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ sabit dizidir.

Yukarıdaki şartlardan herhangi birini sağlayan dizilere **monoton diziler** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n} \right)$$

dizisinin monotonluğunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\ &\quad (n) \quad (n+1) \\ &= \frac{2n^2+3n-(2n+1)(n+1)}{n^2+n} \\ &= \frac{2n^2+3n-(2n^2+3n+1)}{n^2+n} \\ &= \frac{-1}{n^2+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için,} \\ a_{n+1} - a_n &= \frac{-1}{n^2+n} < 0 \text{ dir.} \\ \Rightarrow a_{n+1} - a_n &< 0 \\ \Rightarrow a_{n+1} &< a_n \\ \Rightarrow a_n &\text{ monoton azalandır.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{4^n}{n} \right)$$

dizisinin monotonluğunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{4^{n+1}}{n+1}}{\frac{4^n}{n}} = \frac{4 \cdot 4^n}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n} \\ &= \frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 - \frac{4}{n+1} \text{ olup,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \text{ dir.}$$

$$\text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } 4 - \frac{4}{n+1} > 1 \text{ olduğundan,}$$

$$(a_n) \text{ monoton artandır.}$$

Örnek 3:

$$(a_n) = (n^2 - 4n + 3)$$

dizisinin monotonluğunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (a_{n+1}) - (a_n) &= ((n+1)^2 - 4(n+1) + 3) - (n^2 - 4n + 3) \\ &= (n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 3) - (n^2 - 4n + 3) \\ &= n^2 + 2n - n^2 + 4n - 3 \\ &= 2n - 3 \text{ bulunur.} \\ n = 1 \text{ için } a_2 - a_1 &= 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0 \\ n = 2 \text{ için } a_3 - a_2 &= 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0 \\ \Rightarrow a_2 < a_1 \text{ ve } a_3 > a_2 \text{ olduğundan, } (a_n) \text{ dizisi} \\ &\text{monoton değildir.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$(a_n) = (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n)$$

dizisinin monotonluğunu inceleyelim.

Çözüm:

$$(a_n) = (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) = \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right)$$

$$(a_n) = \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2} \right) \text{ şeklindedir.}$$

O halde;

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3^{n+2} - 1}{2}}{\frac{3^{n+1} - 1}{2}} \\ &= \frac{3^{n+2} - 1}{3^{n+1} - 1} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için, } \frac{3^{n+2} - 1}{3^{n+1} - 1} > 1$$

olduğundan, (a_n) dizisi monoton artandır.

Örnek 5:

$$(a_n) = (-n^2)$$

dizisinin monotonluğunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (a_n) &= (-n^2) \text{ ve } (a_{n+1}) = (-(n+1)^2) \\ \Rightarrow a_{n+1} - a_n &= -(n+1)^2 + n^2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + n^2 \\ &= -2n - 1 \\ \text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } -2n - 1 &< 0 \\ a_{n+1} - a_n &< 0 \\ a_{n+1} &< a_n \Rightarrow a_n \text{ monoton azalandır.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

$$(a_n) = ((n-1)!)!$$

dizisinin monotonluk durumunu inceleyelim.

Çözüm:

$(a_n) = (1, 1, 2, 6, 24, 120, \dots)$ olduğundan dizi monoton azalmayandır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(a_n) = \left(\frac{an+b}{cn+d} \right)$ biçimindeki dizilerde monotonluk durumu aşağıdaki gibi incelenir.

1. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} > 1$ ise dizi ne artan ne de azalandır. Dizi monoton değildir.
2. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} < 1$ ise dizi monotondur.
 - i. $ad - bc > 0$ ise dizi monoton artan,
 - ii. $ad - bc < 0$ ise dizi monoton azalan,
 - iii. $ad - bc = 0$ ise dizi sabit dizidir.

Örnek 7:

$$(a_n) = \left(\frac{5n+1}{7n-2} \right)$$

dizisinin monotonluk durumunu inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 7n - 2 = 0 \text{ ise } n &= \frac{2}{7} < 1 \text{ olduğundan dizi} \\ &\text{monotondur.} \\ 5(-2) - 7 \cdot 1 &= -17 < 0 \text{ olduğundan } (a_n) \text{ dizisi} \\ &\text{monoton azalandır.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıda genel terimleri verilen dizilerden hangisi monoton artandır?

- A) 4 B) $-n$ C) 0
D) $n-3$ E) $\frac{1}{n}$

Soru 2:

Aşağıda genel terimleri verilen dizilerden hangisi monoton azalandır?

- A) $(3n)$ B) $\frac{n-4}{3n-5}$ C) $\frac{5n-3}{2n-7}$
D) $\frac{n-1}{n+4}$ E) $\frac{3n+2}{2n-1}$

Soru 3:

$$(a_n) = \left(\frac{n+4}{n+3} \right)$$

dizisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) Monoton artandır.
B) Monoton azalandır.
C) Monoton artmayandır.
D) Monoton azalmayandır.
E) Sabit dizidir.

ALT DİZİ

Bilgi

(k_n) artan bir pozitif tamsayı dizisi olmak üzere, (a_n) dizisinde n yerine k_n yazmakla elde edilen (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir. (a_{k_n}) alt dizisinin her terimi (a_n) dizisinin bir terimidir.

Uyarı:

(a_n) dizisinde n yerine, $2n-7, \frac{1}{n}, 1-n, \frac{2n+1}{n+5}, \dots$

gibi ifadeler yazılarak alt diziler elde edilemez. Çünkü bu ifadeler pozitif tamsayı terimli bir dizinin genel terimi değildir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

dizisinin (a_{2n}) alt dizisini bulalım.

Çözüm:

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \Rightarrow (a_{2n}) = \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \text{ olur.}$$

Şimdi de bu dizileri açık olarak yazalım.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right)$$

$$(a_{2n}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{2n}{2n+1} \right)$$

Görüldüğü gibi alt dizinin her bir terimi esas dizinin bir terimidir.

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{n-2}{n+3} \right) \text{ ve } (k_n) = \left(\frac{n^3+27}{n^2-3n+9} \right)$$

olmak üzere, (a_{k_n}) alt dizisinin elde edilebileceğini bulalım.

Çözüm:

(a_{k_n}) alt dizisinin elde edilebilmesi için (k_n) dizisinin pozitif tamsayı dizisi olması gerekir.

$$k_n = \frac{n^3+27}{n^2-3n+9} = \frac{(n+3)(n^2-3n+9)}{n^2-3n+9} = n+3 \text{ olur.}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $k_n = n+3 \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan (a_{k_n}) alt dizisi elde edilebilir. O halde,

$$(a_n) = \left(\frac{n-2}{n+3} \right) \Rightarrow (a_{k_n}) = (a_{n+3}) = \left(\frac{n+3-2}{n+3+3} \right) = \left(\frac{n+1}{n+6} \right) \text{ dir.}$$

⚡ Bir (b_n) dizisinin, bir (a_n) dizisinin alt dizisi olup olmadığını anlamak için,

- (a_n) dizisinde n yerine k_n yazılarak (a_{k_n}) ifadesi elde edilir. $(b_n) = (a_{k_n})$ eşitliğinden k_n bulunur. Eğer (k_n) pozitif tamsayı dizisi ise (b_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir.
- (b_n) dizisi ile (a_n) dizisinin terimleri açık olarak yazılır. Eğer (b_n) dizisinin her terimi (a_n) dizisinin bir terimi ise (b_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir. Veya (b_n) dizisinin en az bir terimi (a_n) dizisinin bir terimi değilse (b_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

Örnek 3:

$$(b_n) = \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right) \text{ dizisinin, } (a_n) = \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)$$

dizisinin bir alt dizisi olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \text{ dizisinde,}$$

$$(a_{k_n}) = \left(\frac{k_n+1}{2k_n+1} \right) \text{ dir.}$$

$$(b_n) = (a_{k_n}) \Rightarrow \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{k_n+1}{2k_n+1}$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n}{n+1} \text{ bulunur.}$$

$(k_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)$ dizisi pozitif tamsayı dizisi olmadığından (b_n) dizisi (a_n) dizisinin alt dizisi değildir.

Örnek 4:

$$(b_n) = \frac{4n^2-1}{2n^2+4} \text{ dizisinin, } (a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+5} \right)$$

dizisinin bir alt dizisi olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

$$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+5} \right) \text{ dizisinde,}$$

$$(a_{k_n}) = \frac{2k_n+1}{k_n+5} \text{ tir.}$$

$$(b_n) = (a_{k_n}) \Rightarrow \frac{4n^2-1}{2n^2+4} = \frac{2k_n+1}{k_n+5}$$

$$\Rightarrow k_n = 2n^2-1 \text{ bulunur.}$$

$(k_n) = (2n^2-1)$ dizisi bir pozitif tamsayı dizisi olduğundan (b_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir.

Örnek 5:

$$(a_n) = (2^n - n^2 + 2)$$

olduğuna göre, (a_{3n+2}) alt dizisinin ikinci teriminin değerini bulalım.

Çözüm:

(a_{3n+2}) alt dizisinin ikinci terimi $n = 2$ için,

$$a_{3 \cdot 2 + 2} = a_8 \text{ dir.}$$

$$a_n = 2^n - n^2 + 2 \Rightarrow a_8 = 2^8 - 8^2 + 2 = 194 \text{ tür.}$$

Örnek 6:

$$(a_n) = (n + 2)$$

olduğuna göre, (a_{2n}) , $(a_{\frac{n}{2}})$, (a_{n-2}) , (a_{n^2+1}) dizilerinin (a_n) dizisinin alt dizisi olup olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$(a_{2n}) \Rightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $2n \in \mathbb{N}^+$ olduğundan, (a_{2n}) alt dizidir.

$(a_{\frac{n}{2}}) \Rightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}^+$ olduğundan

$(a_{\frac{n}{2}})$ alt dizi değildir.

$(a_{n-2}) \Rightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $n-2 \notin \mathbb{N}^+$ olduğundan,

(a_{n-2}) alt dizi değildir.

$(a_{n^2+1}) \Rightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $n^2 + 1 \in \mathbb{N}^+$ olduğun-

dan (a_{n^2+1}) alt dizidir.

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

dizisinin alt dizilerinden birisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{n-1}{n}$ B) $\frac{n^2-3}{n^2-2}$ C) $\frac{2n+2}{2n+3}$

D) $\frac{n-4}{n-3}$ E) $\frac{n^3-7}{n^3-6}$

Soru 2:

(a_n) bir reel sayı dizisidir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi a_n nin alt dizisidir?

A) $\left(a_{\frac{n}{2}} \right)$ B) (a_{n^2-5}) C) $\left(a_{n-\frac{1}{2}} \right)$

D) (a_{2n+3}) E) $\left(a_{\frac{n-1}{n+1}} \right)$

ARİTMETİK DİZİ**Bilgi**

Ardışık her iki terimi arasındaki farkları eşit olan diziye **aritmetik dizi** denir.

Buna göre, her $n \in \mathbb{N}^+$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$a_{n+1} - a_n = d$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisine aritmetik dizi denir.

Burada $d \in \mathbb{R}$ sayısına dizinin ortak farkı denir.

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = d + a_1$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = d + a_2$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = d + a_3$$

$$\vdots$$

$$+ a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = d + a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

O halde, aritmetik dizinin genel terimi,

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ dir.}$$

Buradan, $a_n = a_k + (n-k)d$ biçiminde de genel terim ifade edilebilir.

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

İlk terimi 12 ve ortak farkı 3 olan aritmetik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$a_1 = 12$ ve $d = 3$ olmak üzere,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 12 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = 12 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n + 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{n+4}{5} \right)$$

dizinin aritmetik dizi olduğunu gösterip, ortak farkını bulalım.

Çözüm:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+5}{5} - \frac{n+4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{5} \text{ ve } (a_n) \text{ aritmetik dizidir.}$$

Örnek 3:

Bir (a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_4 = 12 \text{ ve } a_{11} = 26$$

olduğuna göre, ortak farkı ve a_7 yi bulalım.

Çözüm:

$a_n = a_k + (n-k)d$ olduğundan,

$$a_{11} = a_4 + (11-4)d$$

$$a_{11} = a_4 + 7d$$

$$26 = 12 + 7d$$

$$14 = 7d$$

$$2 = d \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$a_7 = a_4 + 3d$$

$$a_7 = 12 + 3 \cdot 2$$

$$a_7 = 18 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

İlk terimi 4, son terimi 39 ve ortak farkı 5 olan sonlu aritmetik dizinin terim sayısını ve genel terimini bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = 4, a_n = 39, d = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$39 = 4 + (n-1) \cdot 5$$

$$35 = (n-1) \cdot 5$$

$$7 = n-1$$

$$8 = n \text{ bulunur.}$$

Yani bu aritmetik dizinin 8 tane terimi vardır.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 4 + 5(n-1)$$

$$a_n = 5n - 1 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \dots, a_n, \dots \right)$$

aritmetik dizisinin 10. terimi kaçtır?

- A) $\frac{47}{10}$ B) $\frac{51}{10}$ C) $\frac{63}{10}$ D) $\frac{71}{10}$ E) $\frac{84}{10}$

Soru 2:

Aşağıdakilerden hangisi aritmetik dizidir?

- A) $(4 - n^2)$ B) $(3n + 1)$ C) (n^3)
D) $(n^2 + 1)$ E) $\left(\frac{2}{n}\right)$

Soru 3:

$$(a_n) = (3 - 2n)$$

aritmetik dizisinin ortak farkı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) -2 D) -1 E) 0

Soru 4:

Bir (a_n) aritmetik dizisi için,

$$a_{13} = 10 \text{ ve } a_5 = 6$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

Soru 5:

$$(a_n) = (3n - 1)$$

aritmetik dizisinin ortak farkı d, 5. terimi a_5 olduğuna göre, d + a_5 kaçtır?

- A) 17 B) 15 C) 13 D) 11 E) 9

Soru 6:

$$(a_n) = (8n)$$

aritmetik dizisinin ilk 10 teriminin toplamı kaçtır?

- A) 320 B) 360 C) 380 D) 400 E) 440

Bilgi

Aritmetik dizinin özelliklerini verelim.

1. Bir aritmetik dizide her terim, kendisine eşit uzaklıkta bulunan herhangi iki teriminin aritmetik ortasıdır. Yani; $(k \in \mathbb{N}^+ \text{ ve } 1 \leq k \leq n)$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ dir.}$$

$$\text{örneğin, } a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{a_3 + a_7}{2} \text{ dir.}$$

2. Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir.

$$\text{Yani; } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots \text{ dir.}$$

3. p ve q terimlerinin arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse ortak fark,

$$d = \frac{q-p}{n+1} \text{ olur.}$$

4. Bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \text{ veya}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \text{ dir.}$$

5. Bir (a_n) aritmetik dizisi için daima,

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

(a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17} = 36$$

olduğuna göre, a_{14} terimini bulalım.

Çözüm:

(a_n) aritmetik dizisi için,

$$a_{14} = \frac{a_{13} + a_{15}}{2} \Rightarrow a_{13} + a_{15} = 2.a_{14}$$

$$a_{14} = \frac{a_{11} + a_{17}}{2} \Rightarrow a_{11} + a_{17} = 2.a_{14}$$

$$\text{Buradan; } a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17} = 36$$

$$\Rightarrow 2a_{14} + 2.a_{14} = 36$$

$$4.a_{14} = 36$$

$$a_{14} = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

(a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_3 + a_6 = 0$$

olduğuna göre, bu dizinin ilk sekiz teriminin toplamını bulalım.

Çözüm:

(a_n) aritmetik dizisi için,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-2} = a_3 + a_{n-3} = \dots$$

eşitliğini kullanalım,

$$a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = a_2 + a_7 = a_1 + a_8 = 0 \text{ dir.}$$

$$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

= 0
= 0
= 0
= 0

$$\Rightarrow S_8 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

(a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_2 = \frac{1}{2} \text{ ve } d = -\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Bu dizinin ilk 10 teriminin toplamını ve ilk n terim toplamını bulalım.

Çözüm:

Verilenlere göre,

$$a_n = a_2 + (n-2)d$$

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-2) \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$a_n = \frac{2-n}{4} + \frac{2}{4}$$

$$(a_n) = \left(\frac{4-n}{4}\right) \text{ ve}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{4-1}{4} + \frac{4-n}{4}\right)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{7-n}{4} = \frac{7n-n^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{7 \cdot 10 - 10^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{-30}{8} = \frac{-15}{4} \text{ olur.}$$

Örnek 4:

İlk n teriminin toplamı,

$$S_n = n^2 - 4n$$

olan aritmetik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = n^2 - 4n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = (n-1)^2 - 4(n-1)$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n = (n^2 - 4n) - ((n-1)^2 - 4(n-1))$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 - 4n - (n^2 - 2n + 1 - 4n + 4)$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 - 4n - n^2 + 6n - 5$$

$$\Rightarrow a_n = 2n - 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

(a_n) aritmetik dizisinde, $a_{11} - a_1 = 36$ ve ilk 11 terimi toplamı 176 dır.

Buna göre, bu dizinin 5. terimini bulalım.

Çözüm:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} \cdot (a_1 + a_{11})$$

$$176 = \frac{11}{2} \cdot (a_1 + a_{11})$$

$$a_1 + a_{11} = 32 \text{ bulunur.}$$

$$a_{11} + a_1 = 32$$

$$a_{11} - a_1 = 36$$

$$+$$

$$2.a_{11} = 68$$

$$a_{11} = 34 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Buradan, } a_{11} + a_1 = 32$$

$$34 + a_1 = 32$$

$$a_1 = -2$$

$$\text{ve } d = \frac{a_{11} - a_1}{11 - 1} = \frac{36}{10} = 3,6$$

$$a_5 = a_1 + 4.d$$

$$a_5 = (-2) + 4.(3,6)$$

$$a_5 = -2 + 14,4$$

$$a_5 = 12,4 = \frac{124}{10} = \frac{62}{5} \text{ bulunur.}$$

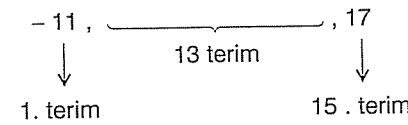
Örnek 6:

- 11 ve 17 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte sonlu bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde 13 terim yerleştiriliyor.

Bu dizinin ortak farkını, genel terimini ve 4. terimini bulalım.

Çözüm:

I. Yol:



$$a_1 = -11 \text{ ve } a_{15} = 17 \text{ dir.}$$

$$a_n = a_1 + (n-1).d \text{ olduğundan,}$$

$$a_{15} = a_1 + 14.d$$

$$17 = -11 + 14.d$$

$$28 = 14.d$$

$$d = 2 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$

$$a_n = (-11) + (n-1).2$$

$$(a_n) = (2n - 13) \text{ bulunur.}$$

$$\text{Buradan; } a_4 = 2.4 - 13 = -5 \text{ tir.}$$

II. Yol:

$$d = \frac{a_{15} - a_1}{15 - 1}$$

$$d = \frac{17 - (-11)}{13 + 1} = 2 \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan da } a_4 = 5 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Bir aritmetik dizinin 7. terimi ile 17. teriminin toplamı $\frac{5x}{2}$ olduğuna göre, 12. terimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3x}{2}$ B) $\frac{3x}{4}$ C) $\frac{5x}{4}$ D) $\frac{5x}{8}$ E) $\frac{7x}{8}$

Soru 2:

x ile y sayıları arasına bu sayılar ile birlikte sonlu aritmetik dizi oluşturacak şekilde sekiz terim yerleştirilirse, bu dizinin ortak farkı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{y-x}{10}$ B) $\frac{y-x}{9}$ C) $\frac{y-x}{8}$
D) $\frac{y+x}{9}$ E) $\frac{y+x}{10}$

Soru 3:

2 ile 22 sayılarının arasına bu sayılar ile birlikte sonlu aritmetik dizi oluşturacak şekilde dokuz tane terim yerleştiriliyor.

Buna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 3

Soru 4:

(a_n) bir aritmetik dizidir.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4.a_5$$

olduğuna göre, $\frac{S_3}{a_3 + a_7}$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 8

Soru 5:

(a_n) aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = 3n^2 - 4n$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $\frac{1}{2}$ E) 7

Soru 6:

(a_n) aritmetik dizisi için,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25$$

olduğuna göre, a_3 kaçtır?

- A) -5 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 10 E) 15

GEOMETRİK DİZİ

Bilgi

Ardışık her iki teriminin oranları eşit olan diziye **geometrik dizi** denir.

Buna göre, her $n \in \mathbb{N}^+$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ eşitliğini sağlayan } (a_n) \text{ dizisi bir}$$

geometrik dizidir. r sayısına da dizinin ortak çarpanı (ortak oranı) denir.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ dir.}$$

Buradan;

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ dir.}$$

O halde, geometrik dizinin genel terimi,

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ dir. Bir başka ifadeyle genel terim; $k \in \mathbb{N}^+$ ve $1 \leq n$ olmak üzere,

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

biçiminde de yazılabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

İlk terimi 8 ve ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan geometrik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = 8 \text{ ve } r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 8 \cdot 2^{1-n}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{3+1-n}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{4-n} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$(a_n) = \left(\frac{2}{3^n}\right)$$

dizisinin geometrik dizi olduğunu gösterip, ortak çarpanını bulalım.

Çözüm:

$$a_n = \frac{2}{3^n} \text{ ve } a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3} \text{ (ortak çarpan)}$$

olduğundan (a_n) dizisi geometrik dizidir.

Örnek 3:

(a_n) geometrik dizisinde,

$$a_4 = 8 \text{ ve } a_7 = 4$$

olduğuna göre, a_{10} un değerini bulalım.

Çözüm:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 8$$

$$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a_4}{a_7} = \frac{1}{r^3} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ ve } a_4 = 8 \text{ için,}$$

$$a_{10} = a_4 \cdot r^{10-4}$$

$$a_{10} = 8 \cdot r^6$$

$$a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6$$

$$a_{10} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

İlk terimi 3, son terimi -81 ve ortak çarpanı -3 olan geometrik dizinin terim sayısını bulalım.

Çözüm:

$$a_1 = 3, a_n = -81, r = -3$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$-81 = 3 \cdot (-3)^{n-1}$$

$$-27 = (-3)^{n-1}$$

$$-27 = (-3)^{n-1}$$

$$(-3)^3 = (-3)^{n-1}$$

$$3 = n - 1$$

$$4 = n \text{ bulunur.}$$

Geometrik dizisinin terim sayısı 4 tür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

İkinci terimi 1 ve beşinci terimi 8 olan geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Soru 2:

(a_n) pozitif terimli bir geometik dizidir.

$$a_3 = 3 \text{ ve } a_9 = 12$$

olduğuna göre, a_6 kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) $\frac{1}{2}$ E) 5

Soru 3:

(a_n) bir geometrik dizidir.

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, a_n, \dots\right)$$

olduğuna göre, bu dizinin 7. teriminin, ortak çarpanı ile toplamı kaçtır?

- A) $\frac{1}{729}$ B) $\frac{24}{729}$ C) $\frac{181}{729}$ D) $\frac{241}{729}$ E) $\frac{244}{729}$

Soru 4:

Aşağıdakilerden hangisi geometrik dizidir?

- A) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ B) $(4n)$ C) $\left(\frac{1}{n}\right)$
D) $(2n - 1)$ E) $(n^2 + 1)$

Soru 5:

Genel terimi,

$$a_n = 2^{n-1}$$

olan geometrik dizinin ortak çarpanı r ve 4. terimi a_4 olduğuna göre, $\frac{a_4}{r}$ kaçtır?

- A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

Soru 6:

İlk terimi $\frac{1}{32}$ olan ve ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 10. terimi kaçtır?

- A) 16 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

Soru 7:

İlk terimi $\frac{1}{5}$, son terimi 125 ve ortak çarpanı 5 olan sonlu geometrik dizinin terim sayısı kaçtır?

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

Soru 8:

Genel terimi a_n olan bir geometrik dizide,

$$\frac{a_1 + a_4}{a_2 + a_3} = 1$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Bilgi

Geometrik dizinin özelliklerini verelim.

1. Bir geometrik dizide, her terimin karesi kendisine eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımına eşittir.

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k} \text{ veya } |a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}} \text{ dir.}$$

Bu özelliğe geometrik orta özelliği denir.

Örneğin, $a_4^2 = a_1 \cdot a_7$ ya da

$a_4^2 = a_2 \cdot a_6$ ya da $a_4^2 = a_3 \cdot a_5$ tir.

2. Sonlu bir geometrik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımları birbirine eşittir.

Yani, $a_n \cdot a_1 = a_{n-1} \cdot a_2 = a_{n-2} \cdot a_3 = \dots$ dir.

3. p ve q terimlerinin arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse ortak

çarpan; $r = \sqrt[n+1]{\frac{q}{p}}$ olur.

4. Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ dir.}$$

5. Bir (a_n) geometrik dizisinin ortak çarpanı daima,

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1} \text{ yada } \frac{a_n}{a_k} = r^{n-k} \text{ dir.}$$

6. Bir dizi hem geometrik dizi, hem de aritmetik dizi ise bu dizi sabit dizidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk beş teriminin çarpımı 243 olduğuna göre, a_3 terimini bulalım.

Çözüm:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 243$$

$$\text{Daima, } a_2 \cdot a_4 = a_3^2$$

$$a_1 \cdot a_5 = a_3^2 \text{ olduğundan,}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 243$$

$$a_3 \cdot a_3^2 \cdot a_3^2 = 243$$

$$a_3^5 = 243$$

$$a_3 = 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

Ortak çarpanı 1 den farklı olan bir (a_n) geometrik dizisinde $a_4 \cdot a_7 = 1$ olduğuna göre, ilk kaç terim çarpımının 1 olduğunu bulalım.

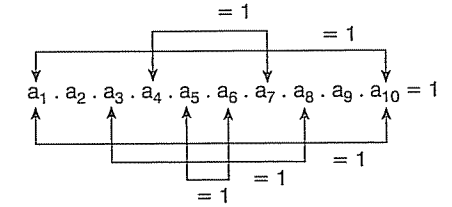
Çözüm:

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$$

eşitliğini kullanalım,

$$1 = a_4 \cdot a_7 = a_5 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_8 = a_2 \cdot a_9 = a_1 \cdot a_{10}$$

eşitliği bulunur. O halde,



bulunur. Yani ilk 10 tane teriminin çarpımı 1 dir.

Örnek 3:

2 ile 64 sayıları arasına bu sayılar ile birlikte sonlu geometrik dizi oluşturacak şekilde 7 terim yerleştiriliyor.

Bu dizinin ortak çarpanını ve dördüncü terimini bulalım.

Çözüm:

I. Yol:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \dots\dots\dots & 64 \\ \downarrow & \underbrace{\hspace{1cm}}_{7 \text{ terim}} & \downarrow \\ a_1 = 2 & & a_9 = 64 \end{array}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_9 = a_1 \cdot r^8 \Rightarrow 64 = 2 \cdot r^8$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{32} = r \text{ dir.}$$

$$\text{Buna göre, } a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot (\sqrt[8]{32})^3$$

$$\Rightarrow a_4 = 4 \cdot \sqrt[8]{2^7} \text{ dir.}$$

II. Yol:

$$r = \sqrt[7+1]{\frac{64}{2}} = \sqrt[8]{32} \Rightarrow a_4 = 2 \cdot \sqrt[8]{2^7} \text{ dir.}$$

Örnek 4:

(a_n) geometrik dizisinde

$$a_2 = \frac{1}{3} \text{ ve ortak çarpan } r = 3 \text{ tür.}$$

Bu dizinin ilk n terim toplamını ve ilk 8 terim toplamını bulalım.

Çözüm:

$$a_2 = \frac{1}{3} \text{ ve } r = 3$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 \cdot r$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = a_1 \cdot 3$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{9} \text{ dur.}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{3^n - 1}{18}$$

$$S_8 = \frac{3^8 - 1}{18} = \frac{(3^4 - 1)(3^4 + 1)}{18}$$

$$S_8 = \frac{80 \cdot 82}{18} = \frac{3280}{9} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

İlk n teriminin toplamı $S_n = 4^n - 1$ olan geometrik dizinin genel terimini bulalım.

Çözüm:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 4^n - 1$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 4^{n-1} - 1$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n = (4^n - 1) - (4^{n-1} - 1)$$

$$\Rightarrow a_n = 4^n - 1 - 4^{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow a_n = 4^n - 4^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 4^n \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = 4^n \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = 3 \cdot 4^{n-1} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

(a_n) geometrik dizisinde,

$$a_6 + a_8 = 360$$

$$a_5 + a_7 = 180$$

olduğuna göre, bu dizinin üçüncü terimini bulalım.

Çözüm:

$$a_6 + a_8 = 360 \Rightarrow a_1 \cdot r^5 + a_1 \cdot r^7 = 360$$

$$a_5 + a_7 = 180 \Rightarrow a_1 \cdot r^4 + a_1 \cdot r^6 = 180$$

$$\Rightarrow \frac{a_6 + a_8}{a_5 + a_7} = \frac{360}{180} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot r^5(1 + r^2)}{a_1 \cdot r^4(1 + r^2)} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = r \text{ bulunur.}$$

$$a_6 + a_8 = 360 \Rightarrow a_1 \cdot r^5 + a_1 \cdot r^7 = 360$$

$$a_1 \cdot (r^5 + r^7) = 360$$

$$a_1 \cdot (2^5 + 2^7) = 360$$

$$a_1 \cdot (32 + 128) = 360$$

$$a_1 = \frac{360}{160} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2 = \frac{9}{2} \cdot 2^2 = 18 \text{ bulunur.}$$

Bileş Uygulama**Soru 1:**

Sonlu bir geometrik dizinin ardışık beş terimi,

$$\frac{1}{2}, x, y, z, 16$$

olduğuna göre, $x \cdot y \cdot z$ kaçtır?

- A) 32 B) 16 C) $16\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

Soru 3:

$\sqrt{2}$ ve $2\sqrt{2}$ arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde 3 terim yerleştirilirse, yerleştirilen ilk terim kaç olur?

- A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt[8]{2}$ D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

FEM YAYINLARI

Soru 2:

$\sqrt{3}$ ve $\sqrt{27}$ sayıları arasına aşağıdaki sayılardan hangisi yerleştirilirse bir geometrik dizinin ardışık üç terimi elde edilmiş olur?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) 2 E) 3

Soru 4:

Bir geometrik dizinin ilk dört terim toplamının, ilk iki terim toplamına oranı x olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $x - 1$ B) $-\sqrt{x - 1}$ C) x
D) $-\sqrt{x}$ E) $\sqrt{x} - 1$

FEM YAYINLARI

1. Aşağıdakilerden hangisi bir dizinin genel terimi olamaz?

- A) n^n B) $n!$ C) $\sqrt{n}$
D) $\sqrt{6n-12}$ E) $2+n$

2. Aşağıdakilerden hangisi bir reel sayı dizisi belirtir?

- A) $\left(\frac{2n}{\ln(n-1)}\right)$ B) $(4n-1)$ C) $\left(\frac{1}{n-2}\right)$
D) $\left(\frac{n}{n^2-9}\right)$ E) $(\log(n-4))$

3. $(a_n) = (n^2 + n + 1)$

dizisinin açık ifadesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) (1, 2, 3, ...) B) (3, 7, 10, ...)
C) (3, 7, 14, ...) D) (1, 3, 7, ...)
E) (3, 7, 13, ..., $n^2 + n + 1$, ...)

4. $(a_n) = \left(\frac{n^2-36}{3n}\right)$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

- A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 3

5. $(a_n) = (4 \cdot 2^{-n})$

dizisinin ilk dört teriminin çarpımı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) $\frac{1}{4}$

6. Genel terimi,

$$a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ çift} \\ 2n, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olan dizinin ilk 6 teriminin toplamı kaçtır?

- A) 32 B) 33 C) 34 D) 35 E) 36

7. $(a_n) = \left(\frac{n+24}{n+2}\right)$

dizisinin kaç terimi 4 ten büyüktür?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 2

8. $(a_n) = (2n+17)$ dizisi ile $(b_n) = (4n-3)$ dizisinin n . terimleri birbirine eşit olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 37 B) 21 C) 10 D) 9 E) 5

9. $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^n 2k\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{n-1}{2}\right)$

olduğuna göre, $2 \cdot (a_n) - 4 \cdot (b_n)$ dizisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (n^2+4) B) (n^2+2) C) (n^2-2)
D) $(2n^2-2)$ E) $(2n^2+2)$

10. Aşağıdakilerden hangisi sabit dizidir?

- A) $\left(\frac{1}{n}\right)$ B) $((-1)^n + (-1)^{n+1})$ C) (n)
D) $((-3n)^n)$ E) (5^n)

11. Genel terimi, $a_n = 5 + (k-2)n - 3n$ olan (a_n) dizisi sabit bir dizi olduğuna göre, $k + a_k$ toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

12. $(a_n) = \left(\frac{2}{n+3}\right)$ dizisinin kaç terimi $\frac{1}{50}$ ile $\frac{1}{10}$ arasındadır?

- A) 76 B) 77 C) 78 D) 79 E) 80

13. Genel terimi; $a_n = 2^n \cdot n!$ olan dizide a_n, a_{n+1} in kaç katıdır?

- A) $2n-1$ B) $n+1$ C) $\frac{1}{n+1}$
D) $2n+2$ E) $\frac{1}{2n+2}$

14. Bir (a_n) dizisinde her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 5 \text{ ve } a_1 = 5$$

olduğuna göre, a_{12} kaçtır?

- A) 196 B) 192 C) 186 D) 182 E) 172

15. (a_n) bir dizi olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi (a_n) dizisinin alt dizisidir?

- A) $\left(a_{\frac{n}{5}}\right)$ B) (a_{3n-5}) C) (a_{n+2})
D) $\left(a_{\frac{n^2}{5}}\right)$ E) $\left(a_{\frac{3n-1}{2}}\right)$

16. $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi (a_n) dizisinin alt dizisi değildir?

- A) $\left(\frac{3n+4}{3n+5}\right)$ B) $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$ C) $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)$
D) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)$ E) $\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)$

17. İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 + 2$ olan dizinin 6. terimi ile 7. teriminin toplamı kaçtır?

- A) 49 B) 48 C) 25 D) 24 E) 12

18. $(a_n) = \left(\frac{2n+10}{n}\right)$

dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Aşağıdaki dizilerden hangisi monoton artandır?

- A) $\left(\frac{1}{n}\right)$ B) (n^2-6n) C) (n^2-n^3)
D) (4) E) $(\log_2(n+4))$

20. Aşağıdaki dizilerden hangisi monoton azalandır?

- A) (n^2+1) B) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ C) $\left(\frac{2}{n}\right)$
D) (n^2-8n+1) E) (5)

1. Genel terimi a_n olan bir dizide

$$a_1 = 3 \text{ ve } a_n = \frac{n+1}{n} \cdot a_{n-2}$$

olduğuna göre, a_5 kaçtır?

- A) $\frac{24}{5}$ B) $\frac{24}{7}$ C) 2 D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{9}{7}$

2. $(a_n) = \left(\frac{5n-85}{n+4} \right)$

dizisinin kaç tane terimi tamsayıdır?

- A) 16 B) 14 C) 8 D) 6 E) 2

3. $(a_n) = \left(\prod_{k=2}^n x^{\log x 3} \right)$

$$(b_n) = \left(\prod_{k=1}^n k \right)$$

dizileri veriliyor.

$$(c_n) = \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \text{ olduğuna göre, } \frac{c_5}{c_4} \text{ oranı kaçtır?}$$

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

4. $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)$

$$(b_n) = \left(\frac{2k}{3n-1} \right)$$

dizilerinin üçüncü terimleri eşit olduğuna göre, k kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 7 E) 8

5. $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+2n+14}} \right)$

dizisi veriliyor.

Genel terimi, $b_n = a_{2n+1}$ olan dizinin ikinci terimi kaçtır?

- A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{9}{11}$ C) 3 D) $\frac{15}{8}$ E) $\frac{16}{7}$

6. $(a_n) = \left(2^{\frac{4n-5}{2n+2}} \right)$

dizisinin kaçınıcı terimi $\sqrt{2}$ dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Genel terimi;

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{4n}$$

olan dizi için $\log_{\frac{3}{5}} a_5$ kaçtır?

- A) -20 B) -10 C) 1 D) 10 E) 20

8. İlk n terim toplamı

$$S_n = n! - 1$$

olan dizinin 5. terimi kaçtır?

- A) 96 B) 90 C) 75 D) 23 E) 18

9. $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$

dizisinin 4. terimi kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{13}{8}$ C) $\frac{15}{8}$ D) $\frac{29}{16}$ E) $\frac{31}{16}$

10. Genel terimi,

$$a_n = \frac{2}{(n+2) \cdot (n+4)}$$

olan dizinin ilk 9 teriminin toplamı kaçtır?

- A) $\frac{11}{23}$ B) $\frac{11}{26}$ C) $\frac{13}{27}$ D) $\frac{13}{23}$ E) $\frac{1}{26}$

11. $(a_n) = (13 + p \cdot n)$

dizisi monoton azalan olduğuna göre, p nin alabileceği en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

12. Aşağıda genel terimi verilen reel sayı dizilerinden hangisi monoton artandır?

- A) $\frac{n+1}{2}$ B) 0 C) 2
D) $\frac{2}{n^2+4}$ E) $\frac{1}{n}$

13. Aşağıda genel terimi verilen reel sayı dizilerinden hangisi monoton azalandır?

- A) $\frac{n^2+1}{n+1}$ B) $4n+2$ C) 5
D) $\frac{2}{n^2+4}$ E) $2n$

14. $(a_n) = \left(\frac{5n-3}{2n-3} \right)$

dizisinin monotonluğu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) Monoton değildir.
B) Monoton artandır.
C) Monoton azalandır.
D) Artmayan dizidir.
E) Azalmayan dizidir.

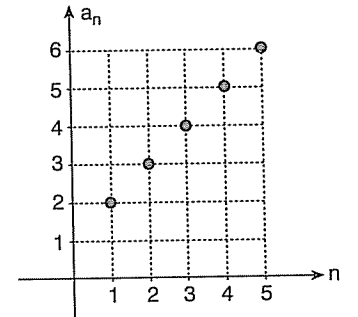
15. (a_n) bir reel sayı dizisidir.

$$a_n + a_{n+10} = 3n + 2$$

olduğuna göre, (a_n) dizisinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

- A) 120 B) 145 C) 170 D) 180 E) 185

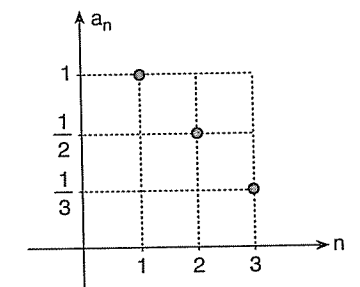
16.



Yukarıdaki grafikte ilk beş teriminin grafiği verilen (a_n) dizisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) (n^2) B) $(2n-1)$ C) $(n+1)$
D) $(2n+1)$ E) $(n-1)$

17.



Yukarıdaki grafikte ilk üç teriminin grafiği verilen (a_n) dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 1 B) $3n$ C) $\frac{n}{3}$
D) $n+1$ E) $\frac{1}{n}$

1. $(a_n) = (2n - 1)$
dizisinin kaç terimi 10 dan küçüktür?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

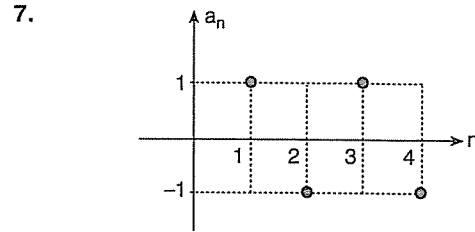
2. $(a_n) = \left(\frac{3^n + 1}{n!}\right)$ olmak üzere,
 $(b_n) = \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)$
dizisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
A) $\left(\frac{9}{n+2}\right)$ B) $\left(\frac{n+2}{3}\right)$ C) $(n+2)$
D) $\left(\frac{n+2}{9}\right)$ E) $\left(\frac{3}{n+2}\right)$

3. $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$
olduğuna göre, a_{100} kaçtır?
A) $\frac{100}{101}$ B) $\frac{101}{102}$ C) $\frac{102}{103}$ D) $\frac{50}{101}$ E) $\frac{25}{101}$

4. $(a_n) = (k.n^2 + 2)$
dizisi monoton artan bir dizi olduğuna göre,
k'nın en küçük tamsayı değeri kaçtır?
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

5. $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} = a_n - 2$
ile belirlenen a_n dizisinde a_{98} kaçtır?
A) -12 B) -45 C) -60 D) -191 E) -199

6. $(a_n) = (-n^2 + 8n - 29)$
dizisinin en büyük terimi kaçtır?
A) -1 B) -4 C) -9 D) -11 E) -13



- Yukarıda ilk dört teriminin grafiği verilen (a_n) dizisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) $(-1)^{2n}$ B) $(\cos(n+1)\pi)$ C) (1)
D) (-1) E) $(n+1)$

8. Açık olarak yazılışı aşağıda verilen sonlu dizilerden hangisi bir aritmetik dizi olabilir?
A) (2, 3, 5, 6, 8) B) (2, 4, 8, 16)
C) (1, 3, 5, 7) D) (1, 4, 9, 27)
E) (2, 5, 10, 17)

9. Açık olarak yazılışı aşağıda verilen sonlu dizilerden hangisi bir geometrik dizi olabilir?
A) (2, 4, 6, 8) B) (1, 3, 5, 7)
C) (3, 9, 27, 81) D) (1, 8, 27, 64)
E) (2, 5, 10, 17)

10. Aşağıdaki ifadelerden hangisi bir aritmetik dizinin genel terimini belirtir?
A) $\frac{1}{n}$ B) n^2 C) $-n^3$
D) $3n$ E) $n^2 + n$

11. Aşağıdaki ifadelerden hangisi bir geometrik dizinin genel terimini belirtir?

- A) $5n - 1$ B) $2.n$ C) $2^n + 1$
D) $\frac{2}{n}$ E) $n^2 + 4$

12. İlk dört terimi sırasıyla; 1, 5, 9, 13 olan aritmetik dizinin altıncı terimi kaçtır?
A) 14 B) 16 C) 17 D) 19 E) 21

13. İlk üç terimi sırasıyla; $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ olan geometrik dizinin beşinci terimi kaçtır?
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{10}{27}$ E) $\frac{16}{81}$

14. İlk terimi 8, ikinci terimi 12, son terimi 216 olan sonlu bir aritmetik dizinin ortak farkı d, terim sayısı n olduğuna göre, $n + d$ kaçtır?
A) 57 B) 56 C) 55 D) 54 E) 53

15. İlk terimi 9 ve üçüncü terimi $\frac{1}{9}$ olan geometrik dizinin ilk dört teriminin çarpımı kaçtır?
A) 81 B) 27 C) 9 D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{81}$

16. Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla,
 $x + 1, x + 2, x + 5$
olduğuna göre, x kaçtır?
A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

17. (a_n) aritmetik dizisinde,
 $a_6 = 5 - x$
 $a_7 = 3 - 2x$
 $a_8 = 2 - 4x$
olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. 2, a, b, 42 dizisinde terimler sırasıyla (küçükten büyüğe doğru) verilmiştir.

- İlk üç terim geometrik dizi, son üç terim aritmetik dizi oluşturduğuna göre, $a + 2b$ toplamı kaçtır?

- A) 63 B) 56 C) 49 D) 42 E) 35

19. (a_n) aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = n^2 + 4n$$

- olduğuna göre, dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2n + 5$ B) $2n - 1$ C) $2n + 1$
D) $2n - 3$ E) $2n + 3$

20. $(a_n) = (-n^2 - 4n + 3)$
dizisinin en büyük terimi kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 3 E) 5

1. $(a_n) = \frac{(b_n)}{4}$ olmak üzere, (a_n) dizisi ortak farkı 1 olan bir aritmetik dizi olduğuna göre (b_n) aritmetik dizisinin ortak farkı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

2. Bir aritmetik dizinin ilk n terim toplamı S_n olmak üzere,

$$S_9 - S_8 = 84 \text{ ve } S_{15} - S_{14} = 120$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 2

3. Bir aritmetik dizinin altıncı terimi 5 olduğuna göre, ikinci terimi ile onuncu terimin toplamı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 10 D) 11 E) 12

4. -10 ile 20 arasına 9 tane terim yerleştirilerek oluşturulan 11 terimli aritmetik dizinin ortanca terimi kaçtır?

A) 11 B) 8 C) 5 D) 3 E) -1

5. 3. terimi 2, 6. terimi 8 olan bir geometrik dizinin 9. terimi kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 32 E) 64

6. Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla, $x-6$, $x-2$, $x+6$

olduğuna göre, dizinin ortak çarpanı kaçtır?

A) -10 B) -8 C) 4 D) 3 E) 2

7. 2, a, b, c, d, e, 5 sayıları sonlu bir aritmetik dizinin terimleridir.

Buna göre, $a + b + c + d + e$ toplamı kaçtır?

A) 17 B) $\frac{35}{2}$ C) 18 D) $\frac{37}{2}$ E) 19

8. Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = 2^n + 1 - 1$$

olduğuna göre, 5. terimi kaçtır?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 48 E) 64

9. $t \neq k$ olmak üzere, k . terimi t ve t . terimi k olan aritmetik dizinin ortak farkı kaçtır?

A) $k + t$ B) $k - t$ C) $t - k$ D) 1 E) -1

10. (a_n) dizisi pozitif terimli aritmetik bir dizedir.

$$a_1 = 1 \text{ ve } a_5 + a_{10} = a_5 \cdot a_{10}$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{6}$ C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) 6

11. (a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_{15} + a_{k+1} = a_{11} + a_{4k-1}$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. İçinde 18 lira para bulunan bir kumbaraya her hafta 3 lira atılıyor.

13 hafta sonunda kumbarada biriken para kaç lira olur?

A) 49 B) 55 C) 57 D) 61 E) 65

13. (a_n) geometrik dizisinde,

$$\frac{a_{75}}{a_{67}} = 256$$

olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı kaç olabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

14. (a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_7 = 3a + b - 5$$

$$a_{17} = 2a + 3b - 4$$

$$a_{12} = 3a + 2b + 1$$

olduğuna göre, a değeri kaçtır?

A) -11 B) -8 C) -2 D) 2 E) 8

15. (a_n) aritmetik dizidir.

$$S_9 = 18 \text{ ve } a_1 = 4$$

olduğuna göre, S_5 kaçtır?

A) 15 B) 17 C) 22 D) 25 E) 26

16. (a_n) , pozitif terimli geometrik dizidir.

$$a_2 = \frac{1}{3} \text{ ve } a_{10} = 27$$

olduğuna göre, ortak çarpanı kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $3\sqrt{3}$ E) 6

17. (a_n) aritmetik dizisinde, $a_1 = 3$ ve ortak farkı 2 olarak veriliyor.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n = 36$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 4 B) 7 C) 11 D) 17 E) 21

18. (a_n) aritmetik dizidir.

$$a_5 + a_{15} = 10$$

olduğuna göre, $\sum_{k=1}^{19} a_k$ değeri kaçtır?

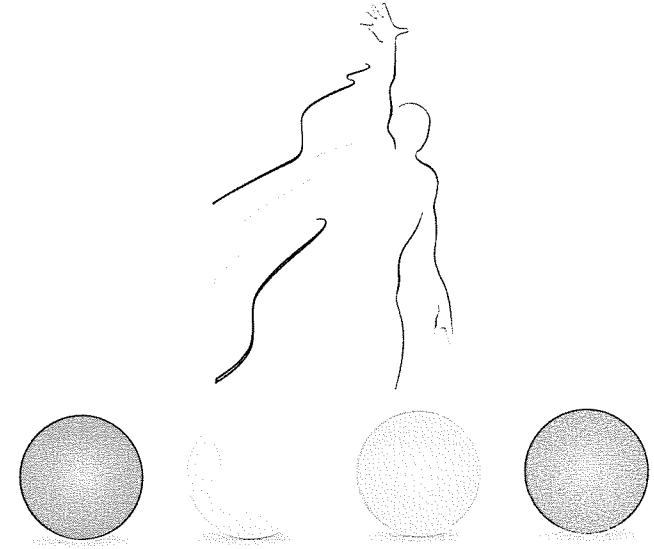
A) 120 B) 105 C) 100 D) 95 E) 90

19. Bir (a_n) geometrik dizisinde ilk 6 terim çarpımının ilk 3 terim çarpımına oranı aşağıdaki-lerden hangisine daima eşittir?

A) $(a_5)^3$ B) $2a_5$ C) $3a_5$ D) $5a_5$ E) $7a_5$

20. Birinci terimi -2, üçüncü terimi 12 olan bir aritmetik dizinin 70. terimi kaçtır?

A) 520 B) 481 C) 441 D) 400 E) 301



BÖLÜM 7

MATRİS, DETERMINANT VE
DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

MATRİS

i ve j sayma sayıları, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, m tane satır ve n tane sütundan oluşan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

tablosuna $m \times n$ boyutlu bir matris denir.

Bilgi

Matrisler büyük harflerle gösterilirler. m satırlı ve n sütunlu bir A matrisi $A_{m \times n}$ şeklinde veya $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada i ve j ye **indis** adı verilir. Bu gösteriliş tarzında a_{ij} matrisin herhangi bir elemanını temsil etmektedir.

Örneğin; $i = 3$ ve $j = 2$ için a_{32} elemanı, A matrisinin 3. satır ve 2. sütunundaki elemanını gösterir. Kısaca a_{ij} elemanı, matrisin i . satırı ve j . sütununun kesim noktasındaki elemanıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

3. satır, 2. sütun elemanı

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

matrisi için $a_{12} + a_{31} + a_{21}$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{12} &= -3, \quad a_{31} = 3, \quad a_{21} = 7 \text{ olduğundan,} \\ a_{12} + a_{31} + a_{21} &= -3 + 3 + 7 \\ &= 7 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \sqrt{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

matrisi için $3.(a_{11})^2 - 2.a_{13} + (a_{23})^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{3}, \quad a_{13} = -1 \quad \text{ve} \quad a_{23} = \sqrt{5} \text{ olduğundan,} \\ 3(a_{11})^2 - 2.a_{13} + (a_{23})^2 &= 3.(\sqrt{3})^2 - 2.(-1) + (\sqrt{5})^2 \\ &= 3.3 + 2 + 5 \\ &= 16 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

FEM YAYINLARI

Örnek 3:

$$A = \begin{bmatrix} \log_2 x & \tan x \\ \cot x & \log_x 4 \end{bmatrix}$$

matrisi için, $a_{11}.a_{22} + a_{12}.a_{21}$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \log_2 x, \quad a_{22} = \log_x 4 \text{ olduğundan,} \\ a_{11}.a_{22} &= \log_2 x . \log_x 4 = \log_2 4 = 2 \text{ dir.} \\ a_{12} &= \tan x, \quad a_{21} = \cot x \text{ olduğundan,} \\ a_{12}.a_{21} &= \tan x . \cot x = 1 \text{ dir.} \\ \text{O halde,} \\ a_{11}.a_{22} + a_{12}.a_{21} &= 2 + 1 = 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\frac{a_{11} + a_{22}}{b_{21} + b_{13}}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

Bilgi

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise yani satır sayısı sütun sayısına eşit ise A matrisine **kare matris** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

A kare matrisinin 36 tane elemanı olduğuna göre, A matrisinin satır ve sütun sayısını bulalım.

Çözüm:

A matrisinin boyutu $n \times n$ olsun. Yani n tane satıra ve n tane sütuna sahip olsun.

Bu durumda eleman sayısı n^2 olacağından, $n^2 = 36$ ise $n = 6$ bulunur.

Yani matris 6 satır ve 6 sütundan oluşmaktadır.

Örnek 2:

A kare matrisinin boyutu $m \times n$ olmak üzere,

$$2m - 1 = n + 2$$

olduğuna göre, A matrisinin boyutunu bulalım.

Çözüm:

A kare matris olduğundan $m = n$ dir.

$$2m - 1 = n + 2 \Rightarrow 2n - 1 = n + 2 \Rightarrow n = 3 \text{ olur.}$$

A matrisi 3×3 boyutlu bir kare matristir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ kare matrisinde,

$$(m - 3n) \cdot (m - 4) = 0$$

olduğuna göre, A matrisinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

Soru 2:

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinin eleman sayısı 25 ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin eleman sayısı 35 olduğuna göre, $C = [c_{ij}]_{m \times m}$ kare matrisinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 49 B) 25 C) 16 D) 9 E) 4

Soru 3:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin satır ve sütunlarının toplam sayısı 18 olduğuna göre, A matrisinin eleman sayısı en çok kaçtır?

- A) 80 B) 81 C) 96 D) 100 E) 108

Bilgi

$[a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene **asal köşegen**, $a_{n1}, a_{(n-1)2}, a_{(n-2)3}, \dots, a_{1n}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene de **yedek köşegen** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Yedek köşegen Asal köşegen

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin asal köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı ile yedek köşegen üzerindeki elemanlarının toplamını bulalım.

Çözüm:

Asal köşegen elemanları : $a_{11}=3, a_{22}=1, a_{33}=5$ olup, toplamı $3 + 1 + 5 = 9$ dur.

Yedek köşegen elemanları : $a_{31}=3, a_{22}=1, a_{13}=-1$ olup, toplamı $3 + 1 + (-1) = 3$ tür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 1-y \\ 0 & 3x & 1 \\ y & 1 & x-1 \end{bmatrix}$$

matrisinin asal köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı 24 olduğuna göre, yedek köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Bilgi

- Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir. O harfi ile gösterilir.
- Asal köşegen üzerindeki elemanları dışında, diğer elemanları sıfır olan kare matrislere köşegen matris denir.
- Asal köşegenin üstünde kalan her elemanı sıfır olan kare matrislere alt üçgen matris, asal köşegenin altında kalan her elemanı sıfır olan kare matrislere de üst üçgen matris denir.
- Asal köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan kare matrislere birim matris denir.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ birim matrisi I_n ile gösterilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir sıfır matristir.}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir köşegen matristir.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir birim matristir.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir üst üçgen matristir.}$$

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & \sin 2x \\ -1 & \cos x \end{bmatrix}$$

matrisinin asal köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı $\frac{6}{5}$ olduğuna göre, yedek köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı kaçtır?

- A) $-\frac{14}{25}$ B) $\frac{13}{25}$ C) $\frac{12}{25}$ D) $\frac{11}{25}$ E) $\frac{2}{5}$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} x^3+9 & y-1 & 0 \\ 0 & z+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisi birim matris olduğuna göre, $x + y + z$ toplamını bulalım.

Çözüm:

A matrisi birim matris olduğundan asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 diğer elemanlar sıfırdır.

Buna göre,

$$x^3 + 9 = 1 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

$$z + 2 = 1 \Rightarrow z = -1 \text{ dir.}$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ dir.}$$

Buradan, $x + y + z = -2 + 1 - 1 = -2$ bulunur.

Örnek 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x^2-1 \\ y+2 & z+2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} z & x+1 \\ 0 & y^2-3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisleri veriliyor.

A matrisi köşegen matris, B matrisi birim matris olduğuna göre, $x + y + z$ toplamını bulalım.

Çözüm:

A matrisi köşegen matris olduğundan,

$$y + 2 = 0 \text{ ise } y = -2 \text{ dir.}$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ise } x = 1 \text{ veya } x = -1 \text{ dir.}$$

B matrisi birim matris olduğundan, ($x = 1$ olamaz)

$$x + 1 = 0 \text{ olup } x = -1 \text{ olmalıdır.}$$

Ayrıca B birim matrisinde $z = 1$ dir.

Buna göre, $x + y + z = -1 - 2 + 1 = -2$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ve } 0 < y < \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$A = \begin{bmatrix} \tan x & 0 & 0 \\ 0 & \cot x & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2y \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisi birim matris olduğuna göre, $x + y$ toplamı kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \log x & 2^y-8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisi köşegen matris olduğuna göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Soru 3:

$$i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2xi & (2-y).i \\ i^3+i^9 & 1+(a-3).i \end{bmatrix}$$

matrisi birim matris olduğuna göre, $a + x + y$ toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

İki Matrisin Eşitliği

Bilgi

Boyutları aynı ve aynı indisli elemanları eşit olan matrislere eşit matrisler denir.

Her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & a+2 \\ 2^c+3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a.b+1 & 4 \\ 7 & d^3+2 \end{bmatrix}$$

matrisleri birbirine eşit olduğuna göre, $a.b - c.d$ farkını bulalım.

Çözüm:

Bu iki matris eşitse aynı indisli elemanlar eşittir.

$$a_{11} = b_{11} \Rightarrow 7 = a.b + 1 \Rightarrow a.b = 6$$

$$a_{21} = b_{21} \Rightarrow 2^c + 3 = 7 \Rightarrow 2^c = 4 \Rightarrow c = 2 \text{ dir.}$$

$$a_{22} = b_{22} \Rightarrow 10 = d^3 + 2 \Rightarrow d^3 = 8 \Rightarrow d = 2 \text{ dir.}$$

Buradan,

$$a.b - c.d = 6 - 2.2 = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\begin{bmatrix} \log_2 x & 3 \\ -2 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \log_y 8 \\ -2 & 16^x + 3^t \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre, $x + y + t$ toplamını bulalım.

Çözüm:

Aynı indisli elemanlar eşit olduğundan,

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

$$\log_y 8 = 3 \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2 \text{ dir.}$$

$$16^x + 3^t = 29 \Rightarrow 16^{\frac{1}{4}} + 3^t = 29$$

$$\Rightarrow (2^4)^{\frac{1}{4}} + 3^t = 29$$

$$\Rightarrow 2 + 3^t = 29$$

$$\Rightarrow 3^t = 27 \Rightarrow t = 3 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, $x + y + t = \frac{1}{4} + 2 + 3 = \frac{21}{4}$ bulunur.

Örnek 3:

x, y ve a dar açılardır.

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2x & -3 \\ 2\sin^2 y & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos x & -3 \\ \cos 2y & 1 + \sin^2 a \end{bmatrix}$$

matrisleri birbirine eşit olduğuna göre, $a + x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

Aynı indisli elemanlar eşit olduğundan,

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ veya } \cos x = 0$$

ise x dar açı olduğundan $x = \frac{\pi}{6}$ bulunur.

$$2\sin^2 y = \cos 2y \Rightarrow 2\sin^2 y = 1 - 2\sin^2 y$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 y = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{4}$$

ise y dar açı olduğundan, $\sin y = \frac{1}{2}$ ve $y = \frac{\pi}{6}$ bulunur.

$$1 + \sin^2 a = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{2} \text{ ise } a \text{ dar açı oldu-}$$

ğundan, $\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $a = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Buna göre, } a + x + y &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{7\pi}{12} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 & 3 \\ 7 & 2a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & x + y \\ a + b & 8 \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre, $x.a + y.b$ ifadesinin değeri kaç-
tır?

- A) 26 B) 24 C) 23 D) 21 E) 20

Soru 2:

α, β ve θ dar açılardır.

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \tan \beta \\ \cot \theta & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2\sin \alpha \\ 2\cos \theta & -2 \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre, $\alpha + \beta + \theta$ toplamı kaç derece-
dir?

- A) 100° B) 120° C) 150° D) 160° E) 180°

İKİ MATRİSİN TOPLAMI VE FARKI

$m \times n$ boyutlu iki matris $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ olsun.

$C = A \pm B$ olmak üzere, her i, j için $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ şek-
linde bulunur. Yani her iki matriste de aynı indisli ele-
manlar toplanır veya çıkarılır.

Bilgi

$m \times n$ tipinde $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ve $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$1. A + B = B + A$$

$$2. (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$3. A + O = O + A = A \quad (O, \text{ sıfır matrisi})$$

$$4. A + (-A) = (-A) + A = O \quad (-A = [-a_{ij}]_{m \times n})$$

eşitlikleri sağlanır.
- A matrisi A matrisinin toplama işlemine göre ter-
sidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

$A + B$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$A + B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2 & 2+4 \\ 2-3 & -1+5 \\ -3-1 & -2-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 4 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x.y çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-4 & 3-1 \\ 1-2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

olduğundan, $x-4=3$ ve $-3=y$ dir.

O halde,

$$x=7 \text{ ve } y=-3 \text{ için}$$

$$x.y = 7.(-3) = -21 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2 x & \sin 30^\circ \\ 1 & \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos^2 x & \cos 120^\circ \\ -1 & \sin^2 x \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A + B$ matrisini bulalım.

Çözüm:

$$A + B = \begin{bmatrix} \sin^2 x + \cos^2 x & \sin 30^\circ + \cos 120^\circ \\ 1-1 & \cos^2 x + \sin^2 x \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 4 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A - B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

FEM YAYINLARI

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ 1-2^a & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \log_6 2 & \log_6 4 \\ 2^a+3 & -5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) -2

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Bilgi

k reel sayı olmak üzere, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilmiş olsun.

$k.A = [k.a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine k ile A matrisinin çarpımı denir.

Yani, bir matrisin her elemanı k ile çarpılırsa bu matris k ile çarpılmış olur.

A ve B aynı boyutlu iki matris ve p ile q reel sayılar olmak üzere,

1. $p.(A \pm B) = p.A \pm p.B$

2. $(p \pm q).A = p.A \pm q.A$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $3.A + 2.B$ matrisini bulalım.

Çözüm:

$$3.A = \begin{bmatrix} 3.(-1) & 3.2 \\ 3.3 & 3.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2.B = \begin{bmatrix} 2.(-3) & 2.1 \\ 2.(-2) & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3.A+2.B = \begin{bmatrix} -3+(-6) & 6+2 \\ 9+(-4) & (-6)+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 1 & -1+2b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

$B - 2C = A$ olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) 8

B) 12

C) 15

D) 20

E) 21

Soru 2:

$$3.A - 2.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

FEM YAYINLARI

MATRİSLERİN ÇARPIMI

Bilgi

$A_{m \times n}$ matrisi ile $B_{k \times p}$ matrisinin çarpılabilmesi için $n = k$ olması gerekir. Çarpım matrisine C matrisi diyebiliriz, bu matris $C_{m \times p}$ şeklinde bir matris olur.

$$A_{m \times n} \times B_{k \times p} = C_{m \times p}$$

$n = k$

$$[c_{ij}]_{m \times p} = [a_{ij}]_{m \times n} \times [b_{ij}]_{k \times p} \quad (k = n)$$

Çarpma işlemi şu şekilde yapılmalıdır. A matrisinin bir satırındaki elemanlar, B matrisinin bir sütunundaki elemanlar ile elemanların sırası gözetilerek, karşılıklı olarak çarpıldıktan sonra bu çarpımlar toplanarak çarpım matrisinin bir elemanı bulunur. A matrisinin u. satırı ile B matrisinin v. sütunu çarpılmışsa c_{uv} elemanı bulunur. Örneğin A matrisinin 2. satırı ile B matrisinin 3. sütunu çarpılmışsa c_{23} elemanı bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A.B = C$ matrisini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1.3 + 2.2 = 7 \\ c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1.1 + 2.4 = 9 \\ c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3.3 + 5.2 = 19 \\ c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3.1 + 5.4 = 23 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 19 & 23 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

$C = A.B$ ve $D = B.A$ matrisini bulalım.

Çözüm:

$$C = A_{2 \times 3} \times B_{2 \times 2}$$

$3 \neq 2$

olduğu için $A.B$ çarpımı mümkün değildir.

$$D = B_{2 \times 2} \times A_{2 \times 3} \Rightarrow D_{2 \times 3} \text{ şeklinde bir matris olur.}$$

$D = B.A$ yı bulalım.

$$\begin{array}{c|ccc} & \begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{matrix} & \begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{matrix} \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.2+5.4 & 1.1+5.2 & 1.(-3)+5.(-1) \\ 3.2+(-2).4 & 3.1+(-2).2 & 3.(-3)+(-2).(-1) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 22 & 11 & -8 \\ -2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

☞ Görüldüğü gibi matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. $A.B$ mümkün olduğu halde $B.A$ mümkün olmayabilir.

Mümkün olsa da $A.B$ ile $B.A$ matrisleri birbirinden farklı matrisler olur. Bunun istisnası olabilir. Yani, $A.B$ nin $B.A$ ya eşit olabileceği durumlar karşımıza çıkabilir, ancak genel kural olarak, $A.B \neq B.A$ dır.

Örnek 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & a \\ 2 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2
(1997 - ÖYS)

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 3.1+a.x \\ 2.1+(a+1).x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3 + ax = -1 \text{ ve}$$

$$2 + (a+1)x = 2 \text{ olmalıdır.}$$

$$3 + ax = -1 \Rightarrow ax = -4 \text{ tür. (I)}$$

$$2 + (a+1)x = 2 \Rightarrow ax + x = 2 - 2$$

$$\Rightarrow -4 + x = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tür. (II)}$$

(I) ve (II) den

$$x = 4 \text{ ve } ax = -4$$

$$a.4 = -4$$

$$a = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . & . \\ . & b & . \\ . & . & c \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{c|ccc} & \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} a & . & . \\ . & b & . \\ . & . & c \end{matrix} \end{array}$$

$$a = 1.1 + 2.2 = 1 + 4 = 5$$

$$b = 1.3 + (-1).4 = 3 - 4 = -1$$

$$c = (-2).5 + 1.(-1) = -10 - 1 = -11 \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$a + b + c = 5 + (-1) + (-11) = -7 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & . \\ 7 & . \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, y değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} x & a \\ y & b \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 & . \\ 7 & . \end{matrix} \end{array}$$

$x + 2y = 8$ ve $-x + 3y = 7$ olup denklemler alta toplanır,

$$x + 2y = 8$$

$$+ \quad -x + 3y = 7$$

$$5y = 15 \Rightarrow y = 3 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

$A.B = A - B$ olduğuna göre, B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(1995 - ÖYS)

FEM YAYINLARI

Soru 2:

x dar açı olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ -1 & \cot x \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrislerine göre, $A.B = C$ ve $c_{22} = 2\sqrt{3}$ olduğuna göre, x kaç derecedir?

A) 75° B) 60° C) 45° D) 30° E) 15°

Soru 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \\ a+2 & b-3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a + b + x + y$ toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 4:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . \\ a & b & . \\ . & . & c \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ çarpımı kaçtır?

A) -72 B) -60 C) -52 D) -48 E) -40

Soru 5:

 $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1+i & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre, $z = a + b + c + d$ karmaşık sayısının reel kısmı ile imajiner kısmının toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Bilgi

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$C = [c_{ij}]_{m \times n}$$

matrisleri için,

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$

2. $A \cdot I = I \cdot A = A$ (I birim matristir.)

3. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (birleşme özelliği)

4. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$ ($k \in R$)

$$\left. \begin{aligned} 5. A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \end{aligned} \right\} \text{ (dağılma özelliği)}$$

6. $A \cdot O = O \cdot A = O$

(Sıfır matrisi çarpma işleminin yutan elemanıdır.)

7. $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu halde $A \cdot B = O$ olabilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

 $C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -x & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A \cdot B + C$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2.C B) I C) O D) -C E) C

FEM YAYINLARI

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

A, B, C, D aynı boyutlu matrislerdir.

$$A + B = C$$

$$B = -D$$

olduğuna göre, C + D matrisinin eşitini bulalım.

Çözüm:

 $B = -D$ ise $B + D = -D + D$ ise $B + D = O$ olur.

$$A + B = C \text{ ise } A + \underbrace{B + D}_{O} = C + D$$

$$\text{ise } A + O = C + D$$

$$A = C + D \text{ olur.}$$

Buradan, $C + D = A$ bulunur.

Soru 2:

A, B, C aynı boyutlu matrisler ve C birim matristir.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = C$$

olduğuna göre, A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -C B) O C) B D) -B E) C

BİR KARE MATRİSİN KUVVETLERİ

Bilgi

$A_{n \times n}$ kare matrisi verilsin.

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n}$$

şeklinde işlem yapılarak istenen kuvvete ulaşmaya çalışılır.

I, birim matrisinin bütün kuvvetleri kendisine eşittir. ($I^n = I$)

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^2 , A^3 ve A^n matrislerini bulalım.

Çözüm:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5.5+0.0 & 5.0+0.1 \\ 0.5+1.0 & 0.0+1.1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25.5+0.0 & 25.0+0.1 \\ 0.5+1.0 & 0.0+1.1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buradan A matrisi için,

$$A^n = \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olduğu görülür.}$$

Örnek 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

(1993 - ÖYS)

Çözüm:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-6 & 2+8 \\ -3-12 & -6+16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5-2+1 & 10-4+0 \\ -15+6+0 & 10-8+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^{2008}$$

matrisinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^2 = 25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her iki tarafın 1004 üncü kuvvetini alalım.

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^2 \right)^{1004} = \left(25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{1004}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^{2008} = 5^{2008} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{1004}$$

$$= 5^{2008} \cdot I \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{16} matrisini bulalım.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin önce karesini alalım.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \Rightarrow (A^4)^4 = (A)^4$$

$$\Rightarrow A^{16} = A^4 = A \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{bmatrix}$$

matrisi için A^{2n} değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a^n \cdot I_2$ B) $-A$ C) A
D) $-a^{2n} \cdot I_2$ E) $a^{2n} \cdot I_2$

Soru 2:

$$B = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, B^4 matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} \cos 3x & -\sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} \cos 4x & -\sin 4x \\ \sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Soru 3:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 2 & i \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{25} matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2A$ B) $-I_2$ C) A D) $-A$ E) I_2

Soru 4:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{12} aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2^7 \cdot A$ B) $-2^7 \cdot I_2$ C) I_2
D) $-I_2$ E) $-2^7 \cdot A$

Soru 5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & x-1 \\ y+1 & 11 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x - y$ kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

Soru 6:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{16} nın A cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3^{16} \cdot A$ B) $3^{32} \cdot A$ C) $6^{15} \cdot A$
D) $6^{16} \cdot A$ E) $6^{32} \cdot A$

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ:

A, n. mertebeden bir kare matris olmak üzere,

$$A.B = B.A = I_n$$

olacak biçime n. mertebeden bir B matrisi varsa bu matrise A matrisinin çarpma işlemine göre tersi denir ve A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir.

Bilgi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersi,

$$A^{-1} = \frac{1}{a.d - b.c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersini bulalım.

Çözüm:

$$A^{-1} = \frac{1}{2.(-3) - 1.(-5)} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6 + 5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (-3).(-1) & 5.(-1) \\ (-1).(-1) & 2.(-1) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & x \end{bmatrix} \text{ ve } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x sayısını bulalım.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & x \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3x-2} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{3x-2} & \frac{2}{3x-2} \\ \frac{1}{3x-2} & \frac{3}{3x-2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{x}{3x-2} & \frac{2}{3x-2} \\ \frac{1}{3x-2} & \frac{3}{3x-2} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \text{ ise,}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x-2} &= 1 \Rightarrow x = 3x-2 \\ &\Rightarrow 2 = 3x-x \\ &\Rightarrow 2 = 2x \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi B matrisi olduğuna göre, b_{12} elemanı kaçtır?

- A) 4 B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{-1} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Bilgi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersinin mevcut olabilmesi için, $ad - bc \neq 0$ olmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1-x & -3 \\ 1 & 1+x \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersi mevcut olduğuna göre, x in alabileceği reel değerlerin kümesini bulalım.

Çözüm:

A matrisinin çarpmaya göre tersinin mevcut olması için,

$$(1-x)(1+x) - 1 \cdot (-3) \neq 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$1 - x^2 + 3 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$x \neq 2 \text{ ve } x \neq -2 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, x in alabileceği değerler kümesi:

$$R = \{-2, 2\} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -1 \\ \sin x & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersi olmadığına göre, x açısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Soru 2:

$$\begin{bmatrix} 1-a & b-1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersi mevcut olduğuna göre, (a, b) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) (1, 1) B) (2, 3) C) (3, 5) D) (4, 7) E) (5, 8)

Bilgi

- $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $I^{-1} = I$
- $A.B = I$ olmasına rağmen $A^{-1} = B$ olmayabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

A, B, C aynı boyutlu ve tersleri mevcut kare matrislerdir.

$$A.B = C^{-1}$$

olduğuna göre $(B.C)^{-1}$ matrisinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} A.B = C^{-1} &\Rightarrow A \cdot B \cdot B^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \\ &\Rightarrow A \cdot I = C^{-1} \cdot B^{-1} \\ &\Rightarrow A = (B.C)^{-1} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan,

$$(B.C)^{-1} = A \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

A ve B çarpmaya göre tersleri olan aynı boyutlu kare matrislerdir.

$$A \cdot B = I$$

olduğuna göre, $(A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B^{-1})^{-1}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) I B) A C) B D) A^{-1} E) B^{-1}

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A \cdot X = B$ şartını sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

BİR MATRİSİN TRANPOZU (DEVİRİĞİ)

Bir A matrisinin satırlarının sütun, sütunlarının satır yapılması ile oluşturulan matrise A matrisinin transpozu (devriği) denir ve A^T veya A^d ile gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Bilgi

A ve B aşağıdaki işlemler tanımlı olacak türde iki matris ve k bir gerçel sayı olsun.

- $(A^T)^T = A$
- $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (A, tersi olan bir matristir.)

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $(3 \cdot A)^T - I_2$ matrisini bulalım.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$(3 \cdot A)^T - I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$B = A^T - A$ olduğuna göre, B^T matrisinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} B &= A^T - A \text{ için her iki tarafın transpozu alınırsa,} \\ B^T &= (A^T - A)^T \Rightarrow B^T = (A^T)^T - A^T \\ &\Rightarrow B^T = A - A^T \\ &\Rightarrow B^T = -(A^T - A) \\ &\quad \quad \quad B \\ &\Rightarrow B^T = -B \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

A, B ve C matrislerinin boyutu 2x2 olmak üzere,

$A^T = C^{-1}$ olduğuna göre, $(A \cdot B)^T \cdot C$ matrisinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$(A \cdot B)^T \cdot C = B^T \cdot A^T \cdot C \text{ dir.}$$

$$A^T = C^{-1} \text{ olduğundan } A^T \cdot C = I_2 \text{ olur.}$$

$$\text{Buna göre, } B^T \cdot \underbrace{A^T \cdot C}_{I_2} = B^T \cdot I_2 = B^T \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $(B \cdot A)^T \cdot C$ matrisinin elemanlarının toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Soru 2:

A ve B matrisleri 2x2 boyutludur.

$A^T = B$ olduğuna göre, $A^{-1} \cdot B^T$ matrisinin transpozu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -B B) B^T C) A^T D) I_2 E) -A

Soru 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olduğuna göre, $A^T \cdot B$ matrisinin transpozunun birinci satır, üçüncü sütun elemanı kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

DETERMINANT

Reel sayılarla oluşturulan bütün kare matrislerin kümesi A olsun. A kümesinden reel sayılar kümesine tanımlanan, $D : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, kare matrisi eşlediği reel sayıya bu kare matrisin determinanı denir.

A matrisinin determinanı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

Bilgi

$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = x.t - y.z \text{ dir.}$$

Yani asal köşegen elemanlarının çarpımından, ters köşegen elemanlarının çarpımı çıkarılarak bulunur.

Eğer $A = [a]$ ise $\det(A) = a$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3.(-1) - (-4).5$$

$$= -3 + 20$$

$$= 17 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1-x & x-1 \\ -1 & x \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisinin determinanı -16 olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1-x & x-1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = -16 \text{ ise}$$

$$(1-x).x - (-1).(x-1) = -16$$

$$\Rightarrow x - x^2 + x - 1 = -16$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x - 1 = -16$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5).(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 \text{ veya } x_2 = -3$$

$$\text{olup } x_1 + x_2 = 5 + (-3) = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{vmatrix} 2i-1 & 1+i \\ i & 1-i \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 2i-1 & 1+i \\ i & 1-i \end{vmatrix} = (2i-1).(1-i) - i.(1+i)$$

$$= 2i - 2i^2 - 1 + i - i - i^2 - i$$

$$= 2i + 2 - 1 + i + 1 - i$$

$$= 2.(i+1) \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin 2x \\ -1 & \sin x \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisinin determinantının değeri $\frac{3}{2}$ olduğuna göre, x dar açısını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin 2x \\ -1 & \sin x \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x . \sin x + \sin 2x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \sin 2x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin 90^\circ$$

$$\text{olup buradan } 2x = 90^\circ \text{ ve } x = 45^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2008 & 2009 \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulalım.

Çözüm:

Determinantta 2010 sayısına x denilirse, 2011 = x + 1, 2008 = x - 2 ve 2009 = x - 1 olur.

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2008 & 2009 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x-1) - (x-2)(x+1)$$

$$= x^2 - x - x^2 + x + 2$$

$$= 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \log_3 2 & \log_3 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

$$|A| = 2 . \log_3 6 - (-1) . \log_3 2$$

$$= \log_3 6^2 + \log_3 2$$

$$= \log_3 (6^2 . 2)$$

$$= \log_3 72 \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \sin x \\ 1 & \cos 2x \end{vmatrix}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \sin x \\ 1 & \cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} - (-\cos 2x - \sin x)$$

$$= -\cos 2x + \cos 2x + \sin x$$

$$= \sin x \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) -3 D) -4 E) -5

Soru 2:

$$\begin{vmatrix} x+y & y \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & -1 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 6$$

olduğuna göre, y doğal sayısı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Soru 3:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\begin{vmatrix} i^{10} + 1 & 2i - 1 \\ 3i + 1 & i - 1 \end{vmatrix}$$

determinantı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) i - 3 B) i + 3 C) i - 7 D) i + 7 E) 3i

Soru 4:

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -\cos^2 x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $-\sin^2 x$
D) $\cos x$ E) $\sin x$

Soru 5:

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + 4b^2$$

olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 6:

$$\begin{vmatrix} \tan 30^\circ & \sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ & \cot 30^\circ \end{vmatrix}$$

determinantının sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

3 x 3 Tipinde Determinant Hesabı İçin Sarrus Kuralı

Bilgi

Determinantın ilk iki satırı alta eklenerek asal köşegen hizasındaki üçlü grupların çarpımları toplanır. Ters köşegen hizasındaki üçlü grupların çarpımları toplanır. İlk toplam ile ikinci toplamın farkı determinant değerini verir.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & m & n \\ r & s & p \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-)
(-) (-) (-)
(-) (-) (-)

$$|A| = (x.m.p + t.s.z + r.y.n) - (z.m.r + n.s.x + p.y.t)$$

şeklindedir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisinin determinantını hesaplayalım.

Çözüm:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-)
(-) (-) (-)
(-) (-) (-)

$$|A| = (0 + 0 + 6) - (-6 + 0 - 1)$$

$$|A| = 6 + 7$$

$$|A| = 13 \text{ bulunur.}$$

Sarrus kuralı, ilk iki sütunun sağa eklenmesiyle de uygulanabilir.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-)
(-) (-) (-)
(-) (-) (-)

$$|A| = (0 + 6 + 0) - (-6 + 0 - 1)$$

$$|A| = 6 + 7$$

$$|A| = 13 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = -x - 6$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = -x - 6$$

(-) (-) (-)
(-) (-) (-)
(-) (-) (-)

$$(x + 0 + x) - (x^2 + 2x + 0) = -x - 6$$

$$2x - x^2 - 2x = -x - 6$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ veya } x = -2 \text{ dir.}$$

$$\text{Ç.K.} = \{3, -2\} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisinin determinanı kaçtır?

- A) -3 B) -2 ☒ C) 2 D) 3 E) 4

Soru 2:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x & 0 & 1 \\ 3x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

denkleminin kökü kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 2 ☒ D) 4 E) 8

Soru 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ g(x) & 1 & 2x \\ x & -1 & x \end{vmatrix} = 5 + 4x^2$$

olduğuna göre, $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4x-5}{1-2x}$ B) $\frac{5-2x}{1-2x}$ C) $\frac{1+2x}{4x+5}$
☒ D) $\frac{4x-5}{2x-1}$ E) $\frac{2x}{4x-5}$

Bilgi

$n \geq 2$ olmak üzere $n \times n$ türünde bir A matrisinin i . satırı ve j . sütunu silinerek elde edilen matrisin determinantına, a_{ij} elemanının minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ifadesine de, a_{ij} elemanının işaretli minörü veya kofaktörü (eş çarpanı) denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinde a_{31} ve a_{22} elemanlarına ait minör ve kofaktörleri hesaplayalım.

Çözüm:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot (-5) = -5 \text{ olur.}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-3) = -3 \text{ olur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

olduğuna göre, M_{31} değeri kaçtır?

- A) -3 ☒ B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -1 & \sin x \\ -1 & 1 & 4 \\ -\sin x & -2 & \cos x \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

olduğuna göre, A_{22} kofaktörünün değeri kaçtır?

- A) -1 ☒ B) 1 C) $\cos x$
D) $\sin x$ E) $-\sin x$

Soru 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

olduğuna göre, A_{23} kofaktörünün değeri kaçtır?

- A) -4 ☒ B) -3 C) 3 D) 2 E) 4

Bilgi

$n \geq 2$ olmak üzere $n \times n$ türünde bir A matrisinin determinanı, herhangi bir satır veya sütun elemanlarının kofaktörleri ile çarpımlarının toplamına eşittir.

Örneğin, 3×3 tipindeki matris için,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \text{ (1. satıra göre)}$$

$$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \text{ (2. satıra göre)}$$

$$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \text{ (3. satıra göre)}$$

şeklinde açılarak determinant bulunabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını 2. satıra göre açarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$$

şeklinde hesaplanabilir.

$$|A| = 0 \cdot A_{21} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1) \cdot (-15 + 4) + 2 \cdot (-1) \cdot (6 - 4)$$

$$|A| = 11 - 4$$

$$|A| = 7 \text{ bulunur.}$$

Bu tip sorularda sıfır elemanı fazla olan satır veya sütuna göre hesaplama yapmak kolaylık sağlar.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı kaçtır?

- A) -33 B) -18 C) 18 D) 22 **E) 33**

Soru 2:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & a & 0 \\ 0 & -3 & b & a \end{vmatrix}$$

determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a \cdot b + 1$ B) $b^3 - 1$ C) $a^3 + 1$
D) $a^3 - b^3$ **E) $a^3 + b^3$**

Bilgi

1. Bir determinantın herhangi bir satırındaki ya da sütunundaki elemanların hepsi 0 ise, determinantın değeri sıfırdır.
2. Bir determinantın herhangi iki satır elemanları ya da iki sütun elemanları birbirine eşit veya orantılı ise, determinantın değeri 0'dır.
3. Bir determinantın herhangi iki satırı veya iki sütunu yer değiştirilirse, determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = A \text{ ise } \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{vmatrix} = -A \text{ dır.}$$

1. sütun ile 3. sütun yer değiştirdi.

4. Bir determinantın herhangi bir satırındaki elemanların k katı, diğer bir satır elemanlarına eklenirse, determinantın değeri değişmez. Bu özellik sütunlar için de geçerlidir. Bu işlemlere temel satır ve temel sütun işlemleri denir.

5. Bir determinantın herhangi bir satırı veya sütunu k reel sayısı ile çarpılırsa, determinantın değeri k ile çarpılmış olur.

6. Bir matrisin determinantı ile transpozisinin determinantı birbirine eşittir.

$$|A| = |A^T| \text{ dir.}$$

7. A ve B $n \times n$ tipinde iki matris olmak üzere,

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \text{ dir.}$$

$$\underbrace{|A \cdot A \cdot A \dots A|}_{n \text{ tane}} = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdot \dots \cdot |A|}_{n \text{ tane}} \text{ olduğundan,}$$

$$|A^n| = |A|^n \text{ dir.}$$

8. A , $n \times n$ türünden bir kare matris olmak üzere, $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ dir.

örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t \text{ ise } \begin{vmatrix} k \cdot a & k \cdot b \\ k \cdot c & k \cdot d \end{vmatrix} = k^2 \cdot t \text{ olur.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} e^x & x+1 & \ln x \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & \log x & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

2. satır elemanlarının tamamı sıfır olduğundan, $|A| = 0$ dir.

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -9 \\ 0 & \sqrt{2} & \log 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

$$\frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = -3$$

2. satır elemanlarının 1. satır elemanlarına oranı -3 olduğundan, $|A| = 0$ bulunur.

Örnek 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x & -2 \\ -1 & \sqrt{3} & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı -3 olduğuna göre,

$$B = \begin{bmatrix} -2 & x & 2 \\ 5 & \sqrt{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

B matrisi, A matrisinin 1. sütunu ile 3. sütununun yer değiştirilmesiyle oluşturulduğundan, $\det(B) = -\det(A) = -(-3) = 3$ bulunur.

Örnek 4:

$$\begin{vmatrix} 2564 & 2560 \\ 2568 & 2564 \end{vmatrix}$$

determinantının değerini bulalım.

Çözüm:

2. sütunun -1 katını 1. sütuna eklersek,

$$\begin{vmatrix} 2564 + (-1) \cdot 2560 & 2560 \\ 2568 + (-1) \cdot 2564 & 2564 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2560 \\ 4 & 2564 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot 2564 - 4 \cdot 2560 \\ &= 4 \cdot (2564 - 2560) \\ &= 4 \cdot 4 \\ &= 16 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & -c \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı k olduğuna göre,

$$B = \begin{bmatrix} a^2 & ab & -ac \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

B matrisi, A matrisinin 1. satırının a ile çarpılmasıyla elde edildiğinden, $\det(B) = a \cdot \det(A) = a \cdot k$ bulunur.

Örnek 6:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin^2 x \\ -1 & -\cos x \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^{2009}|$ determinantını bulalım.

Çözüm:

$$|A^n| = |A|^n \text{ olduğundan,}$$

$$|A^{2009}| = |A|^{2009} \text{ olur.}$$

$$|A| = -\cos^2 x - \sin^2 x = -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$$

$$\text{olup } |A|^{2009} = (-1)^{2009} = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

A matrisi 3×3 ve $\det(A) = 4$ tür.

Buna göre, $\det(2.A^T)$ değerini bulalım.

Çözüm:

A matrisinin boyutu 3×3 ve $\det(A^T) = \det(A)$ olduğundan,

$$\det(2.A^T) = 2^3 \det(A^T) = 8.\det(A)$$

$$= 8.4$$

$$= 32 \text{ bulunur.}$$

Örnek 8:

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ -2x & y \end{bmatrix}$$

matrisi için $x.y = -2$ olduğuna göre, $\det(A^3)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\det(A^3) = [\det(A)]^3$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x & y \\ -2x & y \end{vmatrix} \right)^3$$

$$= (xy + 2xy)^3$$

$$= (3xy)^3$$

$$= [3.(-2)]^3$$

$$= (-6)^3$$

$$= -216 \text{ bulunur.}$$

Örnek 9:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

determinantını hesaplayalım.

Çözüm:

Determinantın 1. satırını (-1) ile çarpıp 2. ve 3. satıra ekleyelim.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Son durumda elde edilen determinantın 1. sütuna göre açılımını yapalım.

$$|A| = 1.(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a).(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a).(c-a).(c+a-b-a)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) \text{ bulunur.}$$

Brilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\det(A)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

$$\begin{bmatrix} 3678 & 3679 \\ 3676 & 3677 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ ise } x \text{ in değeri kaçtır?}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

Soru 4:

$\det(A) = 11$ olduğuna göre,

$$|A^4| + 11x^3 = 0$$

denklemini sağlayan x reel sayısı kaçtır?

- A) -12 B) -11 C) -1 D) 0 E) 21

Soru 5:

$$A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|2.A.A^T|$ determinantı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2 \cos^2 \alpha$ B) $\sin \alpha$ C) $4 \cos^2 \alpha$ D) $\sec \alpha$ E) $\tan \alpha$

Soru 6:

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre,

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -8 B) -3 C) 2 D) 5 E) 8

Soru 7:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -5 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

Soru 8:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) -2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \text{ olup}$$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Bir Kare Matrisin Tersi

Bilgi

$n \times n$ boyutlu bir A matrisi için $A.B = B.A = I$ olacak şekilde bir B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin çarpma işlemine göre tersi denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \text{ dir.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A)$$

2×2 tipindeki bir matris için bu formül,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$a) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$b) (k.A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1} \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$$

$$c) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$d) (A.B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$e) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulalım.

Çözüm:

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4+3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2} \text{ olmak üzere,}$$

$$|A| = 3$$

olduğuna göre, $|A|.Ek(A)$ matrisinin determinantını bulalım.

Çözüm:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A) \Rightarrow Ek(A) = |A| \cdot A^{-1} \text{ olur.}$$

$$\det(|A|.Ek(A)) = \det(|A| \cdot |A| \cdot A^{-1})$$

$$= \det(9.A^{-1})$$

$$= 9^2 \cdot \det(A^{-1})$$

$$= 81 \cdot \frac{1}{\det(A)}$$

$$= 81 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 27 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$A = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2 & y \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi kendisine eşit ise $x.y$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$A^{-1} \cdot A = I_2 \Rightarrow A \cdot A = I_2 \Rightarrow A^2 = I_2$$

$$\begin{bmatrix} x & -4 \\ 2 & y \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 - 8 & -4x - 4y \\ 2x + 2y & -8 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2 - 8 = 1, 2x + 2y = 0, -4x - 4y = 0 \text{ ve}$$

$$-8 + y^2 = 1 \text{ şartlarını sağlayan } x \text{ ve } y \text{ değerleri}$$

$$x = -3, y = 3 \text{ veya } x = 3, y = -3 \text{ olup}$$

$$x.y = -9 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi için $|A^T \cdot A^{-1}| = |2.A|$ olduğuna göre, x kaçtır?

$$A) -\frac{1}{3} \quad B) 1 \quad C) \frac{3}{8} \quad D) \frac{3}{4} \quad E) 3$$

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A.C^{-1} = B$ şartını sağlayan C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

$$A) \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B) \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \quad C) \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad E) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

Soru 3:

$$A = \begin{bmatrix} x & x-1 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi kendisine eşit ise x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

$$A) -10 \quad B) -7 \quad C) -3 \quad D) -2 \quad E) -1$$

Bilgi

A kare matrisinin çarpmaya göre tersinin mevcut olması için $\det(A) \neq 0$ olmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & b \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpma işlemine göre tersi olmadığına göre, a ile b arasındaki bağıntıyı bulalım.

Çözüm:

A matrisinin tersi olmadığına göre, $\det(A) = 0$ dir.

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ -2 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3b + 2a = 0$$

$$\Rightarrow 3b = -2a \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & a+2 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpma işlemine göre tersi olmadığına göre, a sayısını bulalım.

Çözüm:

A matrisinin tersi olmadığına göre, $\det(A) = 0$ dir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & a+2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dir.}$$

(-) 1 2 -3 (+)
(-) 1 1 0 (+)
(-) 1 1 0 (+)

$$|A| = (a + 2 + 12 + 0) - (6 + 0 + 2a + 4)$$

$$0 = a + 14 - 10 - 2a$$

$$0 = -a + 4$$

$$a = 4 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$0^\circ < x < 180^\circ$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} \cot x & \cos x \\ 1 & -\sin x \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpma işlemine göre tersi olmadığına göre, x açısı kaç derecedir?

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 135°

Soru 2:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & -x \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpma işlemine göre, tersi mevcut olmadığına göre, x kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{20}$

Soru 3:

$$A = \begin{bmatrix} \log_3 x & -1 \\ 1 + \log_3 6 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin çarpma işlemine göre tersinin olması için x kaç olmalıdır?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{25}$ E) $\frac{1}{30}$

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \text{ doğrusal} \\ \text{denklem} \\ \text{sistemi;}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A X B

biçiminde yazılabilir.

Burada A matrisine katsayılar matrisi, X matrisine bilinmeyenler matrisi ve B matrisine sabitler matrisi denir.

Bilgi

$A \cdot X = B$ doğrusal denklem sisteminde $|A| \neq 0$ olsun.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$X = A^{-1} \cdot B$ çarpımından X matrisi bulunur ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ kökleri hesaplanır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$2x + y = 5$$

$$3x - 2y = 4$$

denklem sisteminin çözümünü ters matris yardımıyla bulalım.

Çözüm:

Denklem sistemini $A \cdot X = B$ şeklinde yazalım.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A X B

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A) \cdot B$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Çözümü $(x, y) = (2, 1)$ dir.

Örnek 2:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 3x + z &= 6 \\ y - 3z &= -10 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü ters matris yardımıyla bulalım.

Çözüm:

Denklem sistemini $A \cdot X = B$ şeklinde yazalım.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$A \quad X \quad B$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

olduğu 217. sayfadaki örnekte bulunmuştu.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \text{ olup,}$$

$$X = \frac{1}{|A|} \cdot Ek(A) \cdot B$$

$\det(A)$ hesaplanırsa 13 bulunur. Buradan,

$$X = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Buna göre, denklem sisteminin çözümü, $(x, y, z) = (1, -1, 3)$ sıralı üçlüsüdür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ kaçtır?

- A) -3 ☒ B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

Soru 2:

$$3x - y + 1 = 0$$

$$-2x + 5y - 18 = 0$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- ☒ A) $\{(1, 4)\}$ B) $\{(1, -2)\}$ C) $\{(2, -1)\}$
D) $\{(2, 4)\}$ E) $\{(-2, 2)\}$

Soru 3:

$$x - 2y + z = 1$$

$$x - y - z = -2$$

$$x + 2y - 3z = -3$$

denklem sistemini sağlayan (x, y, z) sıralı üçlüsü için, $x \cdot y \cdot z$ çarpımının değeri kaçtır?

- A) 1 ☒ B) 2 C) 3 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{6}{5}$

CRAMER KURALI

Bilgi

1. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

denklem sisteminin çözümü:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ve $\Delta \neq 0$ olmak üzere, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ve $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ dir.

2. Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

denklem sisteminin çözümü;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ve $|\Delta| \neq 0$ olmak üzere,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \text{ dir.}$$

Bu yöntem cramer kuralı denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$5x - y = 8$$

$$10x + 3y = 1$$

denklem sistemini cramer yöntemiyle çözelim.

Çözüm:

$$\left. \begin{aligned} 5x - y &= 8 \\ 10x + 3y &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ ise,}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tir.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -75$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-75}{25} = -3$$

Çözüm kümesi : $\{(1, -3)\}$ bulunur.

Örnek 2:

$$2x - y + 3z = -2$$

$$x + y - z = 3$$

$$-x - y + 2z = -4$$

denklem sisteminin çözüm kümesini cramer kuralı ile bulalım.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \text{ tür.}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \text{ tür.}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -3 \text{ tür.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \text{ tür.}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1$$

olup, $\{(1, 1, -1)\}$ sistemin çözüm kümesidir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3x + 2y + z = 3$$

$$5x - y + z = 10$$

$$x - 2y - 3z = 7$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{(2, 1, 1)\}$ B) $\{(2, -1, -1)\}$ C) $\{(1, 2, 3)\}$
D) $\{(1, -1, 2)\}$ E) $\{(2, -1, -2)\}$

FEM YAYINLARI

Soru 2:

$$3x - y = 3$$

$$x + y - 3z = 7$$

$$x - 5z = 11$$

denklem sistemini sağlayan (x, y, z) üçlüsü için x, y, z değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Bilgi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

denklem sisteminde daha önce $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ve Δ gibi terimleri tanımlamıştık.

Bu sistemin çözümü ile ilgili;

1. $\Delta \neq 0$ iken sistemin bir tek çözümü vardır.

2. $\Delta = 0$ iken,

a) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

b) Δ_1, Δ_2 ve Δ_3 değerlerinden en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözüm kümesi boş kümedir. Yani sistem tutarsızdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a-1)x_1 + 3x_2 = -3$$

$$-ax_1 - 4x_2 = 4$$

sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

Sistemi matris yardımıyla ifade edersek,

$$\begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ -a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sistemin sonsuz çözümü olduğundan,

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$$

olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ -a & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & -3 \\ -a & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ise } -4(a-1) + 3a = 0$$

$$-4a + 4 + 3a = 0$$

$$a = 4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$2x + (a-1)y + z = 1$$

$$-x + 2y - z = 2$$

$$3x - y + 2z = -3$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 2 & a-1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

sisteminin çözüm kümesi boş küme ise $\Delta = 0$ ve $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ ifadelerinden en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a-1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$(8 + 1 - 3a + 3) - (6 + 2 - 2a + 2) = 0$$

$$2 - a = 0$$

$$a = 2 \text{ bulunur.}$$

Kontrol edilirse Δ_x, Δ_y ve Δ_z değerleri sıfırdan farklı olduğu görülür.

FEM YAYINLARI

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\begin{aligned} ax - 3y &= 1 \\ (b - 1)x + y &= -2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3a - b = 1$ B) $a + b = 3$ C) $a - 3b = -1$
D) $a - b = -2$ E) $a + 3b = 3$

Soru 2:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + (n - 1)y - z &= 2 \\ -x + 3y - 4z &= -5 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, n kaçır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{11}{7}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{13}{5}$

Bilgi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin matrisle ifadesi olan,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

formunda katsayılar matrisi ile sabitler matrisinde temel satır işlemleri yaparak, katsayılar matrisini alt üçgen ya da üst üçgen matris şekline dönüştürebiliriz.

Oluşan bu formda x_1 , x_2 ve x_3 bilinmeyenleri sırasıyla bulunarak çözüm yapılır. Bu çözüm yöntemine "Gauss yok etme" metodu denir. Birinci örneği inceleyiniz.

Yine yukarıdaki denklem sisteminin ifadesinde katsayılar matrisi ile sabitler matrisinde temel satır işlemleri yapılarak, katsayılar matrisi birim matrise dönüştürülür.

Oluşan bu formda x_1 , x_2 ve x_3 bilinmeyenlerinin değerleri, sabitler matrisinde kendisine karşılık gelen satırdaki sayıya eşittir. Bu çözüm yöntemine de "Gauss - Jordan yok etme" metodu denir. İkinci örneği inceleyiniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= -8 \\ x - y + 2z &= 4 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü Gauss yok etme yöntemiyle bulalım.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ sisteminde,}$$

2. satırı (-1) ile çarpıp 3. satıra ekleyelim ve 1. satırı (-1) ile çarpıp 2. satıra ekleyelim.

$$((-1) \cdot S_2 + S_3 \rightarrow S_3)$$

$$((-1) \cdot S_1 + S_2 \rightarrow S_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu sistemde,

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 3z = -6 \Rightarrow z = 2 \text{ bulunur.}$$

$$0 \cdot x - 2y + 5z = 12 \Rightarrow -2y + 5 \cdot 2 = 12$$

$$\Rightarrow -2y = 2$$

$$\Rightarrow y = -1 \text{ bulunur.}$$

$$x + y - 3z = -8 \Rightarrow x - 1 - 3 \cdot (2) = -8$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ bulunur.}$$

Sistemin çözümü, $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ sıralı üçlüsüdür.

Örnek 2:

$$x + y + z = 4$$

$$2x - y + z = 4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

denklem sisteminin çözümünü Gauss-Jordan yok etme metodu ile bulalım.

Çözüm:

Verilen sistemde sırasıyla aşağıdaki temel satır işlemlerini yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S_1 + S_3 &\rightarrow S_3 \\ (-1) \cdot S_1 + S_2 &\rightarrow S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad S_3 + S_1 \rightarrow S_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \cdot S_2 + S_1 \rightarrow S_1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{2}{11} \cdot S_1 &\rightarrow S_1 \\ -S_1 + S_2 &\rightarrow S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot S_2 &\rightarrow S_2 \\ -4 \cdot S_1 + S_3 &\rightarrow S_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (-1) \cdot S_3 \rightarrow S_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Burada x, y, z değerleri sabitler matrisinde kendisine karşılık gelen sayıya eşittir. yani $x = 2$, $y = 1$, ve $z = 1$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$4x - y + z = 4$$

$$x + y - 2z = 3$$

$$x - y + 3z = -3$$

sistemini Gauss yok etme metodu ile çözünüz.

A) (1, 0, -2) B) (1, -2, -2) C) (1, 1, -2)

D) (3, 1, -1) E) (2, 1, -1)

Soru 2:

$$x + 2y = 1$$

$$2x + y - z = 4$$

$$x - 3z = 7$$

sistemini Gauss-Jordan yok etme yöntemiyle çözünüz.

A) (1, 2, -2) B) (-1, -1, 0) C) (1, 0, 2)

D) (1, 0, 4) E) (1, 0, -2)

Soru 3:

$$2x + y - z = 3$$

$$x - y - z = 2$$

$$3x - y = 3$$

sistemini Gauss yok etme yöntemiyle çözünüz.

A) (1, 0, -2) B) (1, 1, -1) C) (1, 0, -1)

D) (2, 1, -1) E) (1, -1, 0)

FEM YAYINLARI

Soru 4:

$$x + y + z = 0$$

$$x - 2y + 2z = 7$$

$$y - 3z = -5$$

sistemini sağlayan (x, y, z) üçlüsü için x.y.z çarpımı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 4

1. $A = \begin{bmatrix} 3a & -2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

 $A - 2B = C$ olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 4 & 2b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 6 & a \\ 8 & b \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

$$3A + B = \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ c & 28 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

 $X = A.A^T$ eşitliğini sağlayan X matrisinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3I_2$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir? (I : birim matristir.)

A) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

 $A.B = C$ olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

 $A.B^T = C^T$ olduğuna göre, C matrisi aşağıdakilerden hangisidir? ($B^T = B$ nin devriği)

A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

 $A.X = X + B$ eşitliğini sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -9 \\ -9 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonuna göre, $f(A)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

FEM YAYINLARI

9. $A = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & y \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit

olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) $-\frac{11}{12}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $-\frac{5}{12}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

matrisi ve $f(A) = A^4 - I_2$ fonksiyonu veriliyor.
 $f(A)$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $8A$ B) $8I_2$ C) $82A$ D) $82I_2$ E) $81I_2$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{700} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 350 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 350 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 700 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 700 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 700 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

A^{2007} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-A$ B) A C) $2^{2007} \cdot I_2$ D) I_2 E) $2^{2007} \cdot A$

13. A kare matris ve $A^T = B^T - B$ olduğuna göre, A matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) I B) $-A$ C) A^T D) $-A^T$ E) $-I$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a + d - b - c$ nin değeri kaçtır?

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

16. A ve B matrisleri kare matrislerdir.

$A = A^T + B$ olduğuna göre, B^T aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) B B) $-B$ C) $-A$ D) $-B^T$ E) A

17. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 4 & c \\ 6 & b & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $b + c - a$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

1. $A = [a_{ij}]_{3 \times 1}$ matrisi için,
 $i + j \equiv a_{ij} \pmod{4}$ olduğuna göre, A^T matrisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

(A^T : A matrisinin transpozesi)

A) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$A \cdot B = 2A - B$ olduğuna göre, B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisi için,

$f(A) = 2A^2 - 3A + 5I_2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -18 & -27 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 51 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 14 & -16 \\ -32 & 46 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 28 & -35 \\ -27 & 72 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ ve $A^T + A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a kaçtır? (A^{-1} : A'nın çarpmaya göre tersidir.)

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{-4}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. A, B ve C matrisleri 2×2 tipinde kare matrislerdir.

$A \cdot B = C^{-1}$

olduğuna göre, $A^T \cdot C^T$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) B^T B) $(C^T)^{-1}$ C) $(B^{-1})^T$ D) B E) A^{-1}

7. Bir A matrisi için $A^T = -A$ olduğuna göre,

$B = (A^T)^2 - A^2 + I$

matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) A C) A^T D) $-A$ E) I

8. $i^2 = -1$ ve $a^3 = 1$ olmak üzere,

$A = \begin{bmatrix} a & i \\ i & a^2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{-1} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} a^2 & -i \\ -i & a \end{bmatrix}$ B) $-\begin{bmatrix} a^2 & -i \\ -i & a \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} a & i \\ i & a^2 \end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & i \\ i & a^2 \end{bmatrix}$ E) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^2 & -i \\ -i & a \end{bmatrix}$

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

9. $A = \begin{bmatrix} i & i & i \\ -i & -i & -i \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & y & \cdot \\ \cdot & \cdot & z \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?
($i^2 = -1$ dir.)

- A) -6 B) -9 C) 3i D) -3 E) -3i

10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$A = A^{-1} + 2I$ olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 4 & c \\ 6 & b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $b + c - a$ kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & 4 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & a \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13. $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

Buna göre, A^{1997} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A B) A^2 C) $A^3 \cdot 1997$
D) $1997 \cdot A^{1997}$ E) $1997 \cdot I_2$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & a \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10 B) 6 C) 5 D) 4 E) -2

15. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

16. A, 2×2 türünden bir matris olmak üzere,

$$A \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. x ve y birer tamsayı

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -13 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $(3x - y)$ değeri kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

2. $A = \begin{bmatrix} -3 & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ n & 2 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

$$3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $k + n$ toplamı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 4 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

matrisi veriliyor.

A matrisinde $3 \cdot (a_{11})^2 - 2 \cdot a_{22} + a_{13}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) 1 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 8 & 34 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 33 & 8 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 46 & 13 \\ 21 & 14 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 51 & 12 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} k & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

eşitliğine göre, x kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

A^{2006} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $9^{2006} \cdot I_2$ B) $-9^{2006} \cdot I_2$ C) $3^{2006} \cdot I_2$
D) $-3^{2006} \cdot I_2$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

7. Bir oto bayii A, B tipinde ve kırmızı, beyaz renkte arabalar satıyor. A tipinin her birinden elde edilen kâr 800 TL, B tipinin her birinden elde edilen kâr 1000 TL dir.

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Kırmızı} \\ \text{Beyaz} \end{matrix}$$

S matrisi Ocak ayı satışlarını gösterdiğine göre, bu oto bayii ocak ayında sattığı kırmızı arabalardan toplam kaç TL kâr elde etmiştir?

- A) 6400 B) 6600 C) 7400
D) 12000 E) 13000

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = A - 2B$$

olduğuna göre, $C \cdot C^T$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -16 & 25 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 17 & -16 \\ 16 & -25 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -16 & -25 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 17 & -24 \\ -24 & 41 \end{bmatrix}$

FEM YAYINLARI

FEM YAYINLARI

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor.

$$(A.B)^T = \begin{bmatrix} 7 & y \\ x & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

- A) -8 B) -4 C) 4 D) 6 E) 10

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{33} aşağıdakilerden hangisidir?

- A) I B) $3^{32} \cdot I$ C) $3^{17} \cdot A$ D) $3^{30} \cdot A$ E) $3^{32} \cdot A$

11. $x^2 - 4x - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
Buna göre,

$$\sum_{k=1}^2 \begin{bmatrix} x_k & 1 \\ k & \frac{1}{x_k} \end{bmatrix}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1-\cos x & \sin x \\ 1-\sin x & \cos x \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} . & m \\ n & . \end{bmatrix}$

denkleminde, $m + n$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $1 - \sin x$ C) $1 + \cos x$
D) $\sin x - \cos x$ E) $\sin x \cdot \cos x$

13. $A = \begin{bmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{bmatrix}$

ise, $A.B = C$ eşitliğini sağlayan C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 1 & \\ \sin a & \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & \\ 2\sin a & \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & \\ \sin 2a & \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & \\ 2\sin a & \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}^6$

matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \cos 3x & 1 \\ 1 & \sin 3x \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & \tan 6x \\ \cot 6x & 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 1 & \sin 6x \\ \cos 6x & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 81 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 11 B) 12 C) 21 D) 27 E) 30

16. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x.y$ kaçtır?

- A) -10 B) -8 C) 12 D) 16 E) 18

1. $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A| = 0$ olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. $k \in \mathbb{R}$ ve A, B ve C birer matris olmak üzere,

I. $k \cdot A_{2 \times 2}$

II. $B_{3 \times 2}$

III. $C = [2]$

Yukarıdaki ifadelerden hangisi veya hangilerinin determinanı alınabilir?

- A) I B) I - II C) III D) I - III E) I - II - III

3. $A = \begin{bmatrix} 2000 & 2001 \\ 2001 & 2000 \end{bmatrix}$

matrisinin determinanı kaçtır?

- A) -1 B) 2000 C) -2001 D) 4000 E) -4001

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$\det(2006A)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) -2006 D) 2006 E) -2006²

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$|A^T.B|$ determinantının değeri kaçtır?
(A^T : A matrisinin transpozesidir.)

- A) $\frac{2}{3}$ B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) 5 E) 6

6. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} t & z \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri veriliyor. $|A| = -5$, $|B| = -8$ olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix} x+t & y+z \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -3 B) 3 C) -13 D) 39 E) 40

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & b \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A.A^d| = 16$ olduğuna göre, b aşağıdakilerden hangisi olabilir? (A^d : A matrisinin devriğidir.)

- A) -1 B) -2 C) 3 D) 4 E) -7

8. $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ olmak üzere,

$\det(A) = 2$ olduğuna göre, $\det(4A)$ kaçtır?

- A) 256 B) 128 C) 64 D) 16 E) 8

9.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\det(A^T + A)$ kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 10 D) 16 E) 20

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\begin{vmatrix} i & i+1 & -1 \\ -i & 0 & 1 \\ 1 & -i & i-1 \end{vmatrix}$$

determinantının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) i C)
- $1+i$
- D)
- $1-i$
- E)
- $-i$

11. $2x^2 + (t+2)x - t + 26 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\begin{vmatrix} 2 & x_2 \\ x_1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$
 olduğuna göre, t kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D)
- $\frac{26}{11}$
- E)
- $\frac{26}{9}$

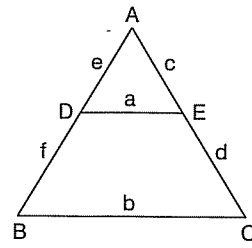
$$12. A = \begin{bmatrix} 133 & 242 \\ 260 & 480 \end{bmatrix}$$
 matrisi veriliyor.

Buna göre, A matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 800 B) 853 C) 914 D) 920 E) 1452

13. Yandaki şekle göre
[DE] // [BC]

$$\begin{vmatrix} a & c & e \\ b & c+d & e+f \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$$



determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

$$14. A = \begin{bmatrix} a & d & m \\ b & e & l \\ c & f & n \end{bmatrix}$$
 matrisi veriliyor.

$$\text{Buna göre, } B = \begin{bmatrix} d & ka & m \\ e & kb & l \\ f & kc & n \end{bmatrix}$$
 matrisinin

determinantı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $k|A|$
- B)
- $|A|$
- C)
- $-k|A|$
-
- D)
- $|A|^2$
- E)
- $k^2|A|$

$$15. \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

determinantının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) 1 C)
- $\sin 2x$
-
- D)
- $-\cos 2x$
- E)
- $\cos 2x$

$$16. B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a-3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$
 matrisi veriliyor.

 $\det(B) = 0$ olması için, a kaç olmalıdır?

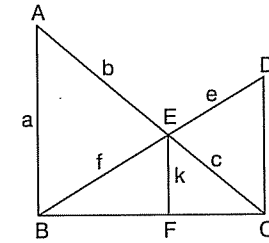
- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

1. Aşağıdaki matris çarpımlarından hangisinin determinantı hesaplanabilir?

- A)
- $A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 3}$
- B)
- $A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2}$
-
- C)
- $A_{5 \times 3} \times B_{3 \times 2}$
- D)
- $A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 3}$
-
- E)
- $A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 2}$

2. Yandaki şekilde;
[AB] // [EF] // [DC]
olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} a & b & f \\ d & c & e \\ k & k & k \end{vmatrix}$$



determinantının değeri kaçtır?

- A) 0 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

determinantı ile ifade edilen doğrunun eksenler ile oluşturduğu alan kaç br^2 dir?

- A)
- $\frac{1}{2}$
- B) 1 C)
- $\frac{3}{2}$
- D) 2 E)
- $\frac{5}{2}$

4. A, B matrisleri 2×2 türünde kare matrislerdir.

$$|A| = 3 \text{ ve } |B| = 4$$

olduğuna göre, $|2A| + |3B|$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 36 B) 40 C) 45 D) 48 E) 54

$$5. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
 matrisi veriliyor.

 $|Ek(A) \cdot A|$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 6 C) 12 D) -18 E) -27

6. $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ matrisi veriliyor. $|-2A \cdot A^{-1}|$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir? (A^{-1} : A'nın çarpmaya göre tersi)

- A) -8 B) -2 C) 2 D) 4 E) 8

$$7. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$$
 olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix} a_1 k & a_2 k & a_3 k \\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ 3kc_1 & 3kc_2 & 3kc_3 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaç m dir?

- A)
- $3k - 1$
- B)
- $-6k^2$
- C)
- $3k^2 - 6$
- D)
- $-2k^2$
- E)
- k

$$8. \begin{vmatrix} a+b+c & a+b-c \\ a-b+c & a-b-c \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- A)
- $4ab$
- B)
- $4bc$
- C)
- $-4ac$
- D)
- $-4bc$
- E) 0

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A| = |A^{-1} \cdot A^T|$ olduğuna göre, a aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) -6 B) -5 C) 5 D) 6 E) 0

10. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & a \end{bmatrix}$

matrisinin birinci satırındaki elemanlar 1 azaltılıp, ikinci satırındaki elemanlar 2 artırıldığında determinan- tı değişmediğine göre, a nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x - 2y + z$ B) $2y + z - 2x$ C) $2x + 2y - z$

- D) $x + y - z$ E) $2x - 2z + y$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

Buna göre, $|A^d + A^{-1}|$ determinantının değeri kaçtır? (A^d : A matrisinin devriğidir.)

- A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 45

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ matrisinin determinan- tı 1 dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot B_{2 \times 2} = I_{2 \times 2}$$

olduğuna göre, B matrisinin elemanlarının toplamı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

13. A ve B matrisleri, 3×3 türünde kare matrislerdir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\det(A) = 4$$

olduğuna göre, $\det(B)$ kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) 3 D) 4 E) 6

14. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x.y kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 6 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinin tersinin olmaması için a nın değeri ne olmalıdır?

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

16. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -18 B) -9 C) -1 D) 18 E) 27

FEM YAYINLARI

1. A ve B matrisleri 4×4 tipinde kare matrislerdir.

$$|2A| = 3 \text{ ve } |B^T| = 2$$

olduğuna göre, $|A| + 2 \cdot |B^{-1}|$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{11}{16}$ B) $\frac{19}{16}$ C) $\frac{21}{16}$ D) 2 E) 6

2. $A = \begin{bmatrix} x & 2x \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisleri için, $\det(A + B) = \det(B \cdot A^T)$ olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $-\frac{11}{5}$ B) $-\frac{5}{11}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 5

3. $\begin{vmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix} = 8$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -5 C) 0 D) 5 E) 7

4. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & x & 5 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix}$

determinantının değeri 60 olduğuna göre, x.y kaçtır?

- A) 6 B) 12 C) 20 D) 24 E) 28

5. $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisler için,

$$|x \cdot y \cdot z^4| = -12$$

olduğuna göre, |z| aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 16

6. $|A| = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 2a & 2-2b & 1+2c \end{vmatrix}$$

olmak üzere, $|A| - |B|$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

7. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} i & i^3 \\ 1-i & -i \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} i & -5i \\ 1-i & -5i \end{bmatrix}$$

matrisleri için, $|A| + |B|$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 + i$ B) $12 + 6i$ C) 0 D) i E) $-4i$

8. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 8 & 1 & 7 \\ -6 & 3 & -15 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -8 B) -4 C) -1 D) 0 E) 4

9. $A = \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix}$

matrisi için $y = -\frac{2}{x}$ olduğuna göre,

$$|A^2| + |A^{-1}| \cdot |A^T|$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 200 B) 250 C) 287 D) 401 E) 440

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisi için $|Ek(A)|$ determinantının değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 3 E) 5

FEM YAYINLARI

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 9 D) 16 E) 36

12. $A = \begin{bmatrix} \sin x & \sin y \\ -\cos x & \cos y \end{bmatrix}$

$\det(A) = \frac{1}{2}$ olduğuna göre, $\sin(x + y)$ nin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 0

13. $\begin{vmatrix} 2008 & 2007 \\ 2007 & 2006 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 2005 D) 2007 E) 2009

14. $\sum_{k=1}^{99} \begin{vmatrix} k! & k! \\ 1 & k+1 \end{vmatrix}$

ifadesinin sondan kaç basamağı dokuzdur?

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

15. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ifadesinin belirttiği denklem sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x - y = -1$
 $x + 3y = 3$
B) $x - 2y = -1$
 $x - 3y = 3$
C) $x + 2y = -1$
 $3x + y = 2$
D) $x - 3y = 1$
 $2x + 3y = -3$
E) $5x - y = 0$
 $3x - y = -3$

16. $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 2 & x+3 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$ B) $\{1, -2\}$ C) $\{3, -1\}$
D) $\{1, -1\}$ E) $\{2, -1\}$

17. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + y + 2z = -4 \end{cases}$

eşitliklerini sağlayan (x, y, z) üçlüsü için $x.y.z$ çarpımı kaçtır?

- A) 3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 5

18. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[1, 2)$ B) $(1, 3]$ C) $(2, 3)$
D) $[2, 5]$ E) $\{3, 5\}$

19. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ x-1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ -1 \end{bmatrix}$

denklemin sistemini sağlayan x ve y değerleri için $x.y$ kaçtır?

- A) 18 B) 15 C) 12 D) 16 E) 3

20. $\begin{vmatrix} 2 & \sec x & \tan x \\ 0 & \sin x & \cot x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix}$

determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\csc x$ B) $\sin 2x$ C) $\cos 2x$
D) $\tan x + \cot x$ E) $2 + \sin x + \cos x$

FEM YAYINLARI