

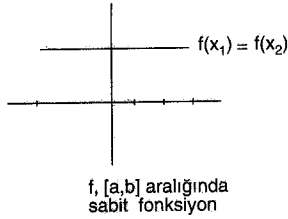
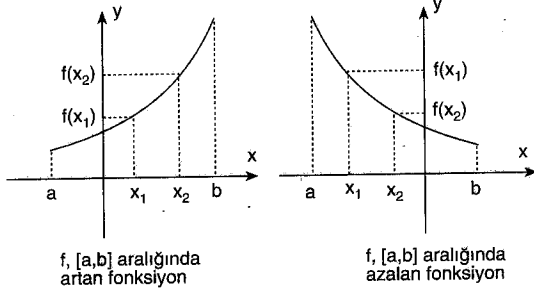
ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için

- $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında artan fonksiyondur.
- $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında azalan fonksiyondur.
- $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) = f(x_2)$ ise fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sabittir.



TEOREM

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve türevlenebilen bir fonksiyon ve $\forall x \in (a, b)$ olmak üzere,

- 1) $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu artandır.
- 2) $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu azalandır.
- 3) $f'(x) = 0$ ise f fonksiyonu sabittir.

▲ Not: Bir fonksiyon bazı aralıklarda değil de daima artan ise monoton artan, daima azalan ise monoton azalan fonksiyon adını alır.

ÖRNEK SORU

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 17$ fonksiyonu hangi aralıklarda azalandır?

- A) $(-\infty, -1)$ B) $(5, \infty)$ C) $[-1, 5]$
D) $(-1, 5)$ E) $\mathbb{R} - (-1, 5)$

Çözüm

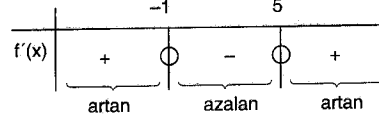
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 17$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 \text{ veya } x_2 = -1$$



$-1 < x < 5$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu azalandır.

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - (m+1)x + 20$$

fonksiyonunun reel sayılarda daima artan olması için m ne olmalıdır?

- A) $m \leq -7$ B) $m \leq -\frac{7}{2}$ C) $m \leq -\frac{7}{6}$
D) $m \geq -\frac{7}{6}$ E) $m \geq -2$

Çözüm

$f(x)$ in reel sayılarda artan olması için $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ olmalıdır.

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - (m+1)x + 20$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x - (m+1) \text{ ifadesinin daima pozitif olması için}$$

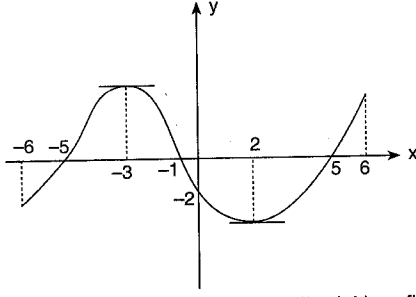
$$\Delta \leq 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 6[-(m+1)] \leq 0$$

$$\Rightarrow 4 + 24m + 24 \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{7}{6} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU



$y = f(x)$ fonksiyonunun $[-6, 6]$ aralığındaki grafiği veriliyor. Buna göre, $f'(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

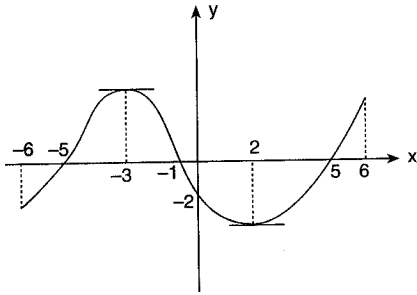
- A) 4 B) 3 C) 2 D) 0 E) -3

Çözüm

- $[-6, -3]$ aralığında f fonksiyonu artan olduğundan $f'(x) > 0$ dir.
 - $(-3, 2)$ aralığında f fonksiyonu azalan olduğundan $f'(x) < 0$ dir.
 - $(2, 6)$ aralığında f fonksiyonu artan olduğundan $f'(x) > 0$ dir.
- Dolayısıyla $[-6, -3]$ ve $(2, 6]$ aralıklarında bulunan x tam sayılarının toplamı $-6 - 5 - 4 + 3 + 4 + 5 + 6 = 3$ olarak bulunur.

Yanıt B

Örnek



$y = f(x)$ fonksiyonunun $[-6, 6]$ aralığındaki türevinin grafiği veriliyor. Buna göre, $f(x)$ in azalan ve artan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$[-6, -5]$ ve $(-1, 5)$ aralıklarında $f'(x) < 0$ olduğundan $f(x)$ azalandır. $(-5, -1)$ ve $(5, 6]$ aralıklarında $f'(x) > 0$ olduğundan $f(x)$ artandır.

ÖRNEK SORU

$\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde $f(x) = x^2 \cdot \ln(2x)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun artan olmasını sağlayan en küçük x tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \ln(2x) + \frac{2}{2x} \cdot x^2$$

$$= x \cdot (2 \ln 2x + 1)$$

$f'(x) > 0$ ise artandır.

$x > 0$ olduğundan $2 \ln 2x + 1 > 0$

olmalıdır. Buradan

$$\ln 2x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \ln 2x > \ln e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 2x > e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x > \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad (e = 2,718)$$

olur ve en küçük x tam sayısı 1 olarak bulunur.

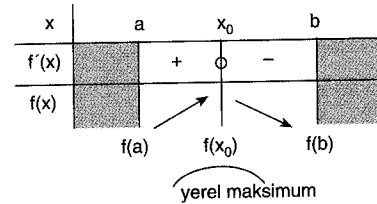
Yanıt A

YEREL EKSTREMUM NOKTALARI

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in (a, b)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

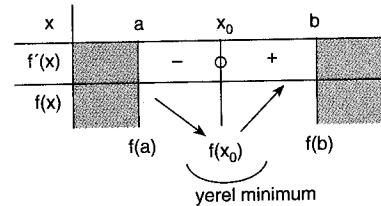
f fonksiyonu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığında en büyük değerini x_0

noktasında alıyorsa, $(x_0, f(x_0))$ noktasında yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir.

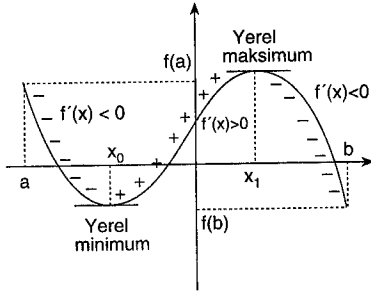


Eğer, f fonksiyonu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığında en küçük

değerini x_0 noktasında alıyorsa, fonksiyon $(x_0, f(x_0))$ noktasında yerel (lokal) minimuma sahiptir denir.



Bu iki durum grafikte aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Bir fonksiyonun birden fazla maksimum veya minimum noktası olabilir.

TANIM:

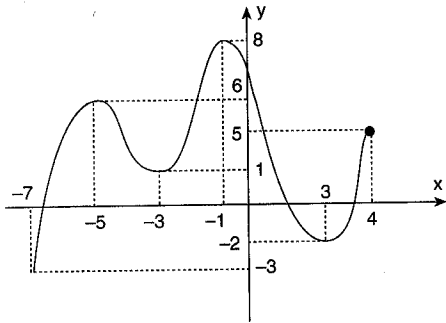
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ için $f(x_1) \leq f(x)$ koşuluna uyan $x_1 \in [a, b]$ varsa, $f(x_1)$ değerine f nin mutlak minimum değeri denir.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x_2) \geq f(x)$ koşuluna uyan

$x_2 \in [a, b]$ varsa, $f(x_2)$ değerine f nin mutlak maksimum değeri denir.

Minimum ve maksimum değerlerine fonksiyonun ekstremumları denir.

Örnek



$[-7, 4]$ aralığında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, fonksiyonun ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm

$(-5, 6)$ ve $(-1, 8)$ noktalarında yerel maksimum vardır. $f(-5) = 6$ ve $f(-1) = 8$ dir. $\forall x \in [-7, 4]$ için $f(x) \leq f(-1) = 8$ olduğundan $x = -1$ de mutlak maksimum vardır. Fonksiyonun en büyük değeri $f(-1) = 8$ dir.

$(-3, 1)$ ve $(3, -2)$ noktalarında yerel minimum vardır. $\forall x \in [-7, 4]$ için $f(x) \geq f(-7) = -3$ olduğundan $x = -7$ de mutlak minimum vardır ve fonksiyonun en küçük değeri -3 tür.

SONUÇ:

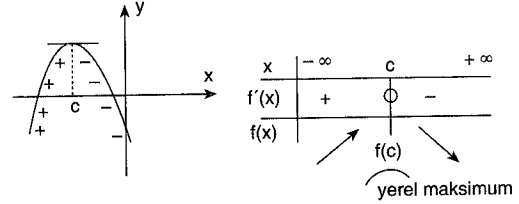
Bir fonksiyonun yerel maksimum veya yerel minimum değerlerinden bazıları mutlak maksimum veya mutlak minimum noktaları olabilir.

BİRİNCİ TÜREVDEN YARARLANARAK EKSTREMUM

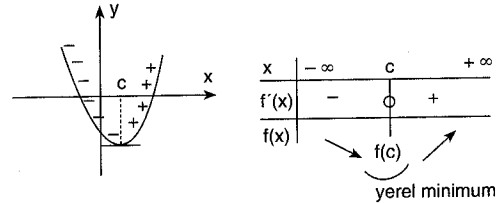
NOKTALARININ İNCELENMESİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olsun.

1) $f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasının solunda artan ($f'(x) > 0$), sağında azalan ($f'(x) < 0$) ise $x = c$ noktasında f nin yerel maksimumu vardır.



2) $f(x)$ fonksiyonu bir $x=c$ noktasının solunda azalan ($f'(x) < 0$), sağında artan ($f'(x) > 0$) ise $x = c$ noktasında f nin yerel minimumu vardır.



SONUÇ:

Türevli bir fonksiyonun bir noktada yerel ekstremuma sahip olması için o noktada işaret değişmesi gerekir.

Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x$$

$$3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = -4$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 2 = -2$$

$$x_2 = -4 \Rightarrow f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 - 2 = 30$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		30	-2	
		max	min	

Fonksiyonun $(-4, 30)$ noktası yerel maksimum, $(0, -2)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+4)^3$ fonksiyonunun (varsa) yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = (x+4)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x+4)^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+4)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -4$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)		0	

Tablodan da görüldüğü gibi verilen fonksiyonun yerel ekstremumları yoktur.

Örnek:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x - 2$$

fonksiyonunun (varsa) yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3 - 12x + 16 = (x+4)(x^2 - 4x + 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -4, x_2 = x_3 = 2 \text{ (çift katlı kök)}$$

$$x_1 = -4 \Rightarrow f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^4 - 6(-4)^2 + 16(-4) - 2 = -98$$

$$x_2 = x_3 = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 2 = 7$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+
f(x)		-98	7	

min

$(-4, -98)$ noktasında yerel minimum vardır.

Örnek

$$f: [-27, 64] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$$

fonksiyonunun (varsa) yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$\forall x \in [-27, 0)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $f(x)$ azalan,

$\forall x \in (0, 64]$ için $f'(x) > 0$ olduğundan $f(x)$ artandır. Dolayısıyla $x = 0$ da yerel minimum vardır.

Örnek

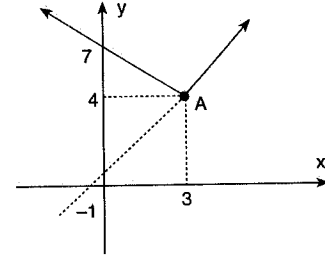
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 3| + 4$$

fonksiyonunun (varsa) yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm

f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 3 \text{ ise} \\ -x+7, & x < 3 \text{ ise} \end{cases} \text{ biçiminde yazılabilir.}$$



$y = f(x)$ fonksiyonun grafiğinden de görüldüğü gibi $A(3, 4)$ noktasında f nin yerel minimumu vardır. Fakat fonksiyon $x = 3$ noktasında türevli değildir.

Sonuç:

Bir f fonksiyonun bir $A(x_0, y_0)$ noktasında yerel ekstremumu olduğu halde fonksiyonun bu noktada türevi olmayabilir.

FERMAT TEOREMİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel minimumu veya yerel maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevli ise $f'(c) = 0$ dir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani $f'(c) = 0$ olduğu halde fonksiyonun c noktasında yerel ekstremumu olmayabilir.

ÖRNEK SORU

$$f(x) = x^3 + (m-4)x + 7$$

fonksiyonunun $x = -2$ apsisli noktasında bir yerel maksimumu varsa m kaçtır?

- A) -10 B) -9 C) -8 D) -7 E) -6

Çözüm

Fonksiyonun $x = -2$ apsisli noktada maksimumu varsa $f'(-2) = 0$ dir.

$$f(x) = x^3 + (m-4)x + 7$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + m - 4$$

$$\Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-2)^2 + m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = -8 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$f(x) = 4x^3 - mx^2 + nx - 5$$

fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki yerel ekstremum değeri -4 olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -7 B) -5 C) -3 D) 2 E) 7

Çözüm

$$f'(-1) = 0 \text{ ve } f(-1) = -4 \text{ tür.}$$

$$f(-1) = -4$$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - m(-1)^2 + n(-1) - 5$$

$$\Rightarrow m + n = -9 \dots (1)$$

$$f(x) = 4x^3 - mx^2 + nx - 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 2mx + n$$

$$f'(-1) = 0$$

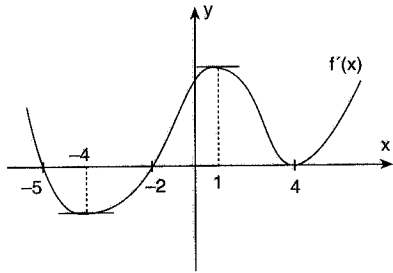
$$\Rightarrow f'(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 2m(-1) + n$$

$$\Rightarrow 2m + n = -12 \dots (2)$$

(1) ve (2) den

$$\begin{array}{r} m + n = -9 \\ + \quad 2m + n = -12 \\ \hline m = -3 \text{ olarak bulunur.} \end{array}$$

Yanıt C

Örnek

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre, f nin yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm

Grafiğe göre fonksiyonun türevinin işaret tablosu,

x	-5	-2	4
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$f(-5)$	$f(-2)$	$f(4)$
	(max)	(min)	

şeklinde. Tablodan da görüldüğü gibi $x = -5$ apsisli noktada yerel maksimumu, $x = -2$ apsisli noktada yerel minimumu vardır.

Tanım:

Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu ya da türevinin olmadığı noktalara bu fonksiyonun kritik noktaları denir.

ÖRNEK SORU

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 16|$$

fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 16, & -4 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ x^2 - 16, & x < -4 \text{ veya } x > 4 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanabilir. Buradan

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & -4 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ 2x, & x < -4 \text{ veya } x > 4 \end{cases}$$

Fonksiyonun $x = -4$ ve $x = 4$ için türevi yoktur. $x = 0$ için $f'(x) = f'(0) = 0$ dir.

Dolayısıyla $x = -4$, $x = 4$ ve $x = 0$ noktaları birer kritik noktadır.

İKİNCİ TÜREVDEN YARARLANARAK YEREL EKSTREMUM NOKTALARININ İNCELENMESİ

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevli,

$f'(c) = 0$ ve $f''(c)$ var ve sıfırdan farklı olsun.

1) $f''(c) > 0$ ise $(c, f(c))$ noktası bir yerel minimum noktadır.

2) $f''(c) < 0$ ise $(c, f(c))$ noktası bir yerel maksimum noktadır.

ÖRNEK SORU

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$$

fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ veya } x_2 = -2 \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow f''(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18 > 0$$

olduğundan $x_1 = 4$ de yerel minimumu vardır.

$x_2 = -2 \Rightarrow f''(-2) = 6 \cdot (-2) - 6 = -18 < 0$ olduğundan $x_2 = -2$ de yerel maksimum vardır.

BİR FONKSİYONUN KONVEKSİĞİ, KONKAVLIĞI VE DÖNÜM NOKTASI

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, (a, b) aralığında ikinci mertebeden türevli olsun.

- 1) $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) > 0$ oluyorsa f fonksiyonu (a, b) üzerinde konvektir. Yani f fonksiyonunun bu aralıktaki grafiğinin çukurluk yönü yukarı doğrudur. (Konveks = Dış bükey)
- 2) $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0$ oluyorsa f fonksiyonu (a, b) üzerinde konkavdır. Yani f fonksiyonunun bu aralıktaki grafiğinin çukurluk yönü aşağı doğrudur. (Konkav = İç bükey)
- 3) Bir fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya fonksiyonun dönüm (büküm) noktası denir.

▲ Not: 1) x_0 noktası f fonksiyonun bir dönüm noktası ise $f''(x_0) = 0$ veya $f''(x_0)$ yoktur.
2) $f''(x_0) = 0$ ise x_0 noktası bir dönüm noktası olmayabilir.

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$$

fonksiyonunun grafiğinin konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			
		Konkav (İç bükey)	Konveks (Dış bükey)

Tabloda görüldüğü gibi fonksiyonun grafiği $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ de

konkav, $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ da konvektir ve $x = \frac{2}{3}$ de büküm noktası

vardır.

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 15$$

fonksiyonun grafiğinin konkav olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 15$$

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \text{ veya } x_2 = 2$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				
		Konveks	Konkav	Konveks

$f(x)$ in grafiği $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ aralığında konkavdır.

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

fonksiyonunun (varsa) dönüm noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 2x^3 + x^2 - 4$$

$$f''(x) = 6x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(3x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				
		Konveks	Konkav	Konveks

Tabloda görüldüğü gibi $x = -\frac{1}{3}$ ve $x = 0$ noktasında ikin-

ci türev işaret değiştiriyor. Dolayısıyla $x = -\frac{1}{3}$ ve $x = 0$

da fonksiyonun dönüm noktası vardır.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} + 4$ fonksiyonun konveks olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot x^{\frac{5}{3}}}$$

- $x < 0$ için $f''(x) > 0$ olduğundan $(-\infty, 0)$ aralığında fonksiyon konvektir.
- $x > 0$ için $f''(x) < 0$ olduğundan $(0, +\infty)$ aralığında fonksiyon konkavdır.
- $x = 0$ için $f''(0)$ yoktur.

ÖRNEK SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - mx^2 - nx + 5$ fonksiyonunun dönüm noktası

$A(-2, 5)$ olduğuna göre, $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

- A) 96 B) 84 C) 72 D) 48 E) 36

Çözüm

$$A(-2, 5) \Rightarrow f(-2) = 5 \text{ tir.}$$

$$\Rightarrow (-2)^3 - m \cdot (-2)^2 - n \cdot (-2) + 5 = 5$$

$$\Rightarrow 4m - 2n = -8 \Rightarrow 2m - n = -4 \dots (\star)$$

$A(-2, 5)$ noktası dönüm noktası olduğundan

$$f''(-2) = 0 \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2mx - n$$

$$f''(x) = 6x - 2m$$

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) - 2m = 0 \Rightarrow m = -6 \text{ değeri } (\star) \text{ denkleminde yazılırsa,}$$

$$2 \cdot (-6) - n = -4 \Rightarrow n = -8$$

$$m \cdot n = (-6) \cdot (-8) = 48 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 7$$

fonksiyonunun varsa dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 7$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 5$$

$$f''(x) = x^2 - 4x + 4$$

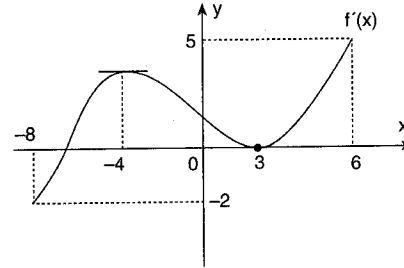
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2 \text{ (çift kat kök)}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+
f(x)			
	Konveks		Konveks

Tablodan da görüldüğü gibi $x = 2$ de ikinci türev işaret değiş-tirmediğinden fonksiyonun dönüm noktası yoktur.

Örnek:



$y = f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunun konveks, konkav olduğu aralıkları ve varsa dönüm noktalarını bulunuz.

Çözüm

• $(-8, -4)$ ve $(3, 6)$ aralıklarında $f'(x)$ artan fonksiyon olduğundan bu aralıkta $f''(x) > 0$ dir. Dolayısıyla $f(x)$ bu aralıklarda konvektir.

• $(-4, 3)$ aralığında $f'(x)$ azalan fonksiyon olduğundan bu aralıklarda $f''(x) < 0$ dir. Dolayısıyla $f(x)$ bu aralıkta konkavdır.

• Fonksiyon $x = -4$ noktasında konvekslikten konkavlığa, $x = 3$ noktasında konkavlıktan konveksliğe geçtiğinden $x = -4$ ve $x = 3$ noktaları fonksiyonun dönüm noktalarıdır.

MAKSİMUM - MİNİMUM PROBLEMLERİ

ÖRNEK SORU

Toplamları 28 olan pozitif iki tam sayının kareleri toplamı en az kaç olur?

- A) 372 B) 378 C) 384 D) 392 E) 400

Çözüm

I. sayı: x

II. sayı: y olsun

Maksimumu istenilen ifade

$$M(x) = x^2 + y^2 \text{ ve } M: [1, 27] \rightarrow \mathbb{R} \text{ olsun}$$

$$x + y = 28 \Rightarrow y = 28 - x$$

$$M(x) = x^2 + (28 - x)^2 = 2x^2 - 56x + 784$$

$$M'(x) = 4x - 56$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow x = 14$$

x	14
M'(x)	- 0 +
M(x)	↘ ↗
	min

$x = 14$ de $M(x)$ minimuma sahiptir.
 $x = 14 \rightarrow M(x) = 14^2 + (28-14)^2 = 392$ olur.

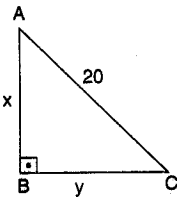
Yanıt D

ÖRNEK SORU

Hipotenüs uzunluğu 20 br olan bir dik üçgenin alanı en çok kaç birim kare olabilir?

- A) 96 B) 100 C) 120 D) 140 E) 160

Çözüm



$$\text{Alan}(\triangle ABC) = \frac{x \cdot y}{2} = A(x) \text{ dir.}$$

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$$

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{400 - x^2}}{2} \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } A'(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{400 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} \cdot x \right]$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left[\sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{400 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$\Rightarrow 400 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ olur.}$$

x	$10\sqrt{2}$
A'(x)	+ 0 -
A(x)	↗ ↘
	max

O halde maksimum alan,

$$\text{Alan}(\triangle ABC) = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{2} = 100 \text{ br}^2$$

olarak bulunur.

Yanıt B

ÖRNEK SORU

Toplamı 16 olan iki pozitif reel sayının küpleri toplamı en az kaç olabilir?

- A) 1124 B) 1104 C) 1052 D) 1034 E) 1024

Çözüm

İki pozitif reel sayı x ve y olsun. $x+y = 16$ ve $f(x) = x^3 + y^3$ olsun.

$$x+y = 16 \Rightarrow y = 16-x$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (16-x)^3 \text{ ve } 0 < x < 16 \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(16-x)^2$$

$$f'(x) = 96x - 768$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 96x - 768 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ olur.}$$

x	8
f'(x)	- 0 +
f(x)	↘ ↗
	min

$$f(8) = 8^3 + 8^3 = 1024 \text{ olarak bulunur.}$$

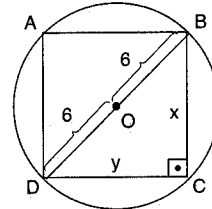
Yanıt E

ÖRNEK SORU

Alanı 36π br² olan çemberin içine çizilebilen bir dikdörtgenin alanı en çok kaç birim kare olabilir?

- A) 72 B) 70 C) 68 D) 36 E) 24

Çözüm



$$36\pi = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 6 \text{ br}$$

$$x^2 + y^2 = 144$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{144 - x^2}$$

ABCD dikdörtgenin alanı

$$S(x) = x \cdot y = x \cdot \sqrt{144 - x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{144 - x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{144 - x^2}} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 144 - x^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$

x		$6\sqrt{2}$	
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

(max)

$$x = 6\sqrt{2} \text{ için } y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2} \text{ olur.}$$

Dolayısıyla maksimum alan

$$A(ABCD) = 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 72 \text{ br}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

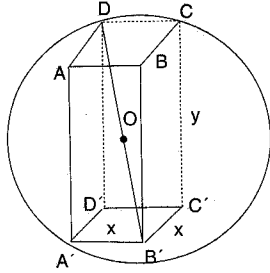
ÖRNEK SORU

Yarıçapı $3\sqrt{2}$ br olan bir kürenin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli kare prizmanın hacmi kaç birim küptür?

- A) 100 B) 104 C) 108 D) $48\sqrt{6}$ E) $52\sqrt{6}$

Çözüm

ABCD A'B'C'D' kare prizmasının cisim köşegeni [DB'] çapı olursa prizmanın hacmi en çok kaç olur. Prizmanın taban ayrıtları x, yüksekliği y olsun.



$$\text{Cisim köşegeni } \sqrt{x^2 + x^2 + y^2} = |B'D|$$

$$\Rightarrow 2x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{72 - 2x^2}$$

Hacim, $V(x) = x^2 \cdot y$ dir.

$$V(x) = x^2 \cdot \sqrt{72 - 2x^2}$$

$$V'(x) = 2x \cdot \sqrt{72 - 2x^2} + \frac{-4x}{2\sqrt{72 - 2x^2}} \cdot x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot \sqrt{72 - 2x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{72 - 2x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x(72 - 2x^2) - 2x^3 = 0$$

$$\Rightarrow 72 - 2x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$\text{ve } y = \sqrt{72 - 2 \cdot 24} = 2\sqrt{6} \text{ bulunur.}$$

maksimum hacim ise

$$V = (2\sqrt{6})^2 \cdot 2\sqrt{6} = 48\sqrt{6} \text{ br}^3 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

TÜREV İLE İLGİLİ TEMEL TEOREMLER

ROLLE TEOREMİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a, b) aralığında türevli olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır. Rolle teoreminin hipotezleri sağlandığında fonksiyonun grafiğinin en az bir noktasındaki teğeti x eksenine paraleldir. $f: [a, b]$ de sürekli ve (a, b) de türevli olsun. $f(x) = 0$ denkleminin iki kökü arasında $f'(x) = 0$ denkleminin en az bir kökü vardır.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 2x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[0, 2]$ aralığında Rolle teoremini uygulayınız.

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında sürekli ve $(0, 2)$ aralığında türevlidir.

$f(0) = f(2) = 0$ olduğundan Rolle teoreminin şartlarını sağlar.

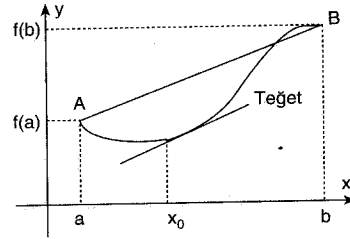
$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2) \text{ ve } f'(1) = 0 \text{ dir.}$$

ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a, b) de türevli olsun. (a, b) aralığında en az bir x_0 noktası için

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ eşitliği sağlanır.}$$



$y = f(x)$ eğrisinin $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarını birleştiren [AB] kirişi eğri parçası üzerinde en az bir x_0 noktasında ki teğete paralel olur.

$f'(x_0), (x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin eğimi,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ise [AB] kirişinin eğimidir. Dolayısıyla}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ olur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^2 - 4x + 5$ fonksiyonun $[0, 4]$ aralığında ortalama değer teoremine uygun x değerlerini bulunuz.

Çözüm:

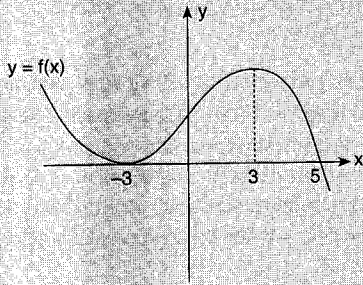
$f(x), [0, 4]$ aralığında sürekli ve $(0, 4)$ aralığında türevlidir.

$$f'(x_0) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{5 - 5}{4 - 0} = 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$2x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \in [0, 4] \text{ olarak bulunur.}$$

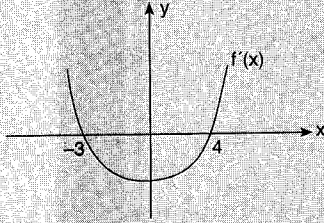
1



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f'(x) > 0$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

2



$f'(x)$ in grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralıktaki x tam sayılarının toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

3 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ eğrisinin artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM:

4

$f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM:

5

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevi;
 $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot x$ olduğuna göre,
 f fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?

ÇÖZÜM:

6

$f(x) = \frac{2x+m}{x-2}$ fonksiyonu azalan olduğuna göre, m nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

7

$f(x) = \frac{x^2 - mx}{x-2}$ fonksiyonu hangi m değeri için artandır?

ÇÖZÜM:

- 8 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^3 - x^2 + 3mx + m - 1$
fonksiyonunun daima azalan olması için m ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

- 9 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x + 3$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

ÇÖZÜM:

- 10 $0 < m < n$ olduğuna göre,
 $f(x) = 2mx^3 + 3(mn - 1)x^2 - 6nx + m - n$
fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM:

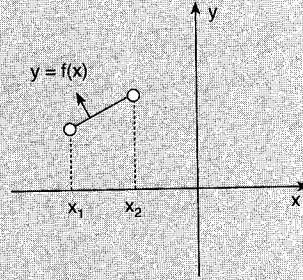
- 11 $f(x) = \frac{mx+9}{x+m}$ fonksiyonunun azalan olması için, m hangi aralıkta değer alır?

ÇÖZÜM:

- 12 $f(x) = \frac{mx+4}{mx+n}$ fonksiyonunun azalan olduğu aralıkta, m ve n arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

13



$y = f(x)$ in $x_1 < x < x_2$ aralığındaki grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yada hangileri (x_1, x_2) aralığında azalandır?

- A) $-\frac{1}{f(x)}$ B) $-f^2(x)$ C) $f^2(x)$
D) $-f^3(x)$ E) $\frac{f(x)}{x}$

ÇÖZÜM:

- 14 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları türevlenebilen ve R de daima artan fonksiyonlardır. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri daima artandır?

- A) $f(x) \cdot g(x)$ B) $\frac{f(x)}{g(x)}$ C) $(f \circ g)(x)$
D) $f(x) - g(x)$ E) $f(-x) + g(-x)$

ÇÖZÜM:

- 15 Belirli bir aralıkta $f(x)$ artan fonksiyon olduğuna göre, aynı aralıkta aşağıdakilerden hangisi azalandır?

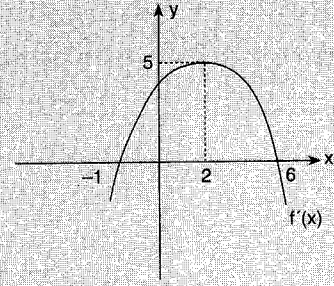
- A) $\frac{1}{f(x)}$ B) $[-f(x)]^3$ C) $f^2(x)$
D) $2f(x)$ E) $\frac{f(x)}{2}$

ÇÖZÜM:

- 16 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

17



$f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre, $f(x)$ in maksimum ve minimum değerlerini aldığı noktaların apsilerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 18 $y = (a+1)x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + b$ eğrisi için A (1,3) noktası yerel ekstremum olduğuna göre, b kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 19 $y = x^3 - 4ax^2 + 5x + a - 2$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun türevinin yerel minimum değeri $-\frac{1}{3}$ olduğuna göre, a'nın pozitif değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 9$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi kaçtır?

çözüm:

21 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$A(1,1)$ noktası $f(x) = x^3 + mx^2 - nx - 2$ fonksiyonunun dönüm noktası olduğuna göre, $(m.n)$ çarpımı kaçtır?

çözüm:

22 $f(x) = \frac{x^2 + m}{2x + 3}$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada yerel minimumu olduğuna göre, fonksiyonun yerel maksimum değeri kaçtır?

çözüm:

23 $y = x^3 + mx^2 + nx + 1$ fonksiyonunun yerel maksimum noktası $(-1,7)$ olduğuna göre, m kaçtır?

çözüm:

24 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ eğrisinin ekstremum noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

çözüm:

25 $y = x^3 - 6x^2 + ax + 8$ fonksiyonunun grafiğinin dönüm noktası x ekseninde olduğuna göre, a reel sayısı kaçtır?

çözüm:

26 $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + 2x$ fonksiyonunun dönüm noktalarından birinin apsisi -1 olduğuna göre, diğer dönüm noktasının apsisi kaçtır?

çözüm:

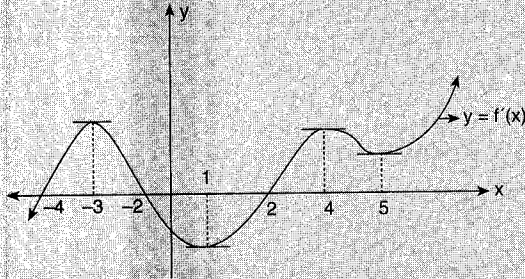
- 27 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ eğrisinin $x = 1$ için ekstremum noktası ve $A(-1, -2)$ noktasında büküm noktası olduğuna göre, c kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 28 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM:

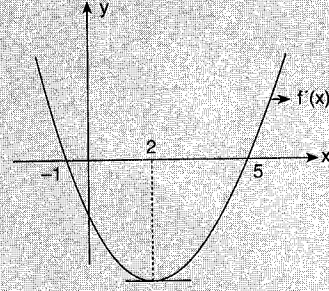
29



f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre, hangi x değeri için fonksiyon yerel maksimum değerini alır?

ÇÖZÜM:

30



f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

- A) $f(x)$ in $x = -1$ de yerel maksimumu vardır.
- B) $f(x)$ in $x = 5$ de yerel minimumu vardır.
- C) $f(x)$ fonksiyonu $(2, \infty)$ aralığında konvektir.
- D) $f(x)$ in $x = 2$ de büküm noktası vardır.
- E) $f(x)$, $(-1, 5)$ aralığında artandır.

ÇÖZÜM:

31

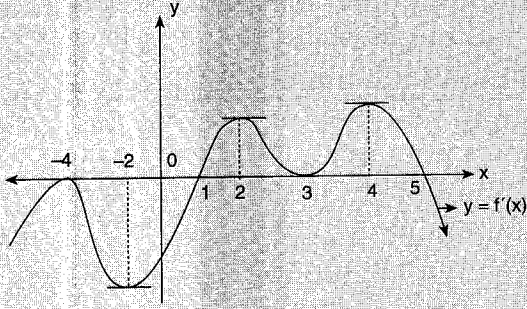
R den R ye $f(x) = |x^2 - 9| + 4$ şeklinde tanımlanan

$R \rightarrow R$ fonksiyonu için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $x = -3$ te yerel minimum vardır.
- II. $x = 0$ da yerel maksimum vardır.
- III. $x = 3$ için $f'(x) = 0$ olur.
- IV. $x = -3$ için $f'(x) = 0$ olur.
- V. $f'(-2) > f(2)$ dir.

ÇÖZÜM:

32



Yukarıda $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının
apsisleri toplamı kaçtır?

çözüm:

33 $y = 5x^2 - 20x + 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri
kaçtır?

çözüm:

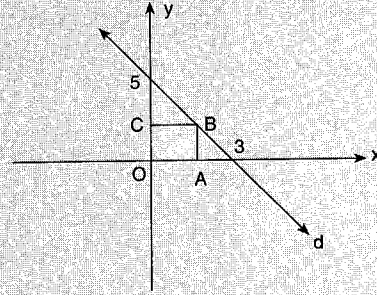
34 Çevresi 24 cm olan bir dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2
dır?

çözüm:

35 Çarpımları 20 olan iki pozitif reel sayının toplamı en az
kaçtır?

çözüm:

36



OABC dikdörtgeninin alanının maksimum olması için A
noktasının apsisi kaç olmalıdır?

çözüm:

37 $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri
toplamının minimum olması için a kaç olmalıdır?

çözüm:

- 38 Çevresi $2br$ olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olanının bir kenar uzunluğu kaç birimdir?

ÇÖZÜM:

- 39 Yarıçapı 10 br olan çember içine çizilebilecek eşkenar üçgenin alanı en çok kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM:

- 40 Yarıçapı r br olan çemberin içine çizilen dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM:

- 41 Bir atölyede bir günde üretilen x birim malın maliyeti $y = x^2 + x + 32$ bağıntısı ile belirlenmiştir. Birim malın satış fiyatı $41 - x$ olduğuna göre, günlük karın maksimum olması için bir günde kaç birim mal üretilmelidir?

ÇÖZÜM:

- 42 $A(m, 3)$ ve $B(-2, 3m)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık için m kaç olmalıdır?

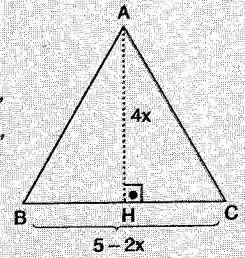
ÇÖZÜM:

- 43 ABC üçgeninde,

$$|BC| = (5 - 2x) \text{ br}$$

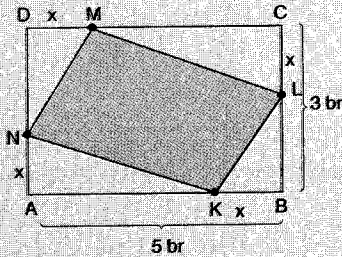
$$|AH| = 4x \text{ br olduğuna göre,}$$

x in hangi değeri için, Alan (ABC) en büyük olur?



ÇÖZÜM:

44

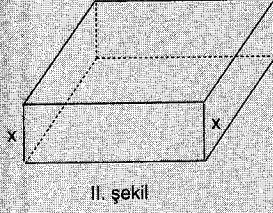
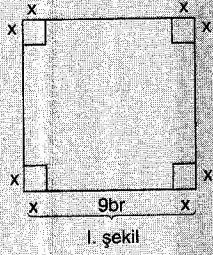


$ABCD$ dikdörtgeninde $|AB| = 5br$, $|BC| = 3br$

$|AN| = |DM| = |CL| = |BK| = x$ br dir. $KLNM$ dörtgeninin alanının minimum olması için x kaç birim olmalıdır?

ÇÖZÜM:

45



Bir kenarı 9 br olan I. şekildeki kare mukavvanın köşelerinden bir kenarı x br olan kareler kesiliyor. Kalan parça katlanarak II. şekildeki prizma elde ediliyor. Buna göre, oluşan prizmanın içine en çok kaç birimküp su doldurulabilir?

46

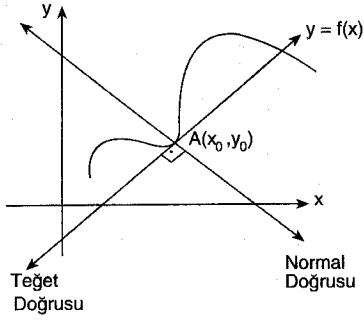
Taban yarıçapı ile yüksekliğinin toplamı 45 br olan koninin hacmi en büyük değerini aldığı anda yüksekliği kaç birimdir?

ÇÖZÜM:

ÇÖZÜM:

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI



Denklemleri $y = f(x)$ olan fonksiyona $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi $m_T = f'(x_0)$ dir.

$A(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetin denklemi;

$y - y_0 = m_T(x - x_0)$ normalin denklemi ise

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_T}(x - x_0) \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$y = 2x^2 - x - 5$ eğrisine apsisi -2 olan noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x + y + 13 = 0$ B) $x + 9y + 13 = 0$
C) $9x - y - 13 = 0$ D) $9x + y + 13 = 0$
E) $9x + y - 22 = 0$

Çözüm

$$x_0 = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^2 - (-2) - 5 \\ \Rightarrow y_0 = 5$$

$$y = f(x) = 2x^2 - x - 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x - 1$$

$$m_T = f'(-2) = 4 \cdot (-2) - 1$$

$$\Rightarrow m_T = -9$$

$(-2, 5)$ noktasından geçen ve eğimi -9 olan teğetin denklemi, $y - 5 = -9(x - (-2))$

$\Rightarrow 9x + y + 13 = 0$ olarak bulunur.

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$f(x) = \sqrt{x+4} + 2$$

eğrisinin apsisi 5 olan noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6x + y - 35 = 0$ B) $x + 6y - 35 = 0$
C) $6x - y - 35 = 0$ D) $x - y - 35 = 0$
E) $6x + y + 30 = 0$

Çözüm

$$x_0 = 5 \Rightarrow f(x_0) = y_0 = \sqrt{5+4} + 2 = 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow m_T = f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5+4}} = \frac{1}{6}$$

Teğet ile normal dik olduklarından

$$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{m_T} = -6 \text{ dir.}$$

$(5, 5)$ noktasındaki normalin denklemi

$$y - 5 = -6(x - 5)$$

$\Rightarrow 6x + y - 35 = 0$ olarak bulunur.

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

eğrisinin $y = 2x - 4$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

parabolü ile

$y = 2x - 4$ doğrusu

kesişmediğinden,

parabol üzerinde

doğruya en yakın

nokta, doğruya

paralel teğetin

değme noktasıdır.

Bu nokta $P(x_0, y_0)$

olsun. P noktasından

geçen teğetin

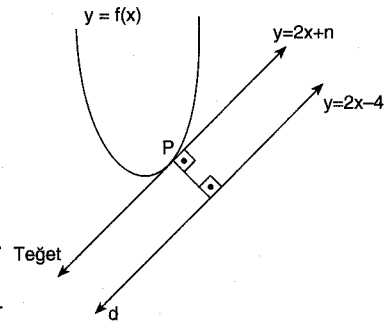
eğimi $m_T = m_d = 2$ dir.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = m_T = 2x_0 - 4 = 2 \Rightarrow x_0 = 3$$

$$\text{ve } y_0 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 7 \Rightarrow y_0 = 4 \text{ olur.}$$

$$x_0 + y_0 = 3 + 4 = 7 \text{ dir.}$$



Yanıt E

ÖRNEK SORU

$A(1, -4)$ noktasından $y = x^2 - 2x$ parabolüne çizilen teğetlerin değme noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm

A(1,-4) noktasından $y=x^2-2x$ parabolüne iki tane teğet çizilebilir. Teğet noktalardan birinin apsisi c olsun. Buradan $y=c^2-2c$

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = f'(x) = 2x - 2$$

$$\Rightarrow f'(c) = m_T = 2c - 2$$

(c, $c^2 - 2c$) noktasından geçen teğetin denklemi

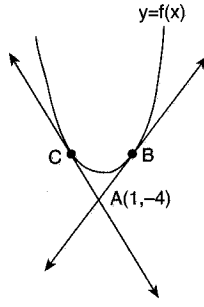
$$y - (c^2 - 2c) = (2c - 2)(x - c) \text{ dir.}$$

Teğet, A(1,-4) noktasından geçeceğinden denklemi sağlar.

$$-4 - (c^2 - 2c) = (2c - 2)(1 - c)$$

$$\Rightarrow c^2 - 2c - 2 = 0$$

Bu denklemin kökleri c_1 ve c_2 olsun. Bu değerler teğet noktalarının apsiseridir. Dolayısıyla toplamı, $c_1 + c_2 = 2$ olarak bulunur.



Yanıt E

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Bir hareketlinin t zamanda aldığı yol S olsun. S yolu t zamanın bir fonksiyonu olduğundan $S = S(t)$ ile gösterilsin. Bu denkleme cismin hareket denklemi denir.

Bir hareketlinin $t-t_0$ zaman aralığında aldığı yol $S(t) - S(t_0)$ olur. Bu zaman aralığındaki ortalama hız,

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \text{ dir.}$$

Bu ifadenin $t \rightarrow t_0$ limiti alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \text{ elde edilir. Bu limite hareketlinin } t_0 \text{ anındaki ani hızı denir ve } V(t_0) = S'(t_0) \text{ ile gösterilir.}$$

Yani yolun zamana göre türevi hızı verir.

Ortalama İvme

Bir hareketlinin $t-t_0$ zaman aralığındaki hız değişimi

$$V(t) - V(t_0) \text{ olsun.}$$

$$\frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \text{ oranına ortalama ivme denir.}$$

ve a_{ort} ile gösterilir.

$t \rightarrow t_0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \text{ değeri, hareketlinin}$$

$t = t_0$ anındaki ivmesidir ve $V'(t_0) = a(t_0)$ ile gösterilir.

Yani hızın zamana göre türevi, ivmeyi verir.

ÖRNEK SORU

Bir hareketlinin aldığı yolun zamana bağlı denklemi, $S(t) = 3t^2 - 5t + 4$ şeklindedir. Bu hareketlinin $t = 4$ saat anındaki ani hızı kaç km/saat dir?

- A) 14 B) 16 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm

Hareketlinin ani hız denklemi yolun zamana göre türevidir.

$$S(t) = 3t^2 - 5t + 4$$

$$\Rightarrow V(t) = S'(t) = 6t - 5 \text{ dir.}$$

$$t = 4 \text{ için } V(4) = S'(4) = 6 \cdot 4 - 5 = 19 \text{ km/sa olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

Bir hareketlinin t zamana bağlı yol denklemi,

$$S(t) = 4t^2 + 10 \text{ şeklindedir.}$$

Bu hareketlinin 154. kilometredeki hızı saatte kaç kilometredir?

- A) 50 B) 48 C) 46 D) 44 E) 42

Çözüm

154. kilometredeki zamanı bulalım.

$$4t^2 + 10 = 154 \Rightarrow t = 6 \text{ saat}$$

$$V(t) = S'(t) = 8t$$

$$t = 6 \Rightarrow V(6) = S'(6) = 8 \cdot 6 = 48 \text{ km/sa}$$

olarak bulunur.

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$S(t) = t^3 - 5t^2 + t + 20$ hareket denklemi ile verilen cismin $t_1 = 2$ ve $t_2 = 5$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı kaç m/sn dir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ dir.}$$

$$t_1 = 2 \Rightarrow S(t_1) = S(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 + 20 = 10$$

$$t_2 = 5 \Rightarrow S(t_2) = S(5) = 5^3 - 5 \cdot 5^2 + 5 + 20 = 25$$

$$V_{\text{ort}} = \frac{25 - 10}{5 - 2} = 5 \text{ m/sn olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

Hareket denklemi $S(t) = t^3 - t^2 + 4t + 16$ cismin $t = 4$ sn anındaki ivmesi kaç m/sn^2 dir?

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

Çözüm

İvme hızın zamana göre türevidir. Yani $a(t) = V'(t)$ dir.
 $V(t) = S'(t)$ olduğundan

$$a(t) = V'(t) = (S'(t))' = S''(t)$$

$$\Rightarrow S'(t) = 3t^2 - 2t + 4$$

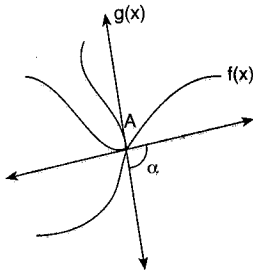
$$\Rightarrow S''(t) = 6t - 2$$

$$\Rightarrow a(t) = 6t - 2$$

$$t = 4 \Rightarrow a(4) = 6 \cdot 4 - 2 = 22 \text{ m/sn}^2$$

olarak bulunur.

Yanıt C

KEŞİSEN İKİ EĞRİ ARASINDAKİ AÇI

$y = f(x)$ ve $y = g(x)$ kesişen iki eğri olsun. Bu iki eğrinin kesişme noktalarındaki teğetlerinin oluşturduğu açılardan biri α ve kesişme noktası $A(x_0, y_0)$ ise

$$\tan \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \text{ dir}$$

Diğer açı ise $180^\circ - \alpha$ dir.

• $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$ ise teğetler dik olacağından eğriler dik kesişirler.

• $f'(x_0) = g'(x_0)$ ise eğriler birbirlerine A noktasında teğettir.

ÖRNEK SORU

$$f(x) = 3x^2 \text{ ve } g(x) = \sqrt{x+8}$$

eğrilerine $A(1,3)$ noktasından çizilen teğetler arasındaki geniş açının tanjantı kaçtır?

- A) $-\frac{35}{6}$ B) $-\frac{35}{8}$ C) $-\frac{7}{2}$
 D) $-\frac{35}{12}$ E) $-\frac{5}{2}$

Çözüm

$A(1,3)$ noktası iki eğriyi de sağladığından, iki eğrinin kesim noktasıdır.

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

$$g(x) = \sqrt{x+8} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{6}$$

Teğetler arasındaki açılardan biri α olsun.

$$\tan \alpha = \frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1) \cdot g'(1)} = \frac{6 - \frac{1}{6}}{1 + 6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{35}{6}}{2} = \frac{35}{12}$$

$$= \frac{35}{12} \text{ olup geniş açının tanjantı ise } -\frac{35}{12} \text{ dir}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$f(x) = x^3 + 2 \text{ ve } g(x) = \frac{c}{x}$$

eğrilerinin dik kesişmeleri için c kaç olmalıdır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm

$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$ ise eğriler dik kesişirler.

$$f(x) = x^3 + 2 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$$

$$g(x) = \frac{c}{x} \Rightarrow g'(x_0) = -\frac{c}{x_0^2}$$

Buradan

$$3 \cdot x_0^2 \cdot \left(-\frac{c}{x_0^2}\right) = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

- 1 $y = 3x^2 - 4x + 2$ eğrisine $x = -1$ de çizilen teğetin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 2 $y = 2x^3 + mx^2 - n$ eğrisinin $x = 2$ deki teğetin eğimi 4 olduğuna göre, m kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x + 2}{x^2}$ fonksiyonunun $x = 1$ deki teğetin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 4 $y = 2x^2 - 4x - 1$ eğrisine üzerindeki $(1, -3)$ noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

ÇÖZÜM:

- 5 $f(x) = 2^{\sin 2x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki teğetin denklemi nedir?

ÇÖZÜM:

- 6 $y = x^2 - x - 3$ eğrisine üzerindeki $(2, -1)$ noktasından çizilen normalin denklemi nedir?

ÇÖZÜM:

- 7 $f(2x+1) = 3x^2 + 4x + 1$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ deki normalinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 8 $y = x^2 - 3x + 5$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti $x + y - 2 = 0$ doğrusuna paraleldir?

ÇÖZÜM:

9 $y = x^2 + 3$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $y = -2x - 1$ doğrusuna diktir?

ÇÖZÜM:

10 $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun hangi noktalarındaki teğeti $3x - y + 5 = 0$ doğrusuna paraleldir?

ÇÖZÜM:

11 $y = x^2 - 4x + 4$ eğrisinin $y + 2x + 1 = 0$ doğrusuna en yakın noktası nedir?

ÇÖZÜM:

12 $f(x) = \sin(\cos 6x)$ eğrisinin apsisi $x = \frac{\pi}{12}$ olan noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

13 $y > 0$ olmak üzere, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $x = \sqrt{2}$ deki teğetinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

14 $f(x) = 2x^3 - 1$ fonksiyonunun üzerindeki $A(2, k)$ noktasından çizilen teğetin denklemini nedir?

ÇÖZÜM:

- 15 $f(x) = mx^3 + 5x - 2$ eğrisi üzerindeki $A(1,a)$ noktasından çizilen teğetin eğimi 11 olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 16 $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 9 = 0$ eğrisinin $(2,1)$ noktasındaki teğetin denklemini nedir?

ÇÖZÜM:

- 17 $y = \ln x$ eğrisinin $A(e,1)$ noktasındaki normalin denklemini nedir?

ÇÖZÜM:

- 18 Denklemi $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ olan eğrinin Ox eksenine paralel teğetlerinin değme noktalarının apsilerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- 19 Denklemi $y = \frac{x^2}{x+a}$ olan eğrinin $x = 1$ noktasındaki teğetin eğimi -3 olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 20 $x = t^2 - 6t + 9$
 $y = t^3 - 5t + 9$
parametrik denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun üzerindeki $A(1,7)$ noktasından çizilen teğetin denklemini nedir?

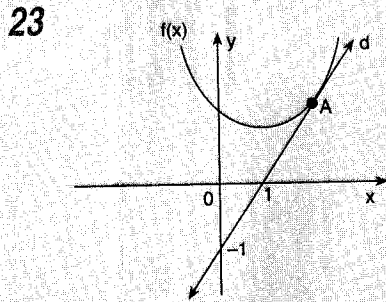
ÇÖZÜM:

- 21 $f(x) = 2x^2 - 1$ ve $g(x) = \cos x$ olduğuna göre, $(f \circ g)(x)$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 22 $f(x) = mx^2$ eğrisinin $A(1,2)$ noktasındaki teğeti ile $B(a,b)$ noktasındaki teğeti birbirine dik olduğuna göre, a kaçtır?

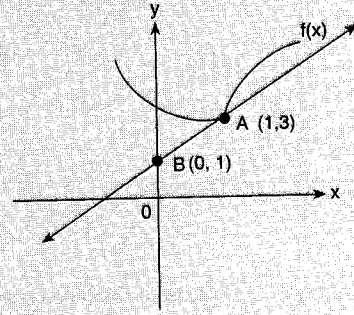
ÇÖZÜM:



Şekildeki $f(x) = x^2 - 3x + a$ fonksiyonunun A noktasındaki teğeti verilmiştir. Buna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

24

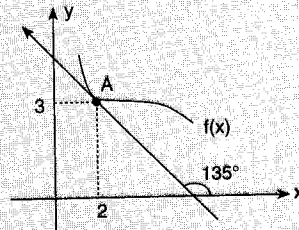


Şekildeki $f(x)$ eğrisinin $A(1,3)$ noktasındaki teğeti Oy eksenini $B(0,1)$ noktasında kesmektedir.

$g(x) = 2x^3 \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

25

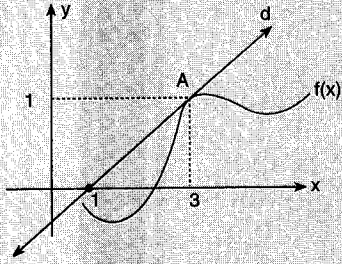


Şekildeki $f(x)$ fonksiyonunun $A(2,3)$ noktasındaki teğeti, Ox eksenini 135° lik açı yapmaktadır.

$g(x) = x \cdot f(2x)$ olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

26



Şekildeki $f(x)$ eğrisinin $A(3,1)$ noktasındaki teğeti d doğrudur.

$g(x) = \frac{f(x) + x}{2x}$ olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

27 Zamana bağlı yol denklemi,

$x = 6t^2 + 5t + 3$ olan bir hareketlinin kaçınıcı saniyedeki hızı 29 m/sn dir?

ÇÖZÜM:

28 Zamana bağlı yol denklemi,

$x = 5t^3 + 10t + 20$ olan bir hareketlinin kaçınıcı saniyedeki ivmesi 60 m/sn^2 dir?

ÇÖZÜM:

GRAFİK ÇİZİMLERİ ASİMPOTLAR

GRAFİK ÇİZİMLERİ ASİMPTOTLAR

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki bir nokta $P(x,y)$ olsun. Eğer, fonksiyonun en az bir kolu sonsuza gidiyorsa ve P noktasının bir doğruya veya eğriye olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa (sonsuzda teğet oluyorsa), bu doğruya veya eğriye $y = f(x)$ in asimptotu denir.

DÜŞEY ASİMPTOTLAR

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonu için,

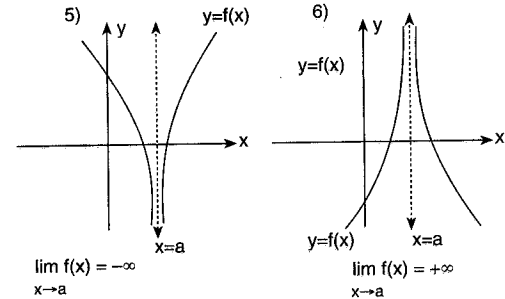
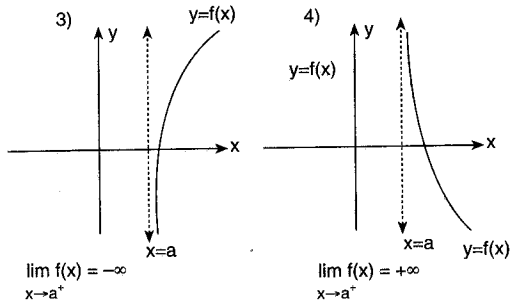
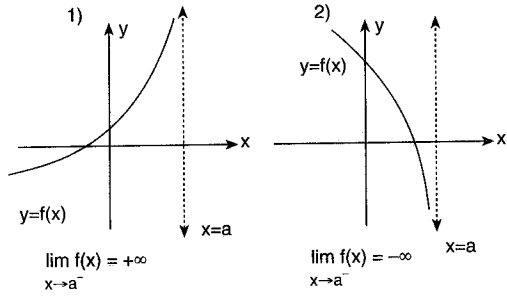
i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

şartlarından en az bir sağlanırsa $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ in düşey asimptotu denir.

Bir fonksiyonun düşey asimptotu, y -eksenine paralel bir doğrudur ve fonksiyon bu doğruyu kesmez.



Örnek

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x-6}$$

fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x+5}{2x-6} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x+5}{2x-6} = +\infty \text{ olduğundan}$$

$x = 3$ doğrusu $f(x)$ in düşey asimptotudur.

▲ Not: $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

rasyonel fonksiyonunda $Q(x)=0$ denkleminin $x_1, x_2, \dots, x_n$ kökleri $P(x)=0$ denkleminin kökleri değilse

$x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ doğruları birer düşey asimptottur.

Eğer bu köklerden biri $P(x) = 0$ polinomunun da bir kökü ise bu noktada sağ ve sol limitlere bakılır. Eğer limitlerden biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise bu kök düşey asimptot olur. Aksi takdirde düşey asimptot değildir.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 7}{x^2 - 9} \text{ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.}$$

Çözüm

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ ve } x_2 = -3 \text{ olur.}$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 7 = 3^2 + 4 \cdot 3 - 7 = -14 \neq 0$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow x^2 + 4x - 7 = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 7 = -10 \neq 0$$

olduğundan $x_1 = 3$ ve $x_2 = -3$ doğruları düşey asimptotlardır.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 1}$$

fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$x_1 = 1 \text{ için } x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

L'Hospital kuralı gereğince

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 4}{2x} = \frac{3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$x = 1$ düşey asimptot değildir.

$$x_2 = -1 \text{ için } x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2$$

$$= -10 \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$x = -1$ düşey asimptottur.

Örnek

$$f(x) = \frac{x+5}{|x|-4} \text{ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.}$$

Çözüm

$$|x|-4=0 \Rightarrow |x|=4$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ veya } x_2 = -4 \text{ tür.}$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow x+5 = 4+5 = 9 \neq 0$$

$$x_2 = -4 \Rightarrow x+5 = -4+5 = 1 \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$x = 4$ ve $x = -4$ düşey asimptottur.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2x - m + 4}$$

eğrisinin düşey asimptotunun olmaması için m ne olmalıdır?

Çözüm

Fonksiyonun düşey asimptotunun olmaması için paydanın reel kökünün olmaması gerekir. Yani $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$x^2 - 2x - m + 4 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m+4) = 4m - 12$$

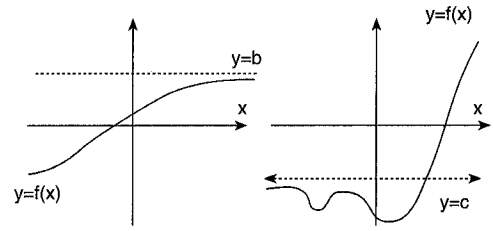
$$\Delta < 0 \Rightarrow 4m - 12 < 0 \Rightarrow m < 3 \text{ için düşey asimptotu yoktur.}$$

YATAY ASİMPTOT

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ ise}$$

$y = b$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir.



Bir fonksiyonun yatay asimptotu, Ox eksenine paralel bir doğru olup fonksiyon bu doğruyu kesebilir.

Örnek

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{2x^2 + 5x - 5}$$

eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^2 + 5x - 5} = \frac{3}{2}$$

olduğundan $y = \frac{3}{2}$ doğrusu eğrisinin yatay asimptotudur.

Örnek

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x^2 - 12x + 20}$$

eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 7}{x^2 - 12x + 20} = 0$$

olduğundan $y = 0$ doğrusu yani x ekseni yatay asimptottur.

Örnek

$$f(x) = \frac{2x + 4}{|x| + 3} \text{ eğrisinin yatay asimptotlarını bulunuz.}$$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{|x| + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x + 3} = 2 \text{ olduğundan}$$

$y = 2$ yatay asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{|x| + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{-x + 3} = -2$$

olduğundan $y = -2$ de yatay asimptottur.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 7}{2x^2 - x + 3}$$

eğrisinin yatay asimptotlarını bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = \mp \infty$$

eğrinin yatay asimptotu yoktur.

EĞİK VE EĞRİ ASİMPTOTLAR

$y = f(x)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ veya } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

olacak şekilde bir $g(x)$ fonksiyonu var ise $g(x)$ e $f(x)$ in eğik veya eğri asimptotu denir.

$g(x) = ax + b$ ise eğik asimptot $g(x)$ en az ikinci dereceden ise eğri asimptottur. Bir $y = f(x)$ fonksiyonu için,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ oluyorsa, fonksiyonunun eğik veya eğri asimptotu vardır.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 7}{x - 1}$$

eğrisinin varsa eğik veya eğri asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = \infty$ olduğundan eğik veya eğri asimptot vardır.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x - 7 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 2x - 7 \\ \underline{x^2 - x} \\ -x - 7 \\ \underline{-x + 1} \\ -8 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x - 7}{x - 1} = x^2 + x - 1 - \frac{8}{x - 1} \text{ olarak yazılabilir.}$$

$g(x) = x^2 + x - 1$ olarak seçilirse,

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left(\frac{-8}{x - 1} \right) = 0$$

olduğundan $g(x) = x^2 + x - 1$ eğri asimptottur.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^2 - 17x + 28}{x + 2}$$

eğrisinin eğik veya eğri asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = \mp \infty$$

olduğundan eğik veya eğri asimptot vardır.

$$\begin{array}{r} x^2 - 17x + 28 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -19x + 28 \\ \underline{-19x - 38} \\ 66 \end{array}$$

$$x^2 - 17x + 28 = x - 19 + \frac{66}{x + 2}$$

olarak yazılabilir. $g(x) = x - 19$ olarak seçilirse,

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left(\frac{66}{x + 2} \right) = 0$$

olacağından $g(x) = x - 19$ eğik asimptottur.

Sonuç:

Kesirli fonksiyonlarda pay paydaya bölündüğünde bu bölüm, fonksiyonun eğik veya eğri asimptotudur.

▲ Not:

1) $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ve $a > 0$ olsun.

$f(x)$ eğrisinin asimptotu

$$y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \text{ dir.}$$

$a < 0$ ise $f(x)$ in limiti hesaplanamaz. Dolayısıyla eğik asimptotu yoktur.

2) $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + mx + n$

fonksiyonun eğik asimptotları,

$$y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| + mx + n$$

Örnek

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 7}$$

eğrisinin eğik asimptotlarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 7}$$

eğrisinin eğik asimptotları,

$$y = \sqrt{2} \cdot \left| x + \frac{-8}{2 \cdot 2} \right| = \sqrt{2} \cdot |x - 2| \text{ olduğundan,}$$

$$y = \sqrt{2} \cdot (x-2) \text{ ve } y = -\sqrt{2} \cdot (x-2) \text{ dir.}$$

Örnek

$$f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}$$

eğrisinin eğik asimptotlarının kesim noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}$$

eğrisinin eğik asimptotları,

$$y = 2x + 1 + \sqrt{1} \cdot \left| x + \frac{-4}{2 \cdot 1} \right| = 2x + 1 + |x - 2|$$

olup asimptotları,

$$y_1 = 2x + 1 + x - 2 \Rightarrow y_1 = 3x - 1$$

$$y_2 = 2x + 1 - x + 2 \Rightarrow y_2 = x + 3 \text{ şeklindedir.}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 3x - 1 = x + 3 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 3 \Rightarrow y = 5 \text{ olup}$$

asimptotların kesim noktası (2,5) olarak bulunur.

GRAFİK ÇİZİMİ

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki sıra izlenir.

- 1) Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
- 2) Fonksiyonu varsa asimptotları bulunur.
- 3) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur.
- 4) Türevinin kökleri ve işareti incelenir.
- 5) Değişim tablosu yapılır.
- 6) Değişim tablosundan faydalanarak grafik çizilir.

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$P(x)$ bir polinom olmak üzere, $y = P(x)$ eğrisinin grafiği çizilirken aşağıdaki hususlara dikkat edilir.

- 1) $P(x)$ in bir katlı kökü a ise eğri x eksenini a noktasında keser.
- 2) $P(x)$ in iki katlı kökü b ise eğri x eksenine b noktasında teğettir.
- 3) $P(x)$ in üç katlı kökü c ise eğri x eksenini c de keser ve bu nokta eğrinin bir dönüm noktasıdır.
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ ise eğri III. bölgeden başlar.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ ise eğri II. bölgeden başlar.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ ise eğri I. bölgeye gider.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ ise eğri IV. bölgeye gider.

Örnek

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) $f(x)$ in tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

2) $f(x)$ in asimptotu yoktur.

3) Eksenlerin kesim noktaları

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-5) \cdot (x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = 5 \text{ veya } x_3 = -3$$

y eksenini kestiği noktalar

(5,0), (-3,0) ve (0,0) dir.

4) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 15$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (3x+5) \cdot (x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 3$$

$$x_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow y_1 = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 15\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{400}{27}$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 = -36$$

$f(x)$ in ekstremumları

$$\left(-\frac{5}{3}, \frac{400}{27}\right) \text{ ve } (3, -36) \text{ olur.}$$

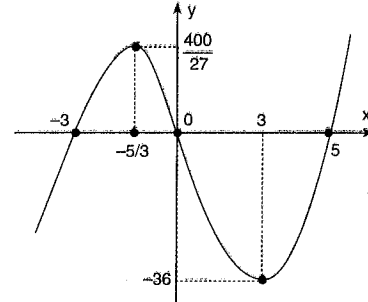
5) Değişim tablosu

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$	0	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	↘	0	↘	↗	$+\infty$
			$\frac{400}{27}$ max		-36 min		

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$

olduğundan III. bölgeden başlar I. bölgeden gider.

7) Grafik ise



biçimindedir.

Örnek

$y = f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 2x - 3)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

- 1) Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- 2) $f(x)$ fonksiyonunun asimptotu yoktur.
- 3) Eksenlerin kesim noktası,
 $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$
 $y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$
 $\bullet x^2 = 0$
 $\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ çift katlı kök olduğundan
fonksiyon $(0,0)$ noktasında x eksenine teğettir.
 $\bullet x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -1$ dir.
 $(3,0), (-1,0)$ noktalarında grafik Ox eksenini keser.

$$4) f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(2x^2 - 3x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \text{ tür.}$$

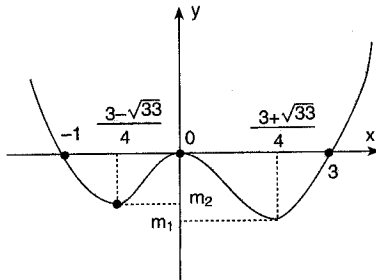
$$x_1 = 0 \text{ için } y_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \text{ için } y_2 = m_1$$

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \text{ için } y_3 = m_2 \text{ olsun.}$$

5) Değişim Tablosu

x	$-\infty$	-1	$\frac{3 - \sqrt{33}}{4}$	0	$\frac{3 + \sqrt{33}}{4}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	m_2	0	m_1	0	$+\infty$
			min		max	min	

6) Grafiği ise

şeklinde dir.

Örnek

$f(x) = \frac{x-4}{x+2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

- 1) Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-2\}$ dir.
- 2) $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$ doğrusu dişey asimptottur.
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x+2} = 1 \Rightarrow y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.
- 3) $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-4}{0+2} = -2$
Grafik Oy eksenini $(0,-2)$ noktasında keser.
 $y = 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 4$
Grafik Ox eksenini $(4,0)$ noktasında keser.

$$4) f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$

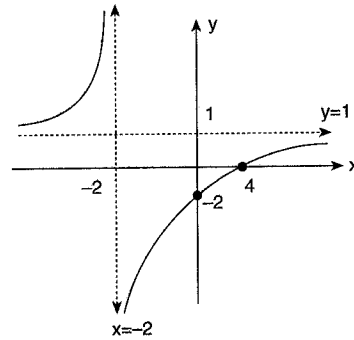
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x+2) - (x-4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$$

olduğundan fonksiyon daima artandır.

$f(x)$ in ekstremum noktaları yoktur.

5) Değişim Tablosu

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -2$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	

6) Grafiği ise

şeklinde dir.

Örnek

$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) Tanım kümesi $R - \{0\}$ dir.

2) $x = 0$ düşey asimptot,

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y = x \text{ eğik asimptottur.}$$

3) $x = 0$ için $f(x)$ tanımsız olduğundan

eğri y eksenini kesmez.

$y = 0$ için $x^2 + 4 = 0$ reel kök olmadığından

eğri x eksenini kesmez.

$$4) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 4)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ veya } x_2 = -2$$

$$x_1 = 2 \text{ için } y_1 = 4$$

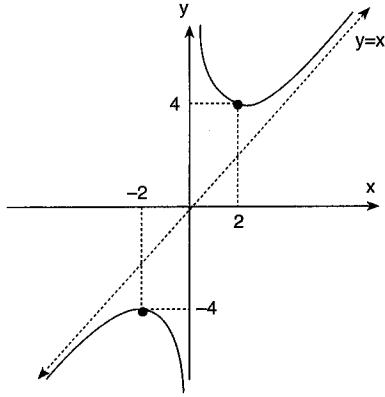
$$x_2 = -2 \text{ için } y_2 = -4$$

5) Değişim Tablosu

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$	4	$+\infty$

max min

6) Grafiği ise



şeklindedir.

Örnek

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2} \text{ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.}$$

Çözüm

1) Tanım kümesi $R - \{2\}$ dir.

2) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ düşey asimptottur.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}$$

olarak yazılabilir ve $y = x^2 + 2x + 4$

eğri asimptottur.

$$3) x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^3}{0-2} = 0$$

olduğundan grafik orjinden geçer.

$$4) f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - 1 \cdot x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ ve } x_3 = 3 \text{ tür.}$$

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 27$$

$x_1 = x_2 = 0$ çakışık kök olduğundan

(0,0) noktası ekstremum noktası değildir.

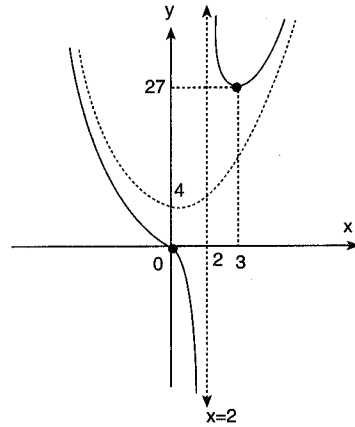
(3,27) noktası ise ekstremum noktasıdır.

5) Değişim Tablosu

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	27	$+\infty$

min

6) Grafiği ise



şeklindedir.

1 Aşağıdaki fonksiyonların varsa yatay asimptotlarını bulunuz.

a) $y = \frac{2x-3}{x+1}$

c) $y = \frac{x^2+2}{x-1}$

b) $y = \frac{5x+1}{x^2+3}$

d) $y = \frac{x^3+1}{x+1}$

ÇÖZÜM:

2 Aşağıdaki fonksiyonların varsa düşey asimptotlarını bulunuz.

a) $y = \frac{x-3}{x+2}$

b) $y = \frac{x^2+5x-2}{x^2-4}$

c) $y = \frac{x+2}{x^2+1}$

d) $y = \frac{x^2-x-6}{x^2-x-20}$

ÇÖZÜM:

3 Aşağıdaki fonksiyonların varsa eğik veya eğri asimptotlarını bulunuz.

a) $y = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

b) $y = \frac{x^3-8}{x-2}$

c) $y = \frac{x^2+1}{x-2}$

d) $y = \frac{x^4-x^2}{x^2-1}$

e) $y = \sqrt{2x^2-6x+3}$

f) $y = x-2 + \sqrt{x^2-5x+2}$

ÇÖZÜM:

4 $y = \frac{ax+5}{bx+c}$ eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası $(2, -1)$ olduğuna göre, $\frac{c}{a}$ oranı kaçtır?

ÇÖZÜM:

5 $y = \frac{x^2-5x+6}{x-1}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $y = \frac{x^2-9}{x-1}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

çözüm:

7 $y = \frac{x^2-5x+2}{x+1}$ fonksiyonunun eğik ve düşey asimptotlarının eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?

çözüm:

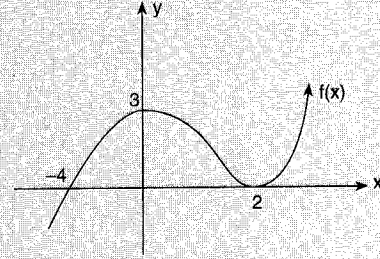
8 $y = \frac{x-2}{x-4}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

çözüm:

9 $y = \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

çözüm:

10



Şekildeki $f(x)$ fonksiyonunun denklemini aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $3(x-2)^2(x+4)$

B) $\frac{1}{16}(x-2)^2(x+4)$

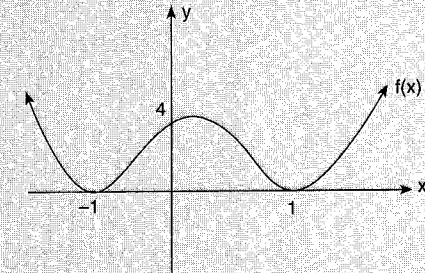
C) $\frac{5}{3}(x+2)^2(x-4)$

D) $\frac{3}{4}(x+2)^2(x-4)$

E) $\frac{3}{16}(x-2)^2(x+4)$

çözüm:

11

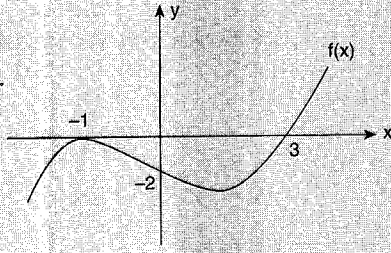


Grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu

$f(x) = a(x+b)^2 \cdot (x-1)^2$ şeklinde yazılırsa, $(a+b)$ toplamı kaç olur?

çözüm:

12

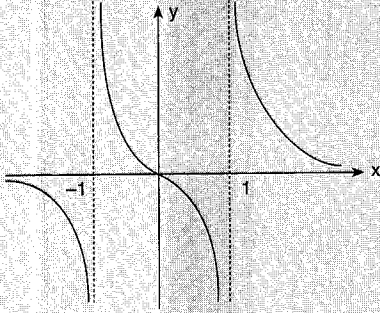


Grafiki verilen $f(x)$ fonksiyonunun denklemini

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ olduğuna göre, $(a + b + c + d)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

13

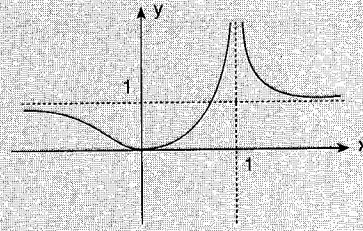


Şekildeki grafik hangi fonksiyona ait olabilir?

- a) $y = \frac{x-1}{x+1}$ b) $y = \frac{x}{x^2+1}$
c) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ d) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$
e) $y = \frac{x}{x^2-1}$

ÇÖZÜM:

14

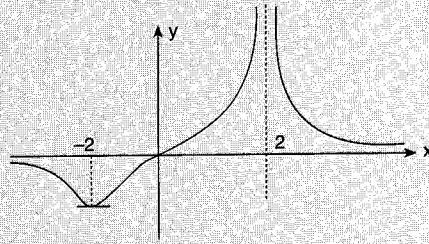


Yukarıdaki grafik hangi fonksiyona ait olabilir?

- a) $y = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ b) $y = \frac{x}{x-1}$
c) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ d) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$
e) $y = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$

ÇÖZÜM:

15

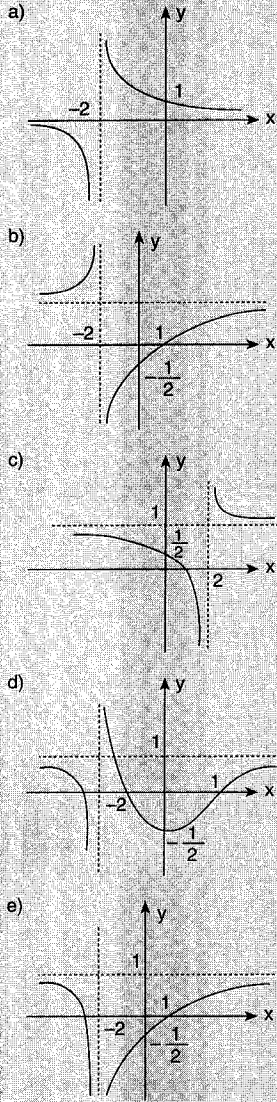


Grafikte verilen eğrinin denklemini aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a) $y = \frac{2}{(x-1)^2}$ b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$
c) $y = \frac{x+1}{(x-2)^2}$ d) $y = \frac{x-2}{(x-2)^2}$
e) $y = \frac{x}{(x+2)^2}$

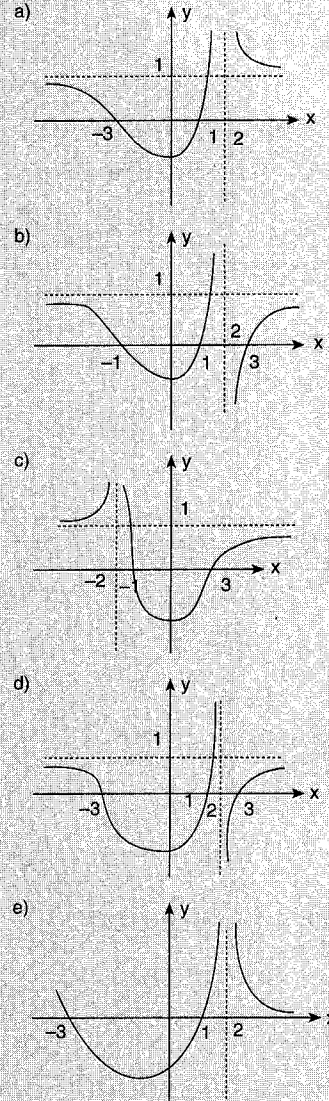
ÇÖZÜM:

- 16 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



ÇÖZÜM:

- 17 $f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



ÇÖZÜM:

TÜREVİN LİMİT PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

TÜREVİN LİMİT PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0, \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$$

ifadeleri belirsiz ifadelerdir.

L' HOSPITAL TEOREMİ

f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında türevli ve $\forall x \in A (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L' Hospital Teoremi $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$

belirsizlikleri için kullanılır. Diğer belirsizlikler bu iki belirsizliğe dönüştürüldükten sonra teorem uygulanır.

A) $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ BELİRSİZLİKLERİ

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 + x - 14}{x^4 + x - 18} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{7}{11}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{7}{13}$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 + x - 14}{x^4 + x - 18} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

vardır ve L'Hospital teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 + x - 14}{x^4 + x - 18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2 - 2x + 1}{4x^3 + 1}$$

$$= \frac{6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{4 \cdot 2^3 + 1} = \frac{7}{11} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x - 1}{x^2 + \ln(x+1)} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) e

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x - 1}{x^2 + \ln(x+1)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği olduğundan L'Hospital}$$

tal teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x - 1}{x^2 + \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{x^2} + 2}{2x + \frac{1}{x+1}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0 \cdot e^{0^2} + 2}{2 \cdot 0 + \frac{1}{0+1}} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2 \cos^2 x}{4x - \pi} \text{ limitinin değeri aşağıdakilerden}$$

hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2 \cos^2 x}{4x - \pi} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

olduğundan L'Hospital teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2 \cos^2 x}{4x - \pi}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x \cdot \sec^2 x + 4 \cos x \cdot \sin x}{4}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2 \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{3}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 12x + 7}{x^2 - 12} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 12x + 7}{x^2 - 12} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği olduğundan}$$

L'Hospital teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 12x + 7}{x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 12}{2x} \rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Tekrar L' Hospital uygulanırsa,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{2} = 3 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 3x}{\cot 4x} \text{ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisi-}$$

dir?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 3x}{\cot 4x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 3x}{\cot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{3x}}{\frac{-4}{\sin^2 4x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 4x}{4x} \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8\sin 4x \cdot \cos 4x}{4}$$

$$= \frac{-8\sin 0 \cdot \cos 0}{4} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

B) $\infty - \infty, 0, \infty$ BELİRSİZLİKLERİ

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cot 3x \right) \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 3

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cot 3x \rightarrow 0 \cdot \infty \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$\cot 3x = \frac{1}{\tan 3x} \text{ yazılırsa,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{\tan 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{\tan 3x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

belirsizliğine dönüşür. L'Hospital teoreminden,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1}{3 \cdot (1 + \tan^2 3x)} = \frac{1}{3 \left(1 + \tan^2 \left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right)} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{x+2}{\sin x} \right) \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) -2 B) $-\frac{3}{2}$ C) -1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{x+2}{\sin x} \right) \rightarrow \infty - \infty \text{ belirsizliği vardır. Payda eşitle-}$$

terek,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{x+2}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - (x^2 + 2x)}{x\sin x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

belirsizliğine dönüşür. L'Hospital teoreminden,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x - (2x + 2)}{\sin x + x\cos x} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x - 2}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x - 2}{2\cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{-2\sin 0 - 2}{2\cos 0 - 0\sin 0} = -1 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

C) $0^0, \infty^0, 1^\infty$ BELİRSİZLİKLERİ

Bu tip belirsizlikler $y = [f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki ifadelerin limitinde ortaya çıkar. Her iki tarafın logaritması alınır ve limitine bakılır.

$\lim \ln y = \lim (g(x) \cdot \ln(f(x))) \rightarrow 0 \cdot \infty$ belirsizliğine dönüşür. Bu

limit $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek limit hesaplanır.

$\lim \ln y = k \Rightarrow \lim y = e^k$ dir.

ÖRNEK SORU

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+3}{3} \right)^{\frac{3}{x}}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 4 B) 3 C) e^2 D) e^3 E) e^4

Çözüm

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+3}{3} \right)^{\frac{3}{x}} \rightarrow 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$y = \left(\frac{4x+3}{3} \right)^{\frac{3}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{3}{x} \cdot \ln \left(\frac{4x+3}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \cdot \ln \left(\frac{4x+3}{3} \right) \right) \rightarrow 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{4x+3}{3} \right)}{\frac{x}{3}} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4x+3}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{4x+3} = \frac{4}{4 \cdot 0 + 3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+3}{3} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{4}{3}} \text{ tür.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x)^{\frac{1}{\ln(x-2)}}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) e^{-2} B) e^{-1} C) 1 D) e E) e^2

Çözüm

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x)^{\frac{1}{\ln(x-2)}} \rightarrow 0^0$ belirsizliği vardır.

$$y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{\ln(x-2)}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(x^2 - 2x)}{\ln(x-2)}$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x^2 - 2x)}{\ln(x-2)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x}}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x-2}{x^2-2x} \cdot (x-2) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-2}{x} = \frac{2 \cdot 2 - 2}{2} = 1 \text{ olduğundan}$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x)^{\frac{1}{\ln(x-2)}} = e$ olarak bulunur.

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \right)^{2 \sin x}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) e^2 B) e C) 1 D) 0 E) $\frac{1}{2}$

Çözüm

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \right)^{2 \sin x} \rightarrow \infty^0$ belirsizliği vardır.

$$y = \left(\frac{3}{x} \right)^{2 \sin x} \Rightarrow \ln y = 2 \cdot \sin x \cdot \ln \frac{3}{x}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \sin x \cdot \ln \frac{3}{x} \right) \rightarrow 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{3}{x}}{\frac{1}{\sin x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x^2} \cdot \frac{3}{x}}{-\cos x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{x^3}}{-\cos x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right) = 0$$

olduğundan

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \right)^{2 \sin x} = e^0 = 1$ olarak bulunur.

Yanıt C

1 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$ ifadesinin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 3x - 4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ ifadesinin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

8 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 16}$ ifadesinin değerinin 2 olması için b kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM:

9 $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

10 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ ifadesinin sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

12 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx - \sin nx}{mn x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

16 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \cos(\pi \cdot x) + 1}{x - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

17 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \cdot \ln x - e}{1 - \ln x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

18 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{x - 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x + 1) + x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(x - 1)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

**YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER VE TERS FONKSİYON,
PARAMETRİK FONKSİYON, KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ**

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevli olsun. Eğer f fonksiyonun türevi olan f' fonksiyonunda x_0 da türevli ise, f' 'nin türevi olan bu fonksiyona f nin ikinci türevi denir ve f'' ile gösterilir.

f'' fonksiyonunda x_0 noktasında türevli ise bu türeve f nin üçüncü türevi denir ve f''' ile gösterilir.

Genel olarak f fonksiyonunun $(n-1)$ inci türevi olan $f^{(n-1)}$ fonksiyonu x_0 noktasında türevli ise, bu türeve f nin n inci türevi denir ve $f^{(n)}$ ile gösterilir.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{birinci türev}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ikinci türev}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{üçüncü türev}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \quad n \text{ inci türev}$$

▲ Not: LEIBNITZ KURALI

$F(x) = g(x) \cdot h(x)$ şeklinde iki fonksiyonun n inci mertebeden türevi

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) \text{ olur.}$$

ÖRNEK SORU

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 12$$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f'''(-1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 120 B) 110 C) 106 D) 102 E) 96

Çözüm

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 12$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 4x - 1$$

$$f''(x) = 40x^3 - 24x + 4$$

$$f'''(x) = 120x^2 - 24 \text{ olur ve}$$

$$f'''(-1) = 120(-1)^2 - 24$$

$$f'''(-1) = 96 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f(x) = \cos 4x$ olduğuna göre, $f''\left(\frac{\pi}{12}\right)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -8 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

Çözüm

$$f(x) = \cos 4x$$

$$f'(x) = -4 \sin 4x$$

$$f''(x) = -16 \cos 4x$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -16 \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -16 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -8 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$f(x) = \frac{1}{x}$ olduğuna göre, $f^{(20)}(-1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 20! B) $\frac{20!}{2}$ C) $\frac{20!}{4}$ D) $-\frac{20!}{2}$ E) -20!

Çözüm

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot (-2) x^{-3} = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot (-3) x^{-4} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot x^{-1-n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

olduğundan

$$f^{(20)}(x) = (-1)^{20} \cdot \frac{20!}{x^{20+1}} = \frac{20!}{x^{21}} \text{ olup}$$

$$f^{(20)}(-1) = \frac{20!}{(-1)^{21}} = -20! \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$$f(x) = e^{2x} + x^4 - x^2 - 5$$

fonksiyonunun 107. inci türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $107! \cdot e^{2x}$ B) e^{2x} C) $(e^{2x})^{107!}$
D) $2^{107} \cdot e^{2x}$ E) $107 \cdot e^{2x}$

Çözüm

$$f(x) = e^{2x} + x^4 - x^2 - 5$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4x^3 - 2x$$

$$f''(x) = 2 \cdot 2e^{2x} + 12x^2 - 2$$

$$f'''(x) = 8 \cdot e^{2x} + 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 16 \cdot e^{2x} + 24$$

$$f^{(5)}(x) = 32 \cdot e^{2x} = 2^5 \cdot e^{2x}$$

$$f^{(6)}(x) = 2^5 \cdot 2e^{2x} = 2^6 \cdot e^{2x}$$

$$f^{(107)}(x) = 2^{107} \cdot e^{2x} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

A, B $\subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu birebir ve örten olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ da türevli ve $f'(x_0) \neq 0$ ise,

$f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında süreklidir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 11$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(-2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\sqrt[3]{169}$ B) $\sqrt[3]{18}$ C) $\sqrt[3]{13}$ D) $\frac{\sqrt[3]{13}}{13}$ E) $\frac{\sqrt[3]{13}}{39}$

Çözüm

I. Yol:

$$f(x) = y = x^3 + 11$$

$$\Rightarrow x^3 = y - 11 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 11}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \left(\sqrt[3]{x - 11} \right)' = \left[(x - 11)^{\frac{1}{3}} \right]'$$

$$= \frac{1}{3} (x - 11)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x - 11)'$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x - 11)^2}} = (f^{-1})'(-2) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(-2 - 11)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{13}}{39} \text{ olarak bulunur.}$$

II. Yol:

$$f^{-1}(-2) = x \text{ olsun. Buradan}$$

$$f(x) = -2 \Rightarrow x^3 + 11 = -2 \Rightarrow x^3 = -13$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{-13}$$

$$f(x) = x^3 + 11 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(\sqrt[3]{-13}) = 3 \cdot \sqrt[3]{13^2}$$

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{-13})} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{13^2}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{39}$$

olarak bulunur.

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(-12)$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{1}{14}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm

$$f^{-1}(-12) = x \text{ olsun. Buradan}$$

$$f(x) = -12 \Rightarrow x^3 + 2x = -12$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 6) = 0$$

$$x^2 - 2x + 6 \neq 0 \text{ olduğundan } x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

$$f^{-1}(-12) = -2$$

$$f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 2 = 14 \text{ ve}$$

$$(f^{-1})'(-12) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{14} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$y = f(x)$ fonksiyonu,

$$\begin{cases} x = U(t) \\ y = V(t) \end{cases} \text{ şeklinde parametrik}$$

olarak verilsin. U ve V fonksiyonları t parametresine göre türevli fonksiyonlar ise y fonksiyonunun x e göre türevi,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{V'(t)}{U'(t)} \text{ şeklindedir.}$$

ÖRNEK SORU

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} + 1 \\ y = 2t^3 \end{cases} \text{ biçiminde tanımlanan}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun $t = 1$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $18\sqrt[3]{2}$ B) $18\sqrt[3]{3}$ C) 18 D) 16 E) 9

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{(2t^3)'}{(\sqrt[3]{t} + 1)'} = \frac{6t^2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}} = 18t^2 \cdot \sqrt[3]{t^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 18t^2 \cdot \sqrt[3]{t^2}$$

$$t = 1 \text{ için } f'(x) = 18 \cdot 1^2 \cdot \sqrt[3]{1^2} = 18$$

olarak bulunur.

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$\left. \begin{array}{l} x = t + 4 \\ y = t^3 - 2t + 4 \end{array} \right\} \text{biçiminde tanımlanan}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 108 B) 106 C) 104 D) 102 E) 100

Çözüm

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 2}{1} = 3t^2 - 2$$

$$x = t + 4 \Rightarrow -2 = t + 4 \Rightarrow t = -6 \text{ olur.}$$

$$t = -6 \text{ için}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ in değeri } 3 \cdot (-6)^2 - 2 = 106 \text{ bulunur.}$$

Yanıt B

PARAMETRİK FONKSİYONLARIN YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLERİ

$$\left. \begin{array}{l} x = U(t) \\ y = V(t) \end{array} \right\} \text{biçiminde tanımlı } y = f(x) \text{ fonksiyonu için}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \text{ biçimindedir. İkinci türev ise,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t))^3} \text{ şeklindedir.}$$

ÖRNEK SORU

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t + 3 \\ y = 3t^2 - 1 \end{array} \right\} \text{olduğuna göre, } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ifadesinin sonucu aşağıdaki-}$$

lerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t}{2} = 3t \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (3t)$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} (3t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \sin 3t \\ y = 3 \cos t \end{array} \right\} \text{olduğuna göre, } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ifadesinin } t = 0 \text{ için değeri}$$

kaçtır?

- A) $-\frac{1}{24}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 \sin t}{6 \cos 3t} = \frac{-\sin t}{2 \cos 3t} \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-\sin t}{2 \cos 3t} \right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{-\sin t}{2 \cos 3t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2 \cos t \cos 3t + 6 \sin t \sin 3t}{4 \cos^2 3t}}{6 \cos 3t}$$

$$= -\frac{2 \cos t \cos 3t + 6 \sin t \sin 3t}{24 \cos^3 3t}$$

$$t = 0 \text{ için}$$

$$= -\frac{2 \cos 0 \cos 0 + 6 \sin 0 \sin 0}{24 \cos^3 0}$$

$$= -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12} \text{ bulunur.}$$

Yanıt B

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$F(x,y) = 0$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara kapalı fonksiyonlar denir.

• $y = 3x^4 - x^3 - x + 5$ fonksiyonu açık fonksiyondur.

• $2x^2 + 3xy^2 + xy + 4 = 0$ fonksiyonu kapalı fonksiyondur.

• $x + \frac{3}{y-4} = 2$ fonksiyonu hem açık hem kapalı fonksiyondur.

Kapalı fonksiyonların türevi hesaplanırken birkaç değişik yol kullanılır.

1) Mümkünse verilen bağıntıdan y çekilir ve türev alınır.

2) $F(x,y) = 0$ bağıntısında terim terim türev alınır. Bu şekilde türev alınırken y nin x e bağlı bir fonksiyon olduğuna dikkat edilir.

3) $F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y}$ bağıntısından faydalanılır.

ÖRNEK SORU

$$x^4 - 2x^3 - y + x - 5 = 0$$

şeklinde tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonun $x = -1$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -12 B) -10 C) -9 D) -8 E) -6

Çözüm

I. Yol:

$$x^4 - 2x^3 - y + x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 1$$

$$f'(-1) = -9$$

II. Yol:

$$x^4 - 2x^3 - y + x - 5 = 0$$

Terim terim türevi alınırsa,

$$4x^3 - 6x^2 - y' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 1$$

$$f'(-1) = -9$$

III. Yol:

$$F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$= -\frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{-1} = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$x = -1 \text{ için } (-1)^4 - 2(-1)^3 - y + (-1) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow y = -3$$

$$\Rightarrow F'(-1, -3) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 1 = -9$$

olarak bulunur.

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$x^3 + y^2 - 4xy - x - 3 = 0$$

eşitliği ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3x^2 - 4y}{4x + 2y}$

B) $\frac{3x^2 - 4y - 1}{x + 2y}$

C) $\frac{3x^2 - 4y + 1}{4x - 2y}$

D) $\frac{3x^2 - 4y + 1}{2x - 4y}$

E) $\frac{3x^2 - 4y - 1}{4x - 2y}$

Çözüm

$$F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$= -\frac{3x^2 - 4y - 1}{2y - 4x} = \frac{3x^2 - 4y - 1}{4x - 2y}$$

olarak bulunur.

Yanıt E

- 1 $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 5x - 6$ olduğuna göre,
 $f(x)$ in 5. türevi nedir?

ÇÖZÜM:

- 2 $y = e^{2x}$ olduğuna göre, $\frac{d^{30}y}{dx^{30}}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

- 3 $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ifadesinin n. türevi nedir?

ÇÖZÜM:

- 4 $y = \cos^2 3x$ olduğuna göre,
 $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

- 5 $y = \sin x - \cos x$ olduğuna göre,
 $\frac{d^{15}y}{dx^{15}}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

- 6 $f: \mathbb{R} - \{\frac{2}{5}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{3}{5}\}$
 $f(x) = \frac{3x+7}{5x-2}$ fonksiyonu için,
 $(f^{-1})'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 7 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(3x+7) = 2x+10$ olduğuna göre,
 $f^{-1}(x)$ in $x=2$ deki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 8 $f(x) = x^3 - 5$ olduğuna göre,
 $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x=3$ deki türevinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

9 $f: (5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ olduğuna göre,
 $(f^{-1})'(\sqrt{11})$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

10 $f(x) = \sin 2x$ olduğuna göre,
 $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

11 $f(x) = 2\sin 3x$ olduğuna göre,
 $(f^{-1})'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

12 $f: [1, \infty) \rightarrow [5, \infty)$ olmak üzere,
 $f(x) = x^2 - 2x + 6$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(9)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

13 $x^3 - y^3 - x + y = 5$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

14 $x^2y + xy^2 + 4x - 5y + 3 = 0$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

15 $f(x,y) = x^3 + y^2 - 12$ fonksiyonunun $A(2,2)$ noktasındaki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM:

16 $2x^2 - 2y^2 + x + y = 2$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $(1,1)$ noktasındaki değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

17 $2x^3 + 3y^2 - 4kx - 7y + 5 = 0$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $(0,2)$ noktasındaki değerinin k türünden eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

18 $x^{2y} + y^{2x} - 2 = 0$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 1$ ve $y = 1$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

19 $\sin^3 x = \cos^2(y-x)$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

20 $\sqrt{x} \cos 2y + \sqrt{y} \sin 2x = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

21 $x^2 \cos y - y^2 \sin x = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

22 $x = t^3 + 2$ ve $y = 5t^2 - 3$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin t türünden eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

23 $x = 3t^2 - 2t$ ve $y = t^3 - 10t$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t = 2$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

24 $x = \sqrt{t^3}$ ve $y = \sqrt[3]{2t^2 + 6}$ olduğuna göre, $t = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

25 $x = 2^{2t} - 3$ ve $y = 3^{3t} + 1$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t = 0$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

26 $x = e^{2t} - 3t$, ve $y = 2t - \ln t$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t = 1$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

27 $x = 5\cot t$ ve $y = -3\tan t$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t = \frac{\pi}{4}$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

30 $y = x^2$, $x = t^2 - 2$ ve $t = 3u - 2$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{du}$ ifadesinin $u = 1$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

28 $y = u^3 - u^2$ ve $u = \sin x$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = \frac{\pi}{6}$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

31 $y = x^2 - 2x + 3$, $x = t^2 - t$ ve $t = 2u + 1$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{du}$ ifadesinin $u = 0$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

29 $y = 2\sin 2\theta$ ve $x = 4\cos 2\theta$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $\theta = \frac{\pi}{12}$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

32 $x = 6y + 1$, $y = 3t^2 - 1$ ve $t = \sin z$ olduğuna göre,
 $\frac{dx}{dz}$ ifadesinin $z = \frac{\pi}{6}$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

33 $x = t^2 + 2$ ve $y = 3t^5 - t^2$ olduğuna göre,

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin t türünden eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

34 $x = 2t^2 + 1$ ve $y = 3t^3 + 2t$ olduğuna göre,

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $t = 1$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

35 $y = -\cos t$ ve $x = \sin t$ olduğuna göre,

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$\bullet f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$f(x) = \log_a(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$\bullet f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \log_5(x^2 - x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\log_5 e}{2}$ B) $\frac{\log_5 e}{3}$ C) $\frac{2}{3} \log_5 e$
D) $\frac{3}{2} \log_5 e$ E) $\log_5 e$

Çözüm

$$f(x) = \log_5(x^2 - x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} \cdot \log_5 e$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x} \cdot \log_5 e$$

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2^2 - 2} \cdot \log_5 e = \frac{3}{2} \log_5 e \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$f(x) = \log_3(9 \cdot \cos x)$ fonksiyonunun $x = 0$ daki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\log_3 e$ B) $-2 \cdot \log_3 e$ C) 0
D) $\log_3 e$ E) $\sqrt{3} \cdot \log_3 e$

Çözüm

$$f(x) = \log_3(9 \cdot \cos x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(9 \cos x)'}{9 \cos x} \cdot \log_3 e$$

$$f'(x) = \frac{-9 \cdot \sin x}{9 \cdot \cos x} \cdot \log_3 e$$

$$f'(x) = -\tan x \cdot \log_3 e$$

$$f'(0) = -\tan 0 \cdot \log_3 e = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$$f(x) = \ln(x + \sqrt[3]{x+4})$$

fonksiyonunun $x = 4$ daki türevi kaçtır?

- A) $\frac{13}{73}$ B) $\frac{13}{72}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $-\frac{11}{72}$ E) $\frac{11}{73}$

Çözüm

$$f(x) = \ln(x + \sqrt[3]{x+4})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x + \sqrt[3]{x+4})'}{x + \sqrt[3]{x+4}}$$

$$f'(x) = \frac{[x + (x+4)^{1/3}]'}{x + \sqrt[3]{x+4}} = \frac{1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2}}}{x + \sqrt[3]{x+4}}$$

$$f'(4) = \frac{1 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(4+4)^2}}}{4 + \sqrt[3]{4+4}} = \frac{1 + \frac{1}{12}}{4+2} = \frac{13}{72} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$f(x) = \log_{2x} 5$ olduğuna göre,

$f'\left(\frac{5}{2}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\log_5 e$ B) $-\log_5 \sqrt[3]{e}$ C) $-\log_5 \sqrt[5]{e^2}$
D) $-\log_5 \sqrt[5]{e}$ E) $-\log_3 \sqrt[5]{e}$

Çözüm

$$f(x) = \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x}$$

Bölümün türevinden,

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(\log_5 2x)'}{(\log_5 2x)^2} = \frac{-\frac{2}{2x} \cdot \log_5 e}{(\log_5 2x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\log_5 e}{x \cdot (\log_5 2x)^2}$$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{\log_5 e}{\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\log_5 \left(2 \cdot \frac{5}{2}\right)\right)^2}$$

$$= -\frac{\log_5 e}{\frac{5}{2} \cdot (\log_5 5)^2} = -\frac{2}{5} \log_5 e = -\log_5 \sqrt[5]{e^2} \text{ bulunur.}$$

Yanıt C

ÜSTEL FONKSİYONUN TÜREVİ

Tanımli olduğu aralıkta;

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. $\ln e = e^x$
 $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$
 $f(x) = a^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$

ÖRNEK SORU

$f(x) = e^{2x-1}$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

- A) e^x B) e^{2x-1} C) $-2e^{2x-1}$ D) $2e^{2x-1}$ E) $2e^{x-1}$

Çözüm

$$f(x) = e^{2x-1}$$

$$f'(x) = (2x-1)' \cdot e^{2x-1} \cdot \ln e$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x-1} \text{ bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$f(x) = 2^{4x+3}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2^{11} B) $2^{11} \cdot \ln 2$ C) $2^{13} \cdot \ln 2$
 D) $\frac{2^{11}}{\ln 2}$ E) $\frac{2^{13}}{\ln 2}$

Çözüm

$$f(x) = 2^{4x+3} \Rightarrow f'(x) = (4x+3)' \cdot 2^{4x+3} \cdot \ln 2$$

$$f'(x) = 4 \cdot 2^{4x+3} \cdot \ln 2$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2^{11} \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(2) = 2^{13} \cdot \ln 2 \text{ bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$f(x) = e^{2x} \cdot \sin^4\left(\frac{x}{4}\right)$ olduğuna göre, $f'(2\pi)$ aşağıdakilerden

hangisidir?

- A) 0 B) $e^{4\pi}$ C) $2 \cdot e^{2\pi}$ D) $4 \cdot e^{2\pi}$ E) $2 \cdot e^{4\pi}$

Çözüm

$$f(x) = e^{2x} \cdot \sin^4\left(\frac{x}{4}\right)$$

Çarpımın türevinden,

$$\Rightarrow f'(x) = (e^{2x})' \cdot \sin^4\left(\frac{x}{4}\right) + e^{2x} \cdot \left[\sin^4\left(\frac{x}{4}\right)\right]'$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin^4\left(\frac{x}{4}\right) + e^{2x} \cdot 4 \cdot \sin^3\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$f'(2\pi) = 2e^{4\pi} \cdot \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^{4\pi} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(2\pi) = 2e^{4\pi} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f(x) = \frac{e^x + 3x - 7}{e^x - 2x + 4}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) $\frac{4}{25}$ B) $\frac{6}{25}$ C) $\frac{8}{25}$ D) $\frac{14}{25}$ E) $\frac{18}{25}$

Çözüm

$$f(x) = \frac{e^x + 3x - 7}{e^x - 2x + 4}$$

Bölümün türevinden,

$$f'(x) = \frac{(e^x + 3)(e^x - 2x + 4) - (e^x - 2)(e^x + 3x - 7)}{(e^x - 2x + 4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(e^0 + 3)(e^0 - 2 \cdot 0 + 4) - (e^0 - 2)(e^0 + 3 \cdot 0 - 7)}{(e^0 - 2 \cdot 0 + 4)^2}$$

$$= \frac{4 \cdot 5 - (-1)(-6)}{25} = \frac{14}{25} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$f(x) = e^{\sin x - \cos x}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2e$ C) $\sqrt{2}$
 D) $\sqrt{2} e$ E) $2\sqrt{2} e$

Çözüm

$$f(x) = y = e^{\sin x - \cos x}$$

$$f'(x) = e^{\sin x - \cos x} \cdot (\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ = e^0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

▲ Uyarı: Bir üstel fonksiyonda hem taban hem de kuvvet x e bağlı birer fonksiyon ise logaritmik türev alınır. $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ ise $f(x)$ in türevi alınırken her iki tarafın önce e tabanına göre logaritması daha sonra her iki tarafın türevi alınır.

ÖRNEK SORU

$f(x) = x^{3x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^{3x} \cdot \ln x$ B) $x^{3x}(\ln x + 1)$
C) $x^{3x}(\ln x + 3)$ D) $x^{3x}(\ln x + 2)$
E) $x^{3x}(3 \ln x + 3)$

Çözüm

$f(x) = y = x^{3x}$ eşitliğinde her iki tarafın e tabanına göre logaritması alınıp sonra her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\ln y = \ln(x^{3x})$$

$$\ln y = 3x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (3x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot (3x)$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot 3x$$

$$y' = y(3 \ln x + 3)$$

$$y' = f'(x) = x^{3x} \cdot (3 \ln x + 3) \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E**ÖRNEK SORU**

$f(x) = x^{\tan x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{\pi}{4}$ B) $2 \cdot \ln \frac{\pi}{4} + 1$ C) $\frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{\pi}{4} + 1$
D) $\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{\pi}{2} + 2$ E) $\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{\pi}{2} + 1$

Çözüm

$$f(x) = y = x^{\tan x} \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \ln y = \tan x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (1 + \tan^2 x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \tan x$$

$$y' = y \left[(1 + \tan^2 x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \tan x \right]$$

$$y' = f'(x) = x^{\tan x} \left[(1 + \tan^2 x) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \tan x \right]$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ için } \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^1 \cdot \left[(1 + 1^2) \cdot \ln \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \cdot 1 \right] \\ = \frac{\pi}{4} \left(2 \cdot \ln \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \right) \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{\pi}{4} + 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C**ÖRNEK SORU**

$f(x) = (\cos x)^x$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm

Her iki tarafın e tabanına göre logaritması alınırsa,

$$y = (\cos x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(\cos x)^x$$

$$\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln(\cos x)$$

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{y'}{y} = \ln(\cos x) + x \cdot \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right)$$

$$y' = y \left(\ln(\cos x) - x \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$y' = (\cos x)^x (\ln(\cos x) - x \tan x)$$

$$f'(0) = (\cos 0)^0 (\ln(\cos 0) - 0 \cdot \tan 0)$$

$$f'(0) = 1 \cdot (\ln 1 - 0)$$

$$f'(0) = 0 \text{ bulunur.}$$

Yanıt C

- 1 $f(x) = \log_5 (3x + 2)$ olduğuna göre,
 $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

- 2 $f(x) = \log_7 (2x + 5)$ olduğuna göre,
 $f'(7)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 3 $f(x) = \log_2 (x^2 - 6x + 16)$ fonksiyonu için $f'(k) = 0$ olduğuna göre, k kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 4 Tanımlı olduğu aralıkta,
 $f(x) = \log_5 \left(\frac{x-5}{x+3} \right)$ fonksiyonu için,
 $f'(a) = \frac{8}{9 \ln 5}$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 5 $f(x) = \ln^3 (2x^2 + 4)$ olduğuna göre,
 $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 6 $\frac{d}{dx} \ln(\ln(x^2 + 1))$ ifadesinin $x = 3$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $y = \sin(\ln(3x + 1))$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir?

çözüm:

8 $f(x) = \ln(\sin x) \cdot \ln(\cos x)$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

çözüm:

9 $f(x) = \arctan(\ln x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ kaçtır?

çözüm:

10 $f(x) = 5^{2x} + 4^x$ olduğuna göre,
 $f'(x)$ nedir?

çözüm:

11 $f(x) = 2^x + 3^{2x} + 5x^2$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

çözüm:

12 $f(x) = e^{\sin x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

çözüm:

13 $f(x) = 7^{x+2}$ olduğuna göre, $f'(x)$ in $f(x)$ cinsinden değeri nedir?

çözüm:

14 $y = e^{\cos^3(2x+1)}$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir?

ÇÖZÜM:

15 $y = 5^{\sin x} + 7^{\cos x}$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = \frac{\pi}{2}$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

16 $\frac{d}{dx} ((x^2 - 2x + 1) \cdot (e^{3x}))$ ifadesinin $x = 2$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

17 $f(x) = 2^{-x} + 3^{2x} \ln(x+1)$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

18 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

19 $f(x) = x^2 \ln(e^{\ln(2x)} - \ln x)$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $f(x) = 5^{x^3-5x}$ olduğuna göre, $f''(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

21 $f(x) = x^x + 2^x$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

22 $f(x) = (2x)^{x^2}$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

23 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^{x^2 + 5x}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

24 $f(x) = (\ln x)^{x^4}$ olduğuna göre, $f'(e)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

25 $f(x) = (\tan x)^{2x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

26 $f(x) = (\cos 2x)^{\sin^3 x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Özel tanımlı fonksiyonlar her noktada sürekli olmadıklarından türevlenemez. Fonksiyonların kritik noktalarında sağdan ve soldan türevine bakılır.

TEK VE ÇİFT FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

a) $\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon denir ve çift fonksiyonun türevi tek fonksiyondur.

b) $\forall x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir ve tek fonksiyonun türevi çift fonksiyondur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + x$

fonksiyonun tek fonksiyon, türevinin ise çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + (-x)$$

$$= -x^5 - x^3 - x$$

$$= -(x^5 + x^3 + x)$$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

$$f(x) = x^5 + x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f'(-x) = 5(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 1$$

$\Rightarrow f'(-x) = f'(x)$ olduğundan f' fonksiyonu çift fonksiyondur.

PERİYODİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$f(x) = f(x+T)$ oluyor ise f fonksiyonu periyodik fonksiyondur ve periyodu T dir.

$$f(x) = f(x+T) \Rightarrow f'(x) = (x+T)' \cdot f'(x+T)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot f'(x+T)$$

$\Rightarrow f'(x) = f'(x+T)$ olduğundan periyodik fonksiyonun türevi de periyodiktir ve periyodu T dir.

Örnek:

$$f(x) = \sin(4x+7)$$

fonksiyonun türevinin periyodunu bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sin(4x+7)$ fonksiyonun periyodu,

$$T = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan türevinin periyodu da } \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y' = |f(x)| \text{ ise } y' = \begin{cases} -f'(x), & f(x) < 0 \\ f'(x), & f(x) > 0 \end{cases}$$

Çift katlı kökler dışında mutlak değer in içini sıfır yapan x değerleri için türev yoktur. Çünkü sağdan ve soldan türevleri farklı değerleri alır.

Örnek:

$f(x) = |5x|$ fonksiyonun $x_0 = 0$ da (varsa) türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = 0 \Rightarrow |5x| = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

noktası kritik noktadır. Dolayısıyla sağdan ve soldan türeve bakılır.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|5x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5x}{x} = -5$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|5x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x}{x} = 5$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ olduğundan fonksiyonun $x_0 = 0$ için türevi yoktur.

Örnek

$f(x) = x \cdot |x^2 - 2x|$ fonksiyonun $x_0 = 0$ noktasında (varsa) türevini bulunuz.

Çözüm

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = 2$$

x	0	2
$x^2 - 2x$	+	-

$x_0 = 0$ için kritik olduğundan sağdan ve soldan türeve bakılır.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (x^2 - 2x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2x) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(-x^2 + 2x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x) = 0$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ olduğundan

$f'(0) = 0$ olarak bulunur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot |x| + 10x$ fonksiyonun $x_0 = 0$ da varsa türevini bulunuz.

Çözüm

$x_0 = 0$ için kritik olduğundan sağdan ve soldan türeve bakılır.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 \cdot (-x) + 10x) - 0}{x - 0} = 10$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2(x) + 10x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 10)}{x} = 10$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 10$ olduğundan $f'(0) = 10$ olarak bulunur.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x^3 - 2x^2 - 3x|$ fonksiyonun $x_0 = 4$ de varsa türevini bulunuz.

Çözüm

$x_0 = 4$ noktası kritik nokta değildir.

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$$

x	-1	0	3
$x^3 - 2x^2 - 3x$	-	+	-

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3 - 2x^2 - 3x) - (4^3 - 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x - 20}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + 2x + 5)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 2x + 5) = 4^2 + 2 \cdot 4 + 5 = 29$$

$\Rightarrow f'(4) = 29$ olarak bulunur.

SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(g(x))$ signum fonksiyonu verilsin. $f(x)$ in türevi,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & g(x) \neq 0 \\ \text{yok}, & g(x) = 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 7x - 8)$ fonksiyonu için varsa $f'(0)$, $f'(8)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm

$$x = 0 \text{ için } f(0) = \text{sgn}(0^2 - 7 \cdot 0 - 8) = \text{sgn}(-8) = -1$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$x = 8 \text{ için } f(8) = \text{sgn}(8^2 - 7 \cdot 8 - 8) = \text{sgn}(0) = 0$$

olduğundan fonksiyon $x = 8$ de süreksizdir. Dolayısıyla $f'(8)$ yoktur.

ÖRNEK SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x^2 + 7x + 12)$ fonksiyonunun türevli olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-4, -3]$ B) $[-\infty, -4]$
C) $[-3, \infty]$ D) $[3, 4]$
E) $\mathbb{R} - \{-4, -3\}$

Çözüm

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x^2 + 7x + 12)$ fonksiyonu süreksiz olduğu noktalarda türevsizdir.

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -4 \text{ ve } x_2 = -3$$

Dolayısıyla f fonksiyonu, $\mathbb{R} - \{-4, -3\}$ aralığında türevlidir.

Yanıt E

TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f(x) = |g(x)|$ fonksiyonunda $g(x) \in \mathbb{Z}$ ise bazı özel durumların haricinde $f(x)$ in türevi yoktur. Çünkü bu fonksiyon bu noktalarda süreksizdir. Bu durumda $f(x)$ in soldan ve sağdan türevine bakılarak türevin olup olmadığı incelenir.

$g(x) \notin \mathbb{Z}$ için fonksiyon sürekli olduğundan $f(x)$ in türevi vardır ve bu türev sıfırdır.

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x + 7|$$

fonksiyonun varsa $x = 0$ ve $x = \frac{2}{5}$ deki türevlerini bulunuz.

Çözüm

$x = 0$ için $|3x + 7|$

ifadesi bir tam sayıdır. Dolayısıyla $x = 0$ için kritiktir. Sağdan ve soldan türeve bakılır.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|3x + 7| - 7}{x} = \infty$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|3x + 7| - 7}{x} = 0$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ olduğundan

$f'(0)$ yoktur.

$x = \frac{2}{5}$ için $|3x + 7|$ ifadesi bir tam sayı değildir.

$$f'\left(\frac{2}{5}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{|3x + 7| - 8}{x - \frac{2}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{|3x| - 1}{x - \frac{2}{5}}$$

$x, \frac{2}{5}$ değerine sağdan ve soldan yaklaştığında $|3x|$ ifadesi

1'e yaklaşır. Dolayısıyla pay sıfır payda sıfırdan farklı olur ve

$$f'\left(\frac{2}{5}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{|3x| - 1}{x - \frac{2}{5}} = 0 \text{ olur.}$$

Örnek

$$f(x) = |x^2 - 6x + 11|$$

fonksiyonunun varsa $x_0 = 2$ deki türevini bulunuz.

Çözüm

$x_0 = 2$ için tam değer fonksiyonunun içi tam sayı olduğundan fonksiyonun sağdan ve soldan türevlerine bakılır.

$$f(x) = |(x-3)^2 + 2| = |(x-3)^2| + 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|(x-3)^2| + 2 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|(x-3)^2| - 1}{x - 2} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-3)^2| + 2 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-3)^2| - 1}{x - 2} \\ &= \frac{0}{0^-} = 0 \end{aligned}$$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan $x_0 = 2$ de türevi yoktur.

1 Aşağıda verilen fonksiyonların $(0, 10)$ aralığındaki hangi x değerleri için türevi yoktur?

- a) $f(x) = |x^2 - 3x|$
 b) $f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor$
 c) $f(x) = \text{sgn}(x^2 - x - 6)$
 d) $f(x) = |x + 2| + \text{sgn}(x - 2) + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$

ÇÖZÜM:

2 $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 1) + |x^2 + x - 20|$ fonksiyonu x in kaç farklı değeri için türevsizdir?

ÇÖZÜM:

3 $f(x) = |x^2 + x - 6| + x + 1$ fonksiyonunun varsa $x = -3$ deki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

4 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$f(x) = |3x^2 + 1|$ olduğuna göre,
 $f'(x)$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

5 $f(x) = |x^2 - 3x|$ olduğuna göre,
 $f'(1) + f'(5)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = |x^2 - 2x|$ olduğuna göre,
 $f'(2^-)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $f(x) = |e^{\cos x} - 1|$ olduğuna göre,
 $x = \frac{\pi}{2}$ için türevi varsa kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 8 $f(x) = 2x + \operatorname{sgn}(x^2 + 1) - |x - 3|$
fonksiyonunun türevsiz olduğu noktanın ordinatı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 9 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x - 3)$ fonksiyonunun türevli olduğu aralık nedir?

ÇÖZÜM:

- 10 $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 2) + \left\lfloor \frac{x+3}{4} \right\rfloor + |x^2 - 2|$ olduğuna göre,
varsa $f'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 11 $f(x) = |x^2 - 1| + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \operatorname{sgn}(3x + 2)$ fonksiyonu
veriliyor.
Buna göre, $f'(x)$ ifadesinin $x = \frac{3}{2}$ için değeri varsa, kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 12 $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + |x^2 - 1| + \operatorname{sgn}(4x + 3)$
olduğuna göre, varsa $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 13 $f(x) = |x^2 - 6x| - x^2 \cdot \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor + \operatorname{sgn}(x + 2)$
fonksiyonu veriliyor. Buna göre, varsa $f'(5)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 14 $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{sgn}(x - 1)$ fonksiyonu veriliyor.
Buna göre, varsa $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

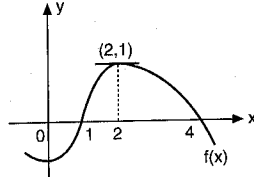
- 15 $f(x) = \begin{cases} \lfloor \ln x \rfloor, & x > 0 \\ \sqrt{2x^2 - x + 1}, & x \leq 0 \end{cases}$
olduğuna göre, $f'(3) + f'(-1)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

KONU İLE İLGİLİ SINAV SORULARI

1. Yandaki eğri, $f(x)$ fonksiyonuna aittir. $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

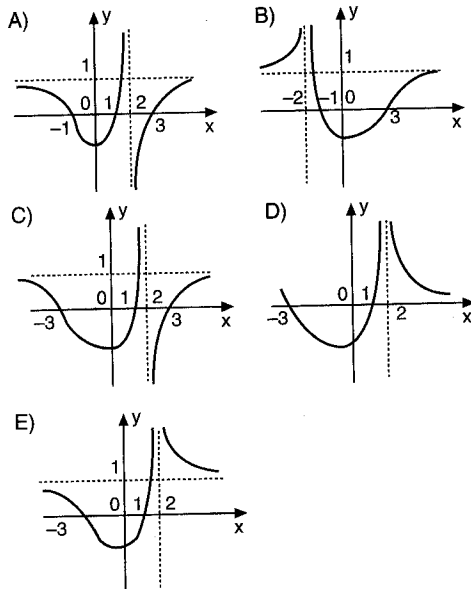


- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) 1 E) 2

2. $f(x)$ fonksiyonu, (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan ise, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta azalandır?

- A) $\frac{1}{f^2(x)}$ B) $f^2(x)$ C) $f^3(x)$
D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $2f(x)$

3. $y = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisi olabilir?



4. $f(x) = mx^2 + (m+1)x + m - 1$ fonksiyonunun, $x = -\frac{3}{4}$ te bir minimumu olduğuna göre, m kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

5. $y = x^3$ fonksiyonunun grafiğindeki $A(2,8)$ noktasından çizilen teğet, eğriyi başka bir B noktasında kesiyor. B nin apsisi kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) -3 D) -4 E) -5

6. $0 < a < b$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f'(x) > 0$ olduğuna göre, $\forall x \in (a, b)$ için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) $f(x) > f(a)$ B) $f(x) > 0$ C) $f(x) < 0$
D) $f(x) > f(b)$ E) $f(x) = f(b)$

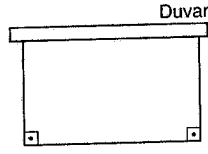
7. $4x^2 + 9y^2 = 144$ elipsinin, $\frac{x}{8} + \frac{y}{16} = 1$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi kaçtır?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ D) $\frac{16}{9}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8. f ve g bir I aralığında türevli olan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar için, aşağıdaki bağıntılardan hangisi sağlanırsa, $g(x).f(x)$ çarpımı, I aralığında artandır?

- A) $f'(x) > g(x)$
B) $f(x).g(x) > f'(x).g(x)$
C) $f'(x).g(x) > -f(x).g'(x)$
D) $f(x).g'(x) > f'(x).g(x)$
E) $f(x).g(x) > -f'(x).g'(x)$

9. Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 80 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m² olabilir?



- A) 800 B) 1000 C) 1200 D) 1400 E) 200

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\sin(\pi x)}$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

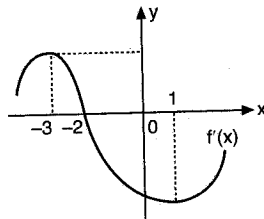
11. $\lim_{y \rightarrow x} \frac{y^3 - x^3}{y^2 - x^2}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) $\frac{3}{2}x$ C) 2x D) $\frac{2}{3}x$ E) $\frac{x}{2}$

12. $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = |2 - x| + 2$ olduğuna göre, $f(1) + f(3)$ ün değeri nedir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. Yandaki eğri, $f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevinin eğrisidir. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi, $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum (yerel maksimum, minimum) noktalarından birinin apsisi?



- A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

14. Denklemi, $y = x^2 - ax + 1$ olan parabol veriliyor. a'nın hangi pozitif değeri için, başlangıç noktasından parabole çizilen teğetler birbirine dik olur?

- A) 4 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) 2

15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}$ değeri kaçtır?

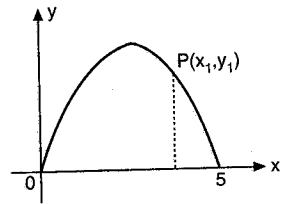
- A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

16. $y = f(x)$ fonksiyonu, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ olarak tanımlı olduğuna göre, $f'(2)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

17. Şekildeki $P(x_1, y_1)$ noktası, denklemi

$y = x(5 - x)$ olan parabol üzerindedir. x_1 in hangi değeri için $x_1 + y_1$ maksimumdur?



- A) 2,50 B) 2,75 C) 3,00 D) 3,25 E) 4,00

18. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$ değeri nedir?

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cos(\pi x) + 1}{x - 1}$ değeri nedir?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

20. $e^{-x} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (x^3 e^x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

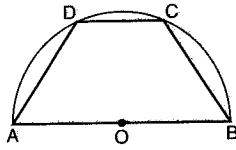
- A) $x^3 + 3x^2 + 3x$ B) $x^3 + 3x^2 + 6x$
C) $x^3 + 3x^2 + 9x$ D) $x^3 + 6x^2 + 6x$
E) $x^3 + 9x^2 + 3x$

21. $f(x) = x^3 - 3x + 8$ fonksiyonunun, $[-1, 2]$ aralığında alabileceği en küçük değer kaçtır?
A) -1 B) 6 C) 8 D) 10 E) 11

22. $a > 0$ olmak üzere, $y = \frac{x^3}{|x|}$ fonksiyonunun, $x = a$ ve $x = -a$ noktalarındaki teğetleri için, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
A) Birbirine diktir.
B) Birbirine paraleldir.
C) 30° lik bir açıyla kesişir.
D) x ekseninde sabit bir noktada kesişir.
E) y ekseninde sabit bir noktada kesişir.

23. $y = \frac{4}{x}$ fonksiyonunun, başlangıç noktası en yakın olan noktasının, başlangıç noktasına uzaklığı kaç birimdir?
A) $4\sqrt{2}$ B) 4 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) 2

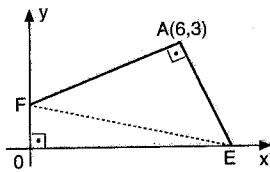
24. $|AB| = 2$ birim olan bir yarı çemberin içine çizilen ABCD yamuğunun alanı, en büyük değerini aldığı anda, yüksekliği kaç birim olur?



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. $f(x) = (x-1)^2(2x-t)$ ve $f'(0) = 0$ olduğuna göre, t kaçtır?
A) 4 B) 2 C) 0 D) -2 E) -4

26. Köşesi $A(6, 3)$ olan şekildeki dik açının kenarları, koordinat eksenlerini E ve F kesmektedir. Buna göre, $|EF|$ nin en küçük değeri kaçtır?



- A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 4 D) 5 E) $3\sqrt{5}$

27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

28. $\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $18\sin 6x$ B) $18\cos 6x$
C) $6(\sin 3x + \cos 3x)$ D) $6(\sin 3x - \cos 3x)$
E) $6\cos^2 3x$

29. $\frac{d}{dx}[\ln(\cos x)]$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\tan x$ B) $-\sec x$ C) $-\cot x$
D) $-\frac{1}{\sin x}$ E) $\frac{1}{\cos x}$

30. O, $[AB]$ üzerinde,

$AE \perp AB$,

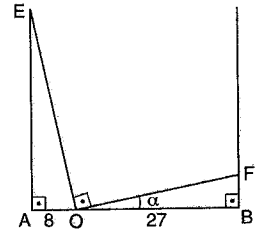
$BF \perp AB$

$OE \perp OF$

$|AO| = 8$ birim

$|OB| = 27$ birim ve

$m(\angle FOB) = \alpha$ veriliyor.



Yukarıdaki verilere göre, $\tan \alpha$ nın hangi değeri için, $|OE| + |OF|$ toplamı en küçüktür?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

31. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^4 - 16}$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

32. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

33. $f(x) = 2x^2 + 3$ olduğuna göre, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

34. $f(3x - 5) = 2x^2 + x - 1$ olduğuna göre, $f'(1) + f(1)$ kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

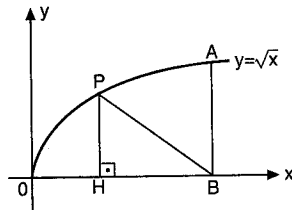
35. Denklemi, $f(x) = \sin(\cos 5x)$ olan eğrinin, $x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

36. Denklemi, $y = x^3 + ax^2 + (a+7)x - 1$ olan eğrinin, dönüm (büküm) noktasının apsisi 1 olduğuna göre, ordinatı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

37.



Denklemi, $y = \sqrt{x}$ olan şekildeki parabolün, A ve P noktalarının x eksenini üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla B(36, 0) ve H(x, 0) dir.

HBP üçgeninin alanı, x in hangi değeri için en büyüktür?

- A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2\sin x - 1}{\cos 2x + \sin 2x - 1}$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

39. $f(x) = \ln(3x - 1)$ olduğuna göre, $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)$ kaçtır?

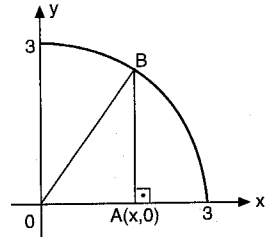
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

40. Denklemi, $f(x) = \frac{x^2 + mx}{x - 1}$ olan fonksiyonun, $x = 3$ noktasında ekstremum noktasının olması için m kaç olmalıdır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

41. Şekilde, denklemi

$x^2 + y^2 = 9$ olan dörte bir çemberin, B noktasının, x eksenini üzerindeki dik izdüşümü A(x, 0) noktasıdır. Buna göre, OAB üçgeninin alanı, x in hangi değeri için en büyüktür?



- A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D) 1 E) 2

42. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\sin 4x}$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

43. $f(x) = \ln(3^{\cos 5x})$ olduğuna göre, $f'(\frac{3\pi}{10})$ kaçtır?

- A) $2\ln 3$ B) $5\ln 3$ C) $\ln 5$ D) $2\ln 5$ E) $\ln 15$

44. $x = 6\sin 3t$ ve $y = 6\cos^2 3t$ denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun, $x = 3$ apsisi noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

45. $y = \sin x + 2\cos x$ in, $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında aldığı en büyük

değer kaçtır?

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

46. $y = -x^2$ eğrisi üzerinde bulunan $P(-3, 0)$ noktasına en yakın olan noktasının apsisi kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 0 E) -1

47. $\lim_{c \rightarrow x} \frac{16x^2 - 16c^2}{4\sin(x-c)}$ değeri, aşağıdakilerden hangisine eşit-

tir?

A) 4 B) 16 C) $8x$ D) $18x$ E) $32x$

48. $f(x) = e^{\tan x}$ olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$ değeri,

aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-e^{\frac{3}{2}}$ B) $\frac{1}{3}e^{-1}$ C) $-e^{-1}$ D) $2e$ E) $3e^2$

49. k nın hangi değeri için, $y = \frac{kx+1}{x+k}$ fonksiyonu, daima eksilen-

dir (azalandır)?

A) $-\infty < k < -2$ B) $-2 < k < -1$
C) $-1 < k < 1$ D) $1 < k < 2$
E) $0 < k < 2$

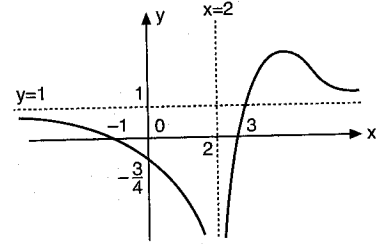
50. $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + nx \text{ ile tanımlıdır. } f \text{ fonksiyonunun}$$

$x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ noktalarında yerel ekstremumu olduğuna göre, $n - m$ farkı kaçtır?

A) -1 B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{17}{5}$

51.

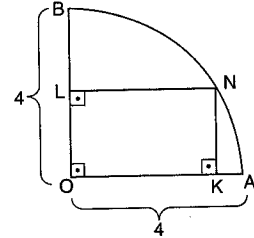


Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

A) $y = \frac{x^2 + x - 2}{(x-2)^2}$ B) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-2)^2}$ C) $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{2(x+2)}$

D) $y = \frac{x^2 - x - 3}{(x+2)^2}$ E) $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x-2)^2}$

52.



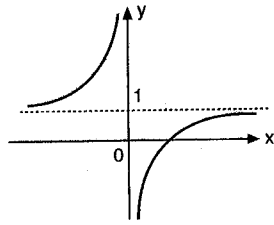
Yukarıdaki şekilde, merkezi O, yarıçapı $|OA| = |OB| = 4$ cm olan dörte bir çember yayı üzerindeki bir N noktasından yarıçaplara inen dikme ayakları K ve L dir. Buna göre, OKNL dikdörtgeninin en büyük alanı kaç cm^2 dir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 6 E) 8

53. $f(x) = x^2 - 7x + 14$ parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 3

54. Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?



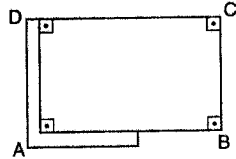
- A) $y = \frac{x-1}{x}$ B) $y = \frac{x+1}{x}$ C) $y = \frac{x}{x-1}$
D) $y = \frac{x+1}{x-1}$ E) $y = \frac{x-1}{x+1}$

55. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 + kx$ tir. $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, +\infty)$ aralığında artan olduğuna göre, k için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) $k = -7$ B) $k = -1$ C) $k < -2$
D) $k < 6$ E) $k > 12$

56. $3y - 3yx - 2x = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{3y-2}{3-y}$ B) $\frac{3y+2}{3-3x}$ C) $\frac{x-2}{3+x}$
D) $\frac{3x+2}{3y}$ E) $\frac{3x-2}{1-3y}$

57.



Dikdörtgen biçiminde bir bahçenin [AD] kenarının tümü ile [AB] kenarının yarısına, şekildeki gibi duvar örülmüş; kenarlarının geriye kalan kısmına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 120 metre olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?

- A) 1200 B) 1250 C) 2300 D) 2350 E) 2400

58. $y = x^3 + ax^2 + b$ fonksiyonunun grafiği apsisi -4 olan noktada x - eksenine teğet olduğuna göre, b nin değeri kaçtır?
- A) 30 B) 24 C) 16 D) -32 E) -48

59. $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonu ile ilgili olarak,

- I. Büküm (dönüm) noktası vardır.
II. Yerel minimum noktası vardır.
III. Yerel maksimum noktası vardır.

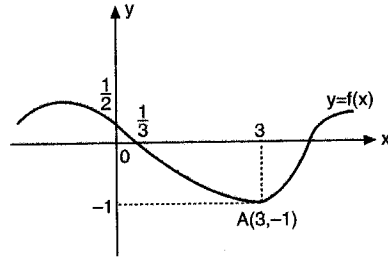
yargılarından hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

60. a bir parametre (değişken) olmak üzere, $y = x^2 - 2ax + a$ eğrilerinin ekstremum noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = -x^2 + 2x$ B) $y = -x^2 + x$ C) $y = x^2 - 2x$
D) $y = x^2 + x$ E) $y = x^2 + 2x$

61.



Yukarıdaki grafikte, $A(3, -1)$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktası ve $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ olduğuna göre, $h'(3)$ ün değeri kaçtır? ($h'(x)$, $h(x)$ in türevi)

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

62. $0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $y = \arcsin \frac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır? ($\arcsin \theta = \sin^{-1} \theta$)

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

63. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ her noktada türevli bir fonksiyon ve

$f'(1) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h} \text{ kaçtır?}$$

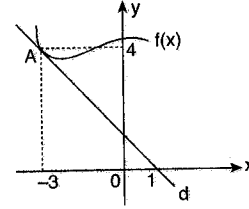
- A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

64. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalır?

- A) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ B) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ C) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

65.



Şekildeki d doğrusu, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine A noktasında teğettir.

$h(x) = x \cdot f(x)$ olduğuna göre, $h'(-3)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 7

1.B	2.D	3.E	4.A	5.D	6.A	7.C	8.C	9.A	10.E	11.B	12.A	13.D	14.B
15.C	16.B	17.C	18.B	19.E	20.D	21.B	22.B	23.D	24.D	25.E	26.E	27.C	28.B
29.A	30.E	31.E	32.D	33.D	34.B	35.C	36.D	37.A	38.B	39.D	40.B	41.A	42.A
43.B	44.A	45.D	46.E	47.C	48.D	49.C	50.C	51.B	52.E	53.D	54.A	55.E	56.B
57.E	58.D	59.A	60.B	61.E	62.C	63.A	64.D	65.E					

TEST 1

FONKSİYON TÜREVİ

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x - 7$ olduğuna göre, $f'(1)$ in değeri kaçtır?
A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

2. $f(x) = (x^2 - 3x - 1)^3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f(x)$ in $x = -1$ deki türevi kaçtır?
A) -135 B) -27 C) 0 D) 27 E) 135

3. $f(x) = (x - 3)^2 \cdot (x + 2)^3$ olduğuna göre, $f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$
 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ olduğuna göre,
 $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ daki türevi kaçtır?
A) -5 B) -3 C) 0 D) 3 E) 5

5. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $f(x^2 - 2) = 4x^3 - 3x^2 + 1$ olduğuna göre, $f'(7)$ nin değeri kaçtır?
A) 90 B) 75 C) 45 D) 30 E) 15

6. $f(x) = \sqrt{x^3 + 4}$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{\sqrt{x^3 + 4}}$ B) $\frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 4}}$ C) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 4}}$
D) $\frac{x^2}{2\sqrt{x^3 + 4}}$ E) $-\frac{x^2}{2\sqrt{x^3 + 4}}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ B) $\frac{4}{3\sqrt{9}}$ C) $\frac{4}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4}{3\sqrt{9}}$ E) $\frac{4}{9\sqrt{3}}$

8. $y = x^5 - 4x^4 - 5x^2 - 6x - 1$ olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $x = 1$ için değeri kaçtır?
A) -27 B) -30 C) -33 D) -35 E) -38

9. $f(x) = \frac{(3x-1)^2}{2x-3}$ olduğuna göre,

$f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) -4 B) -1 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{16}{9}$ E) $\frac{25}{9}$

10. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2+9}}$ olduğuna göre,

$f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

11. $f(x) = (3x^2 + 4)^5$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $30x (3x^2 + 4)^5$ B) $30x (6x + 4)^4$
C) $30x (3x^2 + 4)^4$ D) $30x (3x^2 + 4)^3$
E) $30x (3x^2 + 4)$

12. $f(x) = \frac{5}{x^4}$ olduğuna göre,

$f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-20x^5$ B) $-20x^{-5}$ C) $-20x^4$
D) $20x^5$ E) $20x^{-5}$

13. $f(x) = 6x^3 - 8x^2 - 9x + 10$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -18 B) -9 C) 0 D) 9 E) 18

14. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{5x - 1}$ olduğuna göre,

$f'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{19}{16}$ D) $\frac{23}{16}$ E) $\frac{25}{16}$

15. $f(2x - 7) = 3x^2 - 4x$ olduğuna göre, $f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

16. $f(x) = 5x^3 - 6x^2 - ax - b$ ve $f'(2) = 34$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18. $f(x) = 4x^3 - ax^2 - bx - c$ olduğuna göre, $f'''(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $12x^2 - 2ax$ C) $24x$ D) 24 E) $24x - 2a$

19. $f'(x) = 4x^3 - 24x - 5$ olduğuna göre, $f''(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -24 B) -12 C) 0 D) 12 E) 24

20. Aşağıdakilerden hangisi $f(x) = (3x^2 + 1)^5$ fonksiyonunun türevidir?

A) $30x^2 (2x^2 + 1)$ B) $30x (3x + 1)^3$
C) $30x(3x^2 + 1)^4$ D) $30x^2(3x + 1)^4$
E) $30 (3x^2 + 1)$



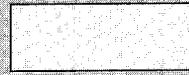
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 2**FONKSİYON TÜREVİ**

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -6 B) -2 C) 0 D) 2 E) 6

2. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6 & , x < 3 \\ ax^2 + bx - 24 & , x \geq 3 \end{cases}$

fonksiyonu her noktada türevlenebilir olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu;

$f(x) = 2x^2 - \sqrt{x} + 3$ ile tanımlıdır. Buna göre,

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{63}{4}$ B) $\frac{65}{4}$ C) $\frac{33}{2}$ D) 15 E) 17

4. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1} \right)^5$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri

kaçtır?

- A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

5. $y = \frac{1}{(2x-3)^4}$ olduğuna göre, y' nedir?

- A) $\frac{8}{(2x-3)^5}$ B) $-\frac{2}{(2x-3)^4}$ C) $\frac{4}{(2x-3)^5}$

- D) $-\frac{8}{(2x-3)^5}$ E) $\frac{4}{(2x-3)^3}$

6. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$ olduğuna göre, $f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -10 B) -5 C) 0 D) 2 E) 9

7. $f(2x^3 - x^2 + 2x) = x^3 - 2x^2 + 4x$ olduğuna göre, $f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 3

8. $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{14}$ olduğuna göre, $f'(-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -7 B) -6 C) 5 D) 6 E) 7

9. $f(3-2x) = 2x^3 + 8x + n$ olduğuna göre, $f'(5)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 14 B) 7 C) 2 D) -4 E) -7

10. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x \geq 1 \\ x^2 + 4 & , x < 1 \end{cases}$

olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonun $x = 1$ deki türevi nedir?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) Yoktur

11. R de türevli f ve g fonksiyonları için,

$$f(3x + 2) = 2x^3. g(1 - 3x) \text{ ve}$$

$f'(5) = 6, g'(-2) = 4$ olduğuna göre, $g(-2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 5 D) 7 E) 12

12. $f(2x - 3) = g(3x^2 - 1) + 5$ ve $f'(1) = 12$ olduğuna göre,

$g'(11)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 1 D) 2 E) 5

13. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3 + (x-2)^3}$ ile tanımlı f fonksiyonu için $f'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) 7

14. $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (3x - a)$ olmak üzere, $f'(-1) = 2$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 0 D) -2 E) -3

15. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{3x + 2}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{5}{64}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{3}{64}$ D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{3}{16}$

16. $f : R - \{4\} \rightarrow R$ fonksiyonu, $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-4}\right)^3$ ile tanımlıdır.

$f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{-15(x+1)^2}{(x-4)^4}$ B) $\frac{-5(x+1)^2}{(x-4)^3}$ C) $\frac{1}{(x-4)^4}$
D) $\frac{15(x+1)}{(x-4)^4}$ E) $3\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^2$

17. $f(3x+1) = 3x^2 - 6x + 3$ olduğuna göre, $f'(4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18. $f'(-2) = 4, f(-2) = 2, g(3)=2$ ve $f(x-3) \cdot g(x^4 + 2) = 4$ olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

- A) -4 B) $-\frac{1}{2}$ C) -1 D) 0 E) $\frac{1}{2}$

19. $f(x) = (x^2 + x)^3 \cdot g(x + 1), g(2) = 1, g'(2) = -1$ olduğuna göre, $f'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 30 B) 28 C) 23 D) 16 E) 14

20. R den R ye tanımlı f ve g fonksiyonları;

$f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = 2x^2 + 5$ ile veriliyor. Buna göre, $(g \circ f)'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -16 B) -4 C) 8 D) 32 E) 40



DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 3**TRIGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ**

1. $f(x) = \sin x - 3\cos 2x$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cos x - 6 \sin 2x$ B) $\cos x - 6\sin 2x$
C) $\cos x + 6 \sin 2x$ D) $-\cos x + 6\sin 2x$
E) $\cos x - 6 \cos 2x$

2. $f(x) = \sin^4(3x + 4)$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\sin^3(3x + 4)$ B) $4\sin^3(3x + 4) \cos(3x + 4)$
C) $12\sin^3(3x + 4)$ D) $12\sin^3(3x + 4) \cos(3x + 4)$
E) $12\sin^4(3x + 4) \cos(3x + 4)$

3. $f(x) = \cos(\sin x)$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin(\sin x) \cdot \cos x$ B) $-\cos(\cos x) \cdot \sin x$
C) $-\sin(\sin x) \cdot \cos x$ D) $\cos(\sin x) \cdot \cos x$
E) $-\sin(\cos x) \cdot \sin x$

4. $f(x) = \sin^4(2x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

5. $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}$ olduğuna göre, $f'''(0)$ ifadesinin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = \arctan(\sin(4x))$ olduğuna göre,

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -4 B) -2 C) -1 D) 2 E) 4

7. $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{2}{x}\right)$ olduğuna göre,

$f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

8. $f(x) = \arcsin(\cot x)$ olduğuna göre $f'(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1 - \cot^2 x}}$ B) $\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1 - \cot^2 x}}$ C) $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1 - \cot^2 x}$
D) $\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{1 - \cot^2 x}$ E) $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$

9. $f(x) = \sin(\cos 2x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) $-\frac{\pi}{2}$ C) 0 D) 2 E) $\frac{\pi}{2}$

10. $f(x) = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ifadesinin

değeri kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

11. $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x \cdot \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ B) $x \cdot \sin x - \cos \frac{1}{x}$
 C) $2x \cdot \cos \frac{1}{x}$ D) $2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$
 E) $2x \cdot \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$

12. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\tan x$ B) $1 + \sin x$ C) $1 + \cos x$
 D) $\frac{1}{1 + \cos x}$ E) $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$

13. $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 4x$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

14. $f(x) = x^2 \cos 3x$ olduğuna göre, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2π B) $-\frac{\pi}{2}$ C) 2π D) 3π E) $\frac{7\pi}{2}$

15. $f(x) = (\tan x + \sin x + 1)^2$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

16. $f(x) = 4\cos^2 x - \sin x$ olduğuna göre, $f''(x)$ nedir?

- A) $8\cos x - \cos x$ B) $4\sin x \cdot \cos x + \cos x$
 C) $-8\cos 2x + \sin x$ D) $2\cos x \cdot (\sin 2x + 1)$
 E) $\cos x (8\sin x - 1)$

17. $\frac{d^2(\cos^2 2x)}{dx^2}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-2\cos 4x$ B) $-4\sin 4x$ C) $-8\cos 4x$
 D) $4(\cos 2x + \sin 2x)$ E) $8(\cos 2x - \sin 2x)$

18. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$f(x) = \arcsin(\cos x)$ olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) 1 B) 0 C) $-\cot x$ D) $-\tan x$ E) -1

19. $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = \arctan(\cot x)$ ile tanımlı olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) $-\cot x$ E) $\cos x$

20. $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < 0 \\ 2\sin x + 3\cos x & , x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ da türevli olduğuna göre, $(a.b)$ çarpımı kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 6

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

TEST 4

ÜSTEL - LOGARİTMA - LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ olduğuna göre, $f'(e)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) e D) $2e$ E) e^2

2. $f(x) = \ln(2x - 2\sqrt{x^2 - 1})$ fonksiyonunun türevi nedir?

- A) $2\sqrt{1+x^2}$ B) $-\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
D) $2\sqrt{x^2-1}$ E) $2x\sqrt{x^2-1}$

3. $f(x) = x^3 \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ olduğuna göre, $f'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\ln\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$ B) $3\ln\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$ C) $3\ln\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$
D) $\ln\sqrt{3}$ E) $\ln\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$

4. $f(x) = 5^{-2 \cdot \log_5 2x}$ olduğuna göre, $f'''(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) 0 D) 4 E) $\frac{11}{36}$

5. $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4 - x^2})$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = \ln(3x + 2)$ ve $g(x) = \operatorname{arccot} x$ olduğuna göre, $(g \circ f^{-1})'(2)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{1+e^2}$ B) $\frac{1-e^2}{1+e^2}$ C) $\frac{1+e^2}{1-e^2}$
D) $\frac{e}{e^4-4e^2+3}$ E) $\frac{-3e^2}{e^4-4e^2+13}$

7. $f(x) = \ln(x^2 \sqrt[3]{2x+3})$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{23}{6}$ B) 4 C) $\frac{25}{6}$ D) $\frac{29}{6}$ E) 5

8. $f(x) = \ln\left(\frac{(x^2+x+1)}{(2x+1)}\right)$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

9. $f(x) = \ln(x \cdot \tan x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{4}{\pi} + 2$ B) $\frac{1}{\pi} + 4$ C) $4\left(\frac{2}{\pi} + 1\right)$
D) $\frac{1}{4\pi}$ E) $\frac{4}{\pi}$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = 2^{\cos x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\ln 2$ C) 0 D) -2 E) $-\ln 2$

11. $f(x) = \tan(e^{-x})$ olduğuna göre, $f\left(\ln\frac{3}{\pi}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{4\pi}{3}$ B) $-\pi$ C) $e^{-\frac{\pi}{3}}$
D) $\tan\left(\ln\frac{3}{\pi}\right)$ E) $1 + \tan^2\left(\frac{3}{\pi}\right)$

12. $f(x) = e^{x^2+1}$, $g(x) = \ln(ax)$ olduğuna göre, $(gof)'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4
D) $-2e^{-2}$ E) $4e^{-1}$

13. $f(x) = \cos^2 x + e^{\tan^2 x} - 3^{\sin x}$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $-2\ln 3$ C) $-3\ln 3 + 1$
D) $-\ln 3 + 1$ E) $-\ln 3$

14. $f(x) = 3^{2x-1}$ olduğuna göre, $f'(x)$ in $f(x)$ türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{f(x)}{2}$ B) $\frac{f(x)}{\ln 3}$ C) $2f(x)$
D) $\ln 3f(x)$ E) $2\ln 3f(x)$

15. $f(x) = e^{\sin x} \cdot x^2$ fonksiyonun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x \cdot e^{\sin x} (x \cdot \cos x + 2)$
B) $e^{\sin x} (x^2 \cos x + 2)$
C) $e^{\cos x} (x \cdot \cos x + 2)$
D) $x \cdot e^{\sin x} (2 - x \cdot \cos x)$
E) $e^{\sin x} (2x + \cos x)$

16. $f(x) = x^{3x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $3x \cdot x^{2x}$ B) $x^{3x} \cdot (\ln x + 1)$ C) $3x \cdot \ln(x + 1)$
D) $3x \cdot x^{3x-1}$ E) $3x^{3x} \cdot (\ln x + 1)$

17. $f: \left(-\frac{3}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = (2x + 3)^{x-2}$ ile tanımlıdır.

Buna göre, $f'(-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -6 B) -3 C) 1 D) 3 E) 6

18. $f(x) = (x + 2)^{x-2}$ olduğuna göre, $f'(-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 0 D) -2 E) -3

19. $\frac{d}{dx} (x^x)$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) $x^x (2x \cdot \ln + 1)$ B) $\ln x + x^2$
C) $x^x \cdot (\ln x + 1)$ D) $-x \cdot (\ln x + x)$
E) $\ln x - x^2$

20. $f(x) = (x - 1)^{x^2+1}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 5

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

TEST 5**TERS - KAPALI - PARAMETRİK TÜREV**

1. $f(x) = x^3 + 5x$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(6)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{3}{14}$

2. $f: (-\infty, 0] \rightarrow [-3, \infty)$, $f(x) = x^2 - 3$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun türevinin $x = -2$ için değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -1 E) -2

3. $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ fonksiyonu $f(x) = \sin^3 x$ ile tanımlıdır.

Buna göre, $(f^{-1})'(\frac{1}{8})$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

4. $3x - 4xy + 2y - 5 = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4y-3}{2-4x}$ B) $\frac{4y+3}{2-4x}$ C) $\frac{4y-3}{2+4x}$

D) $\frac{-4y+3}{2-4x}$ E) $\frac{4y+3}{2+4x}$

5. $2x^2 - 3y^3 - 4y + 2px = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $(1, 1)$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{9}{13}$

6. $2x^2 - y^2 - 3x + y + 1 = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4x-3}{2y-1}$ B) $\frac{4x}{2y-1}$ C) $\frac{4}{2y-1}$

D) $\frac{4}{1-2y}$ E) $\frac{4x+3}{2y-1}$

7. $f(x, y) = 2x^2y - 2xy^2 + 3y + 4$ fonksiyonunun $(1, 1)$ noktasındaki türevi kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 2

8. $\sin xy + \cos xy + xy = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{y}{x}$ B) $-\frac{y}{x}$ C) $\frac{2y}{x}$ D) -2 E) 2

9. $2yx - x^2 - y^2 + 1 = 0$ olduğuna göre, y' nedir?

A) $2y$ B) 1 C) 0 D) -1 E) $-2x-y$

10. $x \cdot \tan y + y \cdot \tan x + e^{x+y} = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x = 0$ ve $y = 0$ için eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{e}$ E) e

11. $y^2 - 3x - e^{x^2} + \sin(4x + 2y) = 0$ ifadesinde $(x, y) = (0, 0)$ için $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

12. $y \sin x = x + \cos y$ olduğuna göre, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ noktasında $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\pi^2}{4}$ E) $\frac{\pi^2}{2}$

13. x ve y değişkenler olmak üzere; $y = t^2 - 2t$ ve $x = t^2 + t$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) $\frac{2t}{t+1}$ B) $\frac{3t-1}{t}$ C) $\frac{t+1}{t-1}$
D) $\frac{2(t-1)}{2t+1}$ E) $\frac{t-2}{2t+1}$

14. $x = t^3 + 7$

$y = \ln t^2$ olduğuna göre, $t = \frac{1}{3}$ için, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 9 B) 15 C) 18 D) 27 E) 36

15. $x = e^{t^2} \cdot \sin t$

$y = e^{t^2} \cdot \cos t$ olduğuna göre, $t = \pi$ için $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin değeri nedir?

- A) e B) -2π C) 1 D) 2π E) $e^{-2\pi}$

16. $x = t^2 - t$

$y = 2t^2 - t$

olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $t = 1$ için sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 3 E) 4

17. $y = 3t^4 - t$

$x = t^2 - 3t$ olmak üzere, $t = 1$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 35 B) 27 C) $\frac{27}{2}$ D) $\frac{35}{2}$ E) 58

18. $x = t - 1$ ve

$y = t^3 - 3t^2 - 4t$

olduğuna göre, $t = \frac{1}{3}$ için, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 4 D) 6 E) 8

19. $y = e^{-4x}$ olduğuna göre,

$x = \ln 2$ için $\frac{d^{18}y}{dx^{18}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2^{32} B) -2^{31} C) -2^{30} D) 2^{30} E) 2^{32}

20. $y = 2x^{11} - 5x^6 + 9x^7$ olduğuna göre, $\frac{d^{12}y}{dx^{12}}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) $22x$ B) 22 C) 0 D) $11! \cdot 2$ E) $11! \cdot x$



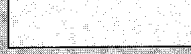
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 6**ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ**

1. $f(x) = |x^2 - 6x + 4|$ olduğuna göre, $f'(5) + f'(6)$ toplamı kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 1) + \left\lfloor \frac{x}{2} - 1 \right\rfloor$ olduğuna göre, $f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{sgn}(x - 3) + |x^2 - 1|$ olduğuna göre, $f'(-2)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) -16 B) -8 C) -4 D) 0 E) 8

4.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sgn}(x - 3) + 3x & , x \geq 1 \\ \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor + 2x^3 + 3x + 2 & , x < 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - 2) - f(-2)}{h}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) Yoktur B) 12 C) 21 D) 27 E) 30

5. $f(x) = 2x^3 - |x - 1| + \lfloor x \rfloor + \operatorname{sgn}(x + 1)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) 0 C) $\frac{5}{3}$ D) 3 E) $\frac{8}{3}$

6. $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (2x^2 - 1)^2$ olduğuna göre, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

7. $f(x) = \lfloor x^3 + 3x + 5 \rfloor \cdot e^{x^3}$ olduğuna göre, $f'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) Yoktur B) 0 C) e D) 3e E) 3

8. $y = \lfloor 2x + 5 \rfloor + \operatorname{sgn}(x^2 - 9)$ fonksiyonu aşağıdaki noktalardan hangisinde türevlidir?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

9. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi $x = 3$ noktasında türevlidir?

- A) $y = \operatorname{sgn}(x - 3)$ B) $y = \lfloor 2x + 5 \rfloor$

- C) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 9)$ D) $y = \frac{\lfloor 2x + 1 \rfloor}{|x - 3|}$

- E) $y = \operatorname{sgn}(x^3 - 6)$

10. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| \frac{2x^2 + 4x + 1}{-x} \right|$ olduğuna göre,

$f'(-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

11. $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 4) + |x^3 - x|$ fonksiyonunun türevsiz olduğu

noktaların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2\}$ B) $\{-1, 1, 2\}$ C) $\{-2, -1, 1, 2\}$
D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ E) $\emptyset$

12. $f(x) = |x^2 - x - 20| + \text{sgn}(x - 1) + \left\lfloor \frac{x}{2} + 2 \right\rfloor$ olduğuna göre,

$f'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$f(x) = |x| \cdot (3x^2) + |x|$ olduğuna göre, $f'(-\frac{1}{2})$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

14. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} + 5 \right\rfloor + \text{sgn}(x - 4) + |2x^2 - 3|$ olduğuna göre,

$f'(5)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

$$15. f(x) = \begin{cases} |x| \cdot x^2 & , x \leq 0 \\ -x^2 + \text{sgn}(|x^2 - 1|) & , 0 < x < 1 \\ 2^{(x^2)} & , x \geq 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(-\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2}) + f(1)$ toplamı kaçtır?

- A) $\ln 2$ B) $\ln 16$ C) $\ln 16 - 1$
D) $\ln 2 - 2$ E) $\ln 8$

$$16. f(x) = \text{sgn}(x^2 - 3x + 2) + \sqrt[3]{x^2 - 4x - 1} + |x^2 - 6x + 9|$$

fonksiyonunun reel sayılarda türevsiz olduğu noktaların apsisi toplamı kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 3 D) 6 E) 8

17. $f(x) = \lfloor 2x + 3 \rfloor \cdot \sin^2(2x)$ olduğuna göre, $f'(\frac{\pi}{4})$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\pi$ B) $-\frac{\pi}{2}$ C) 0 D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x > 0$ için;

$f(x) = \frac{x-2}{|x|+2}$ olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2}{(x+1)^2}$ B) $\frac{2}{x^2+1}$ C) $\frac{4}{(x+2)^2}$
D) $\frac{4}{x^2+1}$ E) $\frac{4}{(x^2+1)^2}$

$$19. f(x) = |x^2 - 1| + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \text{sgn}(2x + 3)$$

fonksiyonu için $f'(\frac{5}{2})$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Yoktur.

20. $f(x) = 2x \cdot |x^2 - 25|$ olduğuna göre, $f'(4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -64 B) -46 C) 0 D) 64 E) 82

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

TEST 7**L' HOSPİTAL KURALI**

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x^3-x^2-4}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{24}$ C) 1 D) 2 E) $+\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+12}-4}{2-\sqrt[3]{4x}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{4}$ B) -1 C) $-\frac{4}{3}$ D) -2 E) -4

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2+\ln x}{x^3-5x^2+4}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{9}$ C) 0 D) $-\frac{1}{7}$ E) -1

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin 4x - \cos x}{\cos 3x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \ln(2x+1)}{\sin x} \right)$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) 2 E) $+\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{1 - \ln x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2e B) $\frac{1}{e}$ C) $-\frac{1}{e}$ D) -e E) -2e

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(2\pi x)}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) π E) 2π

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\cos x} - 2}{x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) Limit yoktur E) $\ln 2$

9. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan \theta) - 1}{\theta^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) Limit yoktur

10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

11. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{\sin 2x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x + \tan 3x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{2}{9}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) -1 E) $-\infty$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + x}{2^x + x^2}$ ifadesinin varsa eşiti kaçtır?

- A) 1 B) 0 C) -1 D) ∞ E) Limiti yoktur

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin(\pi x)}$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 0 C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{4}{3}$

16. $f(x) = \frac{\ln(1 + 4x + 5x^2)}{4x}$ olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) 2

17. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(3x - 3a)}{x^2 - a^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3a B) 2a C) $\frac{2}{a}$ D) $\frac{3}{2a}$ E) $\frac{5}{2a}$

18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) 2

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$ ifadesinin varsa eşiti kaçtır?

- A) 0 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) Limiti yoktur

20. $a, b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} \right)$ ifadesinin değeri nedir?

- A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}}$ C) $\frac{ab}{\sqrt{1-a^2b^2}}$
D) $\frac{1-a^2}{1-b^2}$ E) $\frac{b}{a}$



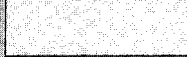
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 8

TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL ANLAMI

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ ile tanımlıdır. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki teğetinin denklemi nedir?

- A) $2y - 4x + 7 = 0$ B) $y - 8x + 5 = 0$
C) $y + 8x + 7 = 0$ D) $y - 8x + 7 = 0$
E) $y - 4x + 7 = 0$

2. $y = 3x^2 - x^3$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $(1, 2)$ noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

- A) $3x - 2y + 3 = 0$ B) $4x - 3y + 4 = 0$
C) $3x - 4y + 5 = 0$ D) $3x - y + 1 = 0$
E) $3x - y - 1 = 0$

3. $y^4 + 3y^2 - 4 = x^3 + 2x + 3$ eğrisinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x + y - 2 = 0$ B) $2y - x - 1 = 0$
C) $2y - x - 3 = 0$ D) $2y + x - 4 = 0$
E) $2x + y + 5 = 0$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ ile tanımlı f fonksiyonunun

$y - 2x - 3 = 0$ doğrusuna paralel olan teğetinin değme noktası nedir?

- A) $(-4, 3)$ B) $(1, 1)$ C) $(2, 3)$
D) $(4, 1)$ E) $(4, 3)$

5. $f(x) = x^3 + \ln(2x^2) + mx$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 4 olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$ fonksiyonunun $x = -2$ den çizilen teğet ve normal denklemlerinin eğimleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{17}{5}$ C) $\frac{19}{5}$ D) $\frac{24}{5}$ E) $\frac{28}{5}$

7. $y = \frac{2x+a}{x-2}$ eğrisinin üzerindeki $A(1, -5)$ noktasından çizilen normalinin eğimi kaçtır?

- A) -7 B) $-\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{7}$ D) 3 E) 7

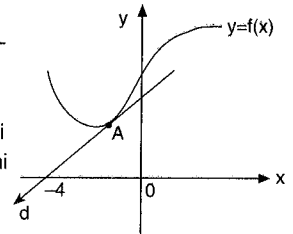
8. Denklemi $x^3y^2 + 2xy^3 - 2x + 4y - 3 = 0$ olan eğrinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4y - 3x - 1 = 0$ B) $4y - 3x + 1 = 0$
C) $3y - 4x - 7 = 0$ D) $3y - 2x - 1 = 0$
E) $4y - 3x - 7 = 0$

9. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ eğrisinin apsisi -1 olan noktasındaki teğetinin denklemi $y = ax + b$ olduğuna göre, $(a+b)$ toplamı kaçtır?

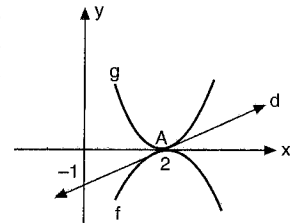
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. $y=f(x)$ eğrisi $A(-1, 2)$ noktasında d doğrusuna teğettir. Buna göre, $g(x)=f(2x^2-3)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?



- A) -4 B) $-\frac{10}{3}$ C) -3 D) $-\frac{8}{3}$ E) -2

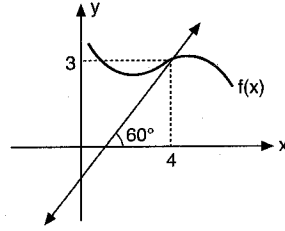
11. Şekilde birinci ve ikinci meriteden türevli f ve g fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir. $A(2, 0)$ noktasından geçen bu eğrilerin ortak teğeti d doğrusudur. A noktası iki eğrinin de bükülme noktasıdır.



$h(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}$ olduğuna göre, $h'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

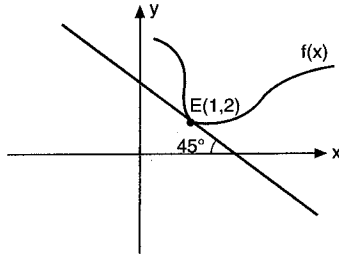
12. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bükülme noktasının koordinatlarının $(4,3)$ olduğu biliniyor. Eğrinin bu noktadaki teğeti Ox eksenini ile pozitif yönde 60° lik açı yapmaktadır.



$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ olduğuna göre, $g'(4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 1

13.



Şekilde $f(x)$ fonksiyonu ile $E(1, 2)$ noktasındaki teğeti verilmiştir.

$h(x) = x^2 f(x) + f^2(x)$ olduğuna göre, $h(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

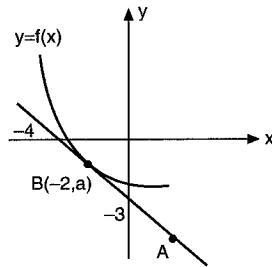
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 5 E) 9

14. AB doğrusu, denklemi

$y = f(x)$ olan eğriye $B(-2, a)$ noktasında teğettir.

$$2g(x) - x^3 = \frac{f(x)}{x}$$

olduğuna göre, $g'(-2)$ kaçtır?

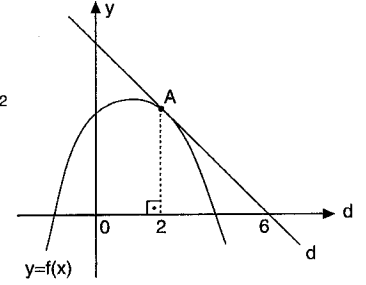


- A) $\frac{51}{8}$ B) $\frac{21}{5}$ C) $\frac{35}{6}$ D) $\frac{41}{3}$ E) $\frac{24}{5}$

15. $f(x) = \ln(2x^2) - \frac{1}{x}$ eğrisine teğet olan doğrulardan eğimi 3 olan doğrunun eğriye değme noktasının apsisi kaç olabilir?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

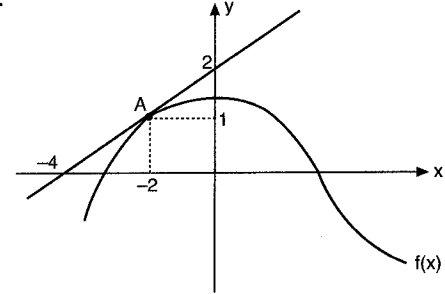
16. $y = f(x)$ parabolü ve d doğrusu

$A(2, 4)$ noktasında teğettir. $g(x) = x^3 \cdot [f(x)]^2$ olduğuna göre, $g'(2)$ değeri kaçtır?



- A) 64 B) 72 C) 96 D) 108 E) 128

17.

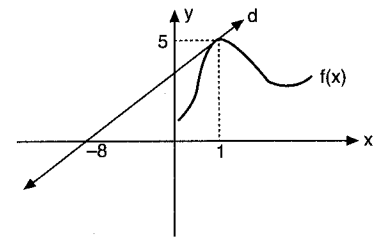


$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(f(x))}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{m}$$

olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

18.



$y = f(x)$ eğrisinin $(1, 5)$ noktasındaki teğeti x eksenini -8 de kesmektedir.

$g(x) = \frac{x - f(x)}{2x - 5}$ olduğuna göre, $g'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{20}{27}$ B) $\frac{8}{27}$ C) $-\frac{1}{9}$ D) $-\frac{2}{9}$ E) $-\frac{1}{3}$



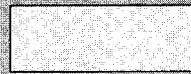
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ

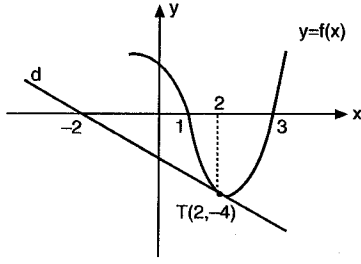


ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 9

TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL ANLAMI

1.



Şekilde d doğrusu, $y = f(x)$ fonksiyonunun $T(2, -4)$ noktasındaki teğettir.

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunun $x=2$ deki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{3}$

2. $y = x^2 + mx + n$ eğrisinin $A(2, 6)$ noktasındaki teğeti $4x - 2y + 1 = 0$ doğrusuna paralel olduğuna göre, $(m + n)$ toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

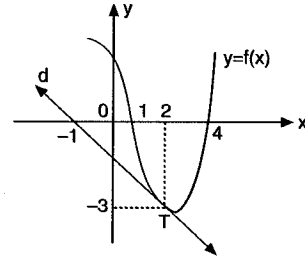
3. $y = 2x - m$ doğrusunun $y = x^2$ parabolüne teğet olabilmesi için, m hangi değeri almalıdır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

4. $f(x) = 3x^2$ parabolüne $(3, 0)$ noktasından çizilen teğetlerin parabole değme noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 18

5.

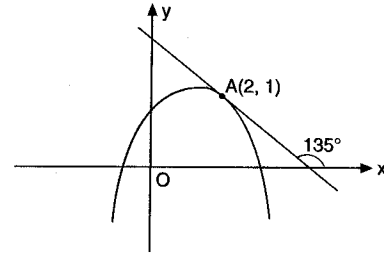


Şekildeki d doğrusu, $y = f(x)$ fonksiyonunun $T(2, -3)$ noktasındaki teğettir.

$g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ fonksiyonunun türevinin $x = 2$ için değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

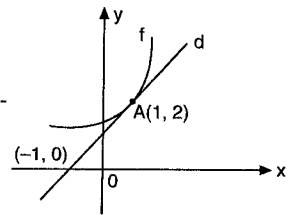


Şekildeki parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ dir.

Parabolün $A(2, 1)$ noktasındaki teğeti Ox eksenine ile 135° lik açı yaptığına göre, $(b + c)$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Şekildeki $f(x)$ fonksiyonunun $A(1, 2)$ noktasındaki teğeti $(-1, 0)$ noktasından geçmektedir. $g(x) = x \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. $y = \frac{1}{2}x^2$ parabolü üzerindeki $A(\frac{3}{4}, \frac{9}{32})$ noktasında çizilen teğet üzerinde, değme noktasından itibaren $|AB| = 10$ birim olacak şekilde bir B noktası alınıyor. A ve B noktalarının apsisi farkının mutlak değeri kaçtır?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

9. $f(x)$ eğrisinin $A(-1, 4)$ noktasındaki teğetinin denklemi $y = 3x - 5$ olduğuna göre, $g(x) = f^3(2x + 3)$ için $g'(-2)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) 48 B) 96 C) 144 D) 288 E) 432

10. $x = t^2 - 3t + 7$
 $y = t^3 - 4t + 1$
parametrik denklemlerle verilen eğrinin $P(5, -2)$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

11. $y = f(x)$ eğrisine üzerindeki apsisi 2 olan bir noktadan çizilen teğet denklemleri $3x + y - 4 = 0$ dir.
 $g(x + 1) = \frac{2x + 1}{f(2 - x)}$ olduğuna göre, $g'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?
A) $-\frac{7}{4}$ B) $-\frac{7}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

12. Yol denklemi $x(t) = at^3 + 4t^2 + 6bt + 5$ olan bir hareketlinin 4. saniyedeki ivmesi 28 m/s^2 olduğuna göre, a kaçtır?
A) 5 B) 3 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 1

13. $y = x^3$ eğrisinin üzerindeki $A(-1, k)$ noktasından çizilen teğet eğriyi kestiği noktanın apsisi kaçtır?
A) 4 B) 3 C) 2 D) -2 E) -3

14. $y = x^2 - ax + b$ fonksiyonu $(-2, 6)$ noktasından geçiyor. Bu fonksiyona, apsisi 2 olan noktasından çizilen teğet, $y = 8x + 10$ doğrusuna paralel olduğuna göre, $(a + b)$ toplamı kaçtır?
A) 12 B) 10 C) 6 D) 4 E) 2

15. $y^2 = 4x$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti $A(0, 2)$ noktasından geçer?
A) (2, 4) B) (4, 2) C) (4, 4)
D) (2, $2\sqrt{2}$) E) (4, $2\sqrt{2}$)

16. $y = \sin(\cos 2x)$ denklemlerle verilen eğrinin $x = \frac{\pi}{4}$ deki normalinin eğimi kaçtır?
A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

17. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun grafiği Ox eksenini $(-1, 0)$ noktasında, Oy eksenini $(0, 1)$ noktasında kesmekte ve Ox eksenine $(2, 0)$ noktasında teğet olmaktadır. Buna göre, $f'(4)$ kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

18. $y = x \cos x^2$ fonksiyonunun $x = 0$ daki normalinin eğimi kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

19. Denklemi $y = x^3 + x^2 + 2$ olan eğrisinin apsisi -1 olan noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $y + x - 1 = 0$ B) $y - x - 1 = 0$ C) $y - x + 1 = 0$
D) $y - x - 3 = 0$ E) $y + x - 3 = 0$

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

TEST 10**ARTAN - AZALAN, EKSTREMUM, MAX-MİN PROBLEMLERİ**

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^3 - mx^2 + 3x + 1$ fonksiyonu m nin aşağıda verilen aralıklarından hangisinde daima artandır?

A) $m > 3$ B) $m < 2$ C) $m < -3$
D) $-3 < m < 3$ E) $-2 < m < 2$

2. $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonu aşağıdaki aralıklardan hangisinde azalandır?

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(2, +\infty)$
D) $(-2, +\infty)$ E) $(-2, 2)$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ ile tanımlı f fonksiyonu veriliyor.
 $\forall x \in \mathbb{R}$ için f artan bir fonksiyon olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m < 2$ B) $m > 2$ C) $-2 < m < 2$
D) $m < 0$ E) $0 < m < 2$

4. $f(x) = x^3 \cdot e^{3x}$ fonksiyonu aşağıda verilen aralıkların hangisinde azalandır?

A) $(-2, 1)$ B) $(-1, 0)$ C) $(-3, 0)$
D) $(-\infty, -1)$ E) $(0, \infty)$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = -5x^3 + ax^2 - 4x + 2$ fonksiyonu a nın aşağıda verilen aralıklarından hangisi için daima azalandır?

A) $a < -1$ B) $-8 < a < 2\sqrt{15}$ C) $0 < a < 8$
D) $-2\sqrt{15} < a < 2\sqrt{15}$ E) $a > 2\sqrt{15}$

6. $y = \ln(5 - 3x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, \frac{5}{3})$ B) $(0, \infty)$ C) $(\frac{5}{3}, \infty)$
D) $(-\infty, 5)$ E) $\emptyset$

7. $f(x)$ fonksiyonu $(0,3)$ aralığında azalan, $g(x)$ fonksiyonu $(0,3)$ aralığında artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi bu aralıkta kesinlikle artandır?

A) $f(x) + g(x)$ B) $g(x) - f(x)$ C) $f(x) - 2g(x)$
D) $f^2(x) \cdot g(x)$ E) $\frac{f(x)}{g(x)}$

8. $f(x) = mx^2 + 2(-m+1)x + m - 3$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ de yerel minimumu olduğuna göre, m kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9. $f(x) = \frac{x^2 - (m+1)x + 3}{x - 2}$ fonksiyonunun $x = 1$ de yerel maksimumu bulunduğuna göre, m kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^3 - nx^2 - 12x - 1$ fonksiyonunda (m, n) sıralı ikilisi ne olursa fonksiyonun $x = 1$ için yerel minimum değeri, $x = -1$ için yerel maksimum değeri olur?

A) $(4, 3)$ B) $(4, 0)$ C) $(4, 2)$
D) $(6, 2)$ E) $(5, 4)$

11. $f(x) = 4x^3 + (a + 1)x^2 - bx - 3$

fonksiyonunun, $(-1, 2)$ noktası yerel maksimum noktası olduğuna göre, $(b-a)$ farkı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

12. $f(x) = x^3 - (m - 1)x^2 + n + 2$ fonksiyonunun dönüm noktası $(1, 0)$ olduğuna göre, $(m + n)$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $y = x^3 - ax^2 + bx + c$ eğrisinin dönüm noktası $(1, 2)$ dir. Eğrinin $(1, 2)$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel olduğuna göre, $(b + c)$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. $f(x) = (a + 2)x^3 + 2x^2 + nx$ fonksiyonunun dönüm noktası ile $g(x) = x^3 - 3x + 1$ fonksiyonunun yerel minimum noktası aynı olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -3 B) $-\frac{8}{3}$ C) -1 D) 1 E) $\frac{7}{3}$

15. $f(x) = 4x^3 + mx^2 + nx - 8$

fonksiyonunun $x = 2$ de dönüm noktası olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -24 B) -18 C) -12 D) -8 E) -2

16. $f(x) = x^4 + ax^2 - bx + 3$ eğrisinin $x = -1$ için dönüm (büküm)

noktası olup bu noktadan çizilen teğet $2x - \frac{y}{2} + 1 = 0$ doğrusuna paralel olduğuna göre, $(b-a)$ farkı kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) 2 D) 8 E) 10

17. $y = ax^4 + 3x^3 + 5$ eğrisinin $x = -1$ deki teğetinin eğimi -7 olduğuna göre, bu eğrinin büküm noktalarından bir tanesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\frac{3}{4}, 5)$ B) $(0, 5)$ C) $(0, -\frac{3}{4})$

- D) $(1, 8)$ E) $(-2, 6)$

18. $x^2 - 6x + (4 + a) = 0$ denkleminin reel köklerinin çarpımının maksimum olması için a kaç olmalıdır?

- A) -5 B) -3 C) 0 D) 3 E) 5

19. $y = x^2 + x - 1$ eğrisinin $y = x - 5$ doğrusuna en yakın noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(0, -1)$ B) $(-1, 0)$ C) $(-1, 1)$

- D) $(0, 1)$ E) $(1, -1)$

20. İki kenarı koordinat eksenleri üzerinde ve bir köşesi $3x + y - 6 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanının alanı kaç birimkaredir?

- A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 4 E) $\frac{9}{2}$

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

TEST 11

ARTAN - AZALAN, EKSTREMUM, MAX-MİN PROBLEMLERİ

1. C(3m, 4m-1) ve D(5m, 5) noktaları veriliyor. C ve D arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

A) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ B) $\frac{4\sqrt{5}}{6}$ C) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

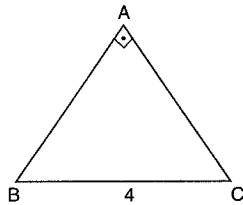
2. $y = x^2 - \sqrt{2-x^3}$ fonksiyonunun $[-1, 0]$ aralığında en küçük değerini alabilmesi için, x kaç olmalıdır?

A) -1 B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$ D) $-\frac{8\sqrt{2}}{5}$ E) 0

3. Yarıçapı $2\sqrt{3}$ br olan kürenin içine yerleştirilebilecek en büyük silindirin hacmi kaç birimküptür? ($\pi = 3$ için)

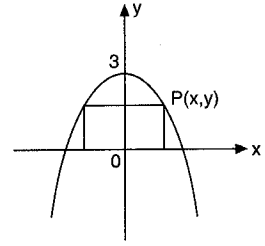
A) 12 B) 24 C) 32 D) 48 E) 96

4. BAC dik üçgeninde $|BC| = 4$ br olduğuna göre, bu üçgenin çevresi en çok kaç birim olabilir?



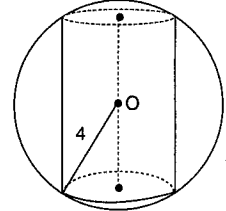
A) $4\sqrt{2} + 1$ B) $8\sqrt{2} + 4$ C) $4\sqrt{2} + 4$
D) $\sqrt{15} + 5$ E) $2\sqrt{3} + 6$

5. Denklemi $y = 3 - x^2$ olan parabol veriliyor. İki köşesi bu parabolün noktası, diğer iki köşesi de Ox ekseninin noktaları olan ve bu eksenin üst tarafında bulunan dikdörtgenin alanı en çok kaç birimkaredir?



A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$ D) 6 E) $5\sqrt{2}$

6. Yarıçapı 4 br olan bir kürenin içine yerleştirilebilen silindirin hacmi en çok kaç π birimküptür?

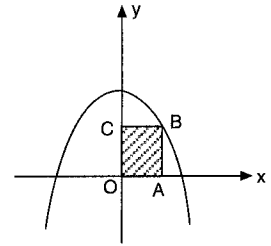


A) $\frac{256\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{128\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{64\sqrt{3}}{9}$ D) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$

7. Şekildeki eğrinin denklemi

$$y = -x^2 + 6 \text{ dır.}$$

OABC dikdörtgenini alanının en büyük (maksimum) olması için, $|OA|$ kaç birim olmalıdır?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

8. $x^2 + (1 + 3a)x + 2 + 2a = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamının minimum olması için a kaç olmalıdır?

A) $-\frac{1}{9}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{7}$

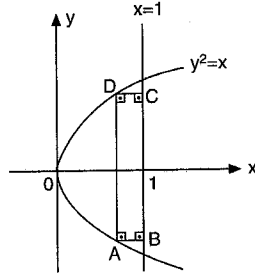
9. Yarçapı 2 br olan bir kürenin içine yerleştirilen dik konilerden hacmi en büyük olanın hacmi kaç birimküptür?

A) $\frac{32\pi}{81}$ B) $\frac{64\pi}{27}$ C) $\frac{32\pi}{9}$ D) $\frac{128\pi}{27}$ E) $\frac{256\pi}{81}$

10. Bir dönel koninin taban yarıçapı 8 br, yüksekliği 12 br dir. Bu koninin içine, koninin eksenine aynı eksenli silindirlere yerleştiriliyor. Hacmi en büyük olan silindirin taban yarıçapı kaç birimdir?

A) $\frac{4}{3}$ B) 5 C) $\frac{16}{3}$ D) 8 E) 12

11. Şekilde görülen $y^2 = x$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu içinde çizilen, köşelerinden ikisi parabol, diğer ikisi $x = 1$ doğrusu üzerinde bulunan ABCD dikdörtgeninin alanının en büyük değeri kaç birimkaredir?



A) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ E) $4\sqrt{3}$

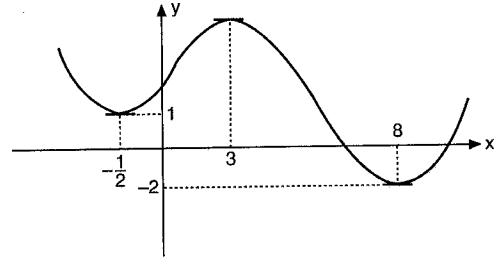
12. Çevresi 32 br olan ikizkenar bir üçgenin alanı en çok kaç birimkare olabilir?

A) 48 B) $\frac{256\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{254\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{241\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{236\sqrt{3}}{4}$

13. $y = a(x - 1)^2$ parabolünün $y = x - 4$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi 3 olduğuna göre, ordinatı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14.



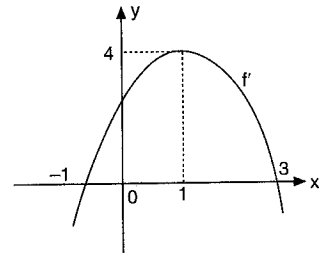
$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $f'(-1) > 0$ B) $f'(-\frac{1}{2}) = 1$ C) $f'(9) < 0$
D) $f'(4) < 0$ E) $f'(-\frac{1}{2}) < 0$

15. $y = 2x^3 - (2a - 3)x^2 + \frac{3}{2}x - 6$ fonksiyonunun daima artan olması için, a hangi aralıkta olmalıdır?

A) $-\infty < a < -5$ B) $0 < a < 3$
C) $-2 < a < 1$ D) $2 \leq a \leq 8$
E) $2 < a < \infty$

16.



Şekilde f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

$y = f(x)$ in yerel maksimum noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4

☐ DOĞRU

☐ YANLIŞ

☐ BOŞ

☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 12

ASİMPTOTLAR VE GRAFİK İNCELEME

1. Denklemi $y = \frac{ax+2}{bx+c}$ olan eğrinin yatay ve dikey asimptotlarının kesim noktası $(-2, 3)$ olduğuna göre, $\frac{c}{a}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

2. $y = \frac{2x^3+1}{x^2-4}$ fonksiyonunun eğik asimptotu ile dikey asimptotlarının kesim noktaları nedir?

A) $(2, 4), (-2, -4)$ B) $(2, 15), (-2, -17)$
C) $(2, 16), (2, -14)$ D) $(2, 15), (-2, 11)$
E) $(2, 15), (-2, 9)$

3. $f(x) = \frac{x^2 + (m-3)x + 2}{x-2}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının ordinatı 5 olduğuna göre, m kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. $(x^2-4).y = x^2-1$ in grafiği için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Dikey asimptotu yoktur, 1 tane yatay asimptotu vardır.
B) Yatay ve dikey asimptot yoktur.
C) 1 yatay ve 2 dikey asimptotu vardır.
D) 1 yatay ve 1 dikey asimptotu vardır.
E) 2 yatay ve 2 dikey asimptotu vardır.

5. $f(x) = \frac{4x^2+mx+n}{2x-3}$ eğrisinin eğik asimptotu

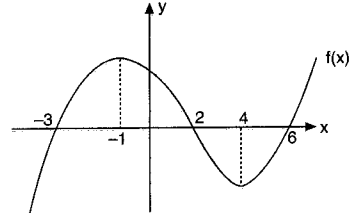
$y = 2x - 1$ olduğuna göre, m kaçtır?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) 0

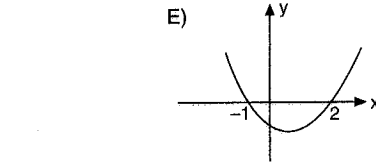
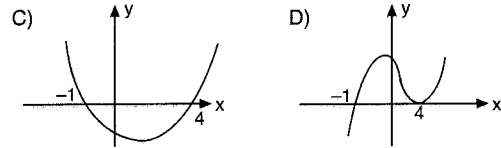
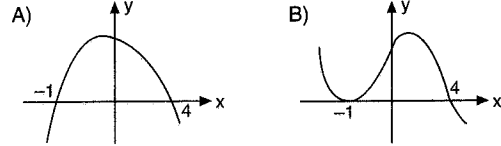
6. Asimptotları $x = 2$ ve $y = 1$ doğruları olan, y eksenini $(0, -4)$ noktasında kesen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{x+2}{x-2}$ B) $y = \frac{x+8}{x+2}$ C) $y = \frac{x+8}{x-2}$
D) $y = \frac{x-8}{x+2}$ E) $y = \frac{8-x}{x-2}$

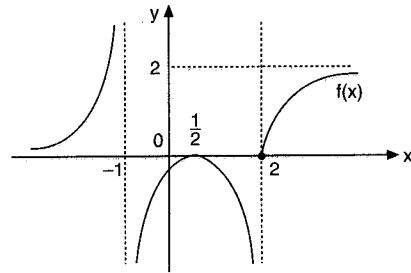
7.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



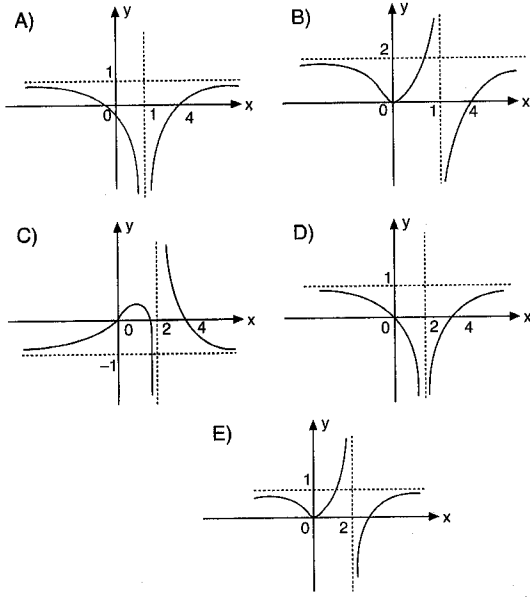
8.



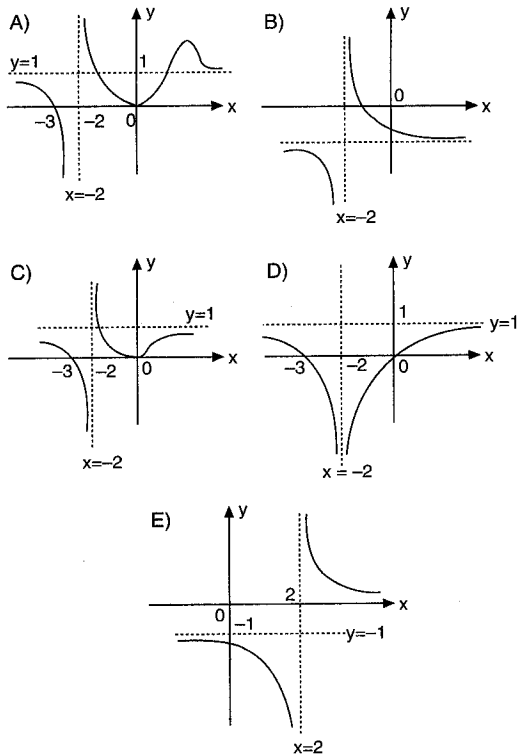
Grafiği şekildeki gibi olan bir f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f(2) = 0$ B) $f'(\frac{1}{2}) < 0$ C) $f''(0) < 0$
D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ E) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ veya $x > \frac{1}{2}$

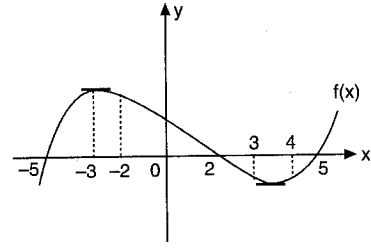
9. Denklemi $y = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$ olan fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



10. $g(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 4}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



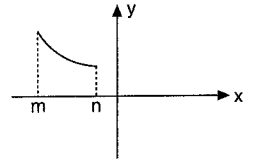
11.



Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(3) < 0$ B) $f'(-2) < 0$ C) $f'(5) = 0$
D) $f(-5) = 0$ E) $f'(-3) = 0$

12. $[m, n]$ aralığında $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu aralıkta aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

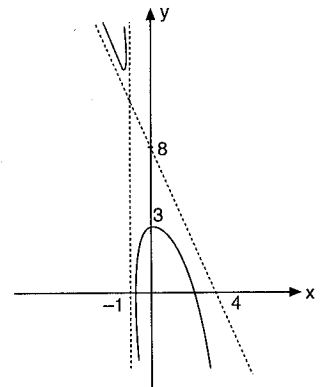


- A) $f''(x) < 0$ B) $f'(x) < 0$
C) $f(x)$ azalandır D) $f'(x) + f''(x) < 0$
E) $f(x) + f'(x) < 0$

13. Grafiği verilen fonksiyon

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

olduğuna göre,
(a + b + c + d)
toplamı kaçtır?



- A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 8



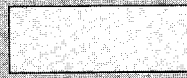
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 13

TÜREV (KARMA)

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ve $g(x) = 3x + 2$ fonksiyonları veriliyor. $(g \circ f)'(m) = 4$ olduğuna göre, m kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

3. $2xy^2 + 3y - 5x - 6 = 0$ eğrisinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y - x - 2 = 0$ B) $y + 3x + 1 = 0$
C) $y + x = 0$ D) $y + 3x + 2 = 0$
E) $2y - x - 3 = 0$

4. $f(x) = x^x + 2^x$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\ln 2 + 4$ B) $4\ln 2 + 2$ C) $8\ln 2 + 4$
D) $4\ln 2 + 8$ E) 8

5. $x = \frac{3t+1}{2t-1}$ ve $y = \frac{5t-1}{4t+2}$ olarak veriliyor.

$\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $t = -1$ için değeri kaçtır?

A) 10 B) 4 C) $-\frac{17}{10}$ D) $-\frac{45}{2}$ E) $-\frac{63}{10}$

6. $y = 4\cos 2\alpha$ ve $x = 6\sin \alpha$ olarak veriliyor.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $\alpha = 0$ için değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{4}{9}$ C) 0 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{9}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{4}}{2x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x^2-4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $2\ln 4$ D) $\ln 10$ E) $\frac{1}{4\ln 10}$

9. $y + x - 2 = 0$ doğrusu $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + m + 1$ eğrisine teğet olduğuna göre, m değeri kaçtır?

A) 4 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

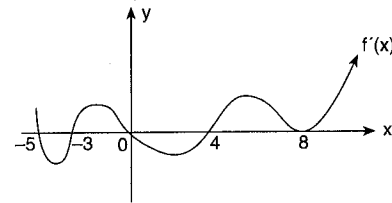
10. $f(x) = 2x^3 - mx^2 + n + 1$ eğrisi için $(-1, 2)$ noktası bir yerel maksimum nokta olduğuna göre, $(m + n)$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) -1 D) -2 E) -3

11. $f(x) = 4mx^3 + 2x^2 - nx + 1$ fonksiyonunun $x = -1$ de yerel minimum değerinin olması için n nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

- 12.



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevinin grafiğine göre, f nin yerel minimum değerlerini aldığı noktaların apsisi toplamı kaçtır?

A) -4 B) -3 C) 1 D) 2 E) 4

13. Yarıçap uzunluğu 2 br olan bir küre içine yerleştirilen en büyük hacimli silindirin hacmi, kaç π birimküptür?

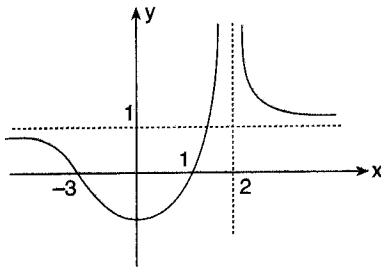
A) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ D) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ E) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

14. $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + n}$ eğrisinin asimptotlarının kesim noktası

$(-2, -7)$ olduğuna göre, $(m.n)$ çarpımı kaçtır?

A) -6 B) -3 C) -2 D) 2 E) 6

15.



Grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{(x+3)x}{x-2}$ B) $y = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}$
C) $y = \frac{(x+3)x}{(x-2)^2}$ D) $y = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-2)^2}$
E) $y = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$

16. $x^2 + (2-a)x - a + 3 = 0$ denkleminin köklerinin karelerinin toplamını en küçük yapan a sayısı kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

17. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-ax+3}$ eğrisinin düşey asimptotunun olmamasını

sağlayan kaç tane a tam sayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

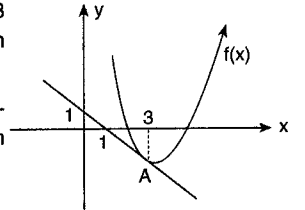
18. f ve g, R de türevi alınabilen fonksiyonlar olup, $A(2,1)$ noktasında f fonksiyonunun yerel ekstremumu vardır.

$g(2x+1) = x^3 \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(5)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

19. $f(x)$ fonksiyonunun apsisi 3 olan A noktasından geçen teğeti verilmiştir.

$g(x-1) = 2x^2 \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?



A) -54 B) -48 C) -42 D) -24 E) -18

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2x - 1}{2\cos 3x - 2 + x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2



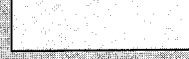
DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

TEST 14

TÜREV (KARMA)

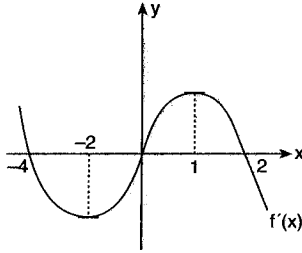
1. f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olup, $f(2) = 5$, $f'(2) = -3$ ve $g'(5) = 6$ olduğuna göre, $(gof)'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -24 B) -18 C) -12 D) 6 E) 12

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi kesinlikle azalan bir fonksiyondur?

A) $f^3(x)$ B) $x^2 - f(x)$ C) $\frac{x}{f(x)}$
D) $3^{f(x)}$ E) $\frac{2}{f(x)}$

3.



Şekilde f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki yargılardan kaç tanesi doğrudur?

- I) $x = -4$ apsisli noktada f fonksiyonunun yerel maksimumu vardır.
II) $x = 1$ apsisli nokta f fonksiyonunun dönüm noktasıdır.
III) $x = -2$ apsisli noktada f fonksiyonunun yerel minimumu vardır.
IV) $x = 2$ apsisli noktada f fonksiyonunun yerel maksimumu vardır.
V) $x = 0$ apsisli nokta f fonksiyonunun dönüm noktasıdır.

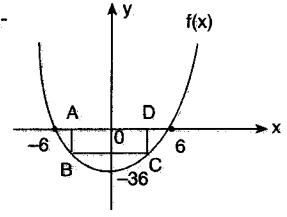
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $f(x) = (5x + 4)^{40}$ olduğuna göre, $f^{(30)}(-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $30! \cdot 5^{30}$ B) $31! \cdot 5^{30}$ C) $\frac{40!}{10!} \cdot 5^{30}$
D) $\frac{50!}{10!} \cdot 5^{40}$ E) $\frac{30!}{10!} \cdot 5^{40}$

5. Tepe noktası y ekseninde olan $f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir.

A ve D köşeleri x ekseninde, B ve C köşeleri $f(x)$ fonksiyonunun üzerinde olan ABCD dikdörtgeninin alanı en fazla kaç birimkare olur?



A) $24\sqrt{3}$ B) $48\sqrt{3}$ C) $96\sqrt{3}$ D) 192 E) 240

6. $f(x) = \frac{(x^3 - 2x^2) \cdot \text{sgn}(4 - 2x)}{|x + 2|}$ olduğuna göre,

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{11}{4}$ E) 3

7. $y = 3x^2 - 2x + a$ parabolüne, $x = -2$ apsisli noktasından çizilen teğet $A(4, -1)$ noktasından geçtiğine göre, a değeri kaçtır?

A) 53 B) 67 C) 83 D) 111 E) 121

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1}$ limitinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) ∞

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{3}{x}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{e^3}$ B) $\frac{1}{e}$ C) e D) e^2 E) $e^{\frac{3}{2}}$

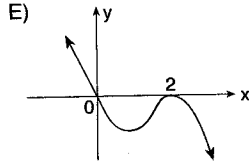
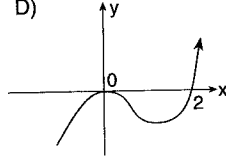
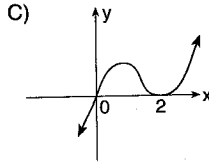
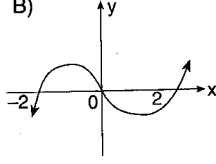
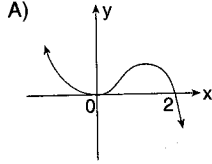
10. Zamana bağlı yol denklemi

$$x(t) = \frac{3t^2 - 2t}{\sqrt{t-1}} \text{ olan bir hareketlinin } t = 2. \text{ saniyedeki}$$

hızı kaç m/sn dir?

- A) 6 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

11. $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



12. $f(x) = \frac{mx-n}{2x-m}$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima artan olduğuna göre, m ve n arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $m > 2n$ B) $2n > m^2$ C) $m^2 > n^3$
D) $2m > 3n$ E) $m = n$

13. Çevresi 20 birim olan bir daire diliminin alanının en büyük olması için, yarıçapı kaç birim olmalıdır?

- A) 5 B) 10 C) 12 D) 15 E) 24

14. $y = x^2 - 2x + 1$ parabolünün $y = 2x - 6$ doğrusuna en yakın olan noktasının, bu doğruya olan uzaklığı kaç birimdir?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ E) 5

15. $y = x^2 - k$ parabolünün orijinden geçen iki teğet doğrusunun birbirine dik olması için k kaç olmalıdır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

16. $y = \frac{2}{x}$ eğrisinin, başlangıç noktasına en yakın olan noktaları A

ve B olduğuna göre, |AB| kaç birimdir?

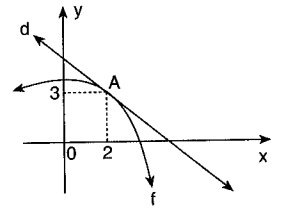
- A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) 8

17. $\begin{cases} x = 4t^3 - 2t \\ y = t^2 - 3t \end{cases}$ olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $t = \frac{1}{2}$ için değeri kaçtır?

- A) -22 B) 14 C) 18 D) 22 E) 26

18. d doğrusu f eğrisine A(2, 3) noktasında teğettir.

$g(x) = (x^2 - 2x) \cdot f(x) - 5x^2$ olduğuna göre, $g'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?



- A) -20 B) -14 C) 6 D) 10 E) 12

19. $f(x) = (x+1)^{x+1}$ olduğuna göre, $f'(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) e E) $2+e$

20. $y = x^3 - 2x$ eğrisine $x = -1$ apsilli noktasından çizilen teğet eğriyi bir başka A noktasında kestiğine göre, A noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 2 D) 6 E) 10

☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

1. $f: \mathbb{R} - \{-7\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = \frac{1}{x+7}$ ile tanımlanıyor.

$f^{(22)}(-8)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-23!$ B) $-8.22!$ C) $-22!$
D) $22!$ E) $23!$

2. $y = 2x^2 - 5x + 1$

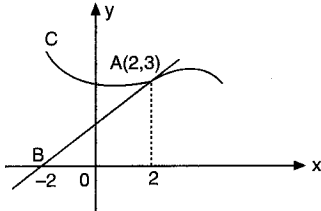
$$x = \ln e^{\cos t}$$

$$t = \arctan u \text{ ve}$$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olduğuna göre, $\frac{dy}{du}$ ifadesinin $u = \sqrt{3}$ için değeri kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ C) $\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

- 3.



Birinci ve ikinci mertebeden türevli bir f fonksiyonunun grafiği şekildeki C eğrisidir. $A(2, 3)$ noktası bu eğrinin bükülme noktasıdır. Eğrinin A noktasındaki teğeti $B(-2, 0)$ noktasından geçmektedir. $g(x) = \frac{f'(x)}{x}$ olduğuna göre, $g'(2)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{16}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{9}$

4. $f(x) = (3x^2 - 4x - 2) + \lfloor \frac{2x-1}{4} \rfloor + \text{sgn}(5x-1)$ olduğuna göre,

$f'(-2) + f'(2)$ kaçtır?

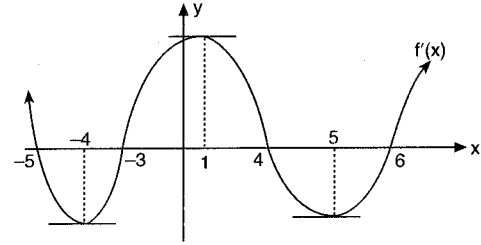
- A) -16 B) -13 C) -8 D) -5 E) -1

5. $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 2x - 1 & ; x > 2 \\ x^2 + 3 & ; x \leq 2 \end{cases}$

fonksiyonu için $f'(-1) + f'(4)$ toplamı kaçtır?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

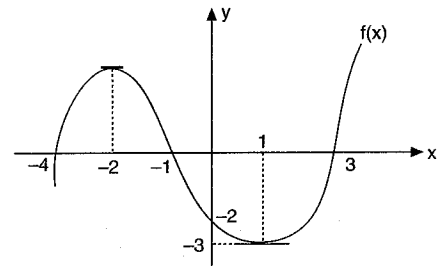
- 6.



Şekilde $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

- 7.



Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(-5) > 0$
B) $f'(-2) = 0$
C) $(-1, 1)$ aralığında $f'(x) > 0$
D) $f'(4) > 0$
E) $(1, 3)$ aralığında $f'(x) > 0$

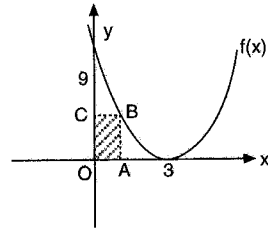
8. $y = 2x^5 + 3x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ ve $x = 3t$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dt}$ nin $t = -\frac{1}{3}$ için değeri kaçtır?
- A) 92 B) 96 C) 106 D) 108 E) 124

9. $f(x) = 3mx^3 + 2nx^2 + 5x - 2$ fonksiyonunun $x = -1$ de yerel minimumu ve $x = 2$ de dönüm noktası olduğuna göre, m kaçtır?
- A) $-\frac{2}{9}$ B) $-\frac{1}{9}$ C) 0 D) $\frac{2}{9}$ E) 1

10. $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 5x + 4$ fonksiyonunun dönüm noktasının koordinatları toplamı kaçtır?
- A) -18 B) -16 C) -12 D) -8 E) -4

11. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 5$ fonksiyonunun $x = 1$ deki normalinin denklemi nedir?
- A) $y = -\frac{1}{4}x + 4$ B) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$ C) $y = 4x + 5$
D) $y = 4x - 2$ E) $y = 4x - 7$

12. $f(x)$ bir parabol olduğuna göre, ABCO dikdörtgeninin alanı en çok kaçtır?



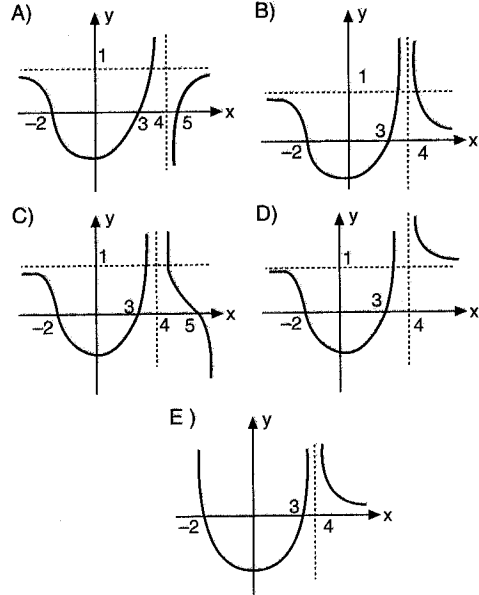
- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

13. Denklemi $y = ax^3 + (a - 1)x^2 + a - 2$ olan eğrinin $x = 2$ deki teğetinin, denklemi $y = \frac{2 + 4x}{3}$ olan doğruya paralel olması için a kaç olmalıdır?
- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

14. $y = x^3$ ve $y = x^2 - 2$ denklemleri ile verilen eğrilerin kesim noktası A dir. A noktasındaki teğetlerin arasındaki geniş açının ölçüsü kaç derecedir?
- A) 105 B) 120 C) 135 D) 150 E) 165

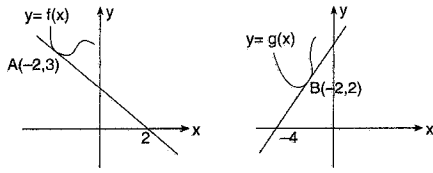
15. Denklemi $y = ax^2$ olan eğrinin P $(-1, b)$ noktasındaki normalinin denklemi $x + 6y + k = 0$ olduğuna göre, a kaçtır?
- A) -12 B) -3 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{12}$

16. $y = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-4)^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



☐ DOĞRU	☐ YANLIŞ	☐ BOŞ	☐ ÖĞRETMENİN KAŞESİ
--------------------------------	---------------------------------	------------------------------	--

1.



Şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrilerinin A ve B noktalarındaki teğetleri verilmiştir. Buna göre, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ olduğuna göre,

$h'(-2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 8

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 14 - x^2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, f fonksiyonunun $x = 1$ deki normalinin eğimi kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3. $f(x) = \frac{x^2 - ax}{3x + 2}$ fonksiyonunun $x=1$ deki türevi $y = x + 2$

doğrusunun eğimine eşit olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -10 B) -9 C) -8 D) -7 E) -6

4. $f(x) = \frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}$ olduğuna göre, $f'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{9}{\pi^2}$ B) $\frac{6}{\pi^2}$ C) $\frac{9\sqrt{3}}{\pi^2}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{\pi^2}$

5. $x = 2t^3 + 1$ ve $y = 3t + 2$ parametrik denklemleri ile verilen

fonksiyon için $\frac{d^2y}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-6t^5$ B) $-\frac{1}{6t^5}$ C) $\frac{1}{6t^5}$ D) $\frac{2}{3t}$ E) $-\frac{2}{3t}$

6. $f(x) = (x^3 + 1)^2 \cdot (\sqrt{x} + 2x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki türevinin değeri kaçtır?

- A) 28 B) 32 C) 46 D) 52 E) 68

7. $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $(f^{-1})'(2)$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ E) $2\sqrt{5}$

8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = |x^2 - 2| + |x| \cdot x - \operatorname{sgn}(2x + 3)$$

f fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ kaçtır?

- A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{11}{3}$ D) 4 E) 5

9. $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x + 1|$ fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsileri toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10. $f: (-\infty, 1] \rightarrow [2, \infty)$ olmak üzere, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(11)$ kaçtır?

- A) -6 B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{6}$ E) 3

11. $f(x) = \log(\cot x)$ olduğuna göre, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) $2\log e$ B) 0 C) 1 D) $-\frac{2}{\ln 10}$ E) $-\log e$

12. $f(\tan x) = g(\cot x)$ olduğuna göre, $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $-\frac{1}{4} \cdot g'(2)$ C) $-\frac{1}{4} g'\left(\frac{1}{2}\right)$
D) $-2 \cdot g'\left(\frac{1}{2}\right)$ E) $-4 \cdot g'(2)$

13. $\frac{d^2}{dx^2} (\cos^2 3x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3\cos 6x$ B) $-9\cos 6x$ C) $-9\sin 6x$
D) $-18\cos 6x$ E) $-18\sin 6x$

14. $t = \sin 4x$ ve $z = \cos 3x$ olduğuna göre, $\frac{dt}{dz}$ ifadesinin $x = \frac{\pi}{12}$ için değeri kaçtır?

- A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ E) $-\sqrt{6}$

15. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun 6. türevi nedir?

- A) $5! \cdot x^{-6}$ B) $5! \cdot x^{-5}$ C) $6! \cdot x^{-6}$
D) $6! \cdot x^{-7}$ E) $7! \cdot x^{-6}$

16. $y = \cos 5x$ olduğuna göre, $\frac{d^{21}y}{dx^{21}}$ ifadesinin eşiti nedir?

- A) $5^{21} \cdot \cos 5x$ B) $5^{21} \cdot \sin 5x$ C) $-5^{21} \cdot \cos 5x$
D) $-5^{21} \cdot \sin 5x$ E) $-5^{21} \cdot \sec 5x$

17. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 2} \text{ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisi toplamı kaçtır?}$$

- A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{16}{9}$ C) 2 D) $\frac{20}{9}$ E) $\frac{7}{3}$

18. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsilerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{\sin x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) e^{-2} B) e^{-1} C) 1 D) e E) e^2

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{e^{4x}}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) ∞ B) 1 C) 0 D) -1 E) $-\infty$



DOĞRU



YANLIŞ



BOŞ



ÖĞRETMENİN KAŞESİ

MATEMATİK ÇKS - TÜREV - ÖDEV TESTLERİ YANIT ANAHTARI

Test - 1	1.A	2.A	3.C	4.D	5.E	6.C	7.D	8.E	9.D	10.E	11.C	12.B	13.B	14.D	15.B	16.C	17.B	18.D	19.B	20.C
Test - 2	1.D	2.D	3.A	4.D	5.D	6.A	7.C	8.A	9.E	10.E	11.D	12.D	13.D	14.B	15.B	16.A	17.C	18.C	19.B	20.C
Test - 3	1.C	2.D	3.C	4.C	5.A	6.A	7.E	8.B	9.A	10.E	11.D	12.D	13.E	14.A	15.E	16.C	17.C	18.A	19.A	20.E
Test - 4	1.B	2.C	3.B	4.A	5.B	6.E	7.C	8.C	9.A	10.E	11.A	12.C	13.E	14.E	15.A	16.E	17.A	18.E	19.C	20.E
Test - 5	1.A	2.C	3.E	4.A	5.E	6.A	7.C	8.B	9.B	10.A	11.A	12.B	13.D	14.C	15.D	16.B	17.E	18.A	19.E	20.C
Test - 6	1.B	2.B	3.A	4.D	5.C	6.A	7.A	8.E	9.E	10.B	11.D	12.A	13.C	14.E	15.B	16.C	17.C	18.C	19.A	20.B
Test - 7	1.B	2.A	3.A	4.B	5.D	6.E	7.A	8.C	9.B	10.B	11.C	12.D	13.A	14.A	15.D	16.D	17.D	18.C	19.C	20.A
Test - 8	1.D	2.E	3.C	4.E	5.B	6.D	7.C	8.E	9.D	10.D	11.D	12.B	13.A	14.A	15.B	16.E	17.E	18.A		
Test - 9	1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.B	7.C	8.D	9.D	10.A	11.A	12.D	13.C	14.C	15.C	16.C	17.E	18.B	19.A	
Test - 10	1.D	2.E	3.B	4.D	5.D	6.E	7.B	8.E	9.E	10.B	11.B	12.D	13.D	14.B	15.A	16.E	17.B	18.E	19.A	20.B
Test - 11	1.C	2.E	3.E	4.C	5.B	6.A	7.A	8.A	9.E	10.C	11.B	12.B	13.A	14.D	15.B	16.D				
Test - 12	1.B	2.A	3.C	4.C	5.A	6.C	7.C	8.E	9.D	10.D	11.C	12.A	13.E							
Test - 13	1.C	2.B	3.D	4.C	5.E	6.B	7.C	8.E	9.D	10.E	11.B	12.C	13.C	14.A	15.E	16.B	17.E	18.E	19.C	20.B
Test - 14	1.B	2.E	3.C	4.C	5.C	6.D	7.B	8.D	9.A	10.A	11.D	12.B	13.A	14.D	15.C	16.C	17.E	18.B	19.A	20.D
Test - 15	1.C	2.E	3.A	4.C	5.E	6.E	7.C	8.D	9.B	10.B	11.B	12.C	13.B	14.C	15.B	16.D				
Test - 16	1.C	2.C	3.B	4.D	5.B	6.C	7.C	8.D	9.C	10.C	11.D	12.C	13.D	14.C	15.D	16.D	17.B	18.B	19.C	20.C

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

SİNÜS FONKSİYONUNUN TÜREVİ

- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \sin(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot \cos(u(x))$
- $f(x) = \sin^n(u(x)) \Rightarrow$
 $f'(x) = n \cdot \sin^{n-1}(u(x)) \cdot \cos(u(x)) \cdot u'(x)$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \sin(4x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ün değeri aşağıda-

kilerden hangisidir?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 2

Çözüm

$$f(x) = \sin(4x) \Rightarrow f'(x) = (4x)' \cdot \cos 4x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \cos 4x$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ için } f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \cdot \cos(3\pi)$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$f(x) = \sin 3x + \sin^4 x$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3 - 3\sqrt{3}$ B) $4 - 2\sqrt{3}$ C) $3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
D) $3 - \frac{3\sqrt{3}}{3}$ E) $3 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Çözüm

$$f(x) = \sin 3x + \sin^4 x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos 3x + 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + 4 \sin^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

KOSİNÜS FONKSİYONUNUN TÜREVİ

- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \cos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$
- $f(x) = \cos^n(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -n \cdot \cos^{n-1}(u(x)) \cdot \sin(u(x)) \cdot u'(x)$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \sin x - \cos^2 x$ fonksiyonunun $x = \frac{5\pi}{3}$ deki türevi kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Çözüm

$$f(x) = \sin x - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x - 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$f'(x) = \cos x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \sin 2x$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{10\pi}{3}$$

$$= \cos \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{10\pi}{3}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$f(x) = \cos^4\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{16}\right)$ ifadesinin

değeri kaçtır?

- A) -16 B) -8 C) -2 D) 0 E) 8

Çözüm

$$f(x) = \cos^4\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \cos^3\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left(-\sin\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right)\right) \cdot 2$$

$$= -8 \cdot \cos^3\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{16} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = -8 \cdot \cos^3\left(2 \cdot \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = -8 \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

TANJANT FONKSİYONUNUN TÜREVİ

- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
- $f(x) = \tan(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot \sec^2(u(x))$
 $= u'(x) \cdot [1 + \tan^2(u(x))]$
- $f(x) = \tan^n(u(x))$
 $\Rightarrow f'(x) = n \cdot \tan^{n-1}(u(x)) \cdot u'(x) \cdot \sec^2(u(x))$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \tan^4(3x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -24 B) -12 C) 14 D) 12 E) 24

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan^4(3x) \\ \Rightarrow f'(x) &= 4 \cdot \tan^3(3x) \cdot 3 \cdot (1 + \tan^2 3x) \\ f'\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 12 \tan^3\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left[1 + \tan^2\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right)\right] \\ &= 12 \cdot \tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 12 \cdot 1 \cdot [1 + 1] = 24 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f(x) = \tan^2(\sin x)$ olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 \tan(\sin x) \cdot \sec^2(\sin x)$
 B) $2 \sin x \cdot \tan(\sin x)$
 C) $2 \cos x \cdot \tan(\sin x) \cdot \sec^2(\sin x)$
 D) $2 \cos x \cdot \tan(\sin x)$
 E) $2 \cos x \cdot \sec^2(\sin x)$

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan^2(\sin x) \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \cdot \tan(\sin x) \cdot (\sin x)' \cdot \sec^2(\sin x) \\ &= 2 \cos x \cdot \tan(\sin x) \cdot \sec^2(\sin x) \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt C

KOTANJANT FONKSİYONUNUN TÜREVİ

- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$
 $= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $f(x) = \cot(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -u'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2(u(x))$
- $f(x) = \cot^n(u(x))$
 $\Rightarrow f'(x) = -n \cdot \cot^{n-1}(u(x)) \cdot u'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2(u(x))$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \cot^2 2x$ fonksiyonunun $x = \frac{7\pi}{8}$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= \cot^2 2x \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \cdot \cot 2x \cdot (2x)' \cdot (-\operatorname{cosec}^2 2x) \\ f'(x) &= -4 \cdot \cot 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x \\ f'\left(\frac{7\pi}{8}\right) &= -4 \cot\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right) \cdot \left[\operatorname{cosec}\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right)\right]^2 \\ &= (-4) \cdot (-1) \cdot (-\sqrt{2})^2 = 8 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$f(x) = \tan x - \cot x + \sin^2 x$ fonksiyonunun $x = \frac{3\pi}{4}$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x - \cot x + \sin^2 x \\ \Rightarrow f'(x) &= (1 + \tan^2 x) - [-(1 + \cot^2 x)] + 2 \sin x \cos x \\ &= 2 + \tan^2 x + \cot^2 x + \sin 2x \\ f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= 2 + \left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\cot \frac{3\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1) = 3 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt A

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

• $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arcsin(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

• $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

• $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \arctan(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

• $f(x) = \operatorname{arccot} x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \operatorname{arccot}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

ÖRNEK SORU

$f(x) = \arcsin(3x-4)$ fonksiyonunun $x = \frac{3}{2}$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 5 E) $2\sqrt{3}$

Çözüm

$f(x) = \arcsin(3x-4)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x-4)'}{\sqrt{1-(3x-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-4)^2}}$

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{1-\left(3\cdot\frac{3}{2}-4\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= 2\sqrt{3}$ olarak bulunur.

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f(x) = \arctan 4x + \operatorname{arccot} 3x$ fonksiyonunun $x=\sqrt{2}$ deki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{25}{627}$ B) $-\frac{8}{625}$ C) $-\frac{23}{627}$
D) $-\frac{20}{627}$ E) $-\frac{17}{627}$

Çözüm

$f(x) = \arctan 4x + \operatorname{arccot} 3x$

$f(x) = \frac{4}{1+(4x)^2} + \frac{-3}{1+(3x)^2}$

$f'(x) = \frac{4}{1+16x^2} - \frac{3}{1+9x^2}$

$f'(\sqrt{2}) = \frac{4}{1+16(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{1+9(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{4}{33} - \frac{3}{19}$

$= -\frac{23}{627}$ olarak bulunur.

Yanıt C

1 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \sin x + \cos x$
- b) $f(x) = 3\sin 2x - 2\cos x$
- c) $f(x) = (\sin 2x)^2$
- d) $f(x) = \tan 3x + \cot 3x$
- e) $f(x) = \tan^2 5x$
- f) $f(x) = \sin^3(3x + 4)$

ÇÖZÜM:

2 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \sin(\sin x)$
- b) $f(x) = -2\cos(\sin 5x)$
- c) $f(x) = 2\cos(\sin^3 x)$
- d) $f(x) = \tan(\cot 3x) + \cot(\tan 3x)$

ÇÖZÜM:

3 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \sin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$
- b) $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin 2x}$
- c) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$
- d) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x$
- e) $f(x) = x \cot 2x$

ÇÖZÜM:

4 $y = x \cos x$ olduğuna göre, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ nedir?

ÇÖZÜM:

5 $f(x) = x \cdot \sin x$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{2} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

6 $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{2} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

8 $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos x$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

9 $f(x) = \tan x \cdot (1 - \cot x)$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

10 $f(x) = \sin(x + \cos x)$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{3\pi}{2} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

11 $f(x) = \cos^3 4x$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

12 $f(x) = \sqrt{\frac{\sin 2x}{\cos x}}$ olduğuna göre,
 $f' \left(\frac{\pi}{3} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

13 $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$ olduğuna göre, $f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

14 $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 5x}$ olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

15 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \arcsin 3x$
- b) $f(x) = \arccos 2x$
- c) $f(x) = \arctan 5x$
- d) $f(x) = \operatorname{arccot} 4x$

ÇÖZÜM:

16 $y = \arctan(\cos x)$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir?

ÇÖZÜM:

17 $f(x) = \cos(\operatorname{arccot} x)$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

18 $f(x) = \arccos(3x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{5}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

19 $y = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ olduğuna göre,

$\frac{dy}{dx}$ in $x = 3$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $f(x) = \arctan(\cos 2x)$ olduğuna göre,

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

21 $f(x) = \arctan(\sin 3x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

22 $f(x) = (\arcsin x)^2$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer varsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limitine f fonksiyonunun

$x = x_0$ noktasındaki türevi denir

ve $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $y'_x(x_0)$ sembollerinden biri

ile gösterilir.

$x = x_0 + h$ alınırsa, $x \rightarrow x_0$ için $h \rightarrow 0$ dir. Bu nedenle f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ şeklinde tanımlanabilir.}$$

$x \rightarrow f'(x)$ biçiminde tanımlanan f' fonksiyonuna f fonksiyonunun türev fonksiyonu denir.

f' fonksiyonunun tanım kümesi, f fonksiyonunun tanım kümesinin alt kümesidir.

Bir fonksiyonun ikinci türevini bulmak için türevinin türevi alınır.

İkinci türev $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, y''_x sembolleri ile gösterilir.

ÖRNEK SORU

$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 2x + 4$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ için türevi kaçtır?

- A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

Çözüm

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 4 = 24$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 2x + 4 - 24}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 2x - 20}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (3x^2 + 6x + 10)}{(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 6x + 10) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 10$$

$$= 34 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

ÖRNEK SORU

$f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 4$ için türevi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{16}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) $-\frac{1}{10}$ D) $-\frac{1}{8}$ E) $-\frac{1}{6}$

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{4+h} - \frac{2}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 - 2(4+h)}{h \cdot 4(h+4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{4h(h+4)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(h+4)} \\ &= -\frac{1}{2 \cdot (0+4)} = -\frac{1}{8} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt D

SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limitine f fonksiyonunun x_0 daki

soldan türevi denir ve $f'(x_0^-)$ biçiminde gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limitine f fonksiyonunun x_0 daki sağdan türevi

denir ve $f'(x_0^+)$ biçiminde gösterilir.

SONUÇLAR

1) f fonksiyonun $x = x_0$ da soldan ve sağdan türevleri eşit ise f fonksiyonunun $x = x_0$ da türevi vardır.

2) f fonksiyonun $x = x_0$ da soldan ve sağdan türevleri eşit değilse f fonksiyonunun $x = x_0$ da türevi yoktur.

3) f fonksiyonun $x = x_0$ da türevi varsa bu türev tektir.

ÖRNEK SORU

$$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 5, & x \leq 2 \text{ ise} \\ 3x^2 + 4x, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonunun $x = 2$ deki türevi kaçtır?

- A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

Çözüm

$x = 2$ de fonksiyon kritik noktaya sahip olduğundan sağdan ve soldan türeve bakılır.

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(4x^2 - 5) - (4 \cdot 2^2 - 5)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 4(x + 2) = 4 \cdot (2 + 2) = 16 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x^2 + 4x) - (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(3x + 10)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 10)$$

$$= 3 \cdot 2 + 10 = 16 \text{ olur.}$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) = 16 \text{ olduğundan}$$

$$f'(2) = 16 \text{ dir.}$$

Yanıt B

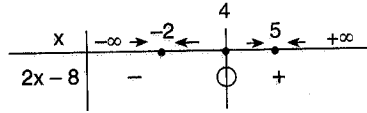
Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 8|$ fonksiyonunun varsa, $x = -2$ ve $x = 5$ noktalarındaki türevlerini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = |2x - 8|$$

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ de kritiktir.}$$



$x = 5$ ve $x = -2$ noktaları kritik nokta değildir. Bundan dolayı

$$f'(-2^-) = f'(-2^+) = f'(-2) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(-2x + 8) - [-2 \cdot (-2) + 8]}{x + 2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x + 2} = -2$$

$$f'(5^-) = f'(5^+) = f'(5) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x - 8) - (2 \cdot 5 - 8)}{x - 5}$$

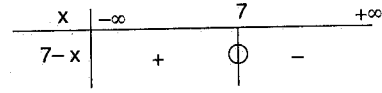
$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{x - 5} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |7 - x|$ fonksiyonunun varsa $x = 7$ deki türevini bulunuz.

Çözüm

$f(x) = 0 \Rightarrow |7 - x| = 0 \Rightarrow x = 7$ olduğundan $x = 7$ noktası kritik noktadır. Bundan dolayı soldan ve sağdan türevlerine bakılır.



$$\begin{aligned} f'(7^-) &= \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{(7 - x) - (7 - 7)}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{7 - x}{x - 7} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(7^+) &= \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{(x - 7) - (7 - 7)}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x - 7}{x - 7} = 1 \end{aligned}$$

$f'(7^-) \neq f'(7^+)$ olduğundan fonksiyonun, $x = 7$ de türevi yoktur.

ÖRNEK SORU

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} mx^2 + x, & x \leq 3 \\ x^2 - x + 4, & x > 3 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonun $x = 3$ de türevinin olabilmesi için m kaç olmalıdır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm

f fonksiyonu $x=3$ noktasında türevli ise $f'(3^-) = f'(3^+)$ tür.

$$\begin{aligned} f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2 - x + 4) - (3^2 - 3 + 4)}{x - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(mx^2 + x) - (m \cdot 3^2 + 3)}{(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{mx^2 + x - 9m - 3}{(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{m(x^2 - 9) + x - 3}{(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)[m(x + 3) + 1]}{(x - 3)} = 6m + 1 \end{aligned}$$

$$f'(3^-) = f'(3^+) = 5$$

$$\Rightarrow 5 = 6m + 1$$

$$\Rightarrow m = \frac{2}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt B

ÖRNEK SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{3}$ için türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Çözüm

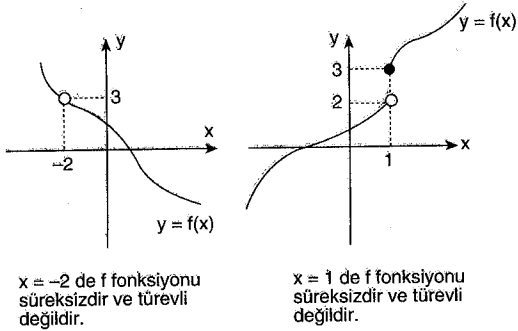
$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{2}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \\ &= \underbrace{1}_{1} \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Yanıt D

TÜREV VE SÜREKLİLİK

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer, f fonksiyonu $x = x_0$ da türevli ise aynı zamanda süreklidir. Bu durumdan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

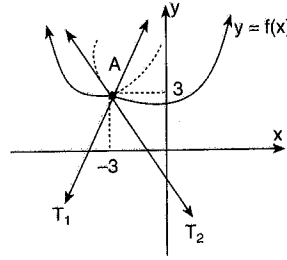
1) f fonksiyonu $x = x_0$ da sürekli değilse türevli de değildir.



Grafiklerde görüldüğü gibi $x = -2$ ve $x = 1$ için fonksiyonlara çizilen teğetler farklıdır.

2) Bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktada türevi yoktur.

3) Bir fonksiyon x_0 noktasında sürekli olduğu halde türevli olmayabilir.



$x = -3$ noktasında T_1 ve T_2 farklı teğet doğruları çizildiğinden $y = f(x)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan türevleri farklıdır. Dolayısıyla fonksiyonun $x = -3$ noktasında türevi yoktur.

Tanım: Bir fonksiyonun sürekli olup türevli olmadığı noktalara fonksiyonun kırılma noktaları denir.

Örnek

$f(x) = x^2 - 8x + 15$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonun $x_0 = 2$ de sürekliliğini ve türevli olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

f fonksiyonun $x=2$ noktasında sürekli olması için

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 8x + 15) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 15 = 3$$

$$f(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 15 = 3$$

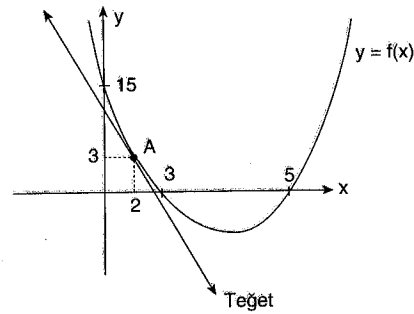
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ olduğundan f fonksiyonu $x_0 = 2$ de süreklidir.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 15 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-6) = 2-6 = -4$$

olduğundan f fonksiyonu $x_0 = 2$ de türevlidir.



Grafikten de görüldüğü gibi, fonksiyon A noktasında sürekli-
dir. Fonksiyona A noktasından yalnız bir teğet çizildiğinden,
f fonksiyonu A noktasında türevlidir.

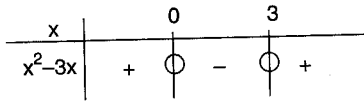
Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = |x^2 - 3x|$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonun
 $x_0=3$ de sürekliliğini ve türevli olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ ise f fonksiyonu $x_0=3$ de süreklidir.

$$f(3) = |3^2 - 3 \cdot 3| = 0 \text{ olduğundan } x_0 = 3 \text{ kritik noktadır.}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 3x) = -3^2 + 3 \cdot 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3x) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0 \text{ olduğundan}$$

f fonksiyonu $x_0 = 3$ de süreklidir.

$f'(3^-) = f'(3^+) = m \in \mathbb{R}$ ise f, $x_0 = 3$ noktasında türevlidir.

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + 3x - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x(x - 3)}{(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x) = -3$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x - 0}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x - 3)}{(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} x = 3 \text{ bulunur.}$$

$$f'(3^-) \neq f'(3^+) \text{ olduğundan}$$

f fonksiyonu $x_0 = 3$ de türevli değildir.

Dolayısıyla f fonksiyonu $x_0 = 3$ de sürekli olduğu halde türev-
li değildir.

Ayrıca $x_0 = 3$ için fonksiyon kırılma noktasına sahiptir.

TÜREV ALMA KURALLARI

1) Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ dir.}$$

2) $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, kuvvetin türevi,

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \text{ dir.}$$

3) Toplamın veya farkın türevi,

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x) \text{ dir.}$$

4) Çarpımın türevi,

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \text{ dir.}$$

5) $a, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ dir.}$$

6) Bölümün türevi,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$7) h(x) = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

$$h(x) = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{n \cdot f'(x)}{m \cdot \sqrt[n]{f(x)^{m-n}}}$$

$$8) f(x) = g(mx+n) \Rightarrow f'(x) = m \cdot g'(mx+n)$$

9) Bileşke fonksiyonun türevi (Türevde Zincir Kuralı)

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \Rightarrow y = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \text{ dir.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ dir.}$$

Yani,

$$[(f \circ g)(x)]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ dir.}$$

ÖRNEK SORU

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 2x + 7$$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f'(1) + f'(0)$ toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 5

Çözüm

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 2x + 7$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 5 \cdot x^{5-1} - 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 2 \cdot x^{1-1} + 0$$

$$= 20 \cdot x^4 - 9 \cdot x^2 - 2$$

$$f'(1) = 20 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^2 - 2 = 9$$

$$f'(0) = 20 \cdot 0^4 - 9 \cdot 0^2 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow f'(1) + f'(0) = 9 - 2 = 7 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D

ÖRNEK SORU

$$f(x) = (x^5 - x^4 + x) \cdot (2x^2 - 5)$$

fonksiyonunun $x = -1$ deki türevi kaçtır?

- A) -18 B) -24 C) -30 D) -42 E) -50

Çözüm

$$f(x) = (x^5 - x^4 + x) \cdot (2x^2 - 5)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^5 - x^4 + x)' \cdot (2x^2 - 5) + (2x^2 - 5)' \cdot (x^5 - x^4 + x)$$

$$= (5x^4 - 4x^3 + 1) \cdot (2x^2 - 5) + 4x \cdot (x^5 - x^4 + x)$$

$$f'(-1) = -18 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A**ÖRNEK SORU**

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^3 - 2}} \text{ fonksiyonunun } x = 2 \text{ deki türevi}$$

kaçtır?

- A) $-\sqrt{6}$ B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ E) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Çözüm

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^3 - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{(4)' \cdot \sqrt{x^3 - 2} - (4) \cdot (\sqrt{x^3 - 2})'}{(\sqrt{x^3 - 2})^2}$$

$$= \frac{0 \cdot \sqrt{x^3 - 2} - 4 \cdot \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 - 2}}}{x^3 - 2}$$

$$= -\frac{6x^2}{(x^3 - 2) \cdot \sqrt{x^3 - 2}}$$

$$f'(2) = -\frac{6 \cdot 2^2}{(2^3 - 2) \cdot \sqrt{2^3 - 2}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E**ÖRNEK SORU**

$$f(x) = (2x^4 + x^3)^{10} \text{ fonksiyonunun } x = -1 \text{ deki türevi kaçtır?}$$

- A) -70 B) -65 C) -55 D) -50 E) -40

Çözüm

$$f(x) = (2x^4 + x^3)^{10}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10 \cdot (2x^4 + x^3)^9 \cdot (2x^4 + x^3)'$$

$$= 10 \cdot (2x^4 + x^3)^9 \cdot (8x^3 + 3x^2)$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 10 \cdot [2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3]^9 \cdot [8 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2]$$

$$= -50 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt D**ÖRNEK SORU**

$f(x) = g(3x+4)$ ve $g'(10) = -4$ olduğuna göre, $f'(2)$ nin değeri kaçtır?

- A) -14 B) -12 C) -10 D) -8 E) -6

Çözüm

$$f(x) = g(3x+4) \Rightarrow f'(x) = g'(3x+4) \cdot (3x+4)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot g'(3x+4)$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot g'(3 \cdot 2 + 4) \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot g'(10) = 3 \cdot (-4) = -12$$

olarak bulunur.

Yanıt B**ÖRNEK SORU**

$g(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot f(x)$ olmak üzere,

$$f(4) = \frac{1}{2} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 4} = 5$$

olduğuna göre, $g'(4)$ ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 52 B) 55 C) 58 D) 61 E) 64

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 5 \Rightarrow f'(4) = 5 \text{ tir.}$$

$$g(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = (x^2 - 2x + 3)' \cdot f(x) + f'(x) \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$= (2x - 2) \cdot f(x) + f'(x) \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

$$\Rightarrow g'(4) = (2 \cdot 4 - 2) \cdot f(4) + f'(4) \cdot (4^2 - 2 \cdot 4 + 3)$$

$$= 6 \cdot f(4) + 11 \cdot f'(4)$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot 5$$

$$\Rightarrow g'(4) = 58 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C**ÖRNEK SORU**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 5, & x \leq 4 \\ \sqrt{x+4}, & x > 4 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f'(-2) + f'(5)$ toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{121}{6}$ B) $\frac{61}{3}$ C) $\frac{123}{5}$ D) $\frac{62}{3}$ E) $\frac{125}{6}$

Çözüm

Parçalı fonksiyonların türevi alınırken fonksiyonun her dalının türevi alınır. Kritik noktalardaki türev ayrıca araştırılır.

Fonksiyonun kritik noktası $x = 4$ tür.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^3 - 2x^2 + 5) = 37$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x+4} = 2\sqrt{2}$$

f süreksiz olduğundan $f'(4)$ yoktur.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x, & x < 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}}, & x > 4 \end{cases}$$

$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 4(-2) = 20$$

$$f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5+4}} = \frac{1}{6} \text{ olup, toplamları}$$

$$20 + \frac{1}{6} = \frac{121}{6} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt A

ÖRNEK SORU

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ ve $g(x) = x^3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(g \circ f)'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 2 D) 3 E) 9

Çözüm

$$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) \text{ dir.}$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 \\ \Rightarrow f(2) = -1$$

$$f'(x) = 4x - 5 \Rightarrow f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow g'(f(2)) = g'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = 3 \cdot 3 = 9 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt E

ÖRNEK SORU

$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - x + 13}$ fonksiyonu için $f'(2)$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{7}{9}$ B) $\frac{22}{27}$ C) $\frac{23}{27}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{25}{27}$

Çözüm

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - x + 13}$$

$$= (2x^3 - x + 13)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2x^3 - x + 13)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x^3 - x + 13)'$$

$$= \frac{6x^2 - 1}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x^3 - x + 13)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{6 \cdot 2^2 - 1}{3 \cdot \sqrt[3]{(2 \cdot 2^3 - 2 + 13)^2}} = \frac{23}{3 \cdot \sqrt[3]{27^2}}$$

$$= \frac{23}{27} \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt C

1 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = 2a + 3b + 7$
- b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$
- c) $f(x) = 4ax^2 + 8bx + 5c$

ÇÖZÜM:

2 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = (2x + 5)(3x + 4)$
- b) $f(x) = (3x - 1)(6 - 5x)$
- c) $f(x) = 4(x + 7)(5x - 3)$

ÇÖZÜM:

3 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \frac{5}{2x + 1}$
- b) $f(x) = \frac{6x - 1}{2x + 3}$
- c) $f(x) = \frac{(2x + 1)(x + 2)}{x - 1}$

ÇÖZÜM:

4 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = (4x + 5)^4$
- b) $f(x) = (2x - 3)^3$
- c) $f(x) = [(5x + 1)(x - 2)]^3$
- d) $f(x) = \frac{(2x + 7)^3}{(x + 1)^2}$

ÇÖZÜM:

5 Aşağıda verilen fonksiyonların x e göre türevlerini bulunuz.

- a) $f(x) = \sqrt{x^3 + 4}$
- b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x + 4)^2}$
- c) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{2x + 1}}$
- d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1}$

ÇÖZÜM:

6 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

7 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ olduğuna göre,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

8 $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ olduğuna göre,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

9 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ olduğuna göre,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2x+h) - f(2x)}{h}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

10 $f(x) = 3x^2 + ax - 5$ ve
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 8$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

11 $f(x) = 2x^2 + 3$ olduğuna göre,
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM:

12 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x, & x < 2 \\ 14, & x = 2 \\ 8x + 3, & x > 2 \end{cases}$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

- a) $f'(2^+) = 17$
- b) $f'(2^-) = 16$
- c) $f'(1) = 11$
- d) $f'(3) = 8$
- e) $f'(2) = 14$
- f) $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.
- g) $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevlidir.

ÇÖZÜM:

$$13 \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli ve türevli olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM:

$$14 \quad f(x) = \begin{cases} 5x^3, & x > 1 \\ 15, & x = 1 \\ 15x+6, & x < 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f(x)$ in $x = 1$ noktasındaki türevi varsa kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$15 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + b, & x < 0 \\ 2x^2 + ax + 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de türevli olabilmesi için $(a+b)$ toplamı kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM:

$$16 \quad f(x) = 3x^2 + 4x - 5 \text{ olduğuna göre, } f'(3) \text{ değeri kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

$$17 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) = ax^3 + 2x^2 + x - b \text{ ve } f'(1) = 2 \text{ olduğuna göre, } a \text{ kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

$$18 \quad f(x) = (2x + 3) \cdot (3x + 4)^2 \\ \text{olduğuna göre, } f'(1) \text{ kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

19 $f(x) = (2x + 3)^4$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

20 $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$ olduğuna göre, $f(x)$ in $x = 1$ deki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM:

21 $f(x) = x^{90} + x^{89} + x^{88} + \dots + x^0$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

22 $f(x) = \frac{5}{(4x-3)^2}$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM:

23 $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x - 3}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

24 $f(x) = \frac{(3x + 1)^2}{2x + 3}$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

25 $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x - 5)}{(3x - 1)^5}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

26 $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir?

ÇÖZÜM:

27 $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x}$ olduğuna göre,
 $f'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

28 $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 4x - 4}$ olduğuna göre,
 $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

29 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2x - 5}$ fonksiyonu veriliyor.
Buna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

30 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere,
 $f'(1) = 4$ ve $f'(0) = 2$ olduğuna göre, $(a + b)$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

31 $f(x) = x^4 - 6mx + 2$ fonksiyonu veriliyor.
 $\frac{f'(2)}{f''(1)} = 3$ olduğuna göre, m kaçtır?

ÇÖZÜM:

32 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 6x - 1$ fonksiyonu veriliyor.
 $f'(2) = 50$ ve $f''(3) = 34$ olduğuna göre,
 $(a \cdot b)$ çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 33 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$
 $g(x) = 5ax^3 + 2$ fonksiyonları veriliyor.
 $f'(1) + g'(1) = 20$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 34 $f(2x - 3) = -3x^2 + 5x + 6$
fonksiyonu veriliyor. Buna göre,
 $f'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 35 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(3x^2 - 4) = 6x^2 + 5x + 3$
olduğuna göre, $f'(23)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 36 $f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = 3x + 7$
olmak üzere, $(f \circ g)'(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 37 $f(x) = x^2 - 3$ ve $g(x) = (2x + 5)^2$
olduğuna göre, $(g \circ f)'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 38 $f(3x - 4) = g(5x^2 - 6)$ ve $g'(14) = 1$ olduğuna göre,
 $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 39 $\mathbb{R}$ de türevlenebilen f ve g fonksiyonları için
 $f(2x - 1) = (2x + 3) g(x - 1)$
 $f'(5) = 4$ ve $g(2) = 2$ olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 40 f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}$ de türevli olmak üzere;
 $g'(4) = 5$, $g(4) = 2$,
 $(f \circ g)'(4) = 20$ dir. Buna göre, $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

- 41 $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 5$ polinomu $(x - 1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM: