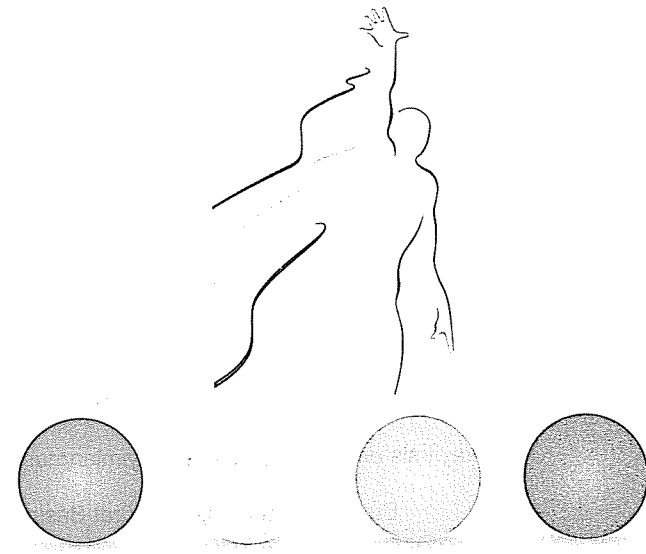
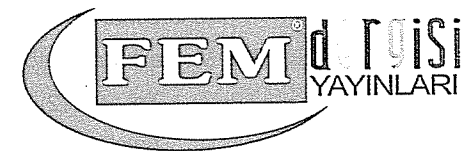


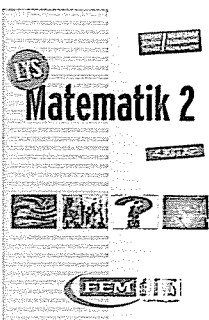
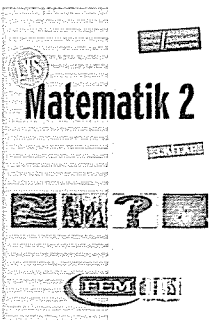
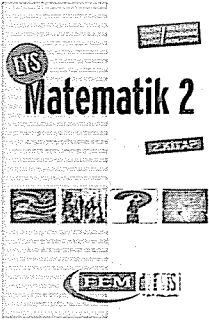
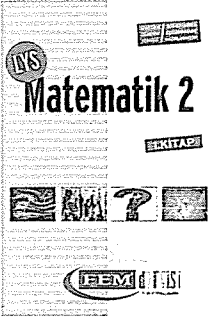


MATEMATİK 2

(LYS)

2. KİTAP





POLİNOMLAR
ÇARPANLARA AYIRMA
İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER
EŞİTSİZLİKLER
PARABOL

TRİGONOMETRİ
KARMAŞIK SAYILAR
LOGARİTMA

PERMÜTASYON
KOMBİNASYON
BİNOM - OLASILIK
İSTATİSTİK
TOPLAM - ÇARPIM SEMBOLÜ
DİZİLER
MATRİS - DETERMİNANT

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR
LİMİT - SÜREKLİLİK
TÜREV
İNTEGRAL

İÇİNDEKİLER

1 BÖLÜM 1

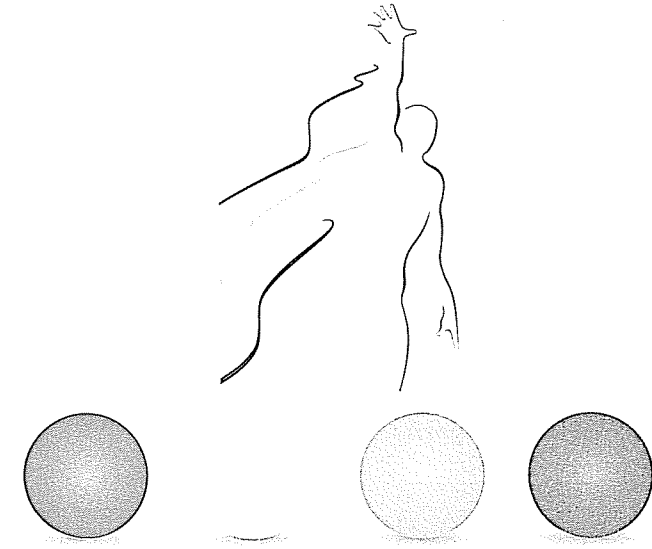
.....TRİGONOMETRİ

179 BÖLÜM 2

.....KARMAŞIK SAYILAR

229 BÖLÜM 3

.....LOGARİTMA



BÖLÜM I

TRİGONOMETRİ

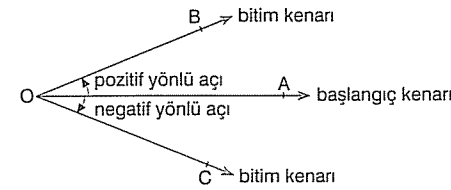
TEMEL KAVRAMLAR

Açı

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine **açı** denir. Bu ışınlara **açının kenarları**, başlangıç noktasına ise **açının köşesi** adı verilir.

Yönlü Açılar

Başlangıç kenarından itibaren saatin dönme yönünde alınan açıya **negatif yönlü açı**, saatin dönme yönünün tersi olan yönde alınan açıya ise **pozitif yönlü açı** denir.

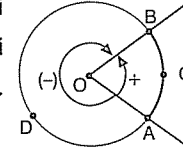


Yönlü Yaylar

$\widehat{AOB}$ ile bu açının iç bölgesindeki noktaların kümesinin O merkezli çemberle kesişimi ACB yayıdır. ACB yayı, $\widehat{AB}$ biçiminde gösterilir.

ACB yayının yönü pozitif yön;

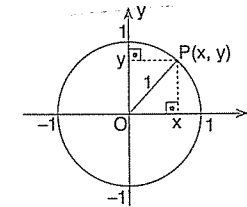
ADB yayının yönü negatif yöndür.



Birim Çember

Analitik düzlemde merkezi başlangıç noktasında (ori-jin) ve yarıçapı 1 birim uzunlukta olan çembere **birim çember** denir.

Birim çember denklemi $x^2 + y^2 = 1$ dir.



Açı Birimleri

Çember yayının tamamını gören merkez açıya 360 derece, 2π radyan veya 400 grad denir.

Bilgi

$$\frac{\text{Derece(D)}}{360} = \frac{\text{Radyan(R)}}{2\pi} = \frac{\text{Grad(G)}}{400}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \text{ olur.}$$

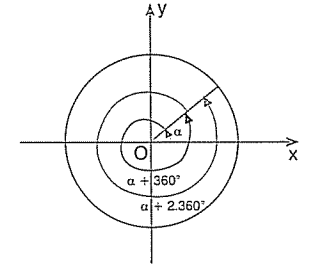
Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

Derece	360°	180°	90°	60°	45°	30°	120°	135°	150°
Radyan	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Grad	400	200	100	$\frac{200}{3}$	50	$\frac{100}{3}$	$\frac{400}{3}$	150	$\frac{500}{3}$

Esas Ölçü



$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ olmak üzere,

$$\theta = \alpha + k.360^\circ$$

ifadesindeki α açısına θ açısının **esas ölçüsü** denir.

Bilgi

■ Bir açının esas ölçüsünü bulmak için derece olarak verilmişse 360° ye, radyan olarak verilmişse 2π ye, grad olarak verilmişse 400 e bölümünden kalan alınır.

$$\theta \equiv \alpha \pmod{360^\circ}$$

$$\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

$$\theta \equiv \alpha \pmod{400}$$

■ Esas ölçü negatif olamaz. Negatif açıların esas ölçüsü, bu açıya 360° veya katları eklenerek bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Ölçüsü 4340° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r} 4340 \overline{) 360} \\ : 12 \\ \hline \end{array}$$

Kalan = 20 $\rightarrow$ Esas ölçü

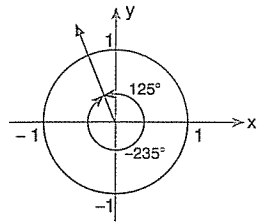
olduğuna göre, $4340^\circ = 20^\circ + 12 \cdot 360^\circ$ olur.

Buna göre, ölçüsü 4340° olan açının esas ölçüsü 20° bulunur.

Örnek 2:

Ölçüsü -235° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:



Yukarıdaki birim çemberde negatif yöndeki 235° lik açının, pozitif yöndeki eşitinin yani esas ölçüsünün $-235^\circ + 360^\circ = 125^\circ$ olduğu görülmektedir.

Örnek 3:

Ölçüsü -4945° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

-4945° nin esas ölçüsünü bulmak için mutlak değerini 360° ye bölüp kalanı 360° den çıkaralım.

$$\begin{array}{r} 4945 \overline{) 360} \\ : 13 \\ \hline \end{array}$$

Kalan = 265 $\rightarrow$ Esas ölçü değil

olduğundan, -4945° nin esas ölçüsü $360^\circ - 265^\circ = 95^\circ$ bulunur.

Örnek 4:

Ölçüsü $-133^\circ 42' 29''$ olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$360^\circ = 359^\circ 60' 0'' = 359^\circ 59' 60''$ olduğundan ölçüsü negatif olan açıyı bu değerlerle toplayarak esas ölçüyü bulalım.

$$\begin{array}{r} -133^\circ 42' 29'' + 359^\circ 59' 60'' \Rightarrow 359^\circ 59' 60'' \\ - 133^\circ 42' 29'' \\ \hline 226^\circ 17' 31'' \end{array}$$

olduğundan $-133^\circ 42' 29''$ nin esas ölçüsü, $226^\circ 17' 31''$ bulunur.

Örnek 5:

Ölçüleri 94π , 795π , 5943π , -179π , -4842π , -733π olan açılarının esas ölçülerini bulalım.

Çözüm:

Radyan olarak verilmiş açılarının esas ölçüsünü bulmak için 2π ye bölümünden kalan bulunacaktır. Buna göre, çift sayıların 2π ile bölümünden kalan 0, tek sayıların 2π ile bölümünden kalan π olduğundan

$$\begin{array}{ll} 94\pi \equiv 0 \pmod{2\pi} & -179\pi \equiv \pi \pmod{2\pi} \\ 795\pi \equiv \pi \pmod{2\pi} & -4842\pi \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 5943\pi \equiv \pi \pmod{2\pi} & -733\pi \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{array}$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Ölçüsü 5842° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

- A) 72 B) 82 C) 112 D) 138 E) 178

Soru 2:

Ölçüsü -9375° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 35 C) 305 D) 325 E) 345

Soru 3:

Ölçüsü -7350° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?

- A) 150 B) 190 C) 210 D) 240 E) 270

Soru 4:

Ölçüsü $-217^\circ 43' 52''$ olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $142^\circ 16' 08''$ B) $142^\circ 26' 18''$
C) $143^\circ 16' 08''$ D) $143^\circ 26' 18''$
E) $141^\circ 26' 32''$

Soru 5:

Ölçüsü 743π radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

Soru 6:

Ölçüsü -7342π radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

Bilgi

■ $\frac{A\pi}{B}$ şeklindeki ifadelerin esas ölçüsü,

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{2.B}{C} \Rightarrow \frac{A\pi}{B} = \frac{C\pi}{B} \text{ dir.}$$

■ $-\frac{A\pi}{B}$ nin esas ölçüsü, $-\frac{C\pi}{B} + 2\pi$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Ölçüsü $\frac{43\pi}{4}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

Radyan olarak verilmiş açı bu şekilde kesirli ifade ise payının paydasının 2 katına bölümünden elde edilen kalan π ile çarpılıp esas ölçünün payına yazılır, paydası ise aynı kalır.

$$\frac{43\pi}{4} \Rightarrow \frac{43}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{5} \cdot \frac{3}{5} = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

Buna göre, $\frac{43\pi}{4}$ radyanın esas ölçüsü $\frac{3\pi}{4}$ bulur.

Örnek 2:

Ölçüsü $\frac{173\pi}{9}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{173\pi}{9} \Rightarrow \frac{173}{9} \cdot \frac{18}{11} = \frac{162}{11} \cdot \frac{11}{9} = 18 \cdot \frac{11}{9} = 2 \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{3}$$

Örnek 3:

Ölçüsü $-\frac{56\pi}{3}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{56\pi}{3} \Rightarrow \frac{56}{3} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{9} \cdot \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$\Rightarrow \text{Esas ölçü: } -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ olur.}$$

Örnek 4:

Ölçüsü $-\frac{77\pi}{9}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{77\pi}{9} \Rightarrow \frac{77}{9} \cdot \frac{18}{5} = \frac{72}{5} \cdot \frac{18}{4} = 18 \cdot \frac{18}{5} = \frac{324}{5}$$

$$\Rightarrow \text{Esas ölçü: } -\frac{5\pi}{9} + 2\pi = \frac{13\pi}{9} \text{ olur.}$$

Örnek 5:

Ölçüsü $-\frac{113\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{113\pi}{5} \Rightarrow \frac{113}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{110}{11} \cdot \frac{10}{11} = 10 \cdot \frac{10}{11} = \frac{100}{11}$$

$$\Rightarrow \text{Esas ölçü: } -\frac{3\pi}{5} + 2\pi = \frac{7\pi}{5} \text{ tir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Ölçüsü $\frac{50\pi}{3}$ radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

Soru 2:

Ölçüsü $\frac{219\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{9\pi}{7}$ B) $\frac{10\pi}{7}$ C) $\frac{12\pi}{7}$ D) $\frac{9\pi}{14}$ E) $\frac{13\pi}{14}$

Soru 3:

Ölçüsü $-\frac{72\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4\pi}{5}$ B) $\frac{8\pi}{5}$ C) $\frac{7\pi}{10}$ D) $\frac{9\pi}{10}$ E) $\frac{11\pi}{10}$

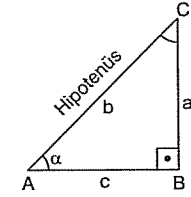
Soru 4:

Ölçüsü $-\frac{179\pi}{11}$ radyan olan açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3\pi}{11}$ B) $\frac{18\pi}{11}$ C) $\frac{19\pi}{11}$ D) $\frac{3\pi}{22}$ E) $\frac{19\pi}{22}$

Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Bir ABC dik üçgeninde;



$$\sin \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ ve } \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ olarak tanımlanır.}$$

Bilgi

Trigonometrik oranlar ile ilgili soruların sorulduğu şekilli sorulardan çözümün yapılabilmesi için bir açısı, sorulan açı olan kenarlarının uzunlukları belli bir dik üçgenin bulunması gerekir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

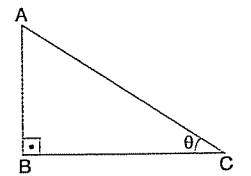
ABC dik üçgeninde,

$$|AB| = 4 \text{ birim}$$

$$|BC| = 6 \text{ birim}$$

$$m(\widehat{ACB}) = \theta$$

olduğuna göre, $\sin \theta \cdot \cos \theta$ çarpımını bulalım.



Çözüm:

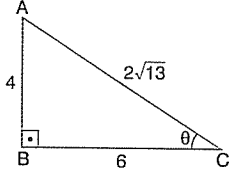
Pisagor bağıntısından,

$$|AC|^2 = 4^2 + 6^2$$

$$|AC| = 2\sqrt{13} \text{ birimdir.}$$

Buna göre,

$$\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{13} \text{ bulunur.}$$



Örnek 2:

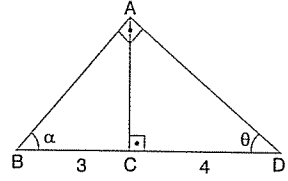
ABD dik üçgeninde,

$$m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$$

$$[AC] \perp [BD]$$

$$|BC| = 3 \text{ cm}$$

$$|CD| = 4 \text{ cm}$$



olduğuna göre, $\tan \alpha + \cot \theta$ toplamını bulalım.

Çözüm:

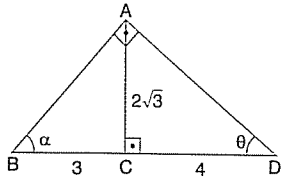
ABD dik üçgeninde Öklit bağıntısı uygulanırsa,

$$|AC|^2 = |BC| \cdot |CD|$$

$$|AC|^2 = 3 \cdot 4$$

$$|AC| = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

bulunur.



Buna göre,

ACB dik üçgeninden,

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ve}$$

ACD dik üçgeninden,

$$\cot \theta = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$

O halde,

$$\tan \alpha + \cot \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

Yandaki şekilde,

$$m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$$

$$m(\widehat{BCA}) = 90^\circ$$

$$|BD| = 2 \cdot |DC|$$

olduğuna göre, $\tan(\widehat{ADC})$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

ABC dik üçgeninde,

$$|DC| = 1 \text{ alınırsa,}$$

$$|BD| = 2 \text{ olur.}$$

Dik üçgende 30° lik

açının karşısındaki kenar

hipotenüsün yarısına

eşit olduğu için,

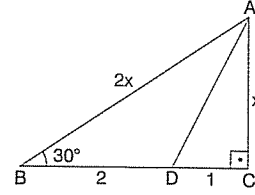
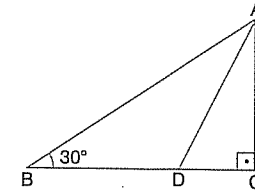
$$|AC| = x \text{ denilirse, } |AB| = 2x \text{ olur.}$$

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$$(2x)^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

Buradan,

$$\tan(\widehat{ADC}) = \frac{x}{1} = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$



Örnek 4:

Şekildeki ABC üçgeninde,

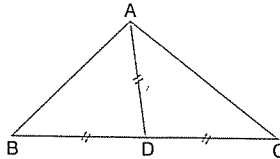
$$|AD| = |BD| = |CD|$$

$$|AD| = 5 \text{ cm}$$

$$|AB| = 6 \text{ cm}$$

$$m(\widehat{ABC}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\operatorname{cosec} \alpha$ nın değerini bulalım.



Çözüm:

Bir dik üçgende hipo-
tenüse ait kenarortay
hipotenüsün yarısına
eşit olduğu için;

$$|AD| = |BD| = |DC| \text{ ise,}$$

$$m(\widehat{A}) = 90^\circ \text{ dir.}$$

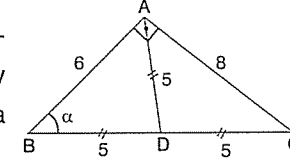
$$|AD| = 5 \text{ cm ve } |BC| = 10 \text{ cm dir.}$$

$$|AB| = 6 \text{ cm ise } (6 - 8 - 10) \text{ üçgeninden}$$

$$|AC| = 8 \text{ cm olur.}$$

Buna göre,

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$



Örnek 5:

Yandaki şekilde,

ABCD bir karedir.

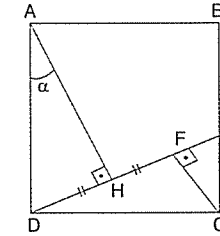
$$[AH] \perp [DE]$$

$$[CF] \perp [DE]$$

$$|DH| = |HF|$$

$$m(\widehat{DAH}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\cot \alpha$ nın değerini bulalım.



Çözüm:

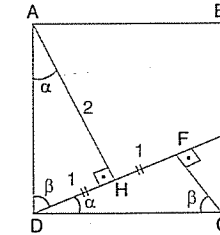
ADH üçgeni DCF üçgeni ile
benzerdir. Bu üçgenlerin hi-
potenüs uzunlukları eşit ol-
duğu için eş üçgenlerdir.
Yani karşılıklı kenarların
uzunlukları eşittir.

Buna göre,

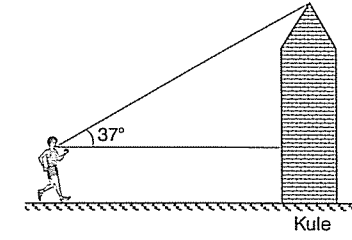
$$|DH| = |HF| = 1 \text{ ise,}$$

$$|DF| = |AH| = 2 \text{ dir.}$$

Buradan $\cot \alpha = 2$ bulunur.



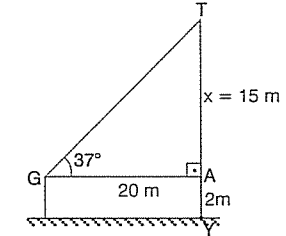
Örnek 6:



Yerden göz seviyesine kadar yüksekliği 2 metre olan
bir kişi, kuleye 20 metre uzaklıktan, 37° lik bir açıyla
baktığında kulenin tepe noktasını görmektedir.

Buna göre, kulenin yüksekliğinin yaklaşık değe-
rini hesaplayalım. ($\tan 37^\circ \approx 0,75$)

Çözüm:



Yukarıdaki şekilde,

$$\tan 37^\circ = \frac{3}{4} = \frac{x}{20}$$

$$\Rightarrow x = 15 \text{ m bulunur.}$$

Buna göre, kulenin yaklaşık boyu,

$$|TY| = 15 + 2 = 17 \text{ m bulunur.}$$

Örnek 7:

Yandaki şekilde,

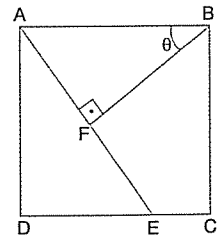
ABCD bir karedir.

$$[BF] \perp [AE]$$

$$|DE| = 3|EC|$$

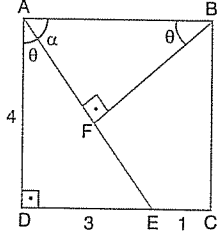
$$m(\widehat{FBA}) = \theta$$

olduğuna göre, $\sec \theta$ yı bulalım.



Çözüm:

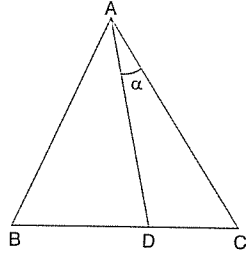
ABCD karesinde,
 $|EC| = 1$ alınırsa,
 $|DE| = 3$, $|AD| = 4$
ve $|AE| = 5$ bulunur.
 $m(\widehat{FBA}) = m(\widehat{DAE})$
olduğundan,



ADE üçgeninden,
 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$ bulunur.

Örnek 8:

Şekildeki ABC üçgeni
eşkenar üçgendir.
 $m(\widehat{DAC}) = \alpha$
 $4|BD| = 5|DC|$

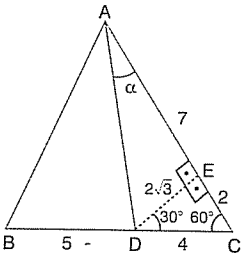


olduğuna göre, $\tan \alpha$ yı bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde,
 $|DC| = 4$ birim alınırsa,
 $|BD| = 5$ birim olur.

ABC eşkenar üçgen
olduğuna göre,
 $m(\widehat{C}) = 60^\circ$ ve
 $[AC]$ üzerine $[DE]$ dikmesi
indirilirse, $m(\widehat{CDE}) = 30^\circ$ olur.

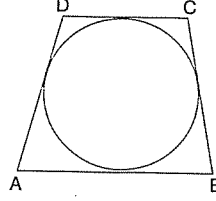


Buna göre, $|DC| = 4$ birim, $|EC| = 2$ birim,
 $|DE| = 2\sqrt{3}$ birim ve $|AE| = 7$ birimdir.

O halde,
AED dik üçgeninden,
 $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{7}$ bulunur.

Örnek 9:

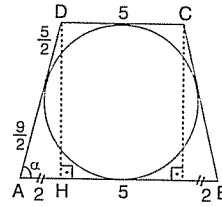
Yandaki şekilde,
ABCD bir ikizkenar
teğetler yamuğudur.
 $|AB| = 9$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $m(\widehat{DAB}) = \alpha$



olduğuna göre, $\cos \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:

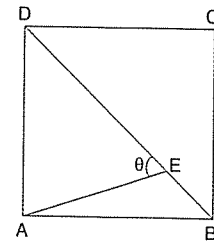
İkizkenar teğetler
yamuğunda,
 $|AH| = \frac{9-5}{2} = 2$ birim
 $|AD| = \frac{9+5}{2} = 7$ birimdir.



Buna göre,
AHD dik üçgeninden,
 $\cos \alpha = \frac{|AH|}{|AD|} = \frac{2}{7}$ bulunur.

Örnek 10:

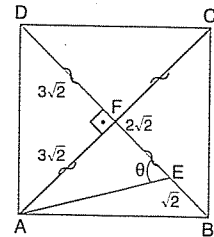
Yandaki şekilde,
ABCD kare,
 $[BD]$ köşegen,
 $|DE| = 5|EB|$
 $m(\widehat{AED}) = \theta$



olduğuna göre,
 $\tan \theta$ nın değerini bulalım.

Çözüm:

ABCD karesinde,
 $|EB| = \sqrt{2}$ birim alınırsa,
 $|DE| = 5\sqrt{2}$ birim,
 $|DB| = 6\sqrt{2}$ birim olur.
Karenin köşegen uzunlukları
birbirine eşit ve
köşegenler birbirini dik keser.

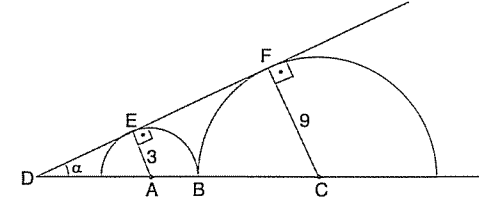


Buna göre,

$|DB| = |AC| = 6\sqrt{2}$ birim,
 $|DF| = |AF| = 3\sqrt{2}$ birim ve $|FE| = 2\sqrt{2}$ birim olur.

O halde,
AFE dik üçgeninden,
 $\tan \theta = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$ bulunur.

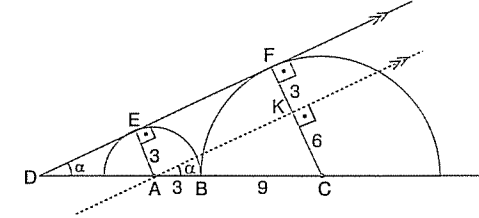
Örnek 11:



A ve C noktaları, şekildeki yarım çemberlerin mer-
kezleri, EF ortak teğet, AC merkezler doğrusu,
D noktası EF ile AC doğrularının kesim noktası,
çemberler B noktasında birbirine teğet, $|EA| = 3$
birim, $|FC| = 9$ birimdir.

Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{EDA}) = \alpha$ olduğuna göre,
 $\sin \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:



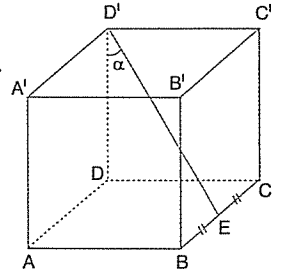
AK // EF olsun. Buradan,
 $|AE| = |FK| = 3$ ve $|KC| = 6$ olur.

AKC dik üçgeninde,
 $|KC| = 6$ ve
 $|AC| = |AB| + |BC| = 3 + 9 = 12$ dir.

FDC açısı ile KAC açısı yöndeş olduğu için eşittir.
Bu durumda AKC dik üçgeninden,
 $\sin \alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek 12:

Yandaki şekilde,
ABCD A'B'C'D' bir küptür.
 $m(\widehat{DD'E}) = \alpha$
 $|BE| = |EC|$



olduğuna göre, $\tan \alpha$
nın değerini bulalım.

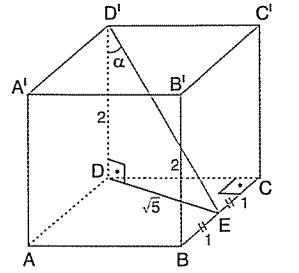
Çözüm:

$|BE| = |EC| = 1$ birim
olsun.

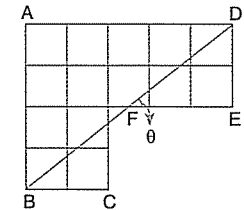
Bu durumda küpün
bir kenarı 2 birim olur.

DCE dik üçgeninden,
 $|DE|^2 = 1^2 + 2^2$
 $|DE| = \sqrt{5}$ birim olur.

D'DE dik üçgeninde,
 $|DE| = \sqrt{5}$ birim ve $|DD'| = 2$ birim
olduğundan, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur.



Örnek 13:



Yukarıdaki şekil özdeş on dört kareden oluşmuştur.

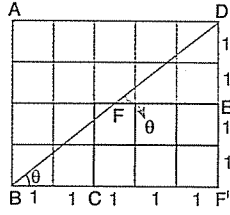
$m(\widehat{DFE}) = \theta$

olduğuna göre, $\cot \theta$ nın değerini bulalım.

Çözüm:

Özdeş karelerin kenar uzunluklarını 1 birim olarak alalım.

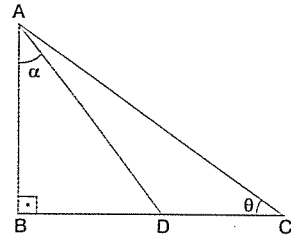
$[FE] \parallel [BF']$ olduğundan,
 $m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{DBF'}) = \theta$
 (Yöndeş açılar) olur.



DBF' üçgeninde,
 $|DF'| = 4$ birim ve $|BF'| = 5$ olduğundan,
 $\cot \theta = \frac{5}{4}$ bulunur.

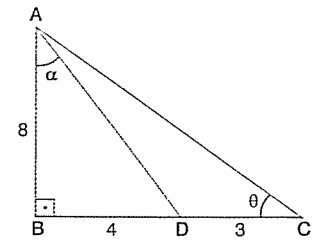
Örnek 14:

ABC dik üçgeninde,
 $[AB] \perp [BC]$
 $3|BD| = 4|DC|$
 $\tan(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}$



olduğuna göre, $\tan(\widehat{BCA})$ nın değerini bulalım.

Çözüm:



$|BD| = 4$ birim alınırsa,
 $|DC| = 3$ birim olur.

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{|AB|}$$

$$\Rightarrow |AB| = 8 \text{ birim olur.}$$

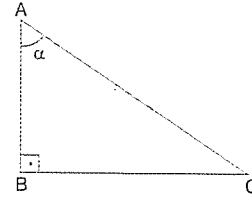
Buna göre, ABC dik üçgeninde,

$$\tan \theta = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{8}{7} \text{ bulunur.}$$

Brilgi Uygulama

Soru 1:

ABC dik üçgeninde,
 $|AB| = 3$ cm
 $|BC| = 5$ cm
 $m(\widehat{BAC}) = \alpha$

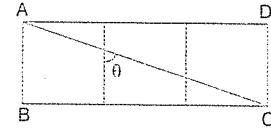


olduğuna göre, $\sin \alpha + \cos \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ B) $\frac{4\sqrt{34}}{17}$ C) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$
 D) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ E) $\frac{5\sqrt{17}}{17}$

Soru 2:

ABC dikdörtgeni özdeş
 üç kareden meydana
 gelmiştir.

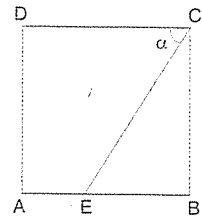


$[AC]$ köşegen olduğuna göre, $\tan \theta + \cot \theta$
 toplamı kaçtır?

- A) $\frac{10}{7}$ B) $\frac{5}{6}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{10}{3}$

Soru 3:

ABCD bir karedir.
 $3|AE| = |AB|$
 $m(\widehat{DCE}) = \alpha$

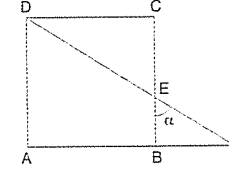


olduğuna göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{9}{5}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Soru 4:

D, E, F doğrusal noktalar,
 ABCD bir kare ve
 $|EC| = 2|EB|$

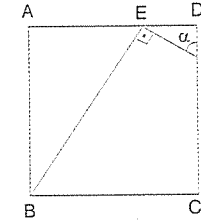


olduğuna göre, $\cot(90^\circ - \alpha)$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 2

Soru 5:

ABCD bir kare,
 E noktası $[AD]$ üzerindedir.
 $[BE] \perp [EF]$
 $|AE| = 3|ED|$
 $m(\widehat{EFD}) = \alpha$

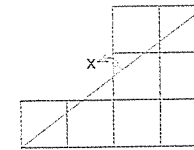


Yukarıdaki verilere göre, $\sin \alpha$ nın değeri aşağı-
 dakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Soru 6:

Yandaki şekil 8 özdeş kare-
 den meydana gelmiştir.



Buna göre, $\sec x - \csc x$ farkı kaçtır?

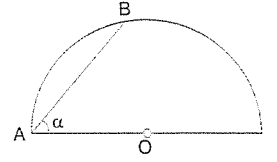
- A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) $-\frac{5}{12}$

Soru 7:

O merkezli yarım çembe-
 rin yarıçapı 5 birimdir.

$|AB| = 6$ birim

$m(\widehat{OAB}) = \alpha$



olduğuna göre, $\sin \alpha$ kaçtır?

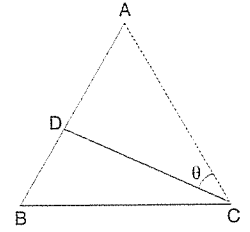
- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{5}$

Soru 8:

ABC bir eşkenar üçgendir.

$3|AD| = 4|BD|$

$m(\widehat{ADC}) = \theta$



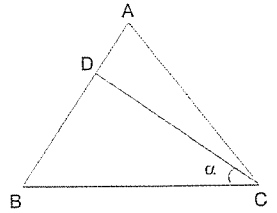
olduğuna göre, $\tan \theta$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Soru 9:

ABC eşkenar üçgen ve

$$|AD| = \frac{|DB|}{2}$$

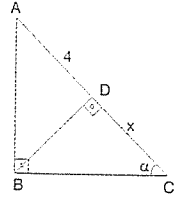


olduğuna göre, $\tan(\widehat{DCB})$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ E) $\sqrt{3}$

Soru 10:

ABC dik üçgeninde,
 $[BD] \perp [AC]$
 $m(\widehat{BCD}) = \alpha$
 $|AD| = 4$ cm
 $\tan \alpha = 2$

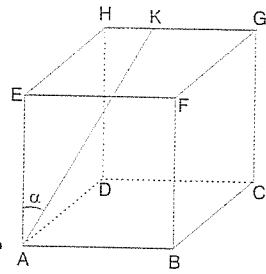


olduğuna göre, $|DC| = x$ kaç cm dir?

- ✓ A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\frac{1}{2}$

Soru 11:

Yandaki şekilde,
 ABCDEFGH bir küptür.
 $m(\widehat{EAK}) = \alpha$
 $|GK| = 2|HK|$

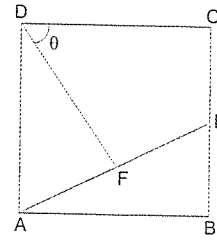


olduğuna göre,
 $\tan \alpha$ nın değeri kaçtır?

- A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
 D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{3}{-10}$

Soru 12:

Yandaki şekilde
 ABCD karedir.
 $|AF| = |FE|$
 $|BE| = |EC|$
 $m(\widehat{FDC}) = \theta$

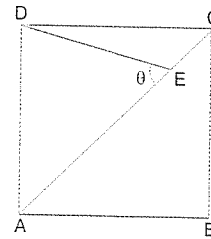


olduğuna göre, $\sin \theta \cdot \cos \theta$ çarpımının değeri kaçtır?

- A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ C) $\frac{6}{\sqrt{13}}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{6}{\sqrt{11}}$

Soru 13:

ABCD kare,
 A, E, C doğrusal
 $|AE| = 3|EC|$
 $m(\widehat{AED}) = \theta$

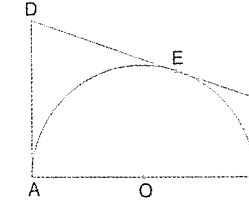


olduğuna göre, $\sec \theta$ nın değeri kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Soru 14:

$[AD]$, $[DC]$ ve $[BC]$
 O merkezli
 yarım çembere
 $[DA]$, $[DC]$, $[CB]$
 sırasıyla A, E ve B
 noktalarında teğettir.
 $|DE| = 3|EC|$
 $m(\widehat{ADE}) = \alpha$

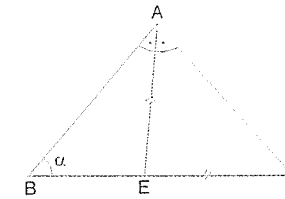


olduğuna göre, $\cot \alpha$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Soru 15:

ABC üçgen
 $[AE]$ açıortay
 $|AE| = |EC|$
 $|AC| = 8$ birim
 $|BE| = 6$ birim
 $|EC| = 5$ birim
 $m(\widehat{ABC}) = \alpha$



olduğuna göre, $\sin \alpha$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER

Bilgi

Ölçüleri toplamı $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ olan (tümlemler) iki açıdan;
 birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne;
 birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına;
 birinin sekantı diğerinin kosekantına eşittir.

$\alpha + \theta = 90^\circ$ olmak üzere,

$\sin \alpha = \cos \theta$ $\tan \alpha = \cot \theta$

$\cos \alpha = \sin \theta$ $\cot \alpha = \tan \theta$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

- I. $\sin 70^\circ$ IV. $\cot(20^\circ - x)$
 II. $\cos \frac{3\pi}{7}$ V. $\sec(50^\circ + x)$
 III. $\tan 3x$ VI. $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{12}$

Yukarıdaki ifadelerin eşitlerini bu ifadelerin açı-
 larının tümlemleri olan açılar cinsinden bulalım.

Çözüm:

- I. $x + 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$ olduğundan
 $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ dir.
 II. $x + \frac{3\pi}{7} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7} = \frac{\pi}{14}$ olduğundan
 $\cos \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{14}$ tür.
 III. $3x + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - 3x$ olduğundan
 $\tan 3x = \cot(90^\circ - 3x)$ tir.
 IV. $(20^\circ - x) + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - (20^\circ - x)$
 $y = 70^\circ + x$ olduğundan
 $\cot(20^\circ - x) = \tan(70^\circ + x)$ tir.
 V. $(50^\circ + x) + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - (50^\circ + x)$
 $\Rightarrow y = 40^\circ - x$ olduğundan
 $\sec(50^\circ + x) = \operatorname{cosec}(40^\circ - x)$ tir.
 VI. $\frac{5\pi}{12} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ olduğundan
 $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{12} = \sec \frac{\pi}{12}$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

- I. $\cos 27^\circ = \sin 63^\circ$
- II. $\tan \frac{2\pi}{5} = \cot \frac{\pi}{10}$
- III. $\operatorname{cosec}(x + 50^\circ) = \sec(x - 40^\circ)$
- IV. $\cot\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{14} - x\right)$
- V. $\sin(-40^\circ) = \cos(130^\circ)$

Yukarıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

$$A = \sin \frac{\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{13}$$

$$B = \sin \frac{5\pi}{26} - \cos \frac{7\pi}{18}$$

olduğuna göre, A - B farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) 1 C) $2\sin \frac{\pi}{9}$ D) $2\cos \frac{4\pi}{13}$ E) $2\sin \frac{5\pi}{26}$

Soru 3:

ABC üçgeninin iç açıları A, B ve C dir.

$$\cos \frac{A+B}{2} - \sin \frac{C}{2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Bilgi

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
- $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} - 1$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} - 1 &= \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4} \text{ olduğuna göre,}$$

$$(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} &(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2 \\ &= (\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x) - (\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x) \\ &= (1 - 2\sin x \cos x) - (1 + 2\sin x \cos x) \\ &= \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) - \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$$

olduğuna göre, A'nın değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sin 89^\circ &= \cos 1^\circ \\ \sin 88^\circ &= \cos 2^\circ \\ \sin 87^\circ &= \cos 3^\circ \\ &\vdots \\ \sin 46^\circ &= \cos 44^\circ \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 46^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$$

$$A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 44^\circ + \dots + \cos^2 2^\circ + \cos^2 1^\circ$$

Yukarıdaki 89 tane terimin, baştan ve sondan eşit uzaklıktaki iki teriminin toplamı 1 dir.

O halde,

$$A = \frac{88}{2} \cdot 1 + \sin^2 45^\circ = 44 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$a = \sin x \text{ ve } b = \cos x$$

olduğuna göre, $b^4 - a^4 - b^2 + 1$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} b^4 - a^4 - b^2 + 1 &= (b^2 + a^2) \cdot (b^2 - a^2) + 1 - b^2 \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 x) \\ &= 1 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\sin^2 x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x \\ &= \cos^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, $\sin x \cdot \cos x$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{4}{9} - 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18} \text{ olur.}$$

Örnek 6:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\sin^3 x + \cos^3 x$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{1}{16} - 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{15}{32} \text{ dir.}$$

Buradan,

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \text{ olduğundan,}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [1 - \sin x \cos x]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \left(-\frac{15}{32}\right)\right]$$

$$= \frac{47}{128} \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\sin x + \cos x$ toplamının pozitif değerini bulalım.

Çözüm:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{4}{9} \text{ dur.}$$

$\sin x + \cos x = A$ diyelim ve A'nın değerini bulalım.

$$(\sin x + \cos x)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = A^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = A^2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{8}{9} = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{17}{9} = A^2$$

$$\Rightarrow \pm \frac{\sqrt{17}}{3} = A \text{ dir.}$$

Buna göre, $\sin x + \cos x$ toplamının pozitif değeri $\frac{\sqrt{17}}{3}$ bulunur.

Örnek 8:

$$f(a, b) = a^6 + 3a^4b^2 + b^6 + 3a^2b^4$$

olduğuna göre, $f(\sin \alpha, \cos \alpha)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$f(a, b) = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$$

$$f(a, b) = (a^2 + b^2)^3 \text{ dür.}$$

$$f(\sin \alpha, \cos \alpha) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 \\ = 1^3 = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 9:

$$A = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x} + \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{|\cos x|}{\cos x} = \pm 1$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \pm 1$$

olduğundan, A'nın alabileceği değerler

$$A_1 = (-1) + (-1) = -2$$

$$A_2 = (-1) + 1 = 0 \text{ (veya } 1 + (-1) = 0)$$

$$A_3 = 1 + 1 = 2 \text{ olur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\sin^4 x + \cos^4 x$ in değeri kaçtır?
(Yol gösterme: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$)

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{13}{16}$ E) $\frac{15}{16}$

Soru 2:

$$\sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\sin^6 x + \cos^6 x$ in değeri kaçtır?
(Yol gösterme: $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$)

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{5}{3}$ E) 2

Soru 3:

$$\sin^2 32^\circ + \sin^2 42^\circ + \sin^2 48^\circ + \sin^2 58^\circ$$

toplamının değeri kaçtır?

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Soru 4:

$$f(a, b) = a^4 - b^4 - 3a^2 - b^2$$

olduğuna göre, $f(\sin x, \cos x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

Soru 5:

$$f(x, y) = x^6 + x^4 + 5x^2y^2 + y^4 + y^6$$

olduğuna göre, $f(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 6:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\sin^3 x - \cos^3 x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{29}{64}$ B) $\frac{39}{64}$ C) $\frac{37}{128}$ D) $\frac{47}{128}$ E) $\frac{71}{128}$

Soru 7:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

Soru 8:

$$\sin(30^\circ + x) + \sin(60^\circ - x) = a$$

olduğuna göre, $\cos(30^\circ + x) \cdot \cos(60^\circ - x)$ ifadesinin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+1}{2}$ B) $\frac{a-1}{2}$ C) $\frac{a}{2}$ D) $\frac{a^2-1}{2}$ E) $\frac{1-a^2}{2}$

Soru 9:

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

ifadesinin alabileceği kaç farklı değer vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Bilgi

- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\tan x + \cot x = 2$$

olduğuna göre, $\tan^2 x + \cot^2 x$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\tan x + \cot x = 2$ ifadesinin her iki tarafının karesini alalım.

$$\begin{aligned} (\tan x + \cot x)^2 &= 2^2 \\ \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x \cdot \cot x + \cot^2 x &= 4 \\ \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \cdot 1 &= 4 \\ \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\tan 15^\circ - \cot 15^\circ = a$$

olduğuna göre, $\tan^3 15^\circ - \cot^3 15^\circ$ ifadesinin a türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \text{ olduğundan,} \\ \tan^3 15^\circ - \cot^3 15^\circ &= (\tan 15^\circ - \cot 15^\circ)^3 + 3 \cdot \tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ (\tan 15^\circ - \cot 15^\circ) \\ \Rightarrow \tan^3 15^\circ - \cot^3 15^\circ &= a^3 + 3 \cdot 1 \cdot a \\ \Rightarrow \tan^3 15^\circ - \cot^3 15^\circ &= a^3 + 3 \cdot 1 \cdot a \\ \Rightarrow \tan^3 15^\circ - \cot^3 15^\circ &= a^3 + 3a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\tan x - \cot x = \sqrt{3}$$

olduğuna göre, $\tan^2 x + \cot^2 x$ toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Soru 2:

$$\tan x + \cot x = a$$

olduğuna göre, $\tan^3 x + \cot^3 x$ ifadesinin a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a - 3$ B) a^3 C) $a^2 - 3$ D) $a^3 - 3a$ E) $a^3 - a$

Soru 3:

$$\begin{aligned} A &= \tan x + \cot x \\ B &= \tan^2 x + \cot^2 x \end{aligned}$$

olduğuna göre, B nin A cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $B = A^2$ B) $B = \sqrt{A}$ C) $B = \sqrt{A - 2}$ D) $B = A^2 - 2$ E) $B = A^2 + 2$

Bilgi

- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \text{ değerini yazalım.} \\ 1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cot^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \text{ değerini yazalım.} \\ 1 + \cot^2 x &= 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \operatorname{cosec}^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ olduğundan,
bu değeri yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} &= \frac{\cot x}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}} \\ &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{|\sin x|}} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot |\sin x| \\ &= \pm \cos x \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 5$$

olduğuna göre, $\tan x + \cot x$ toplamının pozitif değerini bulalım.

Çözüm:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ve $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ değerlerini yazalım. O halde,

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 5$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) = 5$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 3$$

$$\Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - \underbrace{2 \cdot \tan x \cdot \cot x}_1 = 3$$

$$\Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 3 + 2$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $\tan^2 x$ D) $\cot^2 x$ E) 1

Soru 2:

$\cos x < 0$ olmak üzere,

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$ D) $-\sin x$ E) $\sec x$

Soru 3:

$$6 + 2\sec^2 x = 8\operatorname{cosec}^2 x$$

olduğuna göre, $\cot x$ in pozitif değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Soru 4:

$$\tan x - \cot x = 1$$

olduğuna göre, $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) $1 + \sqrt{3}$ E) $2 + \sqrt{3}$

Bilgi

Trigonometrik özdeşliklerden yararlanılarak, trigonometrik bir ifadenin **en sade** şekli bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimini bulalım.

Çözüm:

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \tan x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Burada, $1 - \cos^2 x$ yerine $\sin^2 x$ yazılarak da işlem yapılabilir.

Örnek 2:

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\sin x}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x} &= \frac{\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin x} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{\sin x} = -\sin x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\frac{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ ya da $\cos^2 x$ yerine $1 - \sin^2 x$ yazarak ifadeyi tek çeşit fonksiyona bağlı elde edelim.

$\sin^2 x$ terim olarak daha az sayıda olduğu için, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ özdeşliğini tercih edersek, daha az işlemle sonuca ulaşırız.

O halde,

$$\begin{aligned} &\frac{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{3(1 - \cos^2 x) + 2\cos^2 x - 3}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{3 - 3\cos^2 x + 2\cos^2 x - 3}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{-\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} \quad (1 - \cos^2 x = \sin^2 x) \\ &= \frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\cot^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan x = \frac{3}{4}$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)$$

$$= (\sin x + \cos x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x) \text{ ve}$$

$$\tan x = \frac{3}{4} \text{ ise,}$$

yandaki dik üçgende bulunan,

$$\sin x = \frac{3}{5} \text{ ve } \cos x = \frac{4}{5} \text{ değerleri, sorulan ifade}$$

de yerine yazılırsa,

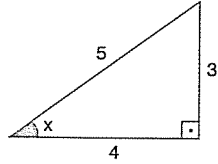
$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x)}{1 - \sin x \cdot \cos x}$$

$$= \sin x + \cos x$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{5} \text{ bulunur.}$$



Örnek 5:

$$\frac{\cos x \cdot \tan x - \sin x \cdot \cot x}{\operatorname{cosec} x - \sec x} \cdot \operatorname{cosec} x$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\cos x \cdot \tan x - \sin x \cdot \cot x}{\operatorname{cosec} x - \sec x} \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$= \frac{\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= -\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= -\cos x \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, $\cot x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

Verilen eşitlikte, içler - dışlar çarpımı yapalım.

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (\sin x + \cos x) = 3 \cdot (\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow 5 \sin x + 5 \cos x = 3 \cos x - 3 \sin x$$

$$\Rightarrow 8 \sin x = -2 \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{8}{-2} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \cot x = -4 \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\tan \theta = \frac{1}{3} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\tan x + \cot \theta}{\cot \theta - \tan x} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, $\cot x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot \theta = 3 \text{ olur.}$$

Bu değeri yerine yazalım.

$$\frac{\tan x + \cot \theta}{\cot \theta - \tan x} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + 3}{3 - \tan x} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \tan x + 9 = 6 - 2 \tan x$$

$$\Rightarrow 5 \tan x = -3$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cot x = -\frac{5}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 8:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 \sec x$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)^2 + (\cos x)^2}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2 + 2 \sin x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2 \cdot (1 + \sin x)}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2}{\cos x}$$

$$= 2 \sec x \text{ olur.}$$

Örnek 9:

$$\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x}$$

$$= \frac{(1 + \cot x) + (1 + \tan x)}{(1 + \tan x) \cdot (1 + \cot x)}$$

$$= \frac{2 + \tan x + \cot x}{1 + \cot x + \tan x + \underbrace{\tan x \cdot \cot x}_1}$$

$$= \frac{2 + \tan x + \cot x}{2 + \tan x + \cot x} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 10:

$\sin x = a$ olduğuna göre,

$$\frac{2 \cos^2 x + \sin^2 x - 2}{1 + \sin^2 x}$$

ifadesinin a türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ yazalım.}$$

$$\frac{2 \cos^2 x + \sin^2 x - 2}{1 + \sin^2 x}$$

$$= \frac{2 \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x - 2}{1 + \sin^2 x}$$

$$= \frac{2 - 2 \sin^2 x + \sin^2 x - 2}{1 + \sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{-a^2}{1 + a^2} \text{ olur.}$$

Örnek 11:

$\cos x = m$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin^2 x}{2 + 2 \cos x - \sin^2 x}$$

ifadesinin m türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ yazalım.}$$

$$\frac{\sin^2 x}{2 + 2 \cos x - \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{2 + 2 \cos x - (1 - \cos^2 x)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 1}$$

Tam kare ifade

$$= \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{(\cos x + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1 - m}{1 + m} \text{ bulunur.}$$

Örnek 12:

$$\frac{1 - \cot x}{1 - \tan x}$$

İfadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ve $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ değerlerini yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cot x}{1 - \tan x} &= \frac{1 - \frac{\cos x}{\sin x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin x}{-1}} \\ &= \frac{1 \cdot \cos x}{-1 \cdot \sin x} \\ &= -\cot x \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 13:

$$(\sec^2 x - 1) \cdot \cot x$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ve $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (\sec^2 x - 1) \cdot \cot x &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \sin x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \tan x \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 14:

$$1 + (1 - \tan^2 x) \cdot \cos^2 x$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ yazalım.

$$\begin{aligned} 1 + (1 - \tan^2 x) \cdot \cos^2 x &= 1 + \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) \cdot \cos^2 x \\ &= 1 + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x \\ &= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (1 - \sin^2 x) + \cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 15:

$$1 - \left(\frac{\sin^2 x}{\sec x} + \cos^3 x \right)^2$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ değerini yazalım.

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\sin^2 x}{\sec x} + \cos^3 x \right)^2 &= 1 - \left(\frac{\sin^2 x}{1/\cos x} + \cos^3 x \right)^2 \\ &= 1 - (\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x)^2 \\ &= 1 - [\cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)]^2 \\ &= 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 16:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ve $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ değerlerini

yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x} &= \frac{\sin x}{1/\sin x} + \frac{\cos x}{1/\cos x} \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 17:

$\sin x = a$ olduğuna göre,

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 - \cot^2 x}$$

İfadesinin a türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan^2 x}{1 - \cot^2 x} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{-1}} \\ &= \frac{\sin^2 x}{-(1 - \sin^2 x)} \quad (\sin x = a) \\ &= \frac{a^2}{a^2 - 1} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 18:

$$2x^2 - x + c = 0$$

denkleminin kökleri $\sin \alpha$ ve $\cos \alpha$ olduğuna göre, c nin değerini bulalım.

Çözüm:

$2x^2 - x + c = 0$ denkleminin kökler toplamını yazıp karesini alalım.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 + 2 \cdot (\underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{x_1 \cdot x_2}) = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 2 \cdot (x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{4} - 1 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \frac{c}{2} = -\frac{3}{4} \\ &\Rightarrow c = -\frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 19:

$$s = \sin x$$

$$c = \cos x$$

olduğuna göre, $\frac{s^4 + 2s^2 c^2}{1 + c^2}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{s^4 + 2s^2 c^2}{1 + c^2} &= \frac{s^2 (s^2 + 2c^2)}{1 + c^2} \\ &= \frac{s^2 (s^2 + c^2 + c^2)}{1 + c^2} \\ &= \frac{s^2 (1 + c^2)}{1 + c^2} \\ &= \sin^2 x \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 20:

$$\frac{6.\sin^2x + \sin x.\cos x - \cos^2x}{3.\sin^2x - 4\sin x.\cos x + \cos^2x} = -\frac{5}{3}$$

olduğuna göre, $\tan x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$\sin x = s$ ve $\cos x = c$ diyelim ve verilen ifadedeki üç terimlerini çarpanlarına ayıralım.

$$6s^2 + s.c - c^2 = (3s - c).(2s + c)$$

$$\begin{array}{r} 3s \\ 2s \\ \hline 3sc - 2sc = sc \end{array}$$

$$3s^2 - 4s.c + c^2 = (3s - c).(s - c)$$

$$\begin{array}{r} 3s \\ s \\ \hline -3sc - sc = -4sc \end{array}$$

O halde,

$$\frac{6s^2 + s.c - c^2}{3s^2 - 4s.c + c^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(3s - c).(2s + c)}{(3s - c).(s - c)} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2s + c}{s - c} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 6s + 3c = 5c - 5s$$

$$\Rightarrow 11s = 2c$$

$$\Rightarrow \frac{s}{c} = \frac{2}{11} \text{ olur.}$$

O halde,

$$\frac{s}{c} = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ olduğundan, } \tan x = \frac{2}{11} \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$\cos x < 0$ olmak üzere,

$$\sqrt{(1 - \sin x).(1 + \sin x)}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cos x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$ D) $-\sin x$ E) 1

Soru 2:

$$\sec^2 x - \tan^2 x$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan x$ B) $-\tan x$ C) $\cot x$ D) $-\cot x$ E) 1

Soru 3:

$\sin \theta = x$ olduğuna göre,

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta}$$

ifadesinin x türünden değeri nedir?

- A) x B) $-x$ C) $1 + x$ D) $1 - x$ E) $1 + 2x$

Soru 4:

$$\frac{1 - \cot x}{\cos x} - \frac{1 + \tan x}{\sin x}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 \tan x$ B) $2 \cot x$ C) 2
D) $-2 \operatorname{cosec} x$ E) $-2 \sec$

Soru 5:

$$\sin x.\cos x.(\tan x + \cot x)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sec x$ B) $\operatorname{cosec} x$ C) $\sec x.\operatorname{cosec} x$
D) $\tan x$ E) 1

Soru 6:

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sin^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $\operatorname{cosec} x$
D) $\tan x$ E) $\cot x$

Soru 7:

$\cos x = a$ olduğuna göre,

$$\frac{\tan x - 1}{1 - \cot x}$$

ifadesinin a türünden değeri nedir?

- A) $\frac{1}{a}$ B) $\sqrt{1 - a^2}$ C) $-\frac{1}{a}$
D) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$ E) $\frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$

Soru 8:

$$1 + \sin^2 x(1 - \cot^2 x)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\tan^2 x$ B) $\cot^2 x$ C) $\sec^2 x$
D) $2 \sin^2 x$ E) $2 \cos^2 x$

Soru 9:

$$\frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos x$ B) $\sin x$ C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) $\sin x.\cos x$

Soru 10:

$$\sin^3 x + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{cosec} x}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos x$ ☒ B) $\sin x$ C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) $\sec x$

Soru 13:

$$\frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} + \sin x \cdot \cos x$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan x$ B) $\cot x$ ☒ C) $\cos x$
D) $\sin x$ E) 1

Soru 11:

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 ☒ C) 0 D) $\sec x$ E) $\operatorname{cosec} x$

Soru 14:

$$(1 - \operatorname{cosec}^2 x) \cdot (-\tan x)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- ☒ A) $\cot x$ B) $\operatorname{cosec} x$ C) $\sec x$
D) $-\sin x$ E) $-\cos x$

Soru 12:

$$\frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{1 + \cos x} + \cos^2 x$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin x$ ☒ B) $\cos x$ C) 1
D) $\sec x$ E) $\tan x$

Soru 15:

$$\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x} - \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} \cdot \cot^2 x$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 ☒ C) 0 D) $\sin x$ E) $\cos x$

Soru 16:

$$\left(\frac{\sec x}{\cos x} + \frac{\operatorname{cosec} x}{\sin x} \right) \cdot \tan^2 x$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- ☒ A) $\sec^4 x$ B) $\sec^2 x$ C) $\cot^2 x$
D) $\operatorname{cosec}^4 x$ E) $\operatorname{cosec}^2 x$

Soru 17:

$$\frac{\cos x}{\sec x + \tan x} + \sin x$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 + \sin x$ B) $1 - \sin x$ ☒ C) 1
D) $1 - \cos x$ E) $\operatorname{cosec} x$

Soru 18:

$$\frac{\sin x}{\cot x - \operatorname{cosec} x} + 1$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 - \cos x$ B) $2 + \cos x$ C) $\cos x$
D) -1 ☒ E) $-\cos x$

Soru 19:

$$\frac{1 - \cos^4 x - \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 - \sin x$ B) $1 + \cos x$ C) $\sec x$
D) $\cot^2 x$ ☒ E) $\tan^2 x$

Soru 20:

$$3x^2 - 5x + c = 0$$

denkleminin kökleri $\sin \alpha$ ve $\cos \alpha$ olduğuna göre, c kaçtır?

- A) $\frac{25}{16}$ B) $\frac{25}{9}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{8}{5}$ ☒ E) $\frac{8}{3}$

Soru 21:

$$x^2 + mx + n = 0$$

denkleminin kökleri $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ olduğuna göre, m ile n arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $n - m = 1$ B) $m + n = 1$ C) $m^2 + n = 1$
D) $m^2 + 2n = 0$ ☒ E) $m^2 - 2n = 1$

Soru 22:

$$\frac{7\cos^2 x + \sin^2 x - 3}{2\cos^2 x - \sin^2 x}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) 2 B) 1 C) $2\tan^2 x$
D) $2\sec x$ E) $\csc x$

Soru 23:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan x$ B) $\cot x$ ✓ C) $2\csc x$
D) $2\sec x$ E) 1

Soru 24:

$$\frac{2}{1 - \tan x} + \frac{2}{1 - \cot x}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) 2 B) -1 C) $\sec x$ D) $\csc x$ E) 0

Soru 25:

$$\frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3}{2}$$

olduğuna göre, $\cot x$ in değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ ✓ C) $\frac{1}{5}$ D) 4 E) 5

Soru 26:

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$$

olduğuna göre, $\cos x$ in pozitif değeri kaçtır?

- ✓ A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Soru 27:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan x = 2$ olduğuna göre,

$$\frac{1 - \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ✓ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

Soru 28:

$$\cot x = 2 \text{ ve}$$

$$\frac{\tan x - \tan \theta}{2\tan \theta + \tan x} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\cot \theta$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 ✓ E) 5

Soru 29:

$$c = \cos x$$

$$s = \sin x$$

olduğuna göre, $\frac{s^6 + c^6 + s^2 c^2 - 1}{s^2 c^2}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $\tan^2 x$
D) 2 ✓ E) -2

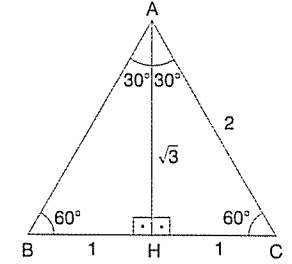
Soru 30:

$$\frac{6\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x}{2\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\cot x$ in değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ ✓ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 3 E) 4

30°, 45° ve 60° lik Açıların Trigonometrik Oranları
Bir kenarının uzunluğu 2 birim olan aşağıdaki şekilde verilen ABC eşkenar üçgeninden yararlanarak 30° lik ve 60° lik açılarının trigonometrik oranlarını bulalım.



ABC eşkenar üçgeninin yüksekliği $|AH| = \sqrt{3}$ olur.

Buradan,

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

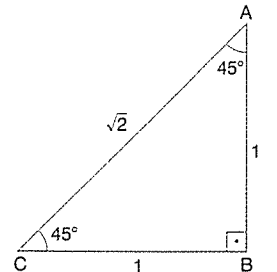
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \frac{|AH|}{|HC|} = \sqrt{3}$$

olarak bulunur.

Dik kenarlarının uzunluğu 1 birim olan aşağıdaki şekilde verilen ABC ikizkenar dik üçgeninden yararlanarak da 45° lik bir açının trigonometrik oranlarını bulalım.



$$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$$

$$|AC| = \sqrt{2} \text{ olur.}$$

Şekilden,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = 1$$

olarak bulunur.

Bilgi

x \ f(x)	sinx	cosx	tanx	cotx
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 45^\circ$$

çarpımının değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 45^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \\ &= \frac{3}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 53^\circ$$

toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

Toplamları 90° olan iki açıdan birinin sinüsü, diğeri-
nin kosinüsüne eşit olduğundan,

$$\sin 53^\circ = \cos 37^\circ \quad (53^\circ + 37^\circ = 90^\circ)$$

$$\sin^2 37^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 53^\circ = \sin^2 45^\circ + \underbrace{\sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ}_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Örnek 3:

$$\cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \dots \cdot \cot 45^\circ \cdot \dots \cdot \cot 88^\circ \cdot \cot 89^\circ$$

çarpımının değerini bulalım.

Çözüm:

Toplamları 90° olan iki açıdan birinin tanjantı, diğ-
erinin kotanjantına eşittir.

O halde,

$$\cot 89^\circ = \tan 1^\circ$$

$$\cot 88^\circ = \tan 2^\circ$$

$$\cot 87^\circ = \tan 3^\circ$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Verilen çarpma işleminde, $\cot 45^\circ$ çarpanına eşit
uzaklıktaki iki çarpanın (açıların toplamı 90° oldu-
ğundan) çarpımı 1 dir.

$$\cot 44^\circ \cdot \cot 46^\circ = \cot 44^\circ \cdot \tan 44^\circ = 1$$

$$\cot 43^\circ \cdot \cot 47^\circ = \cot 43^\circ \cdot \tan 43^\circ = 1$$

$$\vdots$$

$$\cot 2^\circ \cdot \cot 88^\circ = \cot 2^\circ \cdot \tan 2^\circ = 1$$

$$\cot 1^\circ \cdot \cot 89^\circ = \cot 1^\circ \cdot \tan 1^\circ = 1 \text{ ve}$$

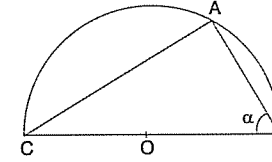
$\tan 45^\circ = 1$ olduğundan;

$$\begin{aligned} &\overbrace{\cot 1^\circ \cdot \cot 89^\circ = 1} \\ &\downarrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \dots \cdot \cot 45^\circ \cdot \dots \cdot \cot 88^\circ \cdot \cot 89^\circ \\ &\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad \cot 2^\circ \cdot \cot 88^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$= \cot 45^\circ \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{44 \text{ tane}}$$

$$= 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:



ABC üçgeninin köşeleri, şekildeki O merkezli yarım
çember üzerindedir.

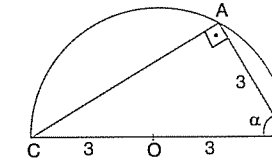
$$|AB| = 3 \text{ cm}$$

$$|BC| = 6 \text{ cm}$$

olduğuna göre, $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ nın kaç derece ol-
duğunu bulalım.

Çözüm:

Çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90° ol-
duğundan $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ dir. O halde,



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\frac{\tan x + \cot x}{\cot x - \tan x} = 2$$

eşitliğini sağlayan x dar açısı için, $\cos x - \sin x$
farkını bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\tan x + \cot x}{\cot x - \tan x} = 2 \Rightarrow \tan x + \cot x = 2 \cot x - 2 \tan x$$

$$\Rightarrow 3 \tan x = \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\cot x} = \cot x$$

$$\Rightarrow \cot^2 x = 3$$

$$\Rightarrow \cot x = \sqrt{3}$$

kotanjantı $\sqrt{3}$ olan dar açı 30° olduğundan,
 $x = 30^\circ$ dir.

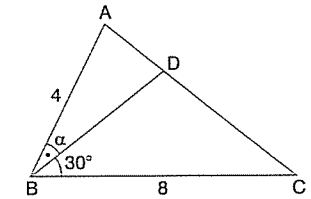
Buna göre,

$$\cos x - \sin x = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:



Şekildeki ABC üçgeninde,

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|BC| = 8 \text{ cm}$$

$$|CD| = 2, |AD| = 2$$

$$m(\widehat{CBD}) = 30^\circ$$

$$m(\widehat{DBA}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\sec \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} \text{ olduğundan,}$$

[BD] açıortaydır.

Dolayısıyla, $\alpha = 30^\circ$ olur.

Buna göre,

$$\sec \alpha = \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tür.}$$

Örnek 7:

Şekildeki ABC
üçgeninde,

$$|AB| = 8 \text{ br}$$

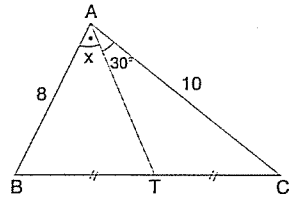
$$|AC| = 10 \text{ br}$$

$$|BT| = |TC|$$

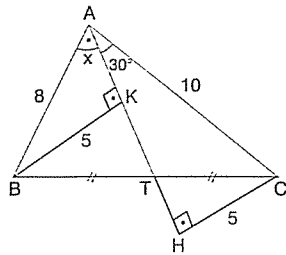
$$m(\widehat{TAC}) = 30^\circ$$

$$m(\widehat{BAT}) = x$$

olduğuna göre, $\sin x$ in değerini bulalım.



Çözüm:



30° lik açının karşısında bir dik kenar oluşturmak için, $[AH] \perp [HC]$ olacak şekilde $[AT]$ nin uzantısı çizilirse, 30° nin karşısındaki kenar, hipotenüsün ($[AC]$ nin) yarısı olduğundan AHC diküçgeninde $|HC| = 5$ birim olur.

$$\widehat{HTC} \sim \widehat{KTB} \text{ ve } |BT| = |TC|$$

olduğundan HTC üçgeni ile KTB üçgeni eş üçgenlerdir. O halde, T açısının karşısındaki dik kenarlar da eşittir.

Buna göre, $|BK| = |HC| = 5$ birim olur.

Dolayısıyla,

ABK diküçgeninde,

$$\sin x = \frac{|BK|}{|AB|}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{5}{8} \text{ bulunur.}$$

Örnek 8:

ABCD eşkenar dörtgen,

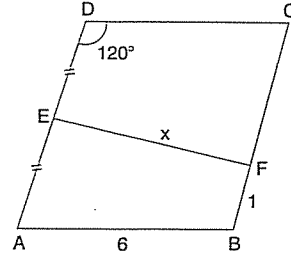
$$|AB| = 6 \text{ cm}$$

$$|BF| = 1 \text{ cm}$$

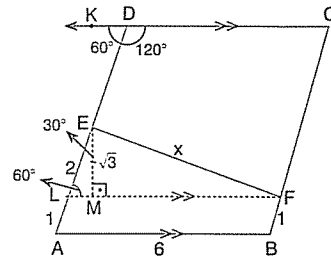
$$|AE| = |ED|$$

$$m(\widehat{EDC}) = 120^\circ$$

olduğuna göre, $|EF| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm:



$[DC]$ kenarının uzantısı olan $[DK]$ ışını ve F noktasından da $[DC]$ ye paralel olacak şekilde $[FL]$ doğru parçasını çizerseniz,

$$|AL| = |FB| = 1 \text{ cm ve}$$

E noktası $[AD]$ nin orta noktası olduğundan,

$$|AD| = |AB| = 6 \text{ cm}$$

$$|AE| = 3 \text{ cm ve } |EL| = 3 - 1 = 2 \text{ cm dir.}$$

$$m(\widehat{FLD}) = m(\widehat{KDL}) = 60^\circ \text{ (iç ters açılar)}$$

E noktasından, $[LF]$ ye dik inilirse,

LME dik üçgeni oluşur ve bu üçgende,

$$\cos 60^\circ = \frac{|LM|}{|EL|} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|LM|}{|EL|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve}$$

$$|EL| = 2 \text{ cm olduğundan,}$$

$$|LM| = 1 \text{ cm ve } |EM| = \sqrt{3} \text{ cm ve}$$

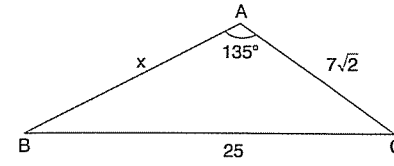
$$|FM| = |FL| - |LM| = 6 - 1 = 5 \text{ cm dir.}$$

Buna göre, FEM dik üçgeninde hipotenüsün uzunluğu $|FE| = x$,

$$(\sqrt{3})^2 + 5^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{28}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{7} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek 9:



Şekildeki ABC üçgeninde,

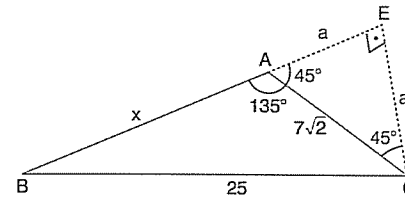
$$m(\widehat{A}) = 135^\circ$$

$$|AC| = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|BC| = 25 \text{ cm}$$

olduğuna göre, $|AB| = x$ değerini bulalım.

Çözüm:



$[AB]$ kenarının uzantısını C noktasından $[AB]$ ye dik inilirse, AEC ikizkenar dik üçgeni elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |AE| = |EC| = a = 7 \text{ cm olur.}$$

BEC dik üçgeninde,

$$|BE|^2 + |EC|^2 = |BC|^2$$

$$\Rightarrow |BE|^2 + 7^2 = 25^2$$

$$\Rightarrow |BE| = 24 \text{ cm ve}$$

$$|AB| = |BE| - a = 24 - 7$$

$$\Rightarrow |AB| = 17 \text{ cm bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 60^\circ$$

çarpımının değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Soru 2:

$$\cos^2 x + \cos^2(90^\circ - x) - \cos^2 45^\circ$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 2

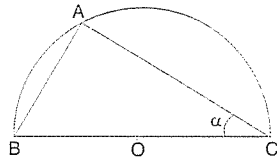
Soru 3:

$$\frac{\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 44^\circ \cdot \tan 45^\circ}{\cot 45^\circ \cdot \cot 46^\circ \cdot \cot 47^\circ \cdot \dots \cdot \cot 88^\circ \cdot \cot 89^\circ}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 45 B) $\frac{1}{45}$ C) 25 D) $\frac{1}{25}$ E) 1

Soru 4:



ABC üçgeninin köşeleri, şekildeki O merkezli yarım çember üzerindedir.

$$|AC| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|BC| = 8 \text{ cm}$$

olduğuna göre, $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ kaç derecedir?

- A) 75 B) 60 C) 45 D) 30 E) 15

Soru 5:

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan x dar açısı için, $\cos^2 x - \sin^2 x$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soru 6:

Şekildeki ABC üçgeninde,

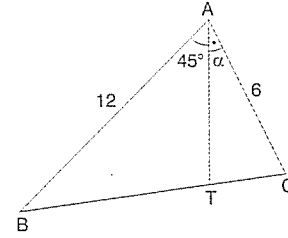
$$|AB| = 12 \text{ cm}$$

$$|AC| = 6 \text{ cm}$$

$$|BT| = 2 \cdot |TC|$$

$$m(\widehat{BAT}) = 45^\circ$$

$$m(\widehat{TAC}) = \alpha$$



olduğuna göre, $\cos \alpha$ nın değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Soru 7:

Şekildeki ABC üçgeninde,

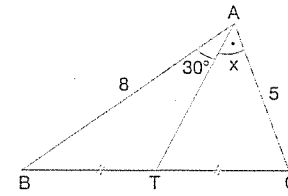
$$|AB| = 8 \text{ cm}$$

$$|AC| = 5 \text{ cm}$$

$$|BT| = |TC|$$

$$m(\widehat{BAT}) = 30^\circ$$

$$m(\widehat{TAC}) = x$$



olduğuna göre, $\sin x$ in değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Soru 8:

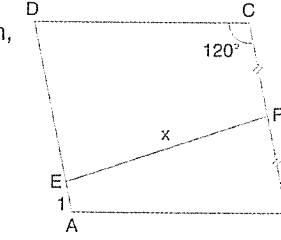
ABCD eşkenar dörtgen,

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|AE| = 1 \text{ cm}$$

$$|FB| = |FC| \text{ ve}$$

$$m(\widehat{BCD}) = 120^\circ$$



olduğuna göre, $|EF| = x$ kaç cm dir?

- A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

Soru 9:

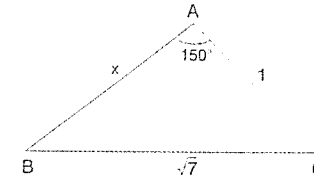
Şekildeki

ABC üçgeninde,

$$m(\widehat{A}) = 150^\circ$$

$$|AC| = 1 \text{ cm}$$

$$|BC| = \sqrt{7} \text{ cm}$$



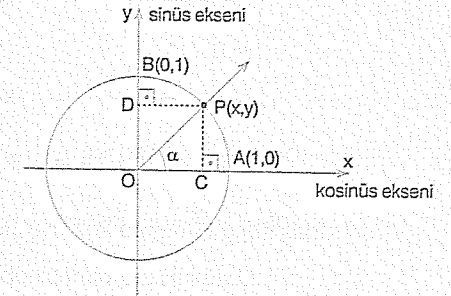
olduğuna göre, $|AB| = x$ kaç cm dir?

- A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonları

Bilgi



α açısının bitim kenarının ([OP] nin) birim çemberi kestiği P noktasının apsisine α nın **kosinüsü** denir ve $\cos \alpha$ şeklinde gösterilir. P noktasının ordinatına da α nın **sinüsü** denir ve $\sin \alpha$ şeklinde gösterilir.

Buna göre,

$$\cos \alpha = |OC| = x$$

$$\sin \alpha = |OD| = y$$

α reel (gerçek) sayısını,

$\cos \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona **kosinüs fonksiyonu**, $\sin \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona da **sinüs fonksiyonu** denir.

➤ Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının alabilecekleri en küçük değer -1 , en büyük değer 1 dir.

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

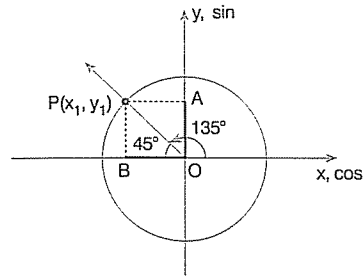
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

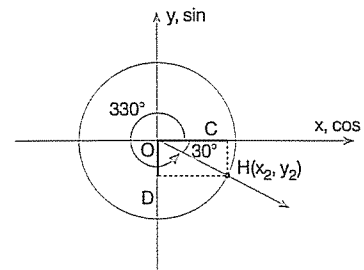
$\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\sin 330^\circ$ ve $\cos 330^\circ$ değerlerini birim çember çizerek gösterelim.

Çözüm:



$$y_1 = |OA| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 135^\circ > 0$$

$$x_1 = -|OB| = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 135^\circ < 0$$



$$x_2 = |OC| = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 330^\circ > 0$$

$$y_2 = -|OD| = -\frac{1}{2} = \sin 330^\circ < 0$$

Örnek 2:

a) $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi$

b) $(\cos 0^\circ) \cdot (\sin 270^\circ) \cdot (\cos 360^\circ)$

c) $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) - \cos 2\pi$

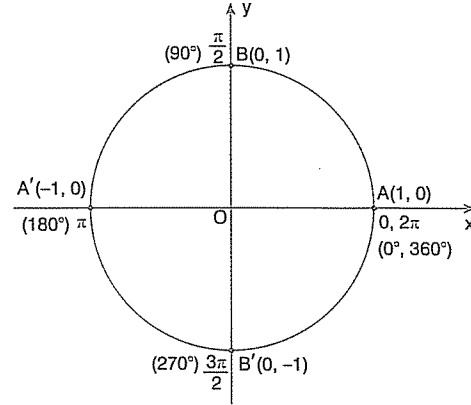
d) $\sin \theta \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \cdot \sin \pi$

e) $\sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \cos \pi \cdot \sin x + \cos x$

f) $\sin^2 0 + \cos^2 \pi + \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \cos^2 0$

ifadelerinin değerini bulalım.

Çözüm:



Yukarıdaki şekilde, birim çember üzerindeki A, A', B, B' noktaları ve bu noktalara karşılık gelen açı değerleri gösteriliyor.

Bu noktaların apsisi, bu noktaya karşılık gelen açının kosinüsü ve bu noktaların ordinatı da bu noktaya karşılık gelen açının sinüsü olduğundan;

a) $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$

b) $(\cos 0^\circ) \cdot (\sin 270^\circ) \cdot (\cos 360^\circ) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$

c) $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) - \cos 2\pi = 1 \cdot (-1) - 1 = -2$

d) $\sin \theta \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \cdot \sin \pi = \sin \theta \cdot 0 - \cos \theta \cdot 0 = 0$

e) $\sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \cos \pi \cdot \sin x + \cos x = (-1) \cdot \cos x - (-1) \cdot \sin x + \cos x = -\cos x + \sin x + \cos x = \sin x$

f) $\sin^2 0 + \cos^2 \pi + \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \cos^2 0 = 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$

Örnek 3:

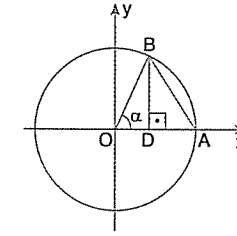
O merkezli birim çember

A, B çember üzerinde,

A ∈ Ox eksenini,

[BD] ⊥ [OA]

m(∠BOD) = α



Şekildeki O merkezli birim çemberde,

cos α = |AB| olduğuna göre, |AB| kaç birimdir?

A) $\sqrt{3} + 2$

B) $\sqrt{3} + 1$

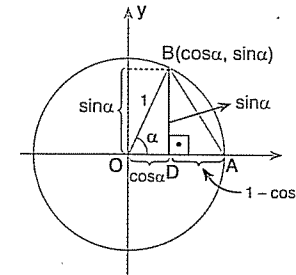
C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3} - 1$

E) $\sqrt{3} - 2$

(1996 - ÖYS)

Çözüm:



B noktası birim çember üzerinde bir nokta olduğundan B noktasının; apsisi cos α, ordinatı da sin α olur.

O halde,

|OA| = 1 ve |OD| = cos α olduğundan,

|AD| = |OA| - |OD| ⇒ |AD| = 1 - cos α ve

|BD| = sin α (B noktasının ordinatı) olur.

|AB| = cos α veriliyor.

Buradan,

ADB diküçgeninde pisagor teoremi yazılırsa,

$$|BD|^2 + |AD|^2 = |AB|^2$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha)^2 = (\cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + 1 - 2 \cos \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 2 \cos \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 2 = 0$$

cos α = x denilirse,

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

denkleminin kökleri;

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \text{ olur.}$$

|AB| uzunluk değeri olduğundan,

bu denklemin pozitif kökü,

|AB| = cos α = $\sqrt{3} - 1$ bulunur.

Cevap D

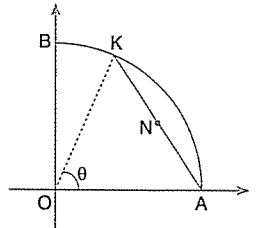
Örnek 4:

BKA dörte bir

çember yayı

|OA| = |OB| = 15 m

m(∠AOK) = θ



Şekildeki O merkezli, 15 m yarıçaplı dörte bir çember biçimindeki havuzun A noktasından hareket eden ve saniyede 0,2 m hızla yüzen bir kişi, ANK yolunu izleyerek t zamanda K noktasına geliyor.

m(∠AOK) = θ olduğuna göre, t nin θ türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 50 sin θ

B) 50 sin 2θ

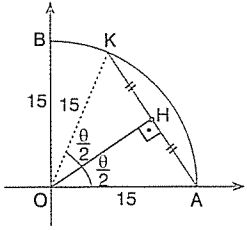
C) 100 sin 2θ

D) 100 sin $\frac{\theta}{2}$

E) 150 sin $\frac{\theta}{2}$

(1998 - ÖYS)

Çözüm:



Çemberin yarıçapı 15 m olduğundan,

$$|OA| = |OB| = |OK| = 15 \text{ metredir.}$$

AOK ikizkenar üçgen olduğundan, [AK] tabanına inilen [OH] dikmesi [AK] tabanını ortalıyor ve aynı zamanda da açıortay olur.

O halde,

$$m(\widehat{AOH}) = \frac{\theta}{2} \text{ olur.}$$

Buradan,

AOH diküçgeninden,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|AH|}{|OA|}$$

$$\Rightarrow |AH| = 15 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Yol} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman}$$

olduğundan saniyede 0,2 m hızla yüzen kişinin t zamanda aldığı yol (AK) yazılırsa,

$$|AK| = 0,2 \cdot t \text{ olur.}$$

$$|AK| = 2 \cdot |AH| \text{ olduğundan,}$$

$$2 \cdot |AH| = \frac{2}{10} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = 10 \cdot |AH|$$

$$\Rightarrow t = 10 \cdot 15 \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow t = 150 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \text{ bulunur.}$$

Cevap E

Örnek 5:

$$\frac{a - 3 \cdot \cos x}{a + 1} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği kaç farklı tamsayı değeri olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{a - 3 \cdot \cos x}{a + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3(a - 3 \cdot \cos x) = 2(a + 1) \text{ ve } a + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow 3a - 9 \cdot \cos x = 2a + 2 \text{ ve } a \neq -1$$

$$\Rightarrow a = 2 + 9 \cdot \cos x \text{ ve } a \neq -1$$

$$\cos x = -1 \text{ için } a = 2 + 9 \cdot (-1) \text{ (en az)}$$

$$a = -7 \text{ (en az)}$$

$$\cos x = 1 \text{ için } a = 2 + 9 \cdot 1 \text{ (en çok)}$$

$$a = 11 \text{ (en çok)}$$

olur. $a \neq -1$ olduğundan,

$$-7 \leq a \leq 11 \text{ ve } a \neq -1 \text{ dir.}$$

Buna göre, a'nın alabileceği tamsayı değerleri;

$$-7, -6, \dots, -2, 0, 1, 2, \dots, 11$$

olmak üzere, $6 + 1 + 11 = 18$ tanedir.

Örnek 6:

$$\frac{x + 2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, x'in alabileceği tamsayı değerlerinin kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x + 2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x + 2 \sin \alpha) = 1 - \sin \alpha \text{ ve } \sin \alpha \neq 1$$

$$\Rightarrow 2x + 4 \sin \alpha = 1 - \sin \alpha \text{ ve } \sin \alpha \neq 1$$

$$\Rightarrow 2x = 1 - 5 \sin \alpha \text{ ve } \sin \alpha \neq 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - 5 \sin \alpha}{2} \text{ ve } \sin \alpha \neq 1$$

$$\sin \alpha = 1 \text{ için } x = \frac{1 - 5 \cdot 1}{2} = -2 \text{ olur. (en az)}$$

Ancak, $\sin \alpha \neq 1$ olduğundan, $x \neq -2$ dir.

O halde, $x > -2$ dir.

$$\sin \alpha = -1 \text{ için, } x = \frac{1 - 5 \cdot (-1)}{2} \text{ (en çok)}$$

$$x = 3 \text{ (en çok)}$$

olur.

Buna göre, $-2 < x \leq 3$ bulunur.

Dolayısıyla x'in tamsayı değerlerinin kümesi, $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ olur.

Örnek 7:

$$5 \cdot \cos x - 12 \cdot \sin y = n$$

olduğuna göre, n'nin alabileceği değerlerin en geniş aralığını bulalım.

Çözüm:

$$\cos x = -1 \text{ ve } \sin y = 1 \text{ için,}$$

$$n = 5 \cdot (-1) - 12 \cdot 1 = -17 \text{ (en az)}$$

$$\cos x = 1 \text{ ve } \sin y = -1 \text{ için,}$$

$$n = 5 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) = 17 \text{ (en çok)}$$

olur.

Buna göre,

n'nin alabileceği değerlerin en geniş aralığı,

$$-17 \leq n \leq 17 \text{ bulunur.}$$

⚠ Sinüs ve kosinüsün açısı aynı,

yani $5 \cdot \cos x - 12 \cdot \sin x = n$ biçiminde olduğunda, çözüm Örnek 3 te olduğu gibi yapılamaz.

Bu tip soruların çözümü, toplam-fark formüllerinin anlatıldığı bölümde verilecektir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$\sin 65^\circ$, $\cos 190^\circ$ ve $\cos 310^\circ$ değerlerini birim çember çizerek gösteriniz.

Soru 2:

$$\frac{2a - 5 \sin x}{a + 2} = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 15 ☒ B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

Soru 3:

$$\frac{a - 3 \cos x}{a + \cos x} = 2$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- A) 12 B) 11 ☒ C) 10 D) 9 E) 8

Soru 4:

$$A = \frac{14 - 18 \cos x - 9 \sin^2 x}{3 \cos x - 1}$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -35 B) -31 C) -25 D) -21 E) 0

Soru 5:

$$\frac{5 \sin x + 4 \cos y}{3}$$

ifadesinin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Soru 6:

$$A = -3 \sin a$$

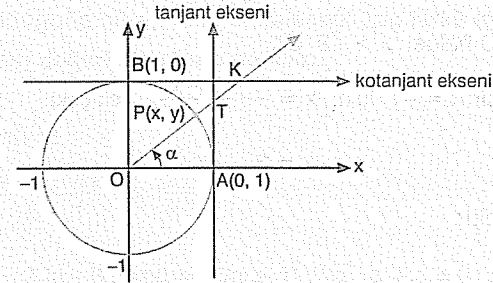
$$B = 4 \sin b$$

olduğuna göre, A + B toplamının en büyük tamsayı değeri, en küçük tamsayı değerinden kaç fazladır?

- A) 21 B) 18 C) 14 D) 10 E) 7

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

Bilgi



α açısının bitim kenarı ([OP]; birim çembere A noktasından çizilen teğeti T noktasında, B noktasından çizilen teğeti K noktasında kessin. T noktasının ordinatına α 'nın **tanjantı** denir ve $\tan \alpha$ şeklinde gösterilir. K noktasının apsisine de α 'nın **kotanjantı** denir ve $\cot \alpha$ şeklinde gösterilir.

Buna göre,

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = |AT|$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = |BK| \text{ dir.}$$

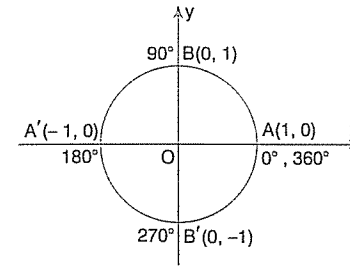
α reel (gerçek) sayısı; $\tan \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona **tanjant fonksiyonu**, $\cot \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona da **kotanjant fonksiyonu** denir. Birim çembere A(1, 0) noktasından çizilen teğete **tanjant eksen**, B(0, 1) noktasından çizilen teğete de **kotanjant eksen** denir.

$\tan$ ve $\cot$ tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümeleri; $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\tan: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$\cot: \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow (-\infty, +\infty) \text{ olur.}$$

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270° lik açılarının trigonometrik oranlarını aşağıdaki şekil yardımıyla tablo ile gösterelim.



Bir α açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği noktanın apsisi $\cos \alpha$, ordinatı da $\sin \alpha$ olduğundan yukarıdaki birim çemberde A, B, A' ve B' noktaları kullanılarak $0^\circ, 360^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270° lik açılarının trigonometrik oranları bulunur.

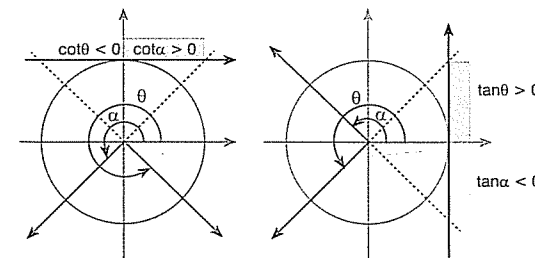
$f(\alpha)$	α	$0^\circ (360^\circ)$	90°	180°	270°
$\sin \alpha$		0	1	0	-1
$\cos \alpha$		1	0	-1	0
$\tan \alpha$		0	tanımsız	0	tanımsız
$\cot \alpha$		tanımsız	0	tanımsız	0

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki şekillerde gösterilen $\tan \alpha$ ve $\cot \theta$ değerlerini inceleyiniz.

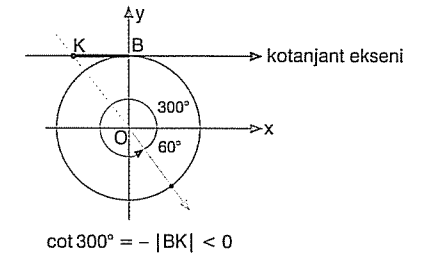
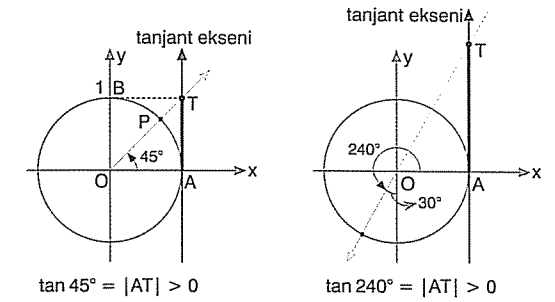
Çözüm:



Örnek 2:

$\tan 45^\circ$, $\tan 240^\circ$ ve $\cot 300^\circ$ değerlerini birim çember çizerek gösterelim.

Çözüm:



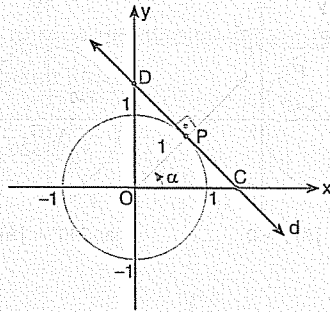
Bilgi Uygulama

Soru 1:

$\tan 70^\circ$, $\tan 130^\circ$ ve $\cot 320^\circ$ değerlerini birim çember çizerek gösteriniz.

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

Bilgi



α açısının bitim kenarının ($|OP|$) birim çemberi kestiği P noktasında, d doğrusu birim çembere teğettir. C noktasının apsisine α nın **sekantı** denir ve $\sec \alpha$ şeklinde gösterilir. D noktasının ordinatına da α nın **kosekantı** denir ve $\operatorname{cosec} \alpha$ şeklinde gösterilir.

Buna göre,

$$\sec \alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \alpha} = |OC|$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \alpha} = |OD| \text{ dir.}$$

α reel (gerçek) sayısını;

$\sec \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona **sekant fonksiyonu**, $\operatorname{cosec} \alpha$ ya dönüştüren fonksiyona da **kosekant fonksiyonu** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} \cdot \sec \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}}$$

çarpımının değerini bulalım.-

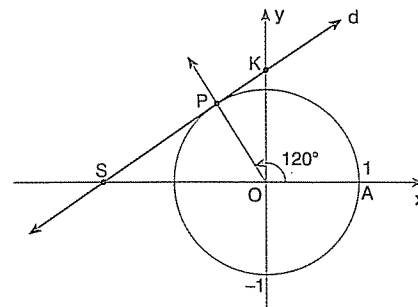
Çözüm:

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} \cdot \sec \frac{\pi}{3} = \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^{-1} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{6} \right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)^{-1}}$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

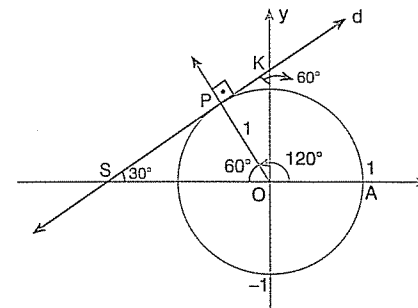
Örnek 2:



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{AOP}) = 120^\circ$ olmak üzere, P noktasından birim çembere çizilen teğetin (d doğrusu) eksenleri kestiği noktalar K ve S dir.

Buna göre, $\sec 120^\circ$ ve $\operatorname{cosec} 120^\circ$ değerlerini bulalım.

Çözüm:



Başlangıç kenarı Ox eksenine olan bir açının birim çemberi kestiği noktadan çembere çizilen teğetin x eksenini kestiği noktanın apsisi bu açının sekantı, y eksenini kestiği noktanın ordinatı da bu açının kosekantı olduğundan; şekildeki (30° , 60° , 90°) dik üçgenlerinden yararlanarak bu değerleri bulalım.

OPK dik üçgeninden,

$$\sin 60^\circ = \frac{|OP|}{|OK|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{|OK|}$$

$$\Rightarrow |OK| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

K noktasının ordinatı pozitif olduğundan,

$$\operatorname{cosec} 120^\circ = |OK| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tür.}$$

Benzer şekilde OPS dik üçgeninden,

$$\sin 30^\circ = \frac{|OP|}{|OS|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{|OS|} \Rightarrow |OS| = 2$$

ve S noktasının apsisi negatif olduğundan,

$$\sec 120^\circ = -|OS| = -2 \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

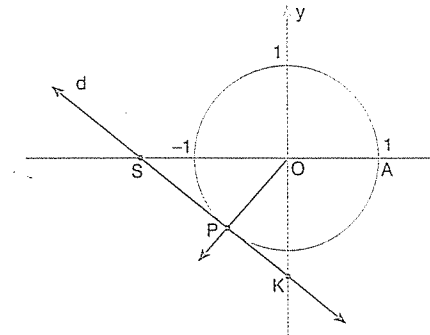
Soru 1:

$$\sec \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\sec \frac{\pi}{3}}$$

çarpımının değeri kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Soru 2:

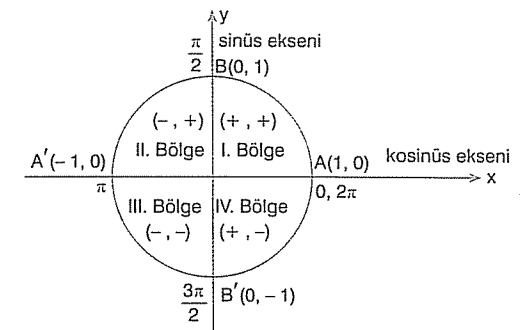


$m(\widehat{AOP}) = 240^\circ$ olmak üzere, şekildeki birim çembere P noktasından çizilen teğetin (d doğrusu) eksenleri kestiği noktalar K ve S dir.

Buna göre, $\sec 240^\circ \cdot \operatorname{cosec} 240^\circ$ çarpımının değeri kaçtır?

- A) $-\frac{6}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ C) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri



	I. Bölge $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	II. Bölge $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	III. Bölge $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IV. Bölge $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Bilgi

Ox eksenini kosinüs eksen ve Oy eksenini de sinüs eksenini olduğundan bir α açısının herhangi bir trigonometrik oranının işaretini bulmak için bu açının bitim kenarının birim çemberi kestiği noktanın koordinatlarının işaretine bakılır. Bu noktanın apsisinin işareti $\cos \alpha$ nın işareti, ordinatının işareti de $\sin \alpha$ nın işaretidir.

Sinüs ve kosinüsün işaretinin bölümü de tanjant ve kotanjantın işaretidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$\sin 95^\circ$, $\cos 190^\circ$, $\tan 210^\circ$ nin işaretleri aşağıdakilerin hangisinde doğru olarak verilmiştir?

	$\sin 95^\circ$	$\cos 190^\circ$	$\tan 210^\circ$
A)	+	-	-
B)	-	-	+
C)	-	+	+
D)	+	+	-
E)	+	-	+

(1988 - ÖYS)

Çözüm:

95° II. bölgededir. II. bölgedeki bir açının sinüsünün işareti bu bölgedeki bir noktanın ordinatının (y) işareti ile aynıdır yani (+) dir.

190° III. bölgededir. III. bölgedeki bir açının cosinüsünün işareti bu bölgedeki bir noktanın apsisinin (x) işareti ile aynıdır yani (-) dir.

210° III. bölgededir. III. bölgedeki bir açının tanjantının işareti bu bölgedeki bir noktanın koordinatlarının (x ve y nin) işaretlerinin birbirine bölümüdür yani (-) : (-) = (+) dir.

Buna göre işaretler sırasıyla + , - , + dir.

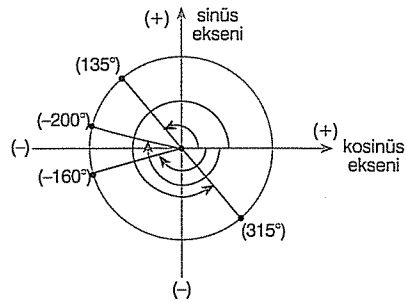
Cevap E

Örnek 2:

$$\sin 315^\circ, \cos(-200^\circ), \tan(-160^\circ), \cot 135^\circ$$

sayılarının işaretlerini sırasıyla bulalım.

Çözüm:



Eksenlerde gösterilen işaretlere göre,

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\tan(-160^\circ) > 0$$

$$\cos(-200^\circ) < 0$$

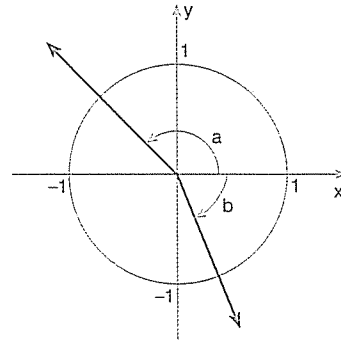
$$\cot 135^\circ < 0 \text{ dir.}$$

Buna göre,

işaretler sırasıyla (-, -, +, -) dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:



Yukarıdaki şekilde, a ve b yönlü açıları veriliyor.

Buna göre, $\sin(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\tan(-a)$, $\cot(-b)$ nin işaretleri aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

	$\sin(a + b)$	$\cos(a - b)$	$\tan(-a)$	$\cot(-b)$
A)	+	+	-	-
B)	-	+	-	+
C)	+	-	+	+
D)	+	+	+	-
E)	-	-	+	-

Soru 2:

$$a = \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$b = \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$c = \tan \frac{7\pi}{6}$$

olduğuna göre; a, b, c sayılarının işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -, -, + B) -, -, - C) -, +, -
 D) +, -, + E) +, +, -

Soru 3:

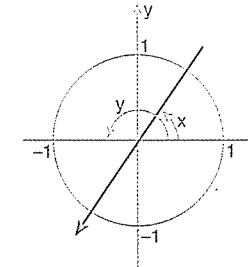
$$\cos(2007^\circ), \sin 99^\circ, \tan(-2007^\circ), \sec(-88^\circ)$$

ifadelerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -, +, -, + B) -, +, -, - C) +, -, +, -
 D) -, +, +, - E) +, -, -, +

Soru 4:

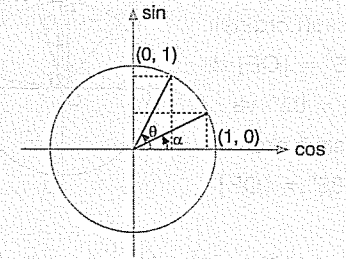
Yandaki şekilde verilen açılara göre, $\tan(\pi + x)$, $\sec(\pi + y)$, $\cos(y - x)$, $\sin(x + y)$ ifadelerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?



- A) +, -, +, - B) -, +, -, + C) +, +, -, +
 D) -, -, +, + E) +, +, -, -

Trigonometrik Oranların Sıralanması

Bilgi



I. bölgedeki açıların değeri büyüdükçe; sinüs ve tanjant değerleri büyür, kosinüs ve kotanjant değerleri küçülür.

$0^\circ < \alpha < \theta < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \sin \theta &> \sin \alpha & \tan \theta &> \tan \alpha \\ \cos \theta &< \cos \alpha & \cot \theta &< \cot \alpha \end{aligned}$$

dir.

Hem sinüs, hem de kosinüs değerleri bir arada sıralanırken oranların hepsi aynı türe dönüştürülmelidir. Yani oranların hepsi ya sinüs ya da kosinüs türünden yazılmalıdır.

Tanjant ve kotanjant değerleri bir arada sıralanırken de oranların hepsi ya tanjant, ya da kotanjant türünden yazıldıktan sonra sıralama yapılmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$a = \sin 5^\circ, \quad b = \sin 85^\circ, \quad c = \sin 105^\circ$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

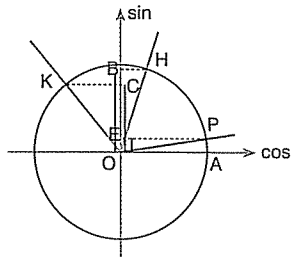
$$A) a < b < c \quad B) a < c < b \quad C) b < a < c$$

$$D) b < c < a \quad E) c < b < a$$

(1985 - ÖYS)

Çözüm:

Yandaki şekilde,
 $m(\widehat{AOP}) = 5^\circ$ ve
 P noktasının ordinatı
 $a = \sin 5^\circ = |OE|$ dir.
 $m(\widehat{AOH}) = 85^\circ$ ve
 H noktasının ordinatı
 $b = \sin 85^\circ = |OB|$
 dir.
 $m(\widehat{AOK}) = 105^\circ$ ve K noktasının ordinatı
 $c = \sin 105^\circ = |OC|$ dir. Buna göre,
 $|OB| > |OC| > |OE|$ olduğundan $b > c > a$
 bulunur.



Cevap B

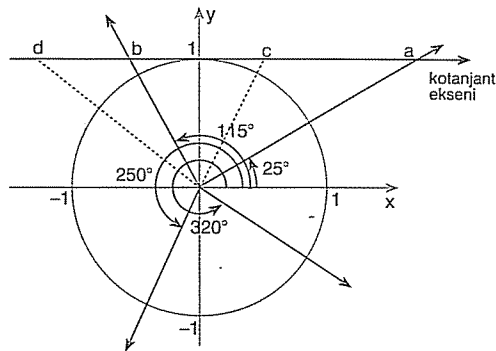
Örnek 2:

$$\begin{aligned} a &= \cot 25^\circ \\ b &= \cot 115^\circ \\ c &= \cot 250^\circ \\ d &= \cot 320^\circ \end{aligned}$$

sayılarını sıralayalım.

Çözüm:

Verilen açıların bitim kenarlarının (veya uzantılarının) kotanjant eksenini kestiği noktaları bularak a, b, c, d sayılarını sıralayalım.



Kotanjant eksenini üzerindeki sayıların değeri, soldan sağa doğru gidildikçe arttığından,

$$d < b < c < a \text{ bulunur.}$$

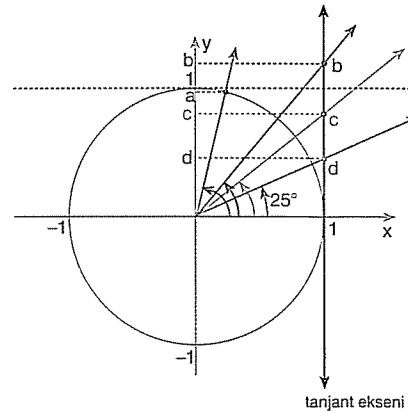
Buna göre,
 $\cot 320^\circ < \cot 115^\circ < \cot 250^\circ < \cot 25^\circ$ olur.

Örnek 3:

$$\begin{aligned} a &= \sin 75^\circ \\ b &= \tan 50^\circ \\ c &= \tan 40^\circ \\ d &= \sin 25^\circ \end{aligned}$$

sayılarını sıralayalım.

Çözüm:



Şekildeki 25° ve 75° lik açıların bitim kenarlarının birim çemberi kestiği noktaların ordinatı sırasıyla d ve a,
 40° ve 50° lik açıların bitim kenarlarının tanjant eksenini kestiği noktaların ordinatı da sırasıyla c ve b dir.

Buna göre, şekildeki ordinat değerlerinin büyükten küçüğe doğru sıralanışı,

$$b > a > c > d$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla,

$$\tan 50^\circ > \sin 75^\circ > \tan 40^\circ > \sin 25^\circ$$

olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$x = \cos 105^\circ$, $y = \cos 205^\circ$, $z = \cos 305^\circ$
 olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $z < y < x$ B) $x < y < z$ C) $y < x < z$
 D) $x < z < y$ E) $y < z < x$

Soru 2:

$$\begin{aligned} a &= \tan 40^\circ, & b &= \tan 130^\circ, \\ c &= \tan 215^\circ, & d &= \tan 325^\circ \end{aligned}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a > c > d > b$ B) $a > c > b > d$
 C) $c > a > d > b$ D) $c > a > b > d$
 E) $a > d > c > b$

Soru 3:

$$\begin{aligned} a &= \cot 65^\circ, & b &= \cot 125^\circ \\ c &= \cot 220^\circ, & d &= \cot 310^\circ \end{aligned}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $b < d < a < c$ B) $b < d < c < a$
 C) $d < b < c < a$ D) $d < b < a < c$
 E) $d < a < b < c$

Soru 4:

$$a = \cos 220^\circ, \quad b = \cot 220^\circ, \quad c = \sin 220^\circ$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $a < c < b$ B) $b < c < a$
 C) $c < b < a$ D) $c < a < b$
 E) $a < b < c$

Soru 5:

$$\begin{aligned} a &= \sin 140^\circ & b &= \sin(-250^\circ) \\ c &= \cos 110^\circ & d &= \cos(-300^\circ) \end{aligned}$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c < d$ B) $b < d < a < c$
 C) $c < a < b < d$ D) $c < d < a < b$
 E) $d < c < b < a$

Soru 6:

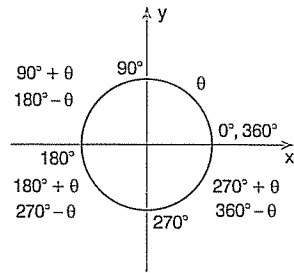
$$a = \cos 290^\circ, \quad b = \tan 320^\circ, \quad c = \sin 340^\circ$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a > b > c$ B) $c > a > b$ C) $b > c > a$
 D) $a > c > b$ E) $b > a > c$

90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Radyan) DEN BÜYÜK AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

α açısının ölçüsü, 90° den büyük olsun. α nın herhangi bir trigonometrik oranını bulmak için bu açı 0°, 90°, 180°, 270° veya 360° ile bir θ açısının toplamı veya farkı şeklinde yazılır. θ dar açı kabul edilerek toplam veya fark (0° $\pm$ θ , 90° $\pm$ θ , 180° $\pm$ θ , 270° $\pm$ θ , 360° $\pm$ θ) şeklinde yazılan açının trigonometrik oranlarının özdeşi üç şekilde bulunur.



Bilgi

α açısı, (180° $\pm$ θ) veya (360° - θ) şeklinde yazılmış ise öncelikle θ dar açı kabul edilerek açının bulunduğu bölgeye göre trigonometrik ifadenin işareti bulunur. Trigonometrik fonksiyonunun adı aynı kalır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

θ dar açı olmak üzere, $\pi - \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $\pi - \theta$ II. bölgede bir açıdır. II. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs pozitif; kosinüs, tanjant, kotanjant negatif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(\pi - \theta) = -\sec\theta$$

$$\csc(\pi - \theta) = \csc\theta$$

bulunur.

Örnek 2:

θ dar açı olmak üzere, $\pi + \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $\pi + \theta$ III. bölgede bir açıdır. III. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs ve kosinüs negatif; tanjant ve kotanjant pozitif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(\pi + \theta) = \sec\theta$$

$$\csc(\pi + \theta) = -\csc\theta$$

bulunur.

Örnek 3:

θ dar açı olmak üzere, $2\pi - \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $2\pi - \theta$ IV. bölgede bir açıdır. IV. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından kosinüs pozitif; sinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(2\pi - \theta) = \sec\theta$$

$$\csc(2\pi - \theta) = -\csc\theta$$

bulunur.

Örnek 4:

225° nin trigonometrik oranlarının değerini bulalım.

Çözüm:

180° < 225° < 270° olduğundan III. bölgededir. III. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs ve kosinüs negatif, tanjant ve kotanjant pozitif değerler alır.

Buna göre,

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = +\tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = +\cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 225^\circ = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$

$$\csc 225^\circ = \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

bulunur.

Örnek 5:

330° nin trigonometrik oranlarının değerini bulalım.

Çözüm:

270° < 330° < 360° olduğundan IV. bölgededir. IV. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından kosinüs pozitif; sinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır.

Buna göre,

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 330^\circ = \sec(360^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 330^\circ = \csc(360^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdakilerden hangisi $\cos(\pi + \theta)$ ya eşittir?

- A) $\cos(2\pi - \theta)$ B) $\cos(\pi - \theta)$ C) $\sin(\pi - \theta)$
D) $\cos \theta$ E) $-\sin \theta$

Soru 2:

$$\frac{\sin(\pi + \theta) + \sin(2\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta)} \cdot \cot(2\pi + \theta)$$

İfadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\tan \theta$ B) $-\tan \theta$ C) 0 D) 1 E) -1

Soru 3:

$$\sin 210^\circ + \cos 300^\circ$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

■ Bilgi

α açısı, $(90^\circ \pm \theta)$ veya $(270^\circ \pm \theta)$ şeklinde yazılmış ise öncelikle θ dar açı kabul edilip açının bulunduğu bölge tespit edilerek işareti bulunur. Daha sonra trigonometrik fonksiyonun adı $\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cot$, $\sec \leftrightarrow \csc$ şeklinde değiştirilir.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

θ dar açı olmak üzere, $90^\circ - \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $90^\circ - \theta$ I. bölgede bir açıdır. I. bölgedeki bir açının trigonometrik oranları pozitif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \theta) &= \cos\theta \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin\theta \\ \tan(90^\circ - \theta) &= \cot\theta \\ \cot(90^\circ - \theta) &= \tan\theta \\ \sec(90^\circ - \theta) &= \csc\theta \\ \csc(90^\circ - \theta) &= \sec\theta\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2:

θ dar açı olmak üzere, $90^\circ + \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $90^\circ + \theta$ II. bölgede bir açıdır. II. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs pozitif; kosinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \theta) &= \cos\theta \\ \cos(90^\circ + \theta) &= -\sin\theta \\ \tan(90^\circ + \theta) &= -\cot\theta \\ \cot(90^\circ + \theta) &= -\tan\theta \\ \sec(90^\circ + \theta) &= -\csc\theta \\ \csc(90^\circ + \theta) &= \sec\theta\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3:

θ dar açı olmak üzere, $270^\circ - \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $270^\circ - \theta$ III. bölgede bir açıdır. III. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs ve kosinüs negatif; tanjant ve kotanjant pozitif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ - \theta) &= -\cos\theta \\ \cos(270^\circ - \theta) &= -\sin\theta \\ \tan(270^\circ - \theta) &= \cot\theta \\ \cot(270^\circ - \theta) &= \tan\theta \\ \sec(270^\circ - \theta) &= -\csc\theta \\ \csc(270^\circ - \theta) &= -\sec\theta\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4:

θ dar açı olmak üzere, $270^\circ + \theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $270^\circ + \theta$ IV. bölgede bir açıdır. IV. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından kosinüs pozitif; sinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır. Buna göre, yukarıdaki yaklaşımdan,

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ + \theta) &= -\cos\theta \\ \cos(270^\circ + \theta) &= \sin\theta \\ \tan(270^\circ + \theta) &= -\cot\theta \\ \cot(270^\circ + \theta) &= -\tan\theta \\ \sec(270^\circ + \theta) &= \csc\theta \\ \csc(270^\circ + \theta) &= -\sec\theta\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5:

120° nin trigonometrik oranlarının değerini bulalım.

Çözüm:

$90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$ olduğundan II. bölgededir.

II. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs pozitif; kosinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır.

Buna göre,

$$\begin{aligned}\sin 120^\circ &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \tan 120^\circ &= \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3} \\ \cot 120^\circ &= \cot(90^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sec 120^\circ &= \sec(90^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2 \\ \csc 120^\circ &= \csc(90^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6:

300° nin trigonometrik oranlarının değerini bulalım.

Çözüm:

$270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$ olduğundan IV. bölgededir.

IV. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından kosinüs pozitif; sinüs, tanjant, kotanjant negatif değerler alır.

Buna göre,

$$\begin{aligned}\sin 300^\circ &= \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 300^\circ &= \cos(270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 300^\circ &= \tan(270^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3} \\ \cot 300^\circ &= \cot(270^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sec 300^\circ &= \sec(270^\circ + 30^\circ) = \csc 30^\circ = 2 \\ \csc 300^\circ &= \csc(270^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdakilerden hangisi $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ya eşittir?

- A) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ B) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$
C) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ D) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$
E) $\cos(2\pi - \theta)$

Soru 2:

$$2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ B) $3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$
C) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ D) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
E) $\sin(\pi - \theta)$

Bilgi

Negatif açının trigonometrik değerleri bulunurken, $-\theta$ yerine $360^\circ - \theta$ yazılarak işlem yapılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

θ dar açı olmak üzere, $-\theta$ açısının trigonometrik oranlarını θ türünden bulalım.

Çözüm:

θ dar açı olmak üzere, $-\theta = 360^\circ - \theta$ olduğundan IV. bölgededir.

IV. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından kosinüs pozitif, sinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır. Buna göre,

$$\sin(-\theta) = \sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos(360^\circ - \theta) = +\cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec(360^\circ - \theta) = +\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \operatorname{cosec}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

bulunur.

Örnek 2:

I. $\sin(-30^\circ)$

II. $\cos(-60^\circ)$

III. $\tan(-45^\circ)$

IV. $\cot(-30^\circ)$

Yukarıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

Çözüm:

I. $\sin(-30^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

II. $\cos(-60^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

III. $\tan(-45^\circ) = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

IV. $\cot(-30^\circ) = \cot(360^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdakilerden hangisi $\tan(\pi + \theta)$ ya eşittir?

A) $\cot(-\theta)$ B) $\tan(\pi - \theta)$ C) $\tan(-\theta)$

D) $\tan(2\pi - \theta)$ E) $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$

Soru 2:

$$\frac{\sin(-30^\circ) + \tan(-60^\circ)}{\cos(-60^\circ) - \cot(-30^\circ)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{3}$

Bilgi

Yukarıda verilen üç yaklaşımla ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Dönüşüm kuralları θ nın dar açı olduğu durumlar için verilmişti, ancak θ nın bölgesi belli değilse veya θ geniş açıysa da dönüşüm yapılırken θ dar açı olarak düşünülerek aynı yaklaşımlar uygulanır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{\cos 120^\circ - \sin 240^\circ}{\cos 315^\circ - \tan 210^\circ - \cot(-60^\circ)}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 120^\circ - \sin 240^\circ}{\cos 315^\circ - \tan 210^\circ - \cot(-60^\circ)} \\ &= \frac{\cos(180^\circ - 60^\circ) - \sin(180^\circ + 60^\circ)}{\cos(360^\circ - 45^\circ) - \tan(180^\circ + 30^\circ) - \cot(-60^\circ)} \\ &= \frac{-\cos 60^\circ - (-\sin 60^\circ)}{+ \cos 45^\circ - \tan 30^\circ - (-\cot 60^\circ)} \\ &= \frac{-\cos 60^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 45^\circ - \tan 30^\circ + \cot 60^\circ} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\frac{\tan(7\pi + \alpha) + \tan(\alpha - 5\pi)}{\cot(6\pi - \alpha) - \cot(8\pi + \alpha)}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş şeklini bulalım.

Çözüm:

α nın bölgesi belli değil ancak dönüşümleri α yı dar açımış gibi düşünersek;

$$\tan(7\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \text{ dir.}$$

$$\tan(\alpha - 5\pi) = \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \text{ dir.}$$

$$\cot(6\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \text{ dir.}$$

$$\cot(8\pi + \alpha) = \cot \alpha \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\frac{\tan(7\pi + \alpha) + \tan(\alpha - 5\pi)}{\cot(6\pi - \alpha) - \cot(8\pi + \alpha)}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{-\cot \alpha - \cot \alpha}$$

$$= \frac{2\tan \alpha}{-2\cot \alpha} = -\tan^2 \alpha \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

Bir ABC üçgeninin iç açıları A, B, C olmak üzere,

$$\tan(90^\circ + B) + \cot(A + C)$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde,

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + C = 180^\circ - B \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ + B) + \cot(A + C) &= -\cot B + \cot(180^\circ - B) \\ &= -\cot B - \cot B \\ &= -2\cot B \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

Bir ABC üçgeninde,

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \text{ ve } \cos B = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\cos(2C + 3B)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde,

$$A = 90^\circ \text{ ise } B + C = 90^\circ \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan, } C = 90^\circ - B \text{ dir.}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\cos(2C + 3B) &= \cos[2.(90^\circ - B) + 3B] \\ &= \cos(2.90^\circ - 2.B + 3.B) \\ &= \cos(180^\circ + B) \\ &= -\cos B = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\sin 283^\circ \cdot \tan 103^\circ \cdot \operatorname{cosec} 347^\circ$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sin 283^\circ \cdot \tan 103^\circ \cdot \operatorname{cosec} 347^\circ \\ &= \sin(270^\circ + 13^\circ) \cdot \tan(90^\circ + 13^\circ) \cdot \operatorname{cosec}(360^\circ - 13^\circ) \\ &= (-\cos 13^\circ) \cdot (-\cot 13^\circ) \cdot (-\operatorname{cosec} 13^\circ) \\ &= -\cos 13^\circ \cdot \cot 13^\circ \cdot \operatorname{cosec} 13^\circ \\ &= -\cos 13^\circ \cdot \frac{\cos 13^\circ}{\sin 13^\circ} \cdot \frac{1}{\sin 13^\circ} \\ &= -\frac{\cos^2 13^\circ}{\sin^2 13^\circ} = -\cot^2 13^\circ \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 6:

$$\cot 119^\circ = a \text{ olduğuna göre,}$$

$$\frac{\tan 29^\circ - \tan 151^\circ}{\cot 209^\circ - \cot 331^\circ}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\cot 119^\circ = a &\Rightarrow \cot(90^\circ + 29^\circ) = a \\ &\Rightarrow -\tan 29^\circ = a \\ &\Rightarrow \tan 29^\circ = -a \text{ ve } \cot 29^\circ = -\frac{1}{a} \text{ dir.} \\ \frac{\tan 29^\circ - \tan 151^\circ}{\cot 209^\circ - \cot 331^\circ} \\ &= \frac{\tan 29^\circ - \tan(180^\circ - 29^\circ)}{\cot(180^\circ + 29^\circ) - \cot(360^\circ - 29^\circ)} \\ &= \frac{\tan 29^\circ + \tan 29^\circ}{\cot 29^\circ + \cot 29^\circ} \\ &= \frac{2 \cdot \tan 29^\circ}{2 \cdot \cot 29^\circ} = \frac{-a}{-\frac{1}{a}} = a^2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 7:

$$a - b = \frac{\pi}{3} \text{ olmak üzere,}$$

$$\cos b = \frac{2}{3}$$

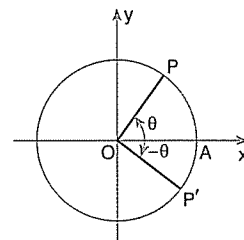
olduğuna göre, $\cos(3a - 4b)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$a - b = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = b + \frac{\pi}{3} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned}\cos(3a - 4b) &= \cos\left[3\left(b + \frac{\pi}{3}\right) - 4b\right] \\ &= \cos(3b + \pi - 4b) \\ &= \cos(\pi - b) \\ &= -\cos b = -\frac{2}{3} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 8:



$$m(\widehat{AOP}) = \theta$$

$$m(\widehat{AOP'}) = -\theta$$

Şekildeki O merkezli birim çember üzerindeki P ve P' noktaları Ox eksenine göre birbirinin simetriğidir.

Buna göre, P' noktası aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilemez?

- A) $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$
- B) $(\cos(-\theta), \sin \theta)$
- C) $(\cos \theta, -\sin \theta)$
- D) $(\cos \theta, \sin(2\pi - \theta))$
- E) $(\cos(2\pi - \theta), -\sin \theta)$

(2006 - ÖSS)

Çözüm:

P noktasının apsisi $\cos \theta$, ordinatı da $\sin \theta$ dir.

P' noktası, P noktasının x eksenine göre simetriği olduğundan, P(cosθ, sinθ) nın x eksenine göre simetriği P'(cosθ, -sinθ) olur.

(Bir noktanın x eksenine göre simetriği bulunurken bu noktanın ordinatının işareti değiştirilir.)

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ ve}$$

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

olduğundan P' noktasının apsisi, $\cos(2\pi - \theta)$, $\cos(-\theta)$ veya $\cos \theta$; ordinatı da $\sin(2\pi - \theta)$, $\sin(-\theta)$ veya $-\sin \theta$ olabilir.

P' noktasının ordinatı $\sin \theta$ olamaz.

Dolayısıyla P' noktası,

$(\cos(-\theta), \sin \theta)$ ile ifade edilemez.

Cevap B

Örnek 9:

$$a = \cos 193^\circ, b = \sin 236^\circ, c = \cos 311^\circ$$

olduğuna göre; a, b, c sayılarını sıralayalım.

Çözüm:

Bütün trigonometrik oranları aynı türden ve açıları da I. bölgede olacak şekilde düzenleyerek sıralamayı yapalım.

$$a = \cos 193^\circ = \cos(180^\circ + 13^\circ) = -\cos 13^\circ$$

$$b = \sin 236^\circ = \sin(270^\circ - 34^\circ) = -\cos 34^\circ$$

$$c = \cos 311^\circ = \cos(360^\circ - 49^\circ) = \cos 49^\circ$$

$c = \cos 49^\circ$ pozitif olduğu için en büyüktür.

I. Bölgede açı değeri büyüdükçe kosinüs değeri küçüldüğüne göre,

$$13^\circ > 34^\circ \Rightarrow \cos 13^\circ > \cos 34^\circ$$

$$\Rightarrow -\cos 13^\circ < -\cos 34^\circ \Rightarrow a < b \text{ dir.}$$

Buna göre, sıralama $c > b > a$ olur.

Örnek 10:

$$a = \tan 125^\circ, b = \tan 290^\circ, c = \tan 320^\circ$$

olduğuna göre; a, b, c sayıları arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm:

Bütün trigonometrik oranları aynı türden ve açıları da I. bölgede olacak şekilde düzenleyerek sıralamayı yapalım.

$$\tan 125^\circ = \tan(180^\circ - 55^\circ) = -\tan 55^\circ$$

$$\tan 290^\circ = \tan(360^\circ - 70^\circ) = -\tan 70^\circ$$

$$\tan 320^\circ = \tan(360^\circ - 40^\circ) = -\tan 40^\circ \text{ olur.}$$

I. Bölgede açı değeri büyüdükçe tanjant değeri büyüdüğüne göre,

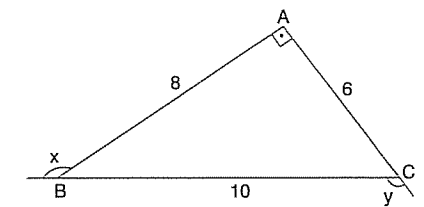
$$\Rightarrow \tan 70^\circ > \tan 55^\circ > \tan 40^\circ$$

$$\Rightarrow -\tan 70^\circ < -\tan 55^\circ < -\tan 40^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 290^\circ < \tan 125^\circ < \tan 320^\circ$$

$$\Rightarrow b < a < c \text{ bulunur.}$$

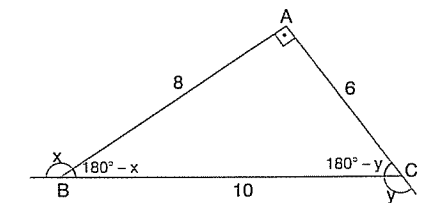
Örnek 11:



Şekildeki ABC dik üçgeninin B ve C köşelerinin dış açıların ölçüsü sırasıyla x ve y dir.

Şekilde verilen uzunluklara göre, $\sin x + \tan y$ toplamının değerini bulalım.

Çözüm:



Şekildeki ABC dik üçgeninde,

B açısının sinüsünü, C açısının da tanjantını yazalım.

$$\sin B = \frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \sin(180^\circ - x) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{3}{5} \text{ ve}$$

$$\tan C = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \tan(180^\circ - y) = \frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow -\tan y = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan y = -\frac{4}{3} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\sin x + \tan y = \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{11}{15} \text{ bulunur.}$$

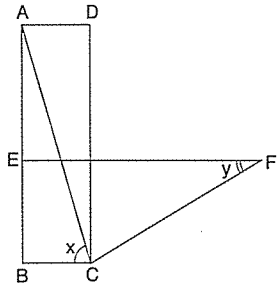
Örnek 12:

Yandaki şekilde
ABCD dikdörtgen,
[AB] ⊥ [EF]

$$m(\widehat{ACB}) = x$$

$$m(\widehat{CFE}) = y$$

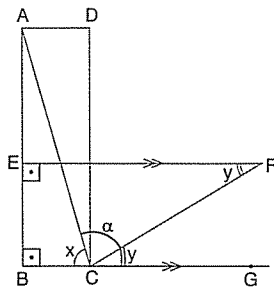
$$\cot(x + y) = -\frac{1}{2}$$



olduğuna göre, $\cot(\widehat{ACF})$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

ABCD dikdörtgeninin
[BC] kenarının uzantı-
sı çizilirse, [EF] ⊥ [AB]
olduğundan,
[EF] // [BC] olur.



Dolayısıyla,
 $m(\widehat{GCF}) = m(\widehat{CFE}) = y$ olur. (iç - ters açılar)

B, C, G doğrusal noktalar olduğundan,
 $x + \alpha + y = 180^\circ$ dir. Buradan,

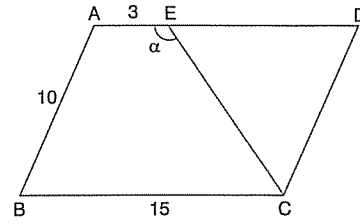
$$x + y = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cot(x + y) = \cot(180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = -\cot \alpha$$

Buna göre,

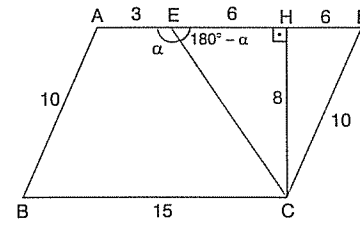
$$\cot \alpha = \cot(\widehat{ACF}) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 13:



Şekildeki ABCD paralelkenarının alanı 120 bi-
rimkare olmak üzere, şekilde verilen uzunlukla-
ra göre, $\tan(\widehat{AEC})$ nin değerini bulalım.

Çözüm:



$$A(ABCD) = |AD| \cdot |CH|$$

$$\Rightarrow 120 = 15 \cdot |CH| \quad (|BC| = |AD|)$$

$$\Rightarrow |CH| = 8 \text{ birim olur.}$$

CHD dik üçgen olduğundan, |HD| = 6 birim olur.
Dolayısıyla,
 $3 + |EH| + 6 = |AD| = 15 \Rightarrow |EH| = 6 \text{ birim}$

$$\text{EHC dik üçgeninde,}$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{|HC|}{|EH|}$$

$$\Rightarrow -\tan \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan(\widehat{AEC}) = -\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

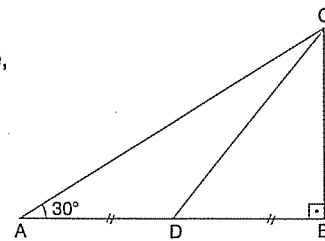
Örnek 14:

ABC dik üçgeninde,

$$[AB] \perp [BC]$$

$$m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$$

$$|AD| = |DB|$$



olduğuna göre, $\cos(\widehat{CDA})$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

ABC dik üçgeninde,
 $m(\widehat{A}) = 30^\circ$ oldu-
ğundan,
 $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ olur.

Dolayısıyla 60° nin
karşısındaki kenar-
rın uzunluğunu $|AB| = 2\sqrt{3}$ birim olarak seçersek,
 30° nin karşısındaki kenarın uzunluğu $|BC| = 2$
birim olur.

Buradan, BCD dik üçgeninden,

$$|BC|^2 + |BD|^2 = |CD|^2 \Rightarrow 2^2 + (\sqrt{3})^2 = |CD|^2$$

$$\Rightarrow |CD| = \sqrt{7} \text{ birim olur.}$$

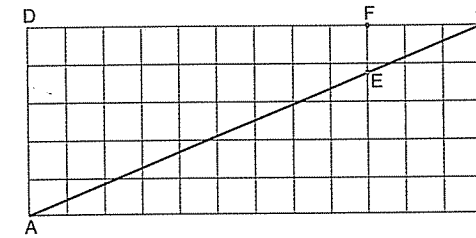
Buna göre, DBC dik üçgeninde,

$$\cos(\widehat{BDC}) = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \cos(180^\circ - x) = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{CDA}) = -\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ dir.}$$

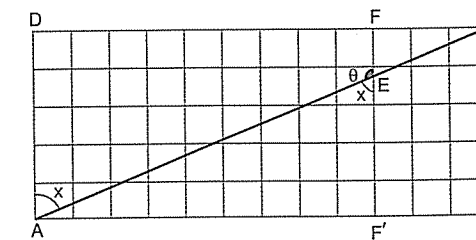
Örnek 15:



ABCD dikdörtgeni, özdeş 60 kareden oluşmuştur.

$m(\widehat{AEF}) = \theta$ olduğuna göre, $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ nin
değerini bulalım.

Çözüm:



$$m(\widehat{AEF'}) = x \text{ diyelim.}$$

$$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{AEF'}) = x \text{ olur. (iç - ters açılar)}$$

$$180 - \theta = x \text{ tir.}$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta = -[-\tan(180^\circ - \theta)]$$

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \tan x \text{ ve}$$

ADC dik üçgeninde,

$$\tan(\widehat{CAD}) = \frac{|DC|}{|AD|} \Rightarrow \tan x = \frac{12}{5} \text{ olduğundan,}$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \tan x = \frac{12}{5} \text{ olur.}$$

Örnek 16:

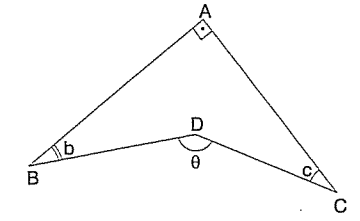
Yandaki şekilde,

$$[AB] \perp [AC]$$

$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$$

$$m(\widehat{BDC}) = \theta$$

$$\sin(b + c) = \frac{2}{5}$$



olduğuna göre, $\cos \theta$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

Problemde verilen şekle göre,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{BDC})$$

$$\Rightarrow 90^\circ + b + c = \theta$$

$$\Rightarrow b + c = \theta - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(b + c) = \sin(\theta - 90^\circ)$$

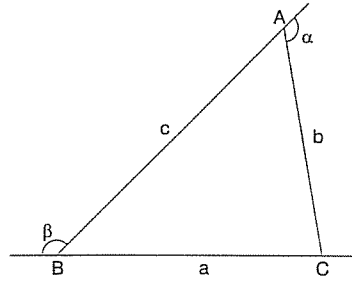
$$\Rightarrow \frac{2}{5} = -\sin(90^\circ - \theta)$$

$$\quad \quad \quad \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = -\cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

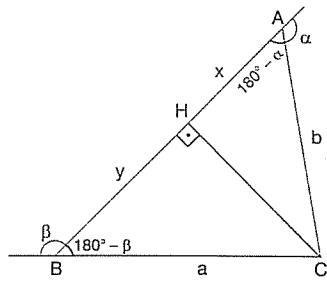
Örnek 17:



Kenar uzunlukları a, b, c olan şekildeki ABC üçgeninin A ve B köşelerindeki dış açılar ölçüsü sırasıyla α ve β dir.

Buna göre, $a \cdot \cos(180^\circ - \beta) - b \cdot \cos \alpha$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:



C köşesinden [AB] kenarına indiğimiz [HC] dikmesinin ayırdığı parçaların uzunluklarına x ve y diyelim. AHC dik üçgeninde,

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{x}{b} \Rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b} \\ &\Rightarrow -\cos \alpha = \frac{x}{b} \\ &\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{x}{b} \end{aligned}$$

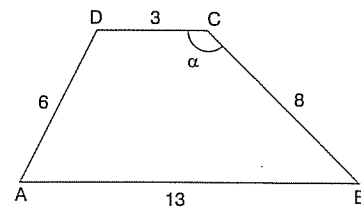
BHC dik üçgeninde,

$$\cos B = \frac{y}{a} \Rightarrow \cos(180^\circ - \beta) = \frac{y}{a} \text{ olur.}$$

Bu değerleri yerine yazalım.

$$\begin{aligned} a \cdot \cos(180^\circ - \beta) - b \cdot \cos \alpha &= a \cdot \frac{y}{a} - b \cdot \left(-\frac{x}{b}\right) \\ &= y + x = |AB| \\ &= c \text{ olur.} \end{aligned}$$

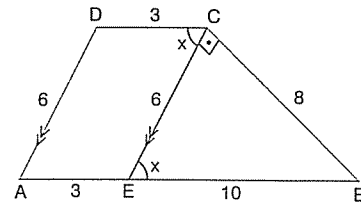
Örnek 18:



Yukarıdaki şekilde, ABCD yamuğunun kenarlarının uzunlukları verilmiştir.

$m(\widehat{DCB}) = \alpha$ olduğuna göre, $\cos \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:



C noktasından [AD] ye paralel çizildiğinde oluşan AECD paralelkenarının kenar uzunlukları, karşılıklı kenarlarının eşitlendiğinden,

$$\begin{aligned} |AD| &= |EC| = 6 \text{ birim ve} \\ |DC| &= |AE| = 3 \text{ birim olur.} \\ |AB| &= |AE| + |BE| \\ \Rightarrow 13 &= 3 + |BE| \Rightarrow |BE| = 10 \text{ birimdir.} \end{aligned}$$

Buradan, şekilde oluşan ECB üçgeninin kenar uzunlukları (6, 8, 10) olduğundan bu üçgen dik üçgendir ve $m(\widehat{BCE}) = 90^\circ$ bulunur.

[DC] // [AB] olduğundan,

$$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{BEC}) = x \text{ olur. (iç - ters açılar)}$$

Buna göre, $\alpha = 90^\circ + x$ olduğundan, $\cos \alpha = \cos(90^\circ + x) \Rightarrow \cos \alpha = -\sin x$ olur.

BCE dik üçgeninde,

$$\sin(\widehat{BEC}) = \frac{|BC|}{|BE|} \Rightarrow \sin x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ tir.}$$

O halde,

$$\cos \alpha = -\sin x \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{\sin x - \sin(2\pi - x)}{\cos x + \cos(x - 2\pi)}$$

İfadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 \tan x$ B) $2 \cot x$ C) $\tan x$
D) $\sec x$ E) $\operatorname{cosec} x$

Soru 2:

Aşağıdakilerden hangisi $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ ifadesine eşittir?

- A) $\sin x$ B) $\sin(-x)$ C) $\cos x$
D) $\cos(\pi - x)$ E) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Soru 3:

Aşağıdakilerden hangisi $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{2}\right)$ ifadesine eşit değildir?

- A) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$ B) $-\cos \frac{x}{2}$ C) $\cos\left(2\pi - \frac{x}{2}\right)$
D) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ E) $\cos\left(3\pi + \frac{x}{2}\right)$

Soru 4:

$$\sin^2(\alpha - 5\pi) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \cos^2\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sec \alpha$ B) $\operatorname{cosec} \alpha$ C) $-\sin^2 \alpha$
D) $1 - \cos \alpha$ E) $\cos^2 \alpha$

Soru 5:

$$\frac{\sin(\alpha - 3\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos(\pi - \alpha)}$$

İfadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan \alpha$ B) $\cot \alpha$ C) $-\tan \alpha$
D) $-\cot \alpha$ E) 1

Soru 6:

A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$\tan\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) \cdot \cot\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) $\tan A$ D) $\cot A$ E) $\tan(A+B)$

Soru 7:

A, B, C bir üçgenin iç açıları olduğuna göre,

$$\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 0 E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soru 8:

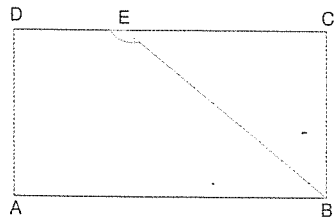
$0 < x < \frac{\pi}{2} < y < \pi$ olmak üzere,

$$\cos(\pi + x), \sin(x - \pi), \cot\left(\frac{\pi}{2} + y\right), \operatorname{cosec}(2\pi - y)$$

ifadelerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -, -, +, - B) -, +, -, - C) -, -, +, +
D) +, +, +, + E) -, -, +, +

Soru 9:



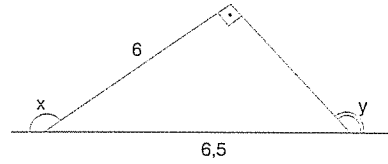
Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,

$$|AB| = 2 \cdot |AD| = 4 \cdot |DE|$$

olduğuna göre, $\tan(\widehat{DEB})$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Soru 10:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, $\cos x + \sin y$ toplamının değeri kaçtır?

- A) $\frac{24}{13}$ B) $\frac{18}{13}$ C) $\frac{10}{13}$ D) 0 E) $-\frac{7}{13}$

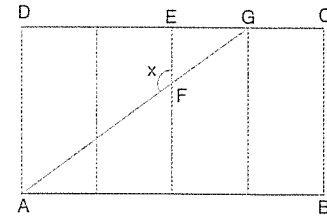
Soru 11:

$$a = \tan(-42^\circ), b = \cot 239^\circ, c = \tan 322^\circ$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $b > c > a$ B) $b > a > c$ C) $c > a > b$
D) $c > b > a$ E) $a > b > c$

Soru 12:



Şekildeki ABCD dikdörtgeni özdeş dört tane dikdörtgenden oluşmaktadır.

A, F, G doğrusal noktalar olmak üzere,

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{4}{3} \text{ ve } m(\widehat{AFE}) = x$$

olduğuna göre, $\cos x$ in değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Soru 13:

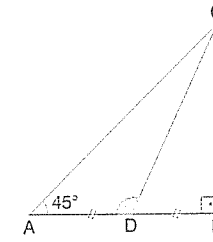
Şekildeki ABC diküçgeninde,

$$|AD| = |BD|$$

$$m(\widehat{DAC}) = 45^\circ$$

olduğuna göre,

$\sin(\widehat{ADC})$ değeri kaçtır?



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{2}{5}$

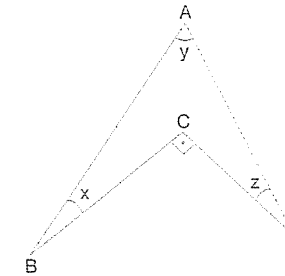
Soru 14:

Yandaki şekilde,

$$[BC] \perp [CD]$$

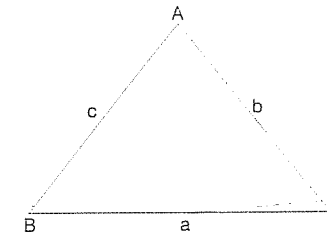
$$\sin(x + z) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

olduğuna göre, $\sin y$ kaçtır?



- A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

Soru 15:



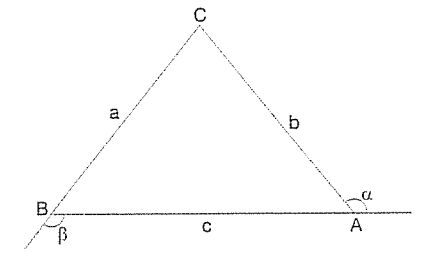
Şekildeki ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları a, b, c dir.

$$\text{Buna göre, } c \cdot \cos(B + C - 180^\circ) - a \cdot \cos(A + B)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a + b - c$ B) $b - c$ C) a D) b E) c

Soru 16:



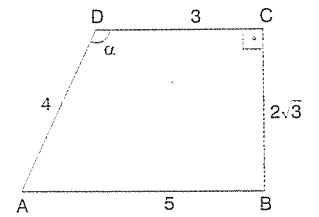
Kenarlarının uzunlukları a, b, c olan şekildeki ABC üçgeninin A ve B köşelerindeki dış açılarının ölçüsü sırasıyla α ve β dir.

Buna göre, $\frac{b}{\sec(180^\circ - \alpha)} - \frac{a}{\sec \beta}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a.b B) a.c C) a D) b E) c

Soru 17:

Şekildeki ABCD dik yamuğunda verilenlere göre, α kaç derecedir?



- A) 172,5 B) 165 C) 150 D) 135 E) 120

Soru 18:

ABCD yamuk,

$$|AB| = 17 \text{ cm}$$

$$|AD| = 12 \text{ cm}$$

$$|BC| = 5 \text{ cm}$$

$$|CD| = 4 \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, $\cot \alpha$ nın değeri kaçtır?

- A) -0,75 B) -0,7 C) -0,5
D) -3,6 E) -2,4

TRİGONOMETRİK ORANLARDAN BİRİ VERİLDİ- ĞİNDE DİĞERLERİNİN BULUNMASI

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ ise

Bilgi

Verilen trigonometrik oranın değerine uygun dik üçgen çizilir. Çizilen bu üçgenden yararlanılarak diğer bütün trigonometrik oranlar bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\tan x = \frac{1}{3}$$

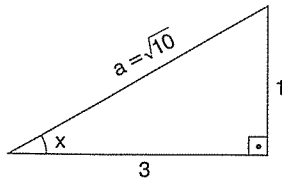
olduğuna göre, $\sin x$, $\cos x$ ve $\cot x$ i bulalım.

Çözüm:

$\tan x = \frac{1}{3}$ ise; karşı dik kenar 1 birim alınırsa, komşu dik kenar 3 birim olur.

Pisagor bağıntısından,
 $(1^2 + 3^2 = a^2)$ hipotenüs $\sqrt{10}$ birim bulunur.

Buna göre, dik üçgeni çizip istenilen oranları bulalım.



$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cot x = 3$$

bulunur.

Örnek 2:

x dar açı olmak üzere,

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

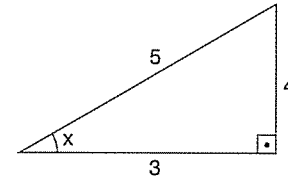
olduğuna göre, $\tan(180^\circ + x) + \cos(270^\circ - x)$ toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

x dar açı olmak üzere,

$$\tan(180^\circ + x) + \cos(270^\circ - x) = +\tan x - \sin x \text{ tir.}$$

$$\cos x = \frac{3}{5} \text{ olduğuna göre,}$$



Yukarıdaki dik üçgenden,

$$\tan x = \frac{4}{3}$$

$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$\tan(180^\circ + x) + \cos(270^\circ - x)$$

$$= +\tan x - \sin x$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5}$$

$$= \frac{8}{15}$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\frac{8}{\sin x} = \frac{15}{\cos x}$$

olduğuna göre, $\sin x$ kaçtır?

- A) $\frac{8}{17}$ B) $\frac{15}{17}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{15}{19}$

Soru 2:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere

$$\cot x = a \text{ ve}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$$

olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Soru 3:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğuna göre, $\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$ toplamının değeri kaçtır?

- A) $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\theta > 90^\circ$ ise

Bilgi

Verilen trigonometrik oranın mutlak değerine uygun bir dik üçgen çizilir. Çizilen bu üçgenden yararlanılarak diğer bütün trigonometrik oranların değeri bulunur. Açının bulunduğu bölgeye göre de trigonometrik oranların işareti bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ olmak üzere,

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

olduğuna göre, $\frac{\csc^2 \theta + 1}{\tan \theta}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\cos \theta = -\frac{4}{5}$ ise komşu dik kenar 4 birim alınırsa hipotenüs 5 birim olur.

Pisagor bağıntısından $(4^2 + a^2 = 5^2)$ karşı dik kenar 3 birim bulunur.

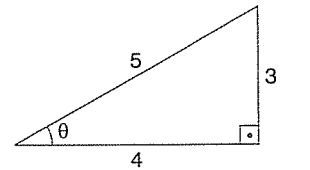
$90^\circ < \theta < 180^\circ$ olduğundan θ , II. bölgede bir açıdır. II. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs pozitif; kosinüs, tanjant ve kotanjant negatif değerler alır.

Buna göre, dik üçgeni çizip istenilen oranları işaretleriyle birlikte bulalım.

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\cot \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Buna göre,} \\ \frac{\csc^2 \theta + 1}{\tan \theta} &= (\csc^2 \theta + 1) \cdot \cot \theta = \left[\left(\frac{5}{3} \right)^2 + 1 \right] \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) \\ &= -\frac{136}{27} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Örnek 2:

$180^\circ < x < 270^\circ$ olmak üzere,

$$\sin x = -\frac{2}{3}$$

olduğuna göre, $\frac{1 - \cot(180^\circ - x)}{1 + \sin(270^\circ - x)}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$180^\circ < x < 270^\circ$ olmak üzere,

$$\sin x = -\frac{2}{3} \text{ ise,}$$

x açısı 180° den büyük bir açı olmasına rağmen dönüşüm yapılırken dar açı gibi düşünülerek,

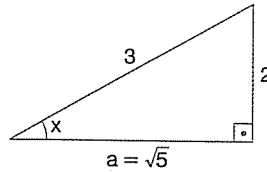
$$\cot(180^\circ - x) = -\cot x$$

$$\sin(270^\circ - x) = -\cos x \text{ bulunur.}$$

x in trigonometrik değerlerini, diküçgen çizerek ve açının bölgesine göre işaretlerini dikkate alarak (x, III. bölgede bir açıdır. III. bölgedeki bir açının trigonometrik oranlarından sinüs ve kosinüs negatif, tanjant ve kotanjant pozitif değerler alır.) bulalım.

$$\sin x = -\frac{2}{3} \text{ ise,}$$

$$3^2 = 2^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$



$$\cot x = +\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \cot(180^\circ - x)}{1 + \sin(270^\circ - x)} = \frac{1 - (-\cot x)}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ve } \cot x = 2\sqrt{2}$$

olduğuna göre, $4\sin x + 2\tan x - \cos x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$ E) $\frac{8-\sqrt{2}}{6}$

Soru 2:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ olmak üzere,}$$

$$\sec \theta = \frac{-25}{24}$$

olduğuna göre, $\tan(2\pi - \theta)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{24}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{-7}{24}$ E) $\frac{-24}{7}$

Soru 3:

$\tan 105^\circ = a$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin 255^\circ \cdot \cos(-195^\circ)}{\tan 345^\circ}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

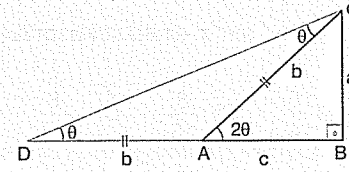
A) $\frac{a}{a^2 + 1}$ B) $\frac{a}{a^2 - 1}$ C) $\frac{-1}{a^3 + a}$

D) $\frac{1}{a^3 + a}$ E) $\frac{a^3}{1 + a^2}$

$0 < 2\theta < 90^\circ$ ise

Bilgi

2θ dar açı olmak şartıyla θ nin trigonometrik oranları aşağıdaki dik üçgen yardımı ile bulunur.



Bilgi Kavrama

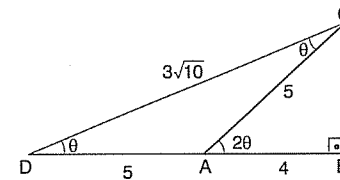
Örnek 1:

$0^\circ < 2\theta < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin 2\theta = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ve $\cot \theta$ yı bulalım.

Çözüm:



ABC dik üçgeninden,

$$\cos 2\theta = \frac{4}{5}, \tan 2\theta = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

DBC dik üçgeninden $|DC|^2 = 3^2 + 9^2 = 90$

$$\Rightarrow |DC| = 3\sqrt{10} \text{ dur.}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \theta = \frac{5+4}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\tan \theta = \frac{3}{5+4} = \frac{1}{3},$$

$$\cot \theta = \frac{5+4}{3} = 3 \text{ bulunur.}$$

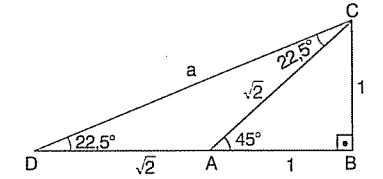
Örnek 2:

$22,5^\circ$ nin trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm:

Verilen yaklaşımla 45° nin trigonometrik oranlarından yararlanarak $22,5^\circ$ nin trigonometrik oranlarını bulalım. Buna göre,

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olduğundan,}$$



$$a^2 = (1 + \sqrt{2})^2 + 1^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

O halde, DBC dik üçgeninden,

$$\sin 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

$$\cos 22,5^\circ = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

$$\tan 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\cot 22,5^\circ = \sqrt{2} + 1 \text{ bulunur.}$$

$\cancel{2\theta} > 90^\circ$ için bu kural geçerli değildir.

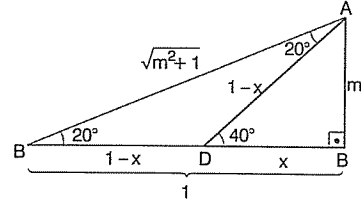
Örnek 3:

$$\tan 20^\circ = m$$

olduğuna göre, $\cos 40^\circ$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$\tan 20^\circ = m$ olmak üzere,



$$(1-x)^2 = m^2 + x^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 = m^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2x = m^2 \Rightarrow 1 - m^2 = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - m^2}{2} \text{ dir.}$$

O halde,

$$\cos 40^\circ = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1-m^2}{2}}{1 - \frac{1-m^2}{2}}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{1-m^2}{2}}{\frac{1+m^2}{2}} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $4 - \sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 8

Soru 2:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\sin x = \frac{7}{25}$$

olduğuna göre, $\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{49}$ C) $\frac{50}{7}$ D) 49 E) 50

Soru 3:

$0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cot 2x = \frac{5}{12}$$

olduğuna göre, $\sin^2 x - \sin 2x$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $-\frac{8}{13}$ E) $-\frac{8}{65}$

Soru 4:

$$\sin 17^\circ = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

olduğuna göre, $\tan 56^\circ$ nin a türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2a}{1-a^2}$ B) $\frac{a}{1-a^2}$ C) $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$
D) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ E) $\frac{1-a^2}{2a}$

Soru 5:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

olduğuna göre, $\tan 2\alpha$ kaçtır?

- A) $-\frac{7}{24}$ B) $-\frac{7}{25}$ C) $-\frac{24}{25}$
D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{7}{25}$

PERİYODİK FONKSİYONLAR

$f: A \rightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonunda,

$\forall x \in A$ için $f(x + T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir T reel sayısı varsa f ye periyodik fonksiyon, T ye fonksiyonun periyodu, T nin en küçük pozitif değeri de **esas periyot** denir.

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu**Bilgi**

- $f(x) = p + q \sin^n(ax + b)$
- $f(x) = p + q \cos^n(ax + b)$
- $f(x) = p + q \sec^n(ax + b)$
- $f(x) = p + q \csc^n(ax + b)$

fonksiyonlarının esas periyotları:

n pozitif tek sayı ise $\frac{2\pi}{|a|}$,

n pozitif çift sayı ise $\frac{\pi}{|a|}$ dir.

- $f(x) = p + q \tan^n(ax + b)$
- $f(x) = p + q \cot^n(ax + b)$

fonksiyonlarının esas periyotları n nin her pozitif tamsayı değeri için $\frac{\pi}{|a|}$ dir.

Örnek 1:

$$f(x) = 1 - 2 \cos^5\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$n = 5$ tek sayı olduğuna göre,

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ dir.}$$

$$a = 3 \text{ olduğundan, } T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$f(x) = \frac{2}{3} \sin^6\left(-\frac{x}{3} - \pi\right)$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$n = 6$ çift sayı olduğuna göre,

$$T = \frac{\pi}{|a|} \text{ dir.}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ olduğundan, } T = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3\pi \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$f(x) = 3 + 2 \tan^7\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$$T = \frac{\pi}{|a|} \text{ dir.}$$

$$a = -2 \text{ olduğundan, } T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$f(x) = 3 \sec^5(-2x + \pi)$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$n = 5$ tek sayı olduğuna göre,

$3 \sec^5(-2x + \pi)$ nin esas periyodu,

$$T = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi \text{ dir.}$$

Örnek 5:

$$f(x) = -2 - 5\cot^6\left(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$$-5\cot^6\left(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ nin esas periyodu,}$$

$$T = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = 4\pi \text{ dir.}$$

Örnek 6:

$$f(x) = (1 - \cos^2 3x) \cdot \sin 3x$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$$1 - \cos^2 3x \text{ yerine } \sin^2 3x \text{ yazalım.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \cos^2 3x) \cdot \sin 3x \\ &= \sin^2 3x \cdot \sin 3x \\ &= \sin^3 3x \text{ ise} \end{aligned}$$

3 tek sayı olduğundan,

$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$f(x) = 2 - \tan 3x$$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{15}$ D) $\frac{8\pi}{15}$ E) π

Soru 2:

$$f(x) = 3 + \sin^8\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisi eşittir?

- A) π B) 2π C) 3π ✓ D) $\frac{\pi}{4}$ E) 5π

Soru 3:

$$f(x) = 3 - \cos^2 2x$$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) 2π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 3π

Soru 4:

$$f(x) = \cot^2\left(1 - \frac{2x}{3}\right) + 5$$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π ✓ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π E) 3π

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN

GRAFİKLERİ

Bilgi

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken;

1. Fonksiyonun esas periyodu bulunur.
2. Bulunan esas periyoda uygun aralık seçilir.
3. Seçilen aralıkta fonksiyonunun değişim tablosu düzenlenir.
4. Seçilen aralıkta fonksiyonunun grafiği çizilir. Esas periyot uzunluğundaki aralıklarda grafik aynen tekrarlanır.

Bilgi Kavrama

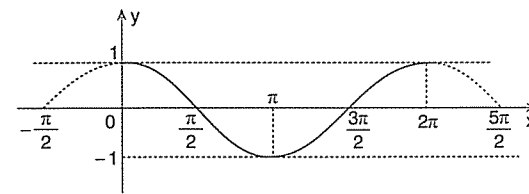
Örnek 1:

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. $[0, 2\pi]$ aralığında değişim tablosunu düzenleyerek grafiği çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	-1	0	1



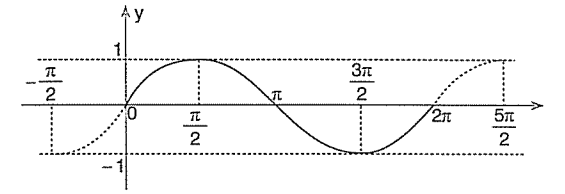
Örnek 2:

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. $[0, 2\pi]$ aralığında değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0



Örnek 3:

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

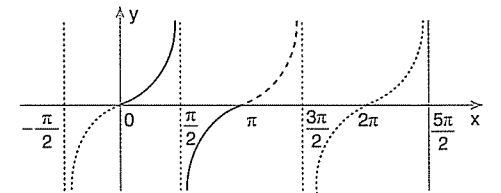
$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun esas periyodu π dir.

$x = \frac{\pi}{2}$ için $f(x) = \tan x$ tanımsız olduğundan

grafik $x = \frac{\pi}{2}$ doğrusunu kesmez.

$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ aralığındaki değişim tablosunu düzenleyerek çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
tan x	0	1	$+\infty$	-1	0



Örnek 4:

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

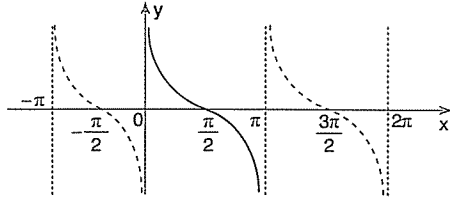
Çözüm:

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun esas periyodu π dir.

$x = 0$ ve $x = \pi$ için $f(x) = \cot x$ tanımsız olduğundan grafik $x = 0$ ve $x = \pi$ doğrularını kesmez.

$[0, \pi] - \{0, \pi\} = (0, \pi)$ aralığındaki değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cot x	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$



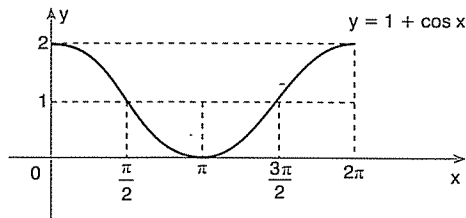
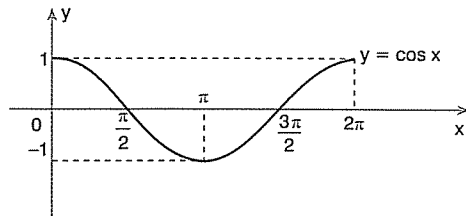
Örnek 5:

$f(x) = 1 + \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = 1 + \cos x$ fonksiyonunun periyodu 2π dir. $[0, 2\pi]$ aralığında değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$1 + \cos x$	2	1	0	1	2



$y = 1 + \cos x$ fonksiyonunun grafiği $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğinin Oy ekseninin pozitif yönünde 1 birim ötelenmiş şeklidir.

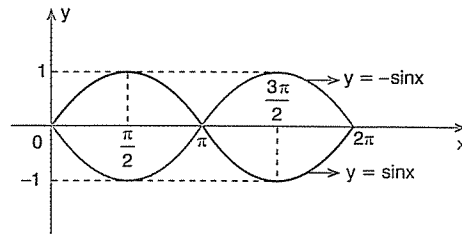
Örnek 6:

$f(x) = -2\sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

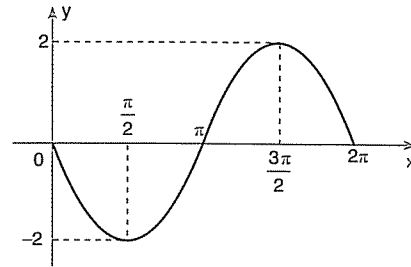
Çözüm:

$f(x) = -2\sin x$ fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. $[0, 2\pi]$ aralığında değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-2\sin x$	0	-2	0	2	0



$y = -\sin x$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin Ox eksenine göre simetriğidir. $y = -2\sin x$ fonksiyonunun grafiği, $y = -\sin x$ fonksiyonunun grafiğinin ordinatlarının 2 katı alınarak çizilir.



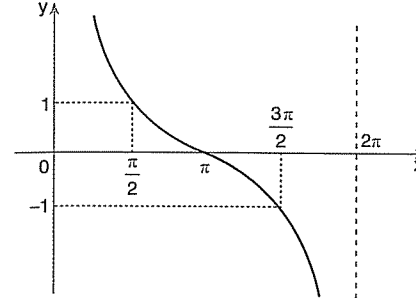
Örnek 7:

$f(x) = \cot \frac{x}{2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \cot \frac{x}{2}$ fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. $x = 0$ ve $x = 2\pi$ için, $f(x) = \cot \frac{x}{2}$ tanımsız olduğundan, grafik $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğrusunu kesmez. $(0, 2\pi) - \{\pi\}$ aralığındaki değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cot \frac{x}{2}$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$



$y = \cot \frac{x}{2}$ fonksiyonunun grafiği, $y = \cot x$ eğrisinin 2π periyotta çizilmiş şeklidir.

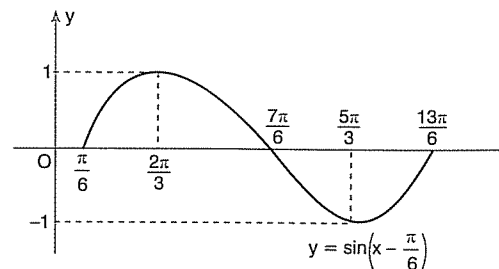
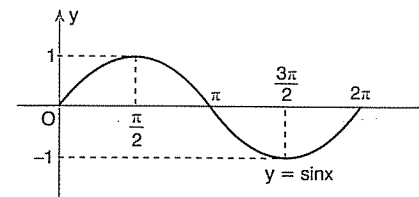
Örnek 8:

$f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. $[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$ aralığında değişim tablosunu düzenleyerek grafiğini çizelim.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$
$\sin(x - \frac{\pi}{6})$	0	1	0	-1	0



$y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ fonksiyonunun grafiği, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin Ox ekseninin pozitif yönünde $\frac{\pi}{6}$ birim ötelenmiş şeklidir.

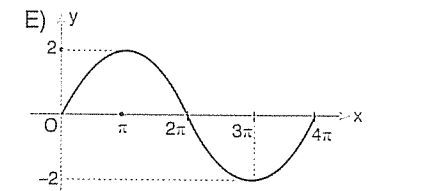
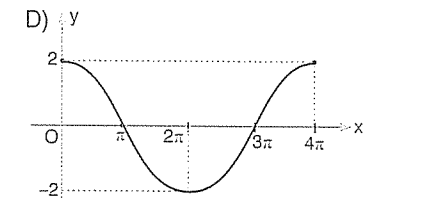
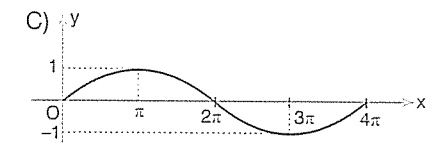
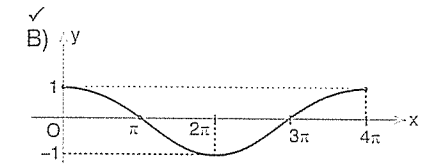
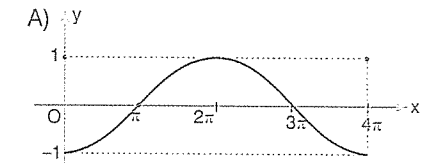
Trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile ilgili sorular, değer verme metoduyla kolayca çözülebilir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

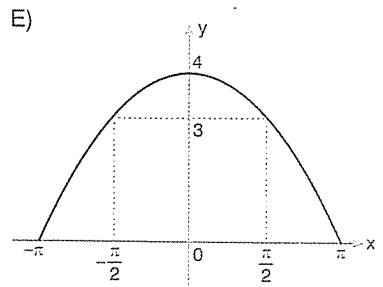
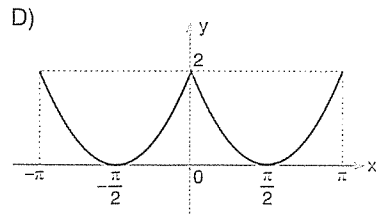
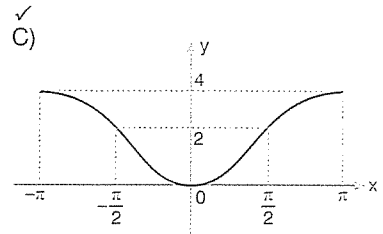
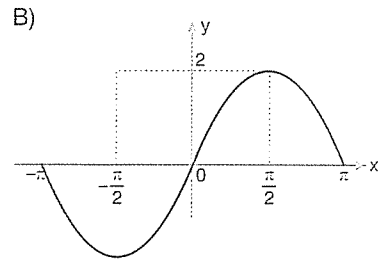
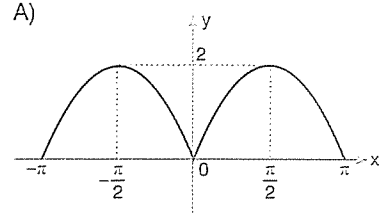
eğrisinin $[0, 4\pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdaki-lerden hangisidir?



Soru 2:

$$y = 2 \cdot |1 - \cos x|$$

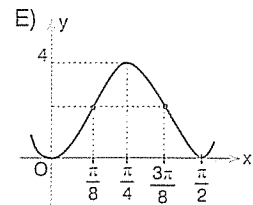
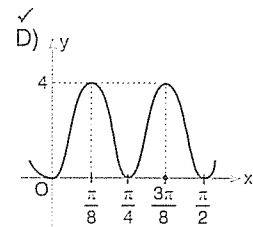
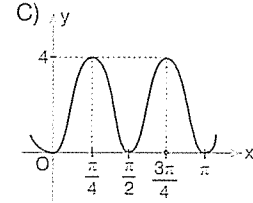
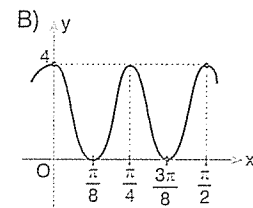
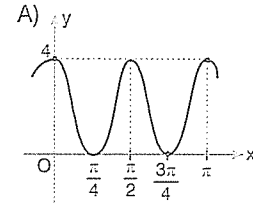
fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Soru 3:

$$f(x) = 4 \sin^2 4x$$

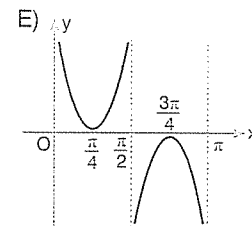
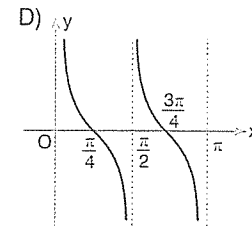
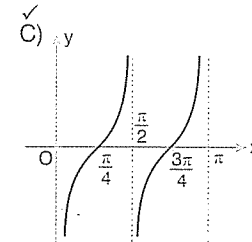
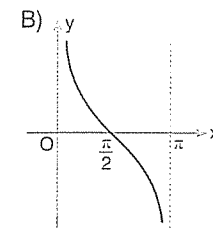
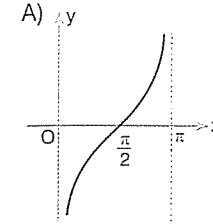
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



Soru 4:

$$f(x) = \tan x - \cot x$$

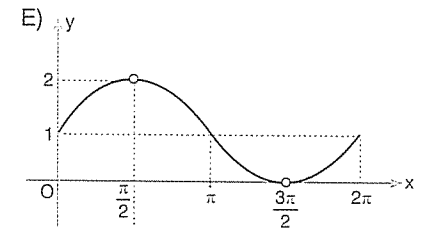
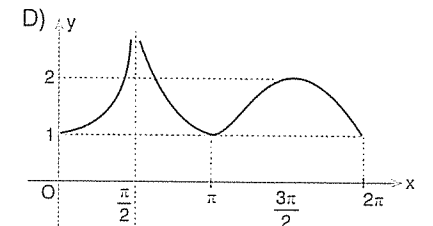
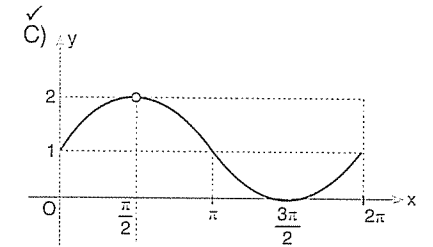
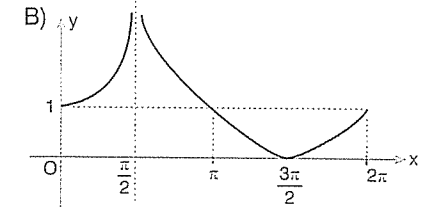
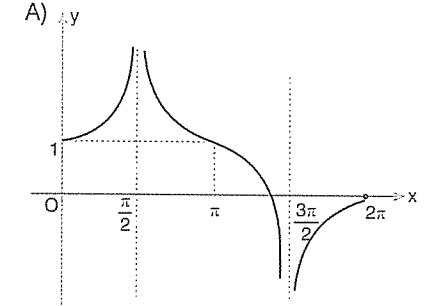
fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Soru 5:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun olması için bu fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir. Fakat trigonometrik fonksiyonlar R den R ye bire bir ve örten değildir. Ancak trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten olduğu uygun aralıklar seçilerek, ters trigonometrik fonksiyonlar tanımlanabilir.

Arksinüs Fonksiyonu

Bilgi

Sinüs fonksiyonunun tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

alınırsa, bu fonksiyon bire bir ve örten olur.

Bu durumda,

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin x$ şeklinde gösterilir.

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğu için,

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ nin değeri, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındadır.

Buna göre,

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = x \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ tür.}$$

Örnek 2:

$\cos\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\cos\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$ ifadesinde,

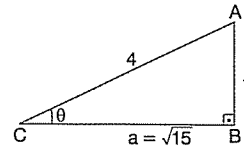
$$\arcsin \frac{1}{4} = \theta \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{4} \text{ olur. O halde,}$$

$\sin \theta = \frac{1}{4}$ ise $\cos \theta$ nin değerini dik üçgen yardımıyla bulalım.

$$a^2 + 1^2 = 4^2 \Rightarrow a = \sqrt{15}$$

olduğundan,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ bulunur.}$$



Örnek 3:

$f(x) = \arcsin(3x + 1)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ olduğundan,}$$

$$-1 \leq 3x + 1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 3x \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 0 \text{ olduğundan,}$$

$f(x)$ in tanım kümesi $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ bulunur.

Örnek 4:

$\tan(\arcsin x)$ ifadesinin x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$\tan(\arcsin x)$ ifadesinde,

$\arcsin x = \theta$ denilirse, $x = \sin \theta$ olur.

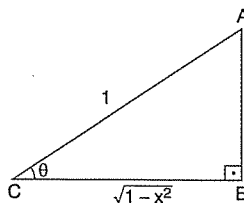
$\sin \theta = x$ ise $\tan \theta$ nin değerini dik üçgen yardımıyla bulalım.

$$|BC|^2 + (x)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{1 - x^2}$$

olduğundan,

$$\tan \theta = \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ olur.}$$



Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

toplamının değeri kaçtır?

- ✓ A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) π E) $\frac{3\pi}{4}$

Soru 2:

$$\tan\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $-2\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\sqrt{2}$

Soru 3:

$$\cot(\arcsin x)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1 - x^2}{x}$ B) $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ C) $\sqrt{\frac{1 - x^2}{x}}$
D) $\sqrt{\frac{1 + x^2}{x}}$ E) $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

Soru 4:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x - 1}{3}\right)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-1, 2]$ B) $[-2, 3]$ C) $[-1, 2]$
D) $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

Arkkosinüs Fonksiyonu

Bilgi

Kosinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $[0, \pi]$ dir.

Bu durumda,

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \text{ olup,}$$

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x) = \arccos x$$

şeklinde gösterilir.

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\arccos(-1) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ olduğu için,

$\arccos \frac{1}{2}$ nin ve $\arccos(-1)$ değeri $[0, \pi]$ aralığındadır.

Buna göre,

$$\arccos \frac{1}{2} = x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$\arccos(-1) = y \Rightarrow \cos y = -1 \Rightarrow y = \pi \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\arccos \frac{1}{2} + \arccos(-1) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\cot\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

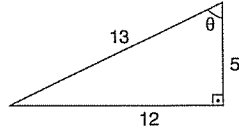
$\cot\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$ ifadesinde,

$$\arccos\left(-\frac{5}{13}\right) = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{5}{13} \text{ olur.}$$

O halde,

$$|\cos\theta| = \frac{5}{13} \text{ olduğundan,}$$

yandaki dik üçgenden,



$$\left|\cot\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)\right| = |\cot\theta| = \frac{5}{12} \text{ olur.}$$

$\theta \in (0, \pi)$ (Arkkosinüs fonksiyonunun tanım aralığı) ve $\cos\theta < 0$ olduğundan $\cot\theta < 0$ dir.

Buna göre,

$$|\cot\theta| = \frac{5}{12} \Rightarrow -\cot\theta = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = -\frac{5}{12} \text{ tir.}$$

Örnek 3:

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$$

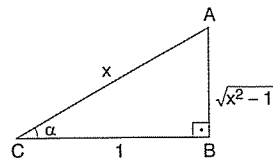
ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$ ifadesinde,

$$\arccos\frac{1}{x} = \alpha \text{ denilirse, } \cos\alpha = \frac{1}{x} \text{ olur.}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{x}$ ise, $\sin\alpha$ nın değerini dik üçgen yardımıyla bulalım.



$$1^2 + |AB|^2 = (x)^2$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{x^2 - 1}$$

olduğundan,

$$\sin\alpha = \sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \text{ olur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{7\pi}{8}$ E) $\frac{7\pi}{12}$

Soru 2:

$$\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{7}$

Soru 3:

$$\cot\left(4\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 0

Soru 4:

$$\cos(\arccos x + \arcsin x)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Arktanjanant Fonksiyonu**Bilgi**

Tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan x$ şeklinde gösterilir.

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$$\cos(\arctan 2)$$

ifadesinin değerini bulalım.

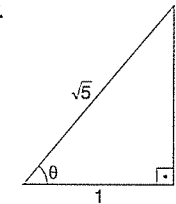
Çözüm:

$$\arctan 2 = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = 2 \text{ olur.}$$

O halde, yandaki dik üçgenden

$$\cos(\arctan 2) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olarak bulunur.

**Örnek 2:**

$$\cot\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5}\right)$$

ifadesinin değerini bulalım.

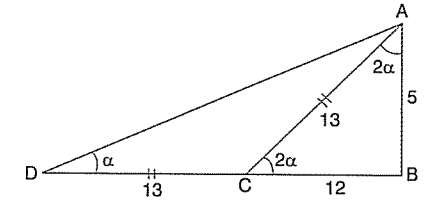
Çözüm:

$$\cot\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5}\right) \text{ ifadesinde,}$$

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5} = \alpha \Rightarrow \arctan \frac{12}{5} = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{12}{5} \text{ olur.}$$

Aşağıdaki ABD dik üçgeninden,



$$\cot\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5}\right) = \cot\alpha = \frac{25}{5} = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\cos(\arctan x)$$

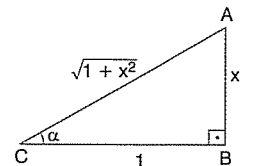
ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\cos(\arctan x)$ ifadesinde,

$\arctan x = \alpha$ denilirse, $\tan\alpha = x$ olur.

Yandaki dik üçgen yardımıyla,



$$\cos\alpha = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ olur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\tan(\arctan\sqrt{3})$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

Soru 2:

$$\arctan\sqrt{3} + \arcsin\frac{1}{2}$$

toplamının sonucu kaç derecedir?

- A) 30° B) 60° C) 75° D) 90° E) 105°

Soru 3:

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

işleminin sonucu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{3\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{23\pi}{12}$

Soru 4:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Arkkotanjant Fonksiyonu

Bilgi

Kotanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $(0, \pi)$ dir.

$$f: (0, \pi) \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}: (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$$

$f^{-1}(x) = \cot^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ şeklinde gösterilir.

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

İfadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

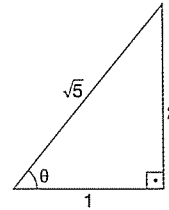
$$\sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \text{ ifadesinde,}$$

$$\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Leftrightarrow \cot\theta = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

O halde,

$$|\cot\theta| = \frac{1}{2} \text{ olduğundan}$$

yandaki dik üçgenden,



$$\left|\sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right| = |\sin\theta| = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ olur.}$$

$\theta \in (0, \pi)$ (arkkotanjant fonksiyonunun tanım aralığı) ve $\cot\theta < 0$ olduğundan $\sin\theta > 0$ dir.

Buna göre,

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow +\sin\theta = \sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\operatorname{cosec}(\operatorname{arccot} x)$$

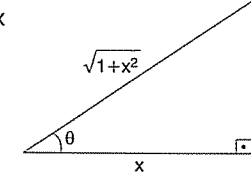
İfadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$\operatorname{cosec}(\operatorname{arccot} x)$ ifadesinde,

$$\operatorname{arccot} x = \theta \Rightarrow \cot\theta = x \text{ olur.}$$

O halde, yandaki dik üçgenden,



$$\operatorname{cosec}(\operatorname{arccot} x) = \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{1+x^2} \text{ dir.}$$

$$\cancel{f} \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I = x \text{ olduğundan,}$$

$$\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$\tan(\arctan x) = \arctan(\tan x) = x$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = \operatorname{arccot}(\cot x) = x$$

olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$4 \cdot \tan\left(\operatorname{arccot}\frac{4}{3}\right) - 5 \cdot \sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$$

İfadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Soru 2:

$$\operatorname{arccot}(x^2 - x - 5) = \frac{\pi}{4}$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 3:

$$\cos(\operatorname{arccot} x)$$

İfadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{x}{1+x^2}$ B) $\frac{x}{1-x^2}$ C) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- D) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ E) $\sqrt{x^3-1}$

Soru 4:

$$\arctan(1) + \operatorname{arccot}(\sqrt{3})$$

toplamının değeri kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

1. 1640° lik bir açının esas ölçüsü kaç derecedir?

A) 300 B) 280 C) 240 D) 200 E) 130

2. $\frac{37\pi}{4}$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{5\pi}{8}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{8}$

3. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

olduğuna göre, $\tan \theta + \cot \theta$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{9\sqrt{5}}{8}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$

4. $90^\circ < x < 180^\circ$ olmak üzere,

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, $\tan x - \cot x$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

5. $a = \sin 75^\circ$, $b = \cos 170^\circ$, $c = \tan 210^\circ$

sayılarının işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) +, +, + B) -, -, - C) -, +, -
D) +, -, + E) +, +, -

6. $a = \sin 128^\circ$
 $b = \cos 168^\circ$
 $c = \tan 61^\circ$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $c < a < b$
D) $b < c < a$ E) $c < b < a$

$$7. \frac{\cos x + \sin x}{\sec x} + \frac{\sin x - \cos x}{\csc x}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $\cos x$ C) $\sin^2 x$ D) 1 E) $\tan x$

$$8. A = 5 - 2 \cdot \cos x$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği en büyük değer ile en küçük değer toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

$$9. \tan x + \cot x = -8$$

olduğuna göre, $\tan x - \cot x$ farkının pozitif değeri kaçtır?

A) $3\sqrt{15}$ B) 15 C) $2\sqrt{15}$ D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{5}$

$$10. \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

olduğuna göre, $\sin x \cdot \cos x$ çarpımı kaçtır?

A) $\frac{13}{32}$ B) $\frac{17}{32}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{11}{16}$ E) $\frac{7}{8}$

$$11. \frac{\sin^2 430^\circ + \sin^2 380^\circ}{\tan 728^\circ \cdot \tan 442^\circ}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

$$12. \frac{\sin 1500^\circ + \cos 1920^\circ}{\sin 1680^\circ + \cos 420^\circ}$$

işleminin sonucu kaçtır?

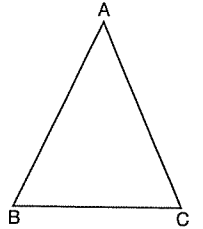
A) -2 B) -1 C) 0 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

$$13. \frac{\sin(\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cot(\pi + \alpha)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

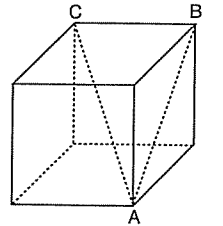
14. Şekildeki ABC üçgeninde,
 $|AB| = |AC|$
 $|BC| = 13$ cm
 $\tan B = 2,4$



olduğuna göre, $|AB|$ kaç cm dir?

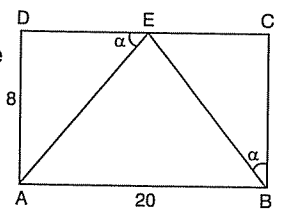
A) 15 B) 15,6 C) 16 D) 16,2 E) 16,9

15. Şekilde verilen birim küpte,
 $\sin(\widehat{BAC})$ değeri kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

16. ABCD bir dikdörtgen
E noktası [CD] üzerinde
 $|AB| = 20$ birim
 $|AD| = 8$ birim



$$m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{EBC}) = \alpha$$

yukarıda verilenlere göre, $\cot \alpha$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

1. $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}$
 $\frac{5\pi}{4} < y < \frac{7\pi}{3}$
 $2\pi < z < 3\pi$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamının esas ölçüsü aşağıdaki aralıklardan hangisindedir?

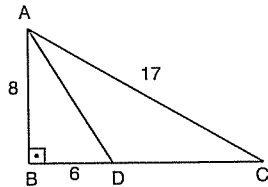
- A) 0 ile $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{6}$ ile $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ ile $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{6}$ ile π E) $\frac{\pi}{3}$ ile π

2. $a = \sin(-50^\circ)$
 $b = \cos 320^\circ$
 $c = \sin 50^\circ$
 $d = \cos 220^\circ$

yukarıdaki değerlerin sıralanışı aşağıdakilerden hangisinde doğrudur?

- A) $a > b > c > d$ B) $a > d > b > c$ C) $b > c > a > d$
D) $b > d > a > c$ E) $b > c < a = d$

3. ABC diküçgen,
 $|AB| = 8$ cm
 $|BD| = 6$ cm
 $|AC| = 17$ cm



olduğuna göre, $\tan(\widehat{DCA})$ kaçtır?

- A) $\frac{7}{17}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{11}{7}$ D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{9}{17}$

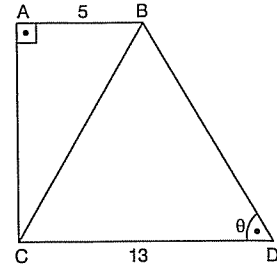
4. $a = \sin x$ ve $b = \cos x$ olduğuna göre,

$$a^3 - a^2b - a + b + a \cdot b^2 - b^3$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 0 C) -1 D) $2\sin x$ E) $2\cos x$

5. ABCD bir dik yamuk
 $|BC| = |CD|$
 $|AB| = 5$ cm
 $|CD| = 13$ cm
 $m(\widehat{CDB}) = \theta$



olduğuna göre, $\tan \theta$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{8}{11}$

6. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,
 $2\sin x = 3\cos x$

olduğuna göre, $\sec x - \csc x$ farkı kaçtır?

- A) $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

7. A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\sin A = \sin(B + C)$
B) $\cos B = -\cos(A + C)$
C) $\tan(A + B) = -\tan C$
D) $\cot A = \cot(B + C)$
E) $\csc A = \csc(B + C)$

8. $A + B = 90^\circ$ ve $\sin A = \frac{1}{4}$

olduğuna göre, $\cos(2A + B)$ nin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{4}$

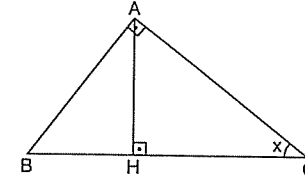
9. A, B ve C bir üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$\frac{\sin(A + B) + \sin C}{\cos(A + B) - \cos C}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin C$ B) $\cos C$ C) $\tan C$
D) $-\tan C$ E) $\cot C$

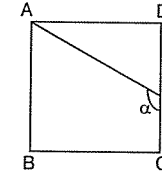
10.



Şekildeki ABC diküçgeninde $|AH| = 1$ birim olduğuna göre, $|BH|$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\csc x$ B) $\sec x$ C) $\sin x$
D) $\tan x$ E) $\cot x$

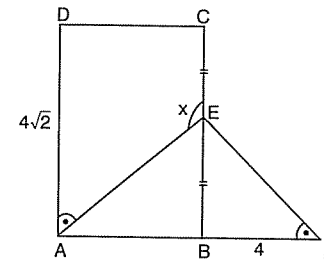
11. ABCD bir kare,
 $3|CE| = |DE|$
 $m(\widehat{AEC}) = \alpha$



olduğuna göre, $\cos \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{4}{5}$

12.



Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgen

$$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BFE}), |BE| = |BC|$$

$$|AD| = 4\sqrt{2} \text{ cm ve } |BF| = 4 \text{ cm}$$

olduğuna göre, $\tan x$ kaçtır?

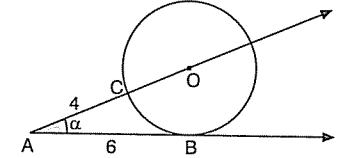
- A) $-\sqrt{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{6}$

13. $\tan 25^\circ = x$

olduğuna göre, $\tan 245^\circ - \cot 115^\circ$ ifadesinin x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{x+1}{x}$ B) $\frac{x-1}{x}$ C) $\frac{x}{x+1}$
D) $\frac{x^2+1}{x}$ E) $\frac{x^2-1}{x}$

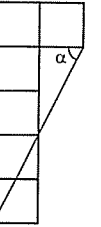
14.



Yukarıdaki şekilde [AB ışını, O merkezli çembere teğet olduğuna göre, $\sin \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{13}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{13}$

15. Yandaki şekil özdeş altı kareden oluştuğuna göre, $\cot \alpha$ kaçtır?



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

16. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cot x = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos x - \sin x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{12}{25}$ B) $-\frac{37}{25}$ C) 0 D) $\frac{25}{17}$ E) $\frac{39}{25}$

17. A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \left(\frac{B+C}{2} \right)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin C$ B) $\cos B$ C) $\sin(A + B)$
D) $\cos(A + B)$ E) 1

1. $A = (5 - \sin x) \cdot (3 - \cos x)$

olduğuna göre, A'nın alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

2. $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$

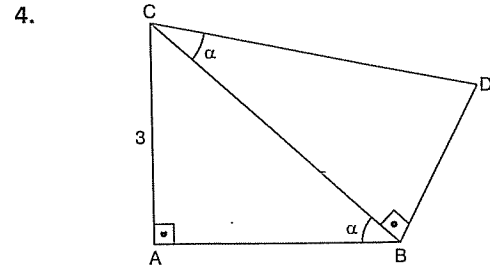
olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\tan x > \cot x > \cos x > \sin x$
 B) $\tan x > \cot x > \sin x > \cos x$
 C) $\cot x > \tan x > \sin x > \cos x$
 D) $\sin x > \cos x > \cot x > \tan x$
 E) $\cot x > \tan x > \cos x > \sin x$

3. $x = \sin 12^\circ$
 $y = \cos(-20^\circ)$
 $z = \tan 225^\circ$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $y < z < x$ B) $y < x < z$ C) $x < y < z$
 D) $z < y < x$ E) $x < z < y$



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD}) = \alpha$ ve $|AC| = 3$
 olduğuna göre, $|BD|$ uzunluğunun α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3 \cdot \sin \alpha$ B) $\frac{3}{\sin \alpha}$ C) $\sin 3\alpha$
 D) $3 \cdot \sec \alpha$ E) $3 \cdot \tan \alpha$

5. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \sec x$

olduğuna göre, $\tan x$ kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

6. $f(x) = \sin 12x + \tan^2 9x$

olduğuna göre, $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{3}{2}$

7. $\frac{\sin^2 x + \cot^2 x - 1}{\cos^2 x}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\tan^2 x$ B) $\cot^2 x$ C) $\operatorname{cosec}^2 x$
 D) $\sec^2 x$ E) 1

8. $\frac{1 + \sin x}{1 + \operatorname{cosec} x} = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, $\sin x$ kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

9. $\cos x = a$
 $\tan x = b$

olduğuna göre, $\frac{a+b}{a \cdot b}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin x + \cos x$ B) $\sec x + \operatorname{cosec} x$ C) $\cot x + 1$
 D) $\cot x + \sec x$ E) $\tan x + \cot x$

10. $b - a = \frac{\pi}{4}$

olduğuna göre, $\frac{\sin(2a - b)}{\cos(3b - 4a)}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\tan a$ E) $\tan(a + b)$

11. $A = \sin^2 x - 6 \sin x + 20$

olduğuna göre, A'nın alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

12. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmak üzere,

$-3 \cdot \cos^2 x - 7 \cdot \sin x + 5 = 0$

olduğuna göre, $\tan x$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

13. $x = \cos 40^\circ$

olduğuna göre, $\sin 140^\circ$ nin x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x B) $-x$ C) $1-x$ D) $1-x^2$ E) $\sqrt{1-x^2}$

14. $n = \sin 50^\circ$

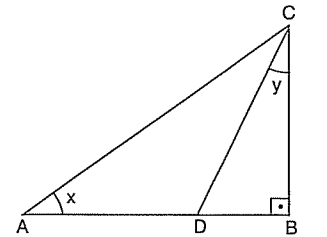
olduğuna göre, $\cos 140^\circ$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) n B) $-n$ C) $1-n^2$ D) $1+n$ E) $\sqrt{1+n^2}$

15. Şekildeki ABC diküçgeninde,
 $|AD| = 2 \cdot |BD|$

olduğuna göre, $\cot x \cdot \cot y$ çarpımı kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

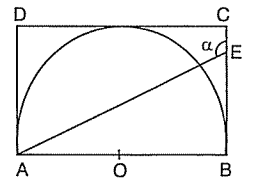


16. Merkezi O olan, [AB] çaplı yarı çember, şekildeki ABCD dikdörtgenine içten teğettir.

$|EC| = 1$
 $\tan \alpha = -3$

olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



17. d doğrusu şekildeki bir çembere A' noktasında teğettir.

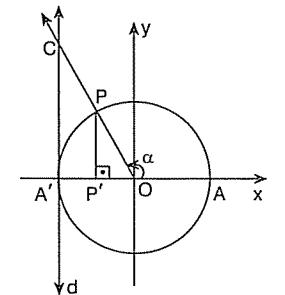
Buna göre,

$|A'P'| - |A'C| - 1$

ifadesinin α türünden

değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos \alpha - \tan \alpha$ B) $\tan \alpha - \cos \alpha$ C) $\tan \alpha$
 D) $-\cos \alpha - \tan \alpha$ E) $\cos \alpha + \tan \alpha$



1. $f(x) = \sin^3\left(6x + \frac{\pi}{7}\right)$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

2. $g(x) = \cos^4\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) π D) 2π E) 3π

3. $f(x) = \tan^4\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{7}$

4. $f(x) = 2 + \sqrt{3} \cdot \cos^3(-4x - 3)$

olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{2}$

5. $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin^2 3x$

fonksiyonunun grafiğinin periyodik olarak tekrar ettiği en küçük aralık uzunluğu kaç birimdir?

- A) π B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

6. $f(x) = \operatorname{cosec}^2(3x + 5) + 5$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{3}$

7. $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} + \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$

toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) π

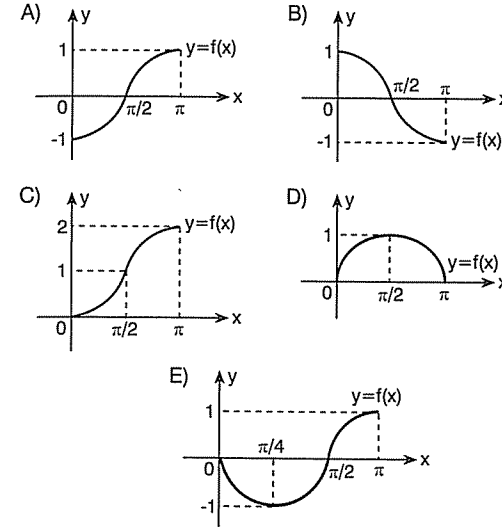
8. $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2x + \frac{\pi}{6}$

olduğuna göre, x kaç radyandır?

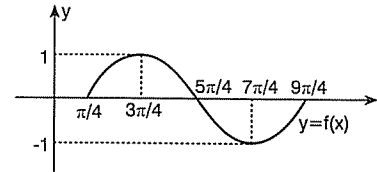
- A) $\frac{\pi}{15}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

9. $f(x) = 1 - \cos x$

fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



10.

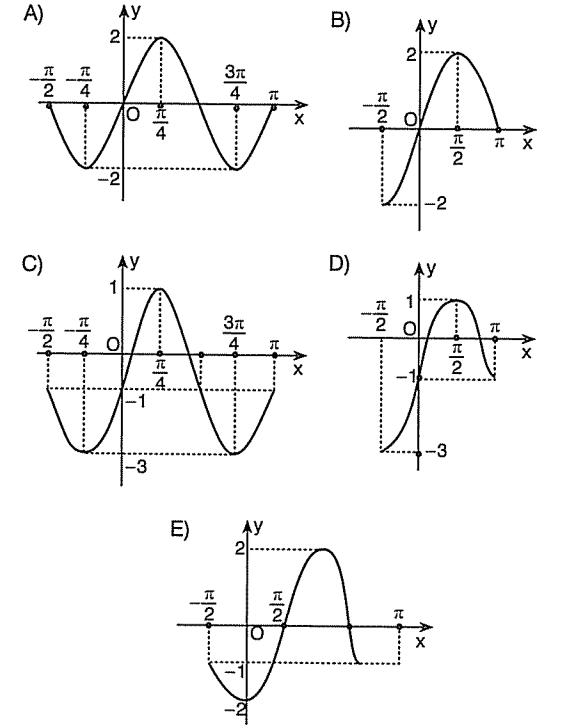


Yukarıdaki şekilde, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ aralığında grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

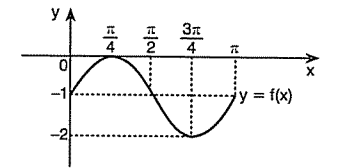
- A) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ B) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
C) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ D) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
E) $y = \frac{\pi}{4} + \sin x$

11. $f(x) = -1 + 2 \cdot \sin 2x$

fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



12.



Şekilde, $[0, \pi]$ aralığında grafiği verilen trigonometrik fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 1 + \sin 2x$ B) $y = -1 - \sin 2x$
C) $y = -1 + \sin 2x$ D) $y = \sin \frac{x}{2}$
E) $y = 2 \sin x$

1. $f(x) = \cos^3 3x + \tan 2x \cdot \cot 2x$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A)
- $\frac{\pi}{6}$
- B)
- $\frac{\pi}{3}$
- C)
- $\frac{\pi}{2}$
- D)
- $\frac{2\pi}{3}$
- E)
- 3π

2. $g(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{\cot^2(3x+5)}$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{\pi}{3}$
- B)
- $\frac{\pi}{2}$
- C)
- π
- D)
- $\frac{3\pi}{2}$
- E)
- $\frac{5\pi}{2}$

3. $f(x) = (\tan^2 3x) \cdot (1 - \sin^2 3x) \cdot \sin 3x$

fonksiyonunun esas periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{\pi}{6}$
- B)
- $\frac{\pi}{2}$
- C)
- π
- D)
- $\frac{3\pi}{2}$
- E)
- $\frac{2\pi}{3}$

4. $f(x) = \sec^2\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A)
- 2π
- B)
- π
- C)
- $\frac{3\pi}{4}$
- D)
- $\frac{\pi}{3}$
- E)
- $\frac{\pi}{4}$

5. $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

toplamlarının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{\pi}{8}$
- B)
- $\frac{\pi}{4}$
- C)
- $\frac{\pi}{6}$
- D)
- $\frac{\pi}{3}$
- E)
- $\frac{\pi}{2}$

6. $\arctan(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

toplamlarının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{\pi}{4}$
- B)
- $-\frac{\pi}{6}$
- C)
- $-\frac{\pi}{4}$
- D)
- $-\frac{\pi}{3}$
- E)
- $-\frac{\pi}{2}$

7. $\arccos x + \arcsin x$

toplamlarının değeri kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 60 D) 90 E) 180

8. $\sin\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A)
- $\frac{3}{\sqrt{10}}$
- B)
- $\frac{2}{\sqrt{10}}$
- C)
- $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- D)
- $\frac{3}{4}$
- E)
- $\frac{2}{\sqrt{5}}$

9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{4}{5}\right)$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $-\frac{5}{3}$
- B)
- $-\frac{4}{5}$
- C)
- $-\frac{3}{5}$
- D)
- $\frac{3}{5}$
- E)
- $\frac{4}{5}$

10. $\arctan\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) + \arccos\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{3\pi}{4}$
- B)
- $\frac{3\pi}{2}$
- C)
- $\frac{5\pi}{3}$
- D)
- $\frac{5\pi}{6}$
- E)
- $\frac{7\pi}{12}$

11. $\arccos(0,6) = x$

olduğuna göre, $5 \cdot \sin x - 3 \cdot \tan x$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

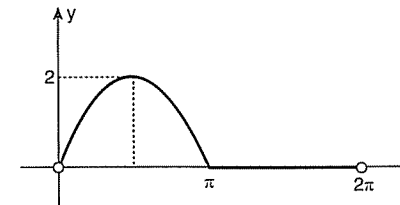
- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

12. $\cos\left(3 \cdot \arccos \frac{1}{2} - 2 \cdot \operatorname{arccot} \sqrt{3}\right)$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B)
- $-\frac{1}{2}$
- C) 0 D)
- $\frac{1}{2}$
- E)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13.

Şekilde $(0, 2\pi)$ aralığındaki grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

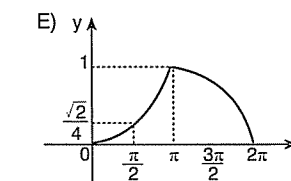
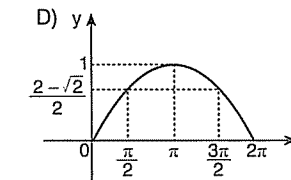
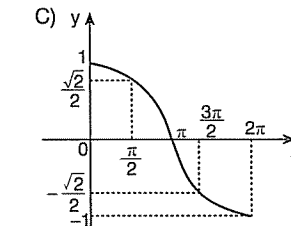
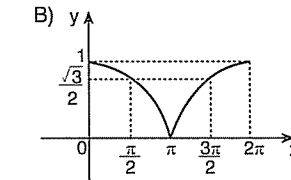
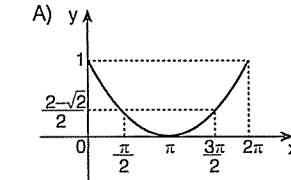
- A) $f(x) = 1 + \sin x$ B) $f(x) = 1 + \sin 2x$
 C) $f(x) = 2 \cos 2x$ D) $f(x) = 2 \sin x$
 E) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

14. $\cos(\arcsin \sqrt{1-x^2})$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{x^2-1}$ B) $\sqrt{1+x^2}$ C) $x\sqrt{1-x^2}$
 D) x E) 1

15. $y = 1 - \sin \frac{x}{2}$

fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

1. $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{7} - 2x\right)$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) 2π E) 3π

2. $f(x) = 5 - \operatorname{cosec}^3\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) π E) 2π

3. $f(x) = \sin^4(3x + 20^\circ)$

fonksiyonu için $f(x + T) = f(x)$ şartını sağlayan en küçük pozitif T açısı kaç derecedir?

- A) 15° B) 30° C) 60° D) 80° E) 90°

4. $\arctan 5x = \operatorname{arccot} x$

eşitliğini sağlayan x in alabileceği pozitif değer kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) 1 C) $\sqrt{5}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) 3

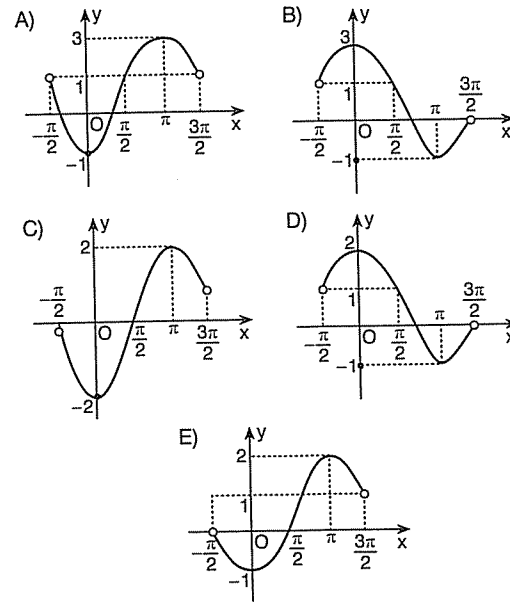
5. $\tan\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\arcsin(-1)}{2}\right]$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{3}$

6. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ve $f(x) = 1 - 2\cos x$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



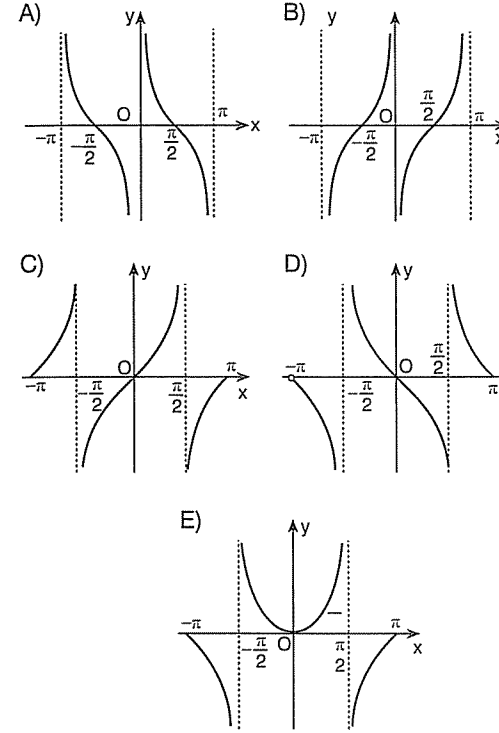
7. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arccot}(-1)$

işleminin sonucu kaç radyandır?

- A) $-\frac{\pi}{12}$ B) $-\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{12}$

8. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9. $3 \cdot \arctan(x^2 - 2x - 9) + \frac{3\pi}{4} = 0$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{5}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $-\frac{3}{5}$

11. $\tan(\operatorname{Arccos} \frac{3}{5})$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 1 E) $\frac{3}{4}$

12. $\sin(\arccos f) = e$
 $f^2 + e^2 = m^2$

olduğuna göre, $\cot \frac{m\pi}{2}$ nin değeri kaçtır?

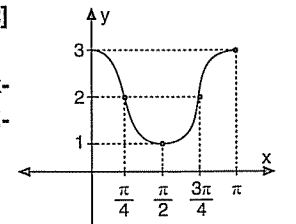
- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) 0 E) -1

13. $f(x) = \arccos\left(\frac{5x}{6} - 3\right)$

fonksiyonun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right]$ B) $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$ C) $\left[\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right]$
D) $\left[\frac{17}{6}, \frac{19}{6}\right]$ E) $\left[\frac{19}{6}, \infty\right]$

14. Yandaki şekilde $[0, \pi]$ aralığında verilen grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?



- A) $1 + \cos x$ B) $-1 - \cos x$ C) $2 + \cos 2x$
D) $-2 + \cos 2x$ E) $-3 - \cos 2x$

ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR

Bilgi

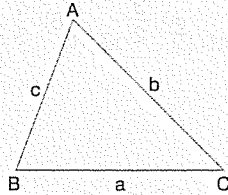
a) Kosinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları; a, b, c olmak üzere,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \text{ dir.}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \text{ dir.}$$

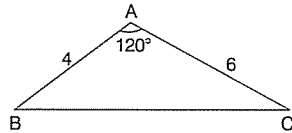
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \text{ dir.}$$



Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$|AB| = 4 \text{ cm}$
 $|AC| = 6 \text{ cm}$
 $m(\hat{BAC}) = 120^\circ$



Yukarıdaki verilere göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde A köşesine göre kosinüs teoremi ni uygulayalım.

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A}$$

$$|BC|^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$$

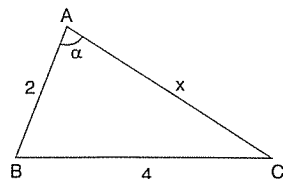
$$|BC|^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|BC|^2 = 76 \Rightarrow |BC| = 2\sqrt{19} \text{ cm bulunur.}$$

Örnek 2:

Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde,

$$\cos \alpha = -\frac{1}{4}$$



olduğuna göre, $|AC| = x$ uzunluğunu bulalım.

Çözüm:

ABC üçgeninde A köşesine göre kosinüs teoremi ni uygularsak,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha$$

$$4^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$16 = 4 + x^2 + x$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$\begin{array}{cc} x & -3 \\ x & +4 \end{array}$$

$$0 = (x-3) \cdot (x+4) \Rightarrow x = 3 \text{ br bulunur.}$$

Örnek 3:

ABCD dörtgeninde,

$$m(\hat{ABC}) = 90^\circ$$

$$|AD| = |AB| = 4 \text{ br}$$

$$|DC| = 6 \text{ br}$$

$$|BC| = 3 \text{ br}$$

olduğuna göre, $\cos \alpha$ değerini bulalım.



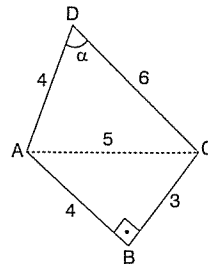
Çözüm:

Şekilde verilen dörtgende $|AC|$ doğru parçasını çizelim.

Pisagor teoreminden,

$$|AC|^2 = 4^2 + 3^2$$

$$|AC| = 5 \text{ br dir.}$$



ACD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD| \cdot |DC| \cdot \cos \alpha$$

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$48 \cdot \cos \alpha = 16 + 36 - 25$$

$$48 \cdot \cos \alpha = 27$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{16} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

ABCD yamuğunda,

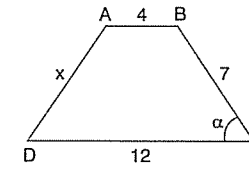
$$\cos \alpha = \frac{2}{7}$$

$$|AB| = 4 \text{ br}$$

$$|BC| = 7 \text{ br}$$

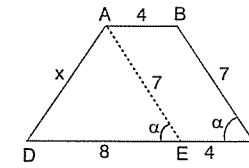
$$|DC| = 12 \text{ br}$$

olduğuna göre, $|AB| = x$ değerini bulalım.



Çözüm:

Şekilde $[BC]$ ye paralel olacak şekilde bir $[AE]$ doğru parçasını çizelim.



Bu durumda,

$$m(\hat{BCE}) = m(\hat{AED}) = \alpha \text{ olur.}$$

Ayrıca $|BC| = |AE| = 7 \text{ br}$ ve

$$|AB| = |EC| = 4 \text{ br olur.}$$

ADE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{2}{7}$$

$$x^2 = 81$$

$$x = 9 \text{ br bulunur.}$$

Çözüm:

A köşesine göre kosinüs teoremini uygularsak, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ olur.

Soruda verilen bağıntı ile birlikte kullanılırsa,

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - \sqrt{2} \cdot b \cdot c$$

$$-2bc \cos \hat{A} = -\sqrt{2} \cdot bc$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m(\hat{A}) = 45^\circ \text{ bulunur.}$$

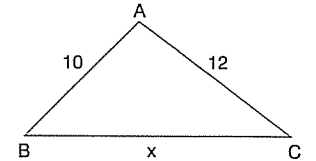
Örnek 6:

Yandaki üçgende,

$$|AB| = 10 \text{ br}$$

$$|AC| = 12 \text{ br}$$

$$\cos(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{3}$$



olduğuna göre, $|BC| = x$ değerini bulalım.

Çözüm:

Üçgenin iç açılarının toplamı 180° olduğundan,

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$$

$$m(\hat{A}) = 180 - [m(\hat{B}) + m(\hat{C})] \text{ dir.}$$

$$\text{Bu durumda, } \cos(\hat{B} + \hat{C}) = \cos[180 - \hat{A}]$$

$$\cos(\hat{B} + \hat{C}) = -\cos \hat{A}$$

$$\frac{1}{3} = -\cos \hat{A}$$

$$-\frac{1}{3} = \cos \hat{A} \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde A köşesine göre, kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos \hat{A}$$

$$x^2 = 100 + 144 - 240 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 = 244 + 80$$

$$x^2 = 324$$

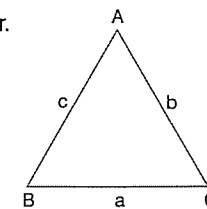
$$x = 18 \text{ br bulunur.}$$

Örnek 5:

Şekilde ABC üçgeni verilmiştir.

$$a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2} \cdot b \cdot c$$

olduğuna göre, A açısının ölçüsünü bulalım.



Bilgi Uygulama

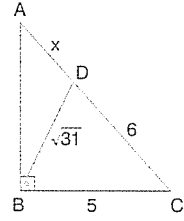
Soru 1:

Kenar uzunlukları; $|AB| = 4$ br, $|AC| = 5$ br ve $\cos \hat{A} = \frac{1}{8}$ olan bir ABC üçgeninde $|BC|$ kaç birimdir?

- ✓ A) 6 B) 7 C) 8 D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{27}{4}$

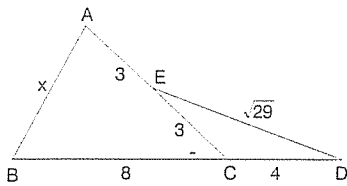
Soru 2:

Yandaki şekilde verilenlere göre, x kaç birimdir?



- A) 2 B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{5}$

Soru 3:

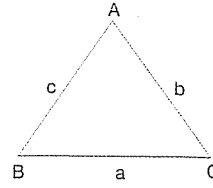


Yukarıdaki şekilde, verilenlere göre, x kaçtır?

- A) $\sqrt{50}$ B) 7 C) $\sqrt{78}$ D) 10 E) $\sqrt{84}$

Soru 4:

ABC üçgeni yandaki şekilde verilmiştir.

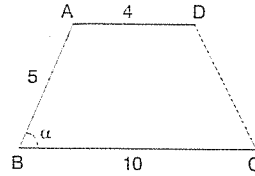


$b.(c - b) = (c - a).(c + a)$ olduğuna göre, $m(\hat{A})$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Soru 5:

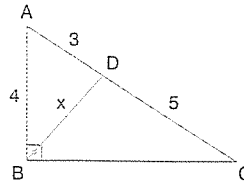
Şekildeki ABCD bir yamuk ve $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ olduğuna göre, $|DC|$ kaç birimdir?



- A) 4 B) 5 C) $\frac{11}{2}$ D) 6 E) $\frac{13}{2}$

Soru 6:

Şekilde verilen ABC üçgeninde $m(\hat{ABC}) = 90^\circ$ olduğuna göre, x kaç birimdir?



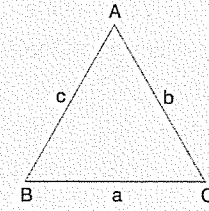
- A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{13}$ E) $3\sqrt{5}$

Bilgi

ABC üçgeni için A açısının kosinüsü,

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

ile bulunur.



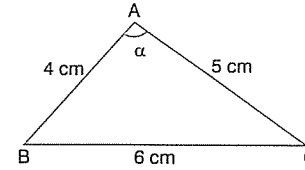
Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Bir üçgenin kenarları 4 cm, 5 cm ve 6 cm dir.

Bu üçgende en büyük iç açının kosinüsünü bulalım.

Çözüm:



Bir üçgende açı kenar bağıntılarından $m(\hat{A}) = \alpha$ en büyüktür.

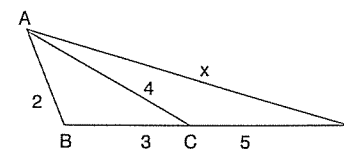
$$\cos \alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2.4.5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{8}$$

bulunur.

Örnek 2:

Yandaki şekilde,

- $|AB| = 2$ br
 $|BC| = 3$ br
 $|CD| = 5$ br
 $|AC| = 4$ br



olarak verildiğine göre, $|AD| = x$ değerini bulalım.

Çözüm:

$m(\hat{ABC}) = \alpha$ alıp önce ABC üçgeninde $\cos \alpha$ yı bulalım.

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2.3.2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

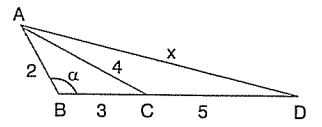
Şimdi ABD üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım.

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2. |AB|. |BD|. \cos \alpha$$

$$x^2 = 2^2 + 8^2 - 2.2.8. \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$x^2 = 76$$

$$x = 2\sqrt{19} \text{ br bulunur}$$



Örnek 3:

$[AE] \cap [BD] = \{C\}$

olmak üzere,

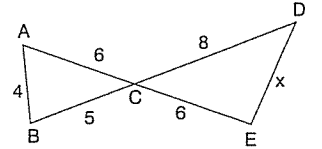
$|AC| = |CE| = 6$ br

$|AB| = 4$ br

$|BC| = 5$ br

$|CD| = 8$ br

olduğuna göre, $|DE| = x$ değerini bulalım.



Çözüm:

Ters açı özelliğinden,

$m(\hat{ACB}) = m(\hat{DCE}) = \alpha$

olsun.

ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak,

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2.6.5} = \frac{36 + 25 - 16}{60} = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

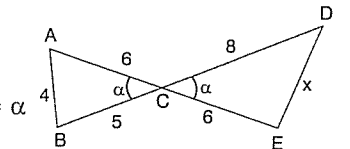
DCE üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak,

$$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6. \cos \alpha$$

$$x^2 = 64 + 36 - 2.8.6. \frac{3}{4}$$

$$x^2 = 28$$

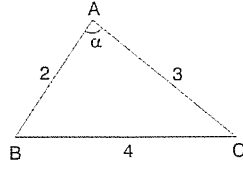
$$x = 2\sqrt{7} \text{ br bulunur.}$$



Bilgi Uygulama

Soru 1:

Yandaki şekilde verilen ABC üçgenine göre, $\cos \alpha$ kaçtır?

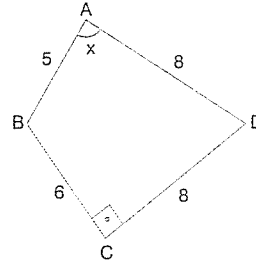


- A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{5}$ E) $-\frac{1}{4}$

Soru 2:

ABCD dörtgeninde

$m(\hat{C}) = 90^\circ$
 $|AD| = |DC| = 8$ br
 $|AB| = 5$ br
 $|BC| = 6$ br



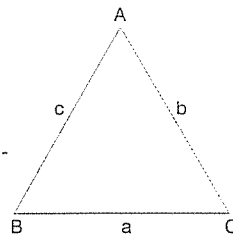
olduğuna göre, $\cos x$ kaçtır?

- A) $-\frac{11}{80}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{9}{80}$ D) $-\frac{1}{10}$ E) $-\frac{7}{80}$

Soru 3:

Şekilde verilen ABC üçgeninde,

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{b \cdot c} = -\sqrt{3}$$



olduğuna göre, A açısı kaç derecedir?

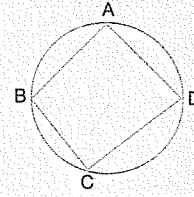
- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Bilgi

Kirişler dörtgeninde karşılıklı açların toplamı 180° dir.

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$$

$$m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$$



Bilgi Kavrama

Örnek 1:

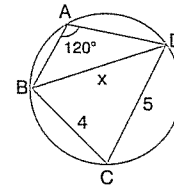
ABCD kirişler dörtgenidir.

$$m(\hat{A}) = 120^\circ$$

$$|BC| = 4$$
 br

$$|DC| = 5$$
 br

olduğuna göre, $|BD| = x$ değerini bulalım.



Çözüm:

$$m(\hat{A}) = 120^\circ \text{ ise } m(\hat{C}) = 60^\circ \text{ dir.}$$

BDC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 16 + 25 - 40 \cdot \cos 60^\circ$$

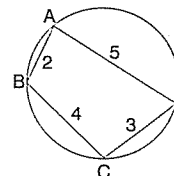
$$x^2 = 41 - 40 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 21$$

$$x = \sqrt{21} \text{ br bulunur.}$$

Örnek 2:

Şekilde verilen ABCD kirişler dörtgeninde $\cos \hat{B}$ değerini bulalım.



Çözüm:

$$\text{Şekilde } m(\hat{B}) = \alpha \text{ ise}$$

$$m(\hat{D}) = 180^\circ - \alpha \text{ dir.}$$

$$|AC| = x \text{ br olsun.}$$

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \text{ olur.}$$

ADC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Bu iki ifadenin eşitliği ile

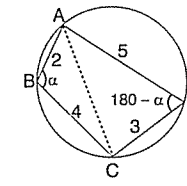
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \text{ birlikte kullanılırsa,}$$

$$2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\cos \alpha)$$

$$20 - 16 \cdot \cos \alpha = 34 + 30 \cdot \cos \alpha$$

$$-14 = 46 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{7}{23} \text{ bulunur.}$$



Bilgi Uygulama

Soru 1:

ABCD kirişler dörtgenidir.

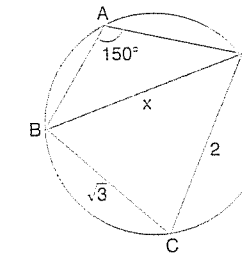
$$m(\hat{A}) = 150^\circ$$

$$|BC| = \sqrt{3}$$

$$|DC| = 2$$
 br

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$



Soru 2:

Şekilde O merkezli yarım çember ve ABCD dörtgeni verilmiştir.

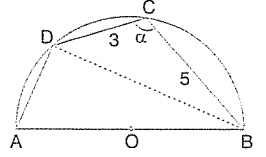
$$|AD| = |OB|$$

$$|DC| = 3$$
 br

$$|BC| = 5$$
 br

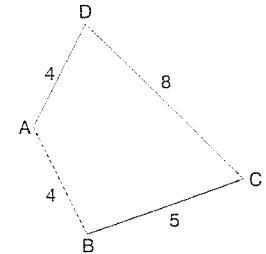
olduğuna göre, $|DB|$ kaç birimdir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



Soru 3:

Şekildeki kirişler dörtgeninde A açısının bulunduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $(60^\circ, 75^\circ)$ B) $(75^\circ, 90^\circ)$ C) $(90^\circ, 120^\circ)$
 D) $(120^\circ, 135^\circ)$ E) $(150^\circ, 180^\circ)$

Bilgi

Üç boyutlu cisimlerde uygun dik üçgenler oluşturularak ilgili üçgenin kenarları hesaplanıp kosinüs teoremi uygulanır.

Bilgi Kavrama

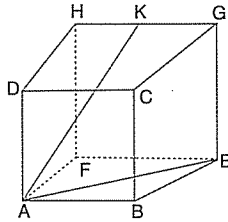
Örnek 1:

Bir kenarı 2 br olan
şekildeki küpte,

$$|HK| = |KG|$$

$$m(\widehat{KAE}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\cos \alpha$ değerini bulalım.



Çözüm:

K ve E noktalarını birleştirelim.

Pisagor teoreminden,

$$|KE|^2 = |KG|^2 + |GE|^2$$

$$|KE|^2 = 1^2 + 2^2$$

$$|KE| = \sqrt{5} \text{ br olur.}$$

Ayrıca,

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2$$

$$|AE|^2 = 4 + 4$$

$$|AE| = 2\sqrt{2} \text{ br olur.}$$

DHK dik üçgeninde,

$$|DK|^2 = 2^2 + 1^2$$

$$|DK| = \sqrt{5} \text{ br}$$

ADK dik üçgeninde,

$$|AK|^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$|AK| = 3 \text{ br bulunur.}$$

AKE üçgeninde

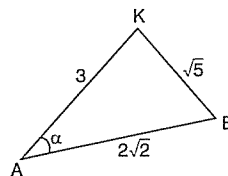
kosinüs teoremi

uygulanırsa,

$$(\sqrt{5})^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$12\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 12$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bulunur.}$$



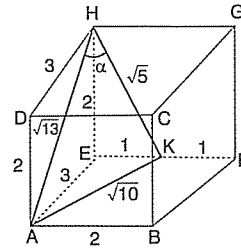
Örnek 2:

Şekilde ayrıtları 2 br, 2 br
ve 3 br olan dikdörtgenler
prizması verilmiştir.

$$|EK| = |KF|$$

olduğuna göre, $\cos(\widehat{AHK})$ yı bulalım.

Çözüm:



A ve K noktalarını birleştirelim.

Pisagor teoreminden,

$$|AH|^2 = 3^2 + 2^2$$

$$|AH| = \sqrt{13} \text{ br}$$

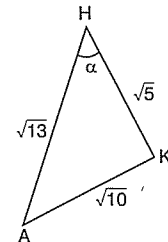
$$|HK|^2 = 2^2 + 1^2$$

$$|HK| = \sqrt{5} \text{ br}$$

$$|AK|^2 = 3^2 + 1^2$$

$$|AK| = \sqrt{10} \text{ br bulunur.}$$

AHK üçgeninde kosinüs teoremi
uygulanırsa,



$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \alpha$$

$$2\sqrt{65} \cdot \cos \alpha = 8$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

ABCDEFGH bir küptür.

$$|BK| = |KE|$$

olduğuna göre,

$\cos(\widehat{GAK})$ kaçtır?

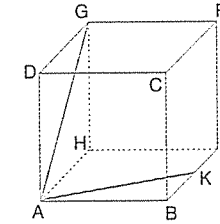
A) $\frac{\sqrt{10}}{9}$

B) $\frac{\sqrt{10}}{20}$

C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

E) $\frac{\sqrt{10}}{12}$



Soru 2:

Şekildeki dik konide,

$$|OK| = \sqrt{11} \text{ br}$$

$$|OC| = \sqrt{5} \text{ br}$$

$$m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$$

olduğuna göre,

$\cos(\widehat{AKC})$ kaçtır?

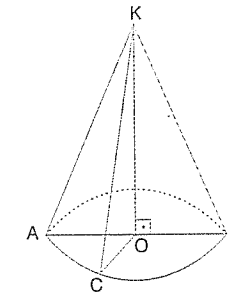
A) $\frac{13}{16}$

B) $\frac{27}{32}$

C) $\frac{7}{8}$

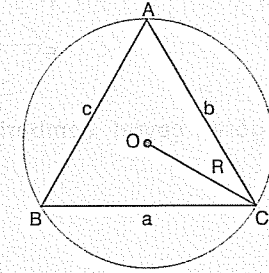
D) $\frac{29}{32}$

E) $\frac{15}{16}$



Sinüs Teoremi

Bilgi



Bir üçgende; herhangi bir kenarın uzunluğunun, bu kenarın karşısındaki açının sinüsüne oranı sabittir ve bu oran üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir. (R: yarıçap)

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2 \cdot R \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

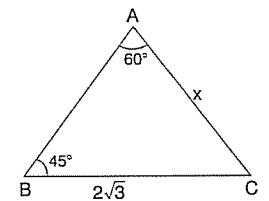
Yanda verilen

ABC üçgeninde,

$$|BC| = 2\sqrt{3} \text{ br}$$

$$m(\hat{A}) = 60^\circ$$

$$m(\hat{B}) = 45^\circ$$



olduğuna göre, $|AC| = x$ değerini bulalım.

Çözüm:

Sinüs teoreminden,

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = 2\sqrt{2} \text{ br bulunur.}$$

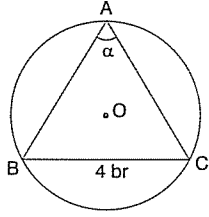
Örnek 2:

Yandaki şekilde,

$$|BC| = 4 \text{ br}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{10}$$

olduğuna göre, çevrel çemberin yarıçapını bulalım.



Çözüm:

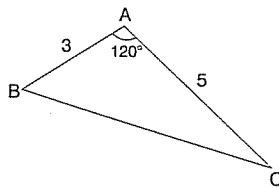
Sinüs teoreminden,

$$\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{4}{\frac{7}{10}} = 2R \Rightarrow R = \frac{20}{7} \text{ br bulunur.}$$

Örnek 3:

Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre, çevrel çemberin yarıçapını bulalım.



Çözüm:

Kosinüs teoremi yardımıyla önce |BC| yi bulalım.

$$|BC| = x \text{ denilirse,}$$

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 34 + 15$$

$$x = 7 \text{ br olur.}$$

Sinüs teoreminden,

$$\frac{|BC|}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{3}} \text{ br bulunur.}$$

Örnek 4:

Çevresi 24 br olan ABC üçgeninde,

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

olduğuna göre, çevrel çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm:

Sinüs teoreminden,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

Orantı özelliğinden,

$$\frac{a + b + c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

$$\frac{24}{\frac{9}{2\sqrt{3}}} = 2R \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ br bulunur.}$$

Örnek 5:

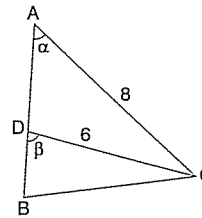
Şekildeki ABC üçgeninde,

$$|AC| = 8 \text{ br}$$

$$|DC| = 6 \text{ br}$$

$$m(\hat{DAC}) = \alpha$$

$$m(\hat{BDC}) = \beta$$



olduğuna göre, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ oranını bulalım.

Çözüm:

ADC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa,

$$\frac{6}{\sin(\hat{DAC})} = \frac{8}{\sin(\hat{ADC})} \Rightarrow \frac{\sin(\hat{ADC})}{\sin(\hat{DAC})} = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$

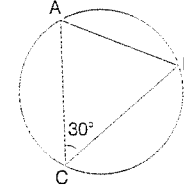
$$\Rightarrow \frac{\sin(\hat{ADC})}{\sin(\hat{DAC})} = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\text{olup, } \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

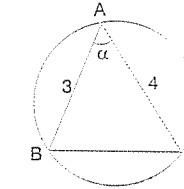
Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 4 br olduğuna göre, |AB| kaç birimdir?



- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

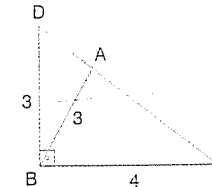
Yandaki şekilde verilenlere göre, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ olduğuna göre, çevrel çemberin yarıçapı kaç birimdir?



- A) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{10\sqrt{5}}{10}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

Soru 3:

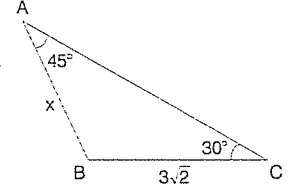
Şekilde $m(\hat{B}) = 90^\circ$ olduğuna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin çapı kaç birimdir?



- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Soru 4:

Yandaki şekilde verilenlere göre, x kaç birimdir?



- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

Soru 5:

Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin çevresi 16π cm dir.

$$\sin(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{3}{8}$$

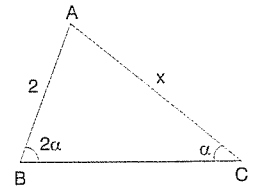
olduğuna göre, |BC| kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Soru 6:

Şekilde verilen ABC üçgeninde,

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} \text{ ve}$$



olduğuna göre, x kaçtır?

(Yol gösterme : $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$)

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 4 E) 5

Sinüs Alan Formülü:

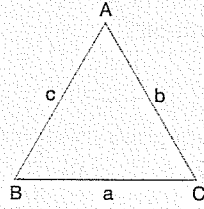
Bilgi

Yandaki ABC üçgeninin alanı S olmak üzere,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

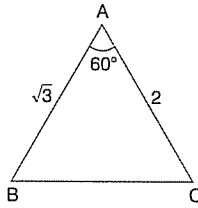
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \hat{B} \text{ dir.}$$



Bilgi Kavrama

Örnek 1:

ABC üçgeninde verilenlere göre, A(ABC) yi bulalım.



Çözüm:

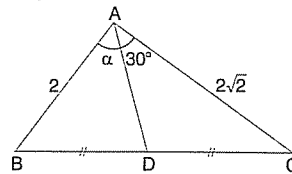
$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

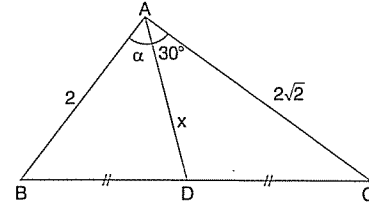
Örnek 2:

ABC bir üçgen
|BD| = |DC|
|AC| = $2\sqrt{2}$ birim,
|AB| = 2 birim
 $m(\widehat{BAD}) = \alpha$
 $m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$



Yukarıda verilenlere göre, $\sin \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:



Tabanı ve yüksekliği eşit olan üçgenlerin alanları eşit olduğundan,

$$A(ABD) = A(ADC)$$

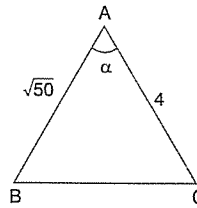
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

Şekilde verilen ABC üçgeninin alanı 10 br^2 olduğuna göre, $\sin \alpha$ değerini bulalım.



Çözüm:

Sinüs alan formülünden,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot 4 \cdot \sin \alpha$$

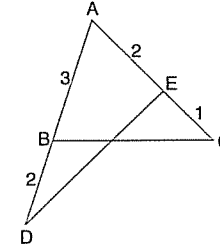
$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

Şekilde verilenlere göre,

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} \text{ oranını bulalım.}$$



Çözüm:

Sinüs alan formülünden,

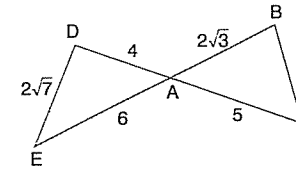
$$A(ADE) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sin \hat{A}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin \hat{A}$$

Buna göre,

$$\frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{5 \cdot \sin \hat{A}}{\frac{9}{2} \cdot \sin \hat{A}} = \frac{10}{9} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:



$[EB] \cap [DC] = \{A\}$ olmak üzere,

Şekilde verilenlere göre, A(ABC) yi bulalım.

Çözüm:

$m(\widehat{DAE}) = \alpha$ diyelim.

DAE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$\cos \alpha = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olduğundan,

Sinüs alan formülünden,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{15}{2} \text{ br}^2$$

Örnek 6:

Kısa kenarı 5 cm, uzun kenarı 8 cm olan bir paralelkenarın, iki kenarı arasındaki açısı 30° olduğuna göre, paralelkenarın alanını bulalım.

Çözüm:

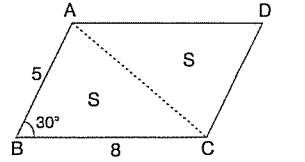
Paralelkenarın alanı ABC üçgeninin alanının 2 katıdır.

Buna göre, alan bağıntısından,

$$\text{Alan}(ABCD) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ \right)$$

$$\text{Alan}(ABCD) = 40 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Alan}(ABCD) = 20 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



Örnek 7:

Yandaki şekilde,

$$A(ABC) = 96 \text{ br}^2$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$|AC| = 20 \text{ br}$$

olduğuna göre, |AB| yi bulalım.

Çözüm:

$\cot \alpha = \frac{4}{3}$ olacak şekilde bir dik üçgen alalım.

Buna göre,

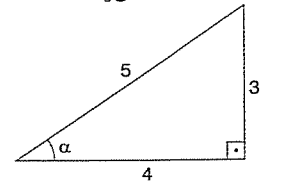
$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ olur.}$$

Alan formülünden,

$$96 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

$$96 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot 20 \cdot \frac{3}{5}$$

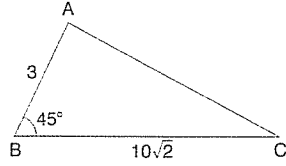
$$|AB| = 16 \text{ br} \text{ bulunur.}$$



Bilgi Uygulama

Soru 1:

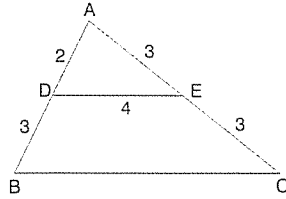
Yandaki şekilde verilenlere göre, $A(ABC)$ kaç birimkaredir?



- A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Soru 2:

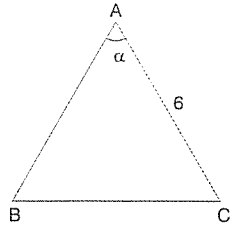
Yandaki şekilde verilenlere göre, $A(ABC)$ kaç birimkaredir?



- A) $\frac{9\sqrt{15}}{4}$ B) $\frac{13\sqrt{15}}{4}$ C) $\frac{15\sqrt{15}}{4}$ D) $\frac{18\sqrt{15}}{7}$ E) $\frac{20\sqrt{15}}{3}$

Soru 3:

Yandaki şekilde, $A(ABC) = \frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ br}^2$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
 $|AC| = 6 \text{ br}$



olduğuna göre, $|BC|$ kaç birimkaredir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Soru 4:

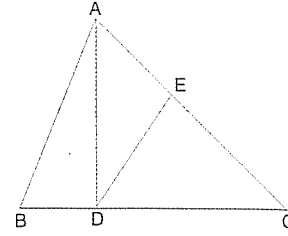
Yandaki şekilde,

$$\sin(\widehat{ABD}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|BD| = 3 \text{ br}$$

$$|DC| = |AB| = 6 \text{ br}$$

$$|AE| = |EC|$$



olduğuna göre, $A(DEC)$ kaç birimkaredir?

- A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{5}$ E) 5

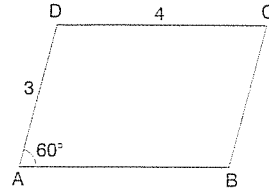
Soru 5:

Şekildeki ABCD paralelkenarında;

$$|AD| = 3 \text{ cm},$$

$$|DC| = 4 \text{ cm},$$

$$m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$$



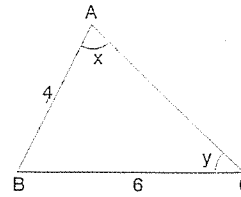
olduğuna göre, paralelkenarın alanı kaç cm^2 dir?

- A) 16 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) $12\sqrt{3}$ E) 24

Soru 6:

Yandaki üçgende,

$$\sin(x + y) = \frac{3}{8}$$



olduğuna göre, $A(ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) $\frac{11}{2}$ E) 6

1. Bir ABC üçgeninde A açısının karşısındaki kenar a, B açısının karşısındaki kenar b olmak üzere;

$$a = 6 \text{ birim}, b = 4 \text{ birim ve } \sin A = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, $\sin(A + C)$ kaçtır?

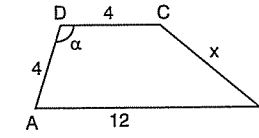
- A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

2. ABCD yamuktur.

$$|AD| = |DC| = 4$$

$$|AB| = 12$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{8}$$



olduğuna göre, $|BC| = x$ kaç birimdir?

- A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

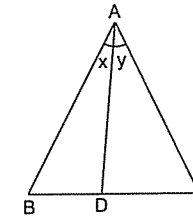
3. ABC üçgeninde,

$$2|AB| = 3|AC|$$

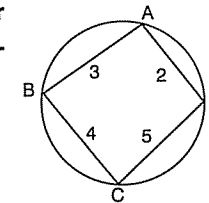
$$|DC| = 2|BD|$$

olduğuna göre, $\frac{\sin x}{\sin y}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

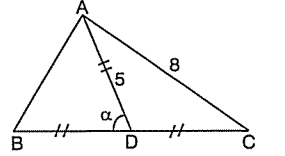


4. Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde $\cos(\widehat{C})$ kaçtır?



- A) $\frac{23}{25}$ B) $\frac{19}{26}$ C) $\frac{7}{13}$ D) $\frac{14}{29}$ E) $\frac{5}{7}$

5. $|AC| = 8 \text{ br}$
 $|AD| = 5 \text{ br}$
 $|AD| = |BD| = |DC|$



olduğuna göre, $\cos \alpha$ nın değeri kaçtır?

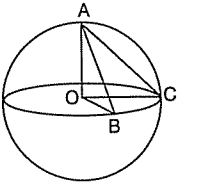
- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{15}{17}$ D) $\frac{7}{25}$ E) $\frac{8}{25}$

6. Yandaki şekilde O merkezli bir küre verilmiştir.

$$[AO] \perp [OB]$$

$$[AO] \perp [OC]$$

$$m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$$



olduğuna göre, $\cos(\widehat{BAC})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

7. Yandaki ABC üçgeninde,

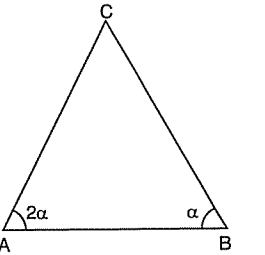
$$|AC| = 5 \text{ ve } |BC| = 6$$

$$m(\widehat{CAB}) = 2\alpha$$

$$m(\widehat{CBA}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$



8. Yanda verilen üçgende

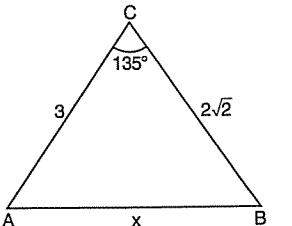
$$|AC| = 3,$$

$$|BC| = 2\sqrt{2}$$

$$|AB| = x$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $\sqrt{29}$ D) $\sqrt{31}$ E) $4\sqrt{2}$



9. Şekilde, ABC ve CDE üçgenleri verilmiştir.

$$[AD] \cap [BE] = \{C\}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 5 B) 7 C) $\sqrt{42}$ D) $\sqrt{46}$ E) $5\sqrt{2}$

10. Şekildeki ABCDA'B'C'D' küpünde E, orta noktadır.

$$m(\widehat{D'EA}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\cos \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

11. Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre, x kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{17}{4}$

12. Yandaki şekilde ABCD paralelkenardır.

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$|DA| = 8 \text{ birim}$$

$$|EF| = 4 \text{ birim}$$

$$|FC| = |FB|$$

olduğuna göre, $|EB| = x$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{21}{4}$

13. Yandaki şekilde verilen ABC üçgenine göre, $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$ olduğuna göre, A açısı kaç derecedir?

- A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

14. Şekildeki ABC üçgeninde,

$$a^2 - c^2 = b(b + \sqrt{3}c)$$

olduğuna göre, A açısı kaç derecedir?

- A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

15. ABC bir üçgen, $|AD| = |BD| = |DC|$
 $|AB| = 8$ birim
 $|BD| = 5$ birim
 $|EC| = 2$ birim

olduğuna göre, $|ED|$ kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{17}$ D) 4 E) $\sqrt{11}$

16. Yandaki şekilde $A(ABC) = 2\sqrt{3} \text{ br}^2$
 olduğuna göre, $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $3\sqrt{3}$

1. Yandaki şekilde,
 $\cot \alpha = \frac{1}{2}$
 $|AC| = 2\sqrt{5}$ br
 $|BC| = 5$ br

olduğuna göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) 3

2. ABCD bir yamuktur.
 $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$

olduğuna göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) 8 B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{13}{2}$ D) 6 E) $\frac{11}{2}$

3. Şekildeki O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde,
 $|DE| = 2|OD| = 2|DB| = 2$ br

olduğuna göre, $|AE|$ kaç birimdir?

- A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{15}$

4. ABC üçgeninde
 $|AB| = 4$ br
 $|DC| = 6$ br
 $m(\widehat{BAD}) = 45^\circ$
 $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$
 $A(ABD) = 8 \text{ br}^2$

olduğuna göre, $A(ADC)$ kaç birimkaredir?

- A) $4\sqrt{5}$ B) 22 C) $6\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{7}$ E) $7\sqrt{6}$

5. Şekildeki ABCD kirisler dörtgeninde verilenlere göre, x kaçtır?

- A) $\sqrt{\frac{33}{7}}$ B) $\sqrt{\frac{55}{7}}$ C) 2 D) $\sqrt{\frac{55}{2}}$ E) 5

6. Bir üçgenin kenarları 4 cm, 5 cm, 6 cm dir.

Bu üçgende en büyük iç açının kosinüs değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0,125 B) 0,3 C) 0,7 D) 0,75 E) 0,8

7. ABC üçgeninin çevresi 12 br ve

$$\sin \widehat{A} + \sin \widehat{C} = 2 \sin \widehat{B}$$

olduğuna göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

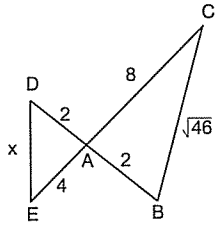
- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) $2\sqrt{5}$

8. ABC bir üçgen,
 $|DC| = 2|BD|$
 $|AC| = 3|AB|$

olduğuna göre, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) 2

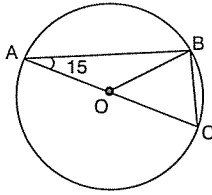
9. Yandaki şekilde ADE ve ABC üçgenleri verilmiştir. E, A, C ve D, A, B noktaları doğrusaldır.



Buna göre, x kaç birimdir?

- A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 3 D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

10. Şekildeki O merkezli birim çemberin çapı [AC] dir.



$$m(\widehat{OAB}) = 15^\circ$$

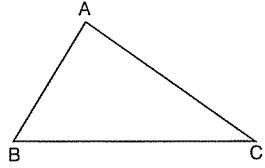
olduğuna göre, Alan(OBC) kaç birimkaredir?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

11. ABC üçgeninde,

$$|BC| = 3 \cdot |AB|$$

$$\tan \hat{A} = 2 \cdot \tan \hat{C}$$



olduğuna göre, $\frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{A}}$ kaçtır?

- A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

12. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c birimdir.

$$(a + b - c) \cdot (a + b + c) = 3ab$$

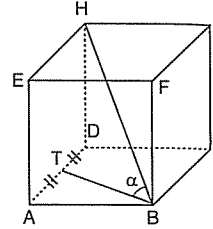
olduğuna göre, $m(\hat{C})$ kaç derecedir?

- A) 90 B) 75 C) 60 D) 45 E) 30

13. ABCDEFGH bir küp

$$|AT| = |TD|$$

olduğuna göre, $\tan(\widehat{TBH})$ kaçtır?



- A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

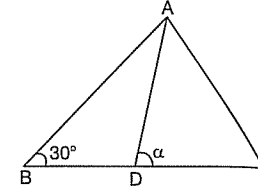
14. Yandaki ABC üçgeninde [AD] kenarortaydır.

$$|BD| = 2 \text{ cm}$$

$$|AB| = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$m(\widehat{ADC}) = \alpha$$

$$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ \text{ dir.}$$

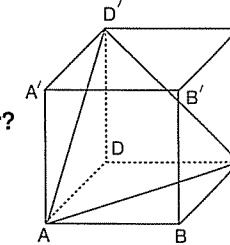


Buna göre, $\tan \alpha$ nın değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

15. ABCDA'B'C'D' bir küptür.

|AB| = 4 br olduğuna göre, A(AD'C) kaç br² dir?



- A) $8\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) 12 D) 9 E) $4\sqrt{3}$

16. ABCDEFGH bir küp

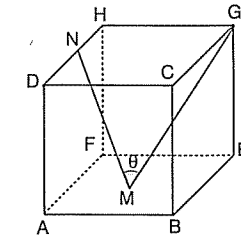
$$|DN| = |NH| \text{ ve}$$

$$M \text{ noktası ABEF}$$

$$\text{karesinin merkezi}$$

$$\text{olduğuna göre,}$$

$$\cos \theta \text{ değeri kaçtır?}$$



- A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

TOPLAM - FARK FORMÜLLERİ

Bilgi

- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$\sin 75^\circ$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) \text{ yazarsak,}$$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$\sin 15^\circ$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) \text{ yazarsak,}$$

$$\sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\cos 41^\circ \cdot \cos 19^\circ - \sin 41^\circ \cdot \sin 19^\circ$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Verilen ifade $\cos(41^\circ + 19^\circ)$ ifadesinin açılımıdır.

$$\begin{aligned} \cos 41^\circ \cdot \cos 19^\circ - \sin 41^\circ \cdot \sin 19^\circ &= \cos(41^\circ + 19^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$K = \frac{\cos 40^\circ \cdot \sin 80^\circ + \sin 40^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 37^\circ \cdot \cos 7^\circ - \sin 7^\circ \cdot \cos 37^\circ}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Pay kısmındaki ifadede, $\sin 80^\circ$ yerine $\cos 10^\circ$ yazılabilir.

$$K = \frac{\cos 40^\circ \cdot \sin 80^\circ + \sin 40^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 37^\circ \cdot \cos 7^\circ - \sin 7^\circ \cdot \cos 37^\circ}$$

$$K = \frac{\cos 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 37^\circ \cdot \cos 7^\circ - \sin 7^\circ \cdot \cos 37^\circ}$$

Bu ifadede pay kısmı $\cos(40^\circ - 10^\circ)$ ifadesinin açılımı, payda kısmı da $\sin(37^\circ - 7^\circ)$ ifadesinin açılımıdır.

$$K = \frac{\cos(40^\circ - 10^\circ)}{\sin(37^\circ - 7^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$0^\circ < a + b < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{3}$$

$$\sin b \cdot \cos a = \frac{1}{6}$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm:

Verilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{3}$$

$$\sin b \cdot \cos a = \frac{1}{6}$$

+

$$\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\sin(a + b) = \frac{1}{2}$$

$$a + b = 30^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$\frac{\sin 20^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \text{ yazalım.}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(20^\circ + 30^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 40^\circ} = \frac{2 \sin 50^\circ}{\sqrt{3} \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$\sin 37^\circ \cdot \cos 23^\circ + \sin 23^\circ \cdot \cos 37^\circ$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) -1

Soru 2:

$$\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{24} - \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{24}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soru 3:

$$\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2 \cdot \sin(x - 60^\circ)$ B) $2 \cdot \cos(x - 30^\circ)$ C) $\sin(x + 60^\circ)$
D) $\cos(x + 30^\circ)$ E) $2 \cdot \sin x$

Soru 4:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{3}{4}$$

$$\sin b \cdot \cos a = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $a - b$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

Soru 5:

$$\cos(60^\circ - x) \cdot \cos x + \sin(x - 60^\circ) \cdot \sin x$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soru 6:

x dar açıdır.

$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

olduğuna göre, $\cos(x + 45^\circ)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Bilgi

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{1}{\tan(a \pm b)}$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$\tan 15^\circ$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$\cot 105^\circ$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cot 105^\circ = \frac{1}{\tan 105^\circ}$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \text{ bulunur.}$$

$$\cot 105^\circ = \frac{1}{\tan 105^\circ}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\tan(x + 45^\circ) = 2$$

olduğuna göre, $\tan x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan(x + 45^\circ) = 2$$

$$\frac{\tan x + \tan 45^\circ}{1 - \tan x \cdot \tan 45^\circ} = 2$$

$$\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 2$$

$$\tan x + 1 = 2 - 2 \cdot \tan x$$

$$3 \tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\cot x = \frac{1}{3}$$

$$\cot y = 2$$

olduğuna göre, $\tan(x - y)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cot x = \frac{1}{3} \text{ ise } \tan x = 3$$

$$\cot y = 2 \text{ ise } \tan y = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$\tan\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2}\right)$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = 45^\circ \text{ dir.}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 60^\circ \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\tan\left(\underbrace{\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\theta} + \underbrace{\arccos \frac{1}{2}}_{\alpha}\right) = \tan(\theta + \alpha)$$

$$\begin{aligned} \tan(45^\circ + 60^\circ) &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

$\frac{a}{3}$ dar açı olmak üzere,

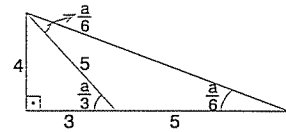
$$\tan \frac{a}{3} = \frac{4}{3}$$

olduğuna göre, $\tan \frac{a}{2} + \cot \frac{a}{2}$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} \text{ yazılırsa,}$$

$$\tan\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right) + \cot\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right) \text{ yı bulalım.}$$



$$\tan \frac{a}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \frac{a}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\tan\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right) = \frac{\tan \frac{a}{3} + \tan \frac{a}{6}}{1 - \tan \frac{a}{3} \cdot \tan \frac{a}{6}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{11}{2}$$

$$\cot\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right)} = \frac{2}{11}$$

$$\tan\left(\frac{a}{2}\right) + \cot\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{11}{2} + \frac{2}{11} = \frac{125}{22} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \cdot \tan \frac{\pi}{12}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

Soru 2:

x ve y dar açılarıdır.

$$\tan x = \frac{1}{2} \text{ ve } \tan y = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $x + y$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 135

Soru 3:

$$\frac{\tan(30^\circ - x) + \tan(30^\circ + x)}{1 - \tan(30^\circ - x) \cdot \tan(30^\circ + x)}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin x$ B) $\tan x$ C) $\cos(x - 30)$
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Soru 4:

$$\cot a = 2$$

olduğuna göre, $\tan(135^\circ - a)$ değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

Soru 5:

A, B ve C açıları bir üçgenin iç açılarıdır.

$$\frac{\tan A \cdot \tan B - 1}{\tan A + \tan B} = 1$$

olduğuna göre, $\sin C \cdot \cos C$ çarpımı kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soru 6:

$$\frac{\tan(m + n) \cdot \tan(m - n) - 1}{\tan(m + n) + \tan(m - n)}$$

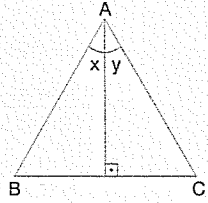
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan 2m$ B) $\cot 2m$ C) $-\cot 2n$
D) 1 E) $-\cot 2m$

Bilgi

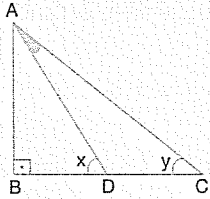
Geometrik sorularda ilgili açı, iki açının toplamı ya da farkı şeklinde yazıldıktan sonra toplam-fark formüllerinden yararlanılarak soru çözülür.

Örneğin, aşağıdaki üçgende;



$\sin(\widehat{BAC}) = \sin(x + y)$ şeklinde yazılır.

Ayrıca, aşağıdaki üçgende

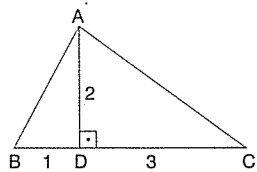


$\tan(\widehat{DAC}) = \tan(x - y)$ şeklinde yazılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Şekildeki ABC üçgeni-
nin [BC] kenarına ait
yüksekliği [AD] oldu-
ğuna göre, $\tan(\widehat{BAC})$
değerini bulalım.



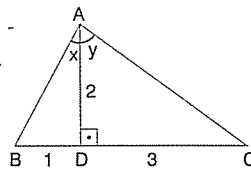
Çözüm:

$m(\widehat{BAC}) = x + y$ denilirse,

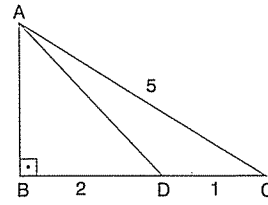
$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{3}{4}} = 8 \text{ bulunur.}$$

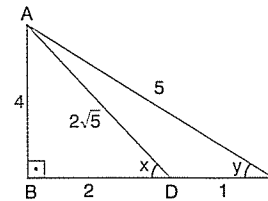


Örnek 2:



Yukarıdaki şekilde verilen ABC diküçgeninde
 $\sin(\widehat{DAC})$ değerini bulalım.

Çözüm:



Pisagor teoreminden,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$25 = |AB|^2 + 9 \Rightarrow |AB| = 4 \text{ br}$$

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2$$

$$|AD|^2 = 16 + 4 \Rightarrow |AD| = 2\sqrt{5} \text{ br}$$

$$m(\widehat{DAC}) + y = x \text{ (ADC üçgeninin dış açısı)}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{DAC}) = x - y \text{ olduğundan,}$$

$$\sin(\widehat{DAC}) = \sin(x - y)$$

$$= \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{12}{10\sqrt{5}} - \frac{8}{10\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{10\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{10\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{25} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

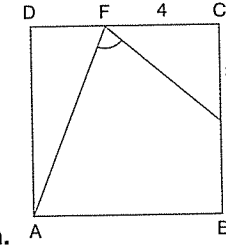
Şekildeki ABCD karesinde,

$$|CE| = |EB| = 3 \text{ br}$$

$$|FC| = 4 \text{ br}$$

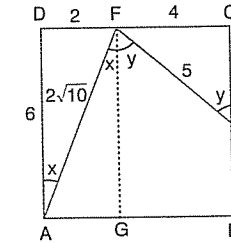
olduğuna göre,

$\cos(\widehat{AFE})$ değerini bulalım.



Çözüm:

[CB] // [FG] olacak şekilde [FG] çizelim.



Şekilden, $m(\widehat{AFE}) = x + y$ dir.

$$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{GFA}) = x \text{ (iç - ters açılar)}$$

$$m(\widehat{FEC}) = m(\widehat{GFE}) = y \text{ (iç - ters açılar)}$$

ABCD kare olduğundan,

$$|DA| = |BC| = 6 \text{ br ve } |DF| = 6 - 4 = 2 \text{ br dir.}$$

Pisagor teoreminden,

$$|AF|^2 = |DA|^2 + |DF|^2$$

$$|AF|^2 = 6^2 + 2^2$$

$$|AF| = 2\sqrt{10} \text{ br}$$

$$|FE|^2 = |FC|^2 + |CE|^2$$

$$|FE|^2 = 4^2 + 3^2$$

$$|FE| = 5 \text{ br}$$

$$\cos(\widehat{AFE}) = \cos(x + y)$$

$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

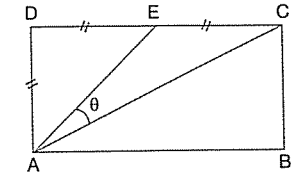
$$= \frac{6}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{18}{10\sqrt{10}} - \frac{8}{10\sqrt{10}}$$

$$= \frac{10}{10\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:



ABCD bir dikdörtgen,

$$|AB| = 4 \text{ br}$$

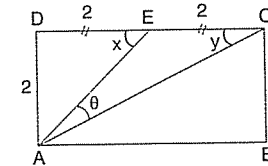
$$|DE| = |EC| = |DA|$$

$$m(\widehat{EAC}) = \theta$$

olduğuna göre, $\cot \theta$ yı bulalım.

Çözüm:

$$|AB| = 4 \text{ br ise, } |DE| = |EC| = |DA| = 2 \text{ br}$$



$\widehat{AED}$ açısı, AEC üçgeninin dış açısı olduğundan,

$$\theta + y = x \Rightarrow \theta = x - y \text{ dir.}$$

$$\tan \theta = \tan(x - y)$$

$$= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{4}}{1 + 1 \cdot \frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Buradan da,

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

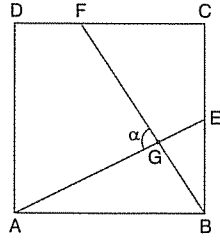
ABCD bir karedir.

$$|CF| = 2|DF|$$

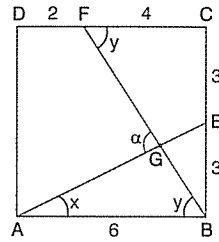
$$|EC| = |BE|$$

$$m(\widehat{AGF}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\cot \alpha$ yı bulalım.



Çözüm:



$$|DF| = 2 \text{ br alınır,}$$

$$|CF| = 2 \cdot |DF|$$

$$= 2 \cdot 2 = 4 \text{ br ve}$$

$$|EC| = |BE| = 3 \text{ br olur.}$$

$\widehat{AGF}$ açısı, $\triangle ABG$ üçgeninin dış açısı olduğundan,

$$x + y = \alpha \text{ olur.}$$

$$\tan \alpha = \tan(x + y)$$

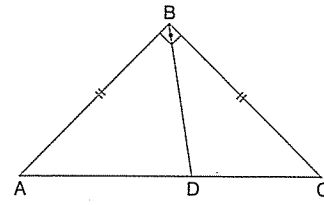
$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{3}{6} + \frac{6}{4}}{1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{4}}$$

$$= \frac{2}{1} = 2 \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:



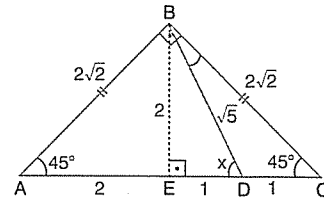
ABC ikizkenar dik üçgendir.

$$[AB] \perp [BC]$$

$$|AC| = 4 \cdot |DC|$$

olduğuna göre, $\cos(\widehat{CBD})$ değerini bulalım.

Çözüm:



$$m(\widehat{CBD}) = x - 45^\circ \text{ dir.}$$

$[BE] \perp [AC]$ olacak şekilde $[BE]$ çizilirse,

$$|AE| = |BE| = 2 \text{ br ve } |ED| = 1 \text{ br}$$

BEC ikizkenar dik üçgeninde $|BC| = 2\sqrt{2}$ br olur.

Pisagor teoreminden,

$$|BD|^2 = |BE|^2 + |ED|^2$$

$$|BD|^2 = 2^2 + 1^2$$

$$|BD| = \sqrt{5} \text{ br bulunur.}$$

$\widehat{BDE}$ açısı, $\triangle CBD$ üçgeninin dış açısı olduğundan,

$$m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{DCB})$$

$$\Rightarrow x = m(\widehat{CBD}) + 45^\circ \text{ dir.}$$

$$\cos(\widehat{CBD}) = \cos(x - 45^\circ)$$

$$= \cos x \cdot \cos 45^\circ + \sin x \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ bulunur.}$$

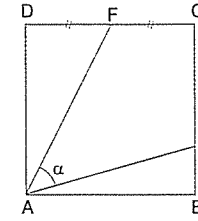
Örnek 7:

ABCD bir karedir.

$$\frac{|EB|}{|EC|} = \frac{1}{3}$$

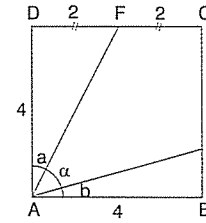
$$|DF| = |FC|$$

$$m(\widehat{EAF}) = \alpha$$



olduğuna göre, $\cot \alpha$ değerini bulalım.

Çözüm:



$$|EB| = 1 \text{ br alınır,}$$

$$|EC| = 3 \text{ br ve}$$

$$|DF| = |FC| = 2 \text{ br olur.}$$

$$\alpha + a + b = 90^\circ \text{ olduğundan}$$

$$\alpha = 90^\circ - (a + b) \text{ olur.}$$

$$\cot \alpha = \cot[90^\circ - (a + b)] = \tan(a + b) \text{ dir.}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$= \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7}$$

$$= \frac{6}{7} \text{ bulunur.}$$

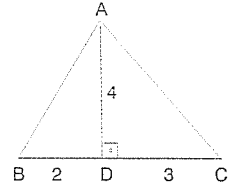
Bilgi Uygulama

Soru 1:

Yandaki şekilde verilen

ABC üçgenine göre,

$\cot(\widehat{BAC})$ kaçtır?

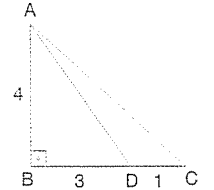


- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

Soru 2:

Yandaki şekilde verilenlere

göre, $\sin(\widehat{DAC})$ kaçtır?

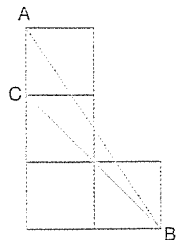


- A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

Soru 3:

Yandaki şekil özdeş 4 kareden oluşmuştur.

Buna göre, $\cot(\widehat{ABC})$ kaçtır?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 4:

ABCD bir karedir.

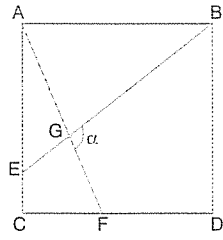
$$4|EC| = |AE|$$

$$3|FC| = 2|FD|$$

$$m(\widehat{FGB}) = \alpha$$

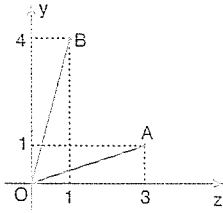
olduğuna göre, $\cot \alpha$ nın değeri kaçtır?

- A) $-\frac{10}{33}$ B) $-\frac{3}{11}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{5}$ E) $-\frac{1}{11}$



Soru 5:

Yandaki şekle göre, $\sin(\widehat{AOB})$ değeri kaçtır?



- A) $\frac{12}{\sqrt{170}}$ B) $\frac{11}{\sqrt{170}}$ C) $\frac{9}{\sqrt{170}}$
D) $\frac{5}{\sqrt{170}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{170}}$

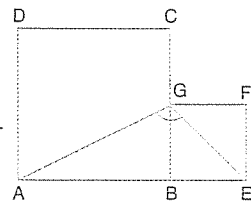
Soru 6:

ABCD ve BEFG karedir.

$$\frac{|GB|}{|GC|} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\tan(\widehat{AGE})$ kaçtır?

- A) -3 B) $-\frac{7}{3}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) -2 E) $-\frac{1}{2}$



Soru 7:

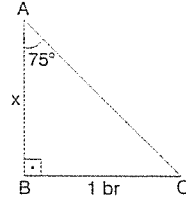
ABC diküçgendir.

$$|BC| = 1 \text{ br}$$

$$m(\widehat{A}) = 75^\circ$$

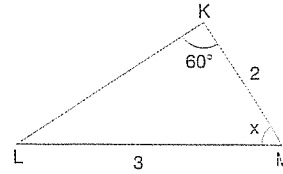
olduğuna göre, $|AB| = x$ kaç birimdir?

- A) $4 - \sqrt{3}$ B) $2 - \sqrt{3}$ C) $3 - \sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} + 2$



Soru 8:

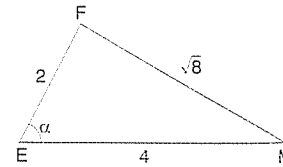
Şekildeki KLM üçgeninde verilenlere göre, $\sin(x + 60^\circ)$ kaçtır?



- A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Soru 9:

Şekildeki FEM üçgeninde verilenlere göre, $\sin(\alpha + 30^\circ)$ kaçtır?



- A) $\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{7}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
D) $\frac{3 + \sqrt{21}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ fonksiyonunun alabileceği;

en büyük değer: $\sqrt{a^2 + b^2}$

en küçük değer: $-\sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x$$

fonksiyonunun alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulalım.

Çözüm:

$$\text{En büyük değer : } \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\text{En küçük değer : } -\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = -3 \text{ tür.}$$

Örnek 2:

$$A = 2 \cos(180^\circ - x)$$

$$B = \sqrt{3} \cos(x + 270^\circ)$$

olduğuna göre, $A + B$ nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm:

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$

$$\cos(x + 270^\circ) = \sin x \text{ olduğundan}$$

$$A = 2 \cos(180^\circ - x)$$

$$A = -2 \cos x \text{ ve}$$

$$B = \sqrt{3} \cos(x + 270^\circ)$$

$$B = \sqrt{3} \sin x \text{ olur.}$$

$A + B = -2 \cos x + \sqrt{3} \sin x$ ise bu ifadenin alabileceği en büyük değer,

$$A + B = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$A + B = \sqrt{7} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sqrt{7} \sin x - \sqrt{2} \cos x$$

İfadesinin alabileceği en küçük değeri kaçtır?

- A) -9 B) $-7\sqrt{3}$ C) $-3\sqrt{5}$ D) -4 E) -3

Soru 2:

$$2 \cos x + \sin x$$

İfadesinin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$A = \cos x - \sqrt{2} \sin x$$

$$B = \sqrt{10} \sin x - \sqrt{6} \cos x$$

olduğuna göre, B nin alabileceği en büyük değer A nın alabileceği en küçük değerden kaç fazladır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $4 - \sqrt{3}$ C) $\sqrt{3} + 2$
D) $\sqrt{3} + 4$ E) 8

YARIM AÇI FORMÜLLERİ

Bilgi

Sinüs toplam formülünde $a = b = x$ yazılırsa sinüs yarım açı formülü elde edilir.

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\sin x = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$2 \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

Sinüs yarım açı formülünden,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} &= \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ$$

çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ$$

ifadesini 2 ile çarpıp bölerssek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ &= \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$4 \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Birbirini 90° ye tamamlayan açılar sinüs ile kosinüs değerleri eşittir.

$$\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan,}$$

$$4 \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \text{ ifadesinde,}$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \text{ yazılırsa,}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} &= 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \\ &= 2 \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\sin 40^\circ = x$$

$$\cos 40^\circ = y$$

olduğuna göre, $\cos 10^\circ$ nin x ve y cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ \text{ dir.}$$

$$\sin 80^\circ = 2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ$$

$$= 2 \cdot x \cdot y \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olduğuna göre, $\sin 2x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

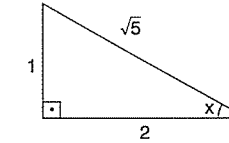
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ise,}$$

$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ tir.}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$



Örnek 6:

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

olduğuna göre, $\sin x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa,

$$\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{25}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{3}{25}$$

$$\underbrace{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}_1 - \underbrace{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}_{\sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right)} = \frac{3}{25}$$

$$1 - \sin x = \frac{3}{25}$$

$$\sin x = 1 - \frac{3}{25}$$

$$\sin x = \frac{22}{25} \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\frac{\sin 6^\circ}{\sin 2^\circ} - \frac{\cos 6^\circ}{\cos 2^\circ}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

Paydalar eşitlenir ve işlem yapılırsa,

$$\frac{\sin 6^\circ}{\sin 2^\circ} - \frac{\cos 6^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{\sin 6^\circ \cdot \cos 2^\circ - \sin 2^\circ \cdot \cos 6^\circ}{\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{\sin(6^\circ - 2^\circ)}{\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin 4^\circ$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 4^\circ}{\sin 4^\circ}$$

$$= 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 8:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 4$$

olduğuna göre, $\sin 2x$ in pozitif değerini bulalım.

Çözüm:

Payda eşitlenirse,

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 4$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 4$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$1 = (2 \sin x \cdot \cos x)^2$$

$$1 = (\sin 2x)^2$$

$$\sin 2x = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 9:

$$(4^{\sin \alpha})^{\cos \alpha} = \sqrt{2}$$

olduğuna göre, α dar açısının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

$$(4^{\sin \alpha})^{\cos \alpha} = \sqrt{2}$$

$$4^{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ ise } 2\alpha = 30^\circ \text{ veya } 2\alpha = 150^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ \text{ veya } \alpha = 75^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 10:

$$\sin\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

ifadesinin değerini bulalım.

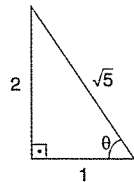
Çözüm:

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \theta \text{ dersek,}$$

$$\sin\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sin 2\theta \text{ olur.}$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ tir.}$$



$$\sin\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Soru 2:

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$$

olduğuna göre, $\sin 2x$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Soru 3:

$$\sin 20^\circ = x$$

$$\cos 20^\circ = y$$

olduğuna göre, $\cos 50^\circ$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $y - x$ B) $2xy$ C) $x \cdot y$
D) $\frac{x \cdot y}{2}$ E) $\frac{x - y}{2}$

Soru 4:

$$\cos 80^\circ = a$$

olduğuna göre, $\sin 20^\circ$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2a^2 - 1$ B) $2 - 2a$ C) $\sqrt{1 - a^2}$
D) $2a\sqrt{1 - a^2}$ E) $2\sqrt{1 + a^2}$

Soru 5:

$$\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \frac{1}{m}$$

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{n}$$

olduğuna göre, $\sin(2a + 2b)$ kaçtır?

- A) $\frac{2m}{n}$ B) $\frac{m}{2n}$ C) $\frac{2}{m \cdot n}$
D) $2mn$ E) $m \cdot n$

Soru 6:

$$\tan 55^\circ = a$$

olduğuna göre, $\sin 70^\circ$ nin a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 + a^2$ B) $2a^2 + 1$ C) $1 - a^2$
D) $\frac{2a}{1 + a^2}$ E) $\frac{2a^2 - 1}{a^2 + 1}$

Soru 7:

$$\tan x + \cot x = a$$

olduğuna göre, $\sin 2x$ in a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2a$ B) $2a^2 - 1$ C) $1 - 2a$
D) $\frac{2}{a}$ E) $\frac{a}{2}$

Soru 8:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\sin x - \cos x$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

Soru 9:

$$\sin(2\arctan \sqrt{x})$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\sqrt{x}}{1 + x}$ B) $\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$ C) $\frac{1}{1 + x}$
D) $\frac{1 - x}{1 + x}$ E) $\frac{1 + x}{x}$

Soru 10:

$$\frac{1}{\sin 40^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 40^\circ}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) $-4\tan 10^\circ$ B) $4\cot 10^\circ$ C) $2\tan 10^\circ$
D) -4 E) 4

Soru 11:

$$\frac{\sin 8^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 8^\circ \cdot \sin 6^\circ}{\sin 7^\circ \cdot \sin 263^\circ}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-4\sin 7^\circ$ B) -2 C) -1 D) $2\sin 7^\circ$ E) 4

Soru 12:

$$\frac{\sin x \cdot \cos^3 x - \sin x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} : \frac{2}{\cot 2x}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4
✓ D) $-\frac{\cos 2x}{4}$ E) $\frac{\sin 4x}{4}$

Soru 13:

 $0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, $\cos 2x$ kaçtır?

- ✓ A) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

Soru 14:

$$\left(\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \right)^2$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $-1 + \sqrt{3}$ E) $1 + \sqrt{3}$

Soru 15:

$$\cos 50^\circ = \frac{2}{n} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\tan 20^\circ + \cot 20^\circ$$

toplamlarının n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{n}{4}$ B) $\frac{n}{2}$ ✓ C) n D) $\frac{3n}{2}$ E) $2n$

Bilgi

Kosinüs toplam formülünde $a = b = x$ yazılırsa kosinüs yarım açı formülü elde edilir.

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

İfadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

İfadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{2\sin x \cdot \cos x} &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x)}{2\sin x \cdot \cos x} \\ &= \frac{1 \cdot [-(\cos^2 x - \sin^2 x)]}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\sin 2x} \\ &= -\cot 2x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\frac{1 - 2\sin^2 15^\circ}{2\cos^2 75^\circ - 1}$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\sin^2 15^\circ}{2\cos^2 75^\circ - 1} &= \frac{\cos(2 \cdot 15^\circ)}{\cos(2 \cdot 75^\circ)} \\ &= \frac{\cos 30^\circ}{\cos 150^\circ} \\ &= \frac{\cos 30^\circ}{\cos(180^\circ - 30^\circ)} \\ &= \frac{\cos 30^\circ}{-\cos 30^\circ} \\ &= -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{-1 + \cos 2\alpha}$$

İfadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

Pay kısmında $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
Payda kısmında $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2\alpha}{-1 + \cos 2\alpha} &= \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{-1 + 1 - 2\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2\cos^2 \alpha}{-2\sin^2 \alpha} \\ &= -\cot^2 \alpha \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\frac{\sec^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 x}{1 - \tan^2 x} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos 2x} \\ &= \sec 2x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

$$\text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$$

olduğuna göre, $\cos 2x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} = x \text{ ise } \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ olur.}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \text{ ifadesinde,}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ yazılırsa,}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2}{5}$$

$$\cos 2x = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$\cos 18^\circ = a$ olduğuna göre, $\sin 54^\circ$ ifadesinin a cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= 2 \cos^2 18^\circ - 1 \\ &= 2a^2 - 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 8:

$\cos \frac{\pi}{8}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos \frac{\pi}{8} = x \text{ olsun.}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 2x^2 - 1$$

$$1 + \cos \frac{\pi}{4} = 2x^2$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 2x^2$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{4} = x^2$$

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = x \text{ bulunur.}$$

Buradan,

$$x = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ olur.}$$

Örnek 9:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

olduğuna göre, $\sin \frac{x}{2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$$

$$1 - \frac{4}{5} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{5} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{10} = \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \sin \frac{x}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 10:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} = x \text{ olsun.}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan, } \sin^2 \frac{5\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} \text{ dir.}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = x$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{12} = x$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 = x - 1$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = x - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = x - 1$$

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{2} = x \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Soru 2:

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} \right) - \left(\sin^2 \frac{3\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{7} \right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\cos \frac{3\pi}{4}$ B) $\sin \frac{\pi}{7}$ C) 1 D) -1 E) 0

Soru 3:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}}{1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 0 D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

Soru 4:

$$\frac{\cos 2a}{1 - \tan^2 a}$$

İfadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin^2 a$ B) $\cos^2 a$ C) $\cot^2 a$
D) $1 + \sin^2 a$ E) $1 + \tan^2 a$

Soru 5:

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

olduğuna göre, $\sin^2 18^\circ$ kaçtır?

- A) $\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{5} + 3}{8}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

Soru 6:

$$\pi < x < 2\pi \text{ olmak üzere,}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin x$ B) $-\sin x$ C) $\cos x$
D) $1 - \cos x$ E) $1 + \sin x$

Soru 7:

$$\cos(2\arctan x)$$

İfadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ B) $\frac{1 - x}{1 + x}$ C) $\frac{1 - x}{1 + x^2}$
D) $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ E) $\frac{x}{1 + x^2}$

Soru 8:

$$2 \cos^3 x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 \cos 4x$ B) $1 - \cos 4x$ C) $\cos 4x$
D) $\sin 4x$ E) $\frac{1}{4} \sin 4x$

Soru 9:

$$\sin 12^\circ = n$$

olduğuna göre, $\sin^2 39^\circ$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1 + n}{4}$ B) $\frac{1 - 2n}{8}$ C) $2n - 1$
D) $\frac{n - 1}{4}$ E) $\frac{1 - n}{2}$

Soru 10:

$$\frac{\cos 8^\circ (1 - \cos 16^\circ)}{\sin 16^\circ (1 - \cos 8^\circ)}$$

İfadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan 16^\circ$ B) $\cot 16^\circ$ C) $\tan 4^\circ$
D) $\cot 4^\circ$ E) $\cot 8^\circ$

Soru 11:

$$\frac{\sin^2 10^\circ}{2 \cos^2 5^\circ} - 1$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\sin 5^\circ$ B) $\sin 10^\circ$ C) $-\cos 5^\circ$
D) $-\cos 10^\circ$ E) $\tan 10^\circ$

Soru 12:

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} = m$$

olduğuna göre, m kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3 - \sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

Bilgi

Tanjant toplam formülünde $a = b = x$ yazılırsa, tanjant yarım açı formülü elde edilir.

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\tan x = 2$$

olduğuna göre, $\tan 2x$ in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{1 - 4}$$

$$= -\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$\tan 7^\circ = x$ olduğuna göre, $\cot 76^\circ$ ifadesinin x cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\cot 76^\circ = \tan 14^\circ$$

$$= \frac{2 \tan 7^\circ}{1 - \tan^2 7^\circ}$$

$$= \frac{2x}{1 - x^2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\tan 2x = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, $\tan x$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\tan 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 8 \tan x = 3 - 3 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x + 8 \tan x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan x - 1) \cdot (\tan x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{3} \text{ veya } \tan x = -3$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\tan x = \frac{1}{3}$ bulunur.

$$\begin{aligned} \tan 4x &= \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \\ &= \frac{12}{8} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olduğuna göre, $\tan x$ değerini bulalım.

Çözüm:

I. yol:

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

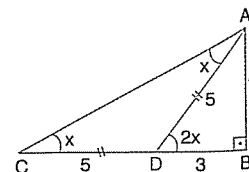
$$\cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = \frac{1}{5}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

$\sin 2x = \frac{4}{5}$ olacak şekilde aşağıdaki diküçgenden yararlanalım.

Şekilden,

$$\tan x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

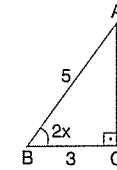


II yol:

1. yolda $\sin 2x = \frac{4}{5}$ bulmuştuk.

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \text{ ise,}$$

$$\tan 2x = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$



$$\tan 2x = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \tan x = 2 - 2 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x + 3 \tan x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \tan x - 1) \cdot (\tan x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \text{ veya } \tan x = -2$$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ olduğundan $\tan x = \frac{1}{2}$ bulunur.

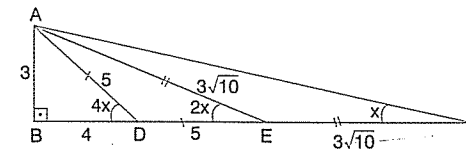
Örnek 6:

$0 < x < \frac{\pi}{8}$ olmak üzere,

$$\tan 4x = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, $\tan x$ in değerini bulalım.

Çözüm:



$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 \Rightarrow |AE|^2 = 3^2 + 9^2 \\ \Rightarrow |AE| = 3\sqrt{10}$$

$$\text{Şekle göre, } \tan x = \frac{3}{9 + 3\sqrt{10}}$$

$$\tan x = \frac{1}{3 + \sqrt{10}} = \frac{3 - \sqrt{10}}{-1}$$

$$= \sqrt{10} - 3 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$

B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

✓ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $-\sqrt{3}$

Soru 2:

$$\cot x = -\frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\tan 2x$ kaçtır?

A) $-\frac{3}{8}$

B) 1

✓ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{3}{7}$

Soru 3:

$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = 2$$

olduğuna göre, $\cos 2\alpha$ kaçtır?

✓ A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

C) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

D) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

E) $-\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Soru 4:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \text{ olmak üzere,}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$$

olduğuna göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) -2 E) $-\frac{5}{2}$

Soru 5:

$$\cot 100^\circ = k$$

olduğuna göre, $\cot 290^\circ$ nin k cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1-k^2}{2k}$ B) $\frac{1+k^2}{1-k^2}$ C) $\frac{2k-1}{1-k^2}$
D) $\frac{1-k}{1+k^2}$ E) $\frac{2k}{1-k^2}$

Soru 6:

$$\frac{\tan^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1}{\tan\left(\frac{x}{4}\right)}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cot \frac{x}{2}$ B) $-\cot \frac{x}{4}$ C) $\tan \frac{x}{2}$
D) $-2 \cdot \cot \frac{x}{2}$ E) $-\frac{1}{2} \cdot \cot \frac{x}{2}$

Bilgi

Yarım açı formülleri ile ilgili geometri sorularında ilgili açının yarısı ya da iki katı şekil üzerinde elde edilip yarımaçı bağıntılardan yararlanılır.

Bilgi Kavrama

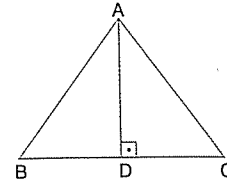
Örnek 1:

Yandaki ikizkenar üçgende,

$$|AB| = |AC| = 5 \text{ br}$$

$$|AD| \perp |BC|$$

$$|BC| = 6 \text{ br}$$



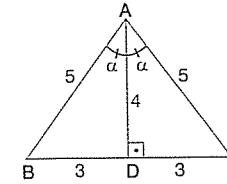
olduğuna göre, $\tan(\widehat{BAC})$ değerini bulalım.

Çözüm:

ABC ikizkenar üçgen ve

$|AD| \perp |BC|$ olduğundan,

$$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) \text{ olur.}$$



$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ ve } \tan(\widehat{BAC}) = \tan 2\alpha \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

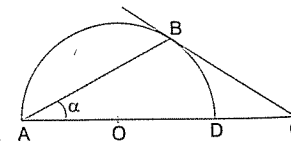
[CB, şekildeki O merkezli yarım çembere B noktasında teğettir.

A, D, C doğrusal noktalar ve

$$|AD| = 6 \text{ br}$$

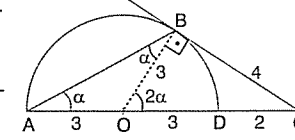
$$|DC| = 2 \text{ br}$$

olduğuna göre, $\cot \alpha$ yı bulalım.



Çözüm:

Teğetin değme noktasından teğete çizilen dikme, çemberin merkezinden geçer.



O halde, şekilde $|OB| \perp |BC|$ dir.

$$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO}) = \alpha \text{ ve}$$

$$m(\widehat{COB}) = 2\alpha \text{ olur.}$$

$$BOC \text{ dik üçgeninde } \tan 2\alpha = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow 6 \tan \alpha &= 4 - 4 \tan^2 \alpha \\ \Rightarrow 4 \tan^2 \alpha + 6 \tan \alpha - 4 &= 0 \\ \Rightarrow 2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 2 &= 0 \\ \Rightarrow (2 \tan \alpha - 1) \cdot (\tan \alpha + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{eşitliğinde } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ veya } \tan \alpha = -2 \text{ olur.}$$

$$\alpha \text{ dar açı olduğundan } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ ve}$$

$$\cot \alpha = 2 \text{ bulunur.}$$

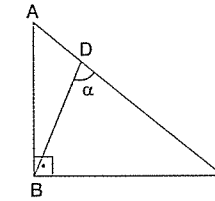
Örnek 3:

ABC üçgeninde,

$$m(\widehat{CBA}) = 90^\circ$$

$$|DC| = |BC|$$

$$|DC| = 4|AD|$$



olduğuna göre, $\sin \alpha$ nın değerini bulalım.

Çözüm:

$$|DC| = |BC| \text{ denilirse,}$$

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DBC}) = \alpha$$

denilirse

$$m(\widehat{DCB}) = 180 - 2\alpha \text{ olur.}$$

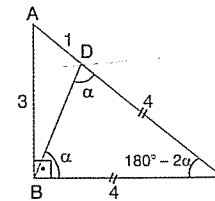
$$|AD| = 1 \text{ br alınırsa,}$$

$$|DC| = 4 \text{ br}$$

$$|BC| = 4 \text{ br}$$

$$|AB| = 3 \text{ br olur.}$$

$$ABC \text{ dik üçgeninden } \cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{4}{5} \text{ tir.}$$



$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \frac{4}{5} \text{ ise,}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{9}{5} = 2\sin^2 \alpha$$

$$\frac{9}{10} = \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ bulunur.}$$

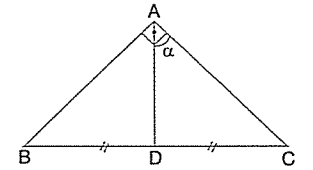
Örnek 4:

Şekildeki dik üçgende,

$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$$

$$|BD| = |DC| = 5 \text{ br}$$

$$|AC| = 6 \text{ br}$$



olduğuna göre, $\sin 2\alpha$ nın değerini bulalım.

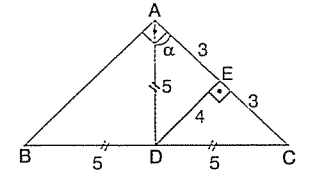
Çözüm:

Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ayırdığı parçalara eşit olduğundan,

$$|BD| = |DC| = |AD| = 5 \text{ br}$$

ADC ikizkenar üçgeninde, [DE] yüksekliği çizilirse,

$$|AE| = |EC| = 3 \text{ br ve } |DE| = 4 \text{ br olur.}$$



$$DEA \text{ üçgeninde, } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ ve } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Buna göre, } \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \text{ bulunur.}$$

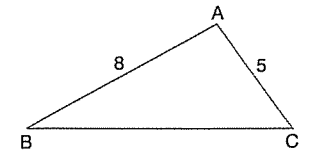
Örnek 5:

ABC üçgeninde,

$$m(\widehat{ACB}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC})$$

$$|AB| = 8 \text{ br}$$

$$|AC| = 5 \text{ br}$$



olduğuna göre, $\cos(\widehat{ACB})$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$m(\widehat{ABC}) = \alpha \text{ ise,}$$

$$m(\widehat{ACB}) = 2\alpha \text{ olur.}$$

Sinüs teoreminden,

$$\frac{5}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{5}{\sin \alpha} = \frac{8}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow 10 \cos \alpha = 8$$

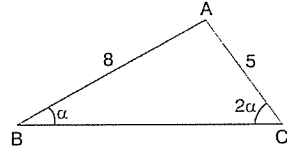
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \cos 2\alpha \text{ olduğundan,}$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

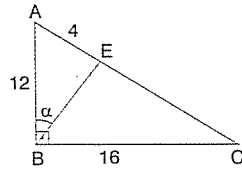
$$= 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} \text{ bulunur.}$$



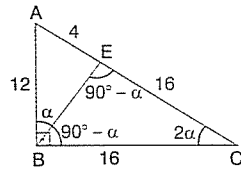
Örnek 6:

Şekildeki
ABC dik üçgeninde,
|AE| = 4 br
|AB| = 12 br
|BC| = 16 br



olduğuna göre, $\sin \alpha$ yı bulalım.

Çözüm:



Pisagor teoreminden, |AC| = 20 bulunur.

Buradan, |BC| = |CE| olduğundan BCE üçgeni ikizkenar üçgen ve bu üçgenin taban açıları $90^\circ - \alpha$, tepe açısı da $m(\widehat{BCE}) = 2\alpha$ olur.

$$\cos 2\alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

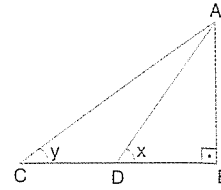
Yandaki şekilde,

$$|CD| = |AD|$$

$$\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

olduğuna göre, $\sin y$ nin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{2}{3}$



Soru 2:

B noktası AC çaplı yarım çemberin merkezi;
E noktası ED teğetinin değme noktasıdır.

A, C, D doğrusal noktalar ve

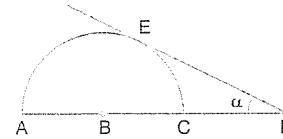
$$|AB| = 3 \text{ br}$$

$$|CD| = 2 \text{ br}$$

$$m(\widehat{ADE}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\sin 2\alpha$ nin değeri kaçtır?

- A) $\frac{12}{25}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{24}{25}$ E) $\frac{4}{5}$



Soru 3:

[CB], şekildedeki O merkezli yarım çembere B noktasında teğettir.

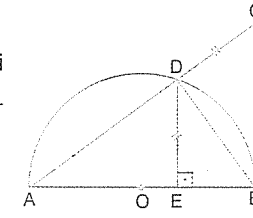
$$[DE] \perp [AB]$$

$$|DC| = |DE|$$

$$m(\widehat{EDB}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\cos 2\alpha$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin^2 \alpha$ B) $2 \sin \alpha$ C) $\sin \alpha$
D) $\sin 2\alpha$ E) $2 \sin \alpha - 1$



Soru 4:

Yandaki ABC üçgeninde,

$$|BC| = 2 \text{ cm}$$

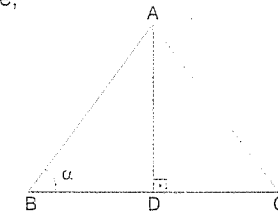
$$[AB] \perp [AC]$$

$$[AD] \perp [BC]$$

$$m(\widehat{ABC}) = \alpha$$

olduğuna göre, |AD| nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin 2\alpha$ B) $1 - \sin 2\alpha$ C) $1 + \sin 2\alpha$
D) $2 - \sin 2\alpha$ E) $2 + \sin 2\alpha$



Soru 5:

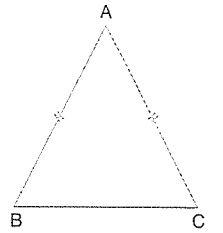
Şekildeki üçgende,

$$|AB| = |AC|$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{12}{9}$$

olduğuna göre, $\cot \widehat{C}$ kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{5}$



Soru 6:

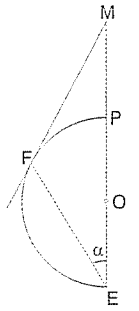
[FM], O merkezli yarım çembere F noktasında teğettir.

$$|EP| = 4, |MP|$$

$$m(\widehat{FEM}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\sin \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{6}$



Soru 7:

Yandaki ABC üçgeninde,

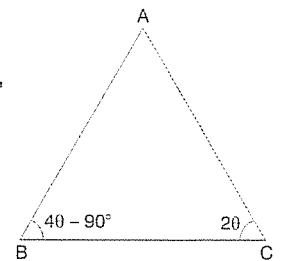
$$m(\widehat{B}) = 4\theta - 90^\circ$$

$$m(\widehat{C}) = 2\theta$$

$$\cot 2\theta = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, $\frac{|AC|}{|AB|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$



1. $\sin 195^\circ \cdot \cos (-15^\circ)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B)
- $\frac{1}{4}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D)
- $-\frac{1}{4}$
- E)
- $-\frac{1}{2}$

2. $\frac{\cos 2x - \cos^2 x + 1}{\cot x \cdot \cos x}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\sin 2x$
- B)
- $\sin x$
- C)
- $\cos 2x$
-
- D)
- $\frac{\sin 2x}{2}$
- E) 1

3. $\sin 25^\circ = p$

olduğuna göre, $\sin 40^\circ$ ifadesinin p cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $1 - p$
- B)
- $2p^2 - p$
- C)
- $1 - 2p^2$
-
- D)
- $1 - p^2$
- E)
- $2p - 1$

4. $\alpha = \arctan 3 - \arctan \frac{1}{2}$

olduğuna göre, α aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- 15°
- B)
- 30°
- C)
- 45°
- D)
- 60°
- E)
- 75°

5. $\frac{\tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$

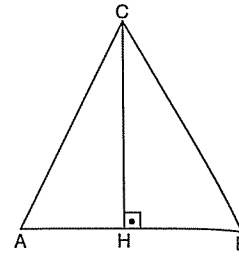
işleminin sonucu kaçtır?

- A)
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- B)
- $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- C)
- $\sqrt{3}$
- D)
- $2\sqrt{3}$
- E) 4

6. Yandaki ABC üçgeninde,
 $\tan \hat{A} = 3$
 $\tan \hat{B} = 1$

olduğuna göre, $\cos \hat{C}$ kaçtır?

- A)
- $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- B)
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C)
- $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- D)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- E)
- $\frac{5}{6}$



7. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,

$\tan 2x = \frac{3}{4}$

olduğuna göre, $\sin x$ kaçtır?

- A)
- $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- B)
- $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- C)
- $\frac{1}{3}$
- D)
- $\frac{2}{5}$
- E)
- $\frac{3}{5}$

8. $\cos x + \sin y = \frac{1}{2}$

$\cos y - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

olduğuna göre, $\sin(x - y)$ kaçtır?

- A)
- $\frac{4}{5}$
- B)
- $\frac{3}{5}$
- C)
- $\frac{5}{8}$
- D)
- $\frac{3}{8}$
- E)
- $\frac{1}{5}$

9. $\frac{\cos^4 2x - \sin^4 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x}$

ifadesinin sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B)
- $\sin 4x$
- C)
- $\cos 4x$
-
- D)
- $2 \cot 4x$
- E)
- $2 \tan 4x$

10. $\tan 53^\circ = a$ olmak üzere,

 $\sin 74^\circ$ nin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $2a$
- B)
- $2a^2 - 1$
- C)
- $1 - 2a^2$
-
- D)
- $\frac{2a}{a^2 + 1}$
- E)
- $\frac{a}{a^2 + 1}$

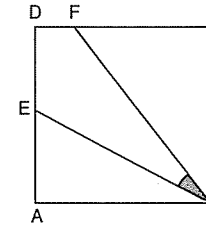
11. ABCD bir kare,

$|AE| = |ED|$

$|CF| = 5|FD|$

olduğuna göre, $\tan(\hat{FBE})$ değeri kaçtır?

- A)
- $\frac{7}{8}$
- B)
- $\frac{7}{16}$
- C)
- $\frac{5}{3}$
- D)
- $\frac{16}{7}$
- E)
- $\frac{8}{7}$

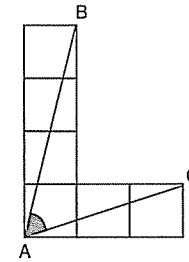


12. Yandaki şekil 6 özdeş kareden oluşmaktadır.

Buna göre,

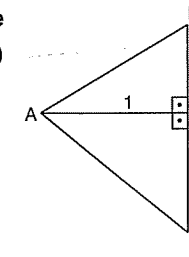
 $\cot(\hat{BAC})$ kaçtır?

- A)
- $\frac{6}{7}$
- B)
- $\frac{5}{3}$
- C)
- $\frac{7}{11}$
- D)
- $\frac{7}{12}$
- E)
- $\frac{1}{11}$



13. Şekildeki ABD üçgeninde verilenlere göre, $\tan(\hat{DAB})$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{5}{6}$
- B)
- $-\frac{8}{7}$
- C)
- $-\frac{7}{11}$
- D)
- $-\frac{11}{10}$
- E)
- $-\frac{12}{11}$



14. $0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\frac{\sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ - \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2 \sin^2 3^\circ - 2 \cos^2 3^\circ} = \sin 2x$$

olduğuna göre, x in en küçük değeri kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

15. İç açıları A, B ve C olan bir ABC üçgeninde,

$\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} + \cos \hat{B}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D)
- $\cos \hat{A}$
- E)
- $\cos \hat{C}$

16. $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$

olduğuna göre, $\sin 2x$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{5}{9}$
- B)
- $-\frac{3}{8}$
- C)
- $\frac{3}{8}$
- D)
- $\frac{5}{9}$
- E) 1

17. $\frac{\sin^3 20^\circ + \cos^3 20^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 70^\circ} = x$

olduğuna göre, $\sin 40^\circ$ nin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $2x$
- B)
- $x - 2$
- C)
- $x - 4$
-
- D)
- $2 - x$
- E)
- $2 - 2x$

18. $\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = x$

$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = y$

olduğuna göre, $\sin(2a + 2b)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- xy
- B)
- $\frac{x}{y}$
- C)
- xy^2
- D)
- $2xy$
- E)
- $\frac{xy}{2}$

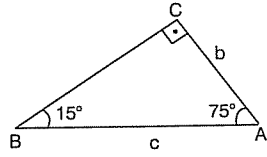
1. ABC üçgeninde

$$|AC| = b$$

$$|AB| = c$$

$$m(\hat{A}) = 75^\circ$$

$$m(\hat{B}) = 15^\circ$$

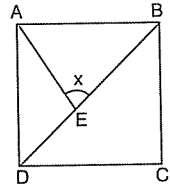


olduğuna göre, $\frac{c}{b}$ oranı kaçtır?

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{6} + \sqrt{7}$

2. ABCD bir karedir.

[BD] köşegen,
|BE| = 3|DE|



olduğuna göre, $\tan x$ kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

3. $\sin(25^\circ + k) \cdot \cos(20^\circ - k) + \sin(20^\circ - k) \cdot \cos(25^\circ + k)$

ifadesinin değeri kaçtır?

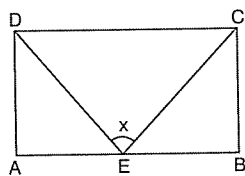
- A) $\sin 5^\circ$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\cos 5^\circ$

4. ABCD bir dikdörtgen,

$$|BC| = 2 \cdot |AE|$$

$$3 \cdot |BC| = 4 \cdot |BE|$$

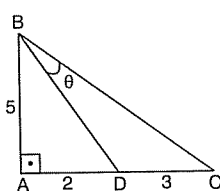
$$m(\hat{CED}) = x$$



Yukarıdaki verilere göre, $\cot x$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

5. Şekildeki ABC diküçgeninde verilenlere göre, $\tan \theta$ kaçtır?



- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{5}$

6. $f(x) = \sin x + \cos x$

olduğuna göre, $f^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ kaçtır?

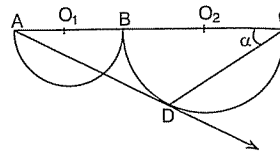
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{8}{5}$

7. $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

olduğuna göre, $\cos 72^\circ$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5} - 2}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

8. Merkezleri [AC] üzerinde olan O_1 ve O_2 merkezli yarı çemberler, B noktasında dıştan teğet ve [AD] ışını da D noktasında merkezi O_2 olan çembere teğettir.



$4|O_1B| = |O_2C|$ olduğuna göre, $\cos \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{12}$

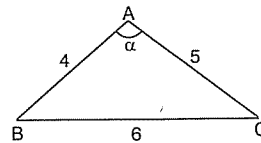
9. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, $\cos 2x$ in değeri kaçtır?

- A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.



Şekildeki ABC üçgeninde

$$|AB| = 4 \text{ br}, |AC| = 5 \text{ br}, |BC| = 6 \text{ br}$$

olduğuna göre, $\sin(\alpha + 60^\circ)$ kaçtır?

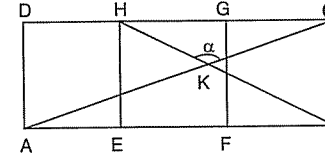
- A) $\frac{\sqrt{3}}{25}$ B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ C) $\frac{3\sqrt{7} + \sqrt{3}}{16}$
D) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$ E) $8\sqrt{3} + 7$

11. $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} + \sin x \cdot \cos x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, $\sin 2x$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) $-\frac{1}{5}$

12.



Şekildeki ABCD dikdörtgeni üç eş kareden oluşmuştur.

$m(\hat{HKC}) = \alpha$ olduğuna göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{5}{6}$ C) $-\frac{5}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{6}{5}$

13. $\sin 110^\circ = t$

olduğuna göre, $\tan 80^\circ$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1-t}{1+t}$ B) $\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t}$ C) $\frac{t+1}{t^2+1}$
D) $\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}$ E) $\frac{t+1}{\sqrt{1+t}}$

14. $\sin \alpha = \sin(45^\circ + \alpha)$

olduğuna göre, $\tan 2\alpha$ kaçtır?

- A) -1 B) $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{2}$

15. $\cot x = -\frac{1}{2}$
 $\tan y = -3$

olduğuna göre, $(x + y)$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

16. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

17. $\cos 59^\circ = m$ olduğuna göre,

$$\sin 1^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 1^\circ$$

ifadesinin m cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2m B) $-\sqrt{3}m$ C) $\frac{2\sqrt{3}m}{3}$
D) m E) 2m

18. $0 < x < \pi$ ve $\tan x = -\frac{5}{12}$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \frac{1}{2} \sin 2x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $-\frac{5}{13}$ E) $-\frac{7}{13}$

19. $8 \cdot \sin 4^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ = a$

olduğuna göre, $\sin 164^\circ$ nin a türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{a}{2}$ B) -a C) $\frac{a}{2}$ D) a E) 2a

1. $a = \sin 15^\circ \cdot \cos 55^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 55^\circ$
 $b = \sin 50^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 50^\circ \cdot \sin 10^\circ$
 $c = \cos 55^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 55^\circ \cdot \sin 15^\circ$
 olduğuna göre, $\frac{a}{\cos 20^\circ} + \frac{b}{\cos 50^\circ} + \frac{c}{\sin 20^\circ}$
 toplamının değeri kaçtır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

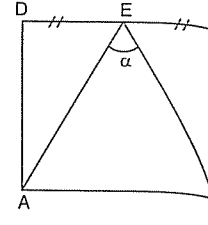
2. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,
 $\cot x = 2\sqrt{2}$
 $\tan y = \sqrt{2}$
 olduğuna göre, $\sin(x+y)$ kaçtır?
 A) $\frac{5}{3\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\sin(a+b) = \cos a \cdot \cos b$
 olduğuna göre, $\tan a + \tan b$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) 1 B) $\cot a + \cot b$ C) $\sin a$ D) 0 E) 2

4. $\sin x + \cos y = -\frac{3}{2}$
 $\sin y + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$
 olduğuna göre, $\sin(x+y)$ kaçtır?
 A) $\frac{1}{4}$ B) 0 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 1

5. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,
 $\cos 3x \cdot \cos x = \frac{4}{5} - \sin 3x \cdot \sin x$
 olduğuna göre, $\cot x$ kaçtır?
 A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

6. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde E orta noktadır.
 $|AB| = 6$ br
 $|BC| = 4$ br
 $m(\widehat{AEB}) = \alpha$

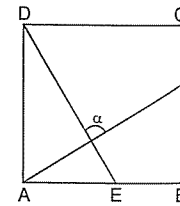


- olduğuna göre, $\cos \alpha$ değeri kaçtır?
 A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{7}{25}$ E) $\frac{11}{25}$

7. Bir ABC üçgeninde,
 $\tan A = 2$ ve $\tan B = \frac{3}{4}$
 olduğuna göre, $\tan C$ nin değeri kaçtır?
 A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{11}{2}$ E) 5

8. $\sin \alpha = a$
 olduğuna göre, $\sin 3\alpha$ nın a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $2a^3 - 3a$ B) $4a - a^3$ C) $3a - 4a^3$
 D) $2a - a^3$ E) $a^3 - 4a^2$

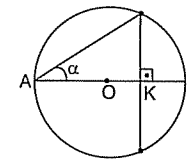
9. Yandaki şekilde ABCD kare,
 $|AE| = 6$ br
 $|EB| = 12$ br
 $|CF| = |FB|$



- olduğuna göre, $\cot \alpha$ kaçtır?
 A) 7 B) 3 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $-\frac{1}{7}$

10. $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$
 ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\tan \frac{x}{2}$ B) $\cot \frac{x}{2}$ C) $\sec \frac{x}{2}$
 D) $\operatorname{cosec} \frac{x}{2}$ E) $\sin \frac{x}{2}$

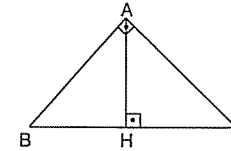
11. Şekildeki O merkezli birim çemberde, $|OK|$ uzunluğunun α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $\sin \alpha - 1$ B) $\sin \alpha + \frac{1}{2}$ C) $\sin 2\alpha$
 D) $\cos 2\alpha$ E) $\tan 2\alpha$

12. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere,
 $\sin 2x = \frac{2}{3}$
 olduğuna göre, $\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) $-\sqrt{6}$ B) $-\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

13. ABC dik üçgeninde,
 $|AB| = \cos x$
 $|AC| = \sin x$
 $|AH| \perp |BC|$
 olduğuna göre, $|AH|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $\frac{\sin 2x}{2}$
 D) $\sin 2x$ E) $\cos 2x$



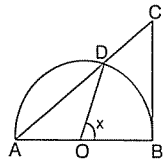
14. $20\sin 8^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 16^\circ = x$
 olduğuna göre, $\sin 58^\circ$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $\frac{x}{3}$ B) $\frac{x}{5}$ C) $\frac{5}{x}$
 D) $\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$ E) $\frac{25-x^2}{x}$

15. $\cos 64^\circ = a$ olduğuna göre, $\cos 38^\circ$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $2a$ B) $a + 1$ C) $2a - 3$
 D) $2a\sqrt{1-a^2}$ E) $\sqrt{1-a^2}$

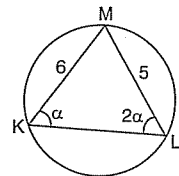
16. $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$ olmak üzere,
 $\sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\sin x - \cos x$ B) $\cos x - \sin x$ C) $1 - \cos x$
 D) $-\sin x - \cos x$ E) $\sin x + \cos x$

17. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,
 $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$
 olduğuna göre, $\cos 2x$ in değeri kaçtır?
 A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{\sqrt{7}}$ C) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. [BC] doğru parçası, O merkezli yarı çembere B noktasında teğettir.
 $|AD| = 12$ br
 $|DC| = 3$ br
 $m(\widehat{DOB}) = x$
 olduğuna göre, $\tan x$ kaçtır?
 A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$



19. Yandaki şekilde verilenlere göre, KLM üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç birimdir?
 A) 15 B) 13 C) $\frac{25}{2}$ D) $\frac{25}{4}$ E) $\frac{25}{8}$



DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases} \Rightarrow a = \frac{x+y}{2} \text{ ve } b = \frac{x-y}{2} \text{ olmak üzere,}$$

Kosinüse ait toplam ve fark formüllerinden,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ + \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cdot \cos b \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

formülü elde edilir.

Bilgi

Kosinüs dönüşüm formülleri,

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\cos 70^\circ + \cos 50^\circ$$

toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos 70^\circ + \cos 50^\circ &= 2 \cos \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} \cdot \cos \frac{70^\circ - 50^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 10^\circ \\ &= \cos 10^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\cos 80^\circ - \cos 10^\circ$$

toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos 80^\circ - \cos 10^\circ &= -2 \sin \frac{80^\circ + 10^\circ}{2} \cdot \sin \frac{80^\circ - 10^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 45^\circ \cdot \sin 35^\circ \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 35^\circ \\ &= -\sqrt{2} \cdot \sin 35^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\cos^2 18^\circ - \cos^2 12^\circ$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos^2 18^\circ - \cos^2 12^\circ &= (\cos 18^\circ - \cos 12^\circ) \cdot (\cos 18^\circ + \cos 12^\circ) \text{ dir.} \\ \cos 18^\circ - \cos 12^\circ &= -2 \sin \frac{18^\circ + 12^\circ}{2} \cdot \sin \frac{18^\circ - 12^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 15^\circ \cdot \sin 3^\circ \\ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ &= 2 \cos \frac{18^\circ + 12^\circ}{2} \cdot \cos \frac{18^\circ - 12^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ \text{ bulunur.} \\ \cos^2 18^\circ - \cos^2 12^\circ &= (-2 \sin 15^\circ \cdot \sin 3^\circ) \cdot (2 \cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ) \\ &= -2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot 2 \sin 3^\circ \cdot \cos 3^\circ \\ &= -\sin 30^\circ \cdot \sin 6^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sin 6^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$11x = \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 7x \cdot \sin 10x}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \cos 5x + \cos 3x &= 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \cdot \cos \frac{5x - 3x}{2} \\ &= 2 \cos 4x \cdot \cos x \text{ olur.} \\ \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\sin 7x \cdot \sin 10x} &= \frac{2 \cos 4x \cdot \cos x}{\sin 7x \cdot \sin 10x} \\ 11x = \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan,} \\ \cos 4x &= \sin 7x \text{ ve } \cos x = \sin 10x \text{ tir.} \\ \frac{2 \cos 4x \cdot \cos x}{\sin 7x \cdot \sin 10x} &= \frac{2 \cos 4x \cdot \cos x}{\cos 4x \cdot \cos x} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$m + n = \frac{\pi}{3} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\cos m - \cos n}{\sin \left(\frac{n-m}{2} \right)}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\cos m - \cos n}{\sin \left(\frac{n-m}{2} \right)} &= \frac{-2 \sin \left(\frac{m+n}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{m-n}{2} \right)}{-\sin \left(\frac{m-n}{2} \right)} \\ &= -2 \sin \left(\frac{m+n}{2} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{\cos 81^\circ - \cos 9^\circ}{\cos 54^\circ}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{2}$ C) -1 D) 1 E) $\sqrt{2}$

Soru 2:

$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ olmak üzere,

$$\frac{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}{2} = \sin \alpha$$

olduğuna göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) $\sqrt{58}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ E) 1

Soru 3:

A, B, C bir üçgenin iç açılarıdır.

$$\cos 2A - \cos 2B = \sin C$$

olduğuna göre, B - A aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Soru 4:

$$6x = \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\cos 9x + \cos 5x}{\cos 5x \cdot \sin 4x}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\checkmark$ -2 D) -1 E) 1

Soru 5:

$$\cos^2 42^\circ - \cos^2 18^\circ$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\cos 48^\circ$ B) $2\cos 24^\circ$ C) $-\sqrt{3}\cos 24^\circ$
D) $-2\sin 48^\circ$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 24^\circ$ $\checkmark$

Soru 6:

$$x = \frac{\pi}{24} \text{ olmak üzere,}$$

$$\cos^2 2x - \cos^2 6x$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\checkmark$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Bilgi

Sinüs dönüşüm formülleri,

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

biçimindedir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sin 38^\circ + \sin 22^\circ$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sin 38^\circ + \sin 22^\circ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{38^\circ + 22^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{38^\circ - 22^\circ}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 8^\circ \\ &= \cos 8^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ}$$

İşleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} &= \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} \\ &= \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} \\ &= \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$14x = \pi \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 5x - \cos 3x}$$

İfadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 5x - \cos 3x} &= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{-2 \sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \cdot \cos 3x \cdot \sin x}{-2 \sin 4x \cdot \sin x} \\ &= \frac{-\cos 3x}{\sin 4x} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$14x = \pi \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Buna göre, $\cos 3x = \sin 4x$ olur.

O halde,

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 5x - \cos 3x} = -\frac{\cos 3x}{\sin 4x} = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x}$$

İfadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} &= \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{-2 \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x}{-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x} \\ &= -\cot x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\checkmark$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Soru 2:

$$\cos 72^\circ = x \text{ olduğuna göre,}$$

$$\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ$$

İfadesinin x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x B) $\checkmark$ $\frac{x}{2}$ C) $\frac{2}{x}$ D) $\frac{1}{x}$ E) $2x$

Soru 3:

$$\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\checkmark$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Soru 4:

$$3x = \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\sin 3x + \sin 5x}{\cos 2x - \cos 6x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Soru 5:

$$\frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\sin 5x} - 1$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cos 2x$ B) $2\cos 2x$ C) $\tan 2x$
D) $\sin^2 x$ E) $\sec x$

Bilgi

x, y, z, t bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olmak üzere,

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x + y}{2}$$

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z} = \tan y$$

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z + \sin t}{\cos x + \cos y + \cos z + \cos t} = \tan \frac{x + t}{2}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 40^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{10^\circ + 70^\circ}{2} = 40^\circ \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 40^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ} = \tan 40^\circ \text{ olur.}$$

Örnek 2:

$$\frac{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

Açı değerleri aritmetik dizi oluşturduğundan ifadenin eşiti,

$$\frac{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}$$

$$= \cot \left(\frac{9x + 3x}{2} \right) = \cot \left(\frac{5x + 7x}{2} \right) = \cot 6x$$

bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cos 5x$ B) $\sin 3x$ C) $\tan 5x$
D) $\cot 5x$ E) $-\cot 5x$

Soru 2:

$$\frac{\sin 36^\circ + \sin 50^\circ + \sin 64^\circ}{\cos 36^\circ + \cos 50^\circ + \cos 64^\circ}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\tan 80^\circ$ B) $\tan 70^\circ$ C) $\tan 50^\circ$
D) $\tan 40^\circ$ E) $\tan 20^\circ$

Soru 3:

$$\frac{\sin 3a + \sin 2a + \sin a}{\cos 3a + \cos 2a + \cos a} = m \text{ ve } 0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}$$

olduğuna göre, $\sin a \cdot \cos a$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{m}{2\sqrt{m^2+1}}$ B) $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ C) $\frac{m}{m^2+1}$
D) $\frac{1}{m}$ E) $\frac{2}{m}$

Soru 4:

$$\frac{\sin 52^\circ + \sin 65^\circ + \sin 78^\circ}{\sin 12^\circ + \sin 25^\circ + \sin 38^\circ}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan 38^\circ$ B) $\tan 12^\circ$ C) $\cot 12^\circ$
D) $\tan 25^\circ$ E) $\cot 25^\circ$

TERS DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

Kosinüse ait toplam-fark formüllerinden,

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$+ \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cdot \cos y$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

elde edilir.

Bilgi

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\cos 62^\circ \cdot \cos 28^\circ$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos 62^\circ \cdot \cos 28^\circ = \frac{1}{2} [\cos(62^\circ + 28^\circ) + \cos(62^\circ - 28^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos 90^\circ + \cos 34^\circ]$$

$$= \frac{1}{2} \cos 34^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ &= \frac{1}{2} [\sin(15^\circ + 75^\circ) + \sin(15^\circ - 75^\circ)] \\
&= \frac{1}{2} [\sin 90^\circ + \sin(-60^\circ)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek 3:

$$2\sin 50^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 280^\circ$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
2\sin 50^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 280^\circ \\
&= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot [\cos 90^\circ - \cos 10^\circ] + \sin(270^\circ + 10^\circ) \\
&= -[0 - \cos 10^\circ] - \cos 10^\circ \\
&= \cos 10^\circ - \cos 10^\circ \\
&= 0 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ olmak üzere,}$$

$$\tan(15^\circ - x) \cdot \tan(15^\circ + x)$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\tan(15^\circ - x) \cdot \tan(15^\circ + x) &= \frac{\sin(15^\circ - x) \cdot \sin(15^\circ + x)}{\cos(15^\circ - x) \cdot \cos(15^\circ + x)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} [\cos 30^\circ - \cos(-2x)]}{\frac{1}{2} [\cos 30^\circ + \cos(-2x)]} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 2x}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 2x} \\
&= \frac{2\cos 2x - \sqrt{3}}{2\cos 2x + \sqrt{3}} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ yazılırsa,}$$

$$\frac{2\cos 2x - \sqrt{3}}{2\cos 2x + \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}} = \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{4}}{\frac{6\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

bulunur.

Örnek 5:

$$f(x) = 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 5x - \sin 2x$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

İfade çarpım durumunda olduğundan önce ifadeyi toplam durumuna dönüştürelim.

$$2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 5x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\sin 12x + \sin 2x] \text{ olur.}$$

$$f(x) = \sin 12x + \sin 2x - \sin 2x = \sin 12x$$

$$\sin 12x \text{ in esas periyodu } T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$f(x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x - \cos 3x$$

fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x - \cos 3x$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos 3x + \cos x] - \cos 3x$$

$$= \cos x$$

$$T = \frac{2\pi}{1} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$\cos 70^\circ \cdot \cos 20^\circ$$

çarpımının değeri kaçır?

- A) $\frac{\sin 20^\circ}{4}$ B) $\frac{\cos 40^\circ}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$
D) $\frac{\sin 40^\circ}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Soru 2:

$$\cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ - \frac{1}{2} \cdot \cos 80^\circ$$

işleminin sonucu kaçır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) 1

Soru 3:

$$\frac{\sin 130^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\cos 170^\circ}$$

işleminin sonucu kaçır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

Soru 4:

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\cos 2a$ kaçır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soru 5:

$$\cos 25^\circ = x \text{ olmak üzere,}$$

$$\cot 55^\circ \cdot \tan 10^\circ$$

çarpımının x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2x - \sqrt{2}}{2x + \sqrt{2}}$ B) $\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$ C) $\frac{2x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$
D) $\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$ E) $\frac{\sqrt{2}x + 2}{\sqrt{2}x - 2}$

Soru 6:

$$\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \sin 40^\circ} - \sin 10^\circ$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

Soru 7:

$$\frac{1}{\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Soru 8:

$$\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{\sin x}\right)^{\cos 3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2} + \sin 4x}$$

eşitliğini sağlayan en küçük x dar açısı kaç derecedir?

- A) 10° B) 12° C) 15° D) 30° E) 45°

Soru 9:

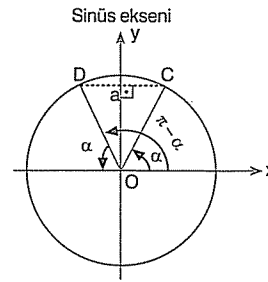
$$f(x) = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} + \cos 2x$$

fonksiyonunun esas periyodu kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π E) 4π

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

$\sin x = a$ Denkleminin Çözümü



$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

sinüsü a olan açılar $\alpha + k \cdot 2\pi$ veya $\pi - \alpha + k \cdot 2\pi$ değerleridir.

Bilgi

$\sin x = \sin \alpha$ denkleminin kökleri,

$$x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \quad \text{dir. } (k \in \mathbb{Z})$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{veya} \quad x = 180^\circ - 45^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{dir.}$$

$$x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{ifadesinde}$$

$k = 0$ alınırsa kök, $x_1 = 45^\circ$ olur.

$$x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{ifadesinde}$$

$k = 0$ alınırsa kök, $x_2 = 135^\circ$ olur.

Buna göre, $[0, 360^\circ]$ aralığındaki kökler;

45° ve 135° bulunur.

Örnek 2:

$$\sin 2x = \cos 50^\circ$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sin 2x = \cos 50^\circ \quad \text{ise,}$$

$$\sin 2x = \sin 40^\circ \quad \text{denkleminde,}$$

$$2x = 40^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{veya} \quad 2x = 180^\circ - 40^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 20^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{veya} \quad x = 70^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{dir.}$$

Buradan,

$$x = 20^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{ifadesinde}$$

$k = 0$ ve $k = 1$ değerleri için kökler,

$$x_1 = 20^\circ \quad \text{ve} \quad x_2 = 200^\circ \quad \text{olur.}$$

$$x = 70^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{ifadesinde,}$$

$k = 0$ ve $k = 1$ değerleri için kökler,

$$x_3 = 70^\circ \quad \text{ve} \quad x_4 = 250^\circ \quad \text{olur.}$$

Buna göre, $[0, 360^\circ]$ aralığındaki kökler;

$20^\circ, 70^\circ, 200^\circ$ ve 250° dir.

Örnek 3:

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow 4x = k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 4x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{veya} \quad x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Buradan,

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{ifadesinde,}$$

$k = 0, k = 1$ ve $k = 2$ için, $[0, \pi]$ aralığındaki kökler; $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$ ve $x_3 = \pi$ dir.

$$x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{ifadesinde}$$

$k = 0$ ve $k = 1$ için, $[0, \pi]$ aralığındaki kökler;

$$x_4 = \frac{\pi}{12} \quad \text{ve} \quad x_5 = \frac{7\pi}{12} \quad \text{dir.}$$

O halde, verilen aralıktaki çözüm kümesi,

$$\text{Ç.K} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \pi\right\} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = 2$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{olur.}$$

$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ olduğundan sinüsünün değeri $\frac{2}{\sqrt{3}}$ olan açı bulunamayacağından bu denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek 5:

$$\sin(2x - 10^\circ) = \sin(20^\circ - x)$$

denkleminin $(0^\circ, 180^\circ)$ aralığındaki en büyük kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\sin(2x - 10^\circ) = \sin(20^\circ - x) \text{ ise,}$$

$$2x - 10^\circ = 20^\circ - x + k.360^\circ$$

$$3x = 30^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 10^\circ + k.120^\circ$$

veya

$$2x - 10^\circ = 180^\circ - (20^\circ - x) + k.360^\circ$$

$$x = 170^\circ + k.360^\circ \text{ dir.}$$

Buradan,

$$x = 10^\circ + k.120^\circ \text{ ifadesinde}$$

k = 0 ve k = 1 değerleri için kökler,

$$x_1 = 10^\circ \text{ ve } x_2 = 130^\circ \text{ olur.}$$

$$x = 170^\circ + k.360^\circ \text{ ifadesinde,}$$

k = 0 için kök, $x_3 = 170^\circ$ olur.

Buna göre,

 $(0^\circ, 180^\circ)$ aralığındaki en büyük kök 170° bulunur.**Örnek 6:**

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

denkleminin dar açı olan köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ veya } \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olur.}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

denkleminin köklerini bulalım.

$$2x = 60^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ + k.180^\circ$$

k = 0 için, $x_1 = 30^\circ$ olur.**veya**

$$2x = 180^\circ - 60^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ + k.180^\circ$$

k = 0 için, $x_2 = 60^\circ$ olur.

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 300^\circ$$

denkleminin köklerini bulalım.

$$2x = 300^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = 150^\circ + k.180^\circ$$

Bu eşitlikten dar açı olan kök elde edilmez.

veya

$$2x = 180^\circ - 300^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = -60^\circ + k.180^\circ$$

Bu eşitlikten de dar açı olan kök elde edilmez.

Buna göre, dar açı olan kökler 30° ve 60° dir.**Bilgi Uygulama****Soru 1:**

$$\sin(x + 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{50^\circ, 120^\circ\}$

✓ B) $\{50^\circ, 110^\circ\}$

C) $\{60^\circ, 150^\circ\}$

D) $\{80^\circ, 150^\circ\}$

E) $\{100^\circ, 150^\circ\}$

Soru 2

$$\sin 2x = \cos 70^\circ$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki en büyük kökü kaç derecedir?

A) 190° B) 210° C) 240° ✓ D) 260° E) 290°

Soru 3:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

A) $\frac{2\pi}{6}$ B) π ✓ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) 2π

Soru 4:

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığında kaç kökü vardır?

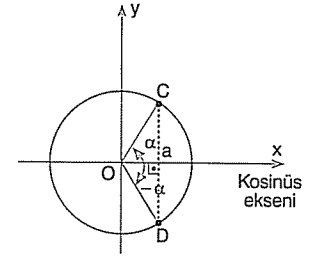
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 ✓ E) 6

Soru 5:

$$\sin(2x - 10^\circ) = \cos(x + 70^\circ)$$

denkleminin $(0^\circ, 180^\circ)$ aralığında kaç kökü vardır?

A) 1 B) 2 ✓ C) 3 D) 4 E) 5

cos x = a Denkleminin Çözümü $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,kosinüsü a olan açılar, $\alpha + k.2\pi$ veya $(-\alpha) + k.2\pi$ değerleridir.**Bilgi**

cos x = cos α denkleminin kökleri

$$x_1 = \alpha + k.2\pi \text{ veya}$$

$$x_2 = -\alpha + k.2\pi \text{ dir. } (k \in \mathbb{Z})$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki köklerini bulalım.**Çözüm:**

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \text{ ise,}$$

$$x = 60^\circ + k.360^\circ \text{ ifadesinde,}$$

$$k = 0 \text{ için, } x_1 = 60^\circ \text{ olur.}$$

veya

$$x = -60 + k.360^\circ \text{ ifadesinde}$$

$$k = 1 \text{ için, } x_2 = 300^\circ \text{ olur.}$$

Buna göre, $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki kökler, 60° ve 300° olur.

Örnek 2:

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos 30^\circ \text{ ise,}$$

$$3x = 30^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 10^\circ + k.120^\circ \text{ ifadesinde,}$$

$k = 0, k = 1$ ve $k = 2$ için, kökler;

$$x_1 = 10^\circ, x_2 = 130^\circ \text{ ve } x_3 = 250^\circ \text{ olur.}$$

veya

$$3x = -30^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow x = -10^\circ + k.120^\circ \text{ ifadesinde,}$$

$k = 1, k = 2$ ve $k = 3$ için, kökler;

$$x_4 = 110^\circ, x_5 = 230^\circ \text{ ve } x_6 = 350^\circ \text{ olur.}$$

Buna göre, $[0, 360^\circ]$ aralığındaki kökler;

$10^\circ, 110^\circ, 130^\circ, 230^\circ, 250^\circ$ ve 350° olmak üzere, altı tanedir.

Örnek 3:

$$\cos(2x - 50^\circ) = \sin 50^\circ$$

denkleminin $[180^\circ, 270^\circ]$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos(2x - 50^\circ) = \sin 50^\circ = \cos 40^\circ \text{ ise,}$$

$$2x - 50^\circ = 40^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 90^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 45^\circ + k.180^\circ \text{ ifadesinde,}$$

$k = 1$ için kök, $x_1 = 225^\circ$ olur.

veya

$$2x - 50^\circ = -40^\circ + k.360^\circ \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 2x = 10^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 5^\circ + k.180^\circ \text{ ifadesinde,}$$

$k = 1$ için kök, $x_2 = 185^\circ$ olur.

Buna göre, $[180^\circ, 270^\circ]$ aralığındaki kökler,

$x_1 = 225^\circ$ ve $x_2 = 185^\circ$ bulunur.

Örnek 4:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{\pi}{3}\right]\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \text{ ise,}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} - x + k.2\pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{11\pi}{30} + k.2\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{60} + k.\pi \text{ olur.}$$

veya

$$x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + x + k.2\pi \Rightarrow \text{Ç.K} = \emptyset \text{ dir.}$$

Buna göre, çözüm kümesi,

$$\text{Ç.K} = \left\{ x \mid x = \frac{11\pi}{60} + k.\pi \text{ ve } k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5:

$$\cos(3a + 20^\circ) = \sin(2a + 40^\circ)$$

denkleminin $[0^\circ, 90^\circ]$ aralığındaki en küçük kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\cos x = \sin y$$

İfadesinin en küçük kökü için, $x + y = 90^\circ$ olmalıdır.

Buna göre,

$$(3a + 20^\circ) + (2a + 40^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 5a + 60^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 5a = 30^\circ$$

$$\Rightarrow a = 6^\circ \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Soru 2:

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x = 3$$

denkleminin $(0^\circ, 90^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{30^\circ\}$ B) $\emptyset$ C) $\{15^\circ\}$ D) $\{60^\circ\}$ E) $\{75^\circ\}$

Soru 3:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

Soru 4:

$$\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) 2π

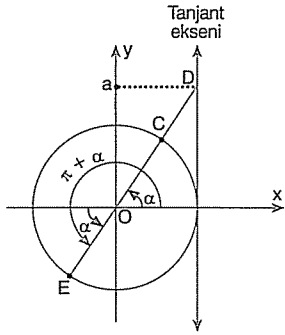
Soru 5:

$$-\cos(x + 60^\circ) = \cos 2x$$

denklemini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

- A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

tan x = a Denkleminin Çözümü



$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

tanjantı a olan açılar; $\alpha + k\pi$ veya $\pi + \alpha + k\pi$ değerleridir.

Bilgi

Tanjant fonksiyonunun esas periyodu π olduğundan;

$\tan x = \tan \alpha$ denkleminin kökleri,

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

şeklinde bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0$$

denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \tan 2x = \sqrt{3} &\Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \\ &\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ &\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ifadesinden, $k = 0$ ve $k = 1$ için kökler;

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ ve } x_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\tan(x + 10^\circ) = \cot 70^\circ$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \tan(x + 10^\circ) &= \cot 70^\circ \\ \Rightarrow \tan(x + 10^\circ) &= \tan 20^\circ \\ \Rightarrow x + 10^\circ &= 20^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \Rightarrow x &= 10^\circ + k \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

ifadesinden, $k = 0$ ve $k = 1$ için kökler;

$$x_1 = 10^\circ \text{ ve } x_2 = 190^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

denkleminin dar açı olan kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} - x + k\pi \\ \Rightarrow 3x &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \Rightarrow 3x &= -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \Rightarrow x &= -\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ifadesinden, $k = 1$ için, dar açı olan kök;

$$x = \frac{5\pi}{18} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\tan 2x = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

denklemin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\tan(-a) = -\tan a$ olduğundan,

$$-\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\tan 2x = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = -x - \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ olduğundan,}$$

$$\text{Ç.K} = \left\{ x \mid x = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ ve } k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ olur.}$$

Örnek 5:

$$\tan(a + 10^\circ) \cdot \tan(40^\circ - 2a) = 1$$

denkleminin en küçük pozitif kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\tan(a + 10^\circ) = \frac{1}{\tan(40^\circ - 2a)} = \cot(40^\circ - 2a)$$

$$\Rightarrow \tan(a + 10^\circ) = \tan(90^\circ - 40^\circ + 2a)$$

$$\Rightarrow \tan(a + 10^\circ) = \tan(50^\circ + 2a)$$

$$\Rightarrow a + 10^\circ = 50^\circ + 2a + k \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow a = -40^\circ - k \cdot 180^\circ$$

$k = -1$ için, en küçük pozitif kök $a = 140^\circ$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\tan 2x = \cot 10^\circ$$

denkleminin $(0^\circ, 180^\circ]$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

$$\checkmark \text{ A) } \{40^\circ, 130^\circ\} \quad \text{B) } \{30^\circ, 120^\circ\} \quad \text{C) } \{50^\circ, 140^\circ\}$$

$$\text{D) } \{20^\circ, 140^\circ\} \quad \text{E) } \{70^\circ, 120^\circ\}$$

Soru 2:

$$\tan^2 2x = \frac{1}{3}$$

denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

$$\text{A) } \frac{11\pi}{24} \quad \text{B) } \frac{17\pi}{24} \quad \text{C) } \frac{19\pi}{24} \quad \text{D) } \frac{3\pi}{2} \quad \checkmark \text{ E) } 2\pi$$

Soru 3:

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

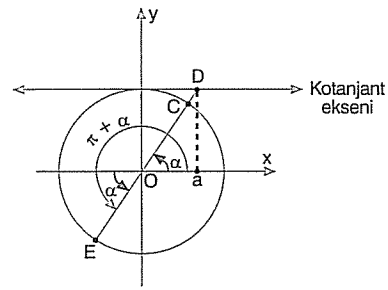
$$\checkmark \text{ A) } \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{B) } \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{C) } \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{D) } \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{E) } \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



MATEMATİK 2 - Trigonometri

$\cos x = 0$ denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki kökü,
 $x = \frac{\pi}{2}$ dir.

$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ denkleminin

$[0, \pi]$ aralığındaki kökü, $\frac{2\pi}{3}$ dir.

O halde, kökler toplamı;

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 8$$

olduğuna göre, x in $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ aralığındaki değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 8$$

$$\frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = 8$$

$$\frac{2}{\cos^2 x} = 8$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \text{ ise,}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ veya } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ aralığında $\cos x$ pozitif olduğundan,

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi$$

olduğundan istenilen aralıktaki kök, $x = \frac{5\pi}{3}$ olarak bulunur.

Örnek 4:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

denkleminin dar açılı olan kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ ise,}$$

$$2x = 30^\circ + k.360^\circ \text{ veya } 2x = 180^\circ - 30^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 15^\circ + k.180^\circ \text{ veya } x = 75^\circ + k.180^\circ$$

$k = 0$ ve 1 değerlerini alırsa,

$$x_1 = 15^\circ, x_2 = 195^\circ, x_3 = 75^\circ \text{ ve } x_4 = 255^\circ \text{ bulunur.}$$

Verilen ifadenin her iki tarafının karesi alındığından bulunan kökler kontrol edilmelidir.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eşitliğine dikkat edilirse, $\sin x$ in $\cos x$ ten büyük olduğu görülür.

Buna göre, 15° ve 255° nin verilen denklemini sağlamaz.

75° ve 195° açıları için ise denklem sağlanır.

Soruda dar açılı sorulduğundan denklemin dar açılı kökü 75° bulunur.

Örnek 5:

$$\cos 2x \cos 10^\circ + \sin 2x \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki en büyük kökünü bulalım.

Çözüm:

Verilen ifade kosinüsün fark formülüdür.

$$\cos 2x \cos 10^\circ + \sin 2x \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(2x - 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(2x - 10^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2x - 10^\circ = 30^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 40^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ + k.180^\circ \text{ dir.}$$

veya

$$2x - 10^\circ = -30^\circ + k.360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = -20^\circ + k.360^\circ \Rightarrow x = -10^\circ + k.180^\circ \text{ dir.}$$

Uygun k değerleri seçilerek $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığında elde edilen kökler;

$$x_1 = 20^\circ, x_2 = 200^\circ, x_3 = 170^\circ \text{ ve } x_4 = 350^\circ \text{ olur.}$$

En büyük kök 350° bulunur.

Örnek 6:

$$\tan x + \cot x = 2$$

denkleminin $(180^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\tan x + \cot x = 2$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 = \sin 90^\circ \text{ ise,}$$

$$2x = 90^\circ + k.360^\circ \text{ veya } 2x = 180^\circ - 90^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 45^\circ + k.180^\circ \text{ veya } x = 45^\circ + k.180^\circ$$

$k = 0, k = 1$ alınırsa kökler;

$x_1 = 45^\circ$ ve $x_2 = 225^\circ$ olduğundan, istenen aralıktaki kök 225° olarak bulunur.

Örnek 7:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığında kaç kökü olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ veya } \sin x = 2$$

$$\sin x = 2 \text{ ise, } \emptyset$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ ise, } \sin x = \sin 30^\circ$$

$$x = 30^\circ + k.360^\circ \text{ veya } x = 180^\circ - 30^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 30^\circ + k.360^\circ \text{ veya } x = 150^\circ + k.360^\circ$$

$k = 0$ alınırsa, kökler 30° ve 150° olur.

Buna göre, istenen aralıkta iki kök vardır.

Örnek 8:

$$2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$$

denkleminin $(90^\circ, 270^\circ)$ aralığındaki en büyük kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ yazalım.}$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 3\cos x - 3 = 0$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0 \text{ ise,}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ veya } \cos x = -1 \text{ olur.}$$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ denkleminin $(90^\circ, 270^\circ)$ aralığındaki kökleri 120° ve 240° dir.

$\cos x = -1$ denkleminin aynı aralıktaki kökü 180° dir.
Buna göre, verilen denklemin $(90^\circ, 270^\circ)$ aralığındaki en büyük kökü 240° olarak bulunur.

Örnek 9:

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$ olmak üzere,

$$\sin 6x - \sin 4x = 3 \sin x$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$2 \cdot \sin\left(\frac{6x - 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x + 4x}{2}\right) = 3 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos 5x = 3 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos 5x - 3 \cdot \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot (2 \cdot \cos 5x - 3) = 0$$

Denkleminin kökleri,

$$(2 \cdot \cos 5x - 3) = 0 \Rightarrow \cos 5x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Ç.K} = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ eşitliğinden,}$$

$$k = 0 \text{ için } x = 180^\circ \text{ bulunur.}$$

veya

$$x = 180^\circ - 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k = 0 \text{ için } x = 0^\circ \text{ bulunur.}$$

$$k = 1 \text{ için } x = 360^\circ \text{ bulunur.}$$

Buna göre, istenilen aralıktaki çözüm kümesi

$$\text{Ç.K} = \{0^\circ, 180^\circ, 360^\circ\} \text{ bulunur.}$$

Örnek 10:

$$\tan 7x \cdot \cot\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

denkleminin en küçük pozitif kökünü bulalım.

Çözüm:

$$\tan 7x \cdot \cot\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

denkleminin her iki tarafını $\tan 7x$ e bölelim.

$$\Rightarrow \cot\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cot 7x$$

$$\Rightarrow 7x = 3x + \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$$

$$k = 0 \text{ için, en küçük pozitif kök } x = \frac{\pi}{6} \text{ olur.}$$

Örnek 11:

$$\arcsin(2x - 1) = \arccos(1 - x)$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\arcsin(2x - 1) = \arccos(1 - x) = \theta \text{ olsun.}$$

$$\sin \theta = 2x - 1 \text{ ve } \cos \theta = 1 - x \text{ olur.}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow (2x - 1)^2 + (1 - x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 1 - 2x + x^2 = 1$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (5x - 1) \cdot (x - 1) = 0 \text{ ise,}$$

$$x = \frac{1}{5} \text{ veya } x = 1 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$\text{kökler toplamı, } 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek 12:

$$\arctan x = \operatorname{arccot}(2x - 1) = \theta$$

şartını sağlayan x in en büyük değeri için θ açısının $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki değerlerini bulalım.

Çözüm:

$$\arctan x = \operatorname{arccot}(2x - 1) = \theta \text{ ise,}$$

$$\tan \theta = x \text{ ve } \cot \theta = 2x - 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

$$\Rightarrow x \cdot (2x - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \text{ ise,}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ veya } x = 1 \text{ bulunur.}$$

x in büyük değeri 1 olduğundan $x = 1$ için,

$$\tan \theta = \cot \theta = 1 \text{ olur.}$$

$$\tan \theta = 1 \text{ ise } \theta \text{ nın } (0^\circ, 360^\circ) \text{ aralığındaki değerleri}$$

$$45^\circ \text{ ve } 225^\circ \text{ olur.}$$

Örnek 13:

$$\cos 4x + \sin 2x - 1 = 0$$

denkleminin $(0^\circ, 180^\circ)$ aralığındaki köklerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\cos 4x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ veya } \sin 2x = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin 2x = 0 \text{ ise,}$$

$$\Rightarrow 2x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ veya } 2x = 180^\circ - 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ veya } x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x_1 = 0^\circ \text{ veya } x_2 = 90^\circ \text{ dir.}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ ise,}$$

$$\Rightarrow 2x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ veya } 2x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 15^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ veya } x = 75^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x_3 = 15^\circ \text{ veya } x_4 = 75^\circ \text{ dir.}$$

$$\text{Kökler toplamı : } 0^\circ + 90^\circ + 15^\circ + 75^\circ = 180^\circ \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$2 \cdot \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

denklemini sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10° B) 20° C) 30° D) 45° E) 60°

Soru 2:

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 10° B) 15° C) 25° D) 30° E) 45°

Soru 3:

$$\frac{1}{1 - \tan x} + \frac{1}{1 + \tan x} = 1$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\emptyset$ B) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ D) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ E) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

Soru 4:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin x} = 1$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

- A) π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

Soru 5:

$$\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$$

denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

Soru 6:

$$\cot^2 x - 2\cot x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

- A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{7\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{6}$ E) $\frac{8\pi}{5}$

Soru 7:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki en büyük kökü kaç derecedir?

- A) 210 B) 240 C) 300 D) 330 E) 345

Soru 8:

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} - \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = 2\sqrt{3}$$

şartını sağlayan x dar açısı kaç derecedir?

- A) $\frac{\pi}{7}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

Soru 9:

$$\cos 2x + \frac{\cos 4x + \sin^2 2x}{\cos 2x} = 1$$

denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki en büyük kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

Soru 10:

$$\cot x - \tan x = 2$$

denkleminin $(2\pi, 4\pi)$ aralığındaki en büyük kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{17\pi}{8}$ B) $\frac{19\pi}{8}$ C) $\frac{19\pi}{6}$ D) $\frac{29\pi}{8}$ E) $\frac{33\pi}{10}$

Soru 11:

$$\frac{-\sin 2x}{1 - 2\cos^2 x} = \cot \frac{3\pi}{8}$$

olduğuna göre, x dar açısı kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{16}$ E) $\frac{\pi}{24}$

Soru 12:

$$\cos x + \sin 4x = 0$$

denkleminin dar açı olan kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{10}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{10}$

Soru 13:

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos x = \cos \frac{\pi}{12}$$

denkleminin $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ aralığındaki kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{7\pi}{24}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{11\pi}{24}$

Soru 14:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2\pi}{9}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) 2π

Soru 15:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

şartını sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

Soru 16:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 2$$

denklemini sağlayan x dar açısı kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

Soru 17:

$$3\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x + \cos^2 2x = 0$$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{12}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

Bilgi

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$$

şeklindeki denklemlere lineer denklemler denir. Bu tür denklemler çözülürken eşitliğin her iki tarafı a ya bölündükten sonra $\frac{b}{a} = \tan \alpha$ yazılarak sonuca gidilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin x + \tan 30^\circ \cdot \cos x = 1$$

$$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos x = 1$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos x}{\cos 30^\circ} = 1$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \sin 60^\circ \text{ ise,}$$

$$x + 30^\circ = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ veya } x + 30^\circ = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ veya } x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ olur.}$$

Buradan kökler,

$$x_1 = 30^\circ, x_2 = 90^\circ \text{ olur.}$$

Buna göre, $\mathcal{C}.K = \{30^\circ, 90^\circ\}$

bulunur.

Örnek 2:

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$$

denkleminin $[0^\circ, 360^\circ]$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \cos x - \tan 60^\circ \cdot \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \cos x - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin x}{\cos 60^\circ} = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x + 60^\circ) = \cos 60^\circ \text{ ise,}$$

$$x + 60^\circ = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = k \cdot 360^\circ \text{ dir.}$$

veya

$$x + 60^\circ = -60^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ dir.}$$

Buna göre, kökler $0^\circ, 360^\circ, 240^\circ$ bulunur.

Örnek 3:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x - 1 = \sin x$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x - 1 = \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos x - \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 30^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(30^\circ - x) = \sin 60^\circ \text{ ise}$$

$$30^\circ - x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = -30^\circ - k \cdot 360^\circ$$

veya

$$30^\circ - x = 180^\circ - 60^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = -90^\circ - k \cdot 360^\circ$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x \mid x = -30^\circ - k \cdot 360^\circ \text{ veya } x = -90^\circ - k \cdot 360^\circ \right\} \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = 1$$

şartını sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 75° B) 60° C) 45° D) 30° E) 15°

Soru 2:

$$2\sin x - 2\sqrt{3} \cdot \cos x = 4$$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 30° B) 60° C) 90° D) 120° E) 150°

Soru 3:

$$\sin 3x + \sqrt{3} \cdot \cos 3x = 1$$

denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç radyandır?

- A) π B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{13\pi}{9}$ D) $\frac{14\pi}{9}$ E) $\frac{29\pi}{18}$

Bilgi

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = 0$$

şeklindeki denklemlere homojen denklemler denir. Bu tür denklemler çözülürken eşitliğin her iki tarafı $\cos x$ e veya $\sin x$ e bölünerek sonuca gidilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$$

$$\frac{\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{3} \cdot \tan x = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \text{ ise,}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{eşitliğinden kökler } x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{7\pi}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{2\pi}{3} \text{ ise,}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{eşitliğinden kökler } x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{2} = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{2} = 0$$

eşitliğinin iki yanını $\cos \frac{x}{2}$ ile bölelim.

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \text{ ise,}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Buna göre,

$$Ç.K = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\cos 2x + 2\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki en büyük kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{11\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) $\frac{7\pi}{6}$ D) $\frac{11\pi}{6}$ E) $\frac{23\pi}{12}$

Soru 2:

$$\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 3x = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{18}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Bilgi

$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x \cdot \sin x + c \cdot \sin^2 x = 0$$

şeklindeki denklemlere ikinci dereceden homojen denklemler denir. Bu tür denklemler çözülürken her iki taraf $\cos^2 x$ e veya $\sin^2 x$ e bölündükten sonra sonuca gidilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\sqrt{3} \cdot \cos^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x = 0$$

denkleminin dar açı olan köklerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \cos^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) \cdot \tan x + \tan^2 x = 0$$

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cdot \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\tan x \quad -1$$

$$\tan x \quad -\sqrt{3}$$

$$(\tan x - 1) \cdot (\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan x = 1 \text{ veya } \tan x = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

Buna göre, dar açı olan kökler,

$$x_1 = 45^\circ \text{ ve } x_2 = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

olduğuna göre, x kaç derecedir?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

1. $\frac{\sin 50^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

2. $a + b = 120^\circ$ olduğuna göre,

$$\frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a - b)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $7x = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin 6x + \sin 4x}{\cos 2x \cdot \sin 6x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. $-8 \cdot \sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 100^\circ$

çarpımının sonucu $\sin 10^\circ$ un kaç katıdır?

- A) $2 \cdot \cos 20^\circ$ B) $2 \cdot \cos 10^\circ$ C) $2 \cdot \sin 20^\circ$
D) $\sin 20^\circ$ E) $\sin 10^\circ$

5. $\frac{\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

6. $\cos^2(x + y) - \cos^2(x - y)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cos 2x \cdot \cos 2y$ B) $-\sin 2x \cdot \sin 2y$
C) $-\cos 2x \cdot \cos 2y$ D) $\sin 2x \cdot \sin 2y$
E) $\sin 4x$

7. $4\cos 36^\circ - \frac{\sqrt{3}}{\sin 24^\circ}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\sec 12^\circ$ B) $2\cos 12^\circ$ C) $\sin 12^\circ$
D) $\operatorname{cosec} 12^\circ$ E) $-\sin 12^\circ$

8. $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, α açısının değeri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 15° B) 75° C) 195° D) 210° E) 255°

9. $\frac{1 + \cos 2x + \cos x}{\sin 2x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

denklemini sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 15° B) 80° C) 45° D) 60° E) 75°

10. $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 8$

denklemini sağlayan x dar açısı aşağıdaki aralıklardan hangisinde?

- A) $(35^\circ, 40^\circ)$ B) $(20^\circ, 40^\circ)$ C) $(40^\circ, 70^\circ)$
D) $(50^\circ, 90^\circ)$ E) $(60^\circ, 85^\circ)$

11. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ olmak üzere,

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \frac{1}{2} - \cos x$$

şartını sağlayan x açısı kaç radyandır?

- A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{7\pi}{12}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

12. $\frac{1}{\sec x} - \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{15^\circ, 75^\circ\}$ B) $\{75^\circ, 195^\circ\}$ C) $\{195^\circ, 225^\circ\}$
D) $\{15^\circ, 255^\circ\}$ E) $\{75^\circ, 255^\circ\}$

13. $\sin \alpha = 1 + \cos \alpha$

denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında kaç kökü vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. $0 < x < 2\pi$ olmak üzere,

$$\sin 2x + 2\cos^2 x = \cos 2x$$

denklemini sağlayan x açısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

15. $0 < x < \pi$ olmak üzere,

$$\cos 5x = \frac{1}{2}$$

denklemini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

- A) 3 B) 5 C) 9 D) 7 E) 8

16. $\sin 60^\circ \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 60^\circ = \cos 40^\circ$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki köklerinin toplamı kaç derecedir?

- A) 270° B) 300° C) 310° D) 320° E) 345°

17. $\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$

denkleminin $(0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 60° B) 75° C) 210° D) 240° E) 330°

18. $\cot(x + 20^\circ) \cdot \cot(2x - 50^\circ) = 1$

denkleminin $(180^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 450° B) 460° C) 480° D) 500° E) 540°

1. $5x = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre,

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x \cdot \cos 4x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

2. $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y)$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin 2x \cdot \sin 2y$ B) $\sin 2x \cdot \cos 2y$ C) $\cos 2x \cdot \cos 2y$
D) $\cos 2x \cdot \sin 2y$ E) $2 \cdot \sin x \cdot \sin y$

3. $\frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a - \sin^2 b}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) -2

4. $\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\cos 7x + \cos 5x} = \cot y$

olduğuna göre, $x + y$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

5. $\cos x = \frac{3}{4}$ ve $\cos y = \frac{1}{6}$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{7}{20}$ B) $\frac{11}{48}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{19}{28}$

6. $a \neq b$ olmak üzere,

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin c} = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

olduğuna göre, $a + b + 2c$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) $\frac{3\pi}{2}$

7. $\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x - \cos x}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sin 2x$ B) $-\cot 2x$ C) $-\sin 2x$
D) $-\tan 2x$ E) $\tan 2x$

8. $\frac{\sin 6^\circ + \sin 24^\circ + \sin 42^\circ}{\cos 6^\circ + \cos 24^\circ + \cos 42^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) $\tan 24^\circ$ C) $\sin 24^\circ$ D) $\cos 24^\circ$ E) $\tan 12^\circ$

9. $20x = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre,

$$\frac{\cos 8x \cdot \cos 16x}{\cos 8x - \cos 16x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -1 E) 1

10. $2 \cdot \cos 54^\circ - \frac{1}{\sin 36^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2 \sin 18^\circ$ B) $\sin 18^\circ$ C) $-\cos 18^\circ$
D) $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 18^\circ$ E) $-\frac{1}{2} \sec 18^\circ$

11. $0 < x < 2\pi$ olmak üzere,

$$\sin^3 x = \sin x$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 3π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 2π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) π

12. $\frac{2}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

13. $\frac{\cos 181^\circ - \cos 1^\circ}{\sin 46^\circ - \cos 134^\circ} - \frac{\sin 46^\circ - \cos 134^\circ}{\cos 181^\circ - \cos 1^\circ}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\sqrt{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2} \sin 46^\circ \cdot \cos 1^\circ$ E) $\sin 88^\circ$

14. $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 x}{\cos^2 7x - \cos^2 x}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) $\cot 4x$ D) $-\tan 3x$ E) $\tan 4x$

15. A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$\frac{\cos 2A + \cos 2B}{\sin 2A + \sin 2B} = -\frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $\tan C$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 4

16. $\frac{1}{1 + \tan^2 x} + \frac{1}{1 - \tan^2 x} = -\frac{1}{4}$

denklemini sağlayan x dar açısı kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

17. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

18. $x + y = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$$\frac{7}{\sin y} + \frac{8}{\cos x} = 30$$

olduğuna göre y açısı kaç radyandır?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{8}$

19. $\cos^2 x - \cos 2x + \sqrt{3} = \sin^2 x + 2 \cdot \sin 2x$

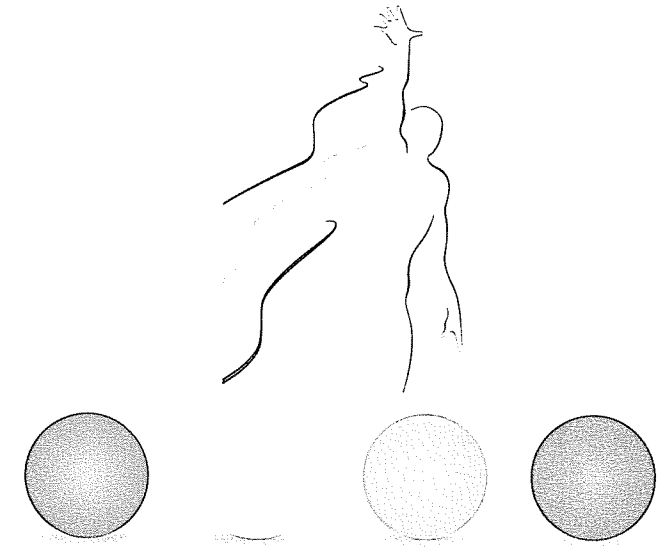
denklemini sağlayan en küçük dar açının tanjantı kaçtır?

- A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

20. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{7\pi}{12}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{3}$



BÖLÜM 2

KARMAŞIK SAYILAR

KARMAŞIK SAYILAR

Sanal Birim

Bilgi

$\sqrt{-1}$ sayısına **sanal (imajiner) birim** denir ve i harfi ile gösterilir.

$$i = \sqrt{-1} \text{ ve } i^2 = -1$$

bulunur.

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ dir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ ve $i^{4n} = 1$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

a) $x^2 + 49 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

denklemlerinin köklerini bulalım.

Çözüm:

a) $x^2 + 49 = 0 \Rightarrow x^2 = -49 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-49}$
 $\Rightarrow x = \pm 7\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm 7i$ dir.

b) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$
 $\Rightarrow x = \pm i$ dir.

Örnek 2:

Aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazalım.

a) i^{37} b) i^{52} c) i^{83} d) i^{2010}

Çözüm:

a) $\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ -36 & 9 \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow i^{37} = (i^4)^9 \cdot i^1 = 1^9 \cdot i^1 = i$ dir.

b) $\begin{array}{r|l} 50 & 4 \\ -48 & 12 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow i^{52} = (i)^0 = 1$ dir.

c) $\begin{array}{r|l} 83 & 4 \\ -80 & 20 \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow i^{83} = i^3 = -i$ dir.

d) $\begin{array}{r|l} 2008 & 4 \\ -2008 & 502 \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow i^{2010} = i^2 = -1$ dir.

Örnek 3:

$$i^5 + i^6 + i^7 + i^8$$

toplamını bulalım.

Çözüm:

$i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, $i^7 = i^3 = -i$ ve

$i^8 = i^4 = 1$ olduğundan,

$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i - 1 - i + 1 = 0$ dir.

Örnek 4:

Aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazalım.

a) i^{-3} b) i^{-10} c) i^{-73}

Çözüm:

a) $i^4 = 1$ olduğundan,

$i^{-3} = i^{-3} \cdot i^4 = i^1 = i$ dir.

b) $i^{12} = 1$ olduğundan,

$i^{-10} = i^{-10} \cdot i^{12} = i^{12-10} = i^2 = -1$ dir.

c) $i^{76} = 1$ olduğundan,

$i^{-73} = i^{-73} \cdot i^{76} = i^{76-73} = i^3 = -i$ dir.

Örnek 5:

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-4}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-4} &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} \\ &= \sqrt{6} \cdot i \cdot \sqrt{2} \cdot i \cdot 2 \cdot i \\ &= 4\sqrt{3} \cdot i^3 = -4\sqrt{3}i \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 6:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{101}$$

toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}& i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \dots + (i^{97} + i^{98} + i^{99} + i^{100}) + i^{101} \\ &= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \dots + (i - 1 - i + 1) + i \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + i = i \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek 7:

$i = \sqrt{-1}$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\frac{i^{8n+3} + i^{4n-1}}{i^{4n}}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimini bulalım.

Çözüm:

n , pozitif tamsayı olmak üzere,

$i = \sqrt{-1}$ ise $i^4 = 1$ ve $i^{4n} = 1$ olur.

Buna göre,

$$\frac{i^{8n+3} + i^{4n-1}}{i^{4n}} = \frac{(i^{4n})^2 \cdot i^3 + i^{4n} \cdot i^{-1}}{i^{4n}} = \frac{1 \cdot i^3 + i^{-1}}{1}$$

$$i^3 + i^{-1} = i^3 + i^3 = -2i \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i^{201} + i^{301} + i^{401}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 1 C) i D) 2i E) 3i

Soru 2:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -4i B) -4 C) -2i D) 4i E) 4

Soru 3:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i, i^2, i^3, \dots, i^{29}$$

çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) i D) -i E) 29i

Soru 4:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i^{-7} + i^{-5} + i^{-3} + i^{-1} + i^3 + i^5$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2i B) 2i C) 1 + i D) 2 - i E) 2

Soru 5:

$i = \sqrt{-1}$ ve n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$i^{16n-2} + i^{8n+1} - i^{4n-3}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -3i C) -1 D) 2i E) 3

Soru 6:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i^{2!} + i^{3!} + i^{4!} + \dots + i^{99!} + i^{100!}$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) 94 B) 95 C) 96 D) 98 E) 99

Soru 7:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$P(x) = 4x^{17} - 3x^3 - x$$

olduğuna göre, $P(-i)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 8i B) 6i C) -6i D) -6 E) 6

Karmaşık Sayı

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) olmak üzere, $a + bi$ biçimindeki sayılara **karmaşık (kompleks) sayı** denir.

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$\mathbb{C} = \{z : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } i = \sqrt{-1}\}$ dir. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, z sayısının $z = a + bi$ şeklindeki yazılışına, karmaşık sayının **standart biçimi** denir. a değerine karmaşık sayının **gerçek (reel) kısmı**, b değerine karmaşık sayının **sanal (imajiner) kısmı** denir.

$\text{Re}(z) = a$ ve $\text{Im}(z) = b$ biçiminde gösterilir.

$z = a + bi$ sayısında $b = 0$ ise $z = a \in \mathbb{R}$ dir. Her gerçek (reel) sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır. Bu nedenle $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki karmaşık sayıların reel ve imajiner kısmını bulalım.

- a) $z_1 = 7 + 8i$ b) $z_2 = 12 - 9i$
c) $z_3 = 5i$ d) $z_4 = \sqrt{19}$

Çözüm:

- a) $z_1 = 7 + 8i$ karmaşık sayısının reel kısmı 7 ve imajiner kısmı 8 dir.
b) $z_2 = 12 - 9i$ karmaşık sayısının reel kısmı 12 ve imajiner kısmı -9 dur.
c) $z_3 = 5i = 0 + 5i$ karmaşık sayısının reel kısmı 0 ve imajiner kısmı 5 tir.
d) $z_4 = \sqrt{19} = \sqrt{19} + 0.i$ karmaşık sayısının reel kısmı $\sqrt{19}$ ve imajiner kısmı 0 dir.

Örnek 2:

Aşağıdaki tablodaki boşlukları doldurunuz.

Karmaşık sayı	Standart biçimi	Reel kısmı	İmajiner kısmı
$z_1 = 4i$	$0 + 4i$	0	4
$z_2 = -1 + 107i$			
$z_3 = -8$			
$z_4 = \sqrt{-4}$			
$z_5 = 0$			
$z_6 = \sqrt{2}$			

Çözüm:

Karmaşık sayı	Standart biçimi	Reel kısmı	İmajiner kısmı
$z_1 = 4i$	$0 + 4i$	0	4
$z_2 = -1 + 107i$	$-1 + 107i$	-1	107
$z_3 = -8$	$-8 + 0i$	-8	0
$z_4 = \sqrt{-4}$	$0 + 2i$	0	2
$z_5 = 0$	$0 + 0i$	0	0
$z_6 = \sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 0i$	$\sqrt{2}$	0

Örnek 3:

$$x^2 + 49 = 0$$

denkleminin köklerinin reel ve imajiner kısımlarını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x^2 + 49 = 0 &\Rightarrow x^2 = -49 \\ &\Rightarrow x = \pm \sqrt{-49} \text{ bulunur.} \\ &\Rightarrow x = \pm 7i \\ &\Rightarrow x_1 = -7i \text{ ve } x_2 = 7i \end{aligned}$$

karmaşık sayıların reel kısmı 0 ve imajiner kısmı sırasıyla -7 ve 7 dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdaki tablodan boşlukları doldurunuz.

Karmaşık sayı	Standart biçimi	Reel kısmı	İmajiner kısmı
$z_1 = -3$			
$z_2 = -5i$			
$z_3 = \sqrt{-4}$			
$z_4 = \sqrt[3]{-8}$			
$z_5 = 3 - 2i$			
$z_6 = -2i - 4$			
$z_7 = 7 + 3i$			

Soru 2:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-9} + i^3$$

olduğuna göre, $\text{Re}(z) \cdot \text{İm}(z)$ çarpımının değeri kaçtır?

- A) $-3\sqrt{3}$ B) -3 C) $-\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) 3

İki Karmaşık Sayının Eşitliği

Bilgi

İki karmaşık sayının birbirine eşit olması için sırasıyla reel kısımlarının ve imajiner kısımlarının birbirine eşit olması gerekir.

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere,
 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d)$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + 2yi \\ z_2 &= 6 + x.i \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $x - y$ farkını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &\Rightarrow x = 6 \text{ ve } 2y = x \\ &\Rightarrow x = 6 \text{ ve } 2y = 6 \\ &\Rightarrow x = 6 \text{ ve } y = 3 \text{ tür.} \\ x - y &= 6 - 3 = 3 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x + 1) + (y - 2)i \\ z_2 &= 3i \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &\Rightarrow (x + 1 = 0 \text{ ve } y - 2 = 3) \\ &\Rightarrow (x = -1 \text{ ve } y = 5) \\ &\Rightarrow x \cdot y = -1 \cdot 5 = -5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\begin{aligned} z_1 &= x.i^{33} + y.i^{43} \\ z_2 &= \sqrt{-8} + y \end{aligned}$$

olduğuna göre, $x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$z_1 = z_2 = x.i^{33} + y.i^{43} \Rightarrow z_1 = x.i - y.i \Rightarrow z_1 = (x - y)i$$

$$z_2 = \sqrt{-8} + y \Rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}.i + y \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &\Rightarrow x - y = 2\sqrt{2} \text{ ve } y = 0 \\ &\Rightarrow y = 0 \text{ ve } x = 2\sqrt{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre, $x + y = 0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + 2 + 3i \\ z_2 &= 5 + bi \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Soru 2:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z &= 4x - 1 + (y + 3)i \\ w &= 11 + xi - i \\ z &= w \end{aligned}$$

olduğuna göre, y nin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

Soru 3:

$$\begin{aligned} z_1 &= -3x + 2y + 8i \\ z_2 &= -21 + xi - yi \end{aligned}$$

karmaşık sayıları için $z_1 = z_2$ dir.

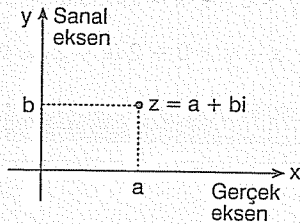
Buna göre, $x \cdot y$ kaçtır?

- A) -8 B) -5 C) 3 D) 2 E) -15

Karmaşık Düzlem

Bilgi

Karmaşık sayılar ile koordinat düzlemi arasında bire bir ve örten bir eşleme yapılabilir. Bu eşlemede $z = a + bi$ karmaşık sayısına (a, b) noktası karşılık gelir.



Bilgi Kavrama

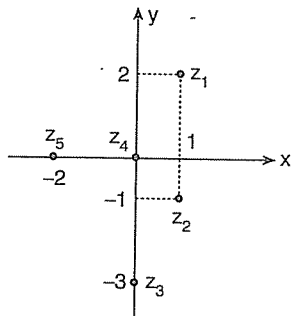
Örnek 1:

Aşağıdaki karmaşık sayıları karmaşık düzlemde gösterelim.

- a) $z_1 = 1 + 2i$ b) $z_2 = 1 - i$ c) $z_3 = -3i$
d) $z_4 = 0$ e) $z_5 = -2$

Çözüm:

- a) $z_1 = 1 + 2i = (1, 2)$
b) $z_2 = 1 - i = (1, -1)$
c) $z_3 = -3i = (0, -3)$
d) $z_4 = 0 = (0, 0)$
e) $z_5 = -2 = (-2, 0)$



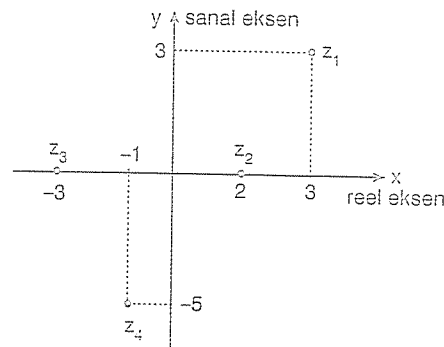
Bilgi Uygulama

Soru 1:

- a) $z_1 = 4i$
b) $z_2 = 3i$
c) $z_3 = 1 + 3i$
d) $z_4 = -2 + i$
e) $z_5 = -3 - 2i$
f) $z_6 = -4$

Karmaşık sayılarını karmaşık düzlemde gösteriniz.

Soru 2:



Yukarıdaki karmaşık düzlemde, z_1, z_2, z_3 ve z_4 karmaşık sayıları verilmiştir.

Buna göre, $\text{Re}(z_1) + \text{Im}(z_2) - \text{Re}(z_3) - \text{Im}(z_4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 11

Karmaşık Sayının Eşleniği

Bilgi

Bir karmaşık sayının eşleniği bulunurken karmaşık sayının sadece imajiner kısmının işareti değiştirilir.

$z = a + bi$ ise $\bar{z} = a - bi$ dir.

$\bar{\bar{z}} = z$ nin eşleniğidir.

$(\bar{\bar{z}}) = z$; z nin eşleniğinin eşleniği kendisine eşittir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniğini bulalım.

- a) $3 - 4i$ b) $7i$ c) -3 d) 0
e) $\sqrt{2}$ f) $-5i$ g) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

Çözüm:

	Karmaşık sayı	Standart biçimi	Eşleniği
a)	$3 - 4i$	$3 - 4i$	$3 + 4i$
b)	$7i$	$0 + 7i$	$-7i$
c)	-3	$-3 + 0.i$	-3
d)	0	$0 + 0.i$	0
e)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 0.i$	$\sqrt{2}$
f)	$-5i$	$0 - 5i$	$5i$
g)	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$	$\sqrt{3} + \sqrt{2} + 0.i$	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Karmaşık sayı (z)	Standart biçimi	Eşleniği
$3 - 4i$		
$4i + 5$		
$7i$		
$-7i$		
$-2 - 3i$		
$-5 + 4i$		
$\sqrt{3} - 1$		

Soru 2:

x ve y tamsayıdır.

$$z = \frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{3}i$$

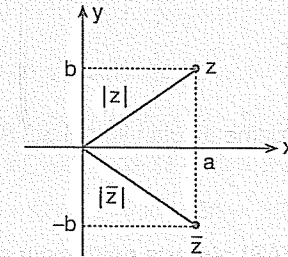
karmaşık sayısının eşleniği karmaşık düzlemde 3. bölgede bir nokta olduğuna göre, $x + y$ toplamı en çok kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

Karmaşık Sayının Mutlak Değeri

Bilgi

$z = a + bi$ karmaşık sayısının uzunluğu (mutlak değeri),



$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki karmaşık sayıların mutlak değerlerini bulalım.

- a) $z_1 = -3 + 4i$ b) $z_2 = \sqrt{5} - 2i$ c) $z_3 = -i$
d) $z_4 = 5$ e) $z_5 = 0$

Çözüm:

- a) $z_1 = -3 + 4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ tir.
b) $z_2 = \sqrt{5} - 2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = 3$ tür.
c) $z_3 = 0 - i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ dir.
d) $z_4 = 5 + 0.i \Rightarrow |z_4| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$ tir.
e) $z_5 = 0 + 0.i \Rightarrow |z_5| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ dir.

Örnek 2:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = 7 - 24i$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = 7 - 24i \text{ ise,}$$

$$|z| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{25^2} = 25 \text{ tir.}$$

Örnek 3:

Karmaşık düzleme ait olan iki nokta, $A(1 - 2i)$ ve $B(3 + 4i)$ dir.

Buna göre, $[AB]$ nin orta noktasının orijine olan uzaklığını bulalım.

Çözüm:

$[AB]$ nin orta noktası

C noktası olsun.

$A(1, -2)$ ile $B(3, 4)$

noktasının orta noktası

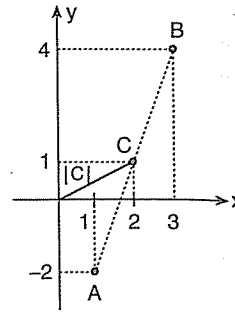
$C(x_1, y_1)$ ise

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ ve}$$

$$y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \text{ dir.}$$

$C(2, 1)$ olarak bulunur.

$$|C| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ tir.}$$



Örnek 4:

$$z = x + 2i$$

$$|z| = \sqrt{13}$$

olduğuna göre, x in pozitif değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = x + 2i \text{ ise } |z| = \sqrt{x^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$13 = 4 + x^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ tür. } (x > 0)$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z = a + 2 - 8i$$

karmaşık sayısının uzunluğu (modülü) 10 olduğuna göre, a nın negatif değeri kaçtır?

- A) -6 B) -7 C) -8 D) -9 E) -10

Soru 2:

$$z_1 = 2 + ai \text{ ve } z_2 = 1 + 2i$$

$$|z_1| = |z_2|$$

olduğuna göre, a nın pozitif değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$|z| + z = 1 + i$$

olduğuna göre, z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $i - 1$ B) i C) $i + 1$
D) $-i + 1$ E) $-i - 1$

Karmaşık Sayılarda İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

Bilgi

a, b, c reel (gerçek) sayılardır.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere,

$\Delta \geq 0$ ise denklemin kökleri reel sayılardır.

$\Delta < 0$ ise $i^2 = -1$ olmak üzere kökleri birbirinin eşleniği olan,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta} \cdot i}{2a} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, ikinci dereceden bir bilinmeyenli gerçekte katsayılı bir denklemin köklerinden biri $a + bi$ diğeri $a - bi$ dir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Karmaşık sayılar kümesinde,

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminde

$a = 1, b = -2$ ve $c = 5$ olup

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.5 = -16 \text{ dir.}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{-16}}{2.1} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \text{ dir.}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{-16}}{2.1} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \text{ dir.}$$

Denklemin çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$ bulunur. Köklerin birbirinin eşleniği olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 2:

Köklerinden biri $3 + 2i$ olan reel (gerçek) katsayılı ikinci dereceden denklemi bulalım.

Çözüm:

$$x_1 = 3 + 2i \text{ ise eşleniği } x_2 = 3 - 2i \text{ olur.}$$

$$T = x_1 + x_2 = (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$$

$$\mathcal{C} = x_1 \cdot x_2 = (3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$x^2 - Tx + \mathcal{C} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \text{ denklemi bulunur.}$$

MATEMATİK 2 - Karmaşık Sayılar

$$(1 + i)^2 = (-1 - i)^2 = 2i$$

$$(1 - i)^2 = (-1 + i)^2 = -2i$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 6:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(1 + i)^3 \cdot (1 - i)^3 + (1 + i)^8$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} & (1 + i)^3 \cdot (1 - i)^3 + (1 + i)^8 \\ &= [(1 + i)(1 - i)]^3 + ((1 + i)^2)^4 \\ &= [1^2 - i^2]^3 + (2i)^4 \\ &= 2^3 + 2^4 \cdot i^4 \\ &= 8 + 16 \cdot 1 \\ &= 24 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek 7:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 6 - mi \text{ ve}$$

$$z \cdot \bar{z} = 100$$

olduğuna göre, m nin pozitif değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = 6 - mi \text{ ise } \bar{z} = 6 + mi \text{ dir.}$$

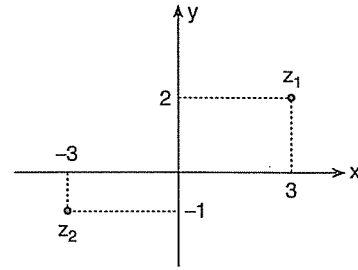
$$z \cdot \bar{z} = 100 \Rightarrow (6 - mi)(6 + mi) = 100$$

$$\Rightarrow 6^2 + m^2 = 100$$

$$\Rightarrow m^2 = 64$$

$$\Rightarrow m = 8 \text{ dir. } (m > 0)$$

Örnek 8:



z_1 ve z_2 karmaşık sayıları yukarıda verilmiştir.

Buna göre, $z_1 \cdot \bar{z}_2$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z_1 = 3 + 2i, z_2 = -3 - i \text{ ve } \bar{z}_2 = -3 + i \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_2 &= (3 + 2i)(-3 + i) \\ &= -9 + 3i - 6i + 2i^2 \\ &= -9 - 2 - 3i \\ &= -11 - 3i \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 9:

$z = x + yi$ olmak üzere,

$$3z + 3\bar{z} = 12$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = x + yi \text{ ise } \bar{z} = x - yi \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} 3z + 3\bar{z} &= 12 \Rightarrow 3(x + yi) + 3(x - yi) = 12 \\ &\Rightarrow 3x + 3yi + 3x - 3yi = 12 \\ &\Rightarrow 6x = 12 \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 10:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = 3 - 2i$$

olduğuna göre, $\frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$z = 3 - 2i \text{ ise } \bar{z} = 3 + 2i \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} &= \frac{(3 - 2i) - (3 + 2i)}{(3 - 2i) + (3 + 2i)} \\ &= \frac{3 - 2i - 3 - 2i}{6} \\ &= \frac{-4i}{6} = \frac{-2}{3} i \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = 1 - i$$

olduğuna göre, $z_1^2 + z_2^2 + z_1 \cdot z_2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 1 + i E) 1 - i

Soru 2:

$$z_1 = 5 - 4i$$

$$z_2 = -7 - 2i$$

olduğuna göre, $3z_1 + \bar{z}_2$ kaçır?

- A) 10 + 8.i B) 10 + 10.i C) 2 + 10.i D) 8 - 10i E) 2 - 10.i

Soru 3:

$z = a + bi$ olmak üzere,

$$3z - i \cdot \bar{z} + 2i - 7 = 6 - 5i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı için a - b farkı kaçır?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 11

Soru 4:

$$z = 3a + 2 - 2i$$

$$z \cdot \bar{z} = 29$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçır?

- A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 1 E) $\frac{7}{3}$

Soru 5:

$$z = \left(\sqrt{3} - 2 + \frac{1}{2}i \right) \cdot \left(\sqrt{3} + 2 + i \right)$$

olduğuna göre, $\text{Re}(z)$ kaçır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -3 C) -5 D) -6 E) -7

Soru 6:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(m + 2i)^2 = 5 + 12i$$

olduğuna göre, m nin değeri kaçır?

- A) 3 B) 5 C) 9 D) 16 E) 25

Soru 7:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = (\sqrt{3} - i)^9 \cdot (\sqrt{3} + i)^{11}$$

olduğuna göre, z karmaşık sayısının sanal kısmı kaçır?

- A) 2^{18} B) 2^{19} C) $2^{18} \cdot \sqrt{3}$ D) $2^{19} \cdot \sqrt{3}$ E) 2^{20}

Soru 8:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(i + i^2) \cdot (1 + i^3) \cdot (1 + i)$$

karmaşık sayısının modülü kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soru 9:

$$(1 + i) \cdot (1 - i)^5 = -a + b + ai + bi$$

$$z = a + bi$$

olduğuna göre, $\bar{z}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4 - 4i$ B) $-4 - 4i$ C) $4 + 4i$
D) $4 + 2i$ E) $-2 + 4i$

Soru 10:

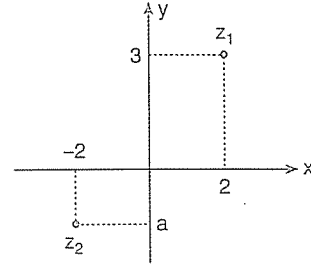
$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(1 + i) + (1 - i)^3 + (1 + i)^5 + (1 + i)^7$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1 - 3i$ B) $2(1 - 3i)$ C) $3 - 13i$
D) $3i - 1$ E) $2(3i - 1)$

Soru 11:



z_1 ve z_2 karmaşık sayıları yukarıda verilmiştir.

$$\text{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = -2$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

Karmaşık Sayılarda Bölme İşlemi

Bilgi

Bölme işlemi,

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

şeklinde bulunur.

Yani paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$a + bi = \frac{1 + 2i}{1 - i}$$

olduğuna göre, b yi bulalım.

Çözüm:

$$a + bi = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i + 2i + 2i^2}{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{1 + 3i - 2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

olduğuna göre, $b = \frac{3}{2}$ dir.

Örnek 2:

$$\frac{(1 - i)^{80}}{(1 + i)^{40}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{((1 - i)^2)^{40}}{((1 + i)^2)^{20}} = \frac{(-2i)^{40}}{(2i)^{20}}$$

$$= \frac{2^{40} \cdot i^{40}}{2^{20} \cdot i^{20}}$$

$$= \frac{2^{40} \cdot 1}{2^{20} \cdot 1}$$

$$= 2^{20} \text{ dir.}$$

Örnek 3:

$$\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i} = \frac{1 - i}{1^2 + 1^2} + \frac{1 + i}{1^2 + 1^2}$$

$$(1 - i) \quad (1 + i)$$

$$= \frac{1 - i + 1 + i}{2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1 \text{ dir.}$$

Örnek 4:

$$\frac{1 + 2i}{1 - 2i} + \frac{1 - 2i}{1 + 2i}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1 + 2i}{1 - 2i} + \frac{1 - 2i}{1 + 2i} = \frac{(1 + 2i)^2 + (1 - 2i)^2}{1^2 + 2^2}$$

$$(1 + 2i) \quad (1 - 2i)$$

$$= \frac{1 + 4i + 4i^2 + 1 - 4i + 4i^2}{5}$$

$$= \frac{1 + 4i - 4 + 1 - 4i - 4}{5}$$

$$= \frac{-6}{5} \text{ tir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{1 + i} + \frac{i}{1 - i}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) -1 C) 1 D) i E) -i

Soru 2:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$(2 + i) \cdot z = 8 - i$$

olduğuna göre, $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

Soru 3:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{(2 + 2i)^{100}}{(2 - 2i)^{50}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $2^{75}i$ C) 2^{75} D) -2^{75} E) $-2^{75}i$ ✓

Soru 4:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{(2 + i)(2 - i) + (1 + 2i)(1 - 2i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 ✓ C) 3 D) 4 E) 5

Soru 5:

$$z_1 = \frac{1 - i}{1 + i}$$

$$z_2 = \frac{1 + i}{1 - i}$$

z_1 ve z_2 birer karmaşık sayı olduğuna göre, $z_1^3 + z_2$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) 1 C) -1 D) $2i$ ✓ E) -i

Soru 6:

$i^2 = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{1}{1 + i} + \frac{1 + i}{i} + \frac{i}{1 - i}$$

olduğuna göre, $\text{Re}(z)$ kaçtır?

- A) -1 B) 1 ✓ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

Eşlenik ve Modül ile İlgili Özellikler

Bilgi

■ $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}, z_2 \neq 0$$

$$\left| \frac{z_1 \cdot z_2^n}{z_3} \right| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|^n}{|z_3|}, z_3 \neq 0$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ dir.}$$

■ $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olmak üzere, iki karmaşık sayı arasındaki uzaklık;

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |a + bi - c - di| \\ &= \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 + 2i$$

karmaşık sayıları için,

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} \quad \text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} \quad \text{c) } z_1 \cdot \overline{z_2}$$

$$\text{d) } |z_1 \cdot z_2| \quad \text{e) } \left| \frac{z_1^2}{z_2} \right|$$

değerlerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ &= (3 - 2i) + (1 - 2i) \\ &= 4 - 4i \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\begin{aligned} &= (3 - 2i)(1 - 2i) \\ &= 3 - 6i - 2i + 4i^2 \\ &= 3 - 8i - 4 \\ &= -1 - 8i \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z_1 \cdot \bar{z}_2 &= (3 + 2i)(1 - 2i) \\ &= 3 - 6i + 2i - 4i^2 \\ &= 3 - 4i + 4 \\ &= 7 - 4i \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{65} \text{ tir.} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \left| \frac{z_1^2}{z_2} \right| = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} = \frac{(\sqrt{13})^2}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}} \text{ tir.}$$

Örnek 2:

$$z \cdot \bar{z} + |z| - 12 = 0$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} + |z| - 12 = 0 &\Rightarrow |z|^2 + |z| - 12 = 0 \\ &\Rightarrow (|z| + 4)(|z| - 3) = 0 \\ &\Rightarrow |z| = -4 \text{ veya } |z| = 3 \end{aligned}$$

O halde, $|z| = -4$ olamaz, $|z| = 3$ olur.

Örnek 3:

$$z = \frac{5 + 12i}{3 - 4i}$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} z &= \frac{5 + 12i}{3 - 4i} \Rightarrow |z| = \frac{|5 + 12i|}{|3 - 4i|} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + 12^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5} \text{ tir.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$z = \frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + i)(3 + 2i)}$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |z| &= \frac{|1 - 2i| \cdot |2 - 3i|}{|2 + i| \cdot |3 + 2i|} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} \\ &= 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$z = \frac{1 + xi}{1 - xi}$$

olduğuna göre, $|z^{-1}|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|} \text{ dir.}$$

$$|z| = \frac{|1 + xi|}{|1 - xi|} = \frac{\sqrt{1^2 + x^2}}{\sqrt{1^2 + x^2}} = 1$$

$$\text{olduğundan, } |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 6:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \sqrt[3]{8-6i}$$

olduğuna göre, $|z^6|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = \sqrt[3]{8-6i} \Rightarrow z^6 = (\sqrt[3]{8-6i})^6$$

$$\Rightarrow z^6 = (8-6i)^2$$

$$|z^6| = |(8-6i)^2|$$

Buradan,

$$= |8-6i|^2$$

$$= (\sqrt{8^2+6^2})^2$$

$$= 100 \text{ olur.}$$

Örnek 7:

$$z = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{7}i}}{3i}$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$|z| = \frac{|\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{7}i}|}{|3i|} = \frac{\sqrt{|\sqrt{2} + \sqrt{7}i|}}{\sqrt{0^2+3^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{9}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

Örnek 8:

$$z_1 = 1 + 3i$$

$$z_2 = 5 - 2i$$

olduğuna göre, z_1 ve z_2 karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm:

$z_1 = 1 + 3i$ nin görüntüsü A(1, 3) ve

$z_2 = 5 - 2i$ nin görüntüsü B(5, -2) dir.

Buna göre,

$$|z_1 - z_2| = |AB| = \sqrt{(1-5)^2 + (3-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{41} \text{ br olur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z = \frac{2-i}{-4+3i} \cdot (\sqrt{11}-2i)$$

olduğuna göre, $|z^{-1}|$ kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{15}$

Soru 2:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = (1-i)^2 \cdot (1+2i)$$

karmaşık sayısının eşleniğinin mutlak değeri (modülü) kaçtır?

- A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{2}$ C) 10 D) $5\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

Soru 3:

$i^2 = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = (1+i^3)^2 \cdot (1+i^4)^2$$

karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) 16 D) 8 E) 2

Soru 4:

$i^2 = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z_1 = 3 - i$$

$$z_2 = 5 + 2i$$

olduğuna göre, z_1 ile z_2 karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{5}$ C) 13 D) 5 E) 2

Soru 5:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{\sqrt{3-\sqrt{7}i}}{2i}$$

karmaşık sayısının modülü kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) 8

Soru 6:

$$z = \frac{(2-i) \cdot (2+i)}{(1-i) \cdot (1+i)}$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

Soru 7:

$z = 1 + \sqrt{3}i$ olmak üzere,

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} \right)^{|z|}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

Soru 8:

$$z_1 = \frac{(-5+12i) \cdot (-3+4i) \cdot (15-8i)}{(-15-8i)}$$

$$z_2 = \frac{(-12+5i) \cdot (2+4i)}{(2-4i)}$$

olduğuna göre, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ kaçtır?

- A) 5 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

Soru 9:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{i^{0!} + i^{2!}}{i^{1!} + i^{9!}}$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 2

Soru 10:

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = a + i$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{13}$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Soru 11:

$$z = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}i}$$

olduğuna göre, $z \cdot \bar{z}$ kaçtır?

- A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

Soru 12:

$$|(3 - 4i) \cdot z| = |\bar{z}| + 24$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) 12 B) 8 C) 7 D) 6 E) 4

Bilgi

$z = x + yi$, $z_0 = a + bi$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ alınırsa,
 $|z - z_0| = r$ eşitliği, merkezi (a, b) ve yarıçapı r olan bir çember belirtir.
 $|z - z_0| \leq r$, merkezi (a, b) ve yarıçapı r olan bir çember ve iç bölgesini belirtir.
 $|z - z_0| \geq r$, merkezi (a, b) ve yarıçapı r olan bir çember ve dış bölgesini belirtir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

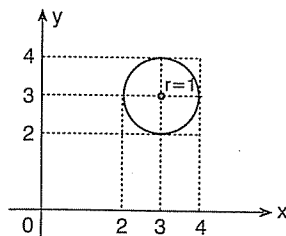
$$|z - (3 + 3i)| = 1$$

eşitliğini sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayılarının geometrik yerini bulalım ve karmaşık düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |z - (3 + 3i)| &= 1 \\ \Rightarrow |x + yi - (3 + 3i)| &= 1 \\ \Rightarrow |(x - 3) + (y - 3)i| &= 1 \\ &= \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2} = 1 \\ &= (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1^2 \end{aligned}$$

ifadesi merkezi $(3, 3)$ ve yarıçapı $r = 1$ birim olan bir çember belirtir. Şimdi karmaşık düzlemde gösterelim.



Örnek 2:

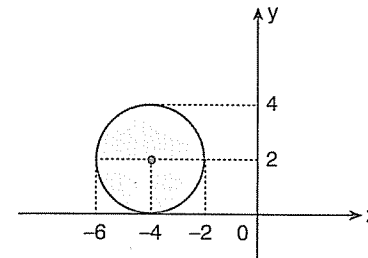
$$|z + 4 - 2i| \leq 2$$

koşulunu sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayılarını, karmaşık düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |z + 4 - 2i| \leq 2 &\Rightarrow |x + yi + 4 - 2i| \leq 2 \\ &\Rightarrow |(x + 4) + (y - 2)i| \leq 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 2)^2} \leq 2 \\ &\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 2^2 \end{aligned}$$

ifadesi merkezi $(-4, 2)$ ve yarıçapı 2 birim olan çember ve iç bölgesini (daireyi) belirtir. Şimdi karmaşık düzlemde gösterelim.



Örnek 3:

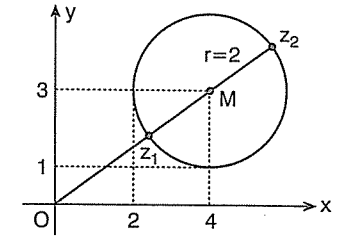
$$|z - 4 - 3i| = 2$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının modülleri bir küme oluşturur.

Bu kümenin en büyük ve en küçük elemanlarını bulalım.

Çözüm:

$|z - 4 - 3i| = 2 \Rightarrow |z - (4 + 3i)| = 2$
 ifadesi merkezi $(4, 3)$ ve yarıçapı 2 birim olan bir çember belirtir.
 Aşağıdaki grafiğe göre çember üzerinde modülü en küçük olan karmaşık sayı z_1 ve modülü en büyük olan karmaşık sayı z_2 dir.



$$\begin{aligned} |OM| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ birimdir.} \\ |z_1| &= 5 - r = 5 - 2 = 3 \text{ birim ve} \\ |z_2| &= 5 + r = 5 + 2 = 7 \text{ birim olur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

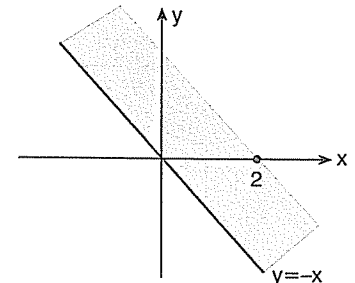
$$|z - 1| \leq |z + i|$$

eşitsizliğini sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayılarının geometrik yerini bulalım ve grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |z - 1| &\leq |z + i| \\ \Rightarrow |x + yi - 1| &\leq |x + yi + i| \\ \Rightarrow |(x - 1) + yi| &\leq |x + (y + 1)i| \\ \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} &\leq \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 &\leq x^2 + (y + 1)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 &\leq x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ \Rightarrow -2x &\leq 2y \\ \Rightarrow -x &\leq y \end{aligned}$$

$(2, 0)$ noktası $-x \leq y$ eşitsizliğini sağladığından, $y \geq -x$ in grafiği çizilirken önce $y = -x$ doğrusu çizilir. Daha sonra $(2, 0)$ noktasının olduğu bölge taranır. $(2, 0)$ noktası bu eşitsizliği sağlayan herhangi bir noktadır. Şimdi grafiği çizelim.



Örnek 5:

$$|z - 5| \geq \sqrt{7}$$

eşitsizliğini sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayıların geometrik yerinin denklemini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |z - 5| \geq \sqrt{7} &\Rightarrow |x + yi - 5| \geq \sqrt{7} \\ &\Rightarrow |(x - 5) + yi| \geq \sqrt{7} \\ &\Rightarrow \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} \geq \sqrt{7} \\ &\Rightarrow (x - 5)^2 + y^2 \geq 7 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

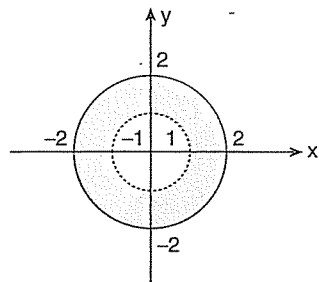
$$1 < |z| \leq 2$$

eşitsizliğini sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayıların geometrik yerini karmaşık düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1 < |z| \leq 2 &\Rightarrow 1 < |x + yi| \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \\ &\Rightarrow 1^2 < x^2 + y^2 \leq 2^2 \end{aligned}$$

İfadesini düzlemde gösterelim.



Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$|z - 2 - 3i| = 1$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + (y - 3)^2 = 1$
 B) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
 C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
 D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
 E) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

Soru 2:

$$i = \sqrt{-1} \text{ ve } z = x + yi \text{ olmak üzere,}$$

$$2 < |z| \leq 5$$

şartını sağlayan z sayılarının bulunduğu bölgenin alanı kaç π 'dir?

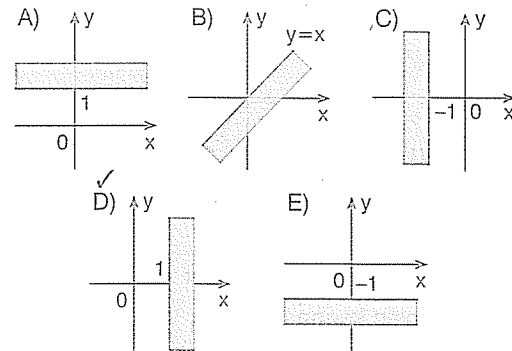
- A) 20π B) 21π C) 22π D) 23π E) 24π

Soru 3:

$$i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$\left| \frac{z - 4}{z + 2} \right| \leq 1$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



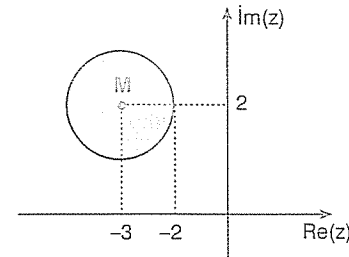
Soru 4:

$$|z + 4i| = |z - 5|$$

olduğuna göre, z nin karmaşık düzlemdeki geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 birim yarıçaplı çember
 B) Bir parabol
 C) Sanal eksene paralel bir doğru
 D) Eğimi -1 olan bir doğru
 E) Bir doğru

Soru 5:



Şekilde $M(-3, 2)$ merkezli ve yarıçapı 1 birim olan çemberin grafiği verilmiştir.

Buna göre, taralı bölge aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?

- A) $|z - 3 + 2i| < 1$ B) $|z - 3 + 2i| \leq 1$
 C) $|z - 3 + 2i| \geq 1$ D) $|z + 3 - 2i| \leq 1$
 E) $|z + 3 - 2i| < 1$

Soru 6:

$$|z| \leq 1 \text{ olmak üzere,}$$

$$|z - 3i + 4|$$

sayısının alabileceği en büyük tamsayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Soru 7:

$$i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$|z - 3 - 2i| = 4$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının orijine olan uzaklığı en çok kaç birimdir?

- A) $\sqrt{13} - 2$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{13} + 1$
 D) $\sqrt{3} + 2$ E) $\sqrt{13} + 4$

Soru 8:

$$5 \leq z \cdot \bar{z} \leq 6$$

eşitsizliğini sağlayan z kompleks sayılarının oluşturduğu düzlemsel bölgenin alanı kaç birimkaredir?

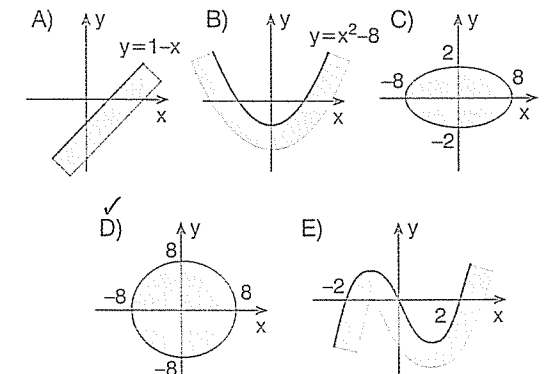
- A) 6π B) 5π C) 3π D) 2π E) π

Soru 9:

$$i = \sqrt{-1} \text{ ve } z = x + yi \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{|z| - 2}{|z| + 1} \leq \frac{2}{3}$$

eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayıların geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?



Karmaşık Sayıların Kutupsal Biçimi

Bilgi

$z = a + bi$ düzlemde (a, b) noktasına karşılık gelirse bu A noktasının yeri, kutupsal koordinat sisteminde (r, θ) ikilisi ile belirlenebilir.

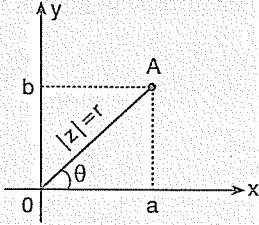
Burada r , A ile orijin arasındaki uzaklık; θ ise $|OA|$ nın x eksenine pozitif yönde yaptığı açıdır.

$A(r, \theta)$ gösteriminde r ye yarıçap bileşeni, θ ya ise açısal bileşen denir.

$$x = r \cdot \cos \theta$$

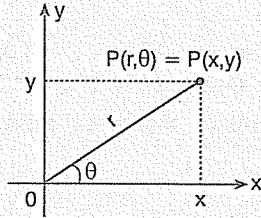
$$y = r \cdot \sin \theta$$

dönüşümü ile kutupsal koordinat sisteminden kartezyen koordinat sistemine geçilebilir.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



$z = a + bi$ karmaşık sayısının,

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ biçiminde yazılışına, z karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) biçimi denir.

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ karmaşık sayısı,

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$z = r[\cos(\theta + k.2\pi) + i \sin(\theta + k.2\pi)]$$

biçiminde de yazılabilir.

Burada $\theta + k.2\pi$ açılara z nin argümentleri denir ve $\arg(z) = \theta + k.2\pi$ biçiminde gösterilir.

$0 \leq \theta < 2\pi$ ise θ açısına z nin esas argümenti denir ve $\text{Arg}(z) = \theta$ biçiminde gösterilir.

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ karmaşık sayısı kısaca,

$z = r \cdot \text{cis} \theta$ biçiminde de gösterilebilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Kutupsal koordinatları $(4, \frac{\pi}{3})$ olan A noktasının kartezyen koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$$x = r \cdot \cos \theta = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$y = r \cdot \sin \theta = 4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Buna göre, A nın kartezyen koordinatları $(2, 2\sqrt{3})$ tür.

Örnek 2:

Aşağıdaki karmaşık sayıları kutupsal biçimde yazalım.

a) $z = -4$ b) $z = -1 + i$ c) $z = -2i$

d) $z = 1 + \sqrt{3}i$ e) $z = 5 + 5i$ f) $z = \sqrt{3} - i$

Çözüm:

a) $z = -4 = (-4, 0)$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$\theta = 180^\circ \text{ dir.}$$

$$z = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$z = 4 \text{ cis} 180^\circ \text{ dir.}$$

b) $z = -1 + i = (-1, 1)$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \theta = 135^\circ \text{ dir.}$$

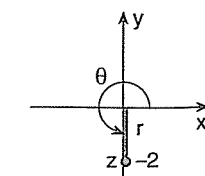
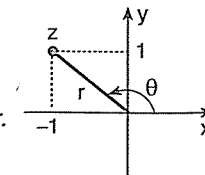
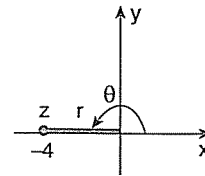
$$z = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$z = \sqrt{2} \text{ cis} 135^\circ \text{ dir.}$$

c) $z = -2i = (0, -2)$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\theta = 270^\circ \text{ dir.}$$



$$z = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$z = 2 \text{ cis} 270^\circ \text{ dir.}$$

d) $z = 1 + \sqrt{3}i = (1, \sqrt{3})$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ \text{ dir.}$$

$$z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$z = 2 \text{ cis} 60^\circ \text{ dir.}$$

e) $z = 5 + 5i = (5, 5)$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

$$z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z = 5\sqrt{2} \text{ cis} \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

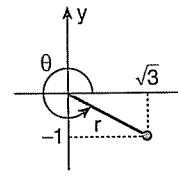
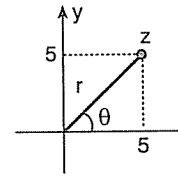
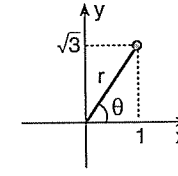
f) $z = \sqrt{3} - i = (\sqrt{3}, -1)$

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 330^\circ \text{ dir.}$$

$$z = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$$

$$z = 2 \text{ cis} 330^\circ \text{ dir.}$$



Örnek 3:

Aşağıdaki karmaşık sayıları standart biçimde gösterelim.

a) $z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

b) $z = 2\sqrt{2} \text{ cis} \frac{7\pi}{4}$

Çözüm:

$$z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$= 4(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$= 4(-\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$$

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$= -2\sqrt{3} - 2i \text{ dir.}$$

b) $z = 2\sqrt{2} \text{ cis} \frac{7\pi}{4}$

$$= 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$= 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$= 2 - 2i \text{ dir.}$$

Örnek 4:

$$z = \sin \alpha + i \cos \alpha$$

olduğuna göre, $\arg(z)$ yi bulalım.

Çözüm:

$$z = \sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{olduğundan, } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ dir.}$$

Örnek 5:

$$z + 3 = 2i + 4$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının esas argümenti θ olduğuna göre, $\cos \theta + \sin \theta$ yi bulalım.

Çözüm:

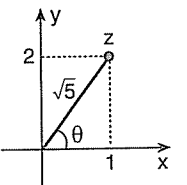
$$z + 3 = 4 + 2i \Rightarrow z = 1 + 2i \text{ dir.}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ tir.}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta + \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

bulunur.



Örnek 6:

$$z = 6 - x + i(3 - 2x)$$

karmaşık sayısının argümenti $\frac{3\pi}{4}$ olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$z = (6 - x) + (3 - 2x)i$$

karmaşık sayısının esas argümenti $\frac{3\pi}{4}$ ise

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \frac{3 - 2x}{6 - x}$$

$$-1 = \frac{3 - 2x}{6 - x}$$

$$x - 6 = 3 - 2x$$

$$3x = 9$$

$$x = 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\arg\left(\frac{z-2}{i}\right) = \frac{7\pi}{4}$$

olduğuna göre $\text{Im}(z) - \text{Re}(z)$ yi bulalım.

Çözüm:

$$z = x + yi \text{ olsun.}$$

$$\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = y - x \text{ tir.}$$

$$\frac{z-2}{i} = \frac{x+yi-2}{i} = \frac{(x-2)+yi}{-1}$$

(i)

$$= y - (x-2)i \text{ olur.}$$

$$\text{O halde, } \arg\left(\frac{z-2}{i}\right) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\arg(y - (x-2)i) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{-(x-2)}{y} = \tan \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{-(x-2)}{y} = -1$$

$$x - 2 = y$$

$$y - x = -2 \text{ dir.}$$

Örnek 8:

$$z = a + bi \text{ ve } i = \sqrt{-1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\text{Arg}(z + 1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}(z - 2) = \frac{\pi}{2}$$

eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayısı için $|z|$ yi bulalım.

Çözüm:

$$\text{Arg}(z + 1 + i) = \text{Arg}((a + 1) + (b + 1)i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{b+1}{a+1} = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$b + 1 = (a + 1) \cdot 1$$

$$b = a \text{ dir.}$$

$$\text{Arg}(z - 2) = \text{Arg}((a - 2) + bi) = \frac{\pi}{2} \text{ ise}$$

$$a - 2 = 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ dir.}$$

$$\text{O halde, } a = b = 2 \text{ bulunur.}$$

$$z = a + bi = 2 + 2i \text{ ise } |z| = 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek 9:

$$|z - 12i| = 6$$

koşulunu sağlayan karmaşık sayılarının esas argümenti en çok olanının argümentini bulalım.

Çözüm:

$$z = x + yi \text{ olmak üzere,}$$

$$|z - 12i| = 6$$

$$\Rightarrow |x + (y - 12)i| = 6$$

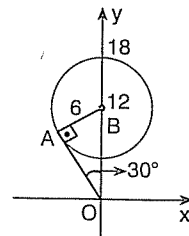
$$\Rightarrow x^2 + (y - 12)^2 = 6^2 \text{ dir.}$$

Düzlemde gösterilirse,

$$m(\widehat{BOA}) = 30^\circ \text{ olduğu görülür.}$$

O halde,

$$\text{Arg}(z) \text{ en büyük değeri, } 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \text{ dir.}$$



Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z_1 = \text{cis}90^\circ$$

$$z_2 = \text{cis}180^\circ$$

$$z_3 = \text{cis}270^\circ$$

olduğuna göre, $|z_1 + z_2 - z_3|$ kaçtır?

- A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{8}$

Soru 2:

$$z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 60^\circ)$$

olduğuna göre, $\text{Arg}(z)$ kaç derecedir?

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Soru 3:

Esas argümenti $\frac{5\pi}{3}$ olan $z = x + yi$ karmaşık

sayısı için $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 1

Soru 4:

$$z = 1 + i \text{ olmak üzere,}$$

$$(\bar{z})^8$$

karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?

- A) 0° B) 30° C) 90° D) 180° E) 270°

Soru 5:

$$z = -3 + 4i$$

karmaşık sayısının esas argümenti α olduğuna göre, $\sin 2\alpha$ kaçtır?

- A) $-\frac{24}{25}$ B) $-\frac{12}{25}$ C) $-\frac{4}{5}$
D) $\frac{12}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

Soru 6:

$$z = \frac{3 + 2i}{1 - i}$$

karmaşık sayısının argümenti α olduğuna göre, $\tan \alpha + \cot \alpha$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{26}$ D) $\frac{26}{5}$ E) $\frac{22}{3}$

Soru 7:

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

karmaşık sayıları veriliyor.

Buna göre, $\text{Re}(z_1) + \text{Im}(z_2)$ kaçtır?

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

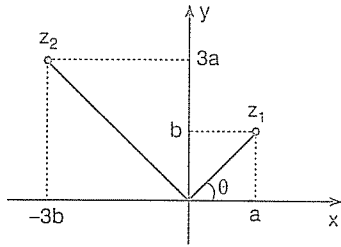
Soru 8:

$$|z - 3| = 4$$

koşulunu sağlayan karmaşık sayıların esas argümenti en az kaç radyandır?

- A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Soru 9:



Şekilde z_1 ve z_2 karmaşık sayıları verilmiştir.

$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) 20° C) $90^\circ + \theta$ D) 90° E) 180°

Kutupsal Biçimdeki Karmaşık Sayılarda Toplama, Çıkarma, Çarpma, Bölme, Üs Alma

Bilgi

$z_1 = |z_1| \cdot \text{cis} \theta$, $z_2 = |z_2| \cdot \text{cis} \alpha$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

■ Kutupsal biçimdeki karmaşık sayılarda toplama veya çıkarma işlemleri bu sayıları standart biçime dönüştürülerek bulunur.

■ Çarpma işlemi; $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot \text{cis} \theta \cdot |z_2| \cdot \text{cis} \alpha = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{cis}(\theta + \alpha)$

biçiminde bulunur.

■ Üs alma işlemi;

$$z_1^n = |z_1|^n \cdot \text{cis}(n \cdot \theta) \text{ dir.}$$

■ Bölme işlemi;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot \text{cis} \theta}{|z_2| \cdot \text{cis} \alpha}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \text{cis}(\theta - \alpha), z_2 \neq 0$$

biçiminde bulunur.

■ İki karmaşık sayının çarpımında argümentlerin toplandığına dikkat edilirse; bir karmaşık sayının orijin etrafında, pozitif yönde β derece döndürülmesiyle elde edilecek sayıyı bulmak için bu sayıyı sadece $\text{cis} \beta$ ile çarpmak veya argümentini β derece (veya radyan) artırmak yeterlidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$z_1 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$z_2 = 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

karmaşık sayıları için $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ işlemlerinin sonucunu standart biçimde bulalım.

Çözüm:

$$z_1 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2} i \text{ dir.}$$

$$z_2 = 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} i \text{ dir.}$$

O halde,

$$z_1 + z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

$$z_1 - z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = -3\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

bulunur.

Örnek 2:

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

olduğuna göre, $z_1 \cdot z_2$ ve $\frac{z_1}{z_2}$ işlemlerinin sonucunu standart biçimde bulalım.

Çözüm:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{6} \cdot 2 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{3}$$

$$= 6 \cdot \text{cis} \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$= 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$= -3\sqrt{3} - 3i \text{ olur.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 \cdot \text{cis} \frac{5\pi}{6}}{2 \cdot \text{cis} \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \text{cis} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{2} (0 + 1.i)$$

$$= \frac{3i}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 3:

$$z = 2 \text{ cis} 20^\circ$$

karmaşık sayısının orijin etrafında, pozitif yönde 70° döndürülmesiyle oluşan yeni sayıyı (z') bulalım ve düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$$z' = z \cdot \text{cis} 70^\circ$$

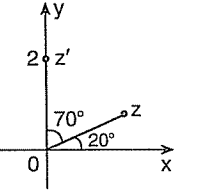
$$= 2 \text{ cis} 20^\circ \cdot \text{cis} 70^\circ$$

$$= 2 \text{ cis}(20^\circ + 70^\circ)$$

$$= 2 \text{ cis} 90^\circ$$

$$= 2(0 + 1.i)$$

$$= 2i \text{ bulunur.}$$



Örnek 4:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

karmaşık sayısı için z^{12} değerini bulalım.

Çözüm:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{2} \text{ dir.}$$

$$\text{Arg}(z) = \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{olduğundan, } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$\text{O halde, } z = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{3} \text{ tür.}$$

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12} \cdot \text{cis} \left(\frac{\pi}{3} \cdot 12 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^6 \cdot \text{cis}(4\pi) \\
&= 2^6 \cdot \text{cis}(0^\circ) \\
&= 2^6(1 + 0.i) \\
&= 2^6 \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3.\text{cis}50^\circ \\
z_2 &= 6.\text{cis}10^\circ
\end{aligned}$$

olduğuna göre, $\text{Re}(z_1 \cdot z_2)$ ve $\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (3.\text{cis}50^\circ) \cdot (6.\text{cis}10^\circ) \\
&= 3 \cdot 6.\text{cis}(50^\circ + 10^\circ) \\
&= 18 \text{ cis}60^\circ \\
&= 18 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\
&= 9 + 9\sqrt{3} i
\end{aligned}$$

olduğundan $\text{Re}(z_1 \cdot z_2) = 9$ dur.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3.\text{cis}50^\circ}{(6.\text{cis}10^\circ)^2} = \frac{3 \text{ cis}50^\circ}{36.\text{cis}20^\circ} \\
&= \frac{1}{12} \text{ cis}(50^\circ - 20^\circ) \\
&= \frac{1}{12} \text{ cis}30^\circ \\
&= \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{24} i
\end{aligned}$$

olduğundan, $\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{1}{24}$ tür.

Örnek 6:

$$z = 6.(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$$

olduğuna göre, $z.i$ nin esas argümentini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
i &= \text{cis}90^\circ \text{ olduğundan,} \\
z.i &= 6.\text{cis}25^\circ.\text{cis}90^\circ \\
&= 6.\text{cis}(25^\circ + 90^\circ) \\
&= 6.\text{cis}115^\circ \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

O halde, $\text{Arg}(z.i) = 115^\circ$ dir.

Başka bir yol olarak da,

$$\begin{aligned}
\text{Arg}(z.i) &= \text{Arg}(z) + \text{Arg}(i) \\
&= 25^\circ + 90^\circ \\
&= 115^\circ \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Örnek 7:

$$z = \frac{-1 + i}{1 + \sqrt{3} i}$$

karmaşık sayısının esas argümentini bulalım.

Çözüm:

$$z = \frac{-1 + i}{1 + \sqrt{3} i} \text{ ifadesinde } z_1 = -1 + i \text{ ve}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} i \text{ olsun.}$$

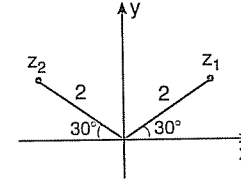
$\text{Arg}(z_1) = 135^\circ$ ve $\text{Arg}(z_2) = 60^\circ$ dir.

O halde,

$$\begin{aligned}
\text{Arg}(z) &= \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \\
&= 135^\circ - 60^\circ \\
&= 75^\circ \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Örnek 8:

Şekilde verilen z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için,



$$\begin{aligned}
&\text{a) } z_1 \cdot z_2 \quad \text{b) } \frac{z_2}{z_1} \\
&\text{c) } |z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

değerlerini bulalım.

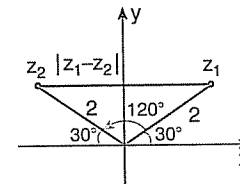
Çözüm:

Şekilde verilenlere göre,
 $z_1 = 2 \text{ cis}30^\circ$ ve $z_2 = 2 \text{ cis}150^\circ$ dir.

$$\begin{aligned}
&\text{a) } z_1 \cdot z_2 = (2 \text{ cis}30^\circ) \cdot (2 \text{ cis}150^\circ) \\
&= 2 \cdot 2 \text{ cis}(30^\circ + 150^\circ) \\
&= 4 \text{ cis}180^\circ \\
&= 4(-1 + 0.i) \\
&= -4 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{b) } \frac{z_2}{z_1} = \frac{2 \text{ cis}150^\circ}{2 \text{ cis}30^\circ} = \text{cis}(150^\circ - 30^\circ) \\
&= \text{cis}120^\circ \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

c) $|z_1 - z_2|$ değerini bulmak için kosinüs teoremi uygulanırsa,



$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos 120^\circ \\
|z_1 - z_2|^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
|z_1 - z_2|^2 &= 4 + 4 + 4 \\
|z_1 - z_2|^2 &= 12 \\
|z_1 - z_2| &= 2\sqrt{3} \text{ tür.}
\end{aligned}$$

$$z_1 = |z_1| \cdot \text{cis} \theta \text{ ve } z_2 = |z_2| \cdot \text{cis} \alpha$$

olmak üzere, $|z_1 - z_2|$ değeri

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

ifadesinden bulunur.

Örnek 9:

$$z_1 = 3 \text{ cis}10^\circ \text{ ve } z_2 = 4 \text{ cis}100^\circ$$

olduğuna göre, $|z_1 - z_2|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z_1 = 3 \text{ cis}10^\circ \Rightarrow |z_1| = 3 \text{ tür.}$$

$$z_2 = 4 \text{ cis}100^\circ \Rightarrow |z_2| = 4 \text{ tür.}$$

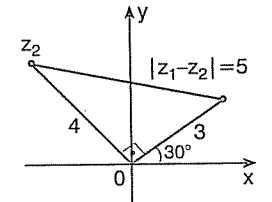
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos(100^\circ - 10^\circ)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 25$$

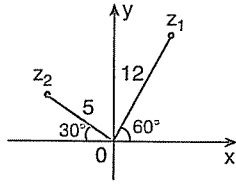
$$|z_1 - z_2| = 5 \text{ tir.}$$



Örnek 10:

$$z_1 = \sqrt{6} \cdot \text{cis} 60^\circ$$

$$z_2 = \sqrt{3} \cdot \text{cis} 150^\circ$$



olduğuna göre, $|z_1 - z_2|$ değerini bulalım.

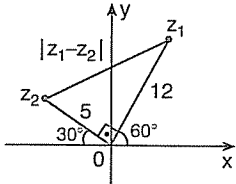
Çözüm:

Şekilden de
görülebileceği gibi,

$$|z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 9$$

$$|z_1 - z_2| = 3 \text{ tür.}$$



Örnek 11:

$$z_1 = 12 \text{ cis} 40^\circ$$

$$z_2 = 3 \text{ cis} 250^\circ$$

$$z_3 = 2 \text{ cis} 10^\circ$$

olduğuna göre, $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3^2}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3^2} = \frac{12 \cdot \text{cis} 40^\circ \cdot 3 \cdot \text{cis} 250^\circ}{(2 \text{ cis} 10^\circ)^2}$$

$$= \frac{12 \cdot 3 \cdot \text{cis}(250^\circ + 40^\circ)}{2^2 \cdot \text{cis}(2 \cdot 10^\circ)}$$

$$= \frac{36}{4} \text{ cis}(250^\circ + 40^\circ - 20^\circ)$$

$$= 9 \text{ cis} 270^\circ$$

$$= 9 (0 - 1.i)$$

$$= -9i \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z = \frac{7(\cos 220^\circ + i \sin 220^\circ)}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-7i$ B) $7i$ C) -7 D) 7 E) $7 + 7i$

Soru 2:

$$z_1 = 3 \text{ cis} 20^\circ$$

$$z_2 = 4 \text{ cis} 210^\circ$$

$$z_3 = 6 \text{ cis} 50^\circ$$

olduğuna göre, $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -6 B) -4 C) -2 D) $-2i$ E) $-4i$

Soru 3:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

olduğuna göre, z^{12} kaçtır?

- A) 2^{12} B) 2^{15} C) 2^{20} D) 2^{24} E) 2^{36}

Soru 4:

$$z = i^3 \cdot (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$$

karmaşık sayının esas argümanı kaç derecedir?

- A) 105° B) 165° C) 235° D) 270° E) 295°

Soru 5:

$$z_1 = 4i$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

olduğuna göre, $z_1 \cdot z_2$ çarpımının kutupsal (trigonometrik) biçimde gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $12 \text{ cis} \frac{\pi}{6}$ B) $12 \text{ cis} \frac{2\pi}{3}$ C) $\text{cis} \frac{\pi}{3}$ D) $6 \text{ cis} \frac{\pi}{3}$ E) $12 \text{ cis} \frac{\pi}{3}$

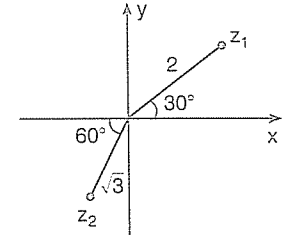
Soru 6:

$$z = 3(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ)$$

olduğuna göre, $z \cdot i$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3(\cos 67^\circ + i \sin 67^\circ)$ B) $3(\cos 113^\circ + i \sin 113^\circ)$ C) $3(\cos 247^\circ + i \sin 247^\circ)$ D) $3(\cos 337^\circ + i \sin 337^\circ)$ E) $3(\cos 203^\circ + i \sin 203^\circ)$

Soru 7:



Şekilde verilenlere göre, $\frac{z_1^2}{z_2}$ kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) 8

Soru 8:

$$z = 1 + 2i$$

karmaşık sayısı pozitif yönde 30° döndürüldüğünde oluşacak karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-1 - 2i$ B) $-i$ C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ D) $\frac{\sqrt{3}-2}{2} + \frac{2\sqrt{3}+1}{2}i$ E) 0

Soru 9:

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$$

karmaşık sayısı için $\text{Arg}(z)$ kaç derecedir?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Bilgi

z bir karmaşık sayı olsun. $w^n = z$ denkleminin çözümü olan karmaşık sayılara z nin **n. dereceden kökleri** denir.

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ karmaşık sayısı, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$z = r[\cos(\theta + k.2\pi) + i \sin(\theta + k.2\pi)]$ biçiminde de yazılabilir.

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere z karmaşık sayısının **n. dereceden kökleri**;

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k.2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k.2\pi}{n}\right) \right]$$

$k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dir.

Dikkat edilirse z karmaşık sayısının n . dereceden kökleri n tanedir. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijin ve yarıçapı uzunluğu $\sqrt[n]{r}$ birim olan çemberin üzerinde eşit aralıklarla $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ radyanlık açı farkıyla) sıralanır.

Bir karmaşık sayının karekökleri;

$w^2 = z$ denkleminin çözümü olan w sayıları, z nin karekökleridir.

$w^2 = z \Rightarrow w = \sqrt{z}$ dir.

$w = \sqrt{z}$

$$= \sqrt{r} \left[\cos \frac{\theta + k.2\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + k.2\pi}{2} \right]$$

$$= \sqrt{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right), k \in \{0, 1\} \text{ dir.}$$

$$k = 0 \text{ için } w_0 = r \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k = 1 \text{ için } w_1 = r \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -w_0 \text{ dir.}$$

Görüldüğü gibi bir karmaşık sayının karekökleri arasında 180° lik fark vardır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$z = 36(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$$

karmaşık sayısının kareköklerini bulalım.

Çözüm:

$z = 36 \text{ cis } 140^\circ$ sayısının karekökleri w_0 ve w_1 olsun.

$$w_0 = \sqrt{36} \text{ cis } \frac{140}{2} = 6 \text{ cis } 70^\circ \text{ ve}$$

$$w_1 = \sqrt{36} \text{ cis } \left(\frac{140}{2} + 180^\circ\right) = 6 \text{ cis } 250^\circ \text{ olur.}$$

Örnek 2:

$$z^2 = -3i$$

denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm:

$z^2 = -3i = 3 \text{ cis } 270^\circ$ denkleminin kökleri z_1 ve z_2 olsun.

$$z_1 = \sqrt{3} \text{ cis } \frac{270^\circ}{2} = \sqrt{3} \text{ cis } 135^\circ$$

$$= \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i \text{ dir.}$$

$$z_2 = \sqrt{3} \text{ cis } \left(\frac{270^\circ}{2} + 180^\circ\right) = \sqrt{3} \text{ cis } 315^\circ$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} i \text{ dir.}$$

$z_1 = -z_2$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 3:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

karmaşık sayısının kareköklerini (z_1 ve z_2) yi bulalım ve $z_1 + z_2 = 0$ ve $z_1 \cdot z_2 = -z$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \text{ ve}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ \text{ olduğundan,}$$

$$z = 2 \text{ cis } 60^\circ \text{ dir.}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{60^\circ}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 30^\circ$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \text{ dir.}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \text{ cis } \left(\frac{60^\circ}{2} + 180^\circ\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \text{ cis } 210^\circ = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \text{ bulunur.}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 0 \text{ dir.}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= -\frac{6}{4} - \frac{\sqrt{12}}{4} i - \frac{\sqrt{12}}{4} i - \frac{2}{4} i^2$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{12}}{4} i + \frac{1}{2}$$

$$= -1 - \frac{2.2\sqrt{3}}{4} i$$

$$= -1 - \sqrt{3}i = -z \text{ dir.}$$

Bilgi

$z = r \text{ cis } \theta = r \text{ cis } (\theta + k.2\pi)$, ($k \in \mathbb{Z}$) olsun.

Küpü z olan karmaşık sayılara, z nin küpkökleri denir. $w^3 = z$ denkleminin çözümü olan w sayıları, z nin küpkökleridir.

$$w^3 = z \Rightarrow w = \sqrt[3]{z}$$

$$\Rightarrow w = \sqrt[3]{r} \text{ cis } \left(\frac{\theta + k.2\pi}{3} \right), k \in \{0, 1, 2\} \text{ olur.}$$

Buna göre, $w^3 = z$ denkleminin üç farklı kökü vardır. Bu kökler; w_0, w_1, w_2 olsun.

Bu durumda,

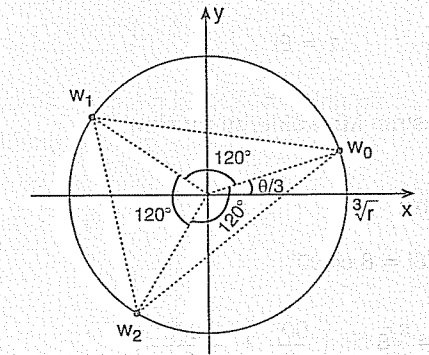
$$w_0 = \sqrt[3]{r} \text{ cis } \frac{\theta}{3}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{r} \text{ cis } \left(\frac{\theta}{3} + 120^\circ \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{r} \text{ cis } \left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ \right)$$

bulunur.

Buna göre, w_0, w_1 ve w_2 sayıları bir eşkenar üçgenin köşeleridir. Bu sayılar yarıçapı $\sqrt[3]{r}$ olan çemberin üzerindedir.



Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$z = -1$$

sayısının küpköklerini bulalım.

Çözüm:

$$z = -1 = 1 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \text{cis} 180^\circ \text{ dir.}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\text{cis} \left(\frac{180^\circ}{3} + \frac{k \cdot 360^\circ}{3} \right) \right)$$

$$w_0 = 1 \cdot (\text{cis} 60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$w_1 = 1 \cdot (\text{cis}(60^\circ + 120^\circ)) = -1 + 0 \cdot i = -1,$$

$$w_2 = 1 \cdot (\text{cis}(60^\circ + 240^\circ)) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$z = 8i$$

sayısının küpköklerini bulalım.

Çözüm:

$$z = 8i = 8 \cdot \text{cis} 90^\circ$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \text{ cis} \left(\frac{90^\circ}{3} + \frac{k \cdot 360^\circ}{3} \right)$$

$$w_0 = 2 \text{cis} 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = 2 \text{ cis}(30^\circ + 120^\circ)$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_2 = 2 \text{ cis}(30^\circ + 240^\circ) = 2(0 - i) = -2i \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3} + i$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $1 + \sqrt{3} i$

D) $-\sqrt{3} + i$ E) $1 - \sqrt{3} i$

Soru 2:

$$z = -1 - \sqrt{3} i$$

karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3} + i$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $1 + \sqrt{3} i$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$ E) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Soru 3:

Kutupsal koordinatları $\left(16, \frac{\pi}{3} \right)$ olan karmaşık sayının kareköklerinin mutlak değerleri çarpımı kaçtır?

A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 12 D) 16 E) 48

Soru 4:

$$z = 27 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

karmaşık sayısının küpköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

B) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

C) $3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

D) $3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

E) $2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Soru 5:

$$z^2 + 9 = 0$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) 3 C) 9 D) -9i E) 3i

Soru 6:

$$z^3 + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 - i$ B) 1 C) -1

D) $1 + i$ E) $1 - i$

Soru 7:

$$z = 3 + 4i$$

karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2 + i$ B) $2 + i$ C) $2 - i$

D) $1 + 2i$ E) $1 - 2i$

Soru 8:

$$z = a + bi$$

karmaşık sayısının kareköklerinden biri $z_1 = 1 + i$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1

Soru 9:

$$z = a + bi$$

karmaşık sayısının küpköklerinden biri $z_1 = 1 - i$ olduğuna göre, b kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

Soru 10:

$z \neq 0$ karmaşık sayısının karekökleri z_1 ve z_2 dir.

$$z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2$$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-2z$ B) $-z$ C) 0 D) z E) $2z$

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i^{2007} + i^{2008} + i^{2009} + i^{2010}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) -i C) 0 D) i E) 1

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{i^5 + i^6} + \frac{1}{i^7 + i^8}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 0 D) -i E) i

3.

$$\left(\left(\frac{1}{i} \right)^{-1} + \frac{1}{i^3} + i^9 \right)^2$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -9 B)
- $-\frac{1}{9}$
- C) 3i D) 9 E)
- $\frac{1}{9}$

4.

$$z = \frac{1}{1-i} - \frac{i+1}{i}$$

karmaşık sayısının imajiner kısmı kaçtır?

- A)
- $-\frac{3}{2}$
- B)
- $-\frac{1}{2}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E)
- $\frac{3}{2}$

5. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z_1 = 1 - x - yi$$

$$z_2 = 2x - y - (x + 1)i$$

$$z_1 = z_2$$

olduğuna göre, $x - y$ farkı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

6. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{i^5 + i^6 + i^7}{i^{-5} + i^{-6} + i^{-7}}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) -i E) 2i

7. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z + 7 - i = \bar{z} \cdot (3 + i)$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?($\bar{z}$, z karmaşık sayısının eşleniğidir.)

- A)
- $3 - i$
- B)
- $1 + i$
- C)
- $2 + i$
- D)
- $3 + i$
- E)
- $1 - i$

8. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z \cdot (1 - 2i) + 3 + i = 2 - i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

- A)
- $\frac{6}{5}$
- B)
- $\frac{4}{5}$
- C)
- $\frac{3}{5}$
- D)
- $-\frac{3}{5}$
- E)
- $-\frac{4}{5}$

9. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{(8i)^5}{(2 - 2i)^{10}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) -i C)
- $\frac{1}{2}$
- D) i E) 1

10. $\bar{z}$, z nin eşleniği ve $\bar{w}$, w nun eşleniğidir.

$$z = 1 - 3i$$

$$w = 1 - 5i$$

olduğuna göre, $\left(\frac{\bar{z} + w}{z + w} \right)^{10}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2 B) 1 C) i D) -i E) -1

11. $z * w = \frac{1}{z} + 2 \cdot w$ işlemi veriliyor.

$$z = 1 + i \text{ ve } w = 3 + i$$

olduğuna göre, $z * w$ nin imajiner kısmı kaçtır?

- A)
- $\frac{13}{2}$
- B)
- $\frac{11}{2}$
- C)
- $\frac{9}{2}$
- D)
- $\frac{7}{2}$
- E)
- $\frac{3}{2}$

12. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z - \bar{z} = 4i$$

olduğuna göre, $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

13.

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_3 = -i$$

karmaşık sayılarını köşe kabul eden üçgenin alanı kaç birimkaredir?

- A)
- $\frac{5}{2}$
- B) 2 C)
- $\frac{3}{2}$
- D) 1 E)
- $\frac{1}{2}$

14. $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 40x^{40}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f(i)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $40i + 40$
- B)
- $-20i + 20$
- C)
- $20i + 20$
-
- D)
- $40i - 40$
- E)
- $20i - 20$

15. $z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$ olduğuna göre, $z \cdot \bar{z}$ kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

16. $\frac{1+z}{1-i} = \frac{1-z}{1+i}$ olduğuna göre, $\text{Re}(z)$ kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

17. Karmaşık düzleme ait olan iki nokta, $A(1 + 2i)$, $B(3 + 4i)$ şeklinde veriliyor.Buna göre, $[AB]$ nin orta noktasının x eksenine olan uzaklığı kaç birimdir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

18. $x^2 - 4x + 5 = 0$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $-2 + i$
- B)
- $-2 - i$
- C)
- $2 + i$
-
- D)
- $1 + i$
- E)
- $1 - i$

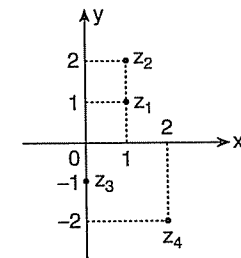
19. $z = a + ib$ olmak üzere,

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$$

olduğuna göre, $\text{Arg}\left(-\frac{3}{z^2}\right)$ ifadesi kaç radyandır?

- A)
- $\frac{3\pi}{2}$
- B)
- π
- C)
- $\frac{\pi}{2}$
- D)
- $\frac{3\pi}{4}$
- E)
- 2π

20.

Yukarıdaki karmaşık düzlemde verilenlere göre, $(z_1 + z_2) \cdot (z_3 + z_4)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -13 B) -13i C) 13 D) 13i E)
- $1 + 13i$

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(i - \frac{1}{i}\right) \cdot \left(2i + \frac{1}{i}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i^{-25} + i^{-35} + i^{-45} + i^{-55}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2i B) -2i C) 0 D) -2 E) 2

$$3. \quad z = \frac{6 - \sqrt{-9}}{2 + 3i}$$

karmaşık sayısı için $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{24}{13}$
- B)
- $-\frac{23}{13}$
- C)
- $-\frac{21}{13}$
- D)
- $\frac{21}{13}$
- E)
- $\frac{25}{13}$

$$4. \quad z_1 = 3 + 2i$$

$$z_2 = 3i$$

olduğuna göre, $z_1 \cdot \bar{z}_1 + \frac{z_1}{(z_2)^2}$ ifadesinin reel kısmı kaçtır?

- A)
- $\frac{32}{3}$
- B)
- $\frac{34}{3}$
- C)
- $\frac{35}{3}$
- D)
- $\frac{37}{3}$
- E)
- $\frac{38}{3}$

$$5. \quad z_1 = (1 + i)^{45}$$

$$z_2 = (1 - i)^{44}$$

olduğuna göre, $\frac{z_1}{z_2}$ nin reel kısmı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

6. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{1 - i + (1 + i)^4}{i^{15} + i^{16} + i^{17}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $1 - 3i$
- B)
- $3i$
- C)
- $3 - i$
- D)
- $-3 - i$
- E)
- $-i$

7. $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\frac{2z - 3\bar{z}}{z + \bar{z}}$$

ifadesinin reel kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B)
- $-\frac{1}{2}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) x E)
- $\frac{x}{y}$

$$8. \quad z = 2a - 3 + 4i$$

$$w = b + 2ai$$

$$\bar{z} = w.2$$

olduğuna göre, b kaçtır?

- A) -1 B)
- $-\frac{3}{2}$
- C) -2 D)
- $-\frac{5}{3}$
- E)
- $-\frac{5}{2}$

$$9. \quad z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 5 + 3i, \quad z_3 = 7 + i$$

karmaşık sayılarının sınırladığı üçgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{i + \frac{1}{i}}{\frac{3 - 4i}{1 - i} + 1 + i}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) i B)
- $1 + i$
- C) 0 D)
- $2i$
- E) 2

$$11. \quad z - 2 - 4i = 1$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının argümenti θ olduğuna göre, $\sin \theta + \cos \theta$ kaçtır?

- A)
- $\frac{12}{25}$
- B)
- $\frac{5}{7}$
- C)
- $\frac{3}{4}$
- D)
- $\frac{7}{5}$
- E)
- $\frac{25}{12}$

$$12. \quad z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

olduğuna göre, $\arg(z_1 \cdot z_2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A)
- 35°
- B)
- 125°
- C)
- 275°
- D)
- 315°
- E)
- 345°

$$13. \quad |z - 1 + i| = 2$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 B) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 E) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

$$14. \quad \left| \frac{z - 1}{z + i} \right| = 1$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x$ B) $y = -x$ C) $x^2 + y^2 = 1$
 D) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ E) $y = 2x$

$$15. \quad z = 2 + 2i$$

olduğuna göre, z^{-2} sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{4} (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$
 B) $\frac{1}{8} (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$
 C) $\frac{1}{2} (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$
 D) $\frac{1}{4} (\cos 90^\circ - i \cdot \sin 90^\circ)$
 E) $\frac{1}{8} (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$

16. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \sqrt{3} + i$$

olduğuna göre, $\arg(-\bar{z})$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- 120°
- B)
- 150°
- C)
- 210°
- D)
- 300°
- E)
- 330°

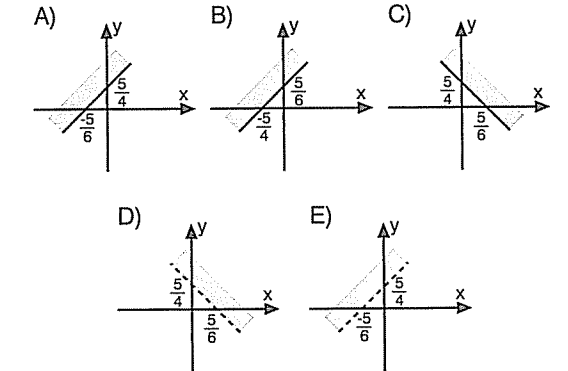
$$17. \quad z_1 = 1 + i \text{ ve } z_2 = i + \sqrt{3}$$

olduğuna göre, $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ kaçtır?

- A)
- 120°
- B)
- 105°
- C)
- 90°
- D)
- 75°
- E)
- 60°

$$18. \quad |z + 3| \leq |z + 2i|$$

koşulunu sağlayan karmaşık sayıların karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

19. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 5 - 4i$$

sayısının kareköklerinin toplamı kaçtır?

- A)
- $4 + 2i$
- B) 4 C)
- $2i$
- D) 0 E)
- $-2i$

$$20. \quad z_1 = 3i \text{ ve } z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

olduğuna göre, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ kaçtır? ($i^2 = -1$)

- A)
- $\frac{\pi}{4}$
- B)
- $\frac{3\pi}{4}$
- C)
- π
- D)
- $\frac{5\pi}{4}$
- E)
- $\frac{7\pi}{4}$

1. $z = x + yi$ olmak üzere,

$$z + \bar{z} = 12$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 24 B) 18 C) 12 D) 8 E) 6

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$P(x) = (x-1)^4 + 3i + 7$$

olduğuna göre, $P(i)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $23 + 3i$ B) $3 + 3i$ C) $13 - 2i$
D) $23 + 2i$ E) $23 + 4i$

3. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z_1 + z_2 = 3 - 4i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i$$

olduğuna göre, z_1 aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 - i$ B) $2 + i$ C) $1 + 2i$
D) $-1 + 2i$ E) $3 + 2i$

4. n bir doğal sayı olmak üzere,

$$(1 + i)^{8n} + (1 - i)^{8n}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2^{4n} B) $2^{4n}i$ C) $2 \cdot 2^{4n}$
D) $2 \cdot 2^{4n}i$ E) 2^{8n}

5. $z = \sqrt[3]{3-4i}$

karmaşık sayısı veriliyor.

Buna göre, $|z^6|$ kaçtır?

- A) 10 B) 20 C) 25 D) 70 E) 100

6. $z = 3 + \sqrt{-4}$

karmaşık sayısının reel kısmı ile imajiner kısmının toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $\frac{4}{3} \leq \frac{|z|^2}{3} \leq 3$

eşitsizliğini sağlayan z kompleks sayılarının oluşturduğu düzlemsel bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

8. $z = \frac{-4 - 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$

karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?

- A) 175 B) 180 C) 195 D) 210 E) 235

9. $z_1 = 3 \cdot \text{cis} 250^\circ$

$$z_2 = 4 \cdot \text{cis} 130^\circ$$

olduğuna göre, $|z_1 - z_2|$ kaçtır?

- A) $\sqrt{30}$ B) $\sqrt{35}$ C) $\sqrt{37}$ D) $\sqrt{40}$ E) $\sqrt{50}$

10. $z = (1 + \sqrt{3}i)^{18}$

karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

- A) 0 B) -2^{36} C) -2^{18} D) 2^{18} E) 2^9

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{i^{-2008} + i^{-2007}}{i^{-2006} + i^{-2005}}$$

karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) -i D) i E) 0

12. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

olduğuna göre, z^{18} kaçtır?

- A) 2^{36} B) 2^{18} C) 2^9
D) -2^{18} E) -2^{36}

13. $|z + 4| = 2$

şartını sağlayan z karmaşık sayılarından argümenti en büyük olanın argümenti kaç derecedir?

- A) 120 B) 150 C) 180 D) 210 E) 240

14. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{1 + xi}{1 - xi}$$

olduğuna göre, $|i \cdot z| + |z|$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

15. $z^2 = 5 + 12i$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-3 - 2i$ B) $-3 - i$ C) $-3 + 2i$
D) $4 - 3i$ E) $4 + 3i$

16. $z = 4 - 3i$

karmaşık sayısının orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesiyle oluşan karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3 + 4i$ B) $-3 - 4i$ C) $-3 + 4i$
D) $4 + 3i$ E) $-4 - 3i$

17. $z = -5 \cdot (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?

- A) 70 B) 110 C) 190 D) 200 E) 210

18. $z = a + bi$ olmak üzere,

$$z + 1 = |z| + 5i$$

olduğuna göre, b kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

19. $z = x + yi$ ve $|z| = 4$ olmak üzere,

$$\left| \frac{z^2}{\sqrt{z} \cdot \bar{z}} \right|$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

20. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{(2 + 3i)(1 - i)^4}{(2 - 3i)}$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) 4 E) 8

1. $z\bar{z} = |\bar{z}| + 12$

olduğuna göre, $|\bar{z}|$ kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt[3]{-27}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -27 B) $-9\sqrt{3}$ C) $-3\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

3. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) $-\frac{8}{5}$

4. $3 \cdot |-i \cdot z| + |\bar{z}| = 12$

olduğuna göre, z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\sqrt{3} - \sqrt{6}i$ B) $1 - 2i$ C) $3 - i$
D) $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ E) $4 + i$

5. Katsayıları reel sayı olan,

$$x^2 + (a-3)x + b + 2 = 0$$

denkleminin köklerinden biri $1 + i$ olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $\frac{z(2-i)}{3\bar{z}-1} = 1$

olduğuna göre, $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 3

7. $|z - 3 - 4i| \leq 3$

şartını sağlayan z karmaşık sayılarının düzlemde belirttiği şeklin alanı kaç π dir?

- A) 6π B) 8π C) 9π D) 10π E) 12π

8. Kutupsal koordinatları,

$$\left(2, \frac{\pi}{12}\right) \text{ ve } \left(4, \frac{5\pi}{12}\right)$$

olan iki karmaşık sayı arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

9. $\frac{i^{-10} + i^{-11} + \dots + i^{-20}}{i^{-6} + i^{-7} + \dots + i^{-16}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) i B) -i C) 1 D) -1 E) 0

10. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z = \frac{(1-3i)(3+\sqrt{3}i)}{1+3i}$$

olduğuna göre, $|z^2|$ kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{(1+i)^{1997} \cdot (1-i)^{1999}}{2^{1997}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2i B) -2 C) 2i D) 4 E) 4i

12. $z = \frac{(3-4i)(5+12i)}{1-\sqrt{3}i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) $\frac{65}{2}$ B) $\frac{65}{3}$ C) $\frac{65}{4}$ D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{13}{2}$

13. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{z}{6+8i} + 2i = \frac{3+3i}{1-3i}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının modülü (uzunluğu) kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) 5 E) 10

14. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = 5 + 12i$$

olduğuna göre, $\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{z \cdot \bar{z}}}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{9}{13}$ B) $\frac{10}{13}$ C) $\frac{8}{25}$ D) $\frac{16}{25}$ E) $\frac{17}{32}$

15. $z = \frac{2-3i}{1+2i}$

sayısının eşleniğinin sanal kısmı kaçtır?

- A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) $-\frac{7}{5}$

16. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{82}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) -i B) -1 C) 1 D) i E) 2i

17. $z = 5i - 12$ karmaşık sayısı için,

$\frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 13 B) 7 C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{1}{169}$

18. $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$

sayısının mutlak değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\cos 10^\circ$ B) $\sqrt{2} \cdot \cos 10^\circ$ C) $2\cos 20^\circ$
D) 1 E) 2

19. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = (1+i)^{-4}$ olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

20. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = 2 - \sqrt{3}i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersinin modülü kaçtır?

- A) $2 + \sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) 3 D) 5 E) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(1 + i)^6 \cdot (1 - i)^6 + (1 + i)^{12}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $2^6 \cdot i$
- B)
- $-2^6 \cdot i$
- C) 0 D)
- 2^6
- E)
- -2^6

2. $\text{Arg}(z - 1 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$
 $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 3$ olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A) 1 B)
- $\sqrt{2}$
- C) 2 D)
- $\sqrt{5}$
- E) 3

3. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-10}}{\sqrt{-9} - \sqrt{-4}}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10i B) 5i C) 2i D) -5i E) -10i

4. $z = \frac{i - \frac{1}{2i}}{i + \frac{1}{2i}}$ olduğuna göre, $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

5. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z_1 = 4 \text{ cis } \alpha$$

$$z_2 = 3 \text{ cis } (-\alpha)$$

olduğuna göre, $z_1 \cdot z_2$ kaçtır?

- A) 12i B) 6i C) 3i D) 6 E) 12

6. $i^2 = -1$ olmak üzere, $x = i$ ve $y = -i$ için,

$$x^3 \cdot y^2 - 3x \cdot y^2 + 4x^2 \cdot y^7$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A)
- $2 + 2i$
- B)
- $-2 + 2i$
- C)
- $4 - 4i$
-
- D) 0 E)
- $-4 + 4i$

7. $z^2 + 4 = 3i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları z_1 ve z_2 dir.Buna göre, $z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2$ kaçtır?

- A)
- $3 + 4i$
- B)
- $-4 + 3i$
- C)
- $3i - 8$
-
- D)
- $4 - 3i$
- E)
- $6i + 8$

8. $z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z - 3| = |z + 3i|$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yer denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $y = x$
- B)
- $y = -x$
- C)
- $y = x + 2$
-
- D)
- $y = -x + 2$
- E)
- $y = x - 2$

9. $z_1 = 2 - 3i$
 $z_2 = 1 + i$ olduğuna göre, $|\bar{z}_1 + z_2|$ kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D)
- $\sqrt{3}$
- E)
- $\sqrt{2}$

10. $x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin kökleri z_1 ve z_2 olduğuna göre, $|z_1| + |z_2|$ kaçtır?

- A)
- $\sqrt{2}$
- B)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C) 1 D)
- $\frac{1}{2}$
- E) 2

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{2+i}{1-i} + z = 1 + 2i$$

olduğuna göre, z aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $\frac{1+i}{2}$
- B)
- $\frac{1-i}{2}$
- C)
- $\frac{1+i}{3}$
-
- D)
- $\frac{1-i}{3}$
- E)
- $\frac{1+i}{4}$

12. $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\sqrt{3a + bi} = 2 - i$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -1 D) 1 E) 3

13. $z = a + bi$ olmak üzere,

$$(1 + i) \cdot z = 2 + \bar{z}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -3

14. $z = 2 \cdot (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ olduğuna göre, z^3 ün kutupsal koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $(8, 20^\circ)$
- B)
- $(8, 40^\circ)$
- C)
- $(8, 60^\circ)$
-
- D)
- $(4, 60^\circ)$
- E)
- $(8, 80^\circ)$

15. $z = \frac{(1 + 2\sqrt{2}i)^3}{3 - 4i}$ olduğuna göre, $|\bar{z}|$ kaçtır?

- A)
- $\frac{33}{5}$
- B) 5 C)
- $\frac{27}{5}$
- D)
- $\frac{24}{5}$
- E) 1

1-C

2-D

3-A

4-D

5-E

6-D

7-D

8-B

9-A

10-E

11-A

12-D

13-B

14-C

15-C

16-B

17-E

18-B

19-A

20-C

16. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$x^2 + 2x + 10 = 0$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $1 - 3i$
- B)
- $-1 - 3i$
- C)
- $3 + i$
-
- D)
- $3 - i$
- E)
- $1 - 2i$

17. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x + 2}$$

olduğuna göre, $f(-i)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $\frac{4-9i}{5}$
- B)
- $\frac{7+3i}{5}$
- C)
- $\frac{7-3i}{5}$
-
- D)
- $\frac{9+3i}{5}$
- E)
- $\frac{9-3i}{5}$

18. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{3+i}{1-3i} \right)^{38}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) -i D) -2i E) i

19. $z = x + yi$ olmak üzere,

$$z + z(z + 1) = -1 - 8i$$

olduğuna göre, z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)
- $1 - 2i$
- B)
- $1 + 2i$
- C)
- $-3 - 2i$
-
- D)
- $3 - 2i$
- E)
- $2i$

20. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \sqrt[3]{-4 + 4\sqrt{3}i}$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

- A)
- $\sqrt{2}$
- B)
- $\sqrt[3]{2}$
- C) 2 D) 3 E)
- $\sqrt[3]{4}$

1-C

2-D

3-A

4-D

5-E

6-D

7-D

8-B

9-A

10-E

11-A

12-D

13-B

14-C

15-C

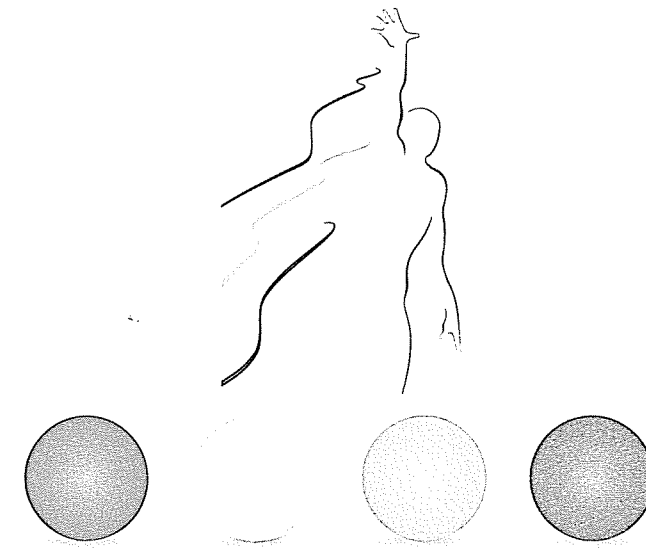
16-B

17-E

18-B

19-A

20-C



BÖLÜM 3

LOGARİTMA

ÜSTEL FONKSİYON

Bilgi

a birden farklı pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$$

fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = 4^x$$

olduğuna göre, $f(1) + f(2)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$f(1) = 4^1 = 4 \text{ ve } f(2) = 4^2 = 16 \text{ olduğundan}$$

$$f(1) + f(2) = 4 + 16 = 20 \text{ olur.}$$

Örnek 2:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$$

olduğuna göre, $f(0) \cdot f(-2)$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$f(0) = \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1} = \frac{1}{5} \text{ ve}$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \text{ olduğundan}$$

$$f(0) \cdot f(-2) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$g(x) = 2^{x-2}$$

olduğuna göre, $g(-1)$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Soru 2:

$$h(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+1}$$

olduğuna göre, $h(-1) \cdot h(1)$ kaçtır?

- ✓ A) $\frac{1}{49}$ B) $\frac{1}{7}$ C) 1 D) 7 E) 49

Soru 3:

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$$

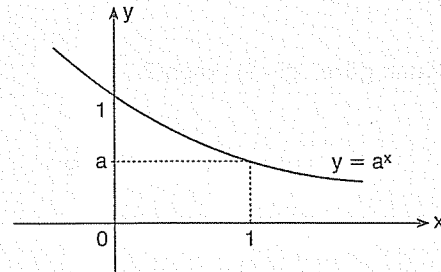
olduğuna göre, $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ kaçtır?

- A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ ✓ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{8}{27}$

Üstel Fonksiyonun Grafiği

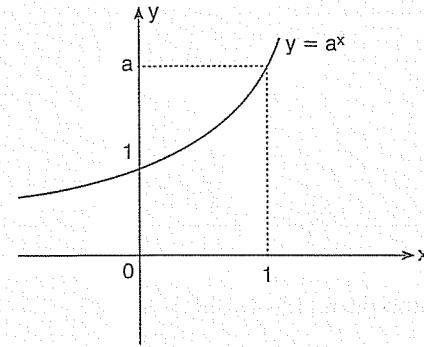
Bilgi

$0 < a < 1$ ise f , azalan bir fonksiyondur.



($0 < a < 1$ için $y = a^x$)

$a > 1$ ise f , artan bir fonksiyondur.



($a > 1$ için $y = a^x$)

Bilgi Kavrama

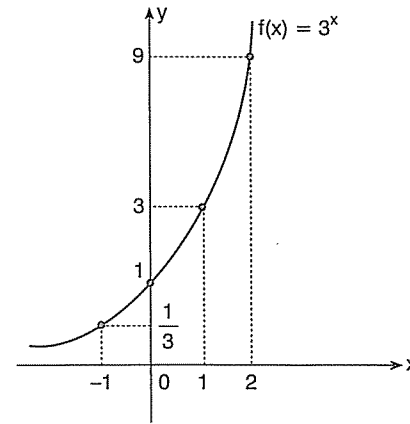
Örnek 1:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 3^x$$

fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çizelim.

Çözüm:

x	$y = f(x) = 3^x$	(x, y)
-1	$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	$(-1, \frac{1}{3})$
0	$f(0) = 3^0 = 1$	(0, 1)
1	$f(1) = 3^1 = 3$	(1, 3)
2	$f(2) = 3^2 = 9$	(2, 9)



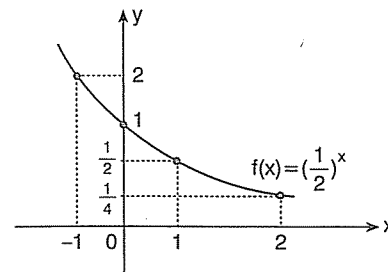
Örnek 2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çizelim.

Çözüm:

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	(-1, 2)
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	(0, 1)
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$(2, \frac{1}{4})$

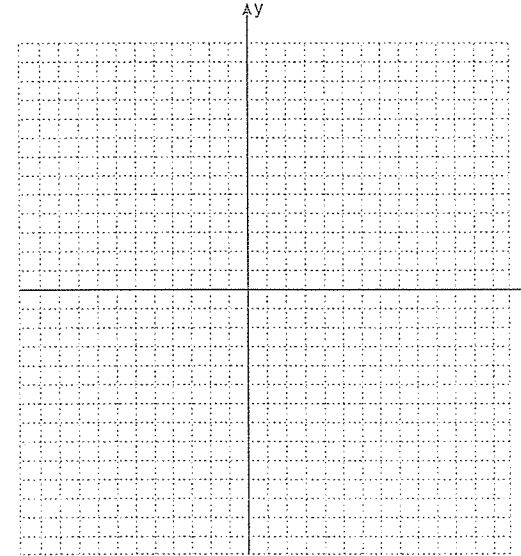


Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

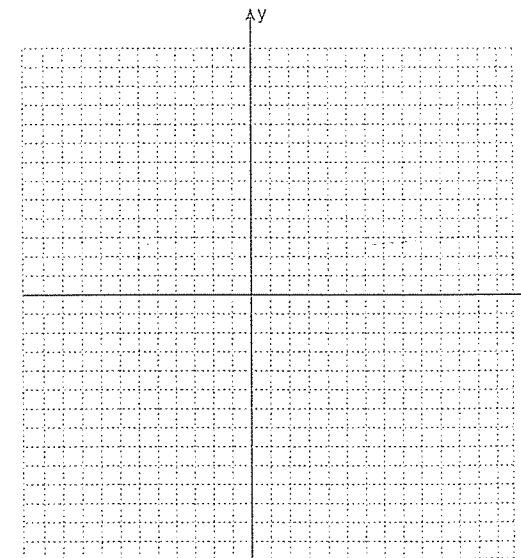
fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Soru 2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 4^x + 1$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



LOGARİTMA FONKSİYONU

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna, a tabanına göre **logaritma fonksiyonu** denir.

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$$

şeklinde gösterilir.

Bilgi

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tanımlı olması için,

- i. $x > 0$
 - ii. $a > 0, a \neq 1$
- olmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = \log_5 \frac{x-2}{4-x}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \log_5 \frac{x-2}{4-x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi, $5 > 0$ ve $5 \neq 1$

$\frac{x-2}{4-x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

x	2	4
$\frac{x-2}{4-x}$	-	+

$\mathbb{C} = (2, 4)$ bulunur.

Örnek 2:

$$f(x) = \log_{4-x} (5x-2)$$

fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x > 0$ için tanımlı olduğundan,

$$5x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{5} \dots (1)$$

$$4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \dots (2)$$

$$4 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \dots (3) \text{ olmalıdır.}$$

Bu üç koşulun birlikte sağlandığı aralık, tanım aralığıdır.

O halde, tanım aralığı $\left(\frac{2}{5}, 4\right) - \{3\}$ olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$f(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) (1, 2) B) (2, ∞) C) [1, 2]
☒ D) R - [1, 2] E) R - (1, 2)

Soru 2:

$$f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) (-2, 2) ☒ B) (-1, 2) - {0} C) (-∞, -2)
D) (2, ∞) E) (-1, 2)

Soru 3:

$$f(x) = \log_x \left(\frac{x+4}{x-2} \right)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdaki-lerden hangisidir?

- ☒ A) (2, ∞) B) R - [-4, 2] C) (0, 2) - {1}
D) (0, ∞) E) (0, ∞) - {1}

Bilgi

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

Aşağıdaki eşitliklerdeki x değerlerini bulalım.

- I. $x = \log_2 4$ III. $2 = \log_3 x$
II. $x = \log_2 \frac{1}{4}$ IV. $3 = \log_2 (x + 1)$

Çözüm:

$$\text{I. } x = \log_2 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

$$\text{II. } x = \log_2 \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

$$\text{III. } 2 = \log_3 x \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9 \text{ dur.}$$

$$\text{IV. } 3 = \log_2 (x + 1) \Rightarrow x + 1 = 2^3 \\ \Rightarrow x = 7 \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\log_{125} x = 0 \text{ ve } \log_{25} 125 = y$$

olduğuna göre, x + y toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\log_{125} x = 0 \Rightarrow x = (125)^0 = 1 \text{ dir... (1)}$$

$$\log_{25} 125 = y \Rightarrow 125 = (25)^y$$

$$\Rightarrow 5^3 = 5^{2y}$$

$$\Rightarrow 3 = 2y$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ dir... (2)}$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } x + y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

Örnek 3:

$$\log_2(\log_3 x) = 1$$

olduğuna göre, x in değerini bulalım.

Çözüm:

$$\log_2(\log_3 x) = 1 \Rightarrow \log_3 x = 2^1$$

$$\Rightarrow x = 3^2$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ olur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x + 11) = 0$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- ☒ A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 2:

$$\log_3(\log_2(4x - 6)) = 0$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- ☒ A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Soru 3:

$$\log_3(9 - \log_5(3 - \log_3(2x + 5))) = 2$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 ☒ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 4:

$$\log_5[\log_4(2 \cdot \log_3(1 - x^3))] = 0$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- ☒ A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Soru 5:

$$(\log_3(x - 7))^4 - 1 = 0$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

- A) $\frac{53}{6}$ B) $\frac{41}{3}$ ☒ C) $\frac{52}{3}$ D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{110}{3}$

Soru 6:

$$\log_7 \left(\frac{3x^2 - 7x - 4}{2} \right) = 0$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaç-
tır?

- A) -1 B) -2 C) 1 D) 2 E) 4

Soru 7:

$$\log_{\sqrt{5}} x = 6$$

olduğuna göre, $\log_x 125$ kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

Soru 8:

$$f(x) = \log_3(x + n)$$

$$f(3) = 2$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Bilgi

Üstel ve logaritma fonksiyonunun tersini bulmak için; $y = f(x)$ ise, $x = f^{-1}(y)$ olduğundan x, y cinsinden bulunur ve x ile y nin yerleri değiştirilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f: \left(\frac{2}{3}, \infty \right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu,}$$

$$f(x) = \log_5(3x - 2) \text{ şeklinde tanımlanıyor.}$$

Buna göre, ters fonksiyonu belirtilen $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) = \log_5(3x - 2) &\Rightarrow y = \log_5(3x - 2) \\ &\Rightarrow 5^y = 3x - 2 \\ &\Rightarrow \frac{5^y + 2}{3} = x \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5^x + 2}{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$f: \mathbb{R}^+ - \{1\} \rightarrow (1, \infty) \text{ fonksiyonu,}$$

$$f(x) = 3^{2x+1} + 1 \text{ şeklinde tanımlanıyor.}$$

Buna göre, ters fonksiyonu belirtilen $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) = 3^{2x+1} + 1 &\Rightarrow y = 3^{2x+1} + 1 \\ &\Rightarrow y - 1 = 3^{2x+1} \\ &\Rightarrow \log_3(y - 1) = 2x + 1 \\ &\Rightarrow -1 + \log_3(y - 1) = 2x \\ &\Rightarrow x = \frac{-1 + \log_3(y - 1)}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-1 + \log_3(x - 1)}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$f: (-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_2(x + 3)$$

fonksiyonu için $f^{-1}(2)$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y &= \log_2(x + 3) \\ \Rightarrow 2^y &= x + 3 \\ \Rightarrow 2^y - 3 &= x \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= 2^x - 3 \text{ olur.} \\ \Rightarrow f^{-1}(2) &= 2^2 - 3 \\ \Rightarrow f^{-1}(2) &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

Uygun şartlarda,

$$f(x) = \log_3 x$$

$$(g \circ f)(x) = x - 7$$

olduğuna göre, g(x) i bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) = \log_3 x &\Rightarrow f^{-1}(x) = 3^x \text{ tir.} \\ (f \circ f^{-1})(x) &= (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x \text{ tir.} \\ \text{Buna göre,} \\ (g \circ f)(x) &= x - 7 \\ (g \circ f \circ f^{-1})(x) &= (x - 7) \circ (f^{-1}(x)) \\ \Rightarrow (g \circ I)(x) &= (x - 7) \circ (3^x) \\ \Rightarrow g(x) &= 3^x - 7 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

f: $\mathbb{R} \rightarrow (-5, \infty)$ şeklinde tanımlı,

$$f(x) = \frac{3^{\frac{x}{3}}}{2} - 5$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisi-
dir?

- A) $3 \log_3(2x + 10)$ B) $\log_5 \left(\frac{2x + 10}{3} \right)$
C) $3 \log_3(x + 5)$ D) $2 \log_3(2x + 10)$
E) $\log_2(3x + 5)$

Soru 2:

f: $(4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = 3 \log_3(x - 4) + 1$$

fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisi-
sidir?

- A) $y = 3^x + 4$ B) $y = 3^{x-1} + 4$
C) $y = 3^{\frac{x-1}{3}} + 4$ D) $y = 3^{x-1} + 3$
E) $y = 3^{3x-3} + 4$

Soru 3:

$$f(x) = \log_2(x + 2)$$

$$g(x) = 2^x$$

olduğuna göre, $(g \circ f^{-1})(2)$ kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Logaritmanın Özellikleri

Bilgi

Logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonun tersidir. Üstel fonksiyonların her özelliği, logaritma fonksiyonları için de geçerlidir.

$$\log_a a = 1 \text{ ve } \log_a 1 = 0 \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\log_a a = x$$

ise x in 1 olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\log_a a = x \Rightarrow a = a^x \\ \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\log_a 1 = x$$

ise x in 0 olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\log_a 1 = x \Rightarrow 1 = a^x \quad (a \neq \pm 1) \\ \Rightarrow x = 0 \text{ dir.}$$

Örnek 3:

$$\log_x 3 = 1 \text{ ve } \log_5 5 = y$$

olduğuna göre, $x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\log_x 3 = 1 \Rightarrow 3 = x \text{ tir.}$$

$$\log_5 5 = y \Rightarrow 5 = 5^y \Rightarrow y = 1 \text{ dir.}$$

O halde, $x + y = 3 + 1 = 4$ tür.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\log_{125} a = \frac{3b}{5} \text{ ve } \log_b 5 = 1$$

olduğuna göre, $\log_b a$ kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Soru 2:

$$\log_5 (2x - 1) = 1$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$\log_{(x+1)} (x-1) = 0$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Bayağı ve Doğal Logaritma

Bilgi

Tabanı 10 olan logaritmaya **onluk logaritma** veya **bayağı logaritma** denir ve **log** şeklinde gösterilir.

$$\log_{10} x = \log x \text{ tir.}$$

Tabanı e ($e \approx 2,71828182845$) olan logaritmaya **doğal logaritma** denir ve **ln** şeklinde gösterilir.

$$\log_e x = \ln x \text{ tir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{\log 10 + \log 100}{\log 100 \cdot \log 10}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$\log 10 = \log_{10} 10 = 1$ ve $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$ olduğundan, $\log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3$ ve $\log 100 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$ dir.

$$\text{Buradan, } \frac{\log 10 + \log 100}{\log 100 \cdot \log 10} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$\ln e + \log x = 2$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$\ln e = \log_e e = 1 \text{ dir.}$$

$$\ln e + \log x = 2 \Rightarrow 1 + \log x = 2$$

$$\Rightarrow \log x = 1$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ dur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\log(x + 1) = 1$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 8 D) 9 E) 10

Soru 2:

$$f(x) = \ln x + \log x$$

olduğuna göre, $f(1)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) e

Soru 3:

$$\ln(e \cdot x) = 3$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) e^{-1} C) e D) e^2 E) e^3

Bilgi

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x, \quad n \neq 0 \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$\log_3 2 = k$ olduğuna göre, $\log_3 16$ nın k türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log_3 16 = \log_3 2^4 = 4 \log_3 2 = 4k \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\log_8 32 + \log_4 16$$

toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_8 32 + \log_4 16 &= \log_{2^3} 2^5 + \log_{2^2} 2^4 \\ \Rightarrow &= \frac{5}{3} \log_2 2 + 2 \log_2 2 = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$\log_{16} \sqrt{a} = 2$ olduğuna göre, $\log_{\sqrt{2}} a^2$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_{16} \sqrt{a} = 2 &\Rightarrow \log_{2^4} a^{\frac{1}{2}} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \log_2 a = 2 \\ &\Rightarrow \log_2 a = 16 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} a^2 &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} a^2 = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 a \\ &\Rightarrow = 4 \log_2 a = 4 \cdot 16 = 64 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

$$\log_3 2 = k$$

olduğuna göre, $\log_{81} 64$ ifadesinin k türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) k^6 B) $\frac{k}{2}$ C) $\frac{2}{3} k$
D) $\frac{3}{4} k$ E) $\frac{3}{2} k$

Soru 2:

$$\log_9 a^2 = 3$$

olduğuna göre, $\log_3 a$ kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) 6 D) $3\sqrt{3}$ E) 9

Soru 3:

$$\log_2 (8^{2x+2}) = \log_3 (9^x - 1)$$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

Çarpım ve Bölümün Logaritması**Bilgi**

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$$\log 5 = A$$

olduğuna göre, $\log 2 + \log \left(\frac{5}{2} \right)$ ifadesinin A türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log 2 + \log \left(\frac{5}{2} \right) &= \log 2 + \log 5 - \log 2 \\ &= \log 5 = A \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\log x = m$$

$$\log y = n$$

olduğuna göre, $\log \left(\frac{100}{x \cdot y} \right)$ ifadesinin m ve n türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{100}{x \cdot y} \right) &= \log 100 - \log x - \log y \\ &= 2 - m - n \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\log_3 27! = k$$

olduğuna göre, $\log_3 26!$ ifadesinin k türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log_3 27! = \log_3 (26! \cdot 27)$$

$$\Rightarrow k = \log_3 26! + \log_3 27$$

$$\Rightarrow k = \log_3 26! + \log_3 3^3$$

$$\Rightarrow k = \log_3 26! + 3 \log_3 3$$

$$\Rightarrow k = \log_3 26! + 3$$

$$\Rightarrow k - 3 = \log_3 26! \text{ bulunur.}$$

Örnek 4:

$$\log_7 3 - \log_7 15 = x$$

$$\log_7 5 = y$$

olduğuna göre, $x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_7 3 - \log_7 15 = x &\Rightarrow \log_7 3 - \log_7 3 \cdot 5 = x \\ &\Rightarrow \log_7 3 - (\log_7 3 + \log_7 5) = x \\ &\Rightarrow \log_7 3 - \log_7 3 - \log_7 5 = x \\ &\Rightarrow -\log_7 5 = x \\ &\Rightarrow -y = x \\ &\Rightarrow x + y = 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\log 792 = a, \log 2 = b \text{ ve } \log 3 = c$$

olduğuna göre, $\log 11$ in eşitini bulalım.

Çözüm:

$$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \text{ olduğuna göre,}$$

$$\log 792 = \log (2^3 \cdot 3^2 \cdot 11)$$

$$\Rightarrow a = \log 2^3 + \log 3^2 + \log 11$$

$$\Rightarrow a = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 11$$

$$\Rightarrow a = 3b + 2c + \log 11$$

$$\Rightarrow \log 11 = a - 3b - 2c \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$A = \log 20 + \log 4$$

$$B = \log 25 + \log 5$$

olduğuna göre, $(A + B)^2 - 8$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- ✓ A) 8 B) 6 C) 4 D) 3 E) 1

Soru 2:

$$\log(100 \cdot x) = 4,01$$

olduğuna göre, $\log\left(\frac{x^3}{1000}\right)$ kaçtır?

- A) 1,03 B) 2,03 C) 2,33 D) 3,01 ✓ E) 3,03

Soru 3:

$$\log 3 = a$$

$$\log 2 = b$$

olduğuna göre, $\log 9 + \log 8! - \log 7!$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a + b ✓ B) 2a + 3b C) 2b + a
D) 2a + b E) a + 3b,

Soru 4:

$$\log a = \frac{5}{4}$$

olduğuna göre, $\log(10a)^4$ kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 7 ✓ D) 9 E) 10

Soru 5:

$$\log 3 = x$$

$$\log 5 = y$$

olduğuna göre, $\log 180$ in x ve y türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2x + y B) 1 + 2x - y C) x - y + 2
✓ D) 2x - y + 2 E) x + y - 2

Soru 6:

$$\log_3 18 = a + 1 \text{ olduğuna göre,}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 9^{a-1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ ✓ C) 2 D) 4 E) 6

Bilgi

$$a^{\log_a x} = x \text{ tir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$7^{\log_7 x} + 10^{\log_5} = e^{\ln 8}$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$7^{\log_7 x} + 10^{\log_{10} 5} = e^{\ln 8} = e^{\log_e 8}$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3 \text{ tür.}$$

Örnek 2:

$$10^3 + \log x$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$10^3 + \log x = 10^3 \cdot 10^{\log_{10} x}$$

$$= 1000 \cdot x \text{ olur.}$$

Örnek 3:

$$e^1 + \ln 3$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$e^1 + \ln 3 = e^1 \cdot e^{\ln 3}$$

$$= e \cdot e^{\log_e 3}$$

$$= 3 \cdot e \text{ olur.}$$

Örnek 4:

$$10^x + \log 3 = 30$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$10^x + \log 3 = 30 \Rightarrow 10^x \cdot 10^{\log 3} = 30$$

$$\Rightarrow 10^x \cdot 10^{\log_{10} 3} = 30$$

$$\Rightarrow 10^x \cdot 3 = 3 \cdot 10$$

$$\Rightarrow 10^x = 10$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 5:

$$3^{\log_9 x^2} = 7$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$3^{\log_9 x^2} = 7 \Rightarrow 3^{\log_3 x^2} = 7$$

$$\Rightarrow 3^{\log_3 x} = 7$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ dir.}$$

Örnek 6:

$$4^{\log_2(x+1)} = 25$$

olduğuna göre, x in değerini bulalım.

Çözüm:

$$4^{\log_2(x+1)} = 25 \Rightarrow (2^2)^{\log_2(x+1)} = 5^2$$

$$\Rightarrow 2^{2\log_2(x+1)} = 5^2$$

$$\Rightarrow 2^{\log_2(x+1)^2} = 5^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow x+1 = 5$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$4^{\log_4(2x^2 - 3x)} = x + 6$$

eşitliğini sağlayan x in pozitif değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

$$5^{\log_5 3} = 7^{\log_7 3x}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Soru 3:

$$3^{-1 + \log_3(x+2)} = 5$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 6 B) 10 C) 13 D) 15 E) 17

Soru 4:

$$\log_5 \left(\frac{1}{125} \right)^{x+1} = 5^{\log_{25} 4}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

Soru 5:

$$x \Delta y = 2^{\log_x y} + 3 \cdot 3^{\log_y x} + 5$$

şeklinde Δ işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $2 \Delta 3$ kaçtır?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Soru 6:

$$e^{\ln x} + (\sqrt{2})^{\log_8 729} = 7$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{10}{3}$ D) 3 E) 4

Bilgi

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a} \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$2^{\log_x 5} = 25$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$2^{\log_x 5} = 5^2 \Rightarrow 5^{\log_x 2} = 5^2$$

$$\Rightarrow \log_x 2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$3^{\log_2 a} + a^{\log_2 3} = 54$$

olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$$3^{\log_2 a} = a^{\log_2 3} \text{ olduğundan,}$$

$$3^{\log_2 a} + a^{\log_2 3} = 54$$

$$\Rightarrow 3^{\log_2 a} + 3^{\log_2 a} = 54$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3^{\log_2 a} = 54$$

$$\Rightarrow 3^{\log_2 a} = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 3$$

$$\Rightarrow a = 2^3$$

$$\Rightarrow a = 8 \text{ dir.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3^{\log_7 x} = 18 - x^{\log_7 3}$$

olduğuna göre, x in değeri kaçtır?

- A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

Soru 2:

$$5^{\log_x 2} + 2^{\log_x 5} = 250$$

olduğuna göre, x^3 kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$7^{\log_x 4} + 4^{\log_x 7} = 98$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

Taban Değiştirme

Bilgi

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} \dots \text{ olur.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\log_3 10 \cdot \log_3 30 \cdot \log_{30} 60 \cdot \log_{60} 81$$

çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_3 10 \cdot \log_3 30 \cdot \log_{30} 60 \cdot \log_{60} 81 \\ = \frac{\log 10}{\log 3} \cdot \frac{\log 30}{\log 10} \cdot \frac{\log 60}{\log 30} \cdot \frac{\log 81}{\log 60} \\ = \frac{4 \log 3}{\log 3} = 4 \text{ tür.} \end{aligned}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d \text{ dir.}$$

Örnek 2:

$$\log_2 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 6$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 6 &= \log_2 5 \cdot \log_3 2^2 \cdot \log_5 6 \\ &= 2 \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 6 \\ &= 2 \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 6 \\ &= 2 \log_3 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\log_3 5 = x$$

olduğuna göre, $\log_5 75$ in x türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_5 75 &= \frac{\log_3 75}{\log_3 5} = \frac{\log_3 (3 \cdot 5^2)}{\log_3 5} \\ &= \frac{\log_3 3 + 2 \log_3 5}{\log_3 5} \\ &= \frac{1 + 2x}{x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$1 = \log_2 5^{\log_5 x}$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1 &= \log_2 5^{\log_5 x} \Rightarrow 1 = \log_5 x \cdot \log_2 5 \\ \Rightarrow 1 &= \frac{\log x}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 2} \\ \Rightarrow \log 2 &= \log x \\ \Rightarrow x &= 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\log 2 = a \text{ ve } \log 5 = b$$

olduğuna göre, $\log_{\frac{1}{25}} 10$ ifadesinin a ve b türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{25}} 10 &= \frac{\log 10}{\log \left(\frac{1}{25} \right)} = \frac{\log (2 \cdot 5)}{\log 5^{-2}} \\ &= \frac{\log 2 + \log 5}{-2 \log 5} \\ &= \frac{a + b}{-2b} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 6:

$$\log 2 = x \text{ ve } \log 3 = y$$

olduğuna göre, $\log_5 6$ nın x ve y türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_5 6 &= \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log (2 \cdot 3)}{\log \left(\frac{10}{2} \right)} \\ \Rightarrow &= \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{x + y}{1 - x} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 7:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{\log 8}{\log 27} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\ln 2}{\ln 3} &= \frac{\log_e 2}{\log_e 3} = \log_3 2 \text{ dir... (1)} \\ \frac{\log 8}{\log 27} &= \frac{3 \log 2}{3 \log 3} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \log_3 2 \text{ dir... (2)} \\ (1) \text{ ve } (2) \text{ den} \\ \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{\log 8}{\log 27} &= \log_3 2 - \log_3 2 = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 8:

$\log_a b = x$ olduğuna göre, $\log_{(a \cdot b)} (a^2 \cdot b^3)$ ün x türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_{a \cdot b} a^2 \cdot b^3 &= \frac{\log_a a^2 \cdot b^3}{\log_a a \cdot b} = \frac{\log_a a^2 + \log_a b^3}{\log_a a + \log_a b} \\ &= \frac{2 \log_a a + 3 \log_a b}{\log_a a + \log_a b} \\ &= \frac{2 + 3x}{1 + x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\log_4 27 \cdot \log_9 5 \cdot \log_{125} 8$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

Soru 2:

$$\log_5 6 \cdot \log_6 25 = x$$

olduğuna göre, $x^2 - 2x + 1$ kaçtır?

- A) 36 B) 25 C) 9 D) 4 E) 1

Soru 3:

$$\log 2 = a \text{ ve } \log 5 = b$$

olduğuna göre, $\log_{\frac{1}{5}} 100$ ifadesinin a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a + 2b}{b}$ B) $\frac{2a - b}{b}$ C) $\frac{-2a - 2b}{b}$ D) $\frac{2a - 4b}{b}$ E) $\frac{b - 2a}{a}$

Soru 4:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_n (n+1) = 6$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 31 B) 32 C) 63 D) 64 E) 127

Soru 5:

$$2 = \log_3 6^{\log_6 x}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

Soru 6:

$$k = \log_2 3 \text{ ve } p = \log_2 5$$

olduğuna göre, $\log_{15} 2$ nin k ve p cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{k+p}$ B) $\frac{1}{k}$ C) $\frac{1}{k-p}$
D) $\frac{k}{1+kp}$ E) $\frac{1+kp}{k}$

Soru 7:

$$\log_3 5 = a$$

olduğuna göre, $\log_{125} 45$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+1}{3}$ B) $\frac{a+2}{3a}$ C) $\frac{a+1}{3a}$
D) $\frac{3a}{a+1}$ E) $\frac{3}{a+1}$

Soru 8:

$$\log_6 9 = x$$

$$\log_{12} 18 = y$$

olduğuna göre, y nin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4x+2}{x-1}$ B) $\frac{4x+2}{x+1}$ C) $\frac{4x-2}{x+1}$
D) $\frac{2+x}{4-x}$ E) $\frac{2x-1}{4x+2}$

Soru 9:

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} - \frac{\log 16}{\log 9}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Bilgi

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \text{ ve } \frac{1}{\log_a b} = \log_b a \text{ dir.}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2$$

değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2 5 \cdot \log_5 2 &= \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} \\ &= 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6}$$

toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6} &= \log_6 4 + \log_6 9 \\ &= \log_6 (4 \cdot 9) \\ &= \log_6 6^2 \\ &= 2 \log_6 6 \\ &= 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\frac{1}{\log_3 60} + \frac{1}{\log_4 60} + \frac{1}{\log_5 60}$$

toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 60} + \frac{1}{\log_4 60} + \frac{1}{\log_5 60} \\ &= \log_{60} 3 + \log_{60} 4 + \log_{60} 5 \\ &= \log_{60} (3 \cdot 4 \cdot 5) = \log_{60} 60 = 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\log_2 x = \log_x 2$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2 x = \log_x 2 &\Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{\log_2 x} \\ &\Rightarrow (\log_2 x)^2 = 1 \\ \log_2 x = 1 \text{ veya } \log_2 x = -1 \\ x = 2 \text{ veya } x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\begin{aligned} \log_2 3 &= a \\ \log_5 2 &= b \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\log_{15} 15$ in a ve b türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2 3 = a \text{ ve } \log_5 2 = b &\Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{b} \text{ dir.} \\ \log_{10} 15 &= \frac{\log_2 15}{\log_2 10} \\ &= \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 5} \\ &= \frac{a + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}} = \frac{ab + 1}{b + 1} \end{aligned}$$

■ Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\log_3 4 \cdot \log_4 9 \cdot \log_9 6 \cdot \log_6 9$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 2:

a . b . c = 2 olmak üzere,

$$\frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_b 2} + \frac{1}{\log_c 2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Soru 3:

$$\log_2 3 = x \text{ ve } \log_3 5 = y$$

olduğuna göre, $\log_8 15$ in x ve y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{1+xy}$ B) $\frac{2}{1-xy}$ C) $\frac{3}{1+xy}$
D) $\frac{x \cdot y}{3}$ E) $\frac{1-xy}{3}$

Soru 4:

$\log_y x = a$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\log_x xy} + \frac{1}{\log_y xy} - \frac{\log x}{\log xy}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+1}{a}$ B) $\frac{1}{a+1}$ C) 1
D) $1+a$ E) $\frac{1}{a}$

Soru 5:

$$\log_3 2 = a \text{ ve } \log_5 3 = b$$

olduğuna göre, $\log_{12} 25$ ifadesinin a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a}{ab+1}$ B) $\frac{a+b}{b+2}$ C) $\frac{2}{a+ab}$
D) $\frac{2a}{a+b}$ E) $\frac{2}{2ab+b}$

Soru 6:

$$\log_3 15 = a \text{ ve } \log_2 6 = b$$

olduğuna göre, $\log_2 5$ in a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a-1}{b-1}$ B) $\frac{b+1}{a-b}$ C) $\frac{b-1}{a+b}$
D) $\frac{a+b}{a-b}$ E) $(a-1)(b-1)$

■ Bilgi

$\log 1 = 0$ ve $\log 10 = 1$ olduğundan 1 ile 10 sayıları arasındaki sayıların onluk logaritmasının değeri 0 (sıfır) ile 1 (bir) arasında bir değerdir. Diğer bir ifadeyle onluk logaritmasının değeri 0 ile 1 arasında olan sayı bir basamaklı bir sayıdır.

Benzer şekilde,

$$\log 10 = 1$$

$$\log 35 = 1, \dots$$

$$\log 83 = 1, \dots$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 513 = 2, \dots$$

$$\log 983 = 2, \dots$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 1453 = 3, \dots$$

$$\log 1881 = 3, \dots$$

$$\log 1938 = 3, \dots$$

$$\log 7345 = 3, \dots$$

$$\log 10000 = 4$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

O halde, logaritması bilinen bir sayının tam kısmının kaç basamaklı olduğunu bulmak için sayının logaritmasının tam kısmına 1 eklenir. Ekleme sonunda bulunan tamsayı, bu sayının basamak sayısıdır.

$$\log \frac{1}{10} = \log(0,1) = -1$$

$$\log 0,04 = -1, \dots$$

$$\log 0,07 = -1, \dots$$

$$\log(0,01) = -2$$

$$\log(0,002) = -2, \dots$$

$$\log(0,007) = -2, \dots$$

$$\log(0,001) = -3$$

$$\log(0,00073) = -3, \dots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

0 ile 1 arasındaki bir sayının logaritması verilsin. Ondalık gösteriminde virgülden sonraki sıfırdan farklı ilk rakamının solunda kaç tane sıfır olduğunu bulmak için sayının logaritmasının mutlak değerinin tam kısmına 1 eklenir. Ekleme sonunda bulunan tamsayı, bu sayının ondalık gösterimindeki sıfırdan farklı ilk rakamının solundaki sıfırların sayısıdır.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

- a) $\log 0,05$
b) $\log 0,0015$
c) $\log 312$
d) $\log 1639$

değerlerinin hangi ardışık iki tamsayı arasında olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$a) \log(0,01) < \log(0,05) < \log(0,1) \\ -2 < \log(0,05) < -1$$

olduğundan $\log 0,05 = -1, \dots$ dir.

$$b) \log(0,001) < \log(0,0015) < \log(0,01) \\ -3 < \log(0,0015) < -2$$

olduğundan $\log 0,0015 = -2, \dots$ dir.

$$c) \log 100 < \log 312 < \log 1000 \\ 2 < \log 312 < 3$$

olduğundan $\log 312 = 2, \dots$ dir.

$$d) \log 1000 < \log 1639 < \log 10000 \\ 3 < \log 1639 < 4$$

olduğundan $\log 1639 = 3, \dots$ dir.

Örnek 2:

$$\log 2 = 0,301$$

olduğuna göre, $(80)^{30}$ sayısının kaç basamaklı olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$(80)^{30} = x \text{ olsun.}$$

İki tarafın 10 tabanında logaritmasını alalım.

$$\log x = \log (80)^{30} = 30 \cdot \log 80 \text{ olur.}$$

$$\log x = 30 \cdot \log(10 \cdot 2^3) \\ = 30(\log 10 + 3 \log 2)$$

$$= 30(1 + 3 \cdot 0,301)$$

$$= 30 \cdot 1,903$$

$$= 57,09$$

olduğundan $x = (80)^{30}$ sayısı $57 + 1 = 58$ basamaklı bir tamsayıdır.

Örnek 3:

m bir doğal sayıdır.

$$\log m = 4,25$$

olduğuna göre, m^8 sayısının kaç basamaklı bir doğal sayı olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$m^8 = x \text{ olsun.}$$

İki tarafın 10 tabanında logaritmasını alalım.

$$\log x = \log m^8 = 8 \log m = 8 \cdot (4,25) = 34$$

olduğundan $x = m^8$ sayısı $34 + 1 = 35$ basamaklı bir doğal sayıdır.

Örnek 4:

$$\log 11 + \log 9$$

toplamının değerinin hangi iki tamsayı arasında olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$x = \log 11 + \log 9$$

$$= \log(11 \cdot 9)$$

$$= \log 99 \text{ dur.}$$

$$\log 10 < x = \log 99 < \log 100 \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ dir.}$$

Örnek 5:

$$\log 3 = 0,4771$$

olduğuna göre, $(0,3)^{20}$ sayısının ondalık gösteriminde, sıfırdan farklı ilk rakamın solunda kaç tane sıfır olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$(0,3)^{20} = x \text{ olsun.}$$

İki tarafın 10 tabanında logaritmasını alalım.

$$\log x = \log(0,3)^{20}$$

$$= 20 \cdot \log(3 \cdot 10^{-1})$$

$$= 20[\log 3 + \log 10^{-1}]$$

$$= 20[0,477 - 1]$$

$$= -10,458 \text{ olur.}$$

O halde, bu sayının sıfırdan farklı ilk rakamın solunda, $|-10| + 1 = 11$ tane sıfır vardır.

Bilgi Uygulama**Soru 1:**

x bir doğal sayıdır.

$$\log x = 3,24$$

olduğuna göre, x^5 kaç basamaklı bir sayıdır?

- ✓ A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Soru 2:

$$\log 111 + \log 9$$

toplamının değeri aşağıdaki aralıkların hangisinde bulunur?

- A) (0, 1) B) (1, 2) ✓ C) (2, 3)
D) (3, 4) E) (4, 5)

Soru 3:

$$\log 3 = 0,477$$

olduğuna göre, $(270)^{50}$ sayısı kaç basamaklıdır?

- ✓ A) 122 B) 121 C) 120 D) 119 E) 118

Soru 4:

$$\log 2 = 0,301$$

olduğuna göre, $(0,8)^{30}$ sayısının ondalık gösteriminde, sıfırdan farklı ilk rakamın solunda kaç tane sıfır vardır?

- A) 2 B) 3 ✓ C) 4 D) 5 E) 6

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonun Grafik Çizimi**Bilgi**

Üstel fonksiyon ile logaritma fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktr.

Bilgi Kavrama**Örnek 1:**

$a > 1$ iken,

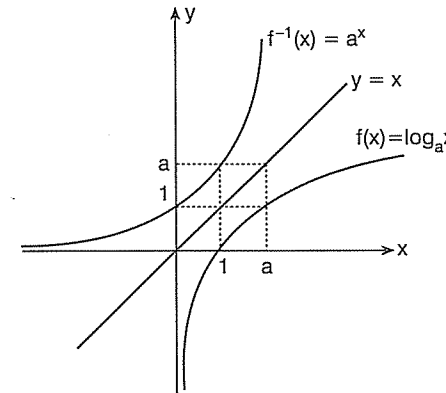
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tersi, $f^{-1}(x) = a^x$ tir.

f fonksiyonunun grafiği ile f^{-1} fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktr.

**Örnek 2:**

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_4 x$$

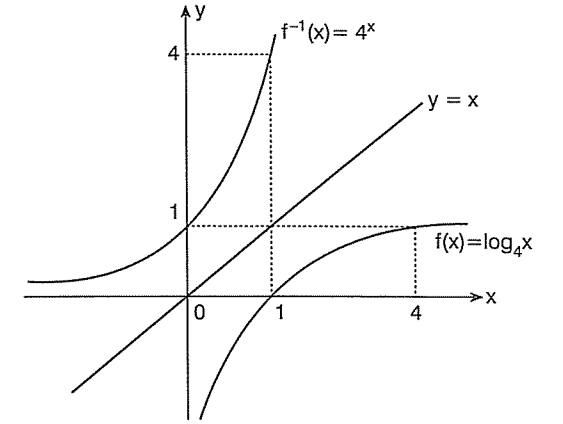
fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersinin grafiğini, aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_4 x \text{ ise}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = 4^x \text{ olur.}$$

f ile f^{-1} in grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetriktr.

**Örnek 3:**

$0 < a < 1$ iken

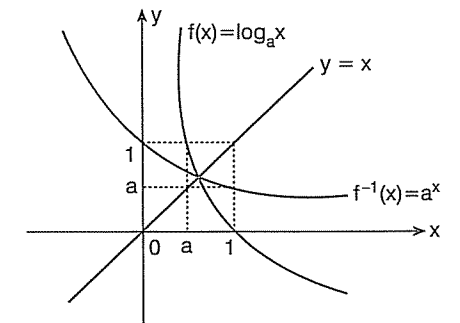
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tersi, $f^{-1}(x) = a^x$ tir.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktr.

**Örnek 4:**

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

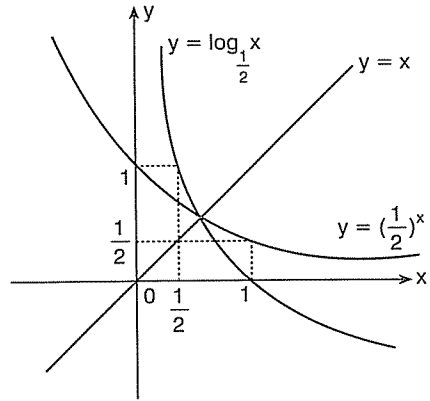
fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersinin grafiğini, aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ ise}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ olur.}$$

f ile f^{-1} in grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetrik.

**Örnek 5:**

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$$

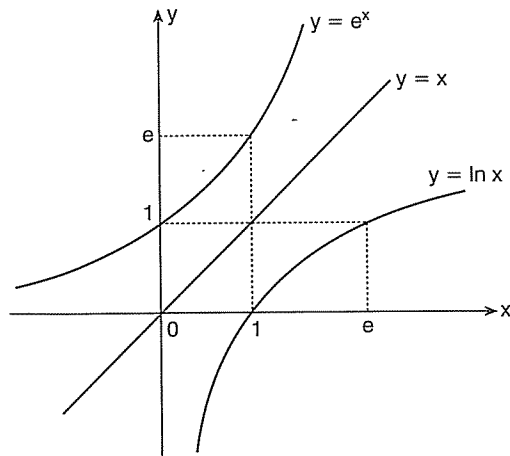
fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersinin grafiğini, aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x \text{ ise}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = e^x \text{ olur.}$$

f ile f^{-1} in grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetrik.

**Örnek 6:**

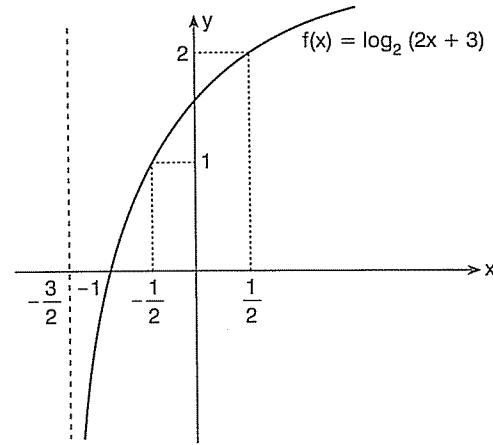
$$f(x) = \log_2(2x + 3)$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \text{ olmalıdır.}$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f(x)	0	1	2

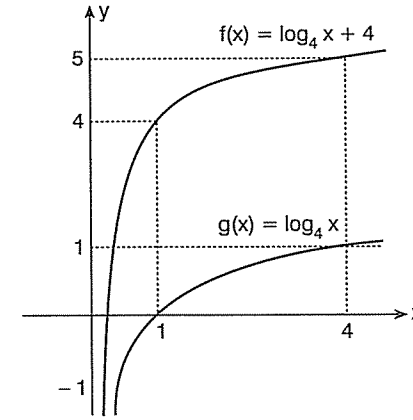
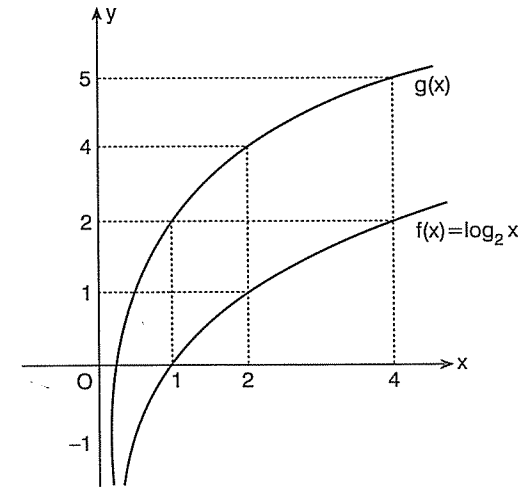
**Örnek 7:**

$$f(x) = 4 + \log_4 x$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

$f(x) = 4 + \log_4 x$ in grafiğinin çizimi için $\log_4 x$ in grafiği çizilir ve x eksenine boyunca 4 birim yukarıya kaydırılır. Kaydırılarak oluşturulan grafik, $f(x) = \log_4 x + 4$ ün grafiğidir.

**Örnek 8:**

Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, g fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm:

g fonksiyonu f fonksiyonunun x eksenine boyunca 3 birim yukarıya kaydırılmış biçimi olduğundan,
 $g(x) = 3 + f(x)$
 $= 3 + \log_2 x$ bulunur.

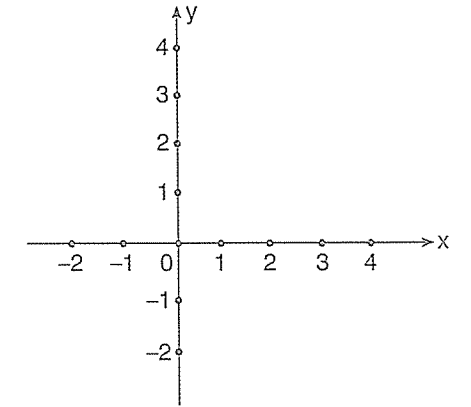
Bilgi Uygulama**Soru 1:**

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = \log_4(x - 2)$

Çözüm:

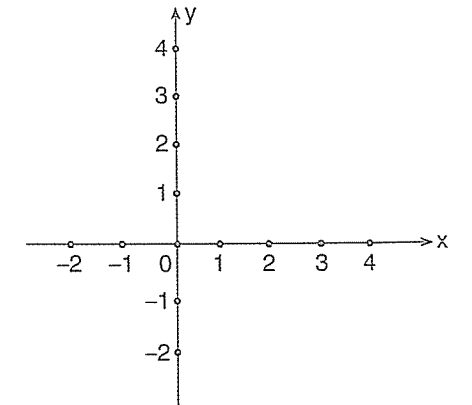
x				
f(x)	0	1	2	



b) $f(x) = \log_8 x - 1$

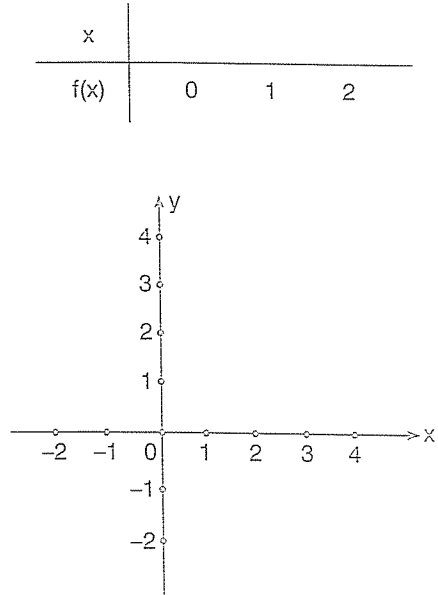
Çözüm:

x				
f(x)	0	1	2	



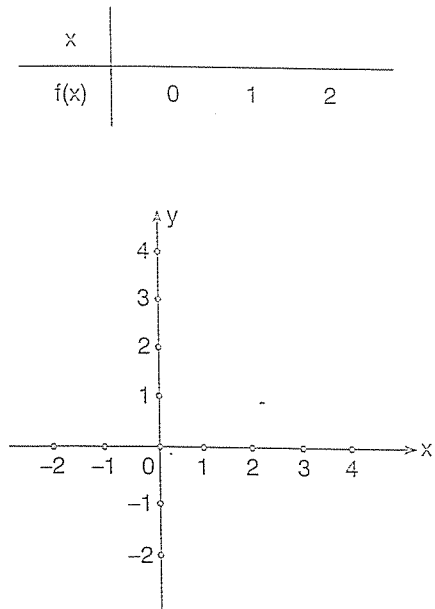
c) $f(x) = \log_5 (x + 4)$

Çözüm:

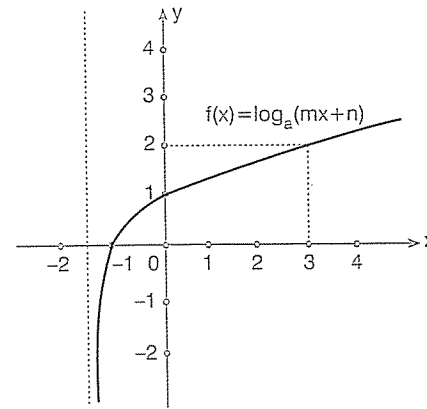


d) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{2}} x$

Çözüm:



Soru 2:

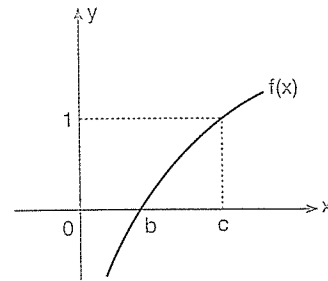


Yukarıda grafiği verilen $f(x) = \log_a (mx + n)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(x) = \log_2 (2x + 3)$ B) $f(x) = \log_2 (3x + 2)$
 C) $f(x) = \log_3 (2x + 2)$ D) $f(x) = \log_3 (3x + 2)$
 E) $f(x) = \log_3 (2x + 3)$

Soru 3:

$f(x) = -2 + \log_a x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, $\log_b c$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 2

Üslü Denklemler

■ Bilgi

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,
 $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

şeklindeki ifadelere **üslü denklem** denir. Denklemi sağlayan sayıların kümesi bu denklemin **çözüm kümesidir**.

■ Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$3^{x+1} = \frac{1}{3^{2x-3}}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= \frac{1}{3^{2x-3}} \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{-2x+3} \\ &\Rightarrow x+1 = -2x+3 \\ &\Rightarrow 3x = 2 \\ &\Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ tür.

Örnek 2:

$$e^x - 4e^{-x} = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} e^x &= t \text{ diyelim.} \\ e^x - 4e^{-x} &= 3 \Rightarrow t - \frac{4}{t} = 3 \\ &\Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \\ &\Rightarrow t_1 = 4 \text{ ve } t_2 = -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$t = 4 \text{ için, } e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4 \text{ tür.}$$

$$t = -1 \text{ için, } e^x = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \text{ dir.}$$

O halde, Çözüm kümesi = $\{\ln 4\}$ tür.

Örnek 3:

$$5^x = 3^{-x+1}$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$5^x = 3^{-x+1}$ eşitliğinde iki tarafın logaritmasını alalım.

$$\log 5^x = \log 3^{-x+1}$$

$$\Rightarrow \log 5^x = (-x+1) \cdot \log 3$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 5 = -x \cdot \log 3 + \log 3$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 5 + x \cdot \log 3 = \log 3$$

$$\Rightarrow x(\log 5 + \log 3) = \log 3$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 15 = \log 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 15}$$

$$\Rightarrow x = \log_{15} 3 \text{ tür.}$$

Örnek 4:

$$2^x = 3.5^x$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$2^x = 3.5^x \Rightarrow \frac{2^x}{5^x} = 3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^x = 3 \text{ tür.}$$

İki tarafın $\frac{2}{5}$ tabanında logaritmasını alalım.

$$\left(\frac{2}{5} \right)^x = 3 \Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5} \right)^x = \log_{\frac{2}{5}} 3$$

$$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} 3 \text{ tür.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$2^x - 5 = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, x kaçır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Soru 2:

$$7^{2x+5} = 3$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\log_7 5$ B) $\log_5 7$ C) $\frac{-5 + \log_7 3}{2}$
D) $\frac{\log_7 3 + 5}{2}$ E) $\log_3 7 - 5$

Soru 3:

$$2^x + 3 = 3^{2x+1}$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\log_8 9$ B) $\log_9 8$ C) $\log_{\frac{8}{3}} 9$
D) $\log_{\frac{9}{2}} \left(\frac{8}{3}\right)$ E) $\log_{\frac{9}{2}} 8$

Logaritmali Denklemler

Bilgi

İçinde, bilinmeyen logaritması bulunan denklemlere **logaritmali denklemler** denir.

- 1) $\log_a f(x) = b$ biçiminde ise $f(x) = a^b$ denklemini haline getirilerek çözülür.
2) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde ise $f(x) = g(x)$ denklemine dönüştürülerek çözülür.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\log(5x - 20) = 1$$

denkleminde x i bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log(5x - 20) = 1 &\Rightarrow 5x - 20 = 10^1 \\ &\Rightarrow 5x = 30 \\ &\Rightarrow x = 6 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\log_2(5 - x) - \log_2(2x - 4) = 0$$

denkleminde x i bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2(5 - x) &= \log_2(2x - 4) \\ \Rightarrow 5 - x &= 2x - 4 \\ \Rightarrow 9 &= 3x \\ \Rightarrow x &= 3 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek 3:

$$\log_3(x + 1) - \log_3 2x + \log_3 x = 2$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\log_3(x + 1) - \log_3 2x + \log_3 x = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{x \cdot (x + 1)}{2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x + 1}{2} = 3^2$$

$$\Rightarrow x + 1 = 18$$

$$\Rightarrow x = 17 \text{ dir.}$$

Buna göre, Ç = {17} bulunur.

Örnek 4:

$$\log(x - 2) = \log x - \log 2$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$\log(x - 2) = \log x - \log 2$$

$$\Rightarrow \log(x - 2) = \log\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x - 2 = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x - \frac{x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

Örnek 5:

$$2 \log x = \log(x^2 - 3x + 6)$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$2 \log x = \log(x^2 - 3x + 6)$$

$$\Rightarrow \log x^2 = \log(x^2 - 3x + 6)$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow 3x = 6$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

Örnek 6:

x > 1 olmak üzere,

$$\log_2 x \cdot \log_{16} x = 1$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$\log_2 x \cdot \log_{16} x = 1$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot \log_{2^4} x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \log_2 x \cdot \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 2 \text{ veya } \log_2 x = -2$$

$$\Rightarrow x = 2^2 = 4 \text{ veya } x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

x > 1 olduğundan, x = 4 tür.

Örnek 7:

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^4} x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \log_2 x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} \cdot \log_2 x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

Örnek 8:

$$(\log x)^2 + \log x^2 = 3$$

olduğuna göre, x i bulalım.

Çözüm:

$$(\log x)^2 + 2 \log x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\log x + 3)(\log x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \log x + 3 = 0 \quad \text{veya} \quad \log x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \log x = -3 \quad \text{veya} \quad \log x = 1$$

$$\Rightarrow x = 10^{-3} \quad \text{veya} \quad x = 10 \text{ olur.}$$

Örnek 9:

$$x^{\ln x} = \frac{e^2}{x}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen denklemde, her iki tarafın doğal logaritmasını alalım.

$$\ln(x^{\ln x}) = \ln\left(\frac{e^2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln x \cdot \ln x = \ln e^2 - \ln x$$

$$\Rightarrow (\ln x)^2 = 2 \ln e - \ln x$$

$$\Rightarrow (\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$$

$$\ln x = t \text{ diyelim.}$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -2 \text{ veya } t_2 = 1 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$t = -2 \text{ için, } \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \text{ dir.}$$

$$t = 1 \text{ için, } \ln x = 1 \Rightarrow x = e \text{ dir.}$$

O halde,

$$\mathcal{C} = \{e^{-2}, e\} \text{ bulunur.}$$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3^{\log x} \cdot 9^{\log x} = 27$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 3 B) 9 C) 10 D) 100 E) 300

Soru 2:

$$x^4 = y^3$$

olduğuna göre, $\log_x y$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

Soru 3:

$$\frac{10 \log_5 2x}{\log_5 25} = \log_5 32$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 5

Soru 4:

$$4 \cdot \log x - \log 144 = 2 \cdot \log \frac{x}{3}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 5:

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 + \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = 0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 5

Soru 6:

$$x^{\log x} = \frac{x^3}{100}$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

- A) 10^{-2} B) 10^{-1} C) 10 D) 10^2 E) 10^3

Üslü ve Logaritmali Eşitsizlikler

Bir eşitsizlikte bilinmeyen üs olarak yer aldığı terimler varsa bu eşitsizliğe **üslü eşitsizlik**; bilinmeyen logaritmasının yer aldığı terimler varsa bu eşitsizliğe **de logaritmali eşitsizlik** denir.

Üslü eşitsizlikler $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > b$ biçiminde olabilir.

Logaritmali eşitsizlikler

$$\log_a f(x) \geq b, \log_a f(x) \leq b, \log_a f(x) \geq \log_a g(x)$$

biçiminde olabilir.

Logaritmali eşitsizlikler çözülürken;

$$a > 1 \text{ için } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

(Eşitsizlik yönü aynı kalır.)

$$0 < a < 1 \text{ için } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

(Eşitsizlik yönü değişir.)

özelliklerinden yararlanılır.

Bilgi

■ $a > 1$ iken

$$\log_a f(x) > c \text{ ise } f(x) > a^c \text{ dir.}$$

■ $a > 1$ iken,

$$\log_a f(x) < c \text{ ise } 0 < f(x) < a^c \text{ dir.}$$

■ $0 < a < 1$ iken

$$\log_a f(x) > c \text{ ise } 0 < f(x) < a^c \text{ dir. (Yön değişir)}$$

■ $0 < a < 1$ iken

$$\log_a f(x) < c \text{ ise } f(x) > a^c \text{ dir. (Yön değişir)}$$

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$2^{x-3} > 64$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$2^{x-3} > 64 = 2^6 \Rightarrow x-3 > 6$$

$$\Rightarrow x > 9 \text{ dur.}$$

$$\mathcal{C} = (9, \infty) \text{ olur.}$$

Örnek 2:

$$2 \leq \log_2 (x - 1) < 3$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2 \leq \log_2 (x - 1) < 3 &\Rightarrow 2^2 \leq x - 1 < 2^3 \\ &\Rightarrow 4 \leq x - 1 < 8 \\ &\Rightarrow 5 \leq x < 9 \end{aligned}$$

O halde, $\mathcal{C} = [5, 9)$ bulunur.

Örnek 3:

$$\log_2 (2x - 7) \leq 2$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

I. Yol:

$$\begin{aligned} \log_2 (2x - 7) &\leq \log_2 (2^2) \\ \Rightarrow 2x - 7 &\leq 2^2 \text{ ve } 2x - 7 > 0 \\ \Rightarrow 2x &\leq 11 \text{ ve } 2x > 7 \\ \Rightarrow x &\leq \frac{11}{2} \text{ ve } x > \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2} \right] \text{ olur.}$$

II. Yol:

$$\begin{aligned} \log_2 (2x - 7) &\leq 2 \\ \Rightarrow 0 &< 2x - 7 \leq 2^2 \\ \Rightarrow \frac{7}{2} &< x \leq \frac{11}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 4:

$$\log_2 (x + 3) \geq 5$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_2 (x + 3) &\geq 5 \Rightarrow x + 3 \geq 2^5 \Rightarrow x \geq 29 \text{ dur.} \\ \text{O halde, } \mathcal{C} &= [29, \infty) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 5:

$$\log_9 4 + \log_3 (m - 1) < 2$$

eşitsizliğini sağlayan m tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_{3^2} 2^2 + \log_3 (m - 1) &< 2 \\ \Rightarrow \log_3 2 + \log_3 (m - 1) &< 2 \\ \Rightarrow \log_3 2(m - 1) &< 2 \\ \Rightarrow 0 < 2(m - 1) &< 3^2 \\ \Rightarrow 0 < m - 1 &< \frac{9}{2} \\ \Rightarrow 1 < m &< \frac{11}{2} \text{ dir} \end{aligned}$$

O halde, m nin alabileceği tam sayı değerleri, 2, 3, 4, 5 olarak bulunur.

Örnek 6:

$$\log_{\frac{1}{5}} (2x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x - 1)$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} (2x - 5) &> \log_{\frac{1}{5}} (x - 1) \\ \Rightarrow 2x - 5 &< x - 1 \\ \Rightarrow x &< 4 \dots (1) \end{aligned}$$

Ayrıca tanımdan,

$$2x - 5 > 0 \text{ ve } x - 1 > 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$x > \frac{5}{2} \text{ ve } x > 1 \dots (2)$$

(1) ve (2) den çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \left(\frac{5}{2}, 4 \right) \text{ bulunur.}$$

Örnek 6:

$$|4 + \log_2 x| \leq 1$$

eşitsizliğin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |4 + \log_2 x| \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq 4 + \log_2 x \leq 1 \\ &\Rightarrow -5 \leq \log_2 x \leq -3 \\ &\Rightarrow 2^{-5} \leq x \leq 2^{-3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{32} \leq x \leq \frac{1}{8} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\text{O halde, } \mathcal{C} = \left[\frac{1}{32}, \frac{1}{8} \right] \text{ bulunur.}$$

Örnek 7:

$$\log (x + 2) + \log 3 \leq 2$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \log (x + 2) + \log 3 &\leq 2 \\ \log 3.(x + 2) &\leq 2 \\ 0 < (3x + 6) &\leq 10^2 \\ -6 < 3x &\leq 100 - 6 \\ -2 < x &\leq \frac{94}{3} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left(-2, \frac{94}{3} \right] \text{ olur.}$$

İlgi Uygulama

Soru 1:

$$\log x < 2 \log 5$$

eşitsizliğini sağlayan x in en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 20 D) 24 E) 25

Soru 2:

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan x in en küçük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Soru 3:

$$\log a^{10} - \log a^9 - 2 < 0$$

olduğuna göre, a nın en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 9 D) 99 E) 100

Soru 4:

$$\log_3 (x - 1) < 1$$

olduğuna göre, x in alabileceği tamsayı değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Soru 7:

$$\log x + \log \left(\frac{1}{x} \right) \geq 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, \infty)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $[0, \infty)$
D) $(1, \infty)$ E) $(0, \infty)$

Soru 5:

$$f(x) = \sqrt{\log \frac{4-x}{x}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı hangisidir?

- A) $(0, 2]$ B) $[0, 2]$ C) $(0, 4]$
D) $[-2, 1] - \{0\}$ E) $\mathbb{R} - (0, 2]$

Soru 8:

$$f(x) = \log_3 (2x^2 - x + a)$$

olduğuna göre, $f(1) > 2$ eşitsizliğini sağlayan a nın en küçük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Soru 9:

$$|2 - \log_2 x| \leq 1$$

eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[1, 16]$ B) $\left[\frac{1}{4}, 4 \right]$ C) $[4, 16]$
D) $[2, 8]$ E) $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$

Soru 6:

$$\log_x (x^2 - x - 1) > 0$$

eşitsizliğin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

- A) $[2, \infty)$ B) $(-1, 2)$ C) $(2, \infty)$
D) $[2, 3)$ E) $(3, \infty)$

1. $\log_a \left(\frac{1}{8} \right) = 3$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 8 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

2. $\log_2 (5 + \log_2 (x - 1)) = 3$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

3. a pozitif tamsayı olmak üzere,

$$(-1)^{\log_2 a} = 1$$

eşitliğini sağlayan a nın alabileceği en küçük iki değer toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

4. $x = 2^{\frac{1}{5}}$
 $y = 4^{\frac{2}{5}}$

olduğuna göre, $\log_2 x + \log_2 y$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $\log_2 (\log_3 (\log_{10} x)) = 1$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 10^3 B) 10^5 C) 10^8 D) 10^9 E) 10^{12}

6. $\log_3 (12 - 9^x) = x$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

7. $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı,

$$f(x) = 1 + \ln (x - 2)$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f^{-1}(x) = e^{x+1} + 2$ B) $f^{-1}(x) = e^{x-1} + 1$
C) $f^{-1}(x) = e^{x+2} + 1$ D) $f^{-1}(x) = e^x + 2$
E) $f^{-1}(x) = e^{x-1} + 2$

8. $\log_3 5 + \log_3 4 - \log_3 x = \log_3 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

9. $\frac{\log 25}{1 + \log 5} + \frac{\log 2}{-1 + \log 500}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

10. $\log 2 = a$
 $\log 3 = b$

olduğuna göre, $\log (5!)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2a - b + 1$ B) $a + 2b$
C) $2a + 2b + 1$ D) $a - 2b + 2$
E) $2a + b + 1$

11. $\log(a \cdot b) = \frac{7}{3}$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{5}{3}$

olduğuna göre, a sayısı kaç basamaklıdır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

12. $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 5$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

- A) 0 B) 3 C) 6 D) 10 E) 12

13. $\log_3(x+2) - \log_3 4 = \log_3 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

14. $49^{\log_7 3}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 7 C) 9 D) 21 E) 49

15. $\log_5 x = \log_x 5$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

- A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 6 E) $\frac{26}{5}$

16. $\log_5(2x+7) - \log_5(3x-1) = 0$

olduğuna göre, $\log_2 x$ in değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$

olduğuna göre, $\log_8 x$ ifadesi kaçtır?

- A) $\log_3 2$ B) $\log_3 4$ C) $\log_2 9$
D) $\log_4 3$ E) $\log_3 84$

18. $\frac{1}{\log_2 16} + \frac{1}{\log_8 16}$

toplamının sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. $\log_x xy = \frac{1}{a}$

olduğuna göre, $\log_y x$ in a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1-a}{a}$ B) $\frac{a}{1-a}$ C) a
D) $1-a$ E) $a+1$

20. $f(x) = \log_3 x$

olduğuna göre, $f(3x)$ in $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(x) - 1$ B) $3f(x)$ C) $f(x) + 1$
D) $f^2(x)$ E) $\frac{f(x)}{3}$

1. $\ln e = 1$ olmak üzere,

$\log_5 1000 \cdot \log_5 \ln e^2$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2. $\frac{\log(a+1)}{\log 3} = \log \frac{1}{2} 4$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $-\frac{4}{7}$ B) $-\frac{8}{9}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

3. $2\log x + \log x^3 = 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 15 B) 10 C) 5 D) 3 E) 1

4. $\log_3 27! = a$

olduğuna göre, $\log_3 26!$ sayısının a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a-2$ B) $1-a$ C) $a-3$
D) $a+1$ E) $27a+2$

5. $\log_2 3 \cdot \log_9 4 \cdot \log_8 27$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\log_3 2$ B) $\log_2 3$ C) $\log_2 27$
D) $\log_3 4$ E) $\log_4 3$

6. $\log_2 25$ sayısının tam kısmı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

7. $\log_2 x = 0,18$ ve $\log_2 y = 3,32$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

8. $\log a = 2$ olduğuna göre, $\log_{a^3}(0,1)$ in değeri kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{6}$

9. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_3 \sqrt{x} = 5$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) 3 E) 9

10. $\log_4[\log_3(\ln x)] = 1$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) -1 B) e^{79} C) e^{80} D) e^{81} E) e^{89}

11. $f(x) = \log_2 (25 - x^2) + \log_x (4 - x)$

fonksiyonu kaç x tamsayısı için tanımlıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $\log_2 (x - 1) < 3$

Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

- A) 30 B) 33 C) 35 D) 36 E) 39

13. $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \dots \log_x (x + 1) = 2$

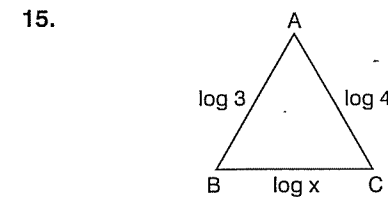
olduğuna göre, $\log_x 4 + \log_{16} x$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) $\frac{12}{5}$ D) 6 E) $\frac{17}{12}$

14. $\log a^2 + \log b^2 = 2$
 $\log a^3 - \log b^3 = 3$

olmak üzere, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 15 C) 20 D) 101 E) 1001



Yukarıdaki ABC üçgenine göre x in alabileceği en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 11 E) 12

16. $\log_3 (2x - 3) - \log_3 (x + 2) = 0$

olduğuna göre, $\log_5 x$ in değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. $\log_2 (x - 7) = \log_{(x-7)} 2$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) $\frac{25}{2}$ B) $\frac{29}{2}$ C) $\frac{33}{2}$ D) $\frac{37}{2}$ E) $\frac{41}{2}$

18. $\log_3 125 = a$

olduğuna göre, $\log_5 27$ ifadesinin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{3}{a}$ D) $\frac{9}{a}$ E) $\frac{12}{a}$

19. $\log_3 (x + 8) + \log_3 x < 2$

eşitsizliğini sağlayan x in kaç tane tamsayı değeri vardır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 3 E) 0

20. $\log 25 = m$

olduğuna göre, $\log_5 40$ in m cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4-m}{m}$ B) $\frac{3m-4}{m}$ C) $\frac{4-3m}{m}$
D) $\frac{2-m}{2}$ E) $\frac{6-2m}{m}$

1. $\log_2 (3x + 1) - 5 = 2 \log_9 27$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 31 C) 41 D) 83 E) 85

2. $\log (5^x + 6x - 2) = x (1 - \log 2)$

denkleminde x kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3. $\log_2 (\sqrt{3}x) = \log_{(\sqrt{3}x)} 2$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

4. $4^{\log_3 5} - 5^{\log_3 4}$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) 0 D) 4 E) 5

5. $x^{\log(10 \cdot x)} = 100$

denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

- A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{10}$ C) 1 D) 10 E) 100

6. $\log_3 (\log_5 7) + \log_3 (\log_7 2) - \log_3 (\log_5 2)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 9 B) 6 C) 3 D) 1 E) 0

7. $\frac{3}{2^{\ln 4}}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $e\sqrt{e}$ B) e^2 C) $e^{\sqrt[3]{e}}$ D) e^4 E) $e^{\sqrt[4]{e}}$

8. $x^{\log_3 x} = 81$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 6

9. $\frac{1}{\log_7 196} + \frac{1}{\log_{14} 196} + \frac{1}{\log_2 196}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. $f(x) = \sqrt[6]{\ln(6-x)}$

fonksiyonunun en geniş çözüm aralığında kaç x doğal sayısı vardır?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

11. $\log_5 x + \log_5 x^{-5} = (\ln 5)^{-1} - \log_{\sqrt{5}} x$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) e B) 1 C) 0 D) 5 E) e^5

12. $\log_{ab} x = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $a + b$ B) $\frac{1}{a + b}$ C) $2ab$
D) $\frac{1}{ab}$ E) ab^2

13. $7^{\log x} + x^{\log 7} = 98$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 10 C) 100 D) 1000 E) 10000

14. $\log_a 27 = 9x$
 $\log_7 a = 2$

olduğuna göre, $\log_a 63$ ifadesinin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6x + 1$ B) $3x + 1$ C) $\frac{12x + 1}{2}$
D) $\frac{12x - 1}{2}$ E) $\frac{3x + 1}{2}$

15. $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_8 x^2 = 10$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

16. $8^{1 + 2 \log_4 3}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 216

17. $f(x) = \log_2 (x + 7)$
 $g(x) = \log_4 x$

olduğuna göre, $(f \circ g^{-1})(0)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

18. $\frac{1}{19^{\log_5 19}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}$

işleminin sonucu kaçtır?

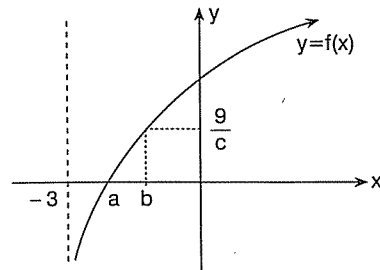
- A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{14}{3}$ C) $\frac{17}{3}$ D) $\frac{19}{5}$ E) $\frac{21}{8}$

19. $\log_y x = \log_y (x + 1) \cdot \log\left(\frac{y}{x-1}\right)^x$

olduğuna göre, y nin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x^2 B) $x^2 - 1$ C) $x^2 + 1$
D) $\frac{x-1}{x+1}$ E) $\frac{x+1}{x-1}$

20. $f(x) = \log_2 (3x + c)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, $a + b + c$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

1. $\log_2 (\log_3 (x - 2)) = 1$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 7 D) 10 E) 11

2. $\log_3 5 = a$

olduğuna göre, $\log_5 75$ in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+2}{a}$ B) $\frac{2a+1}{a}$ C) $\frac{a-1}{a}$
D) $\frac{3a-1}{2}$ E) $\frac{1-2a}{a}$

3. $\sqrt{(\log 5)^2 + \left(\log \frac{1}{5}\right)^2}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sqrt{2} \log 25$ B) $\sqrt{2} \log 5$ C) $\log \sqrt{5}$
D) $\log \frac{1}{5}$ E) 1

4. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \log_3 x$ ve $g(x) = \log_{25} x$

olduğuna göre, $(g \circ f)(243)$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

5. $0 < x < 1$ olmak üzere,

$\log_{(x+1)} (x^2 + 10x - 1) = 2$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{10}$

6. $\log_2 x + \log_2 \left(\frac{4}{x}\right) = \log_3 x$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) 3 D) 9 E) 27

7. $\log 9! = x$

olduğuna göre, $\log 10!$ sayısının x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x B) $x - 1$ C) $x + 1$ D) $2x$ E) $2x + 1$

8. $\log 37 = a$
 $\log 3 = b$
 $\log 2 = c$

olduğuna göre, $\log 222$ ifadesinin a, b ve c cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a + b + c$ B) $a + 2b$ C) $a + 2c$
D) $(a + c)^2$ E) $(a - b)^2$

9. $\log x = 17,23$

olduğuna göre, x sayısının tam kısmı kaç basamaklıdır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

10. $x^{\log_2 x} = 16$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

11. $\log_3 5 = a$
 $\log_2 3 = b$

olduğuna göre, $\log_3 60$ nın a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a + \frac{b}{2} - 1$ B) $a + \frac{1}{b} + 2$
 C) $1 + \frac{2}{b} + a$ D) $2(a + b) - 1$
 E) $\frac{2}{a} + b - 1$

12. $\log_{81} 3 = a$

olduğuna göre, $\log_3 (4a)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

13. $\left| \log_{\frac{1}{2}} 5 \right| + \log_{\frac{1}{2}} 10$

ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $3^{\log_2 a} + a^{\log_2 3} = 54$

olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

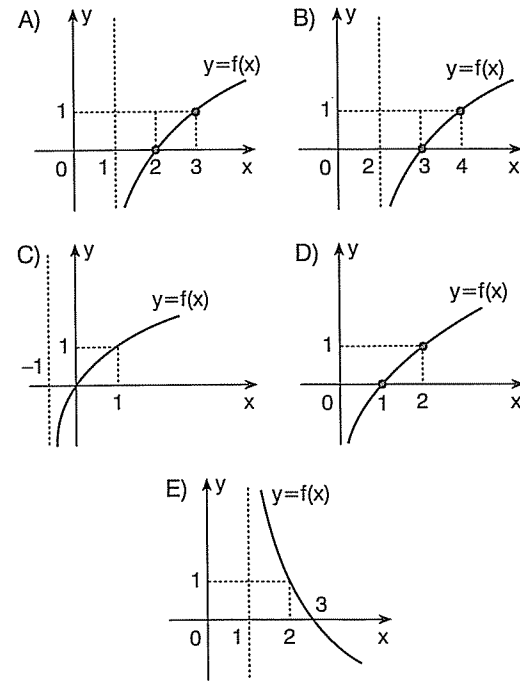
15. $\log_3 4 = x$
 $\log_7 3 = y$

olduğuna göre, $\log_{21} 36$ nın x ve y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{yx + 2y}{y + 1}$ B) $\frac{2x + 3y}{y + 2}$ C) $\frac{yx + 3y}{y - 3}$
 D) $\frac{y + 2}{y + x}$ E) $\frac{yx + 1}{y + 1}$

16. $f(x) = \log_2 (x - 1)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



17. $\log_5 (\log_3 (\log_2 (\ln x))) = 0$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 8 B) 10^6 C) 10^8 D) e^6 E) e^8

18. $\log a = x + 4$
 $\log b = x + 2$

olduğuna göre; a, b nin kaç katıdır?

- A) 100 B) 10 C) 1 D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{100}$

19. $\log_{ab} b = 3$

olduğuna göre, $\log_{ab} a$ nın değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$