



“Hayatta En Hakiki Mürşit İlimdir”

K. Atatürk

PLE Nedir?

Personal Learning Environment (Kişisel Öğrenme Ortamı), kişilerin öğrenme süreçlerini kontrol edip bu süreci yönetmelerine olanak sağlayan sistemdir. PLE, yaşam boyu öğrenmenin temelidir. Yaşam boyu öğrenme, günümüzde dijital dünyanın yakından takip edilmesiyle gerçekleşiyor. Bry Yayınları olarak kendi öğrenme ortamlarınızı oluşturabilmek için kitaplarımızı ve dijital içeriklerimizi yeni öğretim modellerine en uygun şekilde hazırladık.

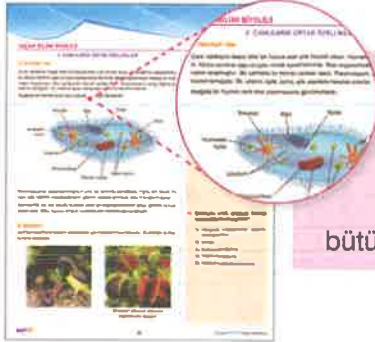
Dijital uygulamalarımızla 'öğretmen' yanı başınızda.

Başarı kitapta...

Kitabın Tanıtımı

Konu Anlatımı

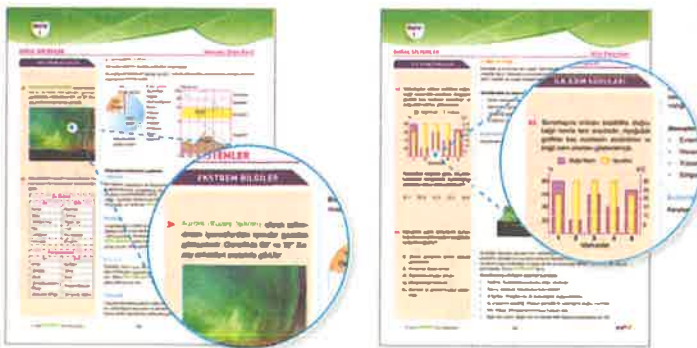
1



Bry Yayınları olarak liseye adım attığınız bu dönemde 9. sınıf konularını yalın, anlaşılabilir, MEB'in yayınlamış olduğu kazanımlara uygun şekilde ele aldık. Çözümlü örnek sorularla konuyu pekiştirmenizi, farklı çözüm yollarını görerek konuları özümsemenizi hedefledik. Kullanılan görseller ve materyaller ile konuları bütünlükte zengin bir içerik oluşturduk.

Ekstrem Bilgiler ve Üniversiteye İlk Adım Soruları

2



PLE serimizde konu anlatımlı kitaplarımızın yan sütunlarında 2 farklı bölüm yer alır.

1. Ekstrem Bilgiler: Bu bölümde konular anlatılırken farklı bakış açıları geliştirebilmeniz, eleştirel düşüncüyü benimseyebilmeniz için konularla ilintili farklı bilgilere yer verdik.

2. Üniversiteye İlk Adım Soruları: Üniversite sınavlarında başarılı olmanın formülü, 'planlı çalış-

maktır'. 9. sınıftan başlayarak sınav gerçeğini içselleştirir ve bu yönde hazırlıklarımızı yaparsak ilerleyen yıllarda yoğun hâlindeki konular ve sorularla baş etmek zorunda kalmayız. "Üniversiteye İlk Adım Soruları" sınavlara hazırlık için mutlaka çözülmesi gereken kılavuz soruların yer aldığı bölümdür.

Etkinlikler

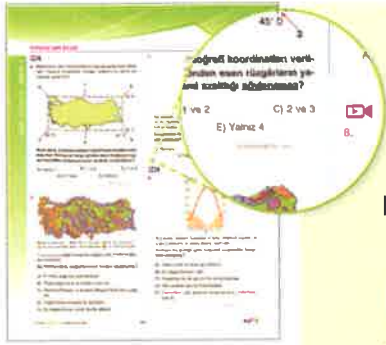
3



Etkinlikler bölümü "**Doğru-Yanlış**", "**Boşluk doldurma**", "**Eşleştirme**", "**Kavram haritaları**", "**Branşa özel etkinlikler**", "**Yazılıya hazırlık soruları**" (Açık Uçlu Sorular) şeklinde hazırlandı. Kazanımlara hangi ölçüde ulaşıldığının belirlenmesine yardımcı olacak bu bölümler ile bilgilerinizi kalıcı hâle getirmeyi hedefledik.

Konu Testleri

4



Konu (kazanım) testleri konuların pekiştirilmesi, öğrendiklerimizin tekrarı için en önemli bölümdür. Bu bölümde yer alan sorular, bilişsel alanın tüm basamaklarına yönelik kolaydan zora doğru bir dağılımla hazırlandı. Konu testlerinde yer alan zor sorular, dijital platformlarımızda (brycepte, www.bireyakademi.com) konunun detaylarına da yer verilerek çözümlendi.



Video amblemi gördüğünüz her sorunun çözümüne **bryCEPT** uygulamamızdan veya **bireyakademi.com**'dan kolaylıkla ulaşabilirsiniz.

Yazardan

5



Uzman komisyonlarımızca hazırlanan kitaplarımızdan en doğru şekilde faydalanabilmeniz için oluşturulmuş bölümdür. Bu bölümde ünitelerde yer alan konuların nasıl çalışılması

gerektiği, dikkat edilmesi gereken noktaların hangi yöntemlerle hafızada kalabileceği, konuların üniversite sınavlarında nasıl ve hangi sıklıkla karşımıza çıkacağı, soru çözüm taktikleri vb. yönlendirmeler her kitabın komisyonunca titizlikle kaleme alındı.

Cevap Anahtarları

6



Kitaplarımızda yer alan etkinlikler, yazılı soruları, üniversiteye ilk adım soruları ve konu testlerinin tümünün cevaplarına kitabın son bölümü olan Cevap Anahtarı bölümünde yer verildi.

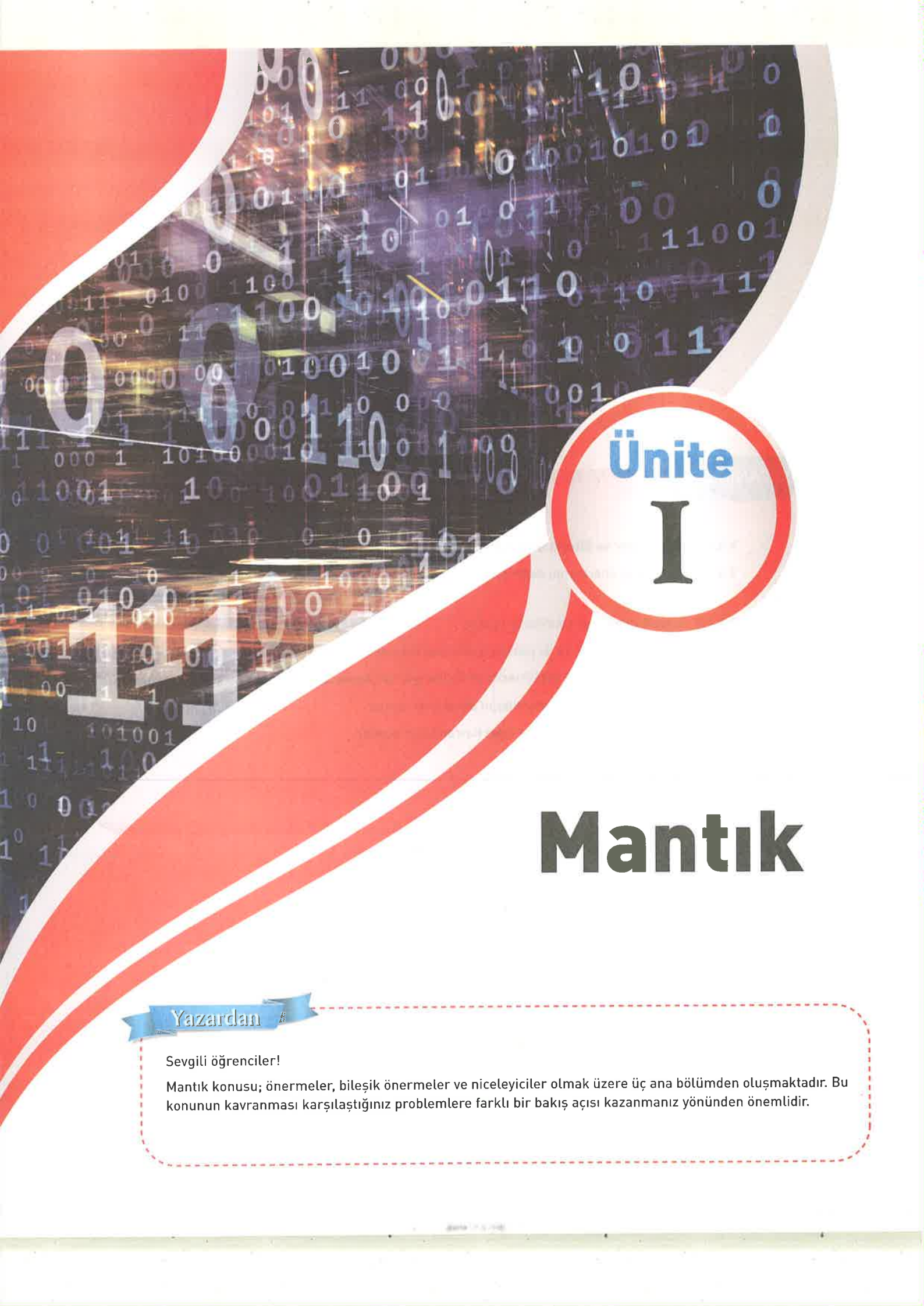
9. Sınıf

MATEMATİK

Konu Anlatımlı

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
ÜNİTE I MANTIK	9 - 38
ÜNİTE II KÜMELER	39 - 80
ÜNİTE III DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER	81 - 276
ÜNİTE IV ÜÇGENLER	277 - 416
ÜNİTE V VERİ VE GRAFİK	417 - 428
CEVAP ANAHTARI	429 - 432



Ünite

I

Mantık

Yazardan

Sevgili öğrenciler!

Mantık konusu; önermeler, bileşik önermeler ve niceleyiciler olmak üzere üç ana bölümden oluşmaktadır. Bu konunun kavranması karşılaştığınız problemlere farklı bir bakış açısı kazanmanız yönünden önemlidir.

KAZANIMLAR

9.1.1 : Önergeler ve Bileşik Önergeler

9.1.1.1 : Önergemi, önergemin doğruluk değeri, iki önergemin denkleğini ve önergemin değili ni açıklar.

9.1.1.2 : Bileşik önergemi örneklerle açıklar.

9.1.1.3 : Koşullu önergemi ve iki yönlü koşullu önergemi açıklar, "ve, veya, ya da" bağlaçları ile kurulan bileşik önergelerin özelliklerini ve De Morgan kurallarını doğruluk tablosu kullanarak gösterir.

9.1.1.4 : Her $\{\forall\}$ ve bazı $\{\exists\}$ niceleyicilerini örneklerle açıklar.

9.1.1.5 : Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Mantık, elde edilmiş bilinen verilerden yola çıkarak bilinmeyene ulaşmada kullanılan bir bilimdir. Mantık, kurallarına uyulduğunda doğru düşünmeyi yanlış düşünmeden ayıran bir sistemler topluluğudur.

ÖNERME

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) bildiren ifadelere **önerme** denir.

Önermeler genellikle p, q, r, s gibi küçük harflerle gösterilir.

! Dikkat

Bir ifadenin önerme belirtmesi için,

- ♦ Herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmalı yani kişiye özgü bir durum olmamalıdır.
- ♦ Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) içermelidir.

Örnek 1:

Aşağıda verilen ifadeleri inceleyerek hangilerinin bir önerme olduğunu bulalım ve bu önermelerin doğru ya da yanlış olma durumlarını belirleyelim.

- a) 5 sayısı asaldır.
- b) Bir hafta 30 gündür.
- c) Dünya'nın uydusu aydır.
- d) Yağmurlu hava çok güzeldir.
- e) Bugün buluşalım mı?
- f) Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

Çözüm:

- a) "5 sayısı asaldır." ifadesi herkes tarafından aynı şekilde anlaşılan ve hüküm bildiren bir ifade olduğundan bir önermedir. 5 sayısı asal bir sayı olduğuna göre, bu önerme **doğru** bir önermedir.
- b) "Bir hafta 30 gündür." ifadesi bir önermedir. Çünkü kesin bir hüküm belirtmektedir. Fakat bir hafta 7 gün değildir. O halde bu önerme **yanlış** bir önermedir.
- c) "Dünya'nın uydusu aydır." ifadesi kesin hüküm bildiren bir ifadedir. Dünya'nın uydusu ay olduğundan bu önerme **doğru** bir önermedir.
- d) "Yağmurlu hava çok güzeldir." ifadesi bir önerme değildir. Bu ifade kişiye özgü bir ifadedir. Yani yağmurlu günler bazı insanlar için güzel olduğu gibi bazı insanlar için güzel olmayabilir.
- e) "Bugün buluşalım mı?" ifadesi hüküm belirtmeyen bir soru cümlesi olduğundan önerme değildir.
- f) "Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir." ifadesi hüküm bildiren bir ifadedir. Üçgenlerin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° dir. Dolayısıyla bu önerme **doğru** bir önermedir.

! Dikkat

- ♦ Bir önermenin belirttiği hükmün doğru ya da yanlış olmasına önermenin doğruluk değeri denir. Doğru önermeler "**D**" veya "**1**" ile, yanlış önermeler ise "**Y**" veya "**0**" ile ifade edilir.
- ♦ Bir p önermesi doğru bir önerme ise bu $p \equiv 1$ şeklinde gösterilir ve "**p önermesi 1 e denktir.**" şeklinde okunur.
- ♦ Bir p önermesi yanlış bir önerme ise bu $p \equiv 0$ şeklinde gösterilir ve "**p önermesi 0 a denktir.**" şeklinde okunur.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 2:

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

- p : "0 bir doğal sayıdır."
 q : "15 çift sayıdır."
 r : "En büyük negatif tam sayı -1 dir."
 s : "3 ile tam bölünebilen her doğal sayı 6 ile de tam bölünür."
 u : "Negatif iki sayının çarpımı negatiftir."
 t : " $3^4 > 4^3$ tür."

Çözüm:

- "0 bir doğal sayıdır." hükmü doğru olduğundan p önermesi **doğru** bir önermedir. Bu durum $p=1$ ile gösterilir.
- "15 çift sayıdır." hükmü yanlış olduğundan q önermesi **yanlış** bir önermedir. Bu durum $q=0$ ile gösterilir.

- "En büyük negatif tam sayı -1 dir." hükmü doğru olduğundan r önermesi **doğru** bir önermedir. Bu durum $r=1$ ile gösterilir.
- "3 ile tam bölünebilen her doğal sayı 6 ile de tam bölünür." hükmü yanlıştır. 3 ile tam bölündüğü halde 6 ile tam bölünemeyen sayılar vardır. 3, 9, 15, ... gibi. Dolayısıyla s önermesi **yanlış** bir önermedir. Bu durum $s=0$ ile gösterilir.
- "Negatif iki sayının çarpımı negatiftir." hükmü yanlıştır. Çünkü iki negatif sayının çarpımı daima pozitiftir. Dolayısıyla u önermesi **yanlış** bir önermedir. Bu durum $u=0$ ile gösterilir.
- " $3^4 > 4^3$ tür." hükmü doğrudur. $3^4=81$ ve $4^3=64$ olup 81 sayısı 64 ten büyüktür. Dolayısıyla t önermesi **doğru** bir önermedir. Bu durum $t=1$ ile gösterilir.

Denk Önermeler

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere "**denk önermeler**" denir. p ve q önermeleri denk önermeler ise " $p \equiv q$ " ile, p ve q önermeleri denk önermeler değil ise " $p \neq q$ " ile gösterilir.

- $p \equiv q$ ifadesi "**p önermesi q önermesine denktir.**" şeklinde okunur.
- $p \neq q$ ifadesi "**p önermesi q önermesine denk değildir.**" şeklinde okunur.

Örnek 3:

Aşağıda verilen önermelerden denk olanları bularak sembolle ifade edelim.

- p : "İki tek sayının toplamı bir çift sayıdır."
 q : "En küçük asal sayı 1 dir."
 r : "İstiklal Marşı'mızın yazarı Mehmet Akif Ersoy'dur."
 t : " $2^2 + 3^2 = 5^2$ dir."

Çözüm:

- İki tek sayının toplamı daima bir çift sayı olduğundan p önermesi doğrudur.
 O halde, $p=1$ dir.

- En küçük asal sayı 2 olduğundan q önermesi yanlıştır. O halde, $q=0$ dir.
- İstiklal Marşı'mızın yazarı Mehmet Akif Ersoy'dur. Dolayısıyla r önermesi doğrudur.
 O halde, $r=1$ dir.
- $2^2=4$, $3^2=9$ ve $5^2=25$ tir. $4+9 \neq 25$ olduğundan t önermesi yanlıştır. O halde $t=0$ dir.

Görüldüğü gibi,

$p=1$ ve $r=1$ olduğundan p ve r önermeleri denk önermelerdir. Bu durum, $p=r$ şeklinde gösterilir.

$q=0$ ve $t=0$ olduğundan q ve t önermeleri denk önermelerdir. Bu durum, $q=t$ şeklinde gösterilir.

MANTIK

Doğruluk Tablosu

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya “*doğruluk tablosu*” denir.

- ♦ p önermesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p önermesinin doğru (1) ya da yanlış (0) olmak üzere 2 doğruluk değeri vardır.

Tablo,

p
1
0

(p önermesi doğru)

(p önermesi yanlış)

şeklindedir.

- ♦ p ve q önermelerinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p önermesinin 2 farklı ve q önermesinin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan bu iki önermenin $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ farklı doğruluk durumu vardır.

Tablo,

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

(p önermesi doğru iken q önermesi doğru)

(p önermesi doğru iken q önermesi yanlış)

(p önermesi yanlış iken q önermesi doğru)

(p önermesi yanlış iken q önermesi yanlış)

şeklindedir.

- ♦ p, q ve r önermelerinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p, q ve r önermelerinin her birinin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan bu üç önermenin $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ farklı doğruluk durumu vardır.

Bu durumları gösteren tablo,

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

şeklindedir.

Önermeler ve Bileşik Önermeler

İLK ADIM SORULARI

1. p : “ $\sqrt{5}$ tam sayıdır.”

q : “ $(-1) + (+1) = 0$ dir.”

r : “ $3^0 = 1$ dir.”

önermeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $p \equiv 0$

II. $q \equiv 1$

III. $r \equiv 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) Yalnız III

D) I ve II

E) II ve III

2. p : “Asal sayılar tektir.”

q : “Sıfır toplama işleminin etkisiz elemanıdır.”

r : “ $(-2)^3 = 8$ dir.”

önermeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $p \equiv r$

II. $q \equiv r$

III. $p \equiv q$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) Yalnız III

D) I ve III

E) II ve III

Dikkat

n farklı önermenin birbirlerine göre 2^n tane doğruluk durumu vardır. Her önermenin 2 doğruluk değeri olduğundan n tane önermenin,

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ tane}} = 2^n \text{ tane}$$

doğruluk durumu olur.

- ♦ 4 önermenin $2^4=16$
- ♦ 6 önermenin $2^6=64$ tane doğruluk durumu vardır.

Örnek 4:

n tane önermenin 8, m tane önermenin ise 32 tane doğruluk durumu vardır.

Buna göre, $m+n$ tane önermenin kaç farklı doğruluk durumu vardır?

- A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

Çözüm:

- n tane önermenin 8 doğruluk durumu varsa, $2^n=8$ ve $n=3$ tür.
- m tane önermenin 32 doğruluk durumu varsa, $2^m=32$ ve $m=5$ tir.

O halde, $m+n=8$ dir.

Buradan, 8 tane önermenin $2^8=256$ doğruluk durumu olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Bir önermenin hükmünün değiştirilip bu hükmün yerine olumsuzunun kullanılması ile oluşturulan önermeye bu önermenin "**değili (olumsu-
zu)**" denir. p önermesinin değili $\sim p$ veya p' ile gösterilir.

- ♦ Bir önermenin hükmünün değiştirilip yerine olumsuzunun kullanılması durumunda doğru olan bir önerme yanlış, yanlış olan bir önerme ise doğru olmuş olur. O halde,

$$p=1 \text{ ise } p'=0$$

$$p=0 \text{ ise } p'=1 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla bir önermenin değilinin değili yine kendisini ifade edeceğinden $(p')'=p$ dir. $(p')'=p$ özelliğini tablo ile gösterelim.

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

$$p \equiv (p')'$$

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 5:

- p : "3 çift sayıdır."
q : "Eşkenar üçgenin her bir iç açısının ölçüsü 60° dir."
r : "-5 sayısı negatiftir."
s : "Dikdörtgenin köşegen uzunlukları birbirine eşit değildir."

Yukarıda verilen önermelerin değilini bulalım.

Çözüm:

- p' : "3 çift sayı değildir."
q' : "Eşkenar üçgenin her bir iç açısının ölçüsü 60° değildir."
r' : "-5 sayısı negatif değildir."
s' : "Dikdörtgenin köşegen uzunlukları birbirine eşittir."

Görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} p \equiv 0 \text{ iken } p' &\equiv 1, & q \equiv 1 \text{ iken } q' &\equiv 0 \\ r \equiv 1 \text{ iken } r' &\equiv 0, & s \equiv 0 \text{ iken } s' &\equiv 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

bryPLE bryPLE bryPLE

bryPLE bryPLE bryPLE

! Dikkat

Yanlış bir önermenin değilini oluşturulurken yanlış ifade düzeltilip ifadenin doğrusu yazılmaz.

Mesela, p : "En küçük asal sayı 3 tür." önermesi yanlış bir önermedir. Bu önermenin değilini oluşturulurken p' : "En küçük asal sayı 2 dir." şeklinde yazılması yanlıştır. Önermenin sadece hükmü değiştirilmelidir. Yani, p' : "En küçük asal sayı 3 değildir." şeklinde olmalıdır.

Örnek 6:

- p : "Samsun ili Doğu Anadolu Bölgesi'ndedir."
q' : "İki basamaklı en küçük tam sayı -99 dur."
r : "İki asal sayının toplamı asal değildir."

önermeleri veriliyor. Buna göre,

- I. p' : "Samsun ili Karadeniz Bölgesi'ndedir."
- II. q : "İki basamaklı en küçük tam sayı -99 değildir."
- III. r' : "İki asal sayının toplamı asaldır."

önermelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız II B) Yalnız III C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm:

p, q' ve r önermelerinin hükmü değiştirilirse;

- p' : "Samsun ili Doğu Anadolu Bölgesi'nde değildir."
q : "İki basamaklı en küçük tam sayı -99 değildir."
r' : "İki asal sayının toplamı asaldır."

önermeleri elde edilir.

Dolayısıyla I yanlış, II ve III doğrudur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

Bazı önermelerde =, ≠, <, ≤, >, ≥ gibi semboller kullanılır. Bu önermelerin değilini oluşturulurken,

- ♦ = sembolü yerine ≠ sembolü
- ♦ ≠ sembolü yerine = sembolü
- ♦ < sembolü yerine ≥ sembolü
- ♦ ≤ sembolü yerine > sembolü
- ♦ > sembolü yerine ≤ sembolü
- ♦ ≥ sembolü yerine < sembolü kullanılır.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 7:

p : "5.7=7.5 tir."

q : " $3^2+4^2 \leq 5^2$ dir."

r : " $(-1)+(-2)+(-3) \neq 0$ dir."

Önermelerinin değili yazalım.

Çözüm:

p , q ve r önermelerinin değili,

p' : " $5.7 \neq 7.5$ tir."

q' : " $3^2+4^2 > 5^2$ dir."

r' : " $(-1)+(-2)+(-3) = 0$ dir."

şeklindedir.

BİLEŞİK ÖNERMELER

İki veya daha fazla önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçları ile bağlanmasıyla elde edilen önermelere **bileşik önerme** denir.

1- "ve" BAĞLACI VE ÖZELLİKLERİ

p ve q önermelerinin "ve" bağlacı ($\wedge$) ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye " **p ve q bileşik önermesi**" denir ve $p \wedge q$ şeklinde ifade edilir.

♦ $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; her iki önermenin de doğru olduğu durumlarda doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek 8:

Öğretmen Metin Bey teneffüste kantini arayarak görevliden kendisine simit ve çay getirmesini ister. Kantin görevlisinin;

- Çay getirmeyip sadece simit getirmesi
- Simit getirmeyip sadece çay getirmesi
- Ne simit ne de çay getirmesi
- Simit ile birlikte çay getirmesi

durumlarının doğruluğunu inceleyelim.

Çözüm:

Metin Bey'in simit ve çay getirilmesini istemesi hem simit hem de çayın birlikte getirilmesi anlamına gelir. O halde,

- Çay getirmeyip sadece simit getirmesi (Yanlış)
- Simit getirmeyip sadece çay getirmesi (Yanlış)
- Ne simit ne de çay getirmesi (Yanlış)
- Simit ile birlikte çay getirmesi (Doğru)

bir durumdur.

MANTIK

Örnek 9:

p : “-1 negatif bir sayıdır.”

q : “ $(-3)^2=3^2$ dir.”

r : “ $2^3>3^2$ dir.”

önergeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $p \wedge q$

II. $q \wedge r$

III. $p \wedge r'$

bileşik önergelerinden hangilerinin doğruluk değeri 1 dir?

A) I ve II

B) I ve III

C) II ve III

D) Yalnız I

E) Yalnız III

Çözüm:

- 1 sayısı negatif bir sayı olduğundan $p \equiv 1$
- $(-3)^2=9$ ve $3^2=9$ olduğundan $q \equiv 1$
- $2^3=8$, $3^2=9$ olup $8>9$ yanlış olduğundan $r \equiv 0$ olur.

Buradan,

I. $p \wedge q \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

II. $q \wedge r \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$

III. $p \wedge r' \equiv 1 \wedge 0' \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olacaktır.

Doğru cevap “B” seçeneğidir.

“ve” Bağlacının Özellikleri

a) Tek Kuvvet Özelliği

Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

$p \wedge p \equiv p$ dir.

Önergeler ve Bileşik Önergeler

İLK ADIM SORULARI

3. Aşağıda verilen önergelerden hangisinin doğruluk değeri diğerlerinden farklıdır?

A) $(1 \wedge 0) \wedge 1$

B) $(0 \wedge 0) \wedge 1$

C) $(1 \wedge 1) \wedge 0$

D) $(1 \wedge 0)' \wedge 1$

E) $0 \wedge (1 \wedge 1)'$

4.

$p \equiv 1$

$q \equiv 0$

$r \equiv 1$

denklikleri veriliyor.

Buna göre, $p \wedge (q' \wedge r)$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $p \wedge q$

B) $q \wedge r$

C) $p' \wedge r$

D) $p \wedge r'$

E) $p \wedge r$

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

b) Değişme Özelliği

Her p ve q önermesi için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ dir.

c) Birleşme Özelliği

Her p , q ve r önermesi için, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ dir.

! Dikkat

Ayrıca her p önermesi için,

♦ $p \wedge p' \equiv 0$

♦ $p \wedge 1 \equiv p$

♦ $p \wedge 0 \equiv 0$ dir.

Örnek 10:

Aşağıda bazı bileşik önermelerin en sade hali verilmiştir.

Buna göre, hangisi doğrudur?

- A) $p \wedge (p \wedge 1) \equiv 1$ B) $1 \wedge (p \wedge p') \equiv p$ C) $(p \wedge 0) \wedge p \equiv p'$
D) $(p \wedge p) \wedge p' \equiv 1$ E) $(0 \wedge p) \wedge p' \equiv 0$

Çözüm:

- A) $p \wedge (p \wedge 1) \equiv p \wedge p \equiv p$ (Yanlış)
B) $1 \wedge (p \wedge p') \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ (Yanlış)
C) $(p \wedge 0) \wedge p \equiv 0 \wedge p \equiv 0$ (Yanlış)
D) $(p \wedge p) \wedge p' \equiv p \wedge p' \equiv 0$ (Yanlış)
E) $(0 \wedge p) \wedge p' \equiv 0 \wedge p' \equiv 0$ (Doğru)

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 11:

Aşağıda verilen ifadelerden hangisi doğrudur?

- A) $p \wedge (p' \wedge q) \equiv 1$
- B) $(p' \wedge 1) \wedge q \equiv q'$
- C) $(p \wedge q) \wedge q' \equiv 0$
- D) $(p' \wedge 0) \wedge q \equiv q$
- E) $(p \wedge p) \wedge (p' \wedge q) \equiv 1$

Çözüm:

- A) $p \wedge (p' \wedge q) \equiv (p \wedge p') \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$ (Yanlış)
- B) $(p' \wedge 1) \wedge q \equiv p' \wedge q$ (Yanlış)
- C) $(p \wedge q) \wedge q' \equiv p \wedge (q \wedge q') \equiv p \wedge 0 \equiv 0$ (Doğru)
- D) $(p' \wedge 0) \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$ (Yanlış)
- E) $(p \wedge p) \wedge (p' \wedge q) \equiv p \wedge (p' \wedge q) \equiv (p \wedge p') \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$ (Yanlış)

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

2- "veya" BAĞLACI VE ÖZELLİKLERİ

p ve q önermelerinin "veya" bağlacı ($\vee$) ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye " p veya q bileşik önermesi" denir ve $p \vee q$ şeklinde ifade edilir.

- ♦ $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; her iki önermenin de yanlış olduğu durumlarda yanlış, diğer tüm durumlarda doğrudur.
- $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek 12:

Babası Sinan'dan okuldaki kurslardan satranç veya futbol kursuna katılmasını istiyor. Sinan'ın bu kurslardan,

- Satranç kursuna katılıp futbol kursuna katılmaması
- Futbol kursuna katılıp satranç kursuna katılmaması
- Her iki kursa da katılması
- Hiç bir kursa katılmaması

durumlarının doğrulunu inceleyelim.

Çözüm:

Babasının Sinan'dan satranç veya futbol kursuna katılmasını istemesi bu iki kurstan en az birine katılması anlamına gelmektedir. O halde,

- Satranç kursuna katılıp futbol kursuna katılmaması (Doğru)
- Futbol kursuna katılıp satranç kursuna katılmaması (Doğru)
- Hem futbol hem de satranç kursuna katılması (Doğru)
- Bu iki kurstan hiçbirine katılmaması (Yanlış)

bir davranıştır.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 13:

p : " $(-2) \cdot (-3) < 0$ dir."

q : " $\frac{(-1) + (-2)}{-3} = 1$ dir. "

r : "11 asal sayıdır."

önermeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $p \vee q$

II. $q \vee r$

III. $r' \vee p$

bileşik önermelerinden hangilerinin doğruluk değeri 1 dir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III
D) I ve II E) II ve III

Çözüm:

p önermesi yanlış, q ve r önermeleri doğru olduğundan, $p \equiv 0$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ dir.

Buradan,

I. $p \vee q \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$

II. $q \vee r \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$

III. $r' \vee p \equiv 1' \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ olur.

Dolayısıyla I ve II doğru, III yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 14:

Aşağıda verilen bileşik önermelerden hangisinin doğruluk değeri sıfırdır?

- A) $(1 \vee 0) \vee 0$ B) $(0 \vee 1)' \vee 0$ C) $0' \vee (0 \vee 1)$
D) $(1 \vee 1) \vee 1$ E) $(0 \vee 0) \vee 1$

Çözüm:

A) $(1 \vee 0) \vee 0 \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ (Doğru)

B) $(0 \vee 1)' \vee 0 \equiv 1' \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ (Yanlış)

C) $0' \vee (0 \vee 1) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ (Doğru)

D) $(1 \vee 1) \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ (Doğru)

E) $(0 \vee 0) \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$ (Doğru)

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 15:

Aşağıda verilen denkliklerden hangisi yanlıştır?

A) $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 0) \equiv 1$

B) $(0 \wedge 1)' \wedge (1 \vee 1) \equiv 1$

C) $(0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) \equiv 0$

D) $(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \equiv 1$

E) $(1 \vee 0)' \vee (1 \vee 0) \equiv 1$

Çözüm:

A) $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 0) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ (Yanlış)

B) $(0 \wedge 1)' \wedge (1 \vee 1) \equiv 0' \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ (Doğru)

C) $(0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$ (Doğru)

D) $(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$ (Doğru)

E) $(1 \vee 0)' \vee (1 \vee 0) \equiv 1' \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$ (Doğru)

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

“veya” Bağlacının Özellikleri

a) Tek Kuvvet Özelliği

Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

$p \vee p \equiv p$ dir.

b) Değişme Özelliği

Her p ve q önermesi için $p \vee q \equiv q \vee p$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$ dir.

c) Birleşme Özelliği

Her p , q ve r önermesi için, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir.

! Dikkat

Ayrıca her p önermesi için

♦ $p \vee p' \equiv 1$

♦ $p \vee 1 \equiv 1$

♦ $p \vee 0 \equiv p$ dir.

MANTIK

Örnek 16:

$$p \equiv 1, q \equiv 0 \text{ ve } r \equiv 0$$

olduğuna göre, aşağıda verilen bileşik önermelerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

- A) $(p \vee r) \wedge q$ B) $(q \wedge r') \vee p'$ C) $p' \vee (q \wedge r)$
D) $(p' \vee r) \wedge q'$ E) $(q' \vee r) \wedge p$

Çözüm:

$p \equiv 1, q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ doğruluk değerleri yerlerine yazılırsa,

- A) $(p \vee r) \wedge q \equiv (1 \vee 0) \wedge 0 \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$
B) $(q \wedge r') \vee p' \equiv (0 \wedge 0') \vee 1' \equiv (0 \wedge 1) \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$
C) $p' \vee (q \wedge r) \equiv 1' \vee (0 \wedge 0) \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$
D) $(p' \vee r) \wedge q' \equiv (1' \vee 0) \wedge 0' \equiv (0 \vee 0) \wedge 1 \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$
E) $(q' \vee r) \wedge p \equiv (0' \vee 0) \wedge 1 \equiv (1 \vee 0) \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 17:

Aşağıda verilen bileşik önermelerden hangisinin en sade hali yanlış verilmiştir?

- A) $(p \vee 1) \wedge (q \wedge 0) \equiv 0$ B) $(p \vee p') \wedge q \equiv q$
C) $(p \wedge p') \vee q \equiv q$ D) $(p \wedge 0) \vee (p \vee p') \equiv 0$
E) $(p \vee 0) \vee (q \wedge 1) \equiv p \vee q$

Çözüm:

- A) $(p \vee 1) \wedge (q \wedge 0) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ (Doğru)
B) $(p \vee p') \wedge q \equiv 1 \wedge q \equiv q$ (Doğru)
C) $(p \wedge p') \vee q \equiv 0 \vee q \equiv q$ (Doğru)
D) $(p \wedge 0) \vee (p \vee p') \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$ (Yanlış)
E) $(p \vee 0) \vee (q \wedge 1) \equiv p \vee q$ (Doğru)

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Dağılma Özelliği

1) "ve" bağlacının "veya" bağlacı üzerine,

a) Soldan dağılma özelliği

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

b) Sağdan dağılma özelliği

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

2) "veya" bağlacının "ve" bağlacı üzerine,

a) Soldan dağılma özelliği

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

b) Sağdan dağılma özelliği

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \text{ şeklindedir.}$$

Örnek 18:

Aşağıda verilen önermelerin en sade halini bulalım.

a) $p \vee (p' \wedge q)$

b) $p' \wedge (p \vee q)$

Çözüm:

- a) $p \vee (p' \wedge q) \equiv (p \vee p') \wedge (p \vee q) \equiv 1 \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$
b) $p' \wedge (p \vee q) \equiv (p' \wedge p) \vee (p' \wedge q) \equiv 0 \vee (p' \wedge q) \equiv p' \wedge q$ olur.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

DE MORGAN KURALLARI

Her p ve q önermesi için

$$a) (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

$$b) (p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

kuralları vardır. Bu kurallara “*De Morgan Kuralları*” denir.

- ♦ $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ kuralını doğruluk tablosunda gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ dir.

- ♦ $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ kuralını doğruluk tablosunda gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ dir.

Örnek 19:

$$(p \wedge q)' \vee q$$

önermesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 0 C) p D) q E) p'

Çözüm:

$$\begin{aligned} (p \wedge q)' \vee q &\equiv (p' \vee q') \vee q \quad (\text{De Morgan Kuralı kullanıldı.}) \\ &\equiv p' \vee (q' \vee q) \quad (\vee \text{ nin birleşme özelliği kullanıldı.}) \\ &\equiv p' \vee 1 \\ &\equiv 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap “A” seçeneğidir.

Örnek 20:

$$(p' \vee q)' \wedge (q \vee 0)$$

önermesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 0 C) p D) q' E) $p \wedge q$

Çözüm:

$$\begin{aligned} (p' \vee q)' \wedge (q \vee 0) &\equiv (p \wedge q') \wedge (q \vee 0) \quad (\text{De Morgan Kuralı kullanıldı.}) \\ &\equiv (p \wedge q') \wedge q \\ &\equiv p \wedge (q' \wedge q) \quad (\wedge \text{ nin birleşme özelliği kullanıldı.}) \\ &\equiv p \wedge 0 \\ &\equiv 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap “B” seçeneğidir.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

3- "ya da" BAĞLACI VE ÖZELLİKLERİ

p ve q önermelerinin "ya da" bağlacı ($\vee$) ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye " p ya da q bileşik önermesi" denir ve $p \vee q$ şeklinde ifade edilir.

- $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; bu iki önermeden yalnızca biri doğru iken doğru, diğer durumlarda ise yanlıştır.
- $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek 21:

Matematik öğretmeni Osman Bey 9-A sınıfı öğrencilerine "Önümüzdeki hafta salı ya da çarşamba günü sınav yapacağım." diyor.

Matematik öğretmeni Osman Bey'in,

- Salı günü sınav yapıp çarşamba günü sınav yapmaması
- Salı günü sınav yapmayıp çarşamba günü sınav yapması
- Salı ve çarşamba günlerinin hiç birinde sınav yapmaması
- Hem salı hem de çarşamba günü sınav yapması

davranışlarının doğruluğunu inceleyelim.

Çözüm:

Matematik öğretmeni Osman Bey'in salı ya da çarşamba günü sınav yapacak olması bu iki günden yalnız birinde sınav yapacağı anlamına gelir. O halde Osman Bey'in,

- Salı günü sınav yapıp çarşamba günü sınav yapmaması (Doğru)
- Salı günü sınav yapmayıp çarşamba günü sınav yapması (Doğru)
- Her iki günde de sınav yapmaması (Yanlış)
- Her iki günde de sınav yapması (Yanlış)

bir davranıştır.

Örnek 22:

p ve q önermeleri için

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv 1$$

olduğuna göre, aşağıda verilen önermelerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

- A) $p \vee q$ B) $q \vee r$ C) $p' \vee r$ D) $q' \vee r'$ E) $q' \vee p'$

Çözüm:

$p \wedge (q \wedge r) \equiv 1$ ise $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ olmalıdır.

- A) $p \vee q \equiv 1 \vee 1 \equiv 0$
 B) $q \vee r \equiv 1 \vee 1 \equiv 0$
 C) $p' \vee r \equiv 1' \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
 D) $q' \vee r' \equiv 1' \vee 1' \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$
 E) $q' \vee p' \equiv 1' \vee 1' \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

MANTIK

“ya da” Bağlacının Özellikleri

a) Değişme Özelliği

Her p ve q önermesi için $p \vee q \equiv q \vee p$ dir. Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$ dir.

b) Birleşme Özelliği

Her p, q ve r önermesi için, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir.

Bu özelliği doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir.

Önermeler ve Bileşik Önermeler

İLK ADIM SORULARI

5. Aşağıda verilen denkliliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $1 \vee 1 \equiv 0$
- B) $(1 \wedge 0) \vee 0 \equiv 0$
- C) $(0 \wedge 1) \vee 0 \equiv 0$
- D) $(1 \vee 1) \vee 0 \equiv 0$
- E) $(0 \vee 0) \vee 0 \equiv 0$

6. p : “ $-2 \leq 2$ dir.”

q : “ $\frac{1}{2}$ rasyonel sayıdır.”

r : “ $3^{-1} = -3$ tür.”

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıda verilen önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0 dir?

- A) $p' \vee (q \vee r)$
- B) $(p \vee r) \wedge q$
- C) $(p' \vee r) \wedge q$
- D) $(r \wedge q) \vee p$
- E) $(p \vee q)' \vee r'$

Dikkat

Ayrıca her p önermesi için,

♦ $p \vee p \equiv 0$

♦ $p \vee p' \equiv 1$

♦ $p \vee 1 \equiv p'$

♦ $p \vee 0 \equiv p$ dir.

Örnek 23:

Aşağıda verilen önermelerin en sade halini bulalım.

a) $(p \vee p') \vee 1$

b) $p' \vee (p \vee 0)$

c) $(p \vee 1) \wedge p'$

d) $(p \vee p') \vee (p \wedge p')$

Çözüm:

a) $(p \vee p') \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 0$

b) $p' \vee (p \vee 0) \equiv p' \vee p \equiv 1$

c) $(p \vee 1) \wedge p' \equiv p' \wedge p' \equiv p'$

d) $(p \vee p') \vee (p \wedge p') \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$

4- "İse" BAĞLACI VE ÖZELLİKLERİ (KOŞULLU ÖNERME)

p ve q önermelerinin "ise" bağlacı ($\Rightarrow$) ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye " *p ise q bileşik önermesi*" denir ve $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilir.

♦ $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri; p nin doğru q nun yanlış olması durumunda yanlış, diğer durumlarda ise doğrudur.

♦ $p \Rightarrow q$ şeklindeki önermelere *koşullu önerme* adı verilir.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Örnek 24:

Aysel Hanım dışarı çıkacak olan kızı Sude için "Hava yağmurlu ise şemsiyesini yanına alır." diyor. Sude'nin

- Hava yağmurlu iken şemsiyesini yanına alması
- Hava yağmurlu iken şemsiyesini yanına almaması
- Hava yağmurlu değil iken şemsiyesini yanına almaması
- Hava yağmurlu değil iken şemsiyesini yanına alması

davranışlarının doğrulunu inceleyelim.

Çözüm:

Aysel Hanım'ın " Hava yağmurlu ise şemsiyesini yanına alır." cümlesi havanın yağmurlu olması durumunda şemsiyenin kesinlikle alınmış olması anlamına gelir. Dolayısıyla Sude'nin hava yağmurlu iken şemsiyesini yanına almaması yanlış, diğer durumlar ise doğrudur. O halde,

- Hava yağmurlu iken şemsiyesini yanına alması **(Doğru)**
- Hava yağmurlu iken şemsiyesini yanına almaması **(Yanlış)**
- Hava yağmurlu değil iken şemsiyesini yanına almaması **(Doğru)**
- Hava yağmurlu değil iken şemsiyesini yanına alması **(Doğru)**

bir davranıştır.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 25:

p, q ve r önermeleri için

$$p \wedge q \equiv 1, \quad q \vee r \equiv 1$$

olduğuna göre, aşağıda verilen denkliklerden hangisi doğrudur?

- A) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv 1$ B) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv 1$
C) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv 1$ D) $(p \vee r) \Rightarrow q \equiv 0$
E) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv 0$

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} p \wedge q \equiv 1 \\ q \vee r \equiv 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p \equiv 1, q \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 0 \text{ olur.}$$

- A) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ (Yanlış)
B) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv 1 \Rightarrow (1 \wedge 0) \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ (Yanlış)
C) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ (Doğru)
D) $(p \vee r) \Rightarrow q \equiv (1 \vee 0) \Rightarrow 1 \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ (Yanlış)
E) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ (Yanlış)

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 26:

p, q ve r önermeleri

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv 0$$

denkliğini sağlamaktadır.

Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0'dır?

- A) $p \Rightarrow r$ B) $r \Rightarrow q$ C) $p' \Rightarrow q$
D) $r' \Rightarrow p$ E) $p \Rightarrow (q \vee r)$

Çözüm:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv 0 \text{ ise } p \equiv 1 \text{ ve } q \Rightarrow r \equiv 0 \text{ olur.}$$

$$q \Rightarrow r \equiv 0 \text{ ise } q \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 0 \text{ olur.}$$

O halde, $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ için

- A) $p \Rightarrow r \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$
B) $r \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$
C) $p' \Rightarrow q \equiv 1' \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$
D) $r' \Rightarrow p \equiv 0' \Rightarrow 1 \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$
E) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 1 \Rightarrow (1 \vee 0) \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 27:

p : "a=0 dır."

q : "a+b=0 dır."

r : "a.b=0 dır."

önermeleri için aşağıda verilen önermelerden hangisi doğrudur?

- A) $p \Rightarrow q$ B) $q \Rightarrow r$ C) $p \Rightarrow r$ D) $r \Rightarrow p$ E) $q \Rightarrow p$

Çözüm:

A) $p \Rightarrow q \equiv (a=0) \Rightarrow (a+b=0 \text{ dır.})$ a=0 olduğunda a+b=0 olma zorunluluğu yoktur. a=0 ve b=1 alınırsa a+b=1 olur.

B) $q \Rightarrow r \equiv (a+b=0) \Rightarrow (a.b=0 \text{ dır.})$ a+b=0 olduğunda a.b=0 olma zorunluluğu yoktur. a=1 ve b=-1 alınırsa a.b=-1 olur.

C) $p \Rightarrow r \equiv (a=0) \Rightarrow (a.b=0 \text{ dır.})$ a=0 olduğunda b hangi değeri alırsa alsın a.b=0 olacağından $p \Rightarrow r$ önermesi doğrudur.

D) $r \Rightarrow p \equiv (a.b=0) \Rightarrow (a=0 \text{ dır.})$ a.b=0 ise a=0 olma zorunluluğu yoktur. a=1 ve b=0 alınırsa a.b=0 yine sağlanır.

E) $q \Rightarrow p \equiv (a+b=0) \Rightarrow (a=0 \text{ dır.})$ a+b=0 olduğunda a=0 olma zorunluluğu yoktur. a=1 ve b=-1 alındığında a+b=0 olduğu halde a≠0'dır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Dikkat

$p \Rightarrow q$ önermesi $p' \vee q$ önermesine denktir.

Her p ve q önermesi için $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ kuralını doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ dur.

Örnek 28:

Aşağıda verilen önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0 dır?

- A) $(p \Rightarrow q) \vee p$ B) $(p \Rightarrow q) \vee q'$ C) $p \Rightarrow (p \vee q)$
D) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ E) $(p \Rightarrow q)' \wedge q$

Çözüm:

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ bağıntısını kullanarak önermelerin en sade halini bulalım.

- A) $(p \Rightarrow q) \vee p \equiv (p' \vee q) \vee p \equiv (p' \vee p) \vee q \equiv 1 \vee q \equiv 1$
B) $(p \Rightarrow q) \vee q' \equiv (p' \vee q) \vee q' \equiv p' \vee (q \vee q') \equiv p' \vee 1 \equiv 1$
C) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv p' \vee (p \vee q) \equiv (p' \vee p) \vee q \equiv 1 \vee q \equiv 1$
D) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv (p \wedge q)' \vee p \equiv (p' \vee q') \vee p \equiv (p' \vee p) \vee q' \equiv 1 \vee q' \equiv 1$
E) $(p \Rightarrow q)' \wedge q \equiv (p' \vee q)' \wedge q \equiv (p \wedge q') \wedge q \equiv p \wedge (q' \wedge q) \equiv p \wedge 0 \equiv 0$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 29:

$$(p \vee q) \Rightarrow p$$

Önermesine denk olan koşullu önerme aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $q \Rightarrow p'$ B) $p' \Rightarrow q$ C) $q' \Rightarrow p$ D) $q \Rightarrow p$ E) $p \Rightarrow q$

Çözüm:

$$(p \vee q) \Rightarrow p \equiv (p \vee q)' \vee p \quad (\Rightarrow \text{bağlacı kullanıldı.})$$

$$\equiv (p' \wedge q') \vee p \quad (\text{De Morgan Kuralı kullanıldı.})$$

$$\equiv (p' \vee p) \wedge (q' \vee p) \quad (\vee \text{nin } \wedge \text{ üzerine dağılım özelliği kullanıldı.})$$

$$\equiv 1 \wedge (q' \vee p)$$

$$\equiv q' \vee p$$

$$\equiv q \Rightarrow p \quad \text{olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Dikkat

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye "gerektirme" adı verilir.

$p \Rightarrow q \equiv 1$ ise $p \Rightarrow q$ önermesi bir gerektirmedir.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 30:

Aşağıda verilen koşullu önermelerden hangileri bir gerektirir? Bulalım.

- a) $p \Rightarrow (1 \wedge p)$
- b) $(p \wedge q') \Rightarrow q'$
- c) $(p \vee 1) \Rightarrow p$

Çözüm:

- a) $p \Rightarrow (1 \wedge p) \equiv p' \vee (1 \wedge p) \equiv p' \vee p \equiv 1$
olduğundan bu koşullu önerme bir gerektirir.
- b) $(p \wedge q') \Rightarrow q' \equiv (p \wedge q')' \vee q' \equiv (p' \vee q) \vee q'$
 $\equiv p' \vee (q \vee q') \equiv p' \vee 1 \equiv 1$
olduğundan bu koşullu önerme bir gerektirir.
- c) $(p \vee 1) \Rightarrow p \equiv 1 \Rightarrow p \equiv 1' \vee p \equiv 0 \vee p \equiv p$
olduğundan bu koşullu önerme bir gerektirir değildir.

Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersİ ve Karşıt Tersİ

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin;

- ♦ Karşıtı, $q \Rightarrow p$
- ♦ Tersİ, $p' \Rightarrow q'$
- ♦ Karşıt Tersİ, $q' \Rightarrow p'$ dir.

Örnek 31:

p : "x=2 dir."

q : " $x^2-4=0$ dir."

önermeleri veriliyor.

$p \Rightarrow q$ önermesinin,

- a) karşıtını
- b) tersini
- c) karşıt tersini yazalım.

Çözüm:

- a) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$ olduğundan bu önerme " $x^2-4=0 \Rightarrow x=2$ dir." şeklindedir.
- b) $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ olduğundan bu önerme, " $(x=2)' \Rightarrow (x^2-4=0)' \equiv (x \neq 2) \Rightarrow (x^2-4 \neq 0)$ " şeklinde yazılabilir.
- c) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ olduğundan bu önerme, " $(x^2-4=0)' \Rightarrow (x=2)' \equiv (x^2-4 \neq 0) \Rightarrow (x \neq 2)$ " şeklinde yazılabilir.

Örnek 32:

p : "ABCD bir kare ise tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir."

koşullu önermesinin karşıtı, tersi ve karşıt tersini yazınız.

Çözüm:

p önermesi ise bağlacıyla kurulmuş bir önerme olduğundan;

- Karşıtı: "Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit ise ABCD bir karedir."
- Tersİ: "ABCD bir kare değil ise tüm kenar uzunlukları birbirine eşit değildir."
- Karşıt tersi: "Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit değil ise ABCD bir kare değildir."

şeklindedir.

Dikkat

Her koşullu önerme karşıt tersine denktir. $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

Her p ve q önermesi için $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ bağıntısını doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ dir.

Örnek 33:

p ve q önermeleri,

p : " $2^x=8$ dir."

q : " $x=3$ tür."

şeklinde veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi $p \Rightarrow q$ önermesine denktir?

A) $2^x=8 \Rightarrow x \neq 3$ tür.

B) $2^x \neq 8 \Rightarrow x \neq 3$ tür.

C) $x=3 \Rightarrow 2^x=8$ dir.

D) $x \neq 3 \Rightarrow 2^x \neq 8$ dir.

E) $x \neq 3 \Rightarrow 2^x=8$ dir.

Çözüm:

Her koşullu önerme karşıt tersine denktir.

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan, $q' \Rightarrow p'$ önermesi

" $x \neq 3 \Rightarrow 2^x \neq 8$ dir."

şeklinde dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

5- "ancak ve ancak" BAĞLACI VE ÖZELLİKLERİ

p ve q önermelerinin "**ancak ve ancak**" bağlacı ($\Leftrightarrow$) ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye " **p ancak ve ancak q bileşik önermesi**" denir ve $p \Leftrightarrow q$ şeklinde ifade edilir.

♦ $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri; p ve q nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

♦ $p \Leftrightarrow q$ önermesine "**iki yönlü koşullu önerme**" adı verilir.

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 34:

p : "Yasemin düzenli olarak ders çalışır."

q : "Yasemin kendine vakit ayırır."

önermelerini "ancak ve ancak" bağlacını kullanarak iki yönlü koşullu önerme şeklinde yazınız.

Çözüm:

p ve q önermelerini "ancak ve ancak" bağlacını kullanarak,

- $p \Leftrightarrow q$: "Yasemin düzenli olarak ders çalışır ancak ve ancak Yasemin kendine vakit ayırır."
- $q \Leftrightarrow p$: "Yasemin kendine vakit ayırır ancak ve ancak Yasemin düzenli olarak ders çalışır."

şeklinde ifade edebiliriz.

Örnek 35:

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerini bulunuz.

- a) $(1 \Leftrightarrow 1) \wedge 0$ b) $(0 \Leftrightarrow 1) \vee 1$
c) $(1 \Leftrightarrow 1) \vee (1 \Leftrightarrow 0)$ d) $(1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1)$

Çözüm:

- a) $(1 \Leftrightarrow 1) \wedge 0 \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$
b) $(0 \Leftrightarrow 1) \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
c) $(1 \Leftrightarrow 1) \vee (1 \Leftrightarrow 0) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$
d) $(1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1) \equiv 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$ olur.

! Dikkat

Her p ve q önermesi için, $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bağıntısı vardır.

♦ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bağıntısını doğruluk tablosu kullanarak gösterelim.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ dur.

Örnek 36:

p : " $-3 < 1$ dir."

q : " $(-1)^2 = (-1)^4$ tür."

r : " $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 6$ dir."

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

- A) $p \Leftrightarrow r$ B) $r \Leftrightarrow p$ C) $p \Leftrightarrow q'$ D) $r \Leftrightarrow q$ E) $p \Leftrightarrow q$

Çözüm:

p ve q önermeleri doğru, r önermesi yanlış olduğundan, $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ dir. O halde,

- A) $p \Leftrightarrow r \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$
B) $r \Leftrightarrow p \equiv 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$
C) $p \Leftrightarrow q' \equiv 1 \Leftrightarrow 1' \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$
D) $r \Leftrightarrow q \equiv 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$
E) $p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Dikkat

Ayrıca " $\Leftrightarrow$ " bağlacında,

- ♦ $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- ♦ $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$
- ♦ $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ (değişme özelliği)
- ♦ $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$ özellikleri vardır.
- ♦ $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- ♦ $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- ♦ $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$

Örnek 37:

Aşağıda verilen önermelerin en sade halini bulunuz.

- a) $(p \Leftrightarrow 1) \wedge p$
- b) $p \Leftrightarrow (p \wedge 0)$
- c) $(p \Leftrightarrow p') \vee 1$
- d) $(p \Leftrightarrow p) \Rightarrow 0$

Çözüm:

- a) $(p \Leftrightarrow 1) \wedge p \equiv p \wedge p \equiv p$
- b) $p \Leftrightarrow (p \wedge 0) \equiv p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- c) $(p \Leftrightarrow p') \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
- d) $(p \Leftrightarrow p) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek 38:

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \wedge q')$$

önermesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0
- B) 1
- C) p
- D) q
- E) $p \Rightarrow q$

Çözüm:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ denkleğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} (p \Leftrightarrow q) \wedge (p \wedge q') &\equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge (p \wedge q') \\ &\equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \wedge (p \wedge q') \\ &\equiv (p \wedge q')' \wedge (q' \vee p) \wedge (p \wedge q') \\ &\equiv \underbrace{(p \wedge q')' \wedge (p \wedge q')}_0 \wedge (q' \vee p) \\ &\equiv 0 \wedge (q' \vee p) \\ &\equiv 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Dikkat

$p \Leftrightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye "çift gerektirme" denir.

$p \Leftrightarrow q \equiv 1$ ise $p \Leftrightarrow q$ önermesi çift gerektirmez.

MANTIK

Önermeler ve Bileşik Önermeler

Örnek 39:

p : "Türkiye'nin başkenti Ankara'dır."

q : "İki tek sayının toplamı tektir."

r : "Sıfır, çarpma işleminin etkisiz elemanıdır."

önermeleri veriliyor. Buna göre,

I. $p \Leftrightarrow q$

II. $q \Leftrightarrow r$

III. $r \Leftrightarrow p'$

önermelerinden hangileri çift gerektirmezdir?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) Yalnız III

D) II ve III

E) I, II ve III

Çözüm:

p önermesi doğru, q ve r önermeleri ise yanlış olduğundan, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ dir.

O halde,

I. $p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$

II. $q \Leftrightarrow r \equiv 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$ (çift gerektirme)

III. $r \Leftrightarrow p' \equiv 0 \Leftrightarrow 1' \equiv 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$ (çift gerektirme) olur.

Dolayısıyla II ve III çift gerektirmezdir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

bryPLE bryPLE bryPLE

bryPLE bryPLE bryPLE

AÇIK ÖNERMELER

İçerisinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olabilen önermelere "açık önerme" denir.

Açık önermeyi doğru yapan elemanların oluşturduğu kümeye önermenin *doğruluk kümesi* denir.

♦ İçerisinde x gibi tek değişken bulunduran açık önermeler $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, ... ile, içerisinde x ve y gibi iki değişken bulunduran açık önermeler $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$, ... ile gösterilir.

♦ $p(x)$: " $2^x=4$ ve x tam sayı"

$q(x)$: " x asal bir sayıdır."

♦ $p(x, y)$: " $x^2+y^2=0$, x ve y doğal sayı"

$q(x, y)$: " $x \cdot y < 0$, x ve y gerçekte sayı"

gibi önermeler birer açık önermedir.

Örnek 40:

$p(x)$: " $2x-1 < 5$, x doğal sayı"

$q(x)$: " $x-2=1$, x tam sayı"

$r(x)$: " $-2 \leq x \leq 2$, x tam sayı"

$s(x)$: " $\frac{3x-6}{x+5} = 2$, x gerçekte sayı"

açık önermelerin doğruluk kümesini bulalım.

Çözüm:

• $2x-1 < 5$ ise $2x < 6$ ve $x < 3$ olur. x doğal sayı olduğundan $p(x)$ in doğruluk kümesi $\{0, 1, 2\}$ dir.

• $x-2=1$ ise $x=3$ olur. Dolayısıyla $q(x)$ in doğruluk kümesi $\{3\}$ tür.

• $-2 \leq x \leq 2$ ve x tam sayı olduğundan $r(x)$ in doğruluk kümesi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir.

• $\frac{3x-6}{x+5} = 2$ ise $3x-6=2x+10$ ve $x=16$ olur. Dolayısıyla $s(x)$ in doğruluk kümesi $\{16\}$ dir.

Dikkat

Bir a sayısı $p(x)$ açık önermesini sağlıyorsa yani doğruluk kümesinin bir elemanı ise $p(a) \equiv 1$ dir.

a sayısı $p(x)$ açık önermesini sağlamıyorsa yani doğruluk kümesinin bir elemanı değilse $p(a) \equiv 0$ dir.

Örnek 41:

$p(x)$: " $x^2+x=20$, x tam sayısı"

$q(x, y)$: " $x.y=4$, x ve y doğal sayısı"

açık önermeleri veriliyor.

a) $p(3)$ ve $p(4)$ ün doğruluk değerini bulalım.

b) $q(1, 4)$ ve $q(2, 3)$ ün doğruluk değerini bulalım.

Çözüm:

a) $x=3$ için $x^2+x=12$ ve $12 \neq 20$ olduğundan $p(3) \equiv 0$ dir.

$x=4$ için $x^2+x=20$ ve $20=20$ olduğundan $p(4) \equiv 1$ dir.

b) $x=1$ ve $y=4$ için $x.y=1.4=4$ ve $4=4$ olduğundan $q(1, 4) \equiv 1$ dir.

$x=2$ ve $y=3$ için $x.y=2.3=6$ ve $6 \neq 4$ olduğundan $q(2, 3) \equiv 0$ dir.

Örnek 42:

$p(x)$: " $x^2+ax+b=2$, x gerçek sayısı"

açık önermesinin doğruluk kümesi $\{0, 2\}$ olduğuna göre, $a.b$ çarpımı kaçtır?

A) -4

B) -2

C) 0

D) 2

E) 4

Çözüm:

$p(x)$ önermesinin doğruluk kümesi $\{0, 2\}$ olduğuna göre, $p(0) \equiv 1$ ve $p(2) \equiv 1$ olmalıdır. Yani x değişkenine 0 ve 2 değerleri yazıldığında eşitliğin sağlanması gerekir. O halde,

$x=0$ için $x^2+ax+b=2$ ise $0^2+0.a+b=2$, $b=2$ olur.

$x=2$ için $x^2+ax+b=2$ ise $2^2+a.2+b=2$, $2a+b=-2$ olur.

$b=2$ olduğundan $2a+b=-2$ ise $2a+2=-2$ ve $a=-2$ bulunur.

Buradan, $a.b=(-2).2=-4$ tür.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Her ($\forall$) ve Bazı ($\exists$) Niceleyicileri

Sembolik mantıkta kullandığımız niceleyiciler "**her**" ve "**bazı**" niceleyicileridir.

- ◆ "**Her**" niceleyicisi, önüne geldiği ifadeyi gerçekleyen elemanların tamamını ifade ettiğinden bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir ve " **$\forall$** " sembolü ile gösterilir.
- ◆ "**Bazı**" niceleyicisi, önüne geldiği ifadeyi gerçekleyen elemanlardan en az bir tanesini ifade ettiğinden bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir ve " **$\exists$** " sembolü ile gösterilir.
- ◆ " **$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$** " ifadesi; "**Her reel sayının karesi sıfırdan büyük veya sıfıra eşittir.**" şeklinde
- ◆ " **$\forall x \in \mathbb{Z}, x+2 > 0$** " ifadesi; "**Her tam sayının 2 fazlası sıfırdan büyüktür.**" şeklinde
- ◆ " **$\exists x \in \mathbb{Z}^+, x^2 > 4$** " ifadesi; "**Bazı pozitif tam sayıların karesi 4 ten büyüktür.**" şeklinde
- ◆ " **$\exists x \in \mathbb{R}^+, x^2 = x$** " ifadesi; "**Bazı pozitif reel sayıların karesi kendisine eşittir**" veya "**karesi kendisine eşit olan en az bir pozitif reel sayı vardır.**" şeklinde okunur.

Ayrıca,

- ◆ "**Her tam sayının karesi 1 den büyüktür.**" ifadesi " **$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 > 1$** " şeklinde
- ◆ "**Bazı gerçek sayıların 4 fazlası 10 dan küçüktür.**" ifadesi " **$\exists x \in \mathbb{R}, x+4 < 10$** " şeklinde gösterilir.

MANTIK

Açık Önermenin Değili (Olumsuzu)

Önermelerde bazı sembollerin değili almayı öğrenmiştik. " $=$ ", " $\neq$ ", " $<$ ", " $\geq$ ", " $>$ ", " $\leq$ ", ... gibi.

Bir açık önermenin değili alınırken,

- ♦ $\exists x, p(x)$ açık önermesinin değili $\forall x, p'(x)$ şeklinde,
- ♦ $\forall x, p(x)$ açık önermesinin değili $\exists x, p'(x)$ şeklinde ifade edilir.
 - $p(x)$: " $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 < 0$ " önermesinin değili
 $p'(x)$: " $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 \geq 0$ " şeklinde
 - $q(x)$: " $\forall x \in \mathbb{Z}^+, x^2 + x = 6$ " önermesinin değili
 $q'(x)$: " $\exists x \in \mathbb{Z}^+, x^2 + x \neq 6$ " şeklinde
 - $s(x)$: " $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0$ " önermesinin değili
 $s'(x)$: " $\exists x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 0$ " şeklinde yazılır.
- ♦ Ayrıca önerme içerisinde " $\wedge$ " bağlacı kullanılmışsa değili " $\vee$ ", " $\vee$ " bağlacı kullanılmışsa değili " $\wedge$ " şeklinde alınır.

Örnek 43:

$$p : \forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + x \geq 0$$

$$q : \exists x \in \mathbb{R}^-, 2^x + 1 > 0$$

$$s : \exists x, y \in \mathbb{N}, x + y > 4$$

önermelerinin değili yazalım.

Çözüm:

$$p' : \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + x < 0$$

$$q' : \forall x \in \mathbb{R}^-, 2^x + 1 \leq 0$$

$$s' : \forall x, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 4 \text{ olur.}$$

! Dikkat

- ♦ **Tanım:** Bir kavram ya da terimin tanımlı veya tanımsız terimler kullanılarak ve özelliklerinin belirtilerek açıklanmasına "**tanım**" denir.
 Nokta, doğru, düzlem tanımsız terimlerdir.
- ♦ **Aksiyyom:** İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önermelere "**aksiyyom**" denir.
- ♦ **Teorem:** Doğruluğu ispatsız kabul görmeyen önermelere "**teorem**" denir.
 Örneğin; "Bir üçgenin iç açıları toplamı 180° dir." önermesi doğrudan kabul edilebilir bir önerme değildir. Belli kavram ve tanımlamalar kullanılarak ispat zorunluluğu vardır.
- ♦ **İspat:** Bir teoremin hipotezi doğru iken hükmünün de doğru olduğunu göstermek için yapılan işlemlerin tamamına "**teoremin ispatı**" denir.

Önermeler ve Bileşik Önermeler

İLK ADIM SORULARI

$$7. \quad p \equiv 1$$

$$q \equiv 1$$

$$r \equiv 0$$

denklikleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

$$A) p \Rightarrow q \equiv 1$$

$$B) p \Rightarrow r \equiv 0$$

$$C) p \Leftrightarrow q \equiv 1$$

$$D) q \Leftrightarrow r \equiv 0$$

$$E) q \Leftrightarrow p \equiv 0$$

$$8. \quad "a.b=0 \Rightarrow a=0 \text{ veya } b=0 \text{ dir.}"$$

koşullu önermesi için,

I. " $a.b=0$ " hipotezdir.

II. " $a=0$ veya $b=0$ " hükümdür.

III. Tersi, " $a.b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ve $b \neq 0$ " dir.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) I ve II

D) I ve III

E) I, II ve III

EKSTREM BİLGİLER

- ◆ Bileşenlerinin her doğruluk değeri için doğruluk değeri daima 1 olan bileşik önermelere **totoloji** denir.

Bileşenlerinin her doğruluk değeri için doğruluk değeri daima 0 olan bileşik önermelere **çelişki** denir.

p bileşik önerme olmak üzere,

$p=1$ ise p totolojidir.

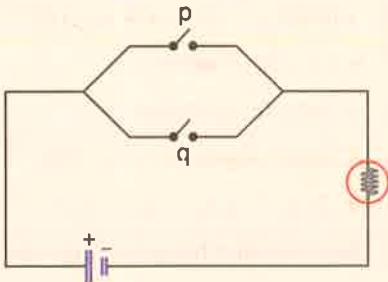
$p=0$ ise p çelişkidir.

- ◆ $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinde p önermesine **hipotez**, q önermesine **hüküm** denir.

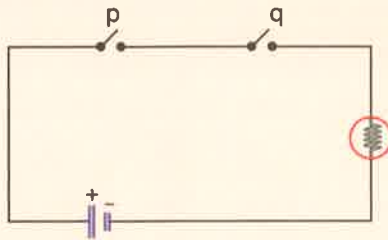
" $x=2 \Rightarrow 5^x=25$ tır."

koşullu önermesinde $x=2$ hipotez, $5^x=25$ ise hükümdür.

- ◆ $p \vee q$ önermesi elektrik devrelerinde paralel bağlama ile ifade edilir.



- ◆ $p \wedge q$ önermesi elektrik devrelerinde seri bağlama ile ifade edilir.



Örnek 44:

Aşağıda verilen önermelerin değerini yazalım.

- a) $p : "(\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 > 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x+1 \leq 3)"$
 b) $q : "(\exists x \in \mathbb{Z}^+, \frac{x+2}{x-2} = 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R}^+, 3^x \geq 0)"$

Çözüm:

Çözüm:

- a) $p' : "(\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x+1 > 3)"$
 b) $q' : "(\forall x \in \mathbb{Z}^+, \frac{x+2}{x-2} \neq 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}^+, 3^x < 0)"$ olur.

Örnek 45:

$p(x) : "(x < 0) \Rightarrow (2^x < 1)"$

önermesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğundan

$p(x) : "(x < 0)' \vee (2^x < 1) \equiv (x \geq 0) \vee (2^x < 1)$ olur."

Dolayısıyla $p'(x) : "(x < 0) \wedge (2^x \geq 1)"$ olur.

Örnek 46:

" $\exists x \in \mathbb{Z}^+, x > 2$ ise $x^2 + x \leq 0$ " önermesinin,

- a) karşıtını b) tersini c) karşıt tersini yazalım.

Çözüm:

- a) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$ olduğundan,
 " $x^2 + x \leq 0$ ise $\exists x \in \mathbb{Z}^+, x > 2$ "
 b) $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ olduğundan,
 " $\forall x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 2$ ise $x^2 + x > 0$ "
 c) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ olduğundan,
 " $x^2 + x > 0$ ise $\forall x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 2$ " şeklinde yazılır.

ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Test : 01

1. Aşağıda verilen ifadelerden hangisi bir önerme değildir?

- A) Türkiye 7 bölgedir.
- B) Haziran ayı bir kış ayıdır.
- C) Asal sayılar tektir.
- D) Yeşil en güzel renktir.
- E) Negatif sayılar sıfırdan küçüktür.

2. Aşağıda verilen önermelerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

- A) " $2+6=12$ dir."
- B) "En büyük negatif tam sayı -99 dur."
- C) " $2^3 > (-2)^3$ tür."
- D) "Tüm asal sayılar tektir."
- E) "En küçük asal sayı 1 dir."

3. p : " $6^2+8^2=10^2$ dir."

q : "Çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir."

r : " $2^2+(-2)^2=0$ dir."

önergeleri için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $p \equiv q$
- B) $q \equiv r'$
- C) $p' \equiv r$
- D) $p \vee q \equiv 1$
- E) $q \wedge r \equiv 1$

4. Aşağıdaki önermelerden hangisinin değili yanlış alınmıştır?

- A) "4 çift sayıdır." önermesinin değili "4 tek sayıdır."
- B) "5 sayısı pozitifdir." önermesinin değili "5 sayısı pozitif değildir."
- C) "Reel sayıların karesi pozitifdir." önermesinin değili "Reel sayıların karesi pozitif değildir."
- D) "Ankara İç Anadolu Bölgesi'nde değildir." önermesinin değili "Ankara İç Anadolu Bölgesi'ndedir."
- E) "İki negatif sayının toplamı negatiftir." önermesinin değili "İki negatif sayının toplamı negatif değildir."

5. p : " $(-1)+(+1) \neq 0$ dir."

q : " $(-1).(+1)=(-1)$ dir."

r : " $(-1)^2+(-1)^3=0$ dir."

önergeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki bileşik önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0 dır?

- A) $p \vee q$
- B) $q \vee p$
- C) $p \Rightarrow r$
- D) $p' \wedge q$
- E) $q \Rightarrow p$

6. Aşağıda verilen denklıklarden hangisi yanlıştır?

- A) $(p \vee 1) \vee p' \equiv 1$
- B) $(p \wedge 1) \vee p' \equiv 0$
- C) $(p \wedge p') \wedge 1 \equiv 0$
- D) $(p' \vee 0) \wedge p' \equiv p'$
- E) $p \vee (0 \wedge p') \equiv p$

ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Test : 01

7. $(p \wedge q')' \vee (p' \wedge 1)'$
önermesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 0 C) p D) q E) q'



8. p, q ve r önermeleri için,

$$p \vee q \equiv 0$$

$$q \wedge r \equiv 1$$

olduğuna göre, aşağıda verilen denkliklerden hangisi doğrudur?

A) $p \Rightarrow r \equiv q'$ B) $p \vee r' \equiv 1$ C) $p \vee (q \vee r') \equiv 1$
D) $p \Leftrightarrow r \equiv 0$ E) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r') \equiv 1$

www.bireyakademi.com

9. Aşağıda verilen koşullu önermelerden hangisi bir gerektirmedir?

A) $1 \Rightarrow (p \wedge 0)$ B) $(p \vee p') \Rightarrow (p \wedge p')$
C) $(p \vee p') \Rightarrow p$ D) $(p \vee 1) \Rightarrow 0$
E) $(p \wedge 1) \Rightarrow (p \vee 0)$

10. "Geometrik şekil üçgen ise iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir."

koşullu önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Geometrik şekil üçgen değil ise iç açılarının ölçüleri toplamı 180° değildir."
B) "İç açılarının ölçüleri toplamı 180° değil ise geometrik şekil üçgen değildir."
C) "İç açılarının ölçüleri toplamı 180° ise geometrik şekil üçgendir."
D) "Geometrik şekil üçgen değil ise iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir."
E) "İç açılarının ölçüleri toplamı 180° değil ise geometrik şekil üçgendir."



11. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

önermesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) q B) $p' \Rightarrow r$ C) $p \Rightarrow r$ D) 0 E) 1

www.bireyakademi.com



12. I. $p(x) : " \forall x \in \mathbb{Z}, 2x - 4 \leq 0 "$ ise $p'(x) : " \exists x \in \mathbb{Z}, 2x - 4 > 0 "$
II. $q(x) : " \exists x \in \mathbb{R}^+, 3x - 4 = 5 "$ ise $q'(x) : " \forall x \in \mathbb{R}^+, 3x - 4 \neq 5 "$
III. $s(x) : " \forall x \in \mathbb{Z}^-, x^2 \leq x "$ ise $s'(x) : " \exists x \in \mathbb{Z}^+, x^2 \geq x "$
ifadelerinden hangilerinde önermelerin değil doğru alınmıştır?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

www.bireyakademi.com

bryPLE

Ünite II

Kümeler

Yazardan

Sevgili öğrenciler!

Bu ünite de küme kavramı, alt küme, kümelerle işlem yapabilme, küme problemleri ve kartezyen çarpım konuları işlenecektir.

İşleyeceğimiz diğer konularda yine karşılaşacağınız ve özelliklerini kullanacağınız bir konu olduğundan konunun temel bilgilerini ve çözüm metodlarını iyi öğrenmeniz gerekir.

KAZANIMLAR

9.2.1 : Kümelerde Temel Kavramlar

9.2.1.1 : Kümelerle ilgili temel kavramlar hatırlatılır.

9.2.1.2 : Alt kümeyi kullanarak işlemler yapar.

9.2.1.3 : İki kümenin eşitliğini kullanarak işlemler yapar.

9.2.2 : Kümelerde İşlemler

9.2.2.1 : Kümelerde birleşim, kesişim, fark, tümleme işlemleri yardımıyla problemler çözer.

9.2.2.2 : İki kümenin kartezyen çarpımıyla ilgili işlemler yapar.

KÜMELER

Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

1. KÜMELERLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Küme; iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin oluşturduğu topluluk olarak tanımlanabilir. Kümeyi oluşturan farklı nesnelerin herbirine **kümenin elemanı** denir.

! Dikkat

Kümenin belirli olabilmesi için kümeyi oluşturan elemanların iyi tanımlanmış olması, yani herkes tarafından aynı biçimde anlaşılması gerekir.

Örnek 1:

Aşağıda verilenlerden hangileri birer küme belirtir? Bulalım.

- a) 5 ten küçük doğal sayılar
- b) Bazı asal sayılar
- c) Alfabemizdeki sesli harfler
- d) Haftanın sevilen günleri
- e) Haftanın "C" ile başlayan günleri.

Çözüm:

- a) 5 ten küçük doğal sayılar; iyi tanımlanmış bir ifadedir. Çünkü bu sayıların 0, 1, 2, 3 ve 4 olduğu bilinmektedir. O halde 5 ten küçük doğal sayılar bir küme belirtir.
- b) Bazı asal sayılar; iyi tanımlanmış bir ifade değildir. Çünkü asal sayılar sonsuzdur. Hangi asal sayılar olduğu cümlede belirgin olmadığından bazı asal sayılar ifadesi küme belirtmez.
- c) Alfabemizdeki sesli harfler; iyi tanımlanmış bir ifadedir. Çünkü bu harfler, a, e, ı, i, o, ö, u ve ü'dür. O halde verilen ifade bir küme belirtir.
- d) Haftanın sevilen günleri; iyi tanımlanmış bir ifade değildir. Çünkü herkesin sevdiği gün veya günler birbirinden farklı olabilir. O halde verilen ifade bir küme belirtmez.
- e) Haftanın "C" ile başlayan günleri; iyi tanımlanmış bir ifadedir. Çünkü bu günler cuma ve cumartesi günleridir. O halde verilen ifade bir küme belirtir.

Eleman Olma ve Eleman Sayısı

Kümeler genellikle **A, B, C, K, L, M** gibi büyük harflerle gösterilir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin herbirine **kümenin elemanı** dendiğini biliyoruz.

Bir nesnenin, bir kümenin elemanı olduğu "**∈**" sembolü kullanılarak gösterilir ve "**elemanıdır**" diye okunur.

- ♦ 1 sayısı, A kümesinin elemanı ise "**1 ∈ A**" şeklinde gösterilir ve "**1 elemanıdır A kümesinin**" diye okunur.
- ♦ d harfi, B kümesinin elemanı ise "**d ∈ B**" şeklinde gösterilir ve "**d elemanıdır B kümesinin**" diye okunur.
- ♦ Salı bir K kümesinin elemanı ise, "**salı ∈ K**" şeklinde gösterilir ve "**salı elemanıdır K kümesinin**" diye okunur.

Bir nesne belirtilen kümenin elemanı değilse "**∉**" sembolü kullanılır ve "**elemanı değildir**" diye okunur.

- ♦ 5 sayısı, A kümesinin elemanı değilse, "**5 ∉ A**" şeklinde gösterilir ve "**5 elemanı değildir A kümesinin**" diye okunur.
- ♦ Mavi, B kümesinin bir elemanı değilse "**Mavi ∉ B**" şeklinde gösterilir ve "**Mavi elemanı değildir B kümesinin**" diye okunur.

O halde; bir x elemanı A kümesine ait ise "**x ∈ A**" ile A kümesine ait değilse "**x ∉ A**" ile gösterilir.

KÜMELER

Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

Örnek 2:

A kümesi; "SEVGİ" kelimesinin harfleri, B kümesi; "haftanın P ile başlayan günleri" olarak veriliyor.

- a) A ve B kümesinin elemanlarını belirleyerek bunları sembolle ifade edelim.
- b) A ve B kümesine ait olmayan bazı elemanlar bularak bunları sembolle ifade edelim.

Çözüm:

- a) "SEVGİ" kelimesinin harfleri S, E, V, G ve İ dir. O halde bu harfler A kümesinin birer elemanıdır. Bu durum, $S \in A$, $E \in A$, $V \in A$, $G \in A$ ve $I \in A$ şeklinde ifade edilir.

Haftanın P ile başlayan günleri; pazar, pazartesi ve perşembedir. O halde bu günler B kümesinin birer elemanıdır. Bu durum; $pazar \in B$, $pazartesi \in B$ ve $perşembe \in B$ şeklinde ifade edilir.

- b) B, C ve D harfleri SEVGİ kelimesinin harfleri değildir. O halde bu harfler A kümesinin elemanı olmayacaktır. Bu durum, $B \notin A$, $C \notin A$ ve $D \notin A$ şeklinde ifade edilir.

Salı, çarşamba ve cuma, haftanın P ile başlayan günlerinden olmadığı için bu günler B kümesine ait değildir. Bu durum, $salı \notin B$, $çarşamba \notin B$ ve $cuma \notin B$ şeklinde ifade edilir.

! Dikkat

Bir kümeyi oluşturan elemanların sayısına o kümenin **eleman sayısı** denir. A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ şeklinde ifade edilir. O halde; n elemanlı bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)=n$ dir.

Örnek 3:

A kümesi "3 ile 7 arasındaki doğal sayılar,

B kümesi "asal rakamlar",

C kümesi "SARI kelimesinin harfleri" şeklinde veriliyor.

A, B ve C kümesinin elemanlarını belirleyerek eleman sayılarını bulalım.

Çözüm:

- 3 ile 7 arasındaki doğal sayılar; 4, 5 ve 6 olduğundan A kümesinin eleman sayısı 3 tür. O halde $s(A)=3$ olur.
- Asal rakamlar 2, 3, 5 ve 7 olduğundan B kümesinin eleman sayısı 4 tür. O halde $s(B)=4$ olur.
- SARI kelimesinin harfleri S, A, R ve I olduğundan C kümesinin eleman sayısı 4 tür. O halde $s(C)=4$ olur.

Kümelerin Gösterimi

Kümeler üç değişik biçimde gösterilirler. Bunlar, **liste yöntemi**, **Venn şeması yöntemi** ve **ortak özellik yöntemi**dir.

- a) **Liste Yöntemi** : Kümeyi oluşturan elemanların "{ }" parantezleri arasında virgülle ayrılarak gösterilmesi yöntemidir.

Elemanları 0, 1, 2, 3 ve 4 olan bir A kümesi liste yöntemiyle

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

şeklinde gösterilir.

- Küme içerisinde her eleman yalnız bir kez yazılmalıdır.
- Küme içerisinde elemanların yerleri değiştirilebilir. Elemanlarının yerleri değiştirilmiş bir küme farklı bir küme değildir.

Örneğin A kümesi; $A=\{4, 3, 2, 1, 0\}$, $A=\{3, 0, 2, 1, 4\}$, $A=\{1, 4, 0, 2, 3\}$ gibi gösterilebilir.

KÜMELER

Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

Örnek 4:

A kümesi; "KELEBEK kelimesinin harfleri" olarak tanımlanıyor.

Buna göre, A kümesinin liste yöntemi ile gösterimi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

- A) $A = \{\text{KELEBEK}\}$ B) $A = \{K, E, L, E, B, E, K\}$
C) $\{KE, LE, BEK\}$ D) $A = \{K, E, L, B\}$
E) $A = \{K, E, L, B, M\}$

Çözüm:

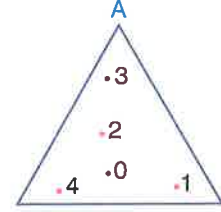
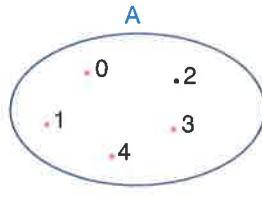
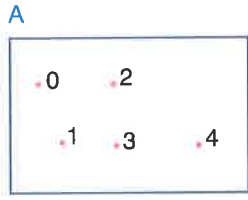
KELEBEK kelimesinin harfleri K, E, L, E, B, E ve K dir. Küme içerisinde elemanlar yalnız bir kez yazılabileceğinden A kümesinin liste yöntemiyle yazılışı

$$A = \{K, E, L, B\}$$

şeklinde olacaktır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

b) Venn Şeması Yöntemi : Kümenin elemanlarının kapalı bir şekil içerisine, her elemanın önüne "." konularak yazılması yöntemidir. Elemanları 0, 1, 2, 3 ve 4 olan kümeyi liste yöntemiyle göstermiştik. Aynı kümeyi Venn şeması yöntemiyle



gibi şekillerle gösterebiliriz.

♦ Venn şemasında kullanılacak kapalı şekiller dikdörtgen, kare, çember, üçgen gibi geometrik şekiller olabilir.

Örnek 5:

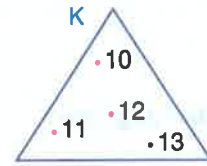
K kümesi; "14 ten küçük iki basamaklı doğal sayılar" olarak tanımlanıyor.

Buna göre, K kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

- A) $K = \{10, 11, 12, 13\}$ B) K
-
- C) K
-
- D) K
-
- E) K
-

Çözüm:

14 ten küçük iki basamaklı doğal sayılar 10, 11, 12 ve 13 tür. Dolayısıyla K kümesi Venn şeması yöntemiyle



şeklinde gösterilebilir.

A seçeneğinde verilen gösterimin K kümesinin liste yöntemiyle gösterimi olduğuna dikkat ediniz.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

KÜMELER

İLK ADIM SORULARI

1. $A = \{x \mid x \text{ asal rakam}\}$

$B = \{x \mid x, 10 \text{ sayısını tam böler, } x \in \mathcal{N}\}$

olduğuna göre, A ve B kümelerinin eleman sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

2. $A = \{x : x^2 \leq 9, x \in \mathcal{N}\}$

kümesi tanımlanıyor.

Buna göre,

I. $s(A) = 4$

II. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

III. $-3 \in A$

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II
C) Yalnız III D) I ve II
E) II ve III

c) **Ortak Özellik Yöntemi** : Bir kümenin elemanlarının, elemanların sahip olduğu ortak özelliklerinin belirtilmesi şeklinde gösterimdir.

Elemanları 0, 1, 2, 3 ve 4 olan A kümesini ortak özellik yöntemiyle gösterelim.

Bu elemanların ortak özelliklerinden biri doğal sayı olmalarıdır. Fakat doğal sayılar tanımlaması A kümesinin tanımlanması için yeterli değildir. Çünkü A kümesinde bulunan doğal sayılar 5 ten küçük doğal sayılardır.

O halde A kümesi $A = \{x \mid x < 5 \text{ ve } x \in \mathcal{N}\}$ şeklinde gösterilebilir.

! Dikkat

Bir A kümesinin ortak özellik yöntemi;

♦ $A = \{x \mid x \text{ in tanımlayıcı özellikleri}\}$ şeklinde gösterilir.

"x|" ve "x:" ifadesi "x öyle ki" şeklinde okunur.

Örnek 6:

$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin ortak özellik yöntemiyle yazılışı aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) $A = \{x \mid x < 9, x \in \mathcal{N}\}$

B) $A = \{x \mid x > 3, x \in \mathcal{N}\}$

C) $A = \{x \mid 3 < x < 9, x \in \mathcal{N}\}$

D) $A = \{x \mid 1 < x < 10, x \in \mathcal{Z}\}$

E) $A = \{x \mid 4 < x < 8, x \in \mathcal{Z}\}$

Çözüm:

A kümesini oluşturan 4, 5, 6, 7 ve 8 sayıları 3 ile 9 arasındaki doğal sayılardır.

A kümesi ortak özellik yöntemi ile,

$$A = \{x \mid 3 < x < 9, x \in \mathcal{N}\}$$

şeklinde gösterilebilir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

Bir küme ortak özellik yöntemiyle birden fazla değişik biçimde yazılabilir.

KÜMELER

Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

Sonlu ve Sonsuz Küme

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{x \mid x > 10, x \text{ tam sayı}\}$$

kümelerini inceleyelim.

- ♦ A kümesi 1, 2, 3, 4, 5, ve 6 elemanlarından oluşan 6 elemanlı bir küme olduğundan A sonlu bir kümedir.
- ♦ B kümesi 10 dan büyük tam sayılar olarak tanımlanmıştır. Bu sayılar 11, 12, 13, ... olduğundan bu elemanlar sayılamayacak kadar çoktur. Dolayısıyla B kümesi sonsuz bir kümedir.

! Dikkat

Elemanları sayılabilir çoklukta olan kümelere **sonlu küme**, sayılamayacak çoklukta olan kümelere ise **sonsuz küme** adı verilir.

Örnek 7:

$$A = \{x : x > -4, x \text{ negatif tam sayı}\}$$

$$B = \{x : -3 < x < 4, x \text{ tam sayı}\}$$

$$C = \{x : x > 0, x \text{ tam sayı}\}$$

kümeleri tanımlanıyor.

Bu kümelerden hangileri sonsuz bir kümedir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) II ve III

Çözüm:

$A = \{x : x > -4, x \text{ negatif tam sayı}\}$ kümesi -4 ten büyük negatif tam sayılardır. O halde, $A = \{-3, -2, -1\}$ olacağından A kümesi 3 elemanlı sonlu bir kümedir.

$B = \{x : -3 < x < 4, x \text{ tam sayı}\}$ kümesi -3 ile 4 arasındaki tam sayılardır. O halde, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ olacağından B kümesi 6 elemanlı sonlu bir kümedir.

$C = \{x : x > 0, x \text{ tam sayı}\}$ kümesi 0 dan büyük tam sayılardır. O halde, $C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ olacağından C kümesinin elemanları sayılamayacak çokluktadır. Dolayısıyla C sonsuz bir kümedir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Boş Küme

Elemanı bulunmayan kümeye **boş küme** adı verilir. Boş küme " $\emptyset$ " veya " $\{\}$ " sembollerinden biri ile gösterilir. Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. $A = \{\{\}$ veya $A = \{\emptyset\}$ kümeleri boş küme değildir. Bu kümeler 1 elemanlıdır.

Örnek 8:

$$A = \{x \mid x < 3, x \text{ doğal sayı}\}$$

$$B = \{x \mid x^2 < 0, x \text{ tam sayı}\}$$

$$C = \{\text{Haftanın K ile başlayan günleri}\}$$

kümelerinden hangileri boş kümedir? Bulalım.

Çözüm:

A kümesi; "3 ten küçük doğal sayılar" olarak tanımlanmıştır. Bu sayılar 0, 1 ve 2 olacağından $A = \{0, 1, 2\}$ olur. A kümesi boş küme değildir.

B kümesi; "Karesi sıfırdan küçük olan tam sayılar" şeklinde tanımlanmıştır. Fakat hiç bir tam sayının karesi negatif bir sayı olamayacağından B kümesinin elemanı yoktur. O halde B kümesi boş kümedir.

C kümesi; "haftanın K ile başlayan günleri" olarak tanımlanmıştır. Fakat haftanın K ile başlayan herhangi bir günü yoktur. O halde C kümesi boş kümedir.

KÜMELER

Örnek 9:

Aşağıda verilenlerden hangisi bir küme belirtmez?

- A) "10 ile 15 arasındaki doğal sayılar"
- B) "1 ile 2 arasındaki doğal sayılar"
- C) "110222 sayısının rakamları"
- D) "5 ten büyük rakamlar"
- E) "İstanbul'un bazı ilçeleri"

Çözüm:

- A) "10 ile 15 arasındaki doğal sayılar" ifadesi iyi tanımlanmış bir ifade olduğundan küme belirtir. Bu küme; {11, 12, 13, 14} olur.
- B) "1 ile 2 arasındaki doğal sayılar" ifadesi iyi tanımlanmış bir ifade olduğundan bir küme belirtir. Fakat bu ifadeyi gerçekleyen sayı olmadığından bu küme boş kümedir.
- C) "110222" sayısının rakamları" iyi tanımlanmış bir ifade olduğundan küme belirtir. Bu küme {1, 0, 2} dir.
- D) "5 ten büyük rakamlar" ifadesi iyi tanımlanmış bir ifade olduğundan küme belirtir. Bu küme {6, 7, 8, 9} dur.
- E) "İstanbul'un bazı ilçeleri" ifadesi iyi tanımlanmış ve herkes tarafından aynı şekilde anlaşılacak bir ifade olmadığından küme belirtmez.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 10:

$A = \{x \mid 10 < x < 25, x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi tanımlanıyor.

Buna göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9

Çözüm:

A kümesi 10 ile 25 arasında 3 ün tam katı olan sayılardan oluşmaktadır. O halde,

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24\} \text{ olur.}$$

Dolayısıyla, $s(A) = 5$ tir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

Örnek 11:

$$A = \{x : x^2 \leq 4, x \text{ tam sayı}\}$$

$$B = \{x : x > -4, x \text{ negatif tam sayı}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıda verilen ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) $s(A) = 5$ tir.
- B) $s(B) = 3$ tür.
- C) $-3 \in A$ dır.
- D) A ve B nin ortak elemanı mevcuttur.
- E) $-2 \in B$ dir.

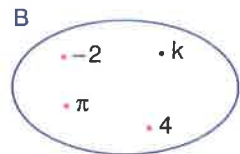
Çözüm:

- Karesi 4 veya 4 ten küçük olan tam sayılar 2, 1, 0, -1 ve -2 olacağından $A = \{2, 1, 0, -1, -2\}$ olur.
- -4 ten büyük negatif tam sayılar -3, -2 ve -1 olacağından, $B = \{-3, -2, -1\}$ olur.

- A) A kümesi 5 elemanlı olduğundan $s(A) = 5$ tir.
- B) B kümesi 3 elemanlı olduğundan $s(B) = 3$ tür.
- C) A kümesinde -3 elemanı bulunmamaktadır. Dolayısıyla $-3 \in A$ ifadesi yanlıştır.
- D) -2 ve -1 sayıları A ve B nin ortak elemanlarıdır.
- E) -2 sayısı B kümesinin bir elemanı olduğundan $-2 \in B$ ifadesi doğrudur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 12:



kümeleri veriliyor.

Buna göre,

- I. $9 \in A$
- II. $4 \in B$
- III. $12 \notin A$
- IV. $s(A) = s(B)$
- V. $-4 \notin B$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

- A) 5
- B) 4
- C) 3
- D) 2
- E) 1

KÜMELER

Çözüm:

A kümesi; $A=\{4, 9, 12, 13\}$ ve B kümesi; $B=\{-2, k, \pi, 4\}$ tür.

- I. 9, A kümesinin bir elemanıdır. O halde $9 \in A$ ifadesi doğrudur.
 - II. 4, B kümesinin bir elemanıdır. O halde $4 \in B$ ifadesi doğrudur.
 - III. 12, A kümesinin bir elemanıdır. O halde $12 \notin A$ ifadesi yanlıştır.
 - IV. $s(A)=4$ ve $s(B)=4$ olduğundan $s(A)=s(B)$ eşitliği doğrudur.
 - V. -4, B kümesinin bir elemanı değildir. O halde $-4 \notin B$ ifadesi doğrudur.
- Görüldüğü gibi verilen ifadelerden 4 tanesi doğrudur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 13:

$$A=\{x \mid 0 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$$

$$B=\{x \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$$

kümeleri veriliyor.

Fatih, A ve B kümelerini liste yöntemi ile yazıyor. Daha sonra A kümesinde bulunan bazı elemanları B kümesine aldığında B kümesinin eleman sayısının değişmeyeceğini fark ediyor.

Buna göre, Fatih'in A kümesinden B kümesine aldığı elemanlar hangileri olabilir?

- A) 4, 5
- B) 3, 4
- C) -3, -2, -1
- D) 1, 2, 3
- E) 0, 1, 2

Çözüm:

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ tür.

A kümesinden B kümesine alınan elemanlar B kümesinin eleman sayısını değiştirmedikçe göre, bu elemanların aynı B kümesinde de olmalıdır. Çünkü kümede elemanlar yalnız bir kez yazılabilir.

O halde hem A da hem B de olan elemanlar Fatih'in A dan B ye aldığı elemanlar olabilir. Bunlar; 1, 2 ve 3 tür.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

3. $A=\{a, b, \{a, c\}, \{d\}\}$ kümesi veriliyor.
Buna göre, aşağıda verilenlerden hangileri yanlıştır?

- I. $s(A)=4$
- II. $c \in A$
- III. $\{d\} \in A$
- IV. $\{a, b\} \in A$

- A) I ve IV
- B) I ve II
- C) II ve IV
- D) III ve IV
- E) II ve III

4. Aşağıda verilen kümelerden hangisi sonlu kümedir?

- A) $A=\{x \mid x < 5, x \text{ tam sayı}\}$
- B) $B=\{x \mid x > 0, x \text{ çift sayı}\}$
- C) $C=\{x \mid 1 < x < 10, x \text{ gerçek sayı}\}$
- D) $D=\{x \mid x^2 > 9, x \text{ tam sayı}\}$
- E) $E=\{x \mid x < 5, x \text{ doğal sayı}\}$

KÜMELER

Alt Küme

Alt Küme

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri verilsin.

Dikkat edilirse, A kümesinde bulunan tüm elemanlar B kümesinde bir elemandır.

Bu durum, "*A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir*" şeklinde ifade edilir.

! Dikkat

Bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı oluyorsa A kümesine B kümesinin *alt kümesi* denir.

$A \subset B$ veya $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir ve "*A alt kümesidir B nin*" diye okunur.

Ayrıca, B kümesi A kümesinin tüm elemanlarını kapsadığında bu durum " $B \supseteq A$ " şeklinde gösterilir ve "*B kapsar A yı*" diye okunur.

Yani, $A \subseteq B$ ile $B \supseteq A$ aynı ifadelerdir.

♦ A kümesi B kümesinin alt kümesi değil ise bu durum " $A \not\subset B$ " ile gösterilir ve "*A alt kümesi değildir B nin*" şeklinde okunur.

♦ $A \subseteq B$ ise bu durum Venn şeması yöntemiye



şeklinde gösterilir.

Örnek 14:

$$K = \{1, 2, 3\}$$

$$L = \{a, b, 1, 2, 3\}$$

$$M = \{a, b, 1\}$$

kümeleri veriliyor.

K, L ve M kümelerinin alt küme ilişkilerini inceleyelim.

Çözüm:

- K kümesinin her elemanı L kümesinin de elemanı olduğundan $K \subseteq L$ dir.
- K kümesinin her elemanı M kümesinin elemanı olmadığından, $K \not\subseteq M$ dir.
- M kümesinin her elemanı L kümesinin de elemanı olduğundan $M \subseteq L$ dir.
- M kümesinin her elemanı K kümesinin elemanı olmadığından $M \not\subseteq K$ dir.
- L kümesinin her elemanı K kümesinin de elemanı olmadığından $L \not\subseteq K$, L kümesinin her elemanı M kümesinin de elemanı olmadığından $L \not\subseteq M$ dir.

Örnek 15:

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, b, c, 1\}$$

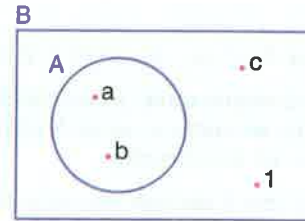
kümeleri veriliyor.

A ve B kümelerinin alt küme ilişkisini inceleyelim ve bu kümeleri şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

A kümesinde bulunan elemanların tümü B kümesinin de elemanı olduğundan $A \subseteq B$ dir.

A ve B kümelerinin şema yöntemi ile gösterirsek,



şeklinde olacaktır.

KÜMELER

Alt Küme

Alt Kümenin Özellikleri

- Boş küme her kümenin alt kümesidir. Her A kümesi için $\emptyset \subseteq A$ dir.
- Her küme kendisinin bir alt kümesidir. Her A kümesi için $A \subseteq A$ dir.
- $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A ve B aynı kümelerdir.
- $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

Örnek 16:

$A = \{a, b\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin tüm alt kümelerini bulalım.

Çözüm:

0 elemanlı alt kümeler : $\{ \}$
 1 elemanlı alt kümeler : $\{a\}, \{b\}$
 2 elemanlı alt kümeler : $\{a, b\}$ dir.
 $A = \{a, b\}$ kümesinin 4 alt kümesi vardır.

Örnek 17:

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin tüm alt kümelerini bulalım.

Çözüm:

0 elemanlı alt kümeler : $\{ \}$
 1 elemanlı alt kümeler : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
 2 elemanlı alt kümeler : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
 3 elemanlı alt kümeler : $\{1, 2, 3\}$ tür.
 $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin 8 alt kümesi vardır.

! Dikkat

$s(A) = n$ olmak üzere, A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı, 2^n ile hesaplanır.

Örnek 18:

$A = \{x : x \text{ çift rakamdır.}\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre, A kümesinin alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 16 B) 32 C) 48 D) 64 E) 128

Çözüm:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ olacağından $s(A) = 5$ tir. 5 elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı: $2^5 = 32$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 19:

Alt kümelerinin sayısı 16 olan küme kaç elemanlıdır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n olduğundan,

$$2^n = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4$$

$$\Rightarrow n = 4 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

KÜMELER

Alt Küme

Örnek 20:

$A = \{1, \{2\}, \{1, 4\}, \emptyset\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin kendisi hariç alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 15 D) 16 E) 31

Çözüm:

A kümesi 4 elemanlıdır. A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı $2^4 = 16$ dir. Bu 16 alt küme içerisinde A kümesinin kendisi de mevcuttur. Dolayısıyla, kendisi hariç alt kümelerinin sayısı $16 - 1 = 15$ olacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

n elemanlı bir kümenin kendisi hariç alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

Örnek 21:

Alt küme sayısı ile kendisi hariç alt kümelerinin sayısının toplamı 31 olan küme kaç elemanlıdır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm:

n elemanlı bir kümenin;

alt küme sayısı : 2^n

kendisi hariç alt küme sayısı : $2^n - 1$

olduğundan,

$$2^n + 2^n - 1 = 31 \Rightarrow 2 \cdot 2^n = 32$$

$$\Rightarrow 2^n = 16$$

$$\Rightarrow n = 4 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Çözüm:

A kümesinin alt kümelerinde a'nın eleman olarak bulunmadığı alt kümeler, a hariç diğer 4 elemanla yazılabilecek tüm alt kümelerdir.

$$A = \{\cancel{a}, \underbrace{b, c, d, e}_{4 \text{ eleman}}\}$$

O halde sonuç $2^4 = 16$ olacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 23:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 elemanları birlikte bulunur?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

Çözüm:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinde 1 ve 2 bulunacağına göre, bu alt kümeler 1 ve 2'nin yanına $\{3, 4, 5\}$ kümesinin her alt kümesinin eklenmesiyle elde edilecektir.

$$A = \{1, 2, \underbrace{3, 4, 5}_{\text{Tüm alt kümeler}}\}$$

$$B = \{1, 2, \dots\}$$

$\{3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^3 = 8$ olduğundan sonuç 8 dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 22:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinden kaç tanesinde "a" eleman olarak bulunmaz?

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

KÜMELER

Alt Küme

Örnek 24:

$$A = \{\text{İstanbul, Edirne}\}$$

$$B = \{\text{Türkiye'nin tüm illeri}\}$$

$$C = \{\text{Marmara Bölgesi'nin tüm illeri}\}$$

kümeleri veriliyor.

A, B ve C kümeleri arasındaki alt küme ilişkisi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) $A \subseteq C \subseteq B$

B) $A \subseteq B \subseteq C$

C) $B \subseteq A \subseteq C$

D) $B \subseteq C \subseteq A$

E) $C \subseteq A \subseteq B$

Çözüm:

İstanbul ve Edirne illerimiz Marmara Bölgesi'ndedir. Dolayısıyla A kümesi C kümesinin alt kümesidir.

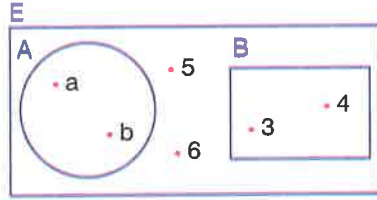
Marmara Bölgesi'nde bulunan illerin tamamı aynı zamanda Türkiye'nin illeri de olduğundan C kümesi B kümesinin alt kümesidir.

$A \subseteq C$ ve $C \subseteq B$ olduğundan $A \subseteq C \subseteq B$ yazılabilir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan en geniş kümeye "evrensel küme" adı verilir. Evrensel küme genellikle "E" harfi ile gösterilir.



$$A \subseteq E$$

$$B \subseteq E \text{ dir.}$$

Yukarıdaki şemada A ve B kümeleri verilmiştir. Bu kümeleri kapsayan E kümesi en geniş kümedir. O halde evrensel kümemiz E dir.

! Dikkat

Evrensel küme, üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsar.

Eşit Küme

Aynı elemanlardan oluşan kümelere "eşit kümeler" denir.

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{x \mid x < 4, x \text{ doğal sayı}\}$$

kümeleri verilsin.

$$B = \{0, 1, 2, 3\} \text{ olacaktır.}$$

A ve B kümesi aynı elemanlardan oluştuğuna göre, bu kümeler eşit kümelerdir. Bu durum $A=B$ şeklinde ifade edilir.

! Dikkat

A ve B kümeleri aynı elemanlardan oluşuyorsa ya da başka bir deyişle $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ oluyorsa bu kümeler eşit kümelerdir. " $A=B$ " ile ifade edilir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 25:

$$A = \{11233 \text{ sayısının rakamları}\}$$

$$B = \{x \mid x < 4, x \text{ pozitif tam sayı}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 \leq 25, x \text{ doğal sayı}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre,

- I. $A=B$ II. $B=C$ III. $A \subseteq B$ IV. $B \subseteq C$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) I ve IV B) III ve IV C) II, III ve IV
D) I, II ve III E) I, III ve IV

Çözüm:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olacağından,

- I. $A=B$ ifadesi doğrudur. A ve B kümeleri aynı elemanlardan oluşmuştur.
- II. $B=C$ ifadesi yanlıştır. B ve C kümeleri aynı elemanlardan oluşmamaktadır. C kümesinde farklı elemanlar mevcuttur.
- III. $A \subseteq B$ ifadesi doğrudur. A ve B eşit kümeler olduğundan $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yazılabilir.
- IV. $B \subseteq C$ ifadesi doğrudur. Çünkü B nin her elemanı C kümesinin de elemanıdır. Yani B kümesi C kümesinin bir alt kümesidir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

2. KÜMELERDE İŞLEMLER

A) Kümelerde Birleşim Özelliği

A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerinin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin "birleşim kümesi" denir.

A ve B kümelerinin birleşim kümesi " $A \cup B$ " ile gösterilir, "A birleşim B" şeklinde okunur.

Kısaca; $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$ dir.

Örnek 26:

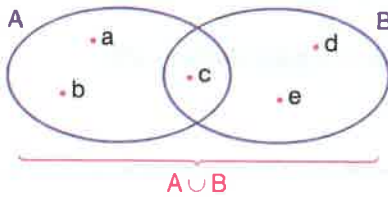
$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{c, d, e\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cup B$ kümesini oluşturarak şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

A ve B kümesindeki tüm harflerle yeni bir küme oluşturursak; $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ olacaktır. Küme içerisinde her elemanın yalnız bir kez yazıldığını unutmayalım.

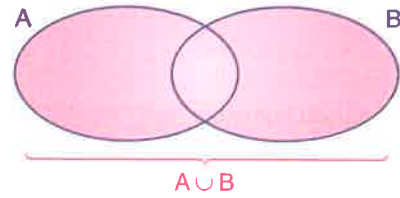
$A \cup B$ kümesini şema ile gösterelim.



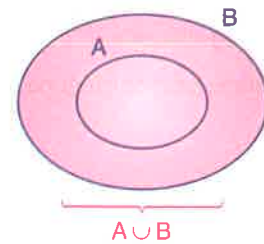
şeklindedir.

! Dikkat

A ve B kümeleri için $A \cup B$ nin şema yöntemiyle gösterimi;



$A \subseteq B$ ise



şeklindedir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 27:

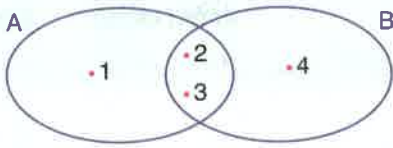
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ ve $C = \{3, 4, 5, 6\}$ veriliyor.

Buna göre,

- a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$
kümelerini oluşturarak şema yöntemi ile gösterelim.

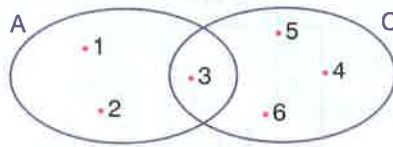
Çözüm:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ olacağından şema gösterimi,



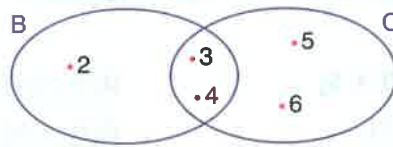
şeklindedir.

- b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olacağından şema gösterimi,



şeklindedir.

- c) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ olacağından şema gösterimi,



şeklindedir.

Örnek 28:

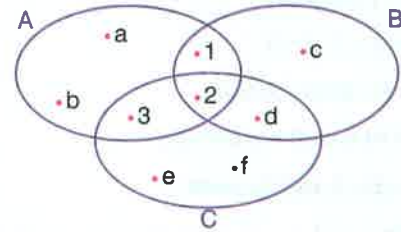
$A = \{a, b, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, c, d\}$ ve $C = \{2, 3, d, e, f\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cup B \cup C$ kümesini oluşturalım ve şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3\}$ olacaktır.

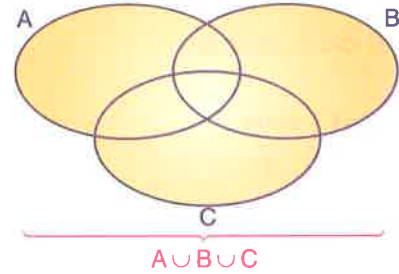
A, B ve C kümeleri için $A \cup B \cup C$ 'nin şema gösterimi;



şeklindedir.

! Dikkat

A, B ve C kümeleri için $A \cup B \cup C$;



şeklindedir.

Örnek 29:

$$K = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$L = \{x \mid x^2 \leq 16, x \in \mathbb{N}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s(A \cup B)$ değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

$K = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olacağından $K \cup L = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.

$s(K \cup L) = 6$ dır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Birleşim İşleminin Özellikleri:

Birleşim işleminin özelliklerini örneklerle açıklayalım.

- 1) $A=\{1, 2, 3\}$ ve $B=\{2, 3, 4\}$ olsun

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B \cup A = \{1, 2, 3, 4\}$$

olacağından $A \cup B = B \cup A$ olur.

- ♦ Herhangi iki A ve B kümesi için

$$A \cup B = B \cup A \text{ eşitliği vardır.}$$

Bu eşitliğe "*birleşme işleminin değişme özelliği*" denir.

- 2) $A=\{1, 2, 3\}$ olsun.

$$A \cup A = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3\}$$

$$= \{1, 2, 3\}$$

$$= A \text{ olur.}$$

- ♦ Bir A kümesi için; $A \cup A = A$ dir.

- 3) $A=\{a, b, c\}$ ve $B=\{\}$ olsun.

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{\}$$

$$= \{a, b, c\}$$

$$= A \text{ olur.}$$

- ♦ Bir A kümesi için; $A \cup \emptyset = \emptyset$ dir.

- 4) $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$ ve $C=\{4, 5, 6\}$ olsun.

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ olur.}$$

O halde, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ yazılabilir.

- ♦ A , B ve C kümeleri için,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ eşitliği vardır.}$$

Bu eşitliğe "*birleşme özelliği*" denir.

- 5) $A=\{a, b, 1\}$, $B=\{a, b, c, 1, 2\}$ olsun.

$$A \cup B = \{a, b, 1\} \cup \{a, b, c, 1, 2\}$$

$$= \{a, b, c, 1, 2\}$$

$$= B \text{ olur.}$$

- ♦ $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ dir. Ayrıca;

$$A \cup B = B \text{ oluyorsa, } A \subseteq B \text{ dir.}$$

Örnek 30:

$A=\{1, 2, 3\}$ ve $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğuna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) $\{4, 5\}$

B) $\{1, 3, 4, 5\}$

C) $\{1, 2, 3, 4\}$

D) $\{2, 4, 5\}$

E) $\{1, 2, 4, 5\}$

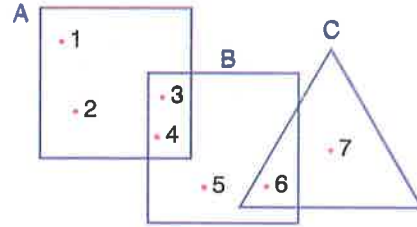
Çözüm:

$A=\{1, 2, 3\}$ ve $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğundan B kümesinde 4 ve 5 elemanlarının mutlaka bulunması gerekir.

O halde, B kümesi $\{1, 2, 3, 4\}$ olamaz.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 31:



kümeleri verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

B) $A \cup C = \{1, 2, 6, 7\}$

C) $B \cup C = \{5, 6, 7\}$

D) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

E) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Çözüm:

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$ ve $C=\{6, 7\}$ olduğundan;

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

$$B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla şıklarda verilen $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ eşitliği doğru diğerleri yanlıştır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 32:

$$A = \{x \mid x^2 = 4, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{x \mid -3 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 + 1 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $A \cup B = B$

II. $B \cup C = C$

III. $s(A \cup B \cup C) = 5$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

Çözüm:

• $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$ olacağından $A = \{-2, 2\}$

• $-3 < x < 3, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

• $x^2 + 1 < 0 \Rightarrow x^2 < -1$ olacağından, $C = \{ \}$ olur.

$A \cup B = \{-2, 2\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = B$

$B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{ \} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = B$

$A \cup B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olacağından, $s(A \cup B \cup C) = 5$ tir.

Dolayısıyla, I ve III doğru, II ise yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

B) Kümelerde Kesişim Özelliği

A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin "**kesişim kümesi**" denir. A ve B kümelerinin kesişim kümesi " **$A \cap B$** " ile gösterilir ve "**A kesişim B**" şeklinde okunur.

Kısaca; $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ dir.

Örnek 33:

$$A = \{a, b, c, 1, 2\}$$

$$B = \{2, 3, c, d\}$$

kümeleri veriliyor.

$A \cap B$ kümesini oluşturarak şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

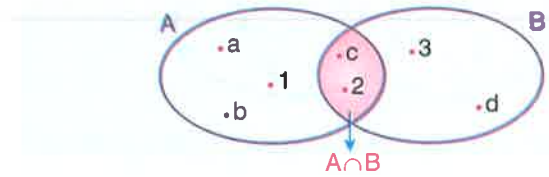
$$A = \{a, b, \textcircled{c}, 1, \textcircled{2}\}$$

$$B = \{\textcircled{2}, 3, \textcircled{c}, d\}$$

Her iki kümenin ortak elemanları c ve 2 dir.

O halde, $A \cap B = \{c, 2\}$ olacaktır.

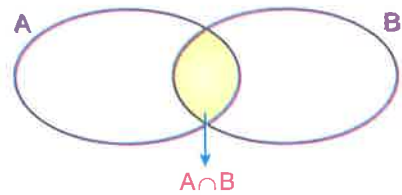
Şema yöntemi ile gösterimi



şeklindedir.

! Dikkat

A ve B kümeleri için $A \cap B$;



şeklindedir.

KÜMELER

Örnek 34:

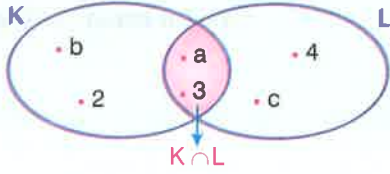
$K = \{a, b, 2, 3\}$, $L = \{a, 3, 4, c\}$, $M = \{1, 2, 3, b, c\}$ kümeleri veriliyor.

- a) $K \cap L$ b) $K \cap M$ c) $L \cap M$

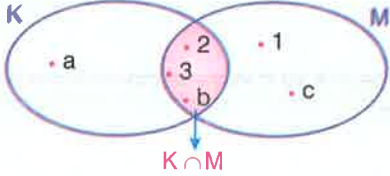
kümelerini oluşturarak şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

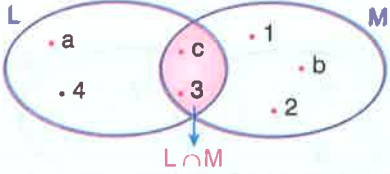
- a) K ve L kümelerinin ortak elemanları a ve 3 olduğundan $K \cap L = \{a, 3\}$ olur.



- b) K ve M kümelerinin ortak elemanları 2, 3 ve b olduğundan $K \cap M = \{2, 3, b\}$ olur.



- c) L ve M kümelerinin ortak elemanları 3 ve c olduğundan $L \cap M = \{3, c\}$ olur.



Örnek 35:

$$A = \{1, 2, m\}$$

$$B = \{m, n, 2, 3\}$$

$$C = \{1, 4, m, 3\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $(A \cup B) \cap C$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 3, m\}$ B) $\{1, 3\}$ C) $\{m, 3\}$ D) $\{2, 3\}$ E) $\{1, 2, 3\}$

Kümelerde İşlemler

Çözüm:

$A \cup B = \{1, 2, 3, m, n\}$ olacağından

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, m, n\} \cap \{1, 4, m, 3\} \\ = \{1, 3, m\} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 36:

$A = \{\text{MEHMET kelimesinin harfleri}\}$

$B = \{\text{MERMER kelimesinin harfleri}\}$

$C = \{\text{EMİR kelimesinin harfleri}\}$

olarak veriliyor.

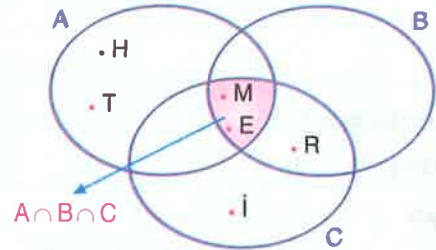
$A \cap B \cap C$ kümesini oluşturarak şema ile gösterelim.

Çözüm:

$A = \{\text{M, E, H, T}\}$ $B = \{\text{M, E, R}\}$ $C = \{\text{E, M, İ, R}\}$ dir.

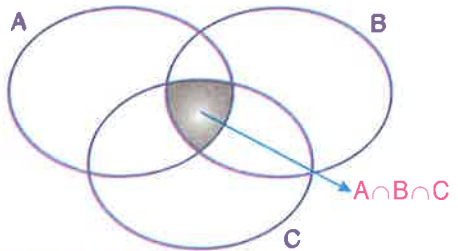
$A \cap B \cap C$ kümesi her üç kümede de ortak olarak bulunan elemanların kümesidir. Görüldüğü gibi her üç kümede M ve E elemanları mevcuttur. O halde $A \cap B \cap C = \{M, E\}$ olacaktır.

Şema gösterimi aşağıdaki gibidir.



Dikkat

$A \cap B \cap C$ kümesinin şema gösterimi aşağıdaki gibidir.



KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 37:

$$A = \{x \mid x < 15, x = 2.n, n \in \mathcal{N}\}$$

$$B = \{x \mid x < 16, x = 3.m, m \in \mathcal{N}\}$$

olarak veriliyor.

Buna göre, $s(A \cap B)$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\} \text{ olacaktır.}$$

Her iki kümenin ortak elemanları 0, 6 ve 12 olduğundan, $A \cap B = \{0, 6, 12\}$ olacaktır.

O halde, $s(A \cap B) = 3$ tür.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Kesişim işleminin özellikleri:

Kesişim işleminin özelliklerini örneklerle açıklayalım.

- 1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6\}$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \{3, 4\} \\ B \cap A = \{3, 4\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = B \cap A \text{ dir.}$$

♦ Herhangi iki A ve B kümesi için

$$A \cap B = B \cap A \text{ eşitliği vardır.}$$

Bu eşitliğe kesişim işleminin "*değişme özelliği*" denir.

- 2) $A = \{a, b, 2\}$ olsun.

$$A \cap A = \{a, b, 2\} \cap \{a, b, 2\} = A \text{ olur.}$$

♦ Bir A kümesi için $A \cap A = A$ dir.

- 3) $A = \{1, 2, a\}$ ve $B = \{ \}$ olsun.

$$A \cap B = \{1, 2, a\} \cap \{ \} = \{ \} \text{ dir.}$$

♦ Bir A kümesi için, $A \cap \emptyset = \emptyset$ dir. Boş kümenin herhangi bir küme ile kesişimi yine bir boş kümedir.

- 4) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ ve $C = \{3, 4, 5, 6\}$ olsun.

$$(A \cap B) \cap C = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\} \text{ olur.}$$

O halde, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ yazılabilir.

♦ A, B ve C kümeleri için,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ eşitliği vardır.}$$

Bu eşitliğe kesişme işleminin "*birleşme özelliği*" denir.

- 5) $A = \{m, n, 4\}$ ve $B = \{m, n, 3, 4, 5\}$ olsun.

$$A \cap B = \{m, n, 4\} \cap \{m, n, 3, 4, 5\}$$

$$= \{m, n, 4\} = A \text{ olur.}$$

♦ $A \subseteq B$ ise $A \cap B = A$ dir. Ayrıca $A \cap B = A$ oluyorsa $A \subseteq B$ dir.

Örnek 38:

$$A = \{1, 2, a, b\} \text{ ve } A \cap B = \{2, a\} \text{ veriliyor.}$$

Buna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

- A) $\{2, a, 3\}$ B) $\{2, a, 4, 6\}$ C) $\{a, c, 2, 3\}$
D) $\{a, 2\}$ E) $\{1, 2, a, 5\}$

Çözüm:

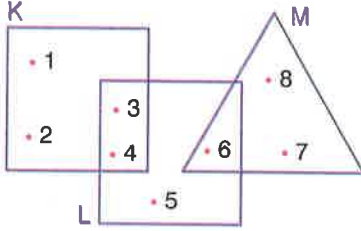
$A = \{1, 2, a, b\}$ ve $A \cap B = \{2, a\}$ olduğundan A ve B kümelerinin a ve 2 dışında ortak elemanı olmamalıdır. O halde B kümesi $\{1, 2, a, 5\}$ olamaz.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 39:



kümeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $K \cap L = \{3, 4, 5\}$ B) $K \cap M = \{3, 4, 6\}$
C) $L \cap M = \{5, 6\}$ D) $L \cap M = \{4, 5, 6\}$
E) $K \cap M = \{ \}$

Çözüm:

$K = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{3, 4, 5, 6\}$ ve $M = \{6, 7, 8\}$ olduğundan,
 $K \cap L = \{3, 4\}$, $K \cap M = \{ \}$, $L \cap M = \{6\}$ dir.

Dolayısıyla $K \cap M = \{ \}$ ifadesi doğru, diğer ifadeler ise yanlıştır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Dikkat

A, B ve C kümeleri için,

- ♦ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ eşitliğine birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine "soldan dağılma özelliği" denir.
- ♦ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliğine kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine "soldan dağılma özelliği" denir.
- ♦ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ eşitliğine birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine "sağdan dağılma özelliği" denir.
- ♦ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ eşitliğine kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine "sağdan dağılma özelliği" denir.

Örnek 40:

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cap C = \{2, 3, 4\}$$

olduğuna göre, $A \cap (B \cup C)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2, 3\}$ B) $\{1, 2, 3, 4\}$ C) $\{2, 3\}$ D) $\{2, 3, 4\}$ E) $\{1, 4\}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Dikkat

A ve B kümeleri için, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliği vardır.

- ♦ $A \cap B = \emptyset$ ise $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ dir.

KÜMELER

Örnek 41:

A ve B kümeleri için,

$$s(A)=6$$

$$s(B)=8$$

$$s(A \cup B)=11$$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm:

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$11 = 6 + 8 - s(A \cap B)$$

$$11 = 14 - s(A \cap B)$$

$$s(A \cap B) = 3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 42:

A ve B kümeleri için,

$$s(A) = 2 \cdot s(B)$$

$$s(A \cup B) = 16$$

$$s(A \cap B) = 2$$

olduğuna göre, $s(B)$ kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm:

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$16 = 2 \cdot s(B) + s(B) - 2$$

$$18 = 3 \cdot s(B)$$

$$s(B) = 6 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat

A, B ve C kümeleri için

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

eşitliği vardır.

İLK ADIM SORULARI

5. İngilizce, Almanca ve Fransızca konuşanların oluşturduğu bir grupta;

- İngilizce konuşan 12 kişi,
- Almanca konuşan 15 kişi,
- Fransızca konuşan 10 kişi,
- hem İngilizce hem Almanca konuşan 5 kişi,
- hem Almanca hem Fransızca konuşan 4 kişi,
- hem İngilizce, hem Fransızca konuşan 6 kişi,
- her üç dili de konuşan 2 kişi

vardır.

Buna göre, bu grup toplam kaç kişidir?

- A) 22 B) 24 C) 25 D) 27 E) 30

6. A ve B kümeleri için,

$$s(A) = 12$$

$$s(B) = 14$$

$$s(A \cup B) = 20$$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

C) Kümelerde Fark İşlemi

A ve B iki küme olsun. A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin B kümesinden farkı** denir.

A kümesinin B kümesinden farkı $A - B$ veya $A \setminus B$ ile gösterilir ve "**A fark B**" veya "**A'nın B den farkı**" şeklinde okunur.

Kısaca; $A - B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ dir.

Örnek 43:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

veriliyor.

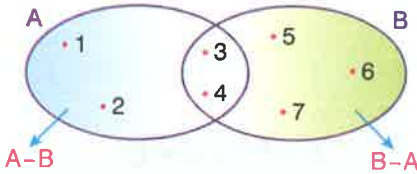
A - B ve B - A kümelerini bulalım ve şema ile gösterelim.

Çözüm:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ kümelerinde

- A da olup B de olmayan elemanlar 1 ve 2 olduğundan, $A - B = \{1, 2\}$ dir.
- B de olup A da olmayan elemanlar 5, 6 ve 7 olduğundan, $B - A = \{5, 6, 7\}$ dir.

Şema ile gösterirsek,



şeklindedir.

Örnek 44:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2, c, d\}$$

$$C = \{2, 3, a, b\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $(A - B) \cup (C - A)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 3\}$

B) $\{1, 2, a\}$

C) $\{a, b, 3\}$

D) $\{a, b, 2, 3\}$

E) $\{b, c, 1\}$

Çözüm:

$A - B = \{a, b\}$ ve $C - A = \{2, 3\}$ olacağından

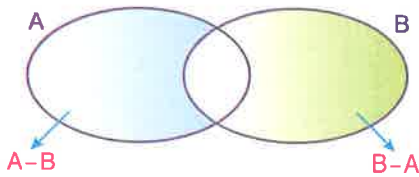
$$(A - B) \cup (C - A) = \{a, b\} \cup \{2, 3\}$$

$$= \{a, b, 2, 3\} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

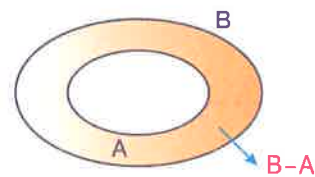
A ve B kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümeleri



şeklindedir.

! Dikkat

A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise $B - A$ kümesi;



şeklindedir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 45:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{6, 7, 8, 9\}$$

kümeleri veriliyor.

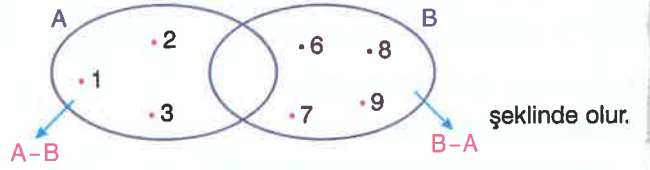
A - B ve B - A kümelerini oluşturarak şema yöntemi ile gösterelim.

Çözüm:

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{6, 7, 8, 9\}$ veriliyor.

- A da olup B de olmayan elemanlar 1, 2 ve 3 tür.
O halde $A - B = \{1, 2, 3\} = A$ olur.
- B de olup A da olmayan elemanlar 6, 7, 8 ve 9 dur.
O halde $B - A = \{6, 7, 8, 9\} = B$ olur.

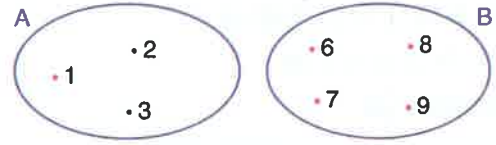
Şema ile gösterirsek,



Görüldüğü gibi A ve B kümelerinin ortak elemanı yoktur. Dolayısıyla $A \cap B = \emptyset$ dir.

Bu şekildeki kümelere "**ayrık kümeler**" denir.

A ve B ayrık kümeleri şema yöntemi ile

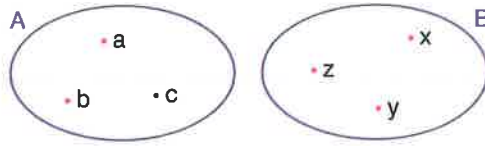


şeklinde gösterilir.

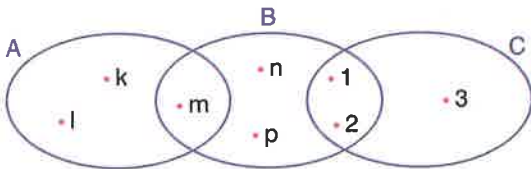
! Dikkat

Ortak elemanı bulunmayan kümelere "**ayrık kümeler**" denir. A ve B ayrık kümeler ise $A \cap B = \emptyset$ dir.

Ayrıca, $A - B = A$ ve $B - A = B$ olur. Bu kümelerin şema yöntemi ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



Örnek 46:



Yukarıda A, B ve C kümeleri verilmiştir.

Buna göre, aşağıda verilenlerden hangisi yanlıştır?

- A) $A - B = \{k, l\}$ B) $B - C = \{m, n, p\}$ C) $C - A = \{1, 2, 3\}$
D) $B - A = \{n, p\}$ E) $C - B = \{3\}$

Çözüm:

$A = \{k, l, m\}$, $B = \{m, n, p, 1, 2\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olduğundan

$$A - B = \{k, l\}$$

$$B - C = \{m, n, p\}$$

$$C - A = \{1, 2, 3\}$$

$$B - A = \{m, p, 1, 2\}$$

$$C - B = \{3\}$$

olduğundan $B - A = \{n, p\}$ eşitliği yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Kümelerde fark işleminin özellikleri:

Fark işleminin özelliklerini örneklerle açıklayalım.

1) $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4, 5\}$ olsun.

$$A - B = \{1, 2\} \text{ ve } B - A = \{4, 5\} \text{ tir.}$$

O halde $A - B \neq B - A$ dir.

♦ Fark işleminin değişme özelliği yoktur.

$$A - B \neq B - A \text{ dir.}$$

♦ $A - B = B - A$ oluyorsa A ve B eşit kümelerdir.

2) $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{ \}$ olsun.

$$A - B = \{1, 2, 3\} - \{ \} = \{1, 2, 3\} = A$$

$$B - A = \{ \} - \{1, 2, 3\} = \{ \} \text{ dir.}$$

♦ Bir A kümesi için,

$$A - \emptyset = A \text{ ve } \emptyset - A = \emptyset \text{ eşitlikleri vardır.}$$

3) $A = \{a, b, c\}$ olsun.

$$A - A = \{a, b, c\} - \{a, b, c\} = \{ \} = \emptyset \text{ dir.}$$

♦ Bir A kümesi için,

$$A - A = \emptyset \text{ dir.}$$

4) $A = \{1, 2, 3\}$ ve $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evrensel kümesi olmak üzere,

$$A - E = \{1, 2, 3\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{ \} = \emptyset \text{ dir.}$$

♦ A, E evrensel kümesinin alt kümesi ise

$$A - E = \emptyset \text{ dir.}$$

5) $A = \{a, b\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olsun.

$$A - B = \{a, b\} - \{a, b, c, d\} = \{ \} = \emptyset \text{ dir.}$$

♦ $A \subseteq B$ ise $A - B = \emptyset$ dir.

Örnek 47:

$K = \{k, l, m, n\}$, $L = \{m, n, p\}$ ve $M = \{k, p, r, t\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre,

I. $K \setminus (L \cup M) = \{l\}$ dir.

II. $(K \cap L) \setminus M = \{m, n\}$ dir.

III. $(M \setminus L) \setminus K = \{k, t\}$ dir.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

A) I ve II B) I ve III C) II ve III D) Yalnız I E) Yalnız II

Çözüm:

Çözüm:

$K = \{k, l, m, n\}$, $L = \{m, n, p\}$, $M = \{k, p, r, t\}$ olduğundan;

$$\bullet K \setminus (L \cup M) = \{k, l, m, n\} \setminus \{m, n, p, k, r, t\} = \{l\} \text{ dir.}$$

$$\bullet (K \cap L) \setminus M = \{m, n\} \setminus \{k, p, r, t\} = \{m, n\} \text{ dir.}$$

$$\bullet (M \setminus L) \setminus K = \{k, r, t\} \setminus \{k, l, m, n\} = \{r, t\} \text{ dir.}$$

O halde I ve II doğru, III yanlıştır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 48:

A ve B kümeleri için

$$s(A - B) = 3.s(B - A)$$

$$s(A \cup B) = 18$$

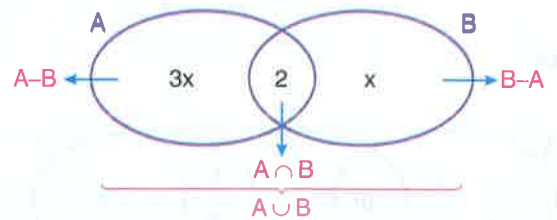
$$s(A \cap B) = 2$$

olduğuna göre, $s(B)$ kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

$s(A - B) = 3.s(B - A)$ eşitliğinde $s(B - A) = x$ dersek, $s(A - B) = 3.x$ olacaktır.



O halde, $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ olur.

$$18 = 3x + x + 2$$

$$16 = 4x$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

$$s(B) = 2 + x \text{ olduğundan } s(B) = 2 + 4 = 6 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

KÜMELER

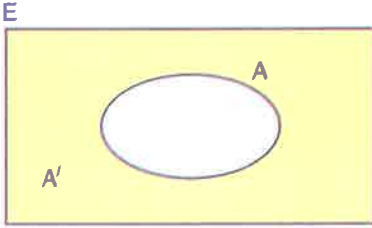
Kümelerde İşlemler

D) Kümelerde Tümleme İşlemi

A kümesi E evrensel kümesine ait bir alt küme olsun.

A kümesinde olmayıp E kümesinde olan elemanların oluşturduğu kümeye "**A kümesinin tümlenyeni**" denir.

A kümesinin tümlenyeni "**A'**" veya " **$\bar{A}$** " ile gösterilir.



A kümesinin tümlenyeni A kümesinin dışında bulunan elemanların oluşturduğu kümedir.

Kısaca; $A' = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 49:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ evrensel kümesinin alt kümesidir.

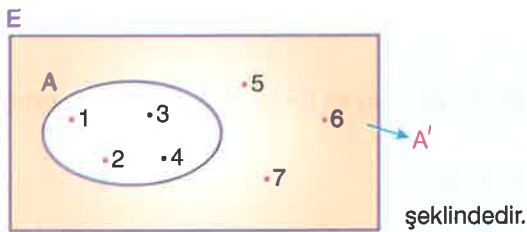
Buna göre, **A' kümesini oluşturalım ve şema yöntemi ile gösterelim.**

Çözüm:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olduğundan E kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlar 5, 6 ve 7 dir.

O halde $A' = \{5, 6, 7\}$ olacaktır.

Şema yöntemi ile gösterirsek,



Örnek 50:

$A = \{10 \text{ dan küçük asal sayılar}\}$

$B = \{10 \text{ dan küçük pozitif tek sayılar}\}$

$E = \{10 \text{ dan küçük doğal sayılar}\}$

kümeleri veriliyor. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

- a) A'
- b) B'
- c) $A' \cap B'$

kümelerini bulalım.

Çözüm:

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur.

- a) A' kümesi E kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ olur.
- b) B' kümesi E kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan $B' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ olur.
- c) $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ ve $B' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ olduğundan $A' \cap B' = \{0, 4, 6, 8\}$ bulunur.

! Dikkat

$A \subseteq E$ olmak üzere, A kümesinin tümlenyeni $A' = E \setminus A$ ile de ifade edilebilir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Tümleme işleminin özellikleri:

Kümelerde tümleme işleminin özelliklerini örneklerle açıklayalım.

- 1) $E = \{a, b, \triangle, \star\}$ ve $A = \{a, \star\}$ olsun. $A' = \{b, \triangle\}$ olur.

$$A \cup A' = \{a, \star\} \cup \{b, \triangle\} = \{a, \star, b, \triangle\} = E \text{ dir.}$$

$$A \cap A' = \{a, \star\} \cap \{b, \triangle\} = \{\} = \emptyset \text{ dir.}$$

- ♦ E evrensel kümesinin alt kümesi olan A kümesi için,

$$A \cup A' = E \text{ ve } A \cap A' = \emptyset \text{ dir.}$$

Dolayısıyla;

$$s(A) + s(A') = s(E) \text{ olur.}$$

- 2) E evrensel küme, A boş küme olsun.

$$E = \{1, 2, 3\} \text{ ve } A = \{\} \text{ ise}$$

$$E' = \emptyset \text{ ve } A' = E \text{ olur.}$$

- ♦ E evrensel küme olmak üzere,

$$E' = \emptyset \text{ ve } \emptyset' = E \text{ dir.}$$

- 3) E evrensel küme,

$$E = \{a, b, c, d\} \text{ ve } A = \{a, b\} \text{ olsun. } A' = \{c, d\} \text{ dir.}$$

$$(A')' = [\{c, d\}]' = \{a, b\} = A \text{ olur.}$$

- ♦ Bir A kümesi için, $(A')' = A$ olur.

4) De Morgan Kuralları

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

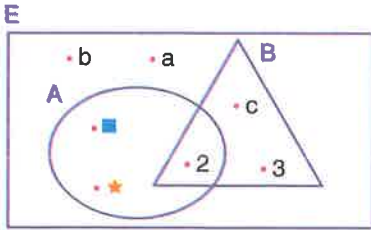
eşitliklerine De Morgan kuralları adı verilir.

Ayrıca,

$$(A' \cup B')' = A \cap B$$

$$(A' \cap B')' = A \cup B \text{ olur.}$$

Örnek 51:



Yukarıda E evrensel kümesine ait A ve B alt kümeleri verilmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen eşitliklerden hangisi **yanlıştır**?

A) $A' = \{a, b, c, 3\}$

B) $B' = \{\text{blue square}, \star, b, a\}$

C) $(A \cup B)' = \{a, b\}$

D) $(A - B)' = \{a, b, 3\}$

E) $(B - A)' = \{a, b, 2, \text{blue square}, \star\}$

Çözüm:

$A = \{\text{blue square}, \star, 2\}$, $B = \{2, 3, c\}$ ve $E = \{a, b, c, 2, 3, \text{blue square}, \star\}$ olduğundan

• $A' = \{a, b, c, 3\}$

• $B' = \{a, b, \text{blue square}, \star\}$

• $A \cup B = \{\text{blue square}, \star, 2, 3, c\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{a, b\}$

• $A - B = \{\text{blue square}, \star\} \Rightarrow (A - B)' = \{a, b, c, 2, 3\}$

• $B - A = \{3, c\} \Rightarrow (B - A)' = \{a, b, 2, \text{blue square}, \star\}$

olacağından $(A - B)' = \{a, b, 3\}$ eşitliği yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

KÜMELER

Kümelerde İşlemler

Örnek 52:

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$$s(A) + s(B') = 10$$

$$s(A') + s(B) = 18$$

olduğuna göre, $s(E)$ kaçtır?

- A) 28 B) 20 C) 14 D) 12 E) 8

Çözüm:

Bir A kümesi için $s(A) + s(A') = s(E)$ olduğunu biliyoruz.

Verilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$s(A) + s(B') = 10$$

$$s(A') + s(B) = 18$$

$$s(A) + s(A') + s(B) + s(B') = 10 + 18$$

$$s(E) + s(E)$$

$$2.s(E) = 28$$

$$s(E) = 14 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Çözüm:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ dir. (De Morgan kuralı)

O halde;

$$(A \cap B)' \cup B = A' \cup \underbrace{B' \cup B}_E$$

$$= A' \cup E$$

$$= E \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 54:

$A = \{\text{Sınıfımızdaki erkek öğrenciler}\}$

$B = \{\text{Sınıfımızdaki gözlüklü öğrenciler}\}$

$C = \{\text{Sınıfımızdaki sarışın öğrenciler}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre,

- I. $A' \cap B = \{\text{Sınıfımızdaki gözlüklü kız öğrenciler}\}$
- II. $A \cap C' = \{\text{Sınıfımızdaki sarışın olmayan erkek öğrenciler}\}$
- III. $B' \cap C = \{\text{Sınıfımızdaki gözlük kullanmayan sarışın öğrenciler}\}$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm:

A, B ve C kümeleri için,

$A' = \{\text{Sınıfımızdaki kız öğrenciler}\}$

$B' = \{\text{Sınıfımızdaki gözlük kullanmayan öğrenciler}\}$

$C' = \{\text{Sınıfımızdaki sarışın olmayan öğrenciler}\}$

olacağından;

- I. $A' \cap B = \{\text{Sınıfımızdaki gözlüklü kız öğrenciler}\}$
- II. $A \cap C' = \{\text{Sınıfımızdaki sarışın olmayan erkek öğrenciler}\}$
- III. $B' \cap C = \{\text{Sınıfımızdaki gözlük kullanmayan sarışın öğrenciler}\}$ olacaktır.

O halde I, II ve III ifadeleri doğrudur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 53:

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

Buna göre, $(A \cap B)' \cup B$ kümesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A' B) B' C) $A \cap B$ D) E E) $\emptyset$

Dikkat

A ve B kümeleri için,

$$A \cap B' = A - B$$

$$B \cap A' = B - A$$

$$A \subseteq B \text{ ise } B' \subseteq A'$$

özellikleri vardır.

Örnek 55:

A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.

$$s(A \cap B') = 4$$

$$s(B \cap A') = 6$$

$$s(A \cap B) = 3$$

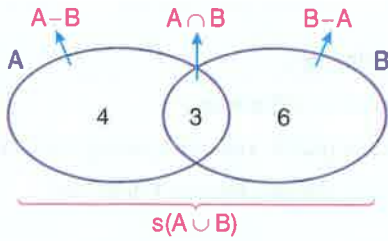
olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

- A) 15 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

Çözüm:

$A \cap B' = A - B$ ve $B \cap A' = B - A$ olduğundan $s(A - B) = 4$ ve $s(B - A) = 6$ olacaktır.

Bu verileri şema yöntemiyle yerlerine yazarsak



$$s(A \cup B) = 4 + 3 + 6$$

$$= 13 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 56:

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$A \subseteq B$ olmak üzere,

$$s(A') = 10$$

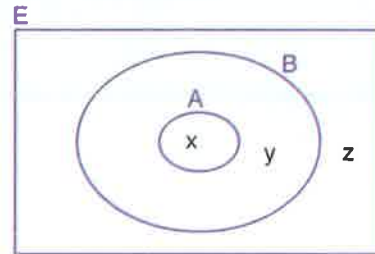
$$s(B') = 4$$

olduğuna göre, $s(B - A)$ kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm:

$A \subseteq B$ olduğundan kümelerin şema yöntemi ile gösterimi;



şeklinde olsun.

$$\left. \begin{array}{l} s(A') = y + z = 10 \\ s(B') = z = 4 \end{array} \right\} \text{ ise } y = 6 \text{ olur.}$$

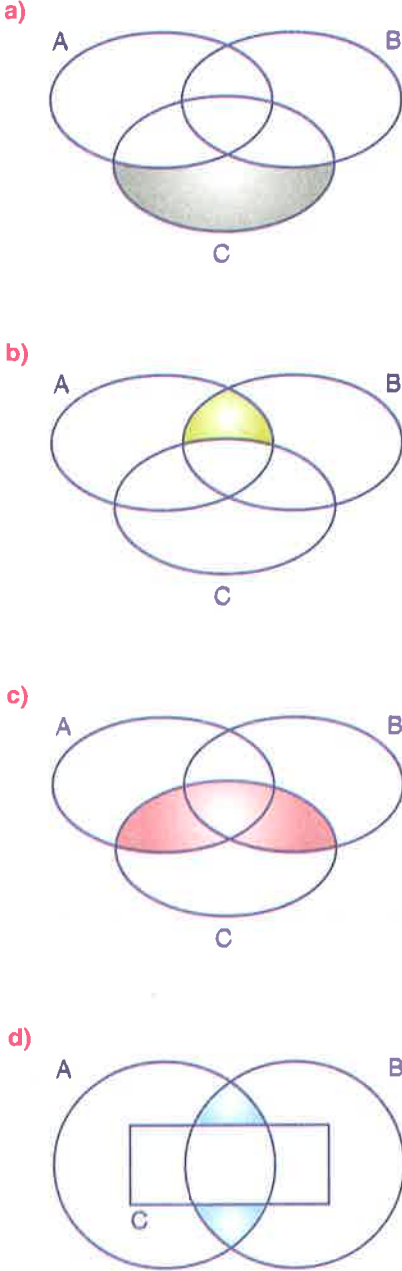
$s(B - A) = y$ olduğundan $s(B - A) = 6$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

KÜMELER

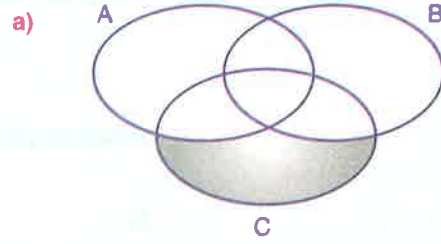
Kümelerde İşlemler

Örnek 57:

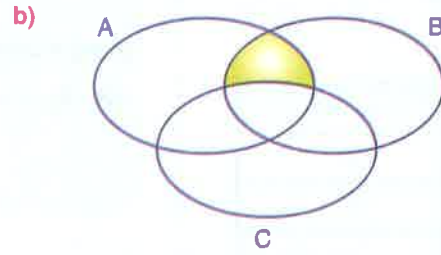


Yukarıda verilen kümelerde taralı bölgeleri ifade eden küme gösterimlerini yazalım.

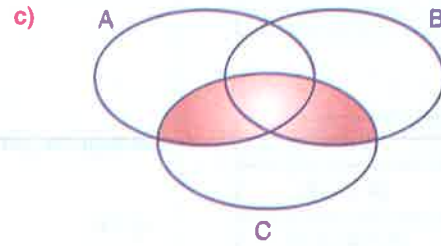
Çözüm:



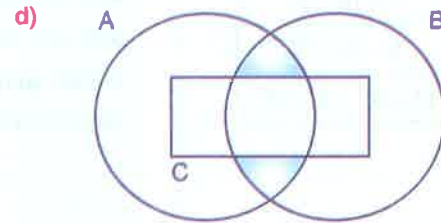
Şemada verilen taralı bölge, C kümesinde olup $A \cup B$ kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu bölgeyi göstermektedir. O halde bu bölge $C - (A \cup B)$ ile ifade edilebilir.



Şemada verilen taralı bölge $A \cap B$ kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu bölgeyi göstermektedir. O halde bu bölge, $(A \cap B) - C$ ile ifade edilebilir.



Şemada verilen taralı bölge $A \cup B$ kümesi ile C kümesinde ortak olarak bulunan elemanların oluşturduğu bölgeyi göstermektedir. O halde bu bölge, $(A \cup B) \cap C$ ile ifade edilebilir.



Şemada verilen taralı bölge $A \cap B$ kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu bölgeyi göstermektedir. O halde bu bölge, $(A \cap B) \setminus C$ ile ifade edilebilir.

KÜMELER

EKSTREM BİLGİLER

Kümeler ile Sembolik Mantık Arasındaki İlişki

Kümelerde kullandığımız sembollerin mantıkta kullandığımız sembollerle ilişkisi aşağıdaki gibidir.

Sembolik Mantık	Küme
0	$\emptyset$
1	E
$\vee$	$\cup$
$\wedge$	$\cap$
Değili ($'$)	Tümleyeni ($'$)
Denktir ($\equiv$)	Eşittir ($=$)

Sembolik Mantık	Küme
$(p')' \equiv p$	$(A')' = A$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \emptyset$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$0 \wedge 1 \equiv 0$	$\emptyset \cap E = \emptyset$
$0 \vee 1 \equiv 1$	$\emptyset \cup E = E$
$p \vee (q \wedge r)$	$A \cup (B \cap C)$
$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Örnek 58:

A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.

$$s(A \cup B)' = 4$$

$$s(B') = 9$$

olduğuna göre, $s(A - B)$ kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 13

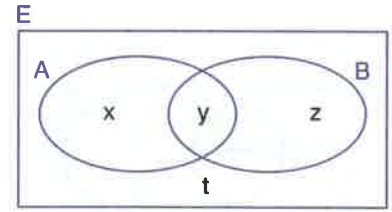
Çözüm:

$$s(A \cup B)' = t = 4$$

$$s(B') = x + t = 9$$

olduğundan, $x = 5$ olur.

$$s(A - B) = x \Rightarrow s(A - B) = 5 \text{ tir.}$$



Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 59:

A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.

$$s(A - B) = 2 \cdot s(A \cap B)$$

$$s(B - A) = 3 \cdot s(A \cap B)$$

$$s(A \cup B) = 30$$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24

Çözüm:

$$s(A \cap B) = x \text{ dersek,}$$

$$s(A - B) = 2x$$

$$s(B - A) = 3x \text{ olacaktır.}$$

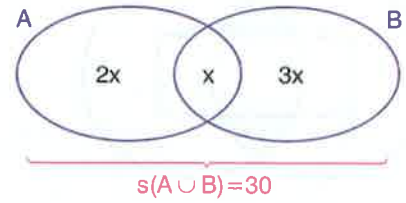
Verileri şema yönteminde yerlerine yazarsak,

$$2x + x + 3x = 30$$

$$6x = 30$$

$$x = 5 \text{ tir.}$$

$$s(A) = 2x + x = 3x \text{ olduğundan; } s(A) = 3 \cdot 5 = 15 \text{ bulunur.}$$



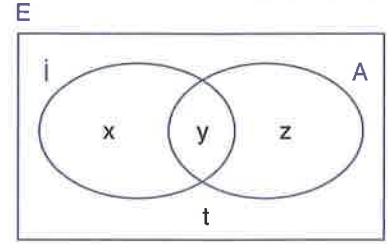
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

KÜMELER

Küme Problemleri

Küme problemleri:

Bir grupta İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A ile gösterilsin. Şemada her bölgede bulunan kişilerin sayısı, x, y, z ve t ile ifade edilsin.



- | | |
|--|--|
| 1) İngilizce bilenler : $x+y$ | 2) İngilizce bilmeyenler : $z+t$ |
| 3) Almanca bilenler : $y+z$ | 4) Almanca bilmeyenler : $x+t$ |
| 5) Yalnızca İngilizce bilenler : x | 6) Yalnızca Almanca bilenler : z |
| 7) İngilizce ve Almanca bilenler : y | 8) İngilizce veya Almanca bilenler : $x+y+z$ |
| 9) Sadece 1 dil bilenler : $x+z$ | 10) En az 1 dil bilenler : $x+y+z$ |
| 11) En çok 1 dil bilenler : $x+z+t$ | 12) İngilizce ve Almanca dillerini bilmeyenler : t |

şeklinde yazılabilir.

Örnek 60:

Bir grupta İngilizce bilen 11, Almanca bilen 8 ve bu dilleri bilmeyen 2 kişi vardır.

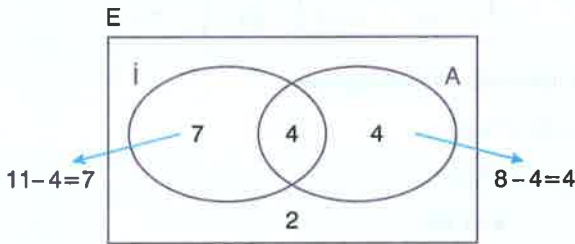
Her iki dili de bilen 4 kişi bulunduğuna göre, grup kaç kişidir?

- A) 15 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm:

Her iki dili bilen 4 kişi olduğuna göre, sadece İngilizce bilen $11-4=7$, sadece Almanca bilen $8-4=4$ kişidir.

Bu verileri şemada gösterelim.



O halde, $s(E)=7+4+4+2=17$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 61:

Futbol veya basketbol sporlarıyla ilgilenenlerin bulunduğu 18 kişilik bir grupta sadece futbolla ilgilenen 10 kişi vardır. Sadece basketbolla ilgilenenlerin sayısı her iki sporla da ilgilenenlerin sayısının 3 katıdır.

Buna göre, grupta futbol ve basketbolla ilgilenen kişi sayısı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

Futbolla ilgilenenlerin kümesini F, basketbolla ilgilenenlerin kümesini B ile gösterelim. Sadece basketbolla ilgilenenlerin sayısı her iki sporla da ilgilenenlerin sayısının 3 katı olduğundan,

$$s(B \cap F) = x \text{ dersek}$$

$$s(B - F) = 3x \text{ olur.}$$

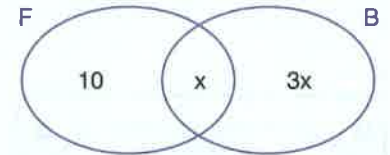
$$10 + x + 3x = 18$$

$$4x = 8$$

$$x = 2 \text{ bulunur.}$$

O halde hem futbol hem de basketbolla ilgilenen kişi sayısı 2 dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.



KÜMELER

Küme Problemleri

Örnek 62:

25 kişilik bir sınıfta müzik kursuna katılanların sayısı resim kursuna katılanların sayısının 2 katıdır. 3 kişi her iki kursa da katılmakta, 4 kişi ise hiç bir kursa katılmamaktadır.

Buna göre, sadece resim kursuna katılan kaç kişi vardır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

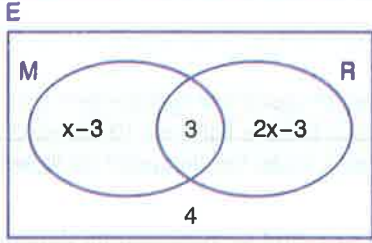
Çözüm:

I. yol:

Resim kursuna katılan kişi sayısı = x

Müzik kursuna katılan kişi sayısı = $2x$ olsun.

Müzik kursuna katılanları M, resim kursuna katılanları R kümesi ile gösterelim.



Sadece müzik kursuna katılan kişi sayısı $x-3$

Sadece resim kursuna katılanların sayısı $2x-3$ olur.

Sınıf mevcudu 25 olduğundan,

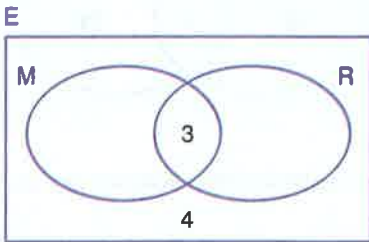
$$x-3+3+2x-3+4=25$$

$$3x=24$$

$$x=8$$

Sadece resim kursuna katılan kişi sayısı, $2 \cdot 8 - 3 = 13$ olur.

II. yol:



$$s(R) = 2 \cdot s(M)$$

$$s(R \cap M) = 3$$

$$s(M \cup R)' = 4 \text{ tür.}$$

$$s(R \cup M) = 25 - 4 = 21 \text{ olur.}$$

$$s(R \cup M) = s(R) + s(M) - s(R \cap M)$$

$$21 = 2 \cdot s(M) + s(M) - 3$$

$$24 = 3 \cdot s(M)$$

$$s(M) = 8 \text{ bulunur.}$$

O halde, $s(R) = 2 \cdot 8 = 16$ olacağından sadece resim kursuna katılan $16 - 3 = 13$ kişi vardır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 63:

34 kişilik bir sınıfta sarışın erkek öğrenci sayısı 6, sarışın olmayan kız öğrenci sayısı ise 7 dir. Sınıfta sarışın olmayan erkeklerin sayısı sarışın kızların sayısının 2 katıdır.

Buna göre, sınıftaki erkek öğrenci sayısı kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

Çözüm:

Sarışın kız öğrencilerin sayısına x dersek, sarışın olmayan erkek öğrencilerin sayısı $2x$ olacaktır.

Bu verileri aşağıdaki tabloda yerlerine yazalım.

	Erkek	Kız
Sarışın olan	6	x
Sarışın olmayan	$2x$	7

Sınıf mevcudu 34 verildiğinden,

$$6 + x + 2x + 7 = 34$$

$$3x = 21$$

$$x = 7 \text{ dir.}$$

Sınıftaki erkek öğrenci sayısı $6 + 2x$ olduğundan sonuç $6 + 2 \cdot 7 = 20$ bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

KÜMELER

Kartezyen Çarpım

KARTEZYEN ÇARPIM

Sıralı İkili

Herhangi iki x ve y elemanının (x, y) şeklinde yazılmasına “*sıralı ikili*” adı verilir.

Sıralı ikilide elemanların yazılış sırası önemlidir.

(x, y) sıralı ikilisinde x e *birinci bileşen*, y ye ise *ikinci bileşen* denir.

♦ $(3, 5)$ ifadesi bir sıralı ikilidir. Birinci bileşen 3, ikinci bileşen 5 tir.

♦ $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ ifadesi bir sıralı ikilidir. Birinci bileşeni -2 , ikinci bileşeni $\frac{1}{4}$ tür.

! Dikkat

Sıralı ikilide bileşenlerin yerleri değiştirildiğinde farklı bir sıralı ikili elde edilir. Dolayısıyla, $(x, y) \neq (y, x)$ tir.

! Dikkat

Karşılıklı bileşenleri birbirine eşit olan sıralı ikililer birbirine eşittir. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a=c$ ve $b=d$ dir.

Örnek 64:

$(a, b) = (4, 5)$ olduğuna göre, $a.b$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$(a, b) = (4, 5)$ ise sıralı ikililerin birinci bileşenleri ve ikinci bi-



leşenleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olacaktır.

O halde, $a=4$ ve $b=5$ tir. $a.b=4.5=20$ bulunur.

Örnek 65:

$$(x+y, 3) = (7, x-y)$$

olduğuna göre, $x.y$ çarpımını kaçtır?

A) 8

B) 9

C) 10

D) 12

E) 15

Çözüm:

$(x+y, 3) = (7, x-y)$ ise $x+y=7$ ve $x-y=3$ olur.

Elde edilen denklemleri alt alta yazarak toplarsak,

$$\begin{array}{r} x+y=7 \\ + \quad x-y=3 \\ \hline 2x=10 \\ x=5 \end{array}$$

$x=5$ ise $y=2$ olur.

$x.y=5.2=10$ dur.

Doğru cevap “C” seçeneğidir.

KÜMELER

Kartezyen Çarpım

Örnek 66:

$$(2^m, m.n) = (8, 12)$$

olduğuna göre, $(m+n, m-n)$ sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (7, 1) B) (7, -1) C) (5, -1) D) (5, 1) E) (3, -4)

Çözüm:

$$(2^m, m.n) = (8, 12)$$

$$2^m = 8 \Rightarrow m = 3$$

$$m.n = 12 \Rightarrow 3.n = 12$$

$$n = 4 \text{ bulunur.}$$

$m = 3$ ve $n = 4$ değerleri $(m+n, m-n)$ sıralı ikilisinde yerlerine yazılırsa,

$$(m+n, m-n) = (3+4, 3-4)$$

$$= (7, -1) \text{ elde edilir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 67:

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{4, 5\}$ kümeleri veriliyor.

$A \times B$ kümesini oluşturalım.

Çözüm:

$A \times B$ kümesi, birinci bileşeni A dan, ikinci bileşeni B den alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerden elde edileceğinden,

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\} \text{ olacaktır.}$$

Örnek 68:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

$A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini oluşturalım.

Çözüm:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3\}$ olduğundan,

$$A \times B = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

olacaktır.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi $A \times B$ ile $B \times A$ kümeleri farklı kümelerdir. Ayrıca $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin eleman sayıları eşit ve 6'dır. Kartezyen çarpımının eleman sayısı kümelerin eleman sayılarının çarpımına eşittir.

Kartezyen Çarpım

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri verilsin. Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine A ve B kümelerinin "kartezyen çarpımı" denir. " $A \times B$ " şeklinde gösterilir ve "A kartezyen B" diye okunur.

Kısaca; $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ dir.

KÜMELER

! Dikkat

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$ eşitlikleri vardır. Fakat $A \times B \neq B \times A$ dır.

Örnek 69:

$$A = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathcal{N}\}$$

$$B = \{x \mid 5 \leq x \leq 11, x \in \mathcal{N}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $s(A \times B)$ kaçtır?

- A) 60 B) 64 C) 66 D) 70 E) 77

Çözüm:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ olacağından $s(A) = 11$

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ olacağından $s(B) = 7$ dir.

O halde, $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

$$= 11 \cdot 7$$

$$= 77 \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 70:

A ve B kümeleri için $s(A) = 5$ ve $s(A \times B) = 20$ eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\{1, 2\}$ B) $\{2, 3, 4\}$ C) $\{a, b, 1, 2\}$
D) $\{2, 3, a\}$ E) $\{1, 2, 3, b, c\}$

Çözüm:

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ olacağından verilen eşitlikler yerine yazılırsa,

$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$$

$$20 = 5 \cdot s(B)$$

$$s(B) = 4 \text{ olur.}$$

O halde, B kümesi 4 elemanlı bir küme olmalıdır. Dolayısıyla şıklarda 4 elemanlı yalnızca $\{a, b, 1, 2\}$ kümesi vardır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

7. $A = \{1, 3\}$

$$B = \{2, 3\}$$

olduğuna göre, $A \times B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
B) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$
C) $\{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
D) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
E) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

8. $A = \{a, b, 1\}$

$$B = \{1, 2, b\}$$

olduğuna göre, $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin ortak elemanlarının sayısı kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

KÜMELER

Kartezyen Çarpım

Örnek 71:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{b, c, d\}$ veriliyor.

Buna göre, $s[(A \cap B) \times (A \cup B)]$ değeri kaçtır?

- A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

Çözüm:

$A \cap B = \{b, c\}$ olacağından $s(A \cap B) = 2$ dir.

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$ olacağından $s(A \cup B) = 4$ tür.

O halde;

$$s[(A \cap B) \times (A \cup B)] = s(A \cap B) \cdot s(A \cup B)$$

$$= 2 \cdot 4$$

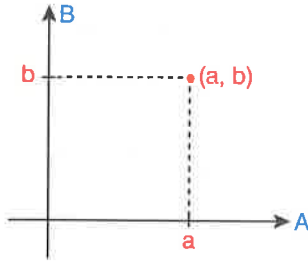
$$= 8 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Kartezyen Çarpımın Grafiği

$A \times B$ kümesini oluşturan sıralı ikililerin dik koordinat düzlemi üzerinde gösterilmesine **$A \times B$ grafiği** denir.

$A \times B$ yi oluşturan her bir (a, b) sıralı ikilisinin dik koordinat düzlemindeki görüntüsü bir noktadır.



a : apsis

b : ordinat

- $A \times B$ grafiğinde A kümesinin elemanları yatay eksen (x eksen), B kümesinin elemanları ise dikey eksen (y eksen) üzerine yazılır.

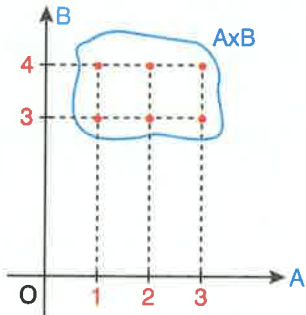
Örnek 72:

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4\}$

kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini oluşturarak grafiğini çizelim.

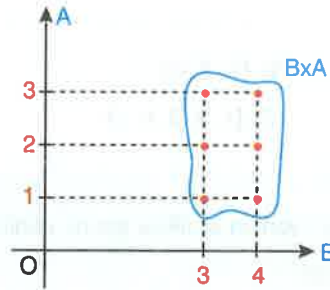
Çözüm:

- $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ olacağından grafik,



şeklinde olur.

- $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ olacağından grafik,



şeklinde olur.

KÜMELER

Kartezyen Çarpım

Örnek 73:

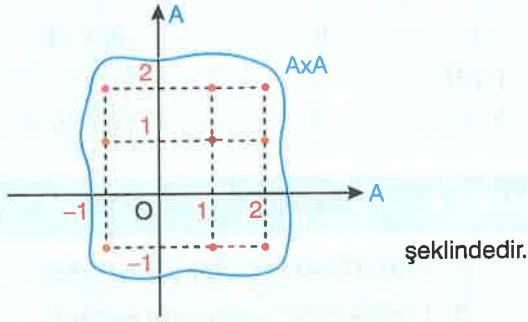
$A = \{-1, 1, 2\}$ kümesi veriliyor.

$A \times A$ kümesini oluşturarak grafiğini çizelim.

Çözüm:

$A = \{-1, 1, 2\}$ ise, $A \times A = \{-1, 1, 2\} \times \{-1, 1, 2\}$
 $= \{(-1, -1), (-1, 1), (-1, 2), (1, -1), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 1), (2, 2)\}$
 olacaktır.

Grafik;



Çözüm:

$A \times B$ grafiğinde A kümesinin elemanları x eksen, B kümesinin elemanları ise y eksen üzerine yazılacağından,

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olacaktır.

$A \cap B = \{1, 2\}$ olacağından $s(A \cap B) = 2$ dir.

$s[(A \cap B) \times B] = s(A \cap B) \cdot s(B)$

$= 2 \cdot 2$

$= 4$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 75:

A, B ve C kümeleri için,

$$s(A \times B) = 9$$

$$s(A \times C) = 6$$

olduğuna göre, $s(A \cup B \cup C)$ nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 8

B) 9

C) 12

D) 15

E) 16

Çözüm:

$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 9$$

$$s(A \times C) = s(A) \cdot s(C) = 6 \text{ dir.}$$

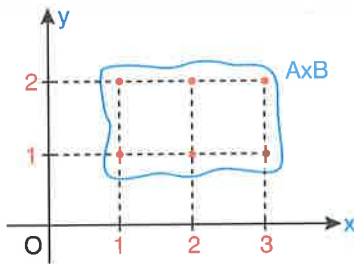
$s(A) = 1$ alınırsa, $s(B) = 9$ ve $s(C) = 6$ olacaktır.

$s(A \cup B \cup C)$ nin en büyük olabilmesi için A, B ve C kümelerini ayrık küme gibi düşünebiliriz.

O halde, $s(A \cup B \cup C) = 1 + 9 + 6 = 16$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 74:



Yukarıda $A \times B$ grafiği verilmiştir.

Buna göre, $s[(A \cap B) \times s(B)]$ değeri kaçtır?

A) 6

B) 4

C) 3

D) 2

E) 1

! Dikkat

Bir A kümesinin boş küme ile kartezyen çarpımı yine bir boş kümedir. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ dir.

KÜMELER

Etkinlik - 1

1. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "X" ile işaretleyiniz.

- a) " $\sqrt{5}$ rasyonel sayıdır." ifadesi önermedir. (.....)
- b) " $x^2 \leq 16$ dir." ifadesi açık önermedir. (.....)
- c) $1 \wedge (0 \vee 1) \equiv 0$ (.....)
- d) $1 \vee (0 \vee 1) \equiv 0$ (.....)
- e) $(1 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 1 \equiv 0$ (.....)
- f) $p \vee q \equiv q \vee p$ (.....)
- h) $(p \vee p') \vee q \equiv 1$ (.....)
- i) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $p' \Rightarrow q'$ dür. (.....)
- l) $p(x) : \forall x \in \mathbb{Z}, x=4$ ise $p'(x) : \exists x \in \mathbb{Z}, x \neq 4$ tür. (.....)

2. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "X" ile işaretleyiniz.

- a) "Bazı rakamlar" ifadesi küme belirtir. (.....)
- b) $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ kümesi 3 elemanlıdır. (.....)
- c) $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin 15 tane alt kümesi vardır. ... (.....)
- d) $A \cup B = B \cup A$ (.....)
- e) $A - B = A \cap B'$ (.....)
- f) $A \cup A' = \emptyset$ (.....)
- g) $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$ (.....)

Etkinlik - 2

$$A = \{x \mid x < 3, x \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$B = \{x \mid 1 < x < 7, x = 2.k, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümeleri için $A \times B$ grafiğini çiziniz.

Etkinlik - 3

$A = \{1, 2, a, c\}$ kümesi veriliyor.

1. Aşağıda boş bırakılan yerlere $\in$ ve $\notin$ sembollerinden uygun olanları yazınız.

- a) 1 A
- b) a A
- c) b A
- d) $\{1, 2\}$ A
- e) 3 A
- f) $\emptyset$ A

2. Aşağıda boş bırakılan yerlere $\subseteq$ ve $\not\subseteq$ sembollerinden uygun olanları yazınız.

- a) $\{1\}$ A
- b) $\{1, a\}$ A
- c) 2 A
- d) $\{2, a, c\}$ A
- e) $\{ \}$ A
- f) $\{1, 2, a, c\}$ A

Etkinlik - 4

$A = \{\text{"KERTENKELE" kelimesinin harfleri}\}$

$B = \{\text{"MEMLEKET" kelimesinin harfleri}\}$

kümeleri veriliyor.

Aşağıda verilen kümeleri liste yöntemi ile yazarak eleman sayılarını belirtiniz.

- a) $A = \{ \dots \}$ ve $s(A) = \dots$
- b) $B = \{ \dots \}$ ve $s(B) = \dots$
- c) $A \cap B = \{ \dots \}$ ve $s(A \cap B) = \dots$
- d) $A \cup B = \{ \dots \}$ ve $s(A \cup B) = \dots$
- e) $A - B = \{ \dots \}$ ve $s(A - B) = \dots$
- f) $B - A = \{ \dots \}$ ve $s(B - A) = \dots$

Etkinlik - 5

Aşağıda verilen kümelerin alt küme sayılarını boş bırakılan yerlere yazınız.

- a) $A = \{1, 2\}$ kümesinin alt kümeleri tanedir.
- b) $B = \{2, a, 3\}$ kümesinin alt kümeleri tanedir.
- c) $C = \{\text{Yılın "M" ile başlayan ayları}\}$ kümesinin alt kümeleri tanedir.
- d) $D = \{1100122 \text{ sayısının rakamları}\}$ kümesinin alt kümeleri tanedir.
- e) $E = \{0 \text{ dan küçük doğal sayılar}\}$ kümesinin alt kümeleri tanedir.

KÜMELER

Test : 01

1. $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $-2 \in A$ B) $2 \in A$ C) $s(A) = 4$
D) $1 \in A$ E) $\{1, 2\} \in A$

2. $A = \{x \mid x \leq 6, x \text{ çift doğal sayı}\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin liste yöntemi ile gösterilişi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

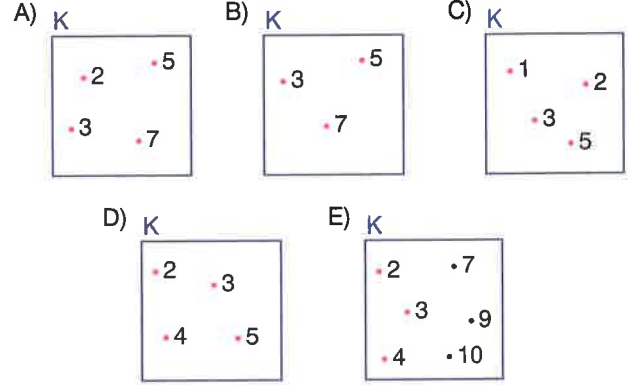
- A) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
B) $A = \{2, 4, 6\}$
C) $A = \{0, 2, 4, 6\}$
D) $A = \{1, 3, 5\}$
E) $A = \{0, 2, 4\}$

3. Aşağıdakilerden hangisi $A = \{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ kümesinin bir elemanı değildir?

- A) 1 B) 2 C) $\{3\}$ D) 4 E) $\{4, 5\}$

4. $K = \{x \mid 2 \leq x \leq 10, x \text{ asal sayı}\}$ kümesi veriliyor.

K kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterilişi aşağıdakilerden hangisidir?



5. Aşağıda verilen kümelerden hangisi boş kümedir?

- A) $A = \{x \mid x - 4 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$
B) $B = \{x \mid x^2 = 0, x \in \mathbb{N}\}$
C) $C = \{x \mid x < 3, x \in \mathbb{Z}^+\}$
D) $D = \{x \mid 1 < x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$
E) $E = \{x \mid x > 3, x \in \mathbb{Z}\}$

6. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesi veriliyor.

Aşağıdakilerden hangisi A kümesinin bir alt kümesi değildir?

- A) $\{1\}$ B) $\{ \}$ C) $\{3, 5\}$
D) $\{1, 3, 7\}$ E) $\{1, \{3\}\}$

KÜMELER

Test : 01

7. $M = \{x \mid -5 < x < 2, x \in \mathcal{N}\}$ kümesi veriliyor.

M kümesinin liste yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
 B) $M = \{0, 1\}$
 C) $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
 D) $M = \{0, 1, 2\}$
 E) $M = \{1\}$

8. $A = \{-5, -2, 1, m, n\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısı kaçtır?

- A) 5 B) 10 C) 16 D) 32 E) 64

9. $A = \{a, b, 3, 4\}$
 $B = \{b, 3, 5\}$
 $C = \{a, b\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $s(A) = 4$ B) $s(B) = 3$ C) $B \subseteq A$
 D) $s(A \cap C) = 2$ E) $C \subseteq A$

10. $A = \{\text{Antalya kelimesinin harfleri}\}$ kümesi veriliyor.

A kümesinin liste yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $A = \{a, n, t, a, l, y, a\}$
 B) $A = \{an, tal, ya\}$
 C) $A = \{a, n, t, l, y\}$
 D) $A = \{\text{Antalya}\}$
 E) $A = \{n, t, l, y\}$



11. $A = \{a, b, c, d, e\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a eleman olarak bulunur, b bulunmaz?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

www.bireyakademi.com



12. $A = \{a, b\}$
 $B = \{a, b, c, d, e\}$

kümeleri veriliyor.

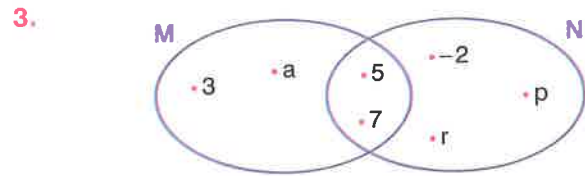
Buna göre, $A \subseteq K \subseteq B$ olacak şekilde kaç farklı K kümesi yazılabilir?

- A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

www.bireyakademi.com

1. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre, $A \cup B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B) $\{-1, 1, 3\}$
C) $\{0, 1, 2\}$ D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
E) $\{0, 1, 2, 3\}$

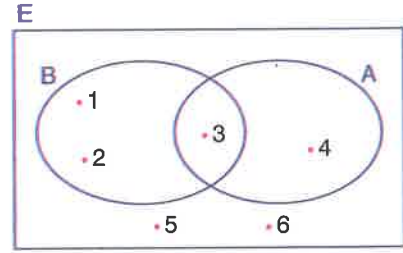
2. $K = \{232303 \text{ sayısının rakamları}\}$
 $L = \{3 \text{ ten küçük doğal sayılar}\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre, $K \cap L$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{0, 1, 2\}$ B) $\{1, 2\}$ C) $\{0, 1\}$
D) $\{2, 3\}$ E) $\{0, 2\}$



Yukarıda Venn şemasıyla gösterilen M ve N kümeleri için aşağıda verilenlerden hangisi yanlıştır?

- A) $M \cup N = \{-2, 3, 5, 7, a, p, r\}$
B) $M \cap N = \{5, 7\}$
C) $M - N = \{a, 3\}$
D) $N - M = \{-2, p, r\}$
E) $s(M) + s(N) = 7$

4.



Yukarıdaki şemada verilen A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

Buna göre, aşağıda verilen eşitliklerden hangisi doğrudur?

- A) $B - A = \{1, 2, 5, 6\}$
B) $A - B = \{5, 6\}$
C) $B' = \{4, 5, 6\}$
D) $A' = \{5, 6\}$
E) $(B \cup A)' = \{3, 5, 6\}$

5. A ve B kümeleri için,
 $s(A) = 7$
 $s(B) = 9$
 $s(A \cap B) = 3$

veriliyor.

Buna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

- A) 13 B) 15 C) 16 D) 17 E) 19



6. 18 kişilik bir sınıfta resimle ilgilenen herkes aynı zamanda müzikle de ilgilenmektedir. Müzikle ilgilenenlerin sayısı resimle ilgilenenlerin sayısının 4 katıdır.

Sınıfta müzikle ilgilenmeyen 10 kişi olduğuna göre, resimle ilgilenmeyen kaç kişi vardır?

- A) 13 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

KÜMELER

Test : 02

7. A ve B kümeleri için,

- $A \subseteq B$
- $s(B) = 3 \cdot s(A)$
- $s(A \cup B) = 12$

bilgileri veriliyor.

Buna göre, $s(B - A)$ kaçtır?

- A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

8. A ve B ayrık olmayan iki kümedir.

$s(A) = 8$

$s(B) = 4$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ en çok kaç olabilir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

9. Futbol veya basketbol oyunlarından en az birinin oynandığı 20 kişilik bir grupta 16 kişi futbol, 8 kişi ise basketbol oynamaktadır.

Buna göre, yalnız futbol oynayan kaç kişidir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8



10. 17 kişilik bir turist kafilesinde İngilizce ve Almanca dillerinden en az birini bilen ve bu dillerin her ikisinde bilmeyenler vardır.

Bu katilede sadece Almanca bilenler sadece İngilizce bilenlerin 3 katıdır.

2 kişi her iki dili de bilmekte, 3 kişi ise bu dillerden hiçbirini bilmemektedir.

Buna göre, İngilizce bilenler kaç kişidir?

- A) 11 B) 9 C) 8 D) 7 E) 5

www.birey akademi.com

11. $(3x - 1, y + 2) = (14, 4)$ sıralı ikili eşitliğine göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 9 C) 8 D) 7 E) 5

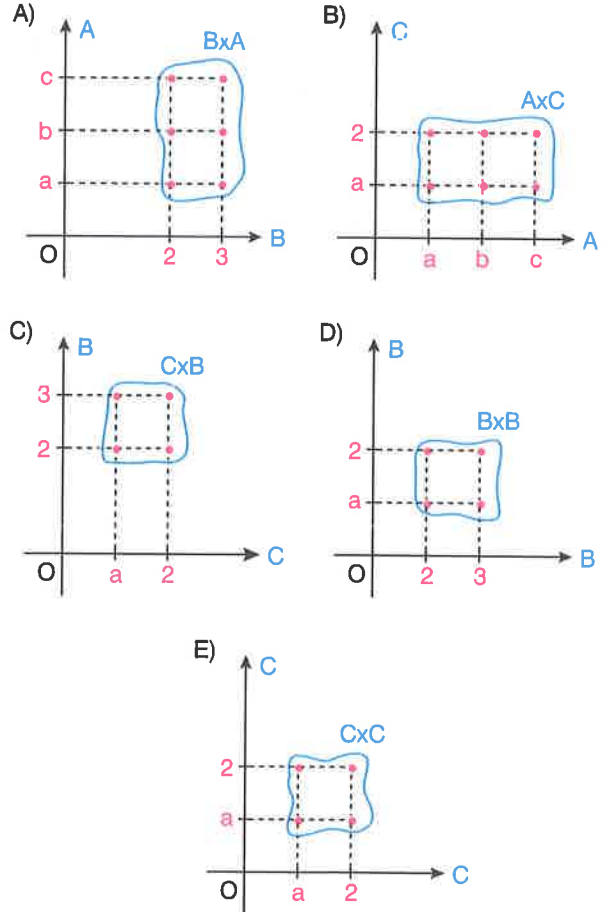
12. $A = \{a, b, c\}$

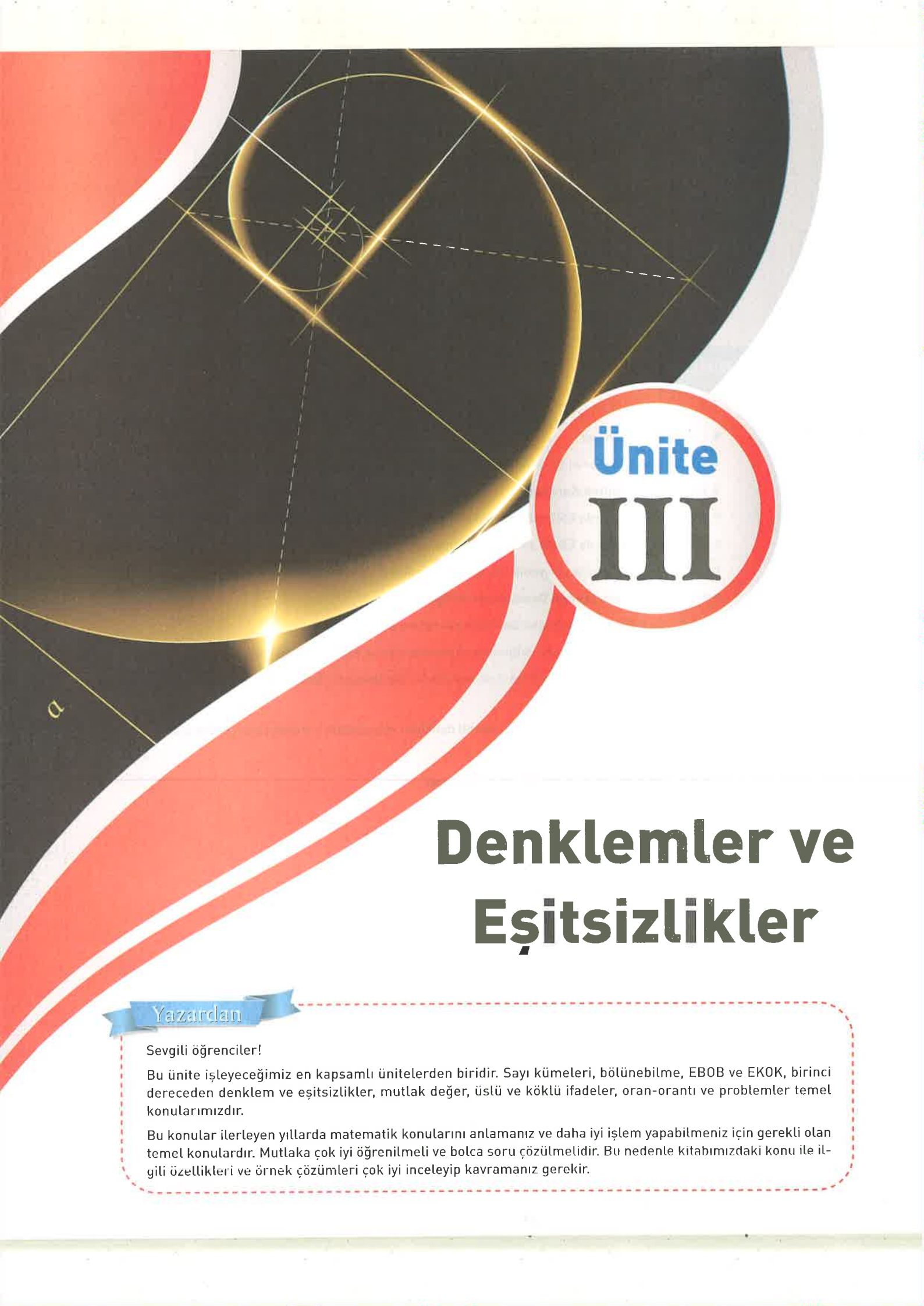
$B = \{2, 3\}$

$C = \{a, 2\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıda verilen Kartezyen Çarpım Grafiklerinden hangisi yanlıştır?





Ünite

III

Denklemler ve Eşitsizlikler

Yazardan

Sevgili öğrenciler!

Bu ünite işleyeceğimiz en kapsamlı ünitelerden biridir. Sayı kümeleri, bölünebilme, EBOB ve EKOK, birinci dereceden denklem ve eşitsizlikler, mutlak değer, üslü ve köklü ifadeler, oran-orantı ve problemler temel konularımızdır.

Bu konular ilerleyen yıllarda matematik konularını anlamanız ve daha iyi işlem yapabilmeniz için gerekli olan temel konulardır. Mutlaka çok iyi öğrenilmeli ve bolca soru çözülmelidir. Bu nedenle kitabımızdaki konu ile ilgili özellikleri ve örnek çözümleri çok iyi inceleyip kavramanız gerekir.

KAZANIMLAR

9.3.1 : Sayı Kümeleri

9.3.1.1 : Sayı kümelerini birbirleriyle ilişkilendirir.

9.3.2 : Bölünebilme Kuralları

9.3.2.1 : Tam sayılarda bölünebilme kurallarıyla ilgili problemler çözer.

9.3.2.2 : Tam sayılarda EBOB ve EKOK ile ilgili uygulamalar yapar.

9.3.2.3 : Gerçek hayatta periyodik olarak tekrar eden durumları içeren problemler çözer.

9.3.3 : Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

9.3.3.1 : Gerçek sayılar kümesinde aralık kavramını açıklar.

9.3.3.2 : Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.

9.3.3.3 : Mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.

9.3.3.4 : Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.

9.3.4 : Üslü İfadeler ve Denklemler

9.3.4.1 : Üslü ifadeleri içeren denklemleri çözer.

9.3.4.2 : Köklü ifadeleri içeren denklemleri çözer.

9.3.5 : Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Uygulamalar

9.3.5.1 : Oran - Orantı kavramlarını kullanarak problemler çözer.

9.3.5.2 : Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemleri çözer.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

SAYI KÜMELERİ

- a) **Doğal sayılar**; 0, 1, 2, 3, ... elemanlarından oluşur. Doğal sayılar kümesi $\mathcal{N}$ ile gösterilir.

$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- b) **Sayma sayıları**; 1, 2, 3, ... elemanlarından oluşur. Sayma sayıları kümesi $\mathcal{N}^+$ ile gösterilir.

$$\mathcal{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- c) **Pozitif tam sayılar**; 1, 2, 3, ... elemanlarından oluşur. Pozitif tam sayılar kümesi $\mathcal{Z}^+$ ile gösterilir.

$$\mathcal{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Pozitif tam sayılar kümesi ile sayma sayılar kümesi aynı elemanlardan oluşur.

- d) **Negatif tam sayılar**; -1, -2, -3, ... elemanlarından oluşur. Negatif tam sayılar kümesi $\mathcal{Z}^-$ ile gösterilir.

$$\mathcal{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$$



Dikkat

Sıfır sayısı ne pozitif ne de negatif bir tam sayıdır. $0 \notin \mathcal{Z}^+$ ve $0 \notin \mathcal{Z}^-$ dir.

- e) **Tam sayılar kümesi**; pozitif tam sayılar, negatif tam sayılar ve sıfır sayısının birleşiminden oluşur.

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^- \cup \{0\} \text{ dir.}$$

Tam sayılar kümesi $\mathcal{Z}$ ile gösterilir.

$$\mathcal{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- f) **Rasyonel sayılar**; paydası sıfırdan farklı olmak üzere iki tam sayının bölümü şeklinde yazılabilen kesirlerdir.

Rasyonel sayılar kümesi $\mathcal{Q}$ ile gösterilir.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathcal{Z} \text{ ve } b \in \mathcal{Z}, b \neq 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

- ♦ $\frac{4}{5}$, $-\frac{7}{2}$, 5, -2, 0, 0,12, $2,\overline{7}$ gibi sayılar birer rasyonel sayıdır.

- ♦ Tam sayılar paydası 1 olan kesir şeklinde düşünüldüğünden birer rasyonel sayıdır.

$$5 = \frac{5}{1}, -2 = -\frac{2}{1}, 0 = \frac{0}{1} \text{ gibi.}$$

Dolayısıyla $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Q}$ olur.

- ♦ Ondalık gösterim şeklinde yazılan sayılar birer rasyonel sayıdır.

$$0,4 = \frac{4}{10}, 1,25 = \frac{125}{100} \text{ gibi}$$

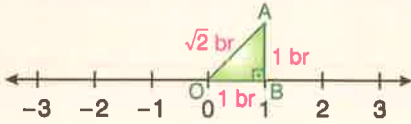
EKSTREM BİLGİLER

- Her gerçek sayı, sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık gelir.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ gibi sayılar rasyonel değildir. Fakat bu sayılar gerçek sayı olduğundan sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık gelirler.

- $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerinde hangi noktaya karşılık geldiğini bulalım.

- Öncelikle sayı doğrusunda bir dik kenarı doğru üzerinde olan dik kenar uzunlukları 1 br olan dik üçgen çzelim.

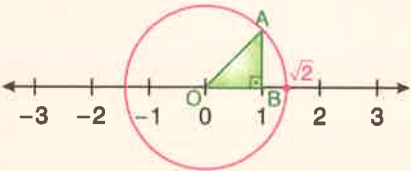


$\triangle OAB$ nde Pisagor bağıntısından

$$|OA|^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow |OA|^2 = 2$$

$$\Rightarrow |OA| = \sqrt{2} \text{ br olur.}$$

- Pergel yardımıyla merkezli O olan ve A dan geçen çember çzelim. Çemberin sayı doğrusunu kestiği nokta $\sqrt{2}$ nin sayı doğrusu üzerindeki yeridir.



- Devirli ondalık kesir şeklinde yazılan sayılar birer rasyonel sayıdır.

$$0,222... = 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$$

$$1,444... = 1,\overline{4} = \frac{14-1}{9} = \frac{13}{9}$$

$$1,4222... = 1,4\overline{2} = \frac{142-14}{90} = \frac{128}{90} = \frac{64}{45} \text{ gibi}$$

Dikkat

Devirli ondalık gösterim şeklindeki sayıların rasyonel sayıya çevrilmesini hatırlayalım.

- $a, bc = \frac{\text{Sayının Tamamı} - \text{Devretmeyen Kısım}}{\text{Virgülden Sonra Devreden Kadar 9, Devretmeyen Kadar 0}}$

$$= \frac{abc - ab}{90} \text{ şeklindedir.}$$

$$1,\overline{6} = \frac{16-1}{9} = \frac{15}{9}$$

$$0,2\overline{5} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$$

- Pozitif rasyonel sayılar Q^+ , negatif rasyonel sayılar ise Q^- ile ifade edilir.

- İrrasyonel sayılar;** rasyonel olmayan gerçek sayılardır.

İrrasyonel sayılar kümesi Q' ile gösterilir.

- İrrasyonel sayılar iki tam sayının bölümü şeklinde yazılamayan gerçek sayılardır.
- Köklü ifadeler, kök içerisindeki sayı tamamen kök dışına alınamıyorsa irrasyonel sayılardır.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}, 2\sqrt{2}, \sqrt{20}$ sayıları birer irrasyonel sayıdır.

Köklü ifadede kök içerisindeki sayı tamamen kök dışına alınabiliyorsa bu sayılar rasyoneldir. $\sqrt{4}=2$ olacağından $\sqrt{4}$ rasyoneldir.

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \text{ olacağından } \sqrt{\frac{9}{25}} \text{ rasyoneldir.}$$

- Ondalık kısmı sonsuza kadar devam eden ancak devirli ondalık kesir şeklinde yazılamayan sayılar irrasyonel sayılardır.

π sayısı bu sayılardan biridir. $\pi=3,141592653589793238\dots$ sayısının ondalık kısmında devir bulunmadığından π sayısı iki tam sayının bölümü şeklinde yazılamaz. Dolayısıyla π , irrasyonel bir sayıdır.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

h) **Gerçek (reel) sayılar**; rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimiyle oluşan sayılardır.

Gerçek (reel) sayılar kümesi $\mathcal{R}$ ile gösterilir.

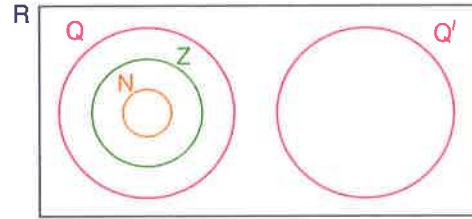
$$\mathcal{R} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}' \text{ dır.}$$

♦ Pozitif gerçek sayılar kümesi $\mathcal{R}^+$, negatif gerçek sayılar kümesi ise $\mathcal{R}^-$ ile gösterilir.

♦ Ayrıca, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \emptyset$ dir.

! Dikkat

$\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ kümeleri arasında, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ özelliği vardır.



Gerçek Sayılarda Toplama İşleminin Özellikleri

1) **Kapalılık özelliği**: $a, b \in \mathcal{R}$ ise $a+b \in \mathcal{R}$ dir. Yani iki gerçek sayının toplamı yine bir gerçek sayıdır. Dolayısıyla gerçek sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

♦ $7 \in \mathcal{R}$, $9 \in \mathcal{R}$ iken $7+9=16 \in \mathcal{R}$ dir.

♦ $\frac{2}{3} \in \mathcal{R}$, $\frac{1}{5} \in \mathcal{R}$ iken $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} \in \mathcal{R}$ dir.

♦ $2\sqrt{5} \in \mathcal{R}$, $\sqrt{5} \in \mathcal{R}$ iken $2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \in \mathcal{R}$ dir.

2) **Değişme özelliği**: $a, b \in \mathcal{R}$ olmak üzere $a+b=b+a$ dir. Yani iki gerçek sayının toplamında sayılar yer değiştirdiğinde sonuç değişmez. Dolayısıyla gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

♦ $8+5=5+8$

♦ $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$

♦ $\sqrt{5}+1=1+\sqrt{5}$ gibi.

3) **Birleşme özelliği**: $a, b, c \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $(a+b)+c=a+(b+c)$ dir. Yani, üç (veya daha fazla) sayının toplamında sayılar farklı ikili gruplar halinde toplandığında sonuç değişmez. Dolayısıyla gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

♦ $(5+9)+7=5+(9+7)$

♦ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right)$ gibi.

4) **Etkisiz eleman**: $a \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $a+0=0+a=a$ olur. Dolayısıyla gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 dir.

♦ $5+0=0+5=5$

♦ $\sqrt{2}+0=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$

♦ $\frac{1}{4}+0=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ gibi.

5) **Ters Eleman**: $a \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $a+(-a)=(-a)+a=0$ dir. Dolayısıyla gerçek sayılar kümesinde toplama işlemine göre her elemanın tersi vardır.

♦ a gerçek sayısının toplama işlemine göre tersi $-a$ sayıdır.

♦ $4+(-4)=(-4)+4=0$ olduğundan 4 sayısının toplama işlemine göre tersi -4 , -4 sayısının toplama işlemine göre tersi de 4 tür.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

Gerçek Sayılarda Çarpma İşleminin Özellikleri

1) Kapalılık özelliği: $a, b \in \mathcal{R}$ ise $a \cdot b \in \mathcal{R}$ dir. Yani, iki gerçık sayının çarpımı yine bir gerçık sayıdır. Dolayısıyla, gerçık sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

$$\begin{aligned} \diamond 4 \in \mathcal{R}, 5 \in \mathcal{R} \text{ iken } 4 \cdot 5 = 20 \in \mathcal{R} \text{ dir.} \quad & \diamond \frac{2}{3} \in \mathcal{R}, -\frac{1}{5} \in \mathcal{R} \text{ iken } \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{5} = -\frac{2}{15} \in \mathcal{R} \text{ dir.} \quad & \diamond \sqrt{5} \in \mathcal{R}, \sqrt{2} \in \mathcal{R} \text{ iken } \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10} \in \mathcal{R} \text{ dir.} \end{aligned}$$

2) Değişme özelliği: $a, b \in \mathcal{R}$ olmak üzere $a \cdot b = b \cdot a$ dir. Yani iki gerçık sayının çarpımında sayılar yer değiştirdiğinde sonuç değişmez. Dolayısıyla gerçık sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

$$\begin{aligned} \diamond 7 \cdot 2 = 2 \cdot 7 = 14 \quad & \diamond \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} \quad & \diamond \frac{1}{4} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ gibi.} \end{aligned}$$

3) Birleşme özelliği: $a, b, c \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir. Yani üç (veya daha fazla) sayının çarpımında sayılar farklı ikili gruplar halinde çarpıldığında sonuç değişmez. Dolayısıyla gerçık sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$$\begin{aligned} \diamond (4 \cdot 3) \cdot 5 = 4 \cdot (3 \cdot 5) \quad & \diamond (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) \quad & \diamond \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \right) \text{ gibi.} \end{aligned}$$

4) Etkisiz eleman: $a \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dir. Dolayısıyla gerçık sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

$$\begin{aligned} \diamond 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7 \quad & \diamond (-8) \cdot 1 = 1 \cdot (-8) = -8 \quad & \diamond \frac{3}{5} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \text{ gibi.} \end{aligned}$$

5) Yutan eleman: $a \in \mathcal{R}$ olmak üzere, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ dir. Dolayısıyla gerçık sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 dir.

$$\begin{aligned} \diamond 2 \cdot 0 = 0 \cdot 2 = 0 \quad & \diamond (-7) \cdot 0 = 0 \cdot (-7) = 0 \quad & \diamond \sqrt{6} \cdot 0 = 0 \cdot \sqrt{6} = 0 \text{ gibi.} \end{aligned}$$

6) Ters eleman: $a \in \mathcal{R}, a \neq 0$ olmak üzere, $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ dir. Dolayısıyla gerçık sayılar kümesinde sıfırdan farklı her elemanın çarpma işlemine göre tersi vardır.

$$\begin{aligned} \diamond \text{Sıfırdan farklı bir } a \text{ gerçık sayısının çarpma işlemine göre tersi } \frac{1}{a} \text{ dir.} \\ \diamond 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \text{ olduğundan } 6 \text{ sayısının çarpma işlemine göre tersi } \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \text{ sayısının çarpma işlemine göre tersi de } 6 \text{ dir.} \\ \diamond \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \text{ olduğundan } \frac{3}{5} \text{ sayısının çarpma işlemine göre tersi } \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \text{ sayısının çarpma işlemine göre tersi de } \frac{3}{5} \text{ tir.} \end{aligned}$$

7) Dağılım özelliği:

$a, b, c \in \mathcal{R}$ olmak üzere,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \text{ olur.}$$

Gerçık sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılım özelliği vardır.

$$\begin{aligned} \diamond 5 \cdot (7 + 2) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 2 \text{ (soldan dağılım özelliği)} \quad & \diamond (8 + 3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \text{ (sağdan dağılım özelliği) gibi.} \end{aligned}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

Örnek 1:

Aşağıda verilen,

- I. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ II. π III. 0,7 IV. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

sayılarından hangileri rasyoneldir?

- A) I ve III B) II ve III C) II, III ve IV
D) I, II ve III E) III ve IV

Çözüm:

I. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ olduğundan $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ sayısı irrasyoneldir.

II. π sayısı irrasyonel bir sayıdır.

III. $0,7 = \frac{7}{10}$ olduğundan 0,7 sayısı rasyoneldir.

IV. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$ olduğundan $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ sayısı rasyoneldir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Çözüm:

- $(3+\sqrt{2})$ ve $(3-\sqrt{2})$ sayıları irrasyoneldir. Bu sayılar toplandığında elde edilen 6 sayısı ise rasyoneldir. O halde Fatih'in verdiği örnek doğrudur.
- $2\sqrt{5}$ ve $\sqrt{5}$ sayıları irrasyoneldir. Bu sayılar toplandığında elde edilen $3\sqrt{5}$ sayısı rasyonel değildir. O halde Yasemin'in verdiği örnek yanlıştır.
- $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ sayıları rasyoneldir. Halbuki öğretmen iki irrasyonel sayının toplanmasını istemiştir. O halde Serap'ın verdiği örnek yanlıştır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 2:

Matematik öğretmeni Metin Bey, sınıftaki öğrencilerine "İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel olabilir." diyor. Daha sonra öğrencilerinden bu cümleye uygun bir örnek vermelerini istiyor.

- Fatih : $(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$
- Yasemin : $2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
- Serap : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Fatih, Yasemin ve Serap adlı öğrenciler yukarıdaki örnekleri verdiği göre, hangi öğrenciler doğru örnek vermiştir?

- A) Yalnız Fatih B) Yalnız Serap
C) Yalnız Yasemin D) Fatih ve Serap
E) Fatih ve Yasemin

Örnek 3:

Aşağıda verilen sayılardan hangisi rasyoneldir?

- A) $3\sqrt{6}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ D) π E) $\frac{2\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}+3}$

Çözüm:

- A) $3\sqrt{6}$ sayısı irrasyoneldir.
- B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ sayısı irrasyoneldir.
- C) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ olduğundan $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ irrasyoneldir.
- D) π irrasyonel bir sayıdır.
- E) $\frac{2\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}+3} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3(\sqrt{2}+1)} = \frac{2}{3}$ olduğundan verilen sayı rasyoneldir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

Örnek 4:

a ve b doğal sayılardır.

$$a+b=12$$

olduğuna göre, a.b çarpımının alabileceği en küçük ve en büyük değer toplamı kaçtır?

- A) 24 B) 29 C) 32 D) 36 E) 47

Çözüm:

Toplamları 12 olan doğal sayıların çarpımını bulalım.

a	b	a+b	a.b
0	12	12	0
1	11	12	11
2	10	12	20
3	9	12	27
4	8	12	32
5	7	12	35
6	6	12	36

Görüldüğü gibi a.b çarpımının alabileceği en küçük değer 0, en büyük değer ise 36'dır.

O halde sonuç $0+36=36$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

Toplamları sabit olan iki doğal sayının çarpımlarının en küçük olabilmesi için sayılar arasındaki farkın en çok, en büyük olabilmesi için ise sayılar arasındaki farkın en az olması gerekir.

Örnek 5:

$$a, b \in \mathbb{Z}^+$$

$$a.b=36$$

olduğuna göre, a+b toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değer toplamı kaçtır?

- A) 52 B) 49 C) 45 D) 39 E) 36

Çözüm:

Çarpımları 36 olan pozitif tam sayıların toplamını bulalım.

a	b	a.b	a+b
1	36	36	37
2	18	36	20
3	12	36	15
4	9	36	13
6	6	36	12

Görüldüğü gibi a+b toplamının alabileceği en büyük değer 37, en küçük değer ise 12'dir.

O halde sonuç, $37+12=49$ dur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

! Dikkat

Çarpımları sabit olan iki doğal sayının toplamının en büyük olabilmesi için sayılar arasındaki farkın en çok, en küçük olabilmesi için sayılar arasındaki farkın en az olması gerekir.

Örnek 6:

$\frac{2}{3}$ sayısının çarpma işlemine göre tersi m, m sayısının toplama işlemine göre tersi n'dir.

Buna göre, m.n çarpımı kaçtır?

- A) $-\frac{9}{4}$ B) $-\frac{4}{9}$ C) 1 D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{9}{4}$

Çözüm:

$\frac{2}{3}$ sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{3}{2}$ dir. O halde

$$m = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

$m = \frac{3}{2}$ sayısının toplama işlemine göre tersi $-\frac{3}{2}$ dir. O halde $n = -\frac{3}{2}$ olur.

$$m.n = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \text{ bulunur.}$$

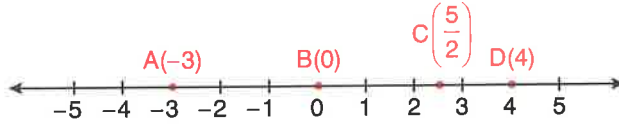
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Sayı Kümeleri

! Dikkat

Gerçek sayılar kümesinin her elemanı sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık gelir. Sayı doğrusu üzerindeki noktalar aşağıdaki gibi büyük harflerle gösterilir.



Örnek 7:

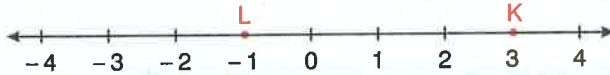
Sayı doğrusu üzerinde K(3) ve L(-1) noktaları veriliyor.

Buna göre, K ve L noktaları arasındaki uzaklık kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm:

K(3) ve L(-1) sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



K ile L arasındaki uzaklık $(3) - (-1) = 4$ tür.

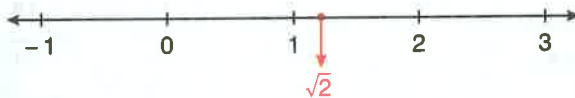
Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 8:

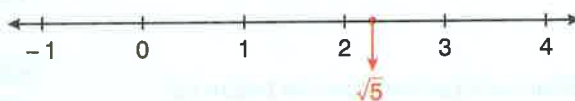
$\sqrt{2}$ ve $\sqrt{5}$ sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm:

- $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ yazılabileceğinden $1 < \sqrt{2} < 2$ elde edilir. $\sqrt{2}$ sayısı $\sqrt{1}$ e daha yakın olduğundan bu sayı 1 ve 2 tam sayıları arasında ve 1 e daha yakındır.



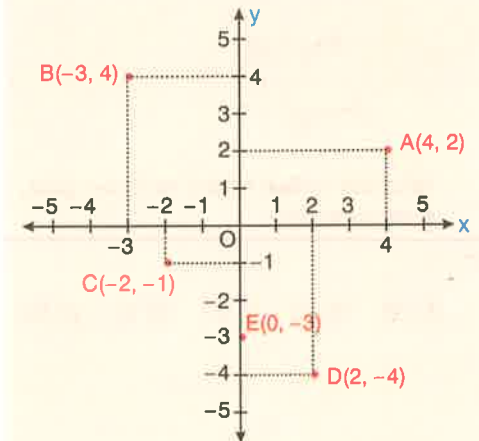
- $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ yazılabileceğinden $2 < \sqrt{5} < 3$ elde edilir. $\sqrt{5}$ sayısı $\sqrt{4}$ e daha yakın olduğundan bu sayı 2 ve 3 tam sayıları arasında ve 2 ye daha yakındır.



EKSTREM BİLGİLER

Gerçek sayılarla oluşturulan her bir sıralı ikili koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir.

Koordinat sistemi üzerindeki bu noktalar aşağıdaki gibi büyük harflerle gösterilir.



İLK ADIM SORULARI

1. 17018 sayısının 17 ile bölümünde bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

A) 12 B) 99 C) 102 D) 1002 E) 1011

2.

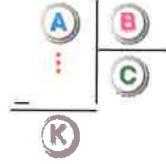
$$\begin{array}{r} A+2 \overline{) 12} \\ \underline{5} \end{array}$$

Yukarıda verilen bölme işlemine göre, A sayısı kaçtır?

A) 83 B) 85 C) 87 D) 91 E) 93

A, B, C ve K birer doğal sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere,

A sayısının B ile bölümünde bölüm C ve kalan K ise bu durum,



A : Bölünen
B : Bölün
C : Bölüm
K : Kalan

şeklinde gösterilir.

Bu bölme işleminde,

1) $A = B \cdot C + K$

Bölünen = Bölün . Bölüm + Kalan

2) $0 \leq K < B$

Kalan sıfıra eşit veya sıfırdan büyük, bölenden ise küçüktür.

- 3) $K < C$ ise B ile C yer değiştirebilir. Bu değişiklik kalanı değiştirmez. özellikleri mevcuttur.

♦ 169 sayısını 15 e bölerek yukarıdaki özelliklerin sağlandığını görelim.

Yanda yaptığımız bölme işleminde,

a) $169 = 15 \cdot 11 + 4$

$169 = 165 + 4$

$169 = 169$

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 15} \\ \underline{15} \\ 019 \\ \underline{15} \\ 4 \end{array}$$

- b) Kalan 4 olduğuna göre, $0 \leq 4 < 15$ eşitsizliği vardır.

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 059 \\ \underline{55} \\ 4 \end{array}$$

- c) Kalan < Bölüm olduğundan bölün ile bölüm yer değiştirdiğinde kalanın değişmediğini görürüz.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 9:

$$\begin{array}{r} A \overline{) 6} \\ \underline{B+2} \\ B \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde A ve B birer doğal sayıdır.

Buna göre, A sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 44 B) 47 C) 51 D) 56 E) 64

Çözüm:

Kalan < Bölün olacağından $B < 6$ dır.

A sayısının en büyük değerini alabilmesi için B sayısının en büyük değeri seçilmelidir.

O halde, B doğal sayısı en çok 5 olabilir.

Bölünen = Bölün . Bölüm + Kalan eşitliğine göre,

$$A = 6 \cdot (B+2) + B \dots (B=5 \text{ idi.})$$

$$A = 6 \cdot 7 + 5$$

$$A = 47 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 10:

$$\begin{array}{r} A+4 \overline{) B+1} \\ \underline{5} \\ 7 \end{array}$$

Yukarıda verilen bölme işlemine göre, B nin A türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{A-8}{5}$ B) $\frac{A-11}{5}$ C) $\frac{A+2}{7}$ D) $\frac{A-5}{7}$ E) $\frac{A+3}{5}$

Çözüm:

Bölünen = Bölün . Bölüm + Kalan eşitliğine göre,

$$A+4 = (B+1) \cdot 5 + 7$$

$$A+4 = 5B+5+7$$

$$A+4 = 5B+12$$

$$A = 5B+8 \text{ elde edilir.}$$

Elde ettiğimiz bu eşitlik A'nın B türünden eşitidir. Bizden istenen B'nin A türünden eşiti olduğuna göre,

$$A = 5B+8 \Rightarrow 5B = A-8$$

$$B = \frac{A-8}{5} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 11:

A, B ve C doğal sayılar olmak üzere,

$$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ \underline{6} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \overline{) C} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$$

bölme işlemleri veriliyor.

Buna göre, A'nın C türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $24C+16$ B) $12C+8$ C) $24C+12$
D) $24C+8$ E) $12C+6$

Çözüm:

$$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ \underline{6} \\ 2 \end{array} \Rightarrow A = 6B+2 \dots \textcircled{1} \text{ yazılabilir.}$$

$$\begin{array}{r} B \overline{) C} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array} \Rightarrow B = 4C+1 \dots \textcircled{2} \text{ yazılabilir.}$$

② numaralı eşitlikte elde edilen B değeri ① numaralı eşitlikte yerine yazılırsa,

$$A = 6 \cdot B + 2 \Rightarrow A = 6 \cdot (4C+1) + 2$$

$$A = 24C+6+2$$

$$A = 24C+8 \text{ elde edilir.}$$

Bu ifade A'nın C türünden eşitidir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 12:

$$\begin{array}{r} A \overline{) B-2} \\ \underline{B+1} \\ 5 \end{array}$$

Yukarıda verilen bölme işleminde A ve B birer doğal sayıdır.

Buna göre, A'nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 51 B) 53 C) 59 D) 61 E) 67

Çözüm:

Kalan < Bölün olacağından

$$5 < B-2 \Rightarrow 7 < B \text{ dir.}$$

A sayısının en küçük olabilmesi için B sayısı en küçük seçilmelidir.

$B > 7$ olduğundan $B=8$ alınırsa,

$$\text{Bölünen} = \text{Bölen} \cdot \text{Bölüm} + \text{Kalan}$$

$$A = (B-2) \cdot (B+1) + 5 \quad (B=8 \text{ idi.})$$

$$A = 6 \cdot 9 + 5$$

$$A = 59 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 13:

a, b ve c pozitif tam sayılardır. a sayısının 8 ile bölümünde bölüm b kalan 5, b sayısının 15 ile bölümünde bölüm c kalan 6'dır.

Buna göre, a sayısının 12 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 11

Çözüm:

$$\begin{array}{r} a \overline{) 8} \\ \underline{b} \\ 5 \end{array} \Rightarrow a = 8b + 5 \dots \textcircled{1} \text{ yazılabilir.}$$

$$\begin{array}{r} b \overline{) 15} \\ \underline{c} \\ 6 \end{array} \Rightarrow b = 15c + 6 \dots \textcircled{2} \text{ yazılabilir.}$$

① numaralı eşitlikte elde edilen ifade ② numaralı eşitlikte yerine yazılırsa,

$$a = 8b + 5 \Rightarrow a = 8 \cdot (15c + 6) + 5$$

$$a = 120c + 48 + 5$$

$$a = 120c + 53 \text{ elde edilir.}$$

$a = 120c + 53$ sayısında $120c$ sayısı

12'nin katı olduğundan 53'ün 12 ile

bölümünden kalan bulmamız yeterlidir.

$$\begin{array}{r} 53 \overline{) 12} \\ \underline{48} \\ 4 \end{array}$$

O halde, a sayısının 12 ile bölümünden kalan 5'tir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 14:

Toplamı 294 olan iki doğal sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bölüm 23, kalan 6'dır.

Buna göre, küçük sayı kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

Büyük sayı = a, küçük sayı = b olsun. Bu iki sayının toplamı 294 olduğundan,

$$a + b = 294 \dots \textcircled{1} \text{ olacaktır.}$$

Büyük sayı küçük sayıya bölündüğünde bölüm 23, kalan 6 ise

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{23} \\ 6 \end{array} \Rightarrow a = 23b + 6 \dots \textcircled{2} \text{ olur.}$$

② numaralı eşitlikte elde edilen ifade ① numaralı eşitlikte yerine yazılırsa,

$$a + b = 294 \Rightarrow (23b + 6) + b = 294$$

$$24b = 288$$

$$b = 12 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

2 ile Bölünebilme

Son rakamı (birler basamağı) çift olan sayılar 2 ile kalansız bölünür. Son rakamı (birler basamağı) tek olan sayılar 2 ile bölündüğünde kalan daima 1 dir.

- ♦ 37256 sayısının birler basamağı (6) çift olduğundan bu sayı 2 ile kalansız bölünür.
- ♦ 59870 sayısının birler basamağı (0) çift olduğundan bu sayı 2 ile kalansız bölünür.
- ♦ 3765 sayısının birler basamağı (5) tek olduğundan bu sayı 2 ile kalansız bölünemez. Kalan 1 dir.
- ♦ 28163 sayısının birler basamağı (3) tek olduğundan bu sayı 2 ile kalansız bölünemez. Kalan 1 dir.

Örnek 15:

Rakamları farklı dört basamaklı 632A sayısı 2 ile tam (kalansız) bölünebildiğine göre, A'nın yerine yazılabilecek rakamların toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

632A sayısı 2 ile tam bölünebildiğine göre, birler basamağındaki A rakamı 0, 2, 4, 6 ve 8 değerlerini alabilir.

Sayının rakamları farklı olacağından A, 6 ve 2 değerlerini alamaz. O halde A rakamı 0, 4 ve 8 değerlerini alabilir.

A'nın alabileceği değerler toplamı ise $0+4+8=12$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

3 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 3 ün katı olan sayılar 3 ile kalansız bölünür. Sayının rakamları toplamı 3 ün katı değilse bu toplamın 3 ile bölümünden kalan, sayının 3 ile bölümünden kalanı verir.

- ♦ 530721 sayısının rakamları toplamı $5+3+0+7+2+1=18$ dir. 18 sayısı 3 ün katı olduğundan 530721 sayısı 3 ile tam bölünür.
- ♦ 44925 sayısının rakamları toplamı $4+4+9+2+5=24$ tür. 24 sayısı 3 ün katı olduğundan 44925 sayısı 3 ile tam bölünür.
- ♦ 71633 sayısının rakamları toplamı $7+1+6+3+3=20$ dir. 20 sayısı 3 ün katı olmadığından bu sayı 3 ile tam bölünemez. 20 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 71633 sayısının da 3 ile bölümünden kalan 2 dir.
- ♦ 5263 sayısının rakamları toplamı $5+2+6+3=16$ dir. 16 sayısı 3 ün katı olmadığından bu sayı 3 ile tam bölünemez. 16 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olduğundan 5263 sayısının da 3 ile bölümünden kalan 1 dir.

Örnek 16:

Dört basamaklı $2x53$ sayısı 3 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, x in alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 21 B) 18 C) 16 D) 15 E) 12

Çözüm:

$2x53$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için rakamları toplamının 3 ün katı olması gerekir. $2+x+5+3=x+10$ sayısının 3 ün katı olması için x in 2, 5 ve 8 değerlerini alması gerekir. Bu değerlerin toplamı $2+5+8=15$ tir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 17:

Oyuncak satışı yapan bir mağaza toptancıdan bir miktar oyuncak siparişi veriyor.

Bu sipariş ile ilgili,

- Her bir oyuncuğun birim fiyatı 3 liradır.
- Oyuncaklar çift sayıda sipariş edilmiştir.
- Gönderilen faturada ödenecek tutar dört basamaklı 14.. sayısı olup son iki rakamı silik olduğundan okunamamıştır.

Buna göre, mağazanın sipariş verdiği oyuncak sayısı en fazla kaç olabilir?

- A) 502 B) 498 C) 494 D) 486 E) 484

bryPLE bryPLE bryPLE

Çözüm:

Oyuncak sayısının en fazla olabilmesi için oyuncaklara ödenen para miktarının da en büyük olması gerekir. Ödenecek tutarımızın son iki basamağındaki rakamlar silik olduğundan bu tutar 14ab lira olsun. 14ab sayısının en büyük olabilmesi için $a=9$ seçelim.

Oyuncakların birim fiyatı 3 lira ve oyuncak adedi çift sayı olduğundan 149b sayısı hem 3 ile hem de 2 ile kalansız bölünmelidir.

149b sayısı 3 ile kalansız bölündüğünden,
 $1+4+9+b=14+b$ toplamı 3 ün katı olacaktır.

O halde b rakamı 1, 4 ve 7 değerlerini alabilir. Ayrıca sayının 2 ile kalansız bölünebilmesi gerektiğinden b rakamı çift olmak zorundadır. Dolayısıyla $b=4$ olacaktır.

Böylece oyuncaklara ödenen para tutarı en çok 1494 lira olur. Her bir oyuncuğun birim fiyatı 3 lira olduğundan mağaza en fazla $1494 : 3 = 498$ adet oyuncak siparişi vermiş olabilir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

4 ile Bölünebilme

Sayının son iki basamağını oluşturan iki basamaklı sayı 00 veya 4 ün katı ise bu sayı 4 ile tam bölünür. Sayı 4 ile tam bölünmüyorsa son iki basamağını oluşturan iki basamaklı sayı 4 ile bölünerek kalan bulunur.

- ♦ 3500 sayısının son iki basamağı 00 olduğundan bu sayı 4 ile tam bölünür.
- ♦ 12124 sayısının son iki basamağındaki 24 sayısı 4 ün katı olduğundan bu sayı 4 ile tam bölünür.
- ♦ 3234 sayısının son iki basamağındaki 34 sayısı 4 ün katı olmadığından bu sayı 4 ile tam bölünemez. 34 sayısının 4 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 3234 sayısının da 4 ile bölümünden kalan 2 dir.
- ♦ 57927 sayısının son iki basamağındaki 27 sayısı 4 ün katı olmadığından bu sayı 4 ile tam bölünemez. 27 sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğundan 57927 sayısının da 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

Örnek 18:

Dört basamaklı $7m1n$ sayısı 3 ve 4 ile kalansız bölünebilmektedir.

Buna göre, m nin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

bryPLE bryPLE bryPLE

Çözüm:

$7m1n$ sayısı 4 ile tam bölündüğüne göre son iki basamağındaki $1n$ sayısının 4 ün katı olması gerekir. Dolayısıyla $n=2$ veya $n=6$ dir.

- $n=2$ için; $7m12$ sayısı 3 ile tam bölündüğüne göre, $7+m+1+2=m+10$ toplamı 3 ün katı olacağından m rakamı 2, 5 ve 8 olabilir.
- $n=6$ için; $7m16$ sayısı 3 ile tam bölündüğüne göre, $7+m+1+6=m+14$ toplamı 3 ün katı olacağından m rakamı 1, 4 ve 7 olabilir.

O halde, m nin alabileceği değerler kümesi $\{2, 5, 8, 1, 4, 7\}$ dir.

m nin en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı ise $8+1=9$ olacaktır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

5 ile Bölünebilme

Son rakamı (birler basamağı) 0 veya 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür. Sayı 5 ile tam bölünmüyorsa birler basamağındaki rakam 5 ile bölünerek kalan bulunur.

- ♦ 3720 sayısının son rakamı 0 olduğundan bu sayı 5 ile tam bölünür.
- ♦ 2975 sayısının son rakamı 5 olduğundan bu sayı 5 ile tam bölünür.
- ♦ 8243 sayısının son rakamı 3 olduğundan bu sayı 5 ile tam bölünemez. Kalan 3 tür.
- ♦ 7649 sayısının son rakamı 9 olduğundan bu sayı 5 ile tam bölünemez. 9'un 5 ile bölümünden kalan 4 olduğundan bu sayının da 5 ile bölümünden kalan 4 tür.

Örnek 19:

Dört basamaklı $2m4n$ sayısı 5 ve 3 ile tam bölünebilmektedir.

$m > n$ olduğuna göre, m nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

Çözüm:

$2m4n$ sayısı 5 ile tam bölündüğünden $n=0$ veya $n=5$ tir.

- **$n=0$ için;** $2m40$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $2+m+4+0=m+6$ toplamı 3'ün katı olmalıdır. Dolayısıyla m rakamı 0, 3, 6 ve 9 olabilir.

$m > n$ olduğundan $n=0$ iken $m=0$ olamaz. O halde m rakamı 3, 6 ve 9 olabilir.

- **$n=5$ için;** $2m45$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $2+m+4+5=m+11$ toplamı 3'ün katı olmalıdır. Dolayısıyla m rakamı 1, 4 ve 7 olabilir.

$m > n$ olduğundan $n=5$ iken m rakamı 1 ve 4 olamaz.

Dolayısıyla m rakamı 7 olabilir.

Buradan, m rakamı 3, 6, 9 ve 7 değerlerini alabilir.

Bu değerlerin toplamı ise 25 tir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 20:

Dört basamaklı $6A4B$ sayısı 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren bir çift sayıdır.

Bu sayı 3 ile tam bölünebildiğine göre, A nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm:

$6A4B$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, B rakamı 3 veya 8 olmalıdır. Sayı çift olacağına göre, $B=8$ dir.

$6A48$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için

$$6+A+4+8=18+A \text{ toplamının 3'ün katı olması gerekir.}$$

O halde, A rakamı 0, 3, 6 ve 9 olabilir. En büyük değer 9 dur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.



Dikkat

Bir doğal sayı,

- ♦ 5 ile tam bölünüyorsa son rakamı 0 veya 5
- ♦ 5 ile bölümünden kalan 1 ise son rakamı 1 veya 6
- ♦ 5 ile bölümünden kalan 2 ise son rakamı 2 veya 7
- ♦ 5 ile bölümünden kalan 3 ise son rakamı 3 veya 8
- ♦ 5 ile bölümünden kalan 4 ise son rakamı 4 veya 9 olur.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

8 ile Bölünebilme

Sayının son üç basamağını oluşturan üç basamaklı doğal sayı 8 in katı ise bu sayı 8 e kalansız bölünür.

- ♦ 27120 sayısının son üç basamağını oluşturan sayı 120 dir. 120 sayısı 8 in katı olduğundan 27120 sayısı 8 ile tam bölünür.
- ♦ 81424 sayısının son üç basamağını oluşturan sayı 424 tür. 424 sayısı 8 in katı olduğundan 8 ile tam bölünür.
- ♦ 35215 sayısının son üç basamağını oluşturan sayı 215 tir. 215 sayısı 8 in tam katı olmadığından 35215 sayısı 8 ile tam bölünmez. 215 sayısının 8 ile bölümünden kalan 7 olduğundan 35125 sayısının da 8 ile bölümünden kalan 7 dir.

Örnek 21:

Beş basamaklı 5925m sayısı 8 ile tam bölündüğüne göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

Sayının son üç basamağını oluşturan 25m sayısının 8 in katı olması gerekir.

25m sayısını çözümlersek,

$$25m = 2.100 + 5.10 + m = 200 + 50 + m \text{ olur.}$$

200 sayısı 8 in katı olduğundan 50+m sayısı da 8 in katı olacaktır.

O halde $m=6$ dir.

9 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 9 un katı olan doğal sayılar 9 ile tam bölünür. Sayı 9 ile tam bölünmüyorsa kalan, rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

- ♦ 782064 sayısının rakamları toplamı $7+8+2+0+6+4=27$ dir. 27 sayısı 9 un katı olduğundan 782064 sayısı 9 ile tam bölünür.
- ♦ 561714 sayısının rakamları toplamı $5+6+1+7+1+4=24$ tür. 24 sayısı 9 un katı olmadığından bu sayı 9 ile tam bölünemez. Kalan, 24 ün 9 ile bölümünden kalan 6 sayıdır.

Örnek 22:

Beş basamaklı 80a41 sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için a yerine yazılabilecek rakamı bulalım.

Çözüm:

Sayının 9 ile tam bölünebilmesi için rakamları toplamı olan $8+0+a+4+1=13+a$ sayısının 9 un katı olması gerekir.

O halde, a rakamı 5 olmalıdır.

Çözüm:

5m2n sayısı 9 ile tam bölündüğünden n rakamı 0 veya 5 olmalıdır.

- $n=0$ için; 5m20 sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için $5+m+2+0=7+m$ toplamı 9 un katı olmalıdır. Dolayısıyla $m=2$ olur.
- $n=5$ için; 5m25 sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için $5+m+2+5=12+m$ toplamı 9 un katı olmalıdır. Dolayısıyla $m=6$ olur.

O halde, m nin alabileceği değerler toplamı da $2+6=8$ olacaktır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 23:

Dört basamaklı 5m2n sayısı 5 ve 9 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, m nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 24:

Kırk basamaklı 474747...47 sayısının 5 ile bölümünden kalan a, 9 ile bölümünden kalan b dir.

Buna göre, $a+b$ toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

- Sayının son rakamı 7 dir. 7 nin 5 ile bölümünden kalan 2 olduğundan sayının da 5 ile bölümünden kalan 2 dir. Dolayısıyla $a=2$ olur.

- Kırk basamaklı 474747...47 sayısında 20 tane 4 ve 20 tane 7 rakamı vardır. Bu rakamların toplamı $20 \cdot 4 + 20 \cdot 7 = 80 + 140 = 220$ dir.

220 sayısının 9 ile bölümünden kalan $(2+2+0=4)$ 4 olduğundan sayının da 9 ile bölümünden kalan 4 tür. Dolayısıyla $b=4$ olur.

O halde, $a+b=2+4=6$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

10 ile Bölünebilme

Son rakamı (birler basamağı) 0 olan sayılar ile tam bölünür. 10 ile tam bölünemeyen sayılarda kalan birler basamağındaki rakamdır.

- 26720 sayısının son rakamı 0 olduğundan bu sayı 10 ile tam bölünür.
- 82762 sayısının son rakamı 2 olduğundan bu sayı 10 ile tam bölünemez. Kalan 2 dir.
- 702648 sayısının son rakamı 8 olduğundan bu sayı 10 ile tam bölünemez. Kalan 8 dir.

Örnek 25:

Dört basamaklı $8m3n$ sayısı 9 ve 10 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, m değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

- $8m3n$ sayısı 10 ile tam bölündüğünden $n=0$ dir.
- $8m30$ sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için $8+m+3+0=11+m$ toplamının 9 un katı olması gerekir.

O halde, $m=7$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 26:

Beş basamaklı 7A31B sayısı 3 ile tam bölünebilmekte, 10 ile bölümünden ise 7 kalanını vermektedir.

$A < B$ olduğuna göre, A yerine yazılabilecek değerlerin toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm:

7A31B sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 olduğundan $B=7$ dir. 7A317 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $7+A+3+1+7=18+A$ toplamının 3 katı olması gerekir. Dolayısıyla A rakamı 0, 3, 6 ve 9 olabilir.

$B=7$ ve $A < B$ olacağından A rakamı 9 olamaz. O halde, A rakamı 0, 3, 6 değerlerini alabilir.

Toplam, $0+3+6=9$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

11 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının 11 ile tam bölünebilmesi için sayının en sağından (birler basamağından) başlayarak sola doğru tüm rakamları sırasıyla +, -, +, -, ... ile işaretlenilerek toplanır. Elde edilen bu toplam 0 veya 11 in katı ise sayı 11 ile tam bölünür. Eğer toplam 11 in katı değilse kalan, bu toplamın 11 ile bölümünden kalana eşittir.

- ♦ 380446 sayısında $-+--++$ işaretlemesi yapalım. $-3+8-0+4-4+6=11$ olduğundan 380446 sayısı 11 ile tam bölünür.
- ♦ 7261539 sayısında $+--+--+$ işaretlemesi yapalım. $+7-2+6-1+5-3+9=21$ olup 21 sayısı 11 in tam katı değildir. O halde bu sayı 11 ile tam bölünemez. 21 sayısı 11 ile bölündüğünde kalan 10 olduğundan bu sayının da 11 ile bölümünden kalan 10 dur.

Örnek 27:

Beş basamaklı 725A3 sayısı 11 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, A yerine yazılabilecek rakam kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

725A3 sayısında $+--+--$ işaretlemesi yapalım.
 $+7-2+5-A+3=13-A$ sayısının 11 in katı olması gerekir.
 O halde, $A=2$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 28:

Beş basamaklı 9m6nm sayısı 11 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, m+n toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm:

9m6nm sayısında $+--+--$ işaretlemesi yapalım.
 $+9-m+6-n+m=15-n$ sayısının 11 in katı olabilmesi için $n=4$ olmalıdır.
 m herhangi bir rakam seçilebileceğinden $m=9$ alınırsa $m+n=9+4=13$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 29:

Altmış basamaklı 14531453...1453 sayısının 11 ile bölümünden kalan m, 4 ile bölümünden kalan ise n dir.

Buna göre, m+n toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm:

- Sayımıza birler basamağından başlayarak +, -, +, -, ... işaretlemesi yapalım ve 4 lü gruplara ayıralım.

$$\begin{array}{cccccccc} - & + & - & + & - & + & - & + \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array} \dots \begin{array}{cccccccc} - & + & - & + & - & + & - & + \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} +1 & +1 & +1 & +1 \end{array}$$

Görüldüğü gibi her bir gruptan elde edilen toplam +1 dir. Bu şekilde $60:4=15$ grup olduğuna göre, $15.(+1)=+15$ olup 11 ile bölümünden kalan 4 tür.

O halde $m=4$ olur.

- Sayımızın son iki basamağını oluşturan iki basamaklı sayı 53 tür. 53 sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 olduğundan bu sayının da 4 ile bölümünden kalan 1 dir.

O halde $n=1$ olur.

Buradan, $m+n=4+1=5$ bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

! Dikkat

Aralarında asal çarpanların her birine tam bölünebilen bir doğal sayı, bu çarpanların çarpımı ile de tam bölünür. O halde,

- ♦ 2 ve 3 ile tam bölünebilen sayılar 6 ile
- ♦ 3 ve 4 ile tam bölünebilen sayılar 12 ile
- ♦ 3 ve 5 ile tam bölünebilen sayılar 15 ile
- ♦ 2 ve 9 ile tam bölünebilen sayılar 18 ile
- ♦ 4 ve 5 ile tam bölünebilen sayılar 20 ile
- ♦ 3 ve 10 ile tam bölünebilen sayılar 30 ile
- ♦ 4 ve 9 ile tam bölünebilen sayılar 36 ile
- ♦ 5 ve 9 ile tam bölünebilen sayılar 45 ile

⋮

⋮

⋮

tam bölünebilir.

- ♦ 3726 sayısı 2 ve 3 ile tam bölündüğünden 6 ile de tam bölünür.
- ♦ 3765 sayısı 3 ve 5 ile tam bölündüğünden 15 ile de tam bölünür.
- ♦ 4536 sayısı 4 ve 9 ile tam bölündüğünden 36 ile de tam bölünür.

Örnek 30:

Dört basamaklı 3A1B sayısı 15 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, A'nın alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 33 B) 27 C) 24 D) 21 E) 18

Çözüm:

Bir sayının 15 ile tam bölünebilmesi için 3 ve 5 ile tam bölünebilmesi gerekir.

3A1B sayısının 5 ile tam bölünebilmesi için B rakamı 0 veya 5 olmalıdır.

- **B=0 için;** 3A10 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $3+A+1+0=4+A$ toplamı 3'ün katı olmalıdır. Dolayısıyla A rakamı 2, 5 ve 8 olabilir.
- **B=5 için;** 3A15 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $3+A+1+5=9+A$ toplamı 3'ün katı olmalıdır. Dolayısıyla A rakamı 0, 3, 6 ve 9 olabilir.

O halde, A'nın alabileceği tüm değerlerin toplamı da $2+5+8+0+3+6+9=33$ olacaktır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 31:

Üç basamaklı K3N sayısı 12 ile tam bölünebilen rakamları farklı bir doğal sayıdır.

Buna göre, K'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 21 D) 27 E) 30

Çözüm:

Bir sayının 12 ile tam bölünebilmesi için 3 ve 4 ile tam bölünmesi gerekir.

K3N sayısının 4 ile tam bölünebilmesi için iki basamaklı 3N sayısının 4'ün katı olması gerekir. Dolayısıyla N, 2 veya 6 olabilir.

- **N=2 için;** K32 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $K+3+2=5+K$ toplamının 3'ün katı olması gerekir. Dolayısıyla K rakamı 1, 4 ve 7 olabilir.
- **N=6 için;** K36 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için $K+3+6=9+K$ toplamının 3'ün katı olması gerekir. Dolayısıyla K rakamı 0, 3, 6 ve 9 olabilir. Sayımız üç basamaklı bir sayı olduğundan K, 0 olamaz. Ayrıca sayımızın rakamları farklı olacağından K, 3 veya 6 olamaz.

O halde, K rakamı 1, 4, 7 ve 9 değerlerini alabilir. Değerler toplamı ise $1+4+7+9=21$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 32:

Rakamları farklı 4A1B sayısı 45 ile bölündüğünde 1 kalanını veren dört basamaklı bir doğal sayıdır.

Buna göre, A kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm:

4A1B sayısı 45 ile bölündüğünde 1 kalanını verdiğine göre, 5 ve 9 ile bölündüğünde de 1 kalanını verecektir.

- 5 ile bölündüğünde kalan 1 ise B rakamı 1 veya 6 olabilir. Sayımızın rakamları farklı olacağından $B=1$ olamaz. $B=6$ dir.
- **B=6 için;** 4A16 sayısı 9 ile bölündüğünde kalan 1 ise $4+A+1+6=11+A$ toplamının 9 ile bölümünden kalan 1 olmalıdır. Dolayısıyla $A=8$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 33:

Dört basamaklı $7m3n$ sayısının 36 ile bölümünden kalan 13 tür.

Buna göre, m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 12

Çözüm:

Bir sayının 36 ile bölünebilirliği incelenirken 4 ve 9 ile bölünmesine bakılır. Kalan (13) sayımız 4 ve 9 dan büyük olduğundan 13 ün 4 ve 9 ile bölümünden kalanlara bakılır.

- 13 sayısı 4 ile bölündüğünde 1 kalanını verdiği için $7m3n$ sayısı da 4 ile bölündüğünde 1 kalanını verecektir. Dolayısıyla iki basamaklı $3n$ sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 olmalıdır. O halde n rakamı 3 veya 7 olabilir.

- 13 sayısı 9 ile bölündüğünde 4 kalanını verdiği için $7m3n$ sayısı da 9 ile bölündüğünde 4 kalanını verecektir.

$n=3$ için; $7m33$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 ise $7+m+3+3=13+m$ toplamının da 9 ile bölümünden kalan 4 tür. O halde m rakamı 0 veya 9 değerlerini alabilir.

$n=7$ için; $7m37$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 ise $7+m+3+7=17+m$ toplamının da 9 ile bölümünden kalan 4 tür. O halde m rakamı 5 olmalıdır.

m nin alabileceği tüm değerler 0, 9 ve 5 tir. Toplamları da $0+9+5=14$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

A ve B doğal sayılarının m ile bölümünden kalanlar sırasıyla a ve b olsun.

- $A \mp B$ sayısının m ile bölümünden kalan $a \mp b$ sayısının m ile bölümünden kalana eşittir.
- $A \cdot B$ sayısının m ile bölümünden kalan $a \cdot b$ sayısının m ile bölümünden kalana eşittir.
- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,
 A^n sayısının m ile bölümünden kalan, a^n sayısının m ile bölümünden kalana eşittir.

♦ A ve B sayılarının 7 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 5 ve 4 tür. $A+B$, $A \cdot B$ ve A^2 sayılarının 7 ile bölümünden kalanları bulalım.

- $A+B$ sayısının 7 ile bölümünden kalan, $5+4=9$ sayısının 7 ile bölümünden kalana eşittir. O halde kalan 2 dir.
- $A \cdot B$ sayısının 7 ile bölümünden kalan, $5 \cdot 4=20$ sayısının 7 ile bölümünden kalana eşittir. O halde kalan 6 dir.
- A^2 sayısının 7 ile bölümünden kalan, $5^2=25$ sayısının 7 ile bölümünden kalana eşittir. O halde kalan 4 tür.

Örnek 34:

K ve M sayılarının 13 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 7 ve 2 dir.

Buna göre, K^2+M sayısının 13 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm:

K ve M sayılarının 13 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 7 ve 2 olduğundan K^2+M sayısının 13 ile bölümünden kalan $7^2+2=51$ sayısının 13 ile bölümünden kalana eşittir.

51 sayısının 13 ile bölümünden kalan 12 olduğundan K^2+M sayısının da 13 ile bölümünden kalan 12 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme Kuralları

Örnek 35:

x ve y doğal sayılarının 7 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 4 ve 1 dir.

Buna göre, x^2+y^2+xy sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm:

x ve y doğal sayılarının 7 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 4 ve 1 olduğundan verilen ifadede x yerine 4, y yerine 1 yazarsak,

$$x^2+y^2+xy=4^2+1^2+4.1=21 \text{ olur.}$$

21 sayısının 7 ile bölümünden 0 olduğundan x^2+y^2+xy sayısının da 7 ile bölümünden kalan 0 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 36:

25 basamaklı $222...2$ sayısının 45 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 12 B) 17 C) 22 D) 32 E) 41

Çözüm:

- $222...2$ sayısının son rakamı 2 olduğundan 5 ile bölümünden kalan 2 dir.
- $222...2$ sayısı 25 basamaklı bir sayı olduğundan rakamları toplamı $25.2=50$ dir. 50 nin 9 ile bölümünden kalan 5 olduğundan bu sayının da 9 ile bölümünden kalan 5 tir.

O halde $222...2$ sayısının 45 ile bölümünden elde edilen kalan, 9 ile bölündüğünde 5 kalanını, 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bir sayı olacağından bu sayı 32 olacaktır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

3. A6B sayısı 45 ile tam bölünebilen bir sayıdır.

Buna göre, A rakamının alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

4. x sayısının 17 ile bölümünden kalan 5 tir.

Buna göre,

I. $3x+2$

II. x^2+9

III. x^3+11

sayılarından hangileri 17 ile kalansız bölünür?

- A) Yalnız I B) I ve II
C) I ve III D) II ve III

E) I, II ve III

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

ASAL SAYI

1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmayan 1 den büyük sayılara **asal sayı** denir. Asal sayıların birbirinden farklı iki pozitif tam sayı böleni vardır. Dolayısıyla 1 asal sayı değildir.

Asal sayılar; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... sayıdır.

- ♦ En küçük asal sayı 2 dir.
- ♦ Çift olan asal sayı yalnızca 2 dir. 2 dışında tüm asal sayılar tektir.

Örnek 37:

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$a \cdot b = 17$$

olduğuna göre, a+b toplamı kaçtır?

- A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

Çözüm:

$a \cdot b = 17$ eşitliğinde 17 sayısı asal sayı olduğundan, a ve b çarpanları 1 ve 17 olmalıdır.

- $a=1$ için $b=17$
- $a=17$ için $b=1$ olacağından $a+b=18$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 38:

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$(a+2) \cdot b = 11$$

olduğuna göre, a+b toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:

$(a+2) \cdot b = 11$ eşitliğinde 11 sayısı asal sayıdır. O halde,

$$\underbrace{(a+2)}_1 \cdot \underbrace{b}_{11} = 11 \quad \text{veya} \quad \underbrace{(a+2)}_{11} \cdot \underbrace{b}_1 = 11 \quad \text{olmalıdır.}$$

- $a+2=1 \Rightarrow a=-1$ olur. a pozitif olacağından $a=-1$ olamaz.
- $a+2=11 \Rightarrow a=9$ ve $b=1$ alınırsa $a+b=9+1=10$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Aralarında Asal Olma

İki veya daha fazla sayının 1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni yoksa bu sayılar aralarında asaldır.

Aşağıda verilen sayıların aralarında asal olup olmadığını inceleyelim.

a) 8 ile 9

- ♦ 8 in pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 4, 8
- ♦ 9 un pozitif tam sayı bölenleri: 1, 3, 9
- ♦ 8 ve 9 un 1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni olmadığından 8 ve 9 sayıları aralarında asaldır.

b) 15 ile 22

- ♦ 15 in pozitif tam sayı bölenleri: 1, 3, 5, 15
- ♦ 22 nin pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 11, 22
- ♦ 15 ve 22 nin 1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni olmadığından 15 ve 22 sayıları aralarında asaldır.

c) 12 ile 21

- ♦ 12 nin pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 12
- ♦ 21 in pozitif tam sayı bölenleri: 1, 3, 7, 21
- ♦ 12 ve 21'in 1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni (3) olduğundan 12 ve 21 sayıları aralarında asal değildir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 39:

a ve b pozitif tam sayılar ve (a+1) ile (b+3) sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{a+1}{b+3} = \frac{9}{16}$$

olduğuna göre, a+b toplamı kaçtır?

- A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Çözüm:

$\frac{a+1}{b+3} = \frac{9}{16}$ eşitliğinde 9 ve 16 sayıları aralarında asal olduklarından,

a+1=9 ve b+3=16 olmalıdır.

O halde, a=8 ve b=13 olur.

Buradan, a+b=8+13=21 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 40:

m ve n pozitif tam sayılardır. (m+2) ile (m+n) sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{m+2}{m+n} = \frac{25}{55}$$

olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

- A) 48 B) 36 C) 30 D) 28 E) 24

Çözüm:

Eşitlikte verilen 25 ve 55 sayıları aralarında asal olmadıklarından 5 ile sadeleştirilerek aralarında asal hale getirilir.

$$\frac{m+2}{m+n} = \frac{25^5}{55^{11}} = \frac{5}{11} \text{ olur.}$$

Buradan, m+2=5 ve m+n=11 olur.

$$m+2=5 \Rightarrow m=3$$

$$m+n=11 \Rightarrow 3+n=11 \Rightarrow n=8 \text{ dir.}$$

m.n=3.8=24 olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

EBOB (EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN)

İki veya daha fazla tam sayıyı ortak olarak bölen pozitif tam sayıların en büyüğüne bu sayıların **EBOB** u denir.

a ve b sayılarının EBOB u **EBOB(a, b)** veya **(a, b)_{EBOB}** şeklinde gösterilir.

♦ 12 ve 18 sayılarının en büyük ortak bölenini (EBOB) bulalım.

- 12 nin pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 dir.
- 18 in pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 3, 6, 9 ve 18 dir.

Görüldüğü gibi 12 ve 18 in ortak pozitif bölenleri 1, 2 ve 6 dir. Bu sayıların en büyüğü 6 olduğundan 12 ve 18 in en büyük ortak böleni 6 dir.

Bu durum,

$$\text{EBOB}(12, 18)=6 \text{ veya } (12, 18)_{\text{EBOB}}=6$$

şeklinde gösterilebilir.

♦ Sayıların EBOB u pratik olarak; sayılar birlikte asal çarpanlarına ayrılarak ortak çarpanlar işaretlenir ve bu sayılar çarpılarak bulunur.

12	18	2	✓
6	9	2	
3	9	3	✓
1	3	3	
1	1		

$$\text{EBOB}(12, 18)=2 \cdot 3 \\ =6 \text{ olur.}$$

İLK ADIM SORULARI

5. 45, 75 ve 105 sayılarının en büyük ortak tam sayı böleni kaçtır?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

6. m pozitif tam sayıdır.

$$\frac{60}{m} \text{ ve } \frac{84}{m}$$

sayıları birer tam sayı olduğuna göre, m'nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 10 D) 12 E) 18

Örnek 41:

72 ve 96 sayılarını bölen pozitif tam sayıların en büyüğünü bulalım.

Çözüm:

İstenilen 72 ve 96 sayılarının EBOBudur. 72 ve 96 sayılarını birlikte asal çarpanlarına ayıralım.

72	96	2	✓
36	48	2	✓
18	24	2	✓
9	12	2	
9	6	2	
9	3	3	✓
3	1	3	
1			

$$\begin{aligned} \text{EBOB}(72, 96) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2^3 \cdot 3 \\ &= 24 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 42:

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \text{ ve } B = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

sayıları veriliyor.

A ve B sayılarının EBOB unu bulalım.

Çözüm:

Bu şekilde ayrı ayrı asal çarpanlarına ayrılmış olan sayıların EBOB u pratik olarak,

- Sayıların ortak asal çarpanları belirlenir.
- Ortak asal çarpanların üsleri eşit ise üs aynen, üsleri farklı ise küçük olan üs alınarak çarpılır.

şeklinde bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} A &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \\ B &= 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

2^3 alınır. 5^2 alınır.

$$\begin{aligned} \text{EBOB}(A, B) &= 2^3 \cdot 5^2 \\ &= 8 \cdot 25 \\ &= 200 \text{ olur.} \end{aligned}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 43:



Uzunlukları 240 ve 280 cm olan iki tel boyları cm türünden tam sayı olacak şekilde eşit uzunlukta parçalara bölünecektir.

Buna göre, en az kaç parça tel elde edilir?

- A) 4 B) 10 C) 13 D) 21 E) 26

Çözüm:

Teller eşit boyda parçalara ayrılacağından her parçanın boyu 240 ve 280 sayılarını bölen sayılardan biri olmalıdır. Parça sayısının en az olması için bu sayı 240 ve 280 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü seçilmelidir.

240	280	2	✓
120	140	2	✓
60	70	2	✓
30	35	2	
15	35	3	
5	35	5	✓
1	7	7	
1			

$$\text{EBOB}(240, 280) = 2^3 \cdot 5 = 40 \text{ olur.}$$

O halde, teller 40 cm lik parçalara bölünecektir.

$$\frac{240}{40} = 6 \text{ parça}$$

$$\frac{280}{40} = 7 \text{ parça}$$

elde edileceğinden toplam $6+7=13$ parça tel elde edilmiş olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 44:

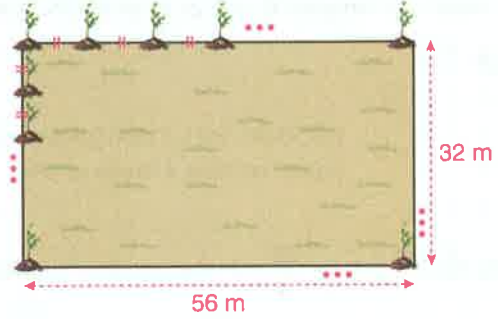
Boyutları 32 ve 56 metre olan dikdörtgen biçimindeki bahçenin etrafına köşelere de gelecek şekilde eşit aralıklarla fidan dikilecektir.

Buna göre, en az kaç fidan gerekir?

- A) 44 B) 36 C) 30 D) 28 E) 22

Çözüm:

Dikilecek fidan sayısının en az olabilmesi için fidanlar arasındaki mesafenin en büyük olması gerekir.



O halde, dikilecek her iki fidan arası mesafe 32 ve 56'nın EBOB'udur.

32	56	2	✓
16	28	2	✓
8	14	2	✓
4	7	2	
2	7	2	
1	7	7	
1			

EBOB(32, 56)=8 olduğundan iki fidan arası mesafe en fazla 8 metre olabilir.

Gerekli fidan sayısını bulmak için bahçenin çevresi 8 ile bölünmelidir.

$$\text{Fidan Sayısı} = \frac{\text{Bahçenin çevresi}}{8} = \frac{2 \cdot (32+56)}{8}$$

$$= \frac{2 \cdot 88}{8}$$

$$= 22 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 45:



20 litre



28 litre

20 L mısır yağı ve 28 L zeytinyağı eşit hacimdeki şişelere birbirine karıştırılmadan doldurulmak isteniyor.

Bu işlem için en az kaç şişeye ihtiyaç vardır?

- A) 10 B) 12 C) 18 D) 24 E) 28

Çözüm:

Şişe sayısının en az olması için hacimlerinin en büyük olması gerekir. O halde, her şişenin hacmi 20 ve 28 sayılarını bölen en büyük sayıya eşit olmalıdır. Bu ise 20 ve 28 in EBOB udur.

20	28	2	✓
10	14	2	✓
5	7	5	
1	7	7	
1			

EBOB(20, 28)=4 olduğundan tüm şişeler en fazla 4 litrelik olabilir.

Şişe sayısı ise, $\frac{20}{4} = 5$ ve $\frac{28}{4} = 7$ olacağından $5+7=12$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 46:

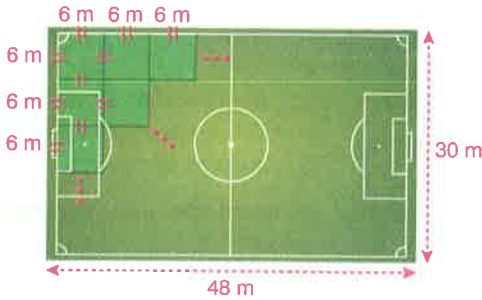


Boyutları 30 ve 48 m olan dikdörtgen biçimindeki bir halı sahanın zemini eşit büyüklükte kare şeklinde özel halılarla kaplanacaktır.

Buna göre, bu özel halılardan **en az** kaç tane kullanılabilir?

- A) 40 B) 48 C) 60 D) 64 E) 80

Çözüm:



Halı sahayı kaplamak için kullanılacak özel halılar eşit büyüklükte karesel bölgelerden oluştuğuna göre, bu karesel bölgenin bir kenarının uzunluğu 30 ve 48 sayılarını tam bölen bir sayı olmalıdır. Ayrıca bu özel halıların sayısının en az olması istendiğinden karesel bölgenin bir kenar uzunluğu 30 ve 48 sayılarının EBOB u olmalıdır.

30	48	2	✓
15	24	2	
15	12	2	
15	6	2	
15	3	3	✓
5	1	5	
1			

EBOB(30, 48)=2.3
=6 olur.

O halde, özel halıların her biri kenar uzunlukları 6 m olan karesel bölgelerdir.

Tüm zemin bu özel halılarla kaplanacağından gerekli halı sayısı, halı sahanın alanı bir halının alanına bölünerek bulunur.

$$\text{Özel halı sayısı} = \frac{30 \cdot 48}{6 \cdot 6} = 40 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 47:

Sınıf	Ödenen Miktar (lira)
9-A	24
9-B	42
9-C	18

9. sınıflardan sorumlu müdür yardımcısı Murat Bey 9-A, 9-B ve 9-C sınıflarının eksiklerini belirleyerek bu sınıflara birim fiyatı aynı olan tahta kalemlerinden farklı sayılarda almıştır.

Her sınıf için ödenen miktar yukarıdaki tabloda gösterildiğine göre, Murat Bey'in bu sınıflar için aldığı tahta kalemlerinin sayısı **en az** kaç olabilir?

- A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 20

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Çözüm:

Tahta kalemlerinin birim fiyatları aynı olduğundan bu fiyat 24, 42 ve 18 sayılarını bölen bir tam sayı olmalıdır. Kalem sayısının en az olabilmesi için kalemlerin birim fiyatlarının en fazla olması gerekir. Bu da 24, 42 ve 18 sayılarının EBOBudur.

24	42	18	2	✓
12	21	9	2	
6	21	9	2	
3	21	9	3	✓
1	7	3	3	
	7	1	7	
	1			

$$\text{EBOB}(24, 42, 18) = 2 \cdot 3 \\ = 6 \text{ olur.}$$

O halde, 9-A sınıfına $\frac{24}{6} = 4$ adet 9-B sınıfına $\frac{42}{6} = 7$ adet 9-C sınıfına $\frac{18}{6} = 3$ adet tahta kalemi alınmıştır.

Alınan tahta kalemleri toplam $4+7+3=14$ adet olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

EKOK (EN KÜÇÜK ORTAK KAT)

İki veya daha fazla tam sayının ortak katlarından en küçük olanına bu sayıların **EKOK** u denir.

a ve b sayılarının EKOK u $\text{EKOK}(a, b)$ veya $(a, b)_{\text{EKOK}}$ şeklinde gösterilir.

♦ 12 ve 18 sayılarının en küçük ortak katını (EKOK) bulalım.

- 12 nin katları: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...
- 18 in katları: 18, 36, 54, 72, 90, 108, ... sayılarıdır.

Görüldüğü gibi 12 ve 18 sayılarının ortak katları 36, 72, 108, ... sayılarıdır. Bu sayıların en küçüğü 36 olduğundan 12 ve 18 sayılarının en küçük ortak katı 36 dır.

Bu durum,

$$\text{EKOK}(12, 18) = 36 \text{ veya } (12, 18)_{\text{EKOK}} = 36$$

şeklinde gösterilebilir.

♦ Sayıların EKOK u pratik olarak; sayılar birlikte asal çarpanlarına ayrılarak tüm asal çarpanların çarpılmasıyla bulunur.

12	18	2
6	9	2
3	9	3
1	3	3
1		

$$\text{EKOK}(12, 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ = 2^2 \cdot 3^2 \\ = 36 \text{ olur.}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 48:

45 ve 60 sayılarının pozitif en küçük ortak katı kaçtır?

- A) 120 B) 150 C) 180 D) 240 E) 360

Çözüm:

İstenilen 45 ve 60 sayılarının EKOK udur.

45	60	2
45	30	2
45	15	3
15	5	3
5	5	5
1	1	

$$\text{EKOK}(45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ = 180 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 49:

36, 40 ve 45 sayılarına tam bölünebilen en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

- A) 240 B) 360 C) 420 D) 480 E) 720

Çözüm:

36, 40 ve 45 sayılarına tam bölünebilen sayılar bu sayıların ortak katlarıdır. En küçük sayı istendiğinden verilen sayıların EKOK unu bulmamız gerekir.

36	40	45	2
18	20	45	2
9	10	45	2
9	5	45	3
3	5	15	3
1	5	5	5
	1	1	

$$\text{EKOK}(36, 40, 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ = 360 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 50:

$$A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$B = 2^2 \cdot 5^3$$

sayıları veriliyor.

A ve B sayılarının EKOK u kaçtır?

- A) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ C) $2^2 \cdot 5^2$ D) $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5$ E) $3^2 \cdot 5^2$

Çözüm:

Bu şekilde ayrı ayrı asal çarpanlarına ayrılmış olan sayıların EKOK u pratik olarak;

- Herhangi bir sayıda bulunan asal çarpanlardan üsleri eşit veya büyük olanlar belirlenir.
 - Bu asal çarpanlar üsleriyle birlikte çarpılır.
- şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} A &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ B &= 2^2 \cdot 5^3 \end{aligned} \Rightarrow \text{EKOK}(A, B) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 51:

m pozitif bir tam sayıdır.

$\frac{m}{24}$ ve $\frac{m}{40}$ sayıları birer tam sayı olduğuna göre, m'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 80 B) 120 C) 160 D) 180 E) 240

Çözüm:

$\frac{m}{24}$ ve $\frac{m}{40}$ sayılarının birer tam sayı olabilmesi için m nin 24 ve 40 sayılarının ortak katı olması gerekir.

m nin en küçük olabilmesi için m sayısı 24 ve 40 sayılarının EKOK u olmalıdır.

24	40	2
12	20	2
6	10	2
3	5	3
1	5	5
	1	

$$\text{EKOK}(24, 40) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ = 120 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 52:



Melisa bir sepetteki gülleri dokuz, on ve on ikişerli demetlediğinde hiç gül artmadığını görüyor.

Buna göre, sepette **en az** kaç gül vardır?

- A) 360 B) 270 C) 240 D) 180 E) 120

Çözüm:

Sepetteki güller dokuz, on ve on ikişerli demetlendiğinde hiç gül artmadığına göre, gül sayısı 9, 10 ve 12 nin ortak bir katı olmalıdır. Gül sayısının en az olması için gül sayısı 9, 10 ve 12 nin EKOK una eşit olacaktır.

9	10	12	2
9	5	6	2
9	5	3	3
3	5	1	3
1	5		5
	1		

$$\text{EKOK}(9, 10, 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ = 180 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 53:



Fatih bilyelerini dörder, beşer ve altışar gruplara ayırdığında her defasında 1 bilyesinin arttığını görüyor.

Buna göre, Fatih'in bilyelerinin sayısı **en az** kaçtır?

- A) 121 B) 119 C) 73 D) 61 E) 59

Çözüm:

Fatih bilyelerini dörder, beşer ve altışar grupladığında hiç bilye artmadığını düşünürsek bilye sayısının 4, 5 ve 6 nın ortak katı olması gerekir. Bilye sayısı en az istendiğinden 4, 5 ve 6 nın EKOK unu bulalım.

4	5	6	2
2	5	3	2
1	5	3	3
	5	1	5
	1		

$$\text{EKOK}(4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ = 60 \text{ olur.}$$

Fakat Fatih bilyelerini her grupladığında 1 bilyesi arttığına göre, bilye sayısının en az

$$60 + 1 = 61 \text{ olması gerekir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 54:



Kuş satışı yapılan bir dükkanda kuşlar kafeslere on ikişer ve on beşerli konulduğunda her defasında 2 kuşun açıkta kaldığı görülüyor.

Dükkanda 150 ile 200 arasında kuş bulunduğu göre, dükkanda bulunan kuşların sayısı **en az** kaçtır?

- A) 192 B) 182 C) 177 D) 162 E) 152

Çözüm:

Kuşlar kafeslere on ikişer ve on beşer konulduğunda açıkta kuş kalmadığını düşünürsek kuş sayısının 12 ve 15 in katı olması gerekir. O halde, 12 ve 15 in EKOK unu bulalım.

12	15	2
6	15	2
3	15	3
1	5	5
	1	

$$\text{EKOK}(12, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ = 60 \text{ olur.}$$

12 ve 15 in en küçük ortak katı 60 tır. Fakat kuş sayısının 150 ile 200 arasında olduğu belirtildiğinden 12 ve 15 in en küçük ortak katı değil daha büyük katlarından birini kullanmamız gerekir. Bu katlar ise;

$$60, 120, 180, 240, 300, \dots \text{ sayılarıdır.}$$

Bu sayılardan 180 sayısı 150 ile 200 arasında olduğundan aradığımız sayı 180 dir.

Her defasında 2 kuşun açıkta kaldığı belirtildiğine göre, dükkanda bulunan kuşların sayısı $180 + 2 = 182$ olacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

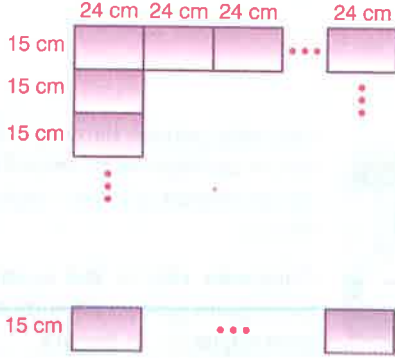
Örnek 55:

Boyutları 15 ve 24 cm olan dikdörtgen biçimindeki karton parçaları yan yana ve alta alta dizilerek bir karesel bölge elde edilecektir.

Bu işlem için en az kaç tane karton parçasına ihtiyaç vardır?

- A) 40 B) 48 C) 52 D) 60 E) 72

Çözüm:



Karton parçaları şekildeki gibi dizilerek karesel bölge elde edileceğinden bu bölgenin bir kenarı hem 15 hem de 24 ün katı olacaktır. Bu sayı ise 15 ve 24 ün EKOK udur. 15 ve 24 ün EKOK unu bulalım.

15	24	2
15	12	2
15	6	2
15	3	3
5	1	5
1		

O halde, karesel bölgemizin bir kenarının uzunluğu en az 120 cm olmalıdır. Kullanılması gereken karton parçalarının sayısını bulmak için karesel bölgenin alanının bir karton parçasının alanına bölünmesi gerekir.

$$\text{EKOK}(15, 24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

$$\frac{120 \cdot 120}{15 \cdot 24} = 40 \text{ adet karton parçası gerekir.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 56:

Bir fabrikadaki üç zil sırasıyla 60, 75 ve 100 dakikada bir çalmaktadır.

Üç zil saat 08.00 da birlikte çaldığına göre, saat kaçta üç zil ilk kez yine birlikte çalar?

- A) 15.00 B) 14.30 C) 14.00 D) 13.30 E) 13.00

Çözüm:

Üç zilin tekrar birlikte çalması için geçen sürenin 60, 75 ve 100 ün ortak katı olması gerekir. O halde, 60, 75 ve 100 ün EKOK unu bulalım.

60	75	100	2
30	75	50	2
15	75	25	3
5	25	25	5
1	5	5	5
	1	1	

$$\text{EKOK}(60, 75, 100) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300 \text{ olur.}$$

Üç zil birlikte çaldıktan 300 dakika sonra yine ilk kez birlikte çalacaktır.

300 dakika = 5 saat olduğundan saat 08.00 dan 5 saat sonra saat 13.00 olacaktır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 57:



Hastalanan Kerem, doktorun verdiği iki farklı ilaçtan birini 9 saatte bir diğerini ise 12 saatte bir almaktadır.

Kerem iki ilacı ilk kez birlikte aldıktan kaç saat sonra yine iki ilacı birlikte 5. kez alacaktır?

- A) 216 B) 180 C) 156 D) 144 E) 128

Çözüm:

İki ilacın birlikte alınabilmesi için geçen sürenin 9 ve 12 nin ortak katı olması gerekir. O halde 9 ve 12 nin EKOK unu bulalım.

9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1		

$$\text{EKOK}(9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \text{ olur.}$$

Kerem 36 saatte bir iki ilacı birlikte almaktadır. İki ilacı ilk kez kullandıktan sonra, ilaçları 5 - 1 = 4 kez daha birlikte kullanması gerekir.

Dolayısıyla geçen süre 36 · 4 = 144 saat olacaktır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 58:

Boyutları 15, 20 ve 24 olan dikdörtgen prizması şeklindeki tuğlalar yan yana ve üst üste konularak en küçük hacimli bir küp yapılacaktır.

Bu işlem için **en az** kaç küpe ihtiyaç vardır?

- A) 180 B) 240 C) 300 D) 360 E) 480

Çözüm:

Küpün tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olduğundan bu sayı 15, 20 ve 24'ün en küçük ortak katı olmalıdır. 15, 20 ve 24'ün EKOK'unu bulalım.

15	20	24	2
15	10	12	2
15	5	6	2
15	5	3	3
5	5	1	5
1	1		

$$\text{EKOK}(15, 20, 24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \text{ olur.}$$

Gerekli tuğla sayısını bulmak için yapılacak küpün hacminin bir tuğlanın hacmine bölünmesi gerekir.

$$\text{O halde tuğla sayısı, } \frac{120 \cdot 120 \cdot 120}{15 \cdot 20 \cdot 24} = 240 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 59:

a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$A = 9 \cdot a = 15 \cdot b = 20 \cdot c$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği **en küçük** doğal sayı değeri kaçtır?

- A) 360 B) 300 C) 280 D) 240 E) 180

Çözüm:

$$A = 9 \cdot a \Rightarrow A \text{ sayısı } 9 \text{ un tam katıdır.}$$

$$A = 15 \cdot b \Rightarrow A \text{ sayısı } 15 \text{ in tam katıdır.}$$

$$A = 20 \cdot c \Rightarrow A \text{ sayısı } 20 \text{ nin tam katıdır.}$$

O halde, bu eşitliklerin birlikte sağlanabilmesi için A sayısının 9, 15 ve 20'nin ortak katı olması gerekir.	9	15	20	2
A sayısının en küçük değeri istendiğine göre, bu sayı 9, 15 ve 20'nin EKOK'u olacaktır.	9	15	10	2
	9	15	5	3
	3	5	5	3
	1	5	5	5
		1	1	

$$\text{EKOK}(9, 15, 20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 60:

x, y ve z pozitif tam sayılardır.

$$M = 4x + 1 = 9y + 1 = 10z + 1$$

olduğuna göre, M'nin alabileceği **en küçük** değer kaçtır?

- A) 181 B) 241 C) 299 D) 359 E) 361

Çözüm:

$$M = 4x + 1 \Rightarrow M - 1 = 4x$$

$$M = 9y + 1 \Rightarrow M - 1 = 9y$$

$$M = 10z + 1 \Rightarrow M - 1 = 10z \text{ olur.}$$

4	9	10	2
2	9	5	2
1	9	5	3
	3	5	3
	1	1	5

Görüldüğü gibi M-1 sayısı 4, 9 ve 10'un ortak bir katıdır. M'nin en küçük olabilmesi için M-1 sayısının 4, 9 ve 10 sayılarının EKOK'una eşit olması gerekir.

$$\text{EKOK}(4, 9, 10) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \text{ olur.}$$

$$M - 1 = 180 \text{ ise } M = 181 \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 61:

a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$A = 3a + 1 = 5b + 3 = 8c + 6$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği **en küçük** değer kaçtır?

- A) 93 B) 98 C) 118 D) 123 E) 128

Çözüm:

$$A = 3a + 1 \Rightarrow A + 2 = 3a + 3$$

$$A + 2 = 3 \cdot (a + 1) \dots \textcircled{1}$$

$$A = 5b + 3 \Rightarrow A + 2 = 5b + 5$$

$$A + 2 = 5 \cdot (b + 1) \dots \textcircled{2}$$

$$A = 8c + 6 \Rightarrow A + 2 = 8c + 8$$

$$A + 2 = 8 \cdot (c + 1) \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ ve $\textcircled{3}$ ten A+2 sayısının 3, 5 ve 8'in katı olduğu anlaşılmaktadır. A sayısının en küçük olması için A+2 sayısının 3, 5 ve 8'in EKOK'una eşit olması gerekir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

3	5	8	2
3	5	4	2
3	5	2	2
3	5	1	3
1	5	1	5
1			

$$\text{EKOK}(3, 5, 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$= 120 \text{ olur.}$$

$$A + 2 = 120 \Rightarrow A = 118 \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

EBOB ve EKOK ile İlgili Bazı Özellikler

- 1) İki sayma sayısının çarpımı bu sayıların EBOB ile EKOK'unun çarpımına eşittir.

a ve b sayma sayıları için

$$a \cdot b = \text{EBOB}(a, b) \cdot \text{EKOK}(a, b) \text{ dir.}$$

- ♦ 10 ve 15 sayılarının EBOB'u 5, EKOK'u ise 30'dur.

$$10 \cdot 15 = 5 \cdot 30$$

$$150 = 150 \text{ dir.}$$

Örnek 62:

20 ve x sayma sayılarının EBOB'u 4, EKOK'u 80'dir.

Buna göre, x kaçtır?

- A) 10 B) 16 C) 24 D) 28 E) 40

Çözüm:

1 numaralı özellikten;

$$20 \cdot x = 4 \cdot 80 \Rightarrow 20x = 320$$

$$x = 16 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

- 2) Aralarında asal iki sayma sayısının EBOB'u 1, EKOK'u ise bu sayıların çarpımıdır.

a ve b aralarında asal iki sayma sayısı ise

$$\text{EBOB}(a, b) = 1$$

$$\text{EKOK}(a, b) = a \cdot b \text{ dir.}$$

- ♦ 9 ve 10 sayıları aralarında asal sayılardır.

$$\text{EBOB}(9, 10) = 1$$

$$\text{EKOK}(9, 10) = 9 \cdot 10 = 90 \text{ dir.}$$

Örnek 63:

a ve b sayıları, 1 den büyük aralarında asal sayma sayılarıdır.

$$\text{EBOB}(a, b) + \text{EKOK}(a, b) = 41$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 18 D) 22 E) 41

Çözüm:

a ile b sayıları aralarında asal olduğundan $\text{EBOB}(a, b) = 1$ ve $\text{EKOK}(a, b) = a \cdot b$ dir.

$$\text{EBOB}(a, b) + \text{EKOK}(a, b) = 41$$

1

$$1 + a \cdot b = 41$$

$$a \cdot b = 40 \text{ olur.}$$

a ve b, 1 den büyük ve aralarında asal olduğundan $a \cdot b = 40$ ise $a = 5$ ve $b = 8$ alınırsa $a + b = 5 + 8 = 13$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 64:

m ve n aralarında asal sayma sayılarıdır.

$$m + \frac{24}{n} = 18$$

$$\text{EKOK}(m, n) = 120$$

olduğuna göre, m - n farkı kaçtır?

- A) 2 B) 6 C) 7 D) 10 E) 14

Çözüm:

m ve n aralarında asal olduğuna göre, $m \cdot n = 120$ dir.

$$m + \frac{24}{n} = 18 \Rightarrow \frac{m \cdot n + 24}{n} = 18$$

$$m \cdot n + 24 = 18n \quad (m \cdot n = 120 \text{ idi})$$

$$120 + 24 = 18n$$

$$144 = 18n$$

$$n = 8 \text{ olur.}$$

$$m \cdot n = 120 \text{ den } n = 8 \text{ ise } m = 15 \text{ olur.}$$

$$\text{O halde, } m - n = 15 - 8 = 7 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

- 3) İki sayma sayısından biri diğerinin tam katı ise bu sayıların EBOB u sayılardan küçük olana, EKOK u ise büyük olana eşittir.

- ♦ 10 ve 40 sayıları biri diğerinin tam katı olan sayılardır.

$$\text{EBOB}(10, 40)=10$$

$$\text{EKOK}(10, 40)=40 \text{ tir.}$$

Örnek 65:

A pozitif bir tam sayıdır.

$$\text{EBOB}(A, 3A)+\text{EKOK}(A, 3A)=180$$

olduğuna göre, A kaçtır?

- A) 60 B) 45 C) 40 D) 36 E) 30

Çözüm:

3A sayısı A sayısının tam katı (3 katı) olduğundan,

$\text{EBOB}(A, 3A)=A$ ve $\text{EKOK}(A, 3A)=3A$ olur.

$$A+3A=180 \Rightarrow 4A=180$$

$$A=45 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

- 4) a ve b sayma sayılarının EBOB u m olsun.

$$a=m.x \text{ ve } b=m.y$$

yazılabilir. Bu eşitliklerde x ve y aralarında asal sayılardır.

- ♦ 15 ve 20 sayılarının EBOB u 5 tir.

$$15=5.3 \text{ ve } 20=5.4$$

olur. Bu eşitliklerde 3 ve 4 sayıları aralarında asal sayılardır.

Örnek 66:

a ve b sayma sayılarıdır.

$$\text{EBOB}(a, b)=6 \text{ ve } a+b=60$$

olduğuna göre, a.b çarpımı en çok kaçtır?

- A) 324 B) 432 C) 576 D) 756 E) 900

Çözüm:

$\text{EBOB}(a, b)=6$ ise x ve y aralarında asal olmak üzere,

$$a=6x \text{ ve } b=6y \text{ yazılabilir.}$$

Bu eşitlikler $a+b=60$ denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$6x+6y=60 \Rightarrow x+y=10 \text{ olur.}$$

x ile y aralarında asal olduğundan,

$$x=3 \text{ ve } y=7 \text{ alınırsa } a=18 \text{ ve } b=42$$

$$x=1 \text{ ve } y=9 \text{ alınırsa } a=6 \text{ ve } b=54 \text{ olabilir.}$$

O halde, a.b çarpımı ise en çok $18.42=756$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 67:

a, b ve c sayma sayılarının en büyük ortak böleni 18 dir.

a, b ve c farklı sayılar olduğuna göre, a+b+c toplamı en az kaçtır?

- A) 96 B) 102 C) 108 D) 120 E) 144

Çözüm:

$\text{EBOB}(a, b, c)=18$ olduğuna göre,

$$a=18x, b=18y \text{ ve } c=18z \text{ yazılabilir.}$$

x, y ve z farklı ve aralarında asal olacağından $x=1, y=2$ ve $z=3$ seçilirse

$$a=18, b=36 \text{ ve } c=54 \text{ olur.}$$

O halde, $a+b+c=18+36+54=108$ bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 68:

a, b ve c sayma sayılarının en küçük ortak katı 90 dir.

a, b ve c farklı sayılar olduğuna göre, a+b+c toplamı en çok kaçtır?

- A) 270 B) 240 C) 195 D) 180 E) 165

Çözüm:

a, b ve c sayılarının EKOK u 90 olduğuna göre, bu sayılar 90 ın tam bölenleri olacaktır.

$$a=90:1=90$$

$$b=90:2=45$$

$$c=90:3=30 \text{ alınırsa}$$

$a+b+c$ toplamı en çok $90+45+30=165$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 69:

a ve b sayma sayılarıdır.

$$\text{EBOB}(a, b) = 4$$

$$\text{EKOK}(a, b) = 120$$

olduğuna göre, a+b toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 36 B) 40 C) 44 D) 52 E) 68

Çözüm:

EBOB(a, b) = 4 ise x ve y aralarında asal olmak üzere,
a = 4x ve b = 4y yazılabilir.

4x ve 4y sayılarının EKOK unu bulalım.

4x	4y	2
2x	2y	2
x	y	x
1	y	y
	1	

$$\text{EKOK}(4x, 4y) = 4xy \text{ olur.}$$

$4xy = 120 \Rightarrow x \cdot y = 30$ dur. Toplamın en küçük olması için,
x=5 ve y=6 alınırsa a=20 ve b=24 olur.

O halde, a+b toplamının en küçük değeri $20+24=44$ olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Günlük Hayatta Periyodik Olarak Tekrar Eden Durumlar

Günlük hayatta eşit aralıklarla (gün, saat v.b) yaptığımız işler veya belirli aralıklarla tekrarlanan durumlarla karşılaşabiliriz.

Bunlar belirli aralıklarla nöbet tutma, ilaç alma, ziyaret etme, kursa gitme v.b gibi periyodik olarak tekrar eden durumlardır.

Örneğin,

- a) 6 günde bir nöbet tutan askerin ilk nöbetini tuttuktan sonra 6, 12, 18, 24, ... gün sonra yeniden nöbet tutması
- b) 8 saatte bir ilaç alan hastanın ilk ilacını aldıktan 8, 16, 24, 32, ... saat sonra yeniden ilacını alması
- c) 15 günde bir yüzme kursuna giden bir kişinin ilk kez yüzme kursuna gittikten sonra 15, 30, 45, 60, ... gün sonra yeniden kursa gitmesi gibi durumlar periyodik olarak devam eden durumlardır.
- ♦ Periyodik olarak tekrar eden ve gün içeren durumlarda günler 7 günde bir tekrarlandığından periyot 7 gün olarak alınır.
Mesela, bugün günlerden salı ise 7 nin katı olan 7, 14, 21, 28, ... gün sonra yine salı olduğunu biliriz. Örnek olarak 28 i alırsak bugün günlerden salı ise 28 gün sonra yine salı olacaktır. O halde 29 gün sonra çarşamba, 30 gün sonra perşembe v.s olduğunu biliriz.

Örnek 70:

Bugün günlerden salı olduğuna göre, 74 gün sonra hangi gün olduğunu bulalım.

Çözüm:

Günler periyodik olarak 7 günde bir tekrarlandığından 74 sayısı 7 ye bölünür. Kalan sayı, salı günü 0 kabul edilerek salının üzerine sayılır ve kalana denk olan gün bulunmuş olur.

$$\begin{array}{r} 74 : 7 \\ 7 \overline{) 74} \\ \underline{04} \end{array}$$



O halde, 74 gün sonra günlerden cumartesi olacaktır.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

Örnek 71:



5 günde bir nöbet tutan bir asker ilk nöbetini çarşamba günü tutmuştur.

Buna göre, bu asker 10. nöbetini hangi gün tutar?

- A) Çarşamba B) Salı C) Cumartesi
D) Pazartesi E) Perşembe

Çözüm:

Asker ilk nöbetini tuttuğundan, 10. nöbet için $10 - 1 = 9$ nöbet daha tutması gerekir. Asker 5 günde bir nöbet tuttuğuna göre, $5 \cdot 9 = 45$ gün sonra 10. nöbetini tutacaktır.

O halde 45 gün sonra günlerden hangisi olduğunu bulalım.

$$\begin{array}{r} 45 \\ 42 \\ \hline 03 \end{array}$$



olacağından asker 10. nöbetini cumartesi günü tutacaktır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 72:



12 günde bir nöbete kalan bir eczane 5. nöbetini pazartesi tutuyor.

Buna göre, bu eczane 11. nöbetini hangi gün tutar?

- A) Çarşamba B) Perşembe C) Cuma D) Pazar E) Salı

Çözüm:

Eczane ilk 5 nöbetini tuttuğuna göre, 11. nöbet için $11 - 5 = 6$ nöbet daha tutması gerekir. 12 günde bir nöbet tutan eczane $6 \cdot 12 = 72$ gün sonra bu nöbeti tutacaktır.

$$\begin{array}{r} 72 \\ 7 \\ \hline 02 \end{array}$$



O halde, 11. nöbet çarşamba günü tutulacaktır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 73:

Emre ile Fatih sırasıyla 9 ve 15 günde bir aynı futbol kursuna gitmektedir.

İkisi birlikte ilk kez cumartesi günü kursa gittiğine göre, hangi gün 6. kez birlikte kursa giderler?

- A) Pazartesi B) Çarşamba C) Cuma D) Cumartesi E) Pazar

Çözüm:

EKOK(9, 15)=45 olduğundan Emre ve Fatih 45 günde bir birlikte kursa gitmektedir. İlk kez kursa gittiklerine göre, $6 - 1 = 5$ kez daha kursa birlikte gitmeleri gerekir. Bu ise $45 \cdot 5 = 225$ gün sonraya denk gelir.

O halde, cumartesiden 225 gün sonrasını bulalım.

$$\begin{array}{r} 225 \\ 21 \\ \hline 15 \\ 14 \\ \hline 01 \end{array}$$



olduğundan Emre ve Fatih pazar günü 6. kez birlikte kursa gidecektir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

EBOB - EKOK

- ♦ Periyodik olarak tekrar eden ve saat içeren durumlarda bir gün 24 saat olduğundan periyot olarak 24 alınır.

Örneğin, saat şu an 10.00 ise 122 saat sonra saatin kaç olduğunu bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 122 & 24 \\ -120 & 5 \\ \hline & 02 \end{array}$$

Kalan 2 olduğundan, 10.00 dan 2 saat sonra yani saat 12.00 olacaktır.

Örnek 74:



A şehrinden saat 09.00 da yola çıkan bir araç 54 saat sonra B şehrine ulaşıyor.

Buna göre, araç B şehrine saat kaçta ulaşmıştır?

- A) 15.00 B) 16.00 C) 17.00 D) 18.00 E) 19.00

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 24 \\ -48 & 6 \\ \hline & 06 \end{array}$$

54 sayısının 24 ile bölümünden kalan 6 olduğuna göre, araç saat 09.00 dan 6 saat sonra saat 15.00 da B şehrine ulaşmıştır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 75:

BİREYBİREYBİREY ... BİREY

Yukarıda BİREY kelimesi yan yana 30 defa yazılmıştır.

Buna göre, baştan 97. sıradaki harf aşağıdakilerden hangisidir?

- A) B B) İ C) R D) E E) Y

Çözüm:

BİREY kelimesi 5 harfli olup her 5 harf sonunda kelime tekrarlandığından periyot 5 olur.

97 sayısı 5 ile bölündüğünde kalan 2 olacağından BİREY kelimesinin baştan 2. harfi olan İ harfi 97. sıradaki harftir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 76:



Yukarıda özel olarak hazırlanmış 5 lamba gösterilmiştir. İlk önce A harfinin olduğu lamba yanıyor ve bu lamba sönerken yanındaki B lambası yanıyor. Şekildeki gibi devam ederek E lambasından sonra geriye doğru dönerek D, C, B ve A lambaları yanıyor.

Lambalar bu şekilde yanmaya devam ettiğinde 2018. sırada yanan lamba aşağıdakilerden hangisi olur?

- A) A B) B C) C D) D E) E

Çözüm:

Lambalar sırayla,

A - B - C - D - E - D - C - B A - B - C - D - E - D - C - B - A ...

şeklinde yandığından 8 lambadan sonra tekrar başa dönmektedir. 2018 sayısının 8 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 2. sıradaki B lambası 2018. sırada yanan lambadır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bölünebilme ve EBOB - EKOK

Etkinlik - 1

Aşağıdaki tabloda verilen sayılardan 3, 4, 5 ve 9 ile tam bölünenleri "✓" ile işaretleyiniz.

Sayı	3 ile	4 ile	5 ile	9 ile
31760				
12483				
7245				
3721				
40845				

Etkinlik - 2

1. Aşağıda verilen sayılardan 15 ile tam bölünenleri "✓" ile işaretleyiniz.

a) 3245 ☐ b) 40230 ☐ c) 2424 ☐

d) 3705 ☐ e) 6279 ☐ f) 2015 ☐

2. Aşağıda verilen sayılardan 36 ile tam bölünenleri "✓" ile işaretleyiniz.

a) 4212 ☐ b) 3824 ☐ c) 9246 ☐

d) 6354 ☐ e) 2745 ☐ f) 6660 ☐

Etkinlik - 3

Aşağıda bazı sayıların EBOB ve EKOK ları verilmiştir.

Doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "X" ile işaretleyiniz.

a) EBOB(20, 28)=4 ☐

b) EKOK(45, 60)=15 ☐

c) EBOB(48, 72)=24 ☐

d) EKOK(9, 11)=99 ☐

e) EBOB(25, 32)=1 ☐

f) EKOK(6, 12)=18 ☐

Etkinlik - 4

Aşağıda verilen boşlukları doldurunuz.

a) Bugün günlerden çarşamba ise 52 gün sonra günlerden olacaktır.

b) Bugün günlerden cumartesi ise 111 gün sonra günlerden olacaktır.

c) Bugün günlerden salı ise 35 gün önce günlerden idi.

d) Saat şu anda 10.00 ise 75 saat sonra olacaktır.

e) Saat şu anda 13.00 ise 126 saat sonra olacaktır.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

I. Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Çözüm Kümeleri

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere, $ax+b=0$ şeklindeki denklemlere “birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem” denir.

Eşitliği sağlayan x değerlerinin kümesine ise “denklemin çözüm kümesi” denir.

Örnek 77:

Aşağıda verilen denklemlerin $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ deki çözüm kümelerini bulalım.

- a) $3x - 12 = 0$
- b) $(4x+1) - (x-5) = 0$
- c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$
- d) $2x+3 \cdot (x+1) = 5x+3$
- e) $4(x+2) + 5(x-1) = 9x+1$

Çözüm:

a) $3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12$

$\Rightarrow x = 4$ bulunur.

4 sayısı $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ kümelerinin bir elemanı olduğundan $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ de çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{4\}$ tür.

b) $(4x+1) - (x-5) = 0 \Rightarrow 4x+1-x+5=0$

$3x = -6$

$x = -2$ bulunur.

-2 sayısı $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ kümelerinin bir elemanı olduğundan denklemin $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{-2\}$ dir.

-2 sayısı $\mathcal{N}$ kümesinin elemanı olmadığından denklemin $\mathcal{N}$ deki çözüm kümesi $\mathcal{C} = \emptyset$ dir.

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{6}{6}$

$5x = 6$

$x = \frac{6}{5}$ tir.

$\frac{6}{5}$ sayısı $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ kümesinin bir elemanı olduğu halde $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{Z}$ kümesinin bir elemanı değildir. O halde denklemin $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$, $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{Z}$ deki çözüm kümesi ise $\mathcal{C} = \emptyset$ dir.

d) $2x+3 \cdot (x+1) = 5x+3$

$2x+3x+3=5x+3$

$5x+3=5x+3$

$0=0$ elde edilir.

Bu denklemden x e verilebilecek her gerçek sayı eşitliği doğru yapacağından denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \mathcal{R}$ olur.

e) $4 \cdot (x+2) + 5(x-1) = 9x+1$

$4x+8+5x-5=9x+1$

$9x+3=9x+1$

$3=1$ elde edilir.

Bu denklemden x e verilebilecek hiç bir değer eşitliği sağlamayacağından denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \emptyset$ olur.

! Dikkat

$ax+b=0$ denkleminde,

- 1) $a \neq 0$ ise; çözüm kümesi bir elemanlıdır. $\mathcal{C} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ olur.
- 2) $a=0$ ve $b=0$ ise çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır. $\mathcal{C} = \mathcal{R}$ dir.
- 3) $a=0$ ve $b \neq 0$ ise çözüm kümesi boş kümedir. $\mathcal{C} = \emptyset$ olur.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 78:

$m, n \in \mathbb{R}$ ve x bilinmeyen olmak üzere,

$$(m-3) \cdot x + 2n - 10 = 0$$

denklemi tüm gerçekte sayılar için sağlandığına göre, $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 10

Çözüm:

$(m-3) \cdot x + 2n - 10 = 0$ denklemi tüm gerçekte sayılar için sağlandığına göre, $m-3=0$ ve $2n-10=0$ olmalıdır.

Buradan, $m=3$ ve $n=5$ bulunur.

O halde, $m \cdot n = 3 \cdot 5 = 15$ tir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 79:

$$4ax + 3 = 8x - 2$$

denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 2 D) 4 E) 8

Çözüm:

$$4ax + 3 = 8x - 2 \Rightarrow 4ax - 8x + 3 + 2 = 0$$

$$x(4a-8) + 5 = 0 \text{ olur.}$$

$x \cdot (4a-8) + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesinin boş küme olması için,

$$4a - 8 = 0$$

$$4a = 8$$

$$a = 2 \text{ olmalıdır.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

I. Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

" $<$ ", " $\leq$ ", " $>$ ", " $\geq$ " sembolleri kullanılarak oluşturulan sayısal ifadeler "**eşitsizlik**" adı verilir.

Kullanılan bu semboller

♦ $<$: küçük

♦ $\leq$: küçük veya eşit

♦ $>$: büyük

♦ $\geq$: büyük veya eşit anlamındadır.

Örnek 80:

Aşağıda verilen eşitsizlikleri sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

- a) $x \geq 3$ b) $x > -2$ c) $x \leq 2$ d) $x < -1$

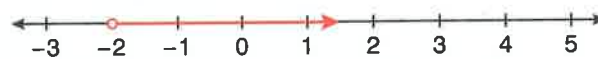
Çözüm:

a) $x \geq 3$ eşitsizliği 3 veya 3 ten büyük sayılar anlamına gelmektedir. Bu eşitsizlik sayı doğrusunda



şeklinde gösterilir.

b) $x > -2$ eşitsizliği -2 den büyük sayılar anlamına gelmektedir. Bu eşitsizlik sayı doğrusunda,



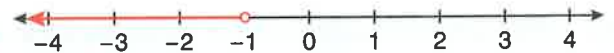
şeklinde gösterilir.

c) $x \leq 4$ eşitsizliği 4 veya 4 ten küçük sayılar anlamına gelmektedir. Bu eşitsizlik sayı doğrusunda,



şeklinde gösterilir.

d) $x < -1$ eşitsizliği -1 den küçük sayılar anlamına gelmektedir. Bu eşitsizlik sayı doğrusunda,



şeklinde gösterilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

Eşitsizlik Özellikleri

- 1) Herhangi iki a ve b gerçekte sayıları için, $a < b$, $a = b$ ve $a > b$ durumlarından yalnızca bir tanesi doğrudur.
- 2) a , b , c gerçekte sayıları için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ dir.
- 3) Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir veya her iki tarafından aynı sayı çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

♦ a , b , c gerçekte sayıları için,

$$a < b \text{ ise } a + c < b + c$$

$$a - c < b - c \text{ dir.}$$

- 4) Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişmez.

♦ a , b ve c gerçekte sayılar, $c > 0$ olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } a \cdot c < b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ dir.}$$

- 5) Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

♦ a , b ve c gerçekte sayılar, $c < 0$ olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } a \cdot c > b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ dir.}$$

- 6) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere,

- a) $a < x < b$ eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçekte sayılarının kümesi (a, b) ile gösterilir. Bu aralığa "**açık aralık**" denir. (a, b) açık aralığı sayı doğrusunda



şeklinde gösterilir.

(a, b) açık aralığında a ve b gerçekte sayıları aralığa dahil olmadıklarından bu durum sayı doğrusunda

" $\text{---} \circ \text{---}$ " ve " $\text{---} \circ \text{---}$ " şeklinde gösterilir.

- b) $a \leq x < b$ eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçekte sayılarının kümesi $[a, b)$ ile gösterilir. Bu aralığa "**yarı açık aralık**" denir.



şeklinde gösterilir.

$[a, b)$ yarı açık aralığında a sayısı aralığa dahil olduğundan " $\text{---} \bullet \text{---}$ " ile, b sayısı aralığa dahil olmadığından " $\text{---} \circ \text{---}$ " ile gösterilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

- c) $a \leq x \leq b$ eşitsizliğini sağlayan tüm x gerçekte sayıları kümesi $[a, b]$ ile gösterilir. Bu aralığa "kapalı aralık" denir.



şeklinde gösterilir.

$[a, b]$ kapalı aralığında a ve b sayıları aralığa dahil olduğundan bu durum

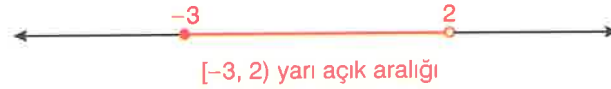
" $\text{---} \bullet \text{---}$ " ve " $\text{---} \bullet \text{---}$ " ile ifade edilir.

Aşağıda verilen eşitsizlikleri inceleyiniz.

- $2 < x < 5, x \in \mathbb{R}$



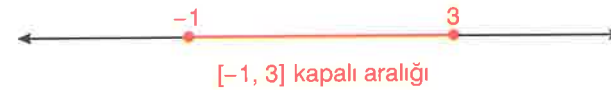
- $-3 \leq x < 2, x \in \mathbb{R}$



- $0 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}$



- $-1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}$



- 7) a, b, c ve d gerçekte sayılar, $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$ dir.

Eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$$\left. \begin{array}{l} x < 4 \\ y < 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y < 10 \text{ gibi}$$

- Eşitsizliklerde taraf tarafa çıkarma yapılmaz.

- 8) a) a ve b aynı işaretli sayılar olmak üzere, $a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir.

$$2 < 4 \text{ ise } \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$$-4 < -2 \text{ ise } -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \text{ gibi.}$$

- b) a ve b zıt işaretli sayılar olmak üzere, $a < 0 < b$ olduğunda

$$a < b \text{ ise } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ dir.}$$

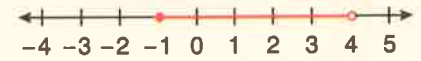
$$-3 < 4 \text{ ise } -\frac{1}{3} < \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

- Pozitif sayılar negatif sayılardan daima büyüktür.

İLK ADIM SORULARI

7. $-1 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

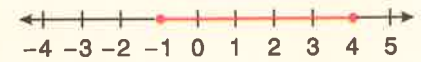
A)



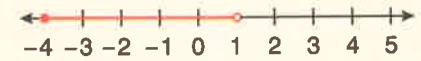
B)



C)



D)



E)

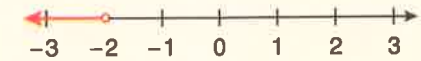


8. x reel sayı olmak üzere, $x < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

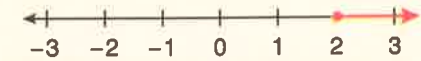
A)



B)



C)



D)



E)



İLK ADIM SORULARI

9.

$$-4x+2 \leq x+17$$

eşitsizliğin $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[3, \infty)$ B) $(-\infty, 3]$
C) $[-3, \infty)$ D) $(-\infty, -3]$
E) $[-3, 3]$

10.

$$-5 < 2x - 1 < 7$$

eşitsizliğin $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, 4)$ B) $(-4, 2)$
C) $(2, 6)$ D) $(-3, 1)$
E) $(-2, 6)$

Örnek 81:

$$3x - 6 \leq 0$$

eşitsizliğini çözerek $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$3x - 6 \leq 0 \Rightarrow 3x - 6 + 6 \leq 0 + 6 \text{ (Her iki tarafa 6 eklendi)}$$

$$\Rightarrow 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{6}{3} \text{ (Her iki taraf 3'e bölündü.)}$$

$$\Rightarrow x \leq 2 \text{ olur.}$$

$\mathcal{R}$ de çözüm kümesi, $\mathcal{C} = (-\infty, 2]$

$\mathcal{N}$ de çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \{0, 1, 2\}$ dir.

Örnek 82:

$$\frac{x}{2} + 3 < 6$$

eşitsizliğini çözerek $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$ ve $\mathcal{R}$ de çözüm kümelerini bulalım. $\mathcal{R}$ deki çözüm aralığını sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{x}{2} + 3 < 6 \Rightarrow \frac{x}{2} + 3 - 3 < 6 - 3 \text{ (Her iki tarafa } -3 \text{ eklendi)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} < 3$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} < 3 \cdot 2 \text{ (Her iki taraf 2 ile çarpıldı)}$$

$$\Rightarrow x < 6 \text{ olur.}$$

$\mathcal{N}$ de çözüm kümesi; $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{Z}$ de çözüm kümesi; $\mathcal{C} = \{5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$

$\mathcal{R}$ de çözüm kümesi; $\mathcal{C} = (-\infty, 6)$ dir.

$(-\infty, 6)$ aralığı sayı doğrusunda,



şeklinde gösterilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 83:

$$x-3 < 2x+1 < 5-x$$

eşitsizliğin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-4, 2)$ B) $(-3, 3)$ C) $(-4, 0)$ D) $(-2, 2)$ E) $(-2, 6)$

Çözüm:

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ x-3 < 2x+1 < 7-x \\ \textcircled{1} \end{array}$$

① nolu eşitsizlikten

$$x-3 < 2x+1$$

$$-4 < x \dots I$$

② nolu eşitsizlikten

$$2x+1 < 7-x$$

$$3x < 6$$

$$x < 2 \dots II \text{ elde edilir.}$$

I ve II den $-4 < x < 2$ çözüm aralığı bulunur. O halde, eşitsizliğin en geniş çözüm kümesi $\mathcal{C} = (-4, 2)$ olacaktır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 84:

$x, y \in \mathbb{Z}$ ve

$$-2 \leq x < 4$$

$$-4 \leq y < 3$$

olduğuna göre, $3x+2y$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

x ve y tam sayılar olduklarından;

$x, \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinin y ise $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesinin elemanlarından biri olacaktır.

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

- $3x+2y$ ifadesinin en büyük olabilmesi için x ve y nin alabileceği değerlerin en büyük olması gerekir.

$x=3$ ve $y=2$ seçilirse;

$$3x+2y=3.3+2.2=9+4=13 \text{ olur.}$$

- $3x+2y$ ifadesinin en küçük olabilmesi için x ve y nin alabileceği değerlerin en küçük olması gerekir.

$x=-2$ ve $y=-4$ seçilirse;

$$3x+2y=3.(-2)+2.(-4)$$

$$=(-6)+(-8)$$

$$=-14 \text{ olur.}$$

O halde sonuç, $13+(-14)=-1$ olacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 85:

a ve b tam sayılardır.

$$-5 < a < 3$$

$$-2 < b < 4$$

olduğuna göre, $4a-3b$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -6 C) -8 D) -10 E) -14

Çözüm:

a ve b tam sayılar olduğundan;

$a, \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesinin

b ise $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinin

elemanlarından biri olacaktır.

- $4a-3b$ ifadesinin en büyük olabilmesi için a nın en büyük, b nin ise en küçük değeri alması gerekir.

$a=2$ ve $b=-1$ seçilirse,

$$4a-3b=4.2-3.(-1)=8+3=11 \text{ olur.}$$

- $4a-3b$ ifadesinin en küçük olabilmesi için a nın en küçük, b nin ise en büyük değeri alması gerekir.

$a=-4$ ve $b=3$ seçilirse,

$$4a-3b=4.(-4)-3.(3)=-16-9=-25 \text{ olur.}$$

O halde sonuç, $11+(-25)=-14$ tür.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 86:

x ve y gerçekte sayılardır.

$$x < 3$$

$$y < 5$$

olduğuna göre, $5x+2y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 28 B) 26 C) 25 D) 24 E) 18

Çözüm:

x ve y gerçekte sayılar verildiğinden

$$x < 3 \Rightarrow 5x < 15$$

$$5x < 15 \dots \textcircled{1}$$

$$y < 5 \Rightarrow 2y < 10$$

$$2y < 10 \dots \textcircled{2} \text{ elde edilir.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ nolu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$5x < 15$$

$$2y < 10$$

$$5x+2y < 25 \text{ bulunur.}$$

O halde, $5x+2y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 24 olacaktır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 87:

x ve y gerçekte sayılardır.

$$-3 < \frac{x-2}{2} < 2$$

$$-2 < 3y+1 < 7$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

Çözüm:

$$\begin{aligned} -3 < \frac{x-2}{2} < 2 &\Rightarrow -6 < x-2 < 4 \\ &\Rightarrow -4 < x < 6 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 < 3y+1 < 7 &\Rightarrow -3 < 3y < 6 \\ &\Rightarrow -1 < y < 2 \dots \textcircled{2} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ nolu eşitsizlikleri alt alta toplarsak

$$-4 < x < 6$$

$$-1 < y < 2$$

$$-5 < x+y < 8 \text{ bulunur.}$$

O halde, $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri 7 dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 88:

A kentlinden B kentline iki farklı yoldan gidilebilmektedir.

I. yol : $(3x-60)$ km

II. yol : $(2x+90)$ km

olarak veriliyor.

Bir araç sabit hızla A kentinden yola çıktığında I. yolu kullanırsa II. yola göre daha kısa sürede B kentinde olacağına göre, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 148 B) 149 C) 150 D) 151 E) 152

Çözüm:

I. yol kullanıldığında daha kısa sürede B kentine ulaşıldığına göre, I. yolun II. yoldan daha kısa olması gerekir.

O halde,

$$3x-60 < 2x+90$$

$$3x-2x < 90+60$$

$$x < 150 \text{ olacaktır.}$$

O halde, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri 149 dur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 89:

Bir mağazada satılan ürünlerden en ucuz ürünün fiyatı 50 liradır. Bu mağazada A ürününün fiyatı $(x+40)$ lira, B ürününün fiyatı ise $(200-x)$ liradır.

B ürününün fiyatı A dan daha fazla olduğuna göre, x in alabileceği en geniş değer aralığı lira cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $50 \leq x < 80$ B) $0 \leq x < 80$ C) $10 \leq x < 80$
D) $10 \leq x < 60$ E) $15 \leq x < 120$

Çözüm:

B ürününün fiyatı A dan daha fazla olduğundan,

$$200 - x > x + 40$$

$$200 - 40 > x + x$$

$$160 > 2x$$

$$80 > x \dots \textcircled{1} \text{ olur.}$$

Ayrıca mağazadaki en ucuz ürün 50 lira ise B den daha ucuz olan A ürünün fiyatının en az 50 lira olması gerekir.

Dolayısıyla,

$$A \geq 50 \Rightarrow x + 40 \geq 50$$

$$x \geq 10 \dots \textcircled{2} \text{ olacaktır.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $10 \leq x < 80$ değer aralığı elde edilir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 90:

x ve y gerçel sayılardır.

$$-2 < x < 5$$

$$-4 < y < 3$$

olduğuna göre, $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

Çözüm:

x ve y gerçel sayılar olduğundan,

$$\frac{3}{-2} < x < 5 \Rightarrow -6 < 3x < 15$$

$$\frac{-2}{-4} < y < 3 \Rightarrow -6 < -2y < 8 \text{ olur.}$$

Elde edilen eşitsizlikler alt alta toplanırsa,

$$-6 < 3x < 15$$

$$-6 < -2y < 8$$

+

$$-12 < 3x - 2y < 23 \text{ elde edilir.}$$

O halde $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 22 olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat

Eşitsizliklerde taraf tarafa çıkarma yapılamayacağından $3x - 2y$ ifadesi $3x + (-2y)$ şeklinde düşünülerek çözüm yapılır.

Örnek 91:

a , b ve c gerçel sayılardır.

$$a < b$$

$$a.c > b.c$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $c > 0$ B) $c < 0$ C) $a < c$ D) $c < b$ E) $a.c > 0$

Çözüm:

$a.c > b.c$ eşitsizliğinde her iki taraf c ile bölünürse,

$$\frac{a.c}{c} > \frac{b.c}{c} \Rightarrow a > b \text{ elde edilir.}$$

Bu durum ise ilk öncül olan $a < b$ ile çelişir. Dolayısıyla c nin negatif olduğu anlaşılır. O halde $c < 0$ olmalıdır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 92:

x ve y gerçekte sayılardır.

$$-2 < x < 4$$

$$y - 2x + 1 = 0$$

olduğuna göre, y nin en geniş değeri aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (-6, 4) B) (-7, 5) C) (-3, 10) D) (-5, 7) E) (-4, 6)

Çözüm:

$$y - 2x + 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = 2x$$

$$\frac{y+1}{2} = x \dots \textcircled{1} \text{ elde edilir.}$$

$-2 < x < 4$ eşitsizliğinde $\textcircled{1}$ nolu ifadede elde edilen

$x = \frac{y+1}{2}$ değeri yerine yazılırsa,

$$-2 < \frac{y+1}{2} < 4 \Rightarrow \frac{2}{-2} < \frac{y+1}{2} < 4$$

$$\Rightarrow -4 < y+1 < 8$$

$$\Rightarrow -5 < y < 7 \text{ bulunur.}$$

O halde y nin en geniş değeri aralığı (-5, 7) olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 93:

$m < 0 < n$ olduğuna göre, aşağıda verilen eşitsizliklerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $m+n > 0$ B) $m-n > 0$ C) $m.n > 0$ D) $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ E) $\frac{m}{n} > 0$

Çözüm:

A) m negatif, n pozitif olduğundan m ve n nin toplamı pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

B) $m-n > 0 \Rightarrow m > n$ olur. Bu ifade ise yanlıştır.

C) m ve n zıt işaretli olduğundan $m.n < 0$ olacaktır. O halde $m.n > 0$ eşitsizliği yanlıştır.

Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

$$D) m < 0 \Rightarrow \frac{1}{m} < 0$$

$$n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$$

olacağından $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ eşitsizliği kesinlikle doğrudur.

E) m ve n zıt işaretli olduklarından $\frac{m}{n} < 0$ olacaktır. O halde $\frac{m}{n} > 0$ eşitsizliği yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 94:

$$A = (2, 7]$$

$$B = [-1, 4)$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre,

$$I. A \cap B = (2, 4)$$

$$II. A \cup B = [-1, 7]$$

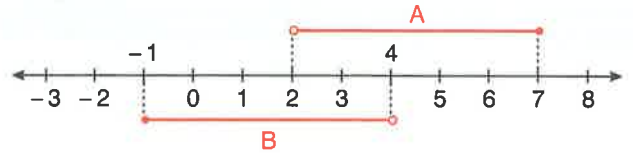
$$III. A - B = [4, 7]$$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm:

A ve B kümelerini sayı doğrusunda



şeklinde gösterelim.

- $A \cap B$ kümesi, A ve B de ortak olarak bulunan elemanların kümesi olduğundan $A \cap B = (2, 4)$ tür.
- $A \cup B$ kümesi, A ve B de bulunan tüm elemanların birleşimiyle elde edileceğinden, $A \cup B = [-1, 7]$ dir.
- $A - B$ kümesi, A da olup B de olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan $A - B = [4, 7]$ dir. O halde I, II ve III doğrudur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

1. Aşağıda verilen sayılardan hangisi irrasyoneldir?

- A) $\frac{4}{7}$ B) $0,\bar{4}$ C) 2,73 D) 3,14 E) $\sqrt{2}$

2. Aşağıda verilen,

- I. Her tam sayı aynı zamanda bir doğal sayıdır.
II. Her rasyonel sayı aynı zamanda bir gerçek sayıdır.
III. Gerçek sayılar rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden oluşur.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) II ve III E) I ve III

3. Aşağıda verilen işlemlerden hangisinde toplama işleminin etkisiz eleman özelliği kullanılmıştır?

- A) $5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$
B) $6 + 0 = 0 + 6 = 6$
C) $3.1 = 1.3 = 3$
D) $4.0 = 0.4 = 0$
E) $(3+4) + 5 = 3 + (4+5)$

4. Aşağıda verilen sayılardan hangisi rasyoneldir?

- A) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ B) π C) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}.\sqrt{7}$ E) $\sqrt{6}$

5. m ve n doğal sayılardır.

$$m+n=15$$

olduğuna göre, m.n çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 75 B) 64 C) 56 D) 54 E) 50

6. x ve y pozitif tam sayılardır.

$$x.y=20$$

olduğuna göre, x+y toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 12 D) 16 E) 21

SAYI KÜMELERİ

Test : 01

7. $\sqrt{10}$ sayısı hangi ardışık tam sayılar arasındadır?

- A) 2 ve 3 B) 3 ve 4 C) 4 ve 5
D) 5 ve 6 E) 6 ve 7

8. $3x - 6 + 2 \cdot (x - 2) = 0$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{1\}$ E) $\{2\}$

9. $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7x}{10}$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{5\}$ B) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ C) $\{0\}$ D) $\mathcal{R}$ E) $\emptyset$

10. x değişkenine bağlı,

$$a \cdot x + 4 = 3x + 10$$

denkleminin çözüm kümesi $\{2\}$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

11. $(a - 1) \cdot x + 3 = 4 \cdot (x - 2) + 2$

denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

www.bireyakademi.com
12. $(m + 3) \cdot x + 2n - 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathcal{R}$ olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

www.bireyakademi.com

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Test : 02

1. Beş basamaklı 23023 sayısının 23 ile bölümünde bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

A) 11 B) 101 C) 1001 D) 1002 E) 1010

2. m sayısının 6 ile bölümünde bölüm n, kalan 2 dir.

Buna göre, m nin n türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6n+4$ B) $\frac{n-2}{6}$ C) $2n+6$
D) $\frac{n+6}{2}$ E) $6n+2$

3. a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{array}{r} a \overline{) 5} \\ \underline{} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} b \overline{) 4} \\ \underline{} \\ 2 \end{array}$$

bölme işlemleri veriliyor.

Buna göre, a nın c türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $20c+11$ B) $20c+3$ C) $10c+6$
D) $10c+8$ E) $20c+9$

4. Aşağıda verilen bölme işleminde A ve B pozitif tam sayılardır.

$$\begin{array}{r} A \overline{) 8} \\ \underline{} \\ B+1 \end{array}$$

Buna göre, A nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 51 B) 55 C) 57 D) 65 E) 73

5. m, t ve n pozitif tam sayılardır. m sayısının 6 ile bölümünde bölüm t, kalan 4; t sayısının 10 ile bölümünde bölüm n, kalan 2 dir.

Buna göre, m sayısının 15 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. m ve n pozitif tam sayılarının toplamı 84 tür. m sayısının n ile bölümünde bölüm 9, kalan 4 tür.

Buna göre, n sayısı kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Test : 02

7. Dört basamaklı $3x71$ sayısı 3 ile tam bölünebilmektedir.
Buna göre, x yerine yazılabilecek değerlerin toplamı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

8. Üç basamaklı $7KM$ sayısı 5 ile bölünebilmekte, 9 ile bölümünden ise 1 kalanını vermektedir.

Buna göre, K yerine yazılabilecek en büyük değer kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

9. Dört basamaklı $81mn$ sayısının 10 ile bölümünden kalan 2 dir.

Bu sayı 4 ile tam bölünebildiğine göre, m nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10. Üç basamaklı $A4B$ sayısı 6 ile tam bölünebilmektedir.

$B > 5$ olduğuna göre, A nın alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

A) 33 B) 30 C) 27 D) 24 E) 21



11. Dört basamaklı $1m2n$ sayısı 45 ile tam bölünebilen rakamları farklı bir doğal sayıdır.

Buna göre, m kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

www.birey akademi.com



12. A ve B doğal sayılarının 12 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 9 ve 4 tür.

Buna göre, $A.B$ çarpımının 12 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) 10

www.birey akademi.com

1. x ve y doğal sayılardır.

$$x \cdot y = 19$$

olduğuna göre, $|x - y|$ değeri kaçtır?

- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

2. m ve n sayma sayılarıdır.

$$m \cdot n = 11 - 4n$$

olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

4. a ve b pozitif tam sayılar, $(a+1)$ ile $(b+2)$ sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{a+1}{b+2} = \frac{8}{21}$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 35 B) 32 C) 30 D) 29 E) 26

5. m ile $(n+3)$ sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{m}{n+3} = \frac{20}{35}$$

olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 8 C) 12 D) 19 E) 21

6. 20 ve 24 sayılarına tam bölünebilen en küçük sayma sayısı kaçtır?

- A) 60 B) 72 C) 100 D) 120 E) 240



3. x ve y pozitif tam sayılar ve $(x+3)$ ile $(y+5)$ sayıları aralarında asaldır.

$$(x+3) \cdot (y+5) = 40$$

olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

www.bireyakademi.com

EBOB - EKOK

Test : 03

7. 96 ve 120 sayılarını tam bölen en büyük doğal sayı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 24

8. 9, 10 ve 15 ile bölündüğünde dalma 1 kalanını veren üç basamaklı en küçük doğal sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

9. 124 ve 164 sayılarını böldüğünde 4 kalanını veren en büyük doğal sayı kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 40 D) 45 E) 60

10. x, y ve z sayma sayılarıdır.

$$12x = 15y = 8z$$

olduğuna göre, $x+y+z$ toplamı en az kaçtır?

A) 33 B) 38 C) 45 D) 60 E) 72



11. m ve n birbirinden farklı asal sayılardır.

$$A = m^3 \cdot n^2$$

$$B = m \cdot n^4$$

olduğuna göre, EBOB(A, B) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m^4 \cdot n^6$ B) $m^3 \cdot n^4$ C) $m^2 \cdot n^2$
D) $m \cdot n^2$ E) $m \cdot n^4$

www.bireyakademi.com

12. A ve B sayılarının asal çarpan algoritması aşağıdaki şekilde verilmiştir.

A	B	2
D	E	2
D	F	3
G	H	5
1	H	5
	1	

Buna göre, $A+B$ toplamı kaçtır?

A) 80 B) 90 C) 120 D) 150 E) 180

bryPLE

1. 28, 35 ve 56 sayılarına tam bölünebilen üç basamaklı en büyük doğal sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

2. 9, 10 ve 12 ile bölündüğünde sırasıyla 7, 8 ve 10 kalanını veren en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 316 B) 256 C) 238 D) 208 E) 178

3. Bir kutudaki tokalar 10, 15 ve 18 li gruplara ayrıldığında her defasında 4 toka açıkta kalıyor.

Buna göre, kutuda bulunan toka sayısı en az kaçtır?

A) 94 B) 108 C) 124 D) 144 E) 188

4. Bir sepetteki güller dörder, altışar ve dokuzar demetlendiğinde her defasında bir gül artıyor.

Gül sayısı 100 den fazla olduğuna göre, sepette en az kaç gül vardır?

A) 109 B) 121 C) 145 D) 149 E) 161



5. Uzunlukları 75 ve 135 cm olan iki tahta eşit uzunlukta parçalara ayrılacak şekilde ayrı ayrı kesilecektir.

Buna göre, bu işlem için en az kaç kesim işlemi yapılmalıdır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

www.birey akademi.com

6. x, y ve z pozitif tam sayılardır.

$$A = 6x + 3 = 10y + 3 = 14z + 3$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

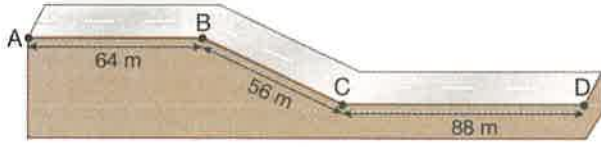
A) 337 B) 323 C) 297 D) 263 E) 213

EBOB - EKOK

Test : 04



7.



Yukarıda verilen caddenin bir kenarına eşit aralıklarla direk dikilecektir.

A, B, C ve D noktalarına da gelecek şekilde dikilecek direklerin sayısı en az kaç olabilir?

- A) 28 B) 27 C) 26 D) 25 E) 24

www.bireyakademi.com

8. Boyutları 90 ve 168 metre olan dikdörtgen biçimindeki spor salonunun zemini karesel bölge şeklinde eş büyüklükte parkelerle döşenecektir.

Buna göre, en az kaç parke gereklidir?

- A) 420 B) 430 C) 440 D) 450 E) 460

9. 45 ve x sayılarının EBOB u 15, EKOK u 180 dir.

Buna göre, x kaçtır?

- A) 54 B) 60 C) 75 D) 80 E) 90

10. a ve b pozitif tam sayılardır.

$$\text{EBOB}(a, b) = 3$$

$$a \cdot b = 108$$

olduğuna göre, a+b toplamı en az kaçtır?

- A) 45 B) 32 C) 24 D) 21 E) 18

11. 5 günde bir nöbete kalan Yasemin hemşire ilk nöbetini perşembe günü tutuyor.

Buna göre, 9. nöbetini hangi gün tutar?

- A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba
D) Perşembe E) Cuma

12. Bir limandan A, B ve C şehirlerine sırasıyla 4, 6 ve 9 günde bir gemi kalkmaktadır.

İlk kez salı günü her üç şehire de gemi kalktığına göre, 6. kez her üç şehire hangi gün gemi kalkar?

- A) Çarşamba B) Perşembe C) Cuma
D) Cumartesi E) Pazar

BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 05

1. $\frac{x}{2} < -1$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-1, 2)$ B) $(-\infty, -2)$ C) $(-2, \infty)$
D) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ E) $(-2, 0)$

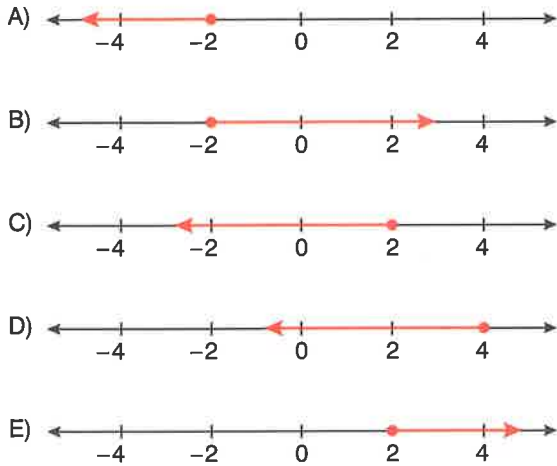
2. $\frac{x-2}{3} < 1$

eşitsizliğinin $\mathcal{N}$ deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
C) $[0, 6)$ D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
E) $[0, 5]$

3. $x-1 \leq 7-x$

eşitsizliğinin $\mathcal{R}$ deki çözüm kümesinin sayı doğrusunda gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?



4. $-4 \leq 3x+2 \leq 5$

eşitsizliğini sağlayan x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. $x-4 < 4 < 2x$

eşitsizliğini sağlayan en büyük ve en küçük x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

6. $2x < 10$

$3y < 12$

eşitsizliklerinde x ve y tam sayılardır.

Buna göre, $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

BİRİNCİ DERECE DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 05



7. x ve y gerçekt sayılardır.

$$-2 < x < 6$$

$$-3 < y < 4$$

olduğuna göre, $4x+3y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 37

www.bireyakademi.com

8. a, b ve c negatif tam sayılardır.

$$a.b=5$$

$$b.c=10$$

olduğuna göre, $a+b+c$ toplamının alabileceği en büyük değeri kaçtır?

- A) -8 B) -10 C) -12 D) -15 E) -16

- 9.
- $0 < a < b$
- olduğuna göre,

I. $a+b > 0$

II. $a.b < 0$

III. $a-b < 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
-
- D) I ve III E) I ve II

10. m ve n tam sayılardır.

$$1 < m < 5$$

$$-3 < n < 4$$

olduğuna göre, $2m+n$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri kaçtır?

- A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10



11. m, n ve p negatif gerçekt sayılardır.

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{p}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A)
- $p > n > m$
- B)
- $m > n > p$
- C)
- $n > p > m$
-
- D)
- $n > m > p$
- E)
- $p > m > n$

www.bireyakademi.com

- 12.

$$A = \{x \mid -3 < x < 4, x \in \mathcal{R}\}$$

$$B = \{x \mid -1 < x < 6, x \in \mathcal{R}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \cap B$ kümesinde bulunan tam sayıların toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

bryPLE

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

Örnek 2:

$x > 2$ olduğuna göre,

$$|x| + |x-2| + |-x|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x+2$ B) $-x+2$ C) $x-2$ D) $3x-2$ E) $-3x+2$

Çözüm:

$x > 2$ olduğuna göre,

$$\underbrace{|x|}_{+} = x, \quad \underbrace{|x-2|}_{+} = x-2 \quad \text{ve} \quad \underbrace{|-x|}_{-} = -(-x) = x \quad \text{olur.}$$

O halde sonuç, $x+x-2+x=3x-2$ bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 3:

$0 < x < y$ olduğuna göre,

$$|x+y| + |x-y| - |2x|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2y-2x$ B) $2x+2y$ C) $2y$ D) $-2y$ E) $-2x-2y$

Çözüm:

$0 < x < y$ olduğundan,

$$\underbrace{|x+y|}_{+} = x+y, \quad \underbrace{|x-y|}_{-} = -(x-y) = -x+y \quad \text{ve} \quad \underbrace{|2x|}_{+} = 2x \quad \text{tir.}$$

O halde sonuç, $(x+y) + (-x+y) - 2x = 2y - 2x$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 4:

$a < 0 < b$ olduğuna göre,

$$\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{|a.b|}{a.b}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm:

$a < 0 < b$ olduğundan

$$\underbrace{|a|}_{-} = -a, \quad \underbrace{|b|}_{+} = b \quad \text{ve} \quad \underbrace{|a.b|}_{-} = -(a.b) \quad \text{dir.}$$

$$\begin{aligned} \text{O halde, } \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{|a.b|}{a.b} &= \frac{a}{-a} + \frac{b}{b} + \frac{-a.b}{a.b} \\ &= -1 + 1 - 1 \\ &= -1 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 5:

$$|\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-2|$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2\sqrt{3}-1$ B) $-2\sqrt{3}-1$ C) 3 D) -1 E) -3

Çözüm:

$\sqrt{3}$ sayısı 1 ve 2 tam sayıları arasında olduğundan,

$$\underbrace{|\sqrt{3}+1|}_{+} = \sqrt{3}+1 \quad \text{ve} \quad \underbrace{|\sqrt{3}-2|}_{-} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2 \quad \text{dir.}$$

O halde sonuç, $(\sqrt{3}+1) + (-\sqrt{3}+2) = 3$ olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 6:

$-2 < x < 1$ olduğuna göre,

$$|x+2| + |x-1|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-2x+3$ B) $-2x-3$ C) -3 D) 3 E) $2x+3$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

Çözüm:

$-2 < x < 1$ olduğundan,

$$\underbrace{|x+2|}_{+} = x+2 \text{ ve } \underbrace{|x-1|}_{-} = -(x-1) = -x+1 \text{ dir.}$$

O halde sonuç, $(x+2) + (-x+1) = 3$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 7:

$x < 0$ olmak üzere

$$\frac{|-4x + |-x||}{-|x|}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) -5 B) -3 C) -1 D) 3 E) 5

Çözüm:

$x < 0$ olduğundan,

$$\underbrace{|-x|}_{+} = -x \text{ ve } \underbrace{|x|}_{-} = -x \text{ tir.}$$

$$\frac{|-4x + |-x||}{-|x|} = \frac{|-4x + (-x)|}{-(-x)} = \frac{|-5x|}{x} \text{ elde edilir.}$$

$x < 0$ iken $|-5x| = -5x$ olacağından

$$\frac{|-5x|}{x} = \frac{-5x}{x} = -5 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Mutlak Değer Özellikleri

1) $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ dir.

♦ $|x| = 4$ ise $x = 4$ veya $x = -4$

♦ $|2x+1| = 5$ ise $2x+1=5$ veya $2x+1=-5$ gibi.

Örnek 8:

$$|x-2|=6$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm:

$$|x-2|=6 \text{ ise}$$

$$\bullet \quad x-2=6 \text{ veya } x-2=-6$$

$$x=8 \quad x=-4 \text{ olur.}$$

x değerlerinin toplamı $8 + (-4) = 4$ tür.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 9:

$$|x|=5$$

$$|y+1|=3$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) -9 B) -8 C) -7 D) -6 E) -5

Çözüm:

$$\bullet \quad |x|=5 \text{ ise } x=5 \text{ veya } x=-5 \text{ tir.}$$

$$\bullet \quad |y+1|=3 \text{ ise } y+1=3 \text{ veya } y+1=-3$$

$$y=2 \quad y=-4 \text{ olur.}$$

$x+y$ nin en küçük değeri için $x=-5$, $y=-4$ seçilirse sonuç $(-5) + (-4) = -9$ bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

Örnek 10:

$$2 \cdot |x-2| + 1 = 11$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-5, -7\}$ B) $\{-5, 3\}$ C) $\{-5, 7\}$
D) $\{-3, 5\}$ E) $\{-3, 7\}$

Çözüm:

$$2 \cdot |x-2| + 1 = 11 \Rightarrow 2 \cdot |x-2| = 10$$

$$\Rightarrow |x-2| = 5 \text{ olur.}$$

$$|x-2| = 5 \text{ ise } x-2=5 \text{ veya } x-2=-5$$

$$x=7 \quad x=-3 \text{ olacaktır.}$$

O halde $\mathcal{C} = \{-3, 7\}$ dir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

! Dikkat

Mutlak değerli bir ifadenin sonucu negatif bir sayıya eşit olmaz.

♦ $|x| = -4$ ise $\mathcal{C} = \emptyset$ ♦ $|2x-1| = -7$ ise $\mathcal{C} = \emptyset$ gibi.

Örnek 11:

$$||x|+3|=5$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 16 B) 4 C) -4 D) -16 E) -64

Çözüm:

$$||x|+3|=5 \text{ ise } |x|+3=5 \text{ veya } |x|+3=-5$$

$$|x|=2 \quad |x|=-8 \text{ olur.}$$

$$|x|=2 \text{ ise } x=2 \text{ veya } x=-2$$

$$|x|=-8 \text{ ise } \mathcal{C} = \emptyset \text{ olur.}$$

O halde x değerleri 2 ve -2 dir.

Dolayısıyla sonuç, $2 \cdot (-2) = -4$ tür.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

2) $|x| = |y|$ ise $x=y$ veya $x=-y$ dir.

Örnek 12:

$$|2x| = |x-6|$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) -2 D) -4 E) -6

Çözüm:

$$|2x| = |x-6| \text{ ise}$$

$$2x=x-6 \text{ veya } 2x=-x+6$$

$$x=-6 \quad 3x=6$$

$$x=2 \text{ olur.}$$

x değerlerinin toplamı $-6+2=-4$ tür.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 13:

$$\left| \frac{x}{2} + 1 \right| = \left| \frac{x}{3} - 1 \right|$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-12, 12\}$ B) $\{-6, -12\}$ C) $\{-12, 0\}$
D) $\{-6, 6\}$ E) $\{0, 12\}$

Çözüm:

$$\left| \frac{x}{2} + 1 \right| = \left| \frac{x}{3} - 1 \right| \text{ ise}$$

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3} - 1 \text{ veya } \frac{x}{2} + 1 = -\frac{x}{3} + 1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -2$$

$$\frac{3x}{6} - \frac{2x}{6} = \frac{-12}{6}$$

$$x = -12$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 0$$

$$\frac{5x}{6} = 0$$

$$x = 0$$

olur. O halde $\mathcal{C} = \{-12, 0\}$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

- 3) $|x| + |y| + |z| = 0$ ise
 $x=0, y=0$ ve $z=0$ dir.

Örnek 14:

$$|a-3| + |b+1| + |c-5| = 0$$

olduğuna göre, $a+b+c$ toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm:

$$|a-3| + |b+1| + |c-5| = 0 \text{ ise}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{|a-3|}_{0} & \underbrace{|b+1|}_{0} & \underbrace{|c-5|}_{0} \\ a-3=0 & b+1=0 & c-5=0 \\ a=3 & b=-1 & c=5 \text{ olur.} \end{array}$$

O halde, $a+b+c=3+(-1)+5=7$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

- 4) Mutlak değerli bir ifadenin alabileceği en küçük değer sıfırdır.

Örnek 15:

$\left|\frac{x}{2}-1\right|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer için $|1-3x|$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$\left|\frac{x}{2}-1\right|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer sıfırdır.

$$\text{O halde, } \left|\frac{x}{2}-1\right| = 0 \Rightarrow \frac{x}{2}-1=0$$

$$\frac{x}{2}=1$$

$x=2$ olacaktır.

Dolayısıyla, $|1-3x| = |1-3 \cdot 2| = |-5| = 5$ tir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 16:

x gerçel sayıdır.

$$A = |x-2| + |x-5|$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Çözüm:

A sayısının en küçük olması,

$|x-2|=0$ veya $|x-5|=0$ olması durumunda mümkündür.

$|x-2|=0$ ise $x=2$ ve $|x-5|=0$ ise $x=5$ tir.

$$x=2 \text{ için } A = |2-2| + |2-5| = 3$$

$$x=5 \text{ için } A = |5-2| + |5-5| = 3$$

olduğundan A'nın alabileceği en küçük değer 3 tür.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

- 5) x ve y gerçel sayıları için,

$$|x| = |-x|$$

$$|x-y| = |y-x|$$

yazılabilir.

Örnek 17:

$$2 \cdot |x| + |-x| = 6$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 12 B) 4 C) 2 D) -2 E) -4

Çözüm:

$$|-x| = |x| \text{ yazılabileceğinden,}$$

$$2 \cdot |x| + |-x| = 6 \Rightarrow 2 \cdot |x| + |x| = 6$$

$$3 \cdot |x| = 6$$

$$|x| = 2 \text{ olur.}$$

$|x|=2$ ise $x=2$ veya $x=-2$ dir.

O halde sonuç, $2 \cdot (-2) = -4$ tür.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

Örnek 18:

$$|a-2| + |2-a| = 10$$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$|2-a| = |a-2| \text{ yazılabileceğinden,}$$

$$|a-2| + |2-a| = 10 \Rightarrow |a-2| + |a-2| = 10$$

$$2 \cdot |a-2| = 10$$

$$|a-2| = 5 \text{ olur.}$$

$$|a-2| = 5 \text{ ise } a-2=5 \text{ veya } a-2=-5$$

$$a=7 \quad a=-3 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla a değerlerinin toplamı $7+(-3)=4$ tür.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

6) x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \text{ yazılabilir.}$$

Örnek 19:

m tam sayı olmak üzere,

$$|m-1| \cdot |m+1| = 8$$

olduğuna göre, m nin pozitif değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$|m-1| \cdot |m+1| = 8 \Rightarrow |(m-1) \cdot (m+1)| = 8$$

$$|m^2-1| = 8 \text{ olur.}$$

$$|m^2-1| = 8 \text{ ise } m^2-1=8 \text{ veya } m^2-1=-8$$

$$m^2=9$$

$$m^2=-7$$

$$m=\pm 3$$

$$\emptyset$$

O halde, m nin pozitif tam sayı değeri 3 tür.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 20:

a gerçel sayıdır.

$$\frac{|a+3|}{|a-3|} = 2$$

eşitliğini sağlayan a sayılarının çarpımı kaçtır?

- A) 18 B) 15 C) 12 D) 10 E) 9

Çözüm:

$$\frac{|a+3|}{|a-3|} = 2 \Rightarrow \left| \frac{a+3}{a-3} \right| = 2 \text{ yazılabilir.}$$

$$\text{Buradan, } \frac{a+3}{a-3} = 2 \text{ veya } \frac{a+3}{a-3} = -2$$

$$2a-6=a+3$$

$$-2a+6=a+3$$

$$a=9$$

$$-3a=-3$$

$$a=1$$

bulunur. a değerlerinin çarpımı ise $9 \cdot 1 = 9$ dur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

7) $|x|=x$ ise $x \geq 0$

$|x|=-x$ ise $x \leq 0$ dır.

Örnek 21:

$$|a-2|=a-2$$

$$|a-6|=6-a$$

eşitliklerini sağlayan a tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

Çözüm:

$$|a-2|=a-2 \Rightarrow a-2 \geq 0$$

$$a \geq 2 \dots (1)$$

$$|a-6|=6-a \Rightarrow a-6 \leq 0$$

$$a \leq 6 \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) den $2 \leq a \leq 6$ eşitsizliği elde edilir. a nın alabileceği değerler 2, 3, 4, 5 ve 6 dir. Toplamı ise 20 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer

8) n tam sayı ve x gerçekte sayı olmak üzere,

$$|x^n| = |x|^n \text{ dir.}$$

9) $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

a) $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$

b) $|x| \geq a$ ise $x \geq a$ veya $x \leq -a$

c) $a \leq |x| \leq b$ ise $a \leq x \leq b$ veya $a \leq -x \leq b$ dir.

♦ $|x| \leq 4$ ise $-4 \leq x \leq 4$

$|x| < 6$ ise $-6 < x < 6$

♦ $|x| \geq 2$ ise $x \geq 2$ veya $x \leq -2$

$|x| > 5$ ise $x > 5$ veya $x < -5$

♦ $1 \leq |x| \leq 4$ ise $1 \leq x \leq 4$ veya $1 \leq -x \leq 4$ gibi.

Örnek 22:

$$|x| \leq 3$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayı değeri vardır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm:

$$|x| \leq 3 \text{ ise } -3 \leq x \leq 3 \text{ olur.}$$

x in alabileceği tam sayı değerleri $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ve 3 olmak üzere 7 tanedir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 23:

$$|x-2| < 4$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, 6)$ B) $(-6, 2)$ C) $(0, 6)$ D) $(-2, 2)$ E) $(-4, 2)$

Çözüm:

$$|x-2| < 4 \text{ ise } -4 < x-2 < 4$$

$$-2 < x < 6 \text{ elde edilir.}$$

O halde, eşitsizliğin en geniş çözüm kümesi $(-2, 6)$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 24:

x ve y gerçekte sayılardır.

$$|2x| < 8$$

$$|3y| < 6$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$$|2x| < 8 \text{ ise } -8 < 2x < 8$$

$$-4 < x < 4 \dots (1)$$

$$|3y| < 6 \text{ ise } -6 < 3y < 6$$

$$-2 < y < 2 \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) numaralı ifadeler alt alta toplanırsa

$$-4 < x < 4$$

$$+ \quad -2 < y < 2$$

$$-6 < x+y < 6$$

olacağından $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri 5 tir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 25:

$$\left| \frac{x}{2} - 1 \right| < 2$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayı değeri vardır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm:

$$\left| \frac{x}{2} - 1 \right| < 2 \text{ ise } -2 < \frac{x}{2} - 1 < 2$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 3$$

$$-2 < x < 6 \text{ olur.}$$

x in alabileceği tam sayı değerleri $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ ve 5 olmak üzere 7 tanedir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER

♦ $|x| < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

♦ $|x| \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \{0\}$ dir.

♦ $|x| \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ dir.

♦ $|x| \leq |y|$ şeklindeki eşitsizlikler $x^2 \leq y^2$ şeklinde işlem yapılarak çözülebilir.

Örnek:

$$|x+2| \leq |x-4| \text{ eşitsizliği}$$

$$(x+2)^2 \leq (x-4)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 8x + 16$$

$$12x \leq 12$$

$$x \leq 1$$

şeklinde çözülebilir.

Örnek 26:

$$|x+2| \geq 4$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-6, 2]$

B) $[-2, 4]$

C) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$

D) $[4, \infty)$

E) $(-\infty, -6] \cup [2, \infty)$

Çözüm:

$$|x+2| \geq 4 \text{ ise } x+2 \geq 4 \text{ veya } x+2 \leq -4$$

$$x \geq 2$$

$$x \leq -6 \text{ elde edilir.}$$

Eşitsizliğin en geniş çözüm kümesi $(-\infty, -6] \cup [2, \infty)$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 27:

$$2 < |x-1| < 5$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Çözüm:

$$2 < |x-1| < 5 \text{ ise}$$

$$2 < x-1 < 5 \text{ veya } 2 < -x+1 < 5$$

$$3 < x < 6$$

$$1 < -x < 4$$

$$-4 < x < -1 \text{ olur.}$$

x in alabileceği değerler 4, 5, -2 ve -3 tür. Toplamları ise 4 olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

10) x ve y gerçekte sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ dir.}$$

11) x sayısının bir a gerçekte sayısına olan uzaklığı $|x-a|$ ile ifade edilir.

♦ x sayısının 3 e olan uzaklığı: $|x-3|$

♦ x sayısının -1 e olan uzaklığı: $|x+1|$

ile ifade edilir.

1. $|-6| + |-2| + |3|$
işleminin sonucu kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

2. $|+2 - |-10|| : |-2|$
işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. $x > 0$ olduğuna göre,

$$|2x| + |-x| + |3x|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x$ B) $5x$ C) $4x$ D) $3x$ E) $2x$

4. $m < 0 < n$ olduğuna göre,

$$|m| + |n| - |n+2|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-m-2$ B) $m-2$ C) $2n+m-2$
D) $m-2n+2$ E) $m+2$

5. $0 < x < 3$ olduğuna göre,

$$|x-3| + |x+1|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) $2x-2$ C) $-2x+2$
D) $-2x-4$ E) 4

6. $|x+3| = 7$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 0 B) -2 C) -4 D) -6 E) -8

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer Test : 06

7. $|a-1|=4$
 $|b+1|=2$
 olduğuna göre, a.b çarpımının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) -15 B) -12 C) -9 D) -6 E) -3

8. $|\sqrt{5}-2|+|3-\sqrt{5}|$
 işleminin sonucu kaçtır?

A) $5-2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}-5$ C) $1-2\sqrt{5}$
 D) 5 E) 1

9. $x>0$ olduğuna göre,

$$\frac{|-2x|}{x} + \frac{3x}{|x|}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 3 C) 1 D) -1 E) -5



10. $|3x|=|x+12|$
 denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 3, 6\}$ B) $\{-2, 2, 6\}$ C) $\{-3, 6\}$
 D) $\{-2, 4\}$ E) $\{-3, 4\}$

www.bireyakademi.com

11. $|a-4|+|b-6|=0$
 olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 28 E) 32



12. $|2x|-|x|=4$
 eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) -24 B) -16 C) -12 D) -8 E) -4

www.bireyakademi.com

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer Test : 07

1. $a \cdot b < 0$ ve $a < b$ olduğuna göre,

$$|a| - |b| + |b - a|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2a - 2b$ B) $-2b$ C) $-2a$
D) $2b - 2a$ E) $2a + 2b$

2. $|4 - x|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer için $|3 - 3x|$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 3

3. $\frac{|x+6|}{|x|} = 2$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -4

4. $|3x| + |-2x| = 20$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) -36 B) -25 C) -20 D) -16 E) -9



5. $|a - 1| = a - 1$

$$|a - 5| = 5 - a$$

eşitliklerini sağlayan a tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

www.bireyakademi.com

6. $|2a+2| + |a+1| = 9$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) -9 B) -8 C) -6 D) -5 E) -4

DENEKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değer Test : 07

7. $|x+2|+3=1$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{-2, -1\}$ B) $\{2, 4\}$ C) $\{-2, 0\}$
D) $\{0, -4\}$ E) $\emptyset$

8. $|m| \leq 5$
eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(0, 5)$ B) $[-5, 0]$ C) $[0, 5]$
D) $[-5, 5]$ E) $(-5, 5)$

9. $|2x-1| < 5$
eşitsizliğin $\mathbb{N}$ deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $[0, 3)$ B) $\{0, 1, 2, 3\}$ C) $\{0, 1, 2\}$
D) $(-2, 3)$ E) $\{0, 1\}$



10. $||x|+2| \leq 4$
eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?
- A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

www.bireyakademi.com

11.
$$\frac{6}{|x-1|+|x+1|}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

www.bireyakademi.com

12. $2 < |x-4| < 4$
eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayı değeri vardır?
- A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

BİRİNCİ DERECEDEKİ İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

- ♦ a, b, c gerçekte sayılar ve $a \neq 0, b \neq 0$ olmak üzere, $ax+by+c=0$ şeklindeki denklemlere "*birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem*" denir. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler analitik düzlemde bir doğru belirtir.
- ♦ $2x+y-4=0$ denklemi birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemdir. x ve y denklemin bilinmeyenleridir. Denklemi sağlayan x ve y sıralı ikilileri (x, y) şeklinde gösterilir. $(0, 4), (2, 0), (1, 2), (-1, 6)$ gibi sıralı ikililer bu denklemi sağlar. Bu şekilde denklemi sağlayan tüm (x, y) sıralı ikilileri koordinat düzleminde $2x+y-4=0$ doğrusunu oluştururlar.

Örnek 1:

$ax+(a+2)y+6=0$ denklemi veriliyor.

$(3, -2)$ sıralı ikilisi bu denklemin çözüm kümesinin bir elemanı olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$(3, -2)$ sıralı ikilisi denklemin çözüm kümesinin bir elemanı olduğuna göre, $x=3$ ve $y=-2$ değerleri denklemi sağlayacaktır.

$ax+(a+2)y+6=0$ eşitliğinde $x=3$ ve $y=-2$ yazılırsa;

$$a.3+(a+2).(-2)+6=0$$

$$3a-2a-4+6=0$$

$$a+2=0$$

$$a=-2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2:

$$3x+y-6=0$$

denklemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzlemi üzerinde gösterelim.

Çözüm:

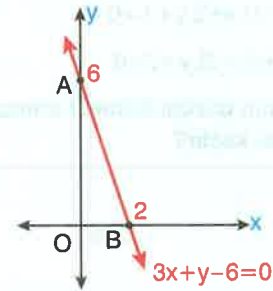
$3x+y-6=0$ denklemi koordinat düzleminde bir doğru belirtir. Şimdi bu doğruyu çizelim.

$$x=0 \text{ için } 3.0+y-6=0 \quad y=0 \text{ için } 3x+0-6=0$$

$$y=6$$

$$x=2 \text{ olur.}$$

O halde, doğru $A(0, 6)$ ve $B(2, 0)$ noktalarından geçer. Dolyısıyla grafik



şeklinde dir.

- ♦ Doğru üzerinde alınan herhangi bir $P(x, y)$ noktası $3x+y-6=0$ denklemini sağlar.

! Dikkat

$$ax+by+c=0$$

$$dx+ey+f=0$$

şeklindeki iki denkleme "*birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi*" denir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

$$ax+by+c=0$$

$$dx+ey+f=0$$

denklem sistemindeki doğru grafikleri,

1) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise doğrular çakışiktır. Sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

♦ $3x+4y-5=0$ ile $6x+8y-10=0$

doğruları çakışiktır. Sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

2) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise doğrular paraleldir. Sistemin çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

♦ $2x+5y-4=0$ ile $4x+10y-7=0$

doğruları paraleldir. Sistemin çözüm kümesi boş kümedir.

3) $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise doğrular tek bir noktada kesişir. Sistemin çözüm kümesi bir elemanlıdır. $\mathcal{C}=\{(x, y)\}$ şeklindedir.

♦ $4x+7y-15=0$ ile $3x-2y-4=0$

doğruları tek noktada kesişir. Sistemin çözüm kümesi bir elemanlıdır. $\mathcal{C}=\{(2, 1)\}$ dir.

Örnek 3:

$$(a+1).x+2.y+1=0$$

$$6.x+(b-2).y+2=0$$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre, $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 8

B) 7

C) 6

D) 5

E) 4

Örnek 4:

$$mx+9y=3$$

$$4x+my=2$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, m kaçtır?

A) 12

B) 6

C) 4

D) -4

E) -6

Çözüm:

Sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre,

$$\frac{a+1}{6} = \frac{2}{b-2} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\frac{a+1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2=6 \Rightarrow a=2$$

$$\frac{2}{b-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b-2=4 \Rightarrow b=6 \text{ bulunur.}$$

O halde, $a+b=2+6=8$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Çözüm:

Sistemin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre,

$$\frac{m}{4} = \frac{9}{m} \neq \frac{3}{2} \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{9}{m} \Rightarrow m^2=36 \Rightarrow m=6 \text{ veya } m=-6 \text{ olur.}$$

$$\frac{9}{m} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow 3m \neq 18 \Rightarrow m \neq 6 \text{ olur.}$$

O halde, m değeri -6 dir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Örnek 5:

a ve b gerçel sayılardır.

$$2x+y-a=0$$

$$x-y+2b=0$$

denklem sisteminin çözüm kümesi $\mathcal{C}=\{(1, 5)\}$ olduğuna göre, a+b toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm:

Denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(1, 5)\}$ olduğuna göre, $x=1$ ve $y=5$ değerleri denklemlerde yerine yazılırsa,

$$2x+y-a=0 \Rightarrow 2.1+5-a=0$$

$$7-a=0$$

$$a=7$$

$$x-y+2b=0 \Rightarrow 1-5+2b=0$$

$$2b=4$$

$$b=2 \text{ olur.}$$

O halde, $a+b=7+2=9$ dur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 6:

$$4x+8y+3=0$$

$$mx+ny+9=0$$

denklem sisteminin çözüm kümesi bir elemanlı olduğuna göre, m ile n arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

- A) $2m=n$ B) $m+n=0$ C) $m \neq n$ D) $n \neq 2m$ E) $m \neq 2n$

Çözüm:

Sistemin çözüm kümesi bir elemanlı olduğuna göre,

$$\frac{4}{m} \neq \frac{8}{n} \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{4}{m} \neq \frac{8}{n} \Rightarrow 4n \neq 8m$$

$$n \neq 2m \text{ olur.}$$

O halde, m ile n arasında $n \neq 2m$ bağıntısı vardır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesini Bulma

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesinin bulunması için bazı yöntemler vardır.

Bu yöntemlerden "*yok etme yöntemi*" ve "*yerine koyma yöntemi*" öğreneceğiz.

1) Yok Etme Yöntemi: Denklem sistemindeki iki denklemin bilinmeyenlerinden bir tanesi katsayıları zıt işaretli olacak şekilde eşitlenir ve denklemler taraf tarafa toplanır. Bu şekilde bilinmeyenlerden bir tanesi yok edilerek diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek 7:

$$2x+y=4$$

$$x-y=2$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile bulalım ve koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm:

Denklem sisteminde verilen denklemlerde y bilinmeyeninin katsayıları zıt işaretli olarak eşit olarak verildiğinden denklemlerin taraf tarafa toplanması yeterlidir.

$$2x+y=4$$

$$+ \quad x-y=2 \quad +$$

$$3x=6$$

$$x=2 \text{ dir.}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Denklemlerin birinde x yerine 2 yazarak y değerini bulalım.

$$2x+y=4 \Rightarrow 2 \cdot 2+y=4$$

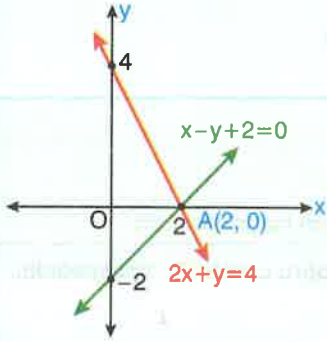
$$y=0 \text{ olur.}$$

O halde, denklem sisteminin çözüm kümesi $\mathcal{C}=\{(2, 0)\}$ olacaktır.

Şimdi de doğruları koordinat sisteminde gösterelim.

- $2x+y=4$ denkleminde, $x=0$ için $y=4$
 $y=0$ için $x=2$
- $x-y=2$ denkleminde, $x=0$ için $y=-2$
 $y=0$ için $x=2$ olur.

Doğru grafiklerini çizelim.



Görüldüğü gibi, denklem sisteminin çözüm kümesi doğruların kesim noktası olan $A(2, 0)$ noktasına karşılık gelmektedir.

Örnek 8:

$$x+2y=8$$

$$2x-y=6$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bularak koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm:

Denklem sistemindeki ikinci denklem 2 ile genişletilirse,

$$\begin{array}{r} x+2y=8 \\ 2/2x-y=6 \\ \hline x+2y=8 \\ 4x-2y=12 \\ \hline + \quad + \\ 5x=20 \\ x=4 \text{ tür.} \end{array} \quad \text{Taraf tarafa toplayalım.}$$

$x=4$ değerini ilk denklemde yazarsak,

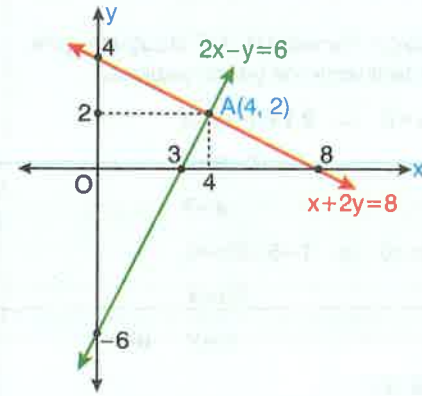
$$x+2y=8 \Rightarrow 4+2y=8 \Rightarrow y=2 \text{ olur.}$$

O halde, denklem sisteminin çözüm kümesi $\mathcal{C}=\{(4, 2)\}$ dir.

Koordinat düzleminde gösterelim.

- $x+2y=8$ denkleminde, $x=0$ için $y=4$
 $y=0$ için $x=8$
- $2x-y=6$ denkleminde, $x=0$ için $y=-6$
 $y=0$ için $x=3$ olur.

Doğru grafiklerini çizelim.



Görüldüğü gibi, denklem sisteminin çözüm kümesini sağlayan $(4, 2)$ ikilisi doğruların kesim noktasıdır.

Örnek 9:

$$3x+2y=6$$

$$6x+4y=-12$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım ve analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

Birinci denklemi -2 ile genişletelim.

$$\begin{array}{r} -2/3x+2y=6 \\ 6x+4y=-12 \\ \hline -6x-4y=-12 \\ 6x+4y=-12 \\ \hline + \quad + \\ 0=-24 \end{array} \quad \text{Taraf tarafa toplayalım.}$$

olduğundan denklem sisteminin çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

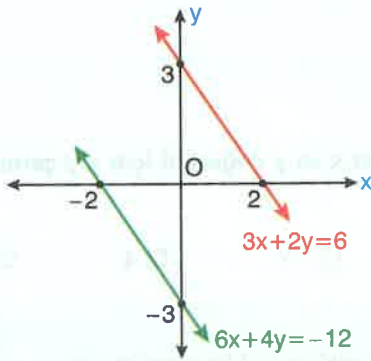
DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Doğru grafiklerini analitik düzlemde gösterelim.

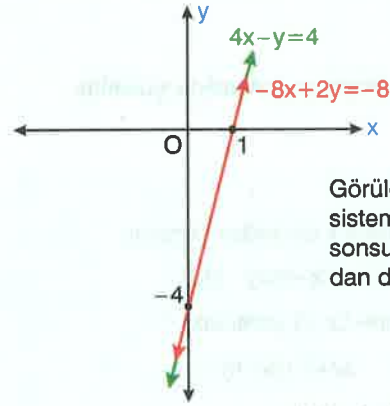
- $3x+2y=6$ denkleminde, $x=0$ için $y=3$
 $y=0$ için $x=2$ olur.
- $6x+4y=-12$ denkleminde, $x=0$ için $y=-3$
 $y=0$ için $x=-2$ olur.

Doğru grafiklerini çizelim.



Görüldüğü gibi, denklem sisteminin çözüm kümesi $\emptyset$ olduğundan doğruların kesim noktası yoktur. Yani doğrular birbirine paraleldir.

Doğru grafiklerini çizelim.



Görüldüğü gibi, denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğundan doğrular çakışıktır.

- 2) **Yerine Koyma Yöntemi:** Denklem sistemindeki denklemlerden birinde bilinmeyenlerden bir tanesi diğeri cinsinden yazılarak diğere denklemde yerine yazılır. Bu şekilde bilinmeyenlerden biri bulunarak işlem yapılır.

Örnek 10:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 4 \\ -8x + 2y &= -8 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım ve analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

Denklem	$2/4x - y = 4$	
sisteminde	$-8x + 2y = -8$	
birinci denklemini	$8x - 2y = 8$	Taraf tarafa.
2 ile genişletelim.	$-8x + 2y = -8$	toplayalım.
	$\begin{array}{r} 8x - 2y = 8 \\ + -8x + 2y = -8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$	

olduğundan denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Doğru grafiklerini analitik düzlemde gösterelim.

- $4x - y = 4$ denkleminde, $x=0$ için $y=-4$
 $y=0$ için $x=1$ olur.
- $-8x + 2y = -8$ denkleminde, $x=0$ için $y=-4$
 $y=0$ için $x=1$ olur.

Örnek 11:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

denklem sistemini yerine koyma yöntemiyle çözelim.

Çözüm:

Birinci denklemde x ifadesini y cinsinden yazalım.

$$x - 3y = 5 \Rightarrow x = 3y + 5 \text{ olur.}$$

İkinci denklemde x yerine $3y + 5$ yazarsak,

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 & 3.(3y + 5) + 2y &= 4 \\ 9y + 15 + 2y &= 4 & 11y + 15 &= 4 \\ 11y &= -11 & y &= -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$y = -1$ değeri elde ettiğimiz $x = 3y + 5$ denkleminin yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 & x - 3(-1) &= 5 \\ x + 3 &= 5 & x &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

O halde, denklem sisteminin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{(2, -1)\}$ dir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek 12:

$$3x+4y=-2$$

$$2x-y=6$$

denklemler sisteminin yerine koyma yöntemiyle çözümü.

Çözüm:

İkinci denklemden y ifadesini x cinsinden yazalım.

$$2x-y=6 \Rightarrow 2x-6=y \text{ olur.}$$

Birinci denklemden y yerine $2x-6$ yazarsak,

$$3x+4y=-2 \quad 3x+4(2x-6)=-2$$

$$3x+8x-24=-2$$

$$11x=22$$

$$x=2 \text{ dir.}$$

$x=2$ değeri $y=2x-6$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$y=2x-6 \Rightarrow y=2 \cdot 2-6$$

$$y=-2 \text{ bulunur.}$$

O halde, denklemler sisteminin çözüm kümesi $\mathcal{C}=\{(2, -2)\}$ olur.

Örnek 13:

$$2x=3y$$

$$x+y=10$$

denklemler sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{(3, 2)\}$ B) $\{(2, 3)\}$ C) $\{(6, 4)\}$ D) $\{(4, 6)\}$ E) $\{(2, 8)\}$

Çözüm:

İkinci denklemden y ifadesini x cinsinden yazalım.

$$x+y=10 \Rightarrow y=10-x \text{ olur.}$$

$y=10-x$ değeri birinci denklemden yerine yazılırsa,

$$2x=3y \Rightarrow 2x=3(10-x)$$

$$2x=30-3x$$

$$5x=30$$

$$x=6 \text{ olur.}$$

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Birinci denklemden x yerine 6 yazılırsa,

$$2x=3y \Rightarrow 2 \cdot 6=3y \Rightarrow y=4 \text{ olur.}$$

O halde, $\mathcal{C}=\{(6, 4)\}$ tür.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 14:

$$3x+4y=8$$

$$4x+3y=13$$

denklemler sisteminin sağlayan x ve y değerleri için x.y çarpımı kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) -2 D) 4 E) 6

Çözüm:

Birinci denklemi 4, ikinci denklemi -3 ile genişletelim.

$$4 \cdot 3x+4y=8$$

$$-3 \cdot 4x+3y=13$$

$$12x+16y=32$$

$$-12x-9y=-39$$

$$7y=-7$$

$$y=-1 \text{ olur.}$$

$$y=-1 \text{ ise } 3x+4y=8 \Rightarrow 3x+4(-1)=8$$

$$3x-4=8$$

$$3x=12$$

$$x=4 \text{ tür.}$$

$$x=4 \text{ ve } y=-1 \text{ olduğundan } x \cdot y=4 \cdot (-1)=-4 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 15:

$$x+\frac{y}{2}=6$$

$$\frac{x}{4}-y=-3$$

denklemler sisteminin sağlayan x ve y değerleri için x.y çarpımı kaçtır?

- A) 16 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Çözüm:

Birinci denklemi 2 ile genişletelim.

$$2 \cdot x + \frac{y}{2} = 6$$

$$\frac{x}{4} - y = -3$$

$$2x + \frac{y}{2} = 12$$

$$\frac{x}{4} - y = -3$$

$$2x + \frac{x}{4} = 9$$

$$\frac{9x}{4} = 9$$

$$x = 4 \text{ olur.}$$

$$x = 4 \text{ ise}$$

$$x + \frac{y}{2} = 6$$

$$4 + \frac{y}{2} = 6$$

$$\frac{y}{2} = 2$$

$$y = 4 \text{ olur.}$$

O halde, $x \cdot y = 4 \cdot 4 = 16$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 16:

x ve y gerçekte sayılardır.

$$(x+y-7)^2 + (x-y+1)^2 = 0$$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

A) 24

B) 18

C) 16

D) 15

E) 12

Çözüm:

$$(x+y-7)^2 + (x-y+1)^2 = 0 \text{ olabilmesi için,}$$

$$x+y-7=0 \text{ ve } x-y+1=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$x+y-7=0 \Rightarrow x+y=7$$

$$x-y+1=0 \Rightarrow x-y=-1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$x=3 \text{ için}$$

$$x+y=7 \Rightarrow 3+y=7$$

$$y=4 \text{ tür.}$$

O halde, $x \cdot y = 3 \cdot 4 = 12$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER



Denklemlerle ilgili ilk önemli adımı Babiller atmıştır. Bu konudaki en eski yazılı belge MÖ 1700 lü yıllarda yaşadığı düşünülen Mısırlı Ahnes'in çalışmalarının yer aldığı Rhind Papirüsü'dür. Bu papirüste birinci dereceden denklemlerin çözümü ile ilgili çalışmalar bulunmaktadır.



Matematığe en büyük katkısı sağlayanlardan biri de Harezmi'dir. Hesabül Cebir vel Mukabele adlı kitabı ile I. ve II. dereceden denklemlerin çözüm sistemlerini gösteren Harezmi "Cebirin babası" ünvanıyla anılmıştır. Harezmi'nin en büyük buluşlarından biri de "sıfır" sayısidir. Bu sayede matematiksel işlemler daha kolay şekilde yapılabilmiş ve diğer çalışmalara katkı sağlamıştır.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

- Eşitsizliklerin çözümünde eşitsizliği oluşturan ifade denklem gibi düşünülerek doğru grafiği çizilir. Koordinat düzlemindeki bir doğru düzlemi iki bölgeye ayrılır ve bu iki bölgeden yalnızca biri eşitsizliği sağlar.
- Bölgelerden birinde rastgele bir nokta belirlenir ve eşitsizlikte yerine yazılır. Sonuç doğru ise noktanın seçildiği bölge, yanlış ise diğer bölge taranarak çözüm kümesine ulaşılır.
- Eşitsizlik sisteminde; "<" veya ">" sembollerinden biri kullanılmışsa doğrular çözüm kümesine dahil olmayacaklarından kesikli çizgi ile, "<=" veya ">=" sembollerinden biri kullanılmışsa doğrular çözüm kümesine dahil olacağından düz çizgi ile gösterilir.

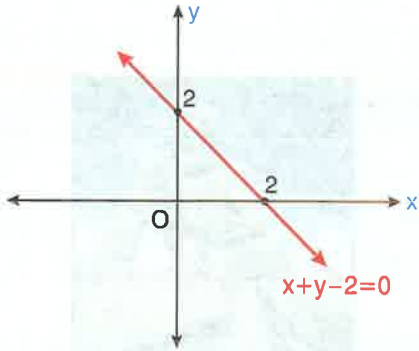
Örnek 17:

Aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini analitik düzlemde gösterelim.

- a) $x+y-2 \leq 0$
b) $2x-y+6 < 0$

Çözüm:

- a) Önce $x+y-2=0$ doğrusunun grafiğini çizelim.



$x=0$ için $y=2$
 $y=0$ için $x=2$
olacağından grafik yandaki gibidir.

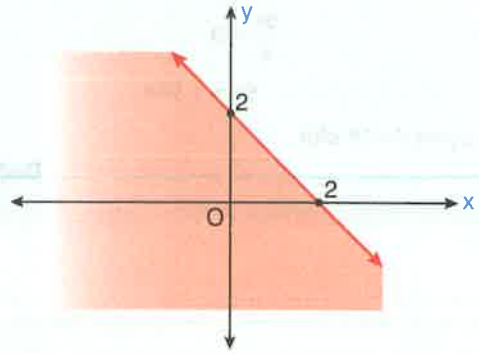
Çizdiğimiz doğru, düzlemi iki bölgeye ayırdı. Şimdi doğru üzerinde olmayan bir nokta seçelim. Bu nokta $O(0, 0)$ noktası olsun. $O(0, 0)$ noktası $x+y-2 \leq 0$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için } 0+0-2 \leq 0$$

$$-2 \leq 0 \text{ (doğru)}$$

elde ederiz. Elde edilen $-2 \leq 0$ eşitsizliği doğru olduğundan çizdiğimiz doğrunun ayırdığı bölgelerden $O(0, 0)$ noktasının olduğu bölgeyi tararız.

O halde, $x+y-2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi



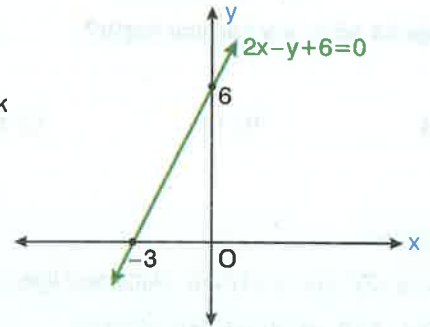
şeklinde olur. "<=" sembolü kullanıldığından doğru düz çizgi ile gösterilir.

- b) Önce $2x-y+6=0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$$x=0 \text{ için } y=6$$

$$y=0 \text{ için } x=-3$$

olacağından grafik yandaki gibidir.



Şimdi, $O(0, 0)$ noktasını $2x-y+6 < 0$ eşitsizliğinde yerine yazalım.

$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için } 2 \cdot 0 - 0 + 6 < 0$$

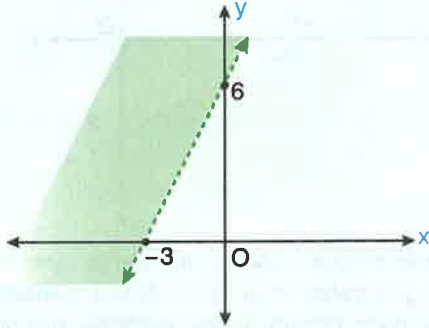
$$6 < 0 \text{ (yanlış)}$$

elde ederiz. Elde edilen $6 < 0$ eşitsizliği yanlış olduğundan doğrunun ayırdığı bölgelerden $O(0, 0)$ noktasının olmadığı diğer bölgeyi tararız.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

O halde, $2x - y + 6 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi



şeklinde olur. Eşitsizlikte "<" sembolü kullanıldığından doğru kesikli çizgi ile gösterilir.

! Dikkat

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi bulunurken, sistemi oluşturan eşitsizlikler ayrı ayrı çözümlenerek ortak taraflı bölge belirlenir.

Bu bölge eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesidir**.

Örnek 18:

$$x + y - 3 \leq 0$$

$$x - y + 3 < 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

- Önce $x + y - 3 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x + y - 3 = 0$ denkleminde,

$$x = 0 \text{ için } y = 3$$

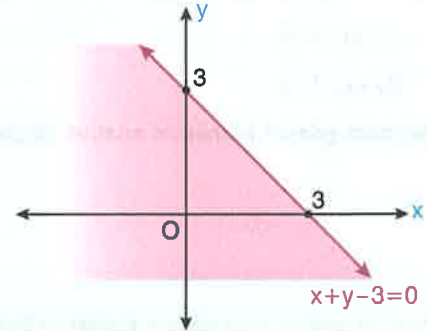
$$y = 0 \text{ için } x = 3 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

$$x = 0 \text{ ve } y = 0 \text{ için}$$

$$0 + 0 - 3 \leq 0$$

$$-3 \leq 0 \text{ (doğru)}$$



- Şimdi $x - y + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x - y + 3 = 0$ denkleminde,

$$x = 0 \text{ için } y = 3$$

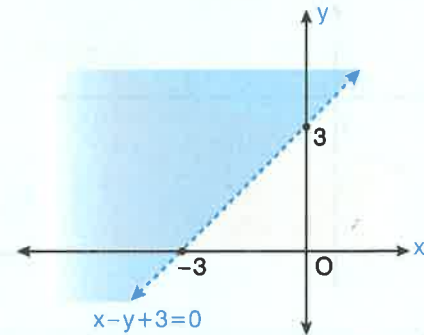
$$y = 0 \text{ için } x = -3 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

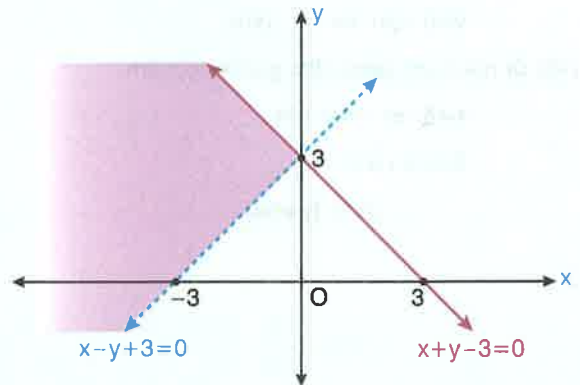
$$x = 0 \text{ ve } y = 0 \text{ için}$$

$$0 - 0 + 3 < 0$$

$$3 < 0 \text{ (yanlış)}$$



O halde, elde ettiğimiz iki eşitsizlik çözümünü birleştirerek ortak taraflı bölgeyi belirlediğimizde sistemin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Örnek 19:

$$-x+3y+3<0$$

$$2y+x+4<0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

- $-x+3y+3<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$-x+3y+3=0$ denkleminde,

$$x=0 \text{ için } y=-1$$

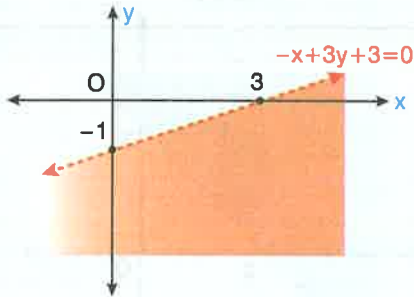
$$y=0 \text{ için } x=3 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için}$$

$$-0+3.0+3<0$$

$$3<0 \text{ (yanlış)}$$



- $2y+x+4<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$2y+x+4=0$ denkleminde,

$$x=0 \text{ için } y=-2$$

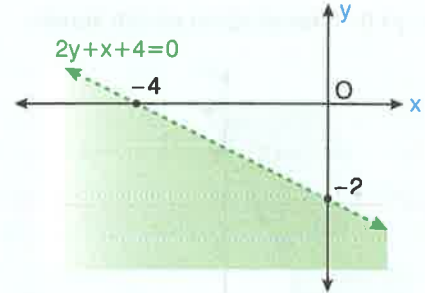
$$y=0 \text{ için } x=-4 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

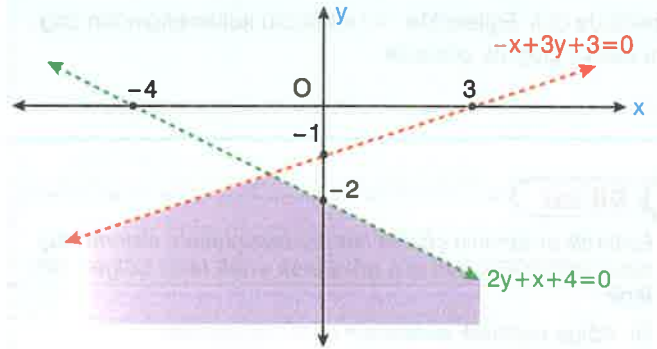
$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için}$$

$$2.0+0+4<0$$

$$4<0 \text{ (yanlış)}$$



O halde, elde ettiğimiz çözüm kümelerini aynı koordinat düzleminde göstererek ortak taralı bölgeyi belirlediğimizde eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



Örnek 20:

$$2x-3y-6\leq 0$$

$$3y-2x-12\leq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

- $2x-3y-6\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$2x-3y-6=0$ denkleminde,

$$x=0 \text{ için } y=-2$$

$$y=0 \text{ için } x=3 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

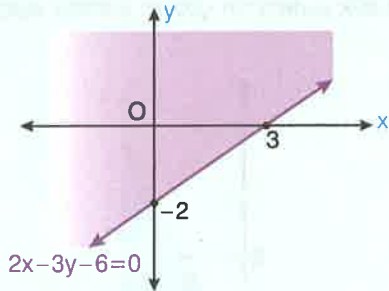
$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için}$$

$$2.0-3.0-6\leq 0$$

$$-6\leq 0 \text{ (doğru)}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler



- $3y - 2x - 12 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$3y - 2x - 12 = 0$ denkleminde,

$x=0$ için $y=4$

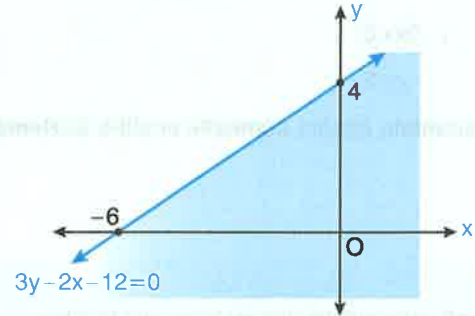
$y=0$ için $x=-6$ olur.

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

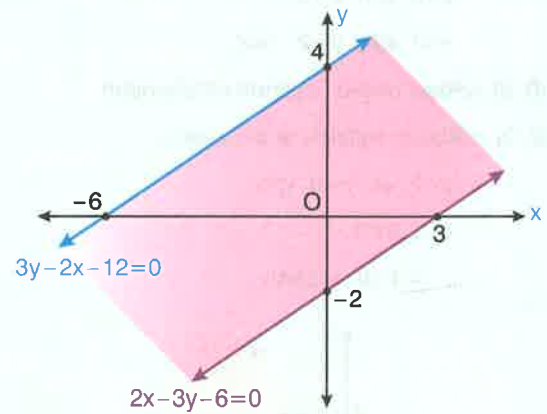
$x=0$ ve $y=0$ için

$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 12 \leq 0$

$-12 \leq 0$ (doğru)



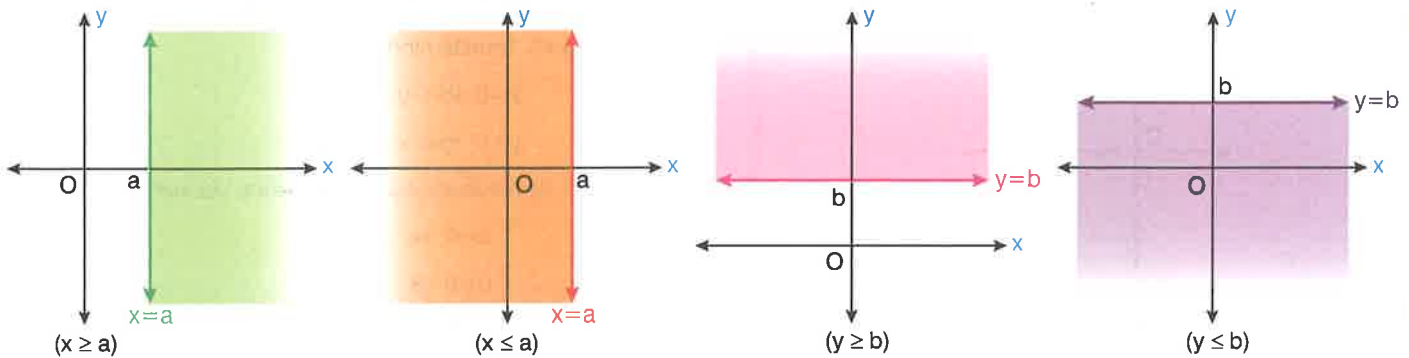
O halde, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



bryPLE bryPLE bryPLE

! Dikkat

$x \geq a$, $x \leq a$, $y \geq b$ ve $y \leq b$ gibi eşitsizlikleri önceki yıllarda görmüştük. Bu eşitsizlikleri hatırlayalım.



DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Örnek 21:

$$y - 2x < 0$$

$$x \leq 2$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

- $y - 2x < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$y - 2x = 0 \text{ denkleminde,}$$

$$x=0 \text{ için } y=0$$

$$x=1 \text{ için } y=2 \text{ olur.}$$

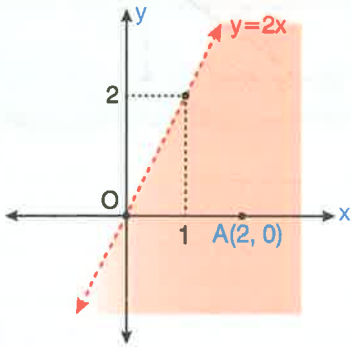
$O(0, 0)$ noktası doğru üzerinde olduğundan

$A(2, 0)$ noktasını eşitsizlikte deneyelim.

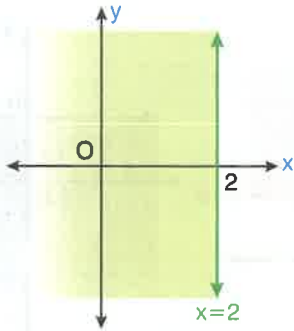
$$x=2 \text{ ve } y=0 \text{ için}$$

$$0 - 2 \cdot 2 < 0$$

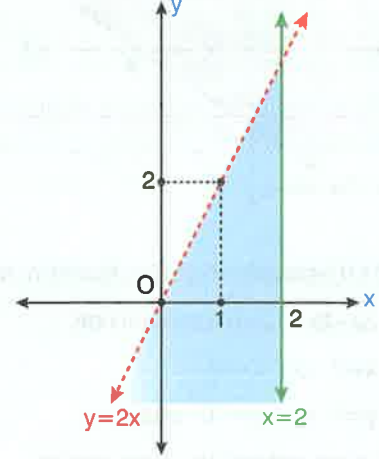
$$-4 < 0 \text{ (doğru)}$$



- $x \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdaki gibidir.



O halde, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



Örnek 22:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de

$$|x - y| < 3$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat düzleminde gösterelim.

Çözüm:

$$|x - y| < 3 \text{ ise } -3 < x - y < 3 \text{ olacaktır.}$$

O halde, bu eşitsizliği

$$x - y < 3$$

$$x - y > -3$$

eşitsizlik sistemi şeklinde ifade edelim.

- $x - y < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$x - y = 3 \text{ denkleminde}$$

$$x=0 \text{ için } y=-3$$

$$y=0 \text{ için } x=3 \text{ olur.}$$

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

$$x=0 \text{ ve } y=0 \text{ için}$$

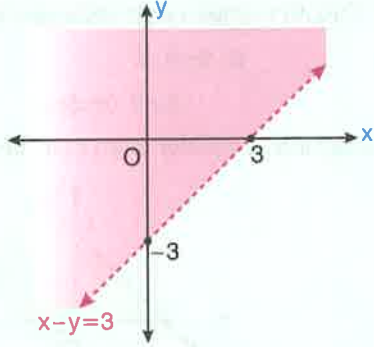
$$0 - 0 < 3$$

$$0 < 3 \text{ (doğru)}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

İLK ADIM SORULARI



- $x - y > -3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x - y = -3$ denkleminde,

$x = 0$ için $y = 3$

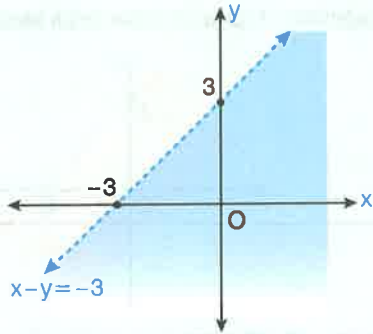
$y = 0$ için $x = -3$ olur.

$O(0, 0)$ noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

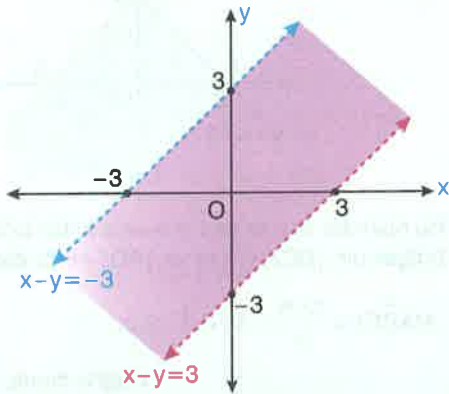
$x = 0$ ve $y = 0$ için

$0 - 0 > -3$

$0 > -3$ (doğru)



O halde, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



13. A(-2, 1)
B(0, 6)
C(3, -2)

noktalarından hangileri $2x + y - 4 \leq 0$ eşitsizliğini sağlar?

- A) A B) B C) C
D) A ve B E) A ve C

14. A(2, m) noktası $3x + y - 2 < 0$ eşitsizliğini sağladığına göre, m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) -7 B) -6 C) -5 D) -4 E) -3

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

I. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Örnek 23:

$$x - 2y - a < 0$$

$$y - 2x + a < 0$$

eşitsizlik sistemi veriliyor.

A(5, 1) noktası eşitsizlik sisteminin çözüm kümesine ait bir eleman olduğuna göre, a'nın alabileceği farklı tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

- A) 20 B) 24 C) 25 D) 28 E) 30

Çözüm:

A(5, 1) noktası her iki eşitsizliği de sağladığına göre, $x=5$ ve $y=1$ değerlerini eşitsizliklerde yerlerine yazarsak,

$$x - 2y - a < 0 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 1 - a < 0$$

$$3 - a < 0$$

$$3 < a \dots \textcircled{1}$$

$$y - 2x + a < 0 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 5 + a < 0$$

$$-9 + a < 0$$

$$a < 9 \dots \textcircled{2} \text{ olur.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $3 < a < 9$ elde edilir.

O halde, a yerine 4, 5, 6, 7 ve 8 değerleri yazılabilir.

Dolayısıyla sonuç, $4+5+6+7+8=30$ dur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 24:

$$x - y + 6 \geq 0$$

$$x + y - 6 \leq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan noktalar ile x eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 54

Çözüm:

$x - y + 6 \geq 0$ eşitsizliği için $x - y + 6 = 0$ denkleminde,

$$x=0 \text{ için } y=6$$

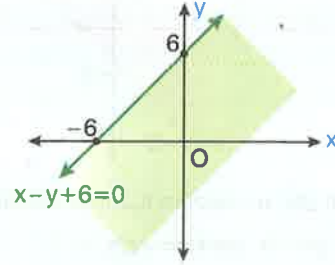
$$y=0 \text{ için } x=-6 \text{ olur.}$$

O(0, 0) noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

$$0 - 0 + 6 \geq 0$$

$$6 \geq 0 \text{ (doğru)}$$

olacağından doğrunun orijin tarafı taranır.



$x + y - 6 \leq 0$ eşitsizliği için $x + y - 6 = 0$ denkleminde,

$$x=0 \text{ için } y=6$$

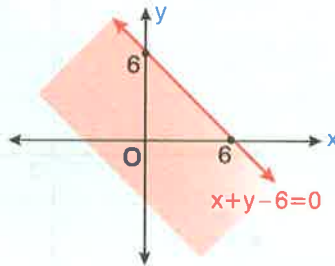
$$y=0 \text{ için } x=6 \text{ olur.}$$

O(0, 0) noktasını eşitsizlikte yerine yazalım.

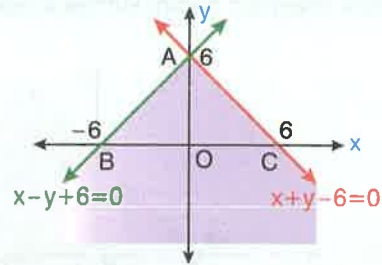
$$0 + 0 - 6 \leq 0$$

$$-6 \leq 0 \text{ (doğru)}$$

olacağından doğrunun orijin tarafı taranır.



Buradan eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki gibi olur.



Bu noktalar ile x eksenini arasında kalan bölge ABC üçgensel bölgesidir. $|BC|=12$ br ve $|AO|=6$ br olduğundan

$$A(ABC) = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

I. DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 08

1. Aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi $3x+5y=11$ denkleminin çözüm kümesinin bir elemanıdır?

A) (1, 3) B) (-2, 3) C) (0, 1) D) (2, 1) E) (-1, 4)

2. $3x+y+a+2=0$

denklemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinden biri (4, -2) olduğuna göre, a kaçtır?

A) -12 B) -6 C) -4 D) 6 E) 12

3. $ax+4y+4=0$

$$6x+by+2=0$$

denkleminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

A) 36 B) 24 C) 20 D) 18 E) 12



4.

$$3x-6y-5=0$$

$$ax+by-7=0$$

denkleminin çözüm kümesi bir elemanlı olduğuna göre, a ile b arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi olmalıdır?

A) $a+b \neq -1$

B) $a \neq -b$

C) $a \neq b$

D) $a \neq -2b$

E) $b \neq -2a$

www.bireyakademi.com

5.

$$4x+y=11$$

$$2x-y=7$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(3, -2)\}$

B) $\{(-3, 2)\}$

C) $\{(3, 1)\}$

D) $\{(3, -1)\}$

E) $\{(-3, -1)\}$

6.

$$-x+3y=5$$

$$2x+y=4$$

denkleminin sağlayan x ve y değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 6

E) 8

I. DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 08

7. $\frac{x}{2y} = 2$
 $x + y = -15$

denklemlerini sağlayan x ve y değerleri için x.y çarpımı kaçtır?

- A) 48 B) 36 C) 24 D) -24 E) -36

8. $\frac{x}{3} + y = 4$
 $x + \frac{y}{2} = 7$

denklemlerini sağlayan x ve y değerleri için x+y toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11



9. a ve b gerçel sayılardır.

$$x.(a-b-5)+y.(a+b-9)=0$$

eşitliği her x ve y gerçel sayıları için sağlandığına göre, a^2+b^2 toplamı kaçtır?

- A) 48 B) 49 C) 51 D) 53 E) 57

www.bireyakademi.com

10. $(m+2).x+4y=7$
 $m.x+6y=11$

denklemler sisteminin çözüm kümesi $\emptyset$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -12 B) -8 C) -6 D) -4 E) -2

11. m ve n birer gerçel sayıdır.

$$mx+ny=-8$$

$$nx-my=-6$$

denklemler sisteminin çözüm kümesi $\{(4, 2)\}$ olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2



12. $|x-y-3|+|x+y-11|=0$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 42 B) 36 C) 30 D) 28 E) 24

www.bireyakademi.com

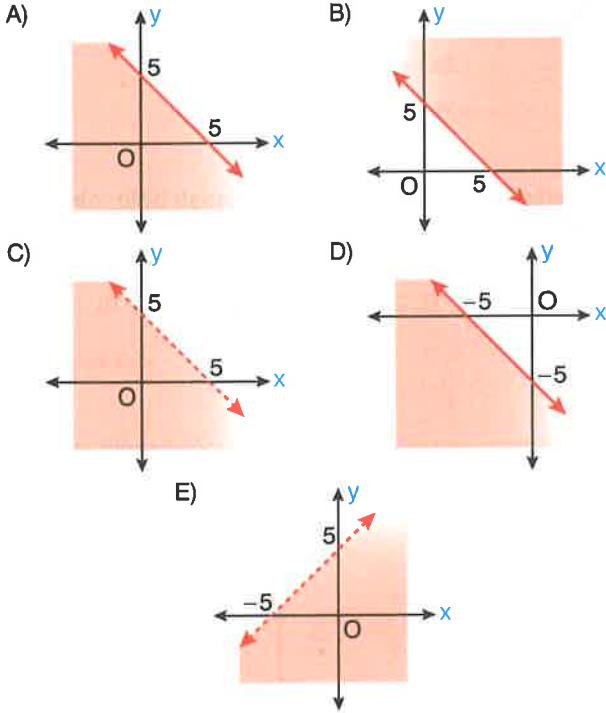
I. DERECEDEKİ İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 09

1. Aşağıda verilen noktalardan hangisi $x+y-2<0$ eşitsizliğini sağlar?

A) (1, 3) B) (2, 5) C) (-2, 6) D) (-2, 0) E) (7, -2)

2. $x+y-5\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



3. A(a, a) noktası

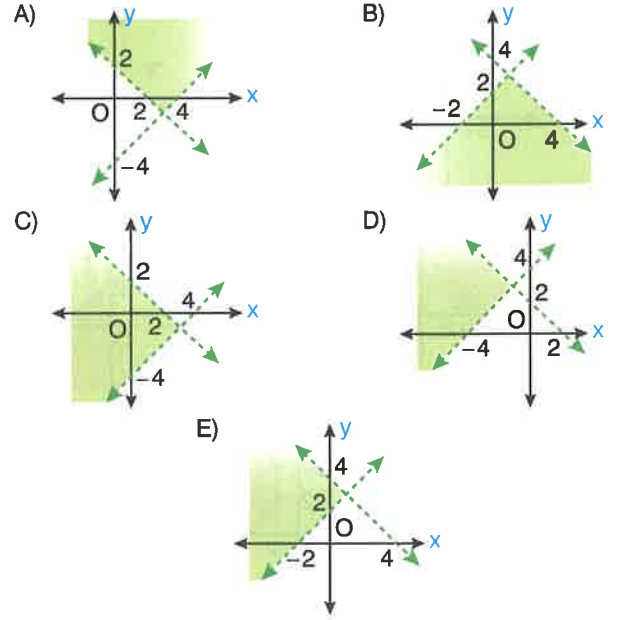
$$3x-2y-4\leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesinin bir elemanı olduğuna göre, a'nın alabileceği kaç farklı doğal sayı değeri vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

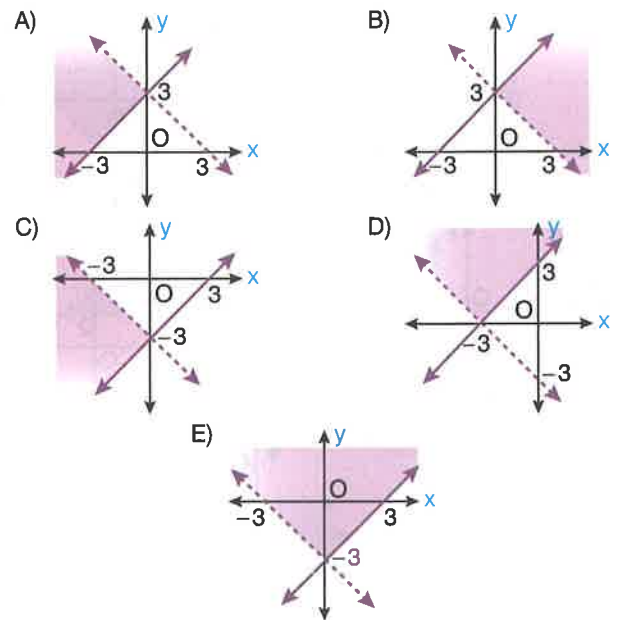
4. $x-y<4$
 $x+y<2$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



5. $y\leq x+3$
 $y>3-x$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

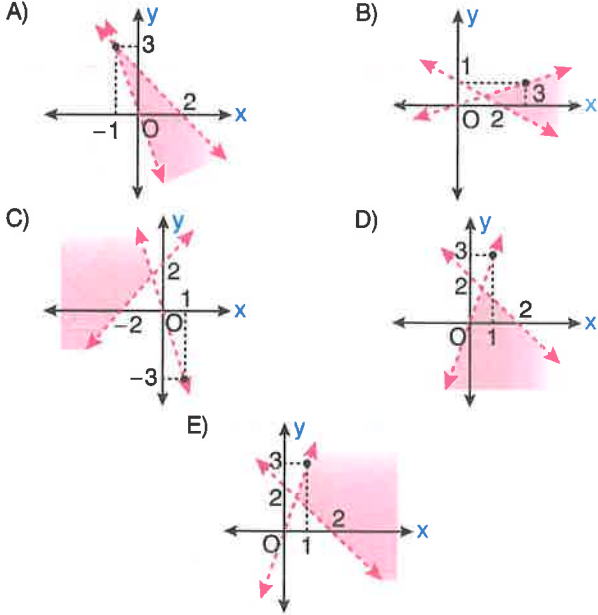


I. DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Test : 09

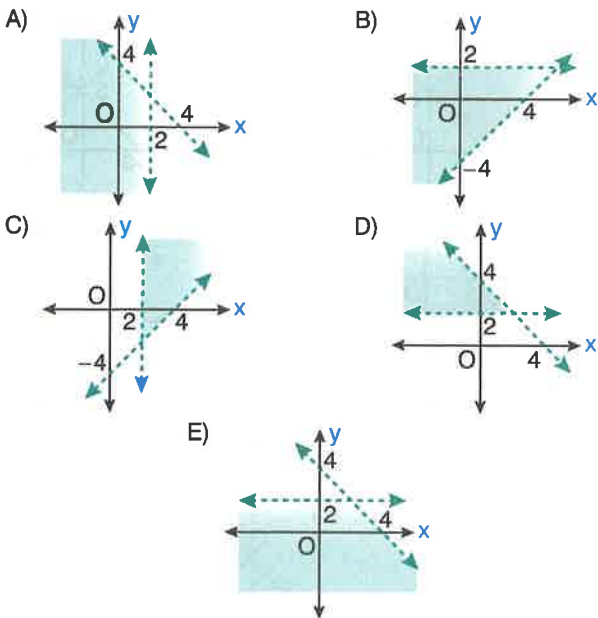
6. $y - 3x < 0$
 $x + y > 2$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



7. $y < 4 - x$
 $y > 2$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



8. A(1, 1) noktası
 $-3x + ay \leq 5$
 $ax - 2y \geq 1$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesine ait bir elemandır.

Buna göre, a'nın alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

www.bireyakademi.com



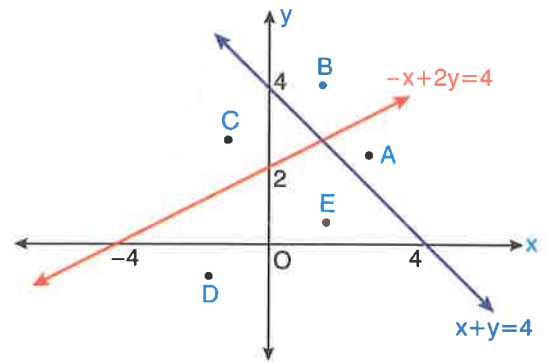
9. $2x + y \leq 6$
 $-3x + y \leq 6$
 $y \geq 0$

eşitsizlik sisteminin oluşturduğu kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 25 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

www.bireyakademi.com

10. Aşağıda $-x + 2y = 4$ ve $x + y = 4$ doğrularının grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$-x + 2y < 4$
 $x + y > 4$

eşitsizlik sisteminin düzlem üzerinde gösterilen A, B, C, D ve E noktalarından hangisi sağlar?

- A) A B) B C) C D) D E) E

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

ÜSLÜ SAYILAR

a bir gerçekte sayı ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tane } a}$$

ifadesine **üslü ifade** denir. a^n üslü ifadesi n tane a sayısının çarpımıdır. a sayısına **taban**, n sayısına **üs** adı verilir.

♦ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

♦ $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

♦ $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

♦ $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ gibi.

Örnek 1:

Aşağıda verilen üslü ifadelerin eşitini bulalım.

- a) 3^4 b) 2^5 c) $(-3)^3$
d) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ e) $(-2)^4$ f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

Çözüm:

- a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
b) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
c) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
d) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$
e) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

Örnek 2:

$$3^2 + (-6)^2 + (-2)^5$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 15 B) 13 C) 12 D) 11 E) 8

Çözüm:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \text{ olduğundan,}$$

$$3^2 + (-6)^2 + (-2)^5 = 9 + 36 + (-32) = 45 - 32 = 13 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 3:

$$\frac{-2^4 + (-1)^3 + 5^2}{7^2 - (-5)^2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 1

Çözüm:

- $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$
- $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
- $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
- $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
- $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ olduğundan,

$$\frac{-2^4 + (-1)^3 + 5^2}{7^2 - (-5)^2} = \frac{-16 + (-1) + 25}{49 - 25} = \frac{-17 + 25}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 4:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{23}{8}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{21}{8}$ E) $\frac{11}{4}$

Çözüm:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \quad \text{olduğundan,}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{9}{4} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{18}{8} = \frac{21}{8} \quad \text{olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Üslü İfadelerin Özellikleri

1) $a \neq 0$ olmak üzere, $a^0 = 1$ dir.

- ♦ $4^0 = 1$ ♦ $(-7)^0 = 1$ ♦ $\left(-\frac{5}{7}\right)^0 = 1$ ♦ $\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$ gibi.

Dikkat

0^0 belirsizdir.

2) $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $1^n = 1$ dir.

1 in tüm kuvvetleri 1 e eşittir.

- ♦ $1^6 = 1$ ♦ $1^{53} = 1$ ♦ $1^{-4} = 1$ gibi.

3) $(-1)^n = -1$ (n tek sayı ise)

$(-1)^n = 1$ (n çift sayı ise)

- ♦ $(-1)^3 = -1$ ♦ $(-1)^{71} = -1$ ♦ $(-1)^8 = 1$ gibi

4) Negatif üs: $n \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{dir.}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \text{gibi.}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 5:

Aşağıda verilen üslü işlemlerin sonucunu bulalım.

a) $5^0 + (-1)^3$

b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^0 + (-1)^{20}$

c) $2^{-2} + 4^{-1}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

e) $(-3)^{-3} + (-9)^{-2}$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Çözüm:

a) $\left. \begin{array}{l} 5^0 = 1 \\ (-1)^3 = -1 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$5^0 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$ dir.

b) $\left. \begin{array}{l} \left(-\frac{4}{7}\right)^0 = 1 \\ (-1)^{20} = 1 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$\left(-\frac{4}{7}\right)^0 + (-1)^{20} = 1 + 1 = 2$ dir.

c) $\left. \begin{array}{l} 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\ 4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$2^{-2} + 4^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dir.

d) $\left. \begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2^1 = 2 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{16}{9} + 2 = \frac{34}{9}$ dir.

e) $\left. \begin{array}{l} (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27} \\ (-9)^{-2} = \frac{1}{(-9)^2} = \frac{1}{81} \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$(-3)^{-3} + (-9)^{-2} = -\frac{1}{27} + \frac{1}{81} = -\frac{3}{81} + \frac{1}{81} = -\frac{2}{81}$ dir.

f) $\left. \begin{array}{l} \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{1}\right)^3 = (-2)^3 = -8 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{9}{4} \cdot (-8) = -18$ dir.

Örnek 6:

$$\frac{-3^2 + (-1)^6}{-4^0}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -10

B) -8

C) 2

D) 8

E) 10

Çözüm:

$\left. \begin{array}{l} -3^2 = -3 \cdot 3 = -9 \\ (-1)^6 = 1 \\ -4^0 = -1 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$

$\frac{-3^2 + (-1)^6}{-4^0} = \frac{-9 + 1}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

15.

$$\frac{-3^{-2}-3^{-1}+3^0}{-(-2)^{-1}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $-\frac{3}{5}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{4}{9}$

16.

$$a = -2$$

$$b = -3$$

$$c = -1$$

olduğuna göre, $a^b + b^c + c^a$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{13}{24}$ C) $\frac{7}{6}$
D) $-\frac{5}{6}$ E) $-\frac{1}{2}$

Örnek 7:

$$[2^{-1}-2^{-2}-2^{-3}]^{-1}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

A) 24

B) 20

C) 18

D) 16

E) 12

Çözüm:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ olacağından,}$$

$$\begin{aligned} [2^{-1}-2^{-2}-2^{-3}]^{-1}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-2} &= \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right]^{-1}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-2} \\ &= \left[\frac{4}{8}-\frac{2}{8}-\frac{1}{8}\right]^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ &= 8+16=24 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

5) $a.x^n+b.x^n-c.x^n=(a+b-c).x^n$ dir.

$$\diamond 3.5^{10}+4.5^{10}=(3+4).5^{10}=7.5^{10}$$

$$\diamond 6.2^9+3.2^9-4.2^9=(6+3-4).2^9=5.2^9$$

$$\diamond 7.3^{15}-2.3^{15}-3^{15}=(7-2-1).3^{15}=4.3^{15} \text{ gibi.}$$

Örnek 8:

$$3.5^6+9.5^6-4.5^6$$

İşleminin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9.5^{12}

B) 8.5^{18}

C) 7.5^6

D) 8.5^6

E) 9.5^6

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3.5^6+9.5^6-4.5^6 &= (3+9-4).5^6 \\ &= 8.5^6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 9:

$$\frac{4 \cdot 7^{15} + 6 \cdot 7^{15} - 8 \cdot 7^{15}}{3 \cdot 7^{15} - 7^{15}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm:

$$4 \cdot 7^{15} + 6 \cdot 7^{15} - 8 \cdot 7^{15} = (4 + 6 - 8) \cdot 7^{15} = 2 \cdot 7^{15}$$

$$3 \cdot 7^{15} - 7^{15} = (3 - 1) \cdot 7^{15} = 2 \cdot 7^{15}$$

olacağından, işlemin sonucu $\frac{2 \cdot 7^{15}}{2 \cdot 7^{15}} = 1$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 10:

$$\frac{8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8}{8^8 + 8^8 + 8^8}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 8 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm:

$$8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 = 4 \cdot 8^8$$

$$8^8 + 8^8 + 8^8 = 3 \cdot 8^8 \text{ olacağından,}$$

$$\frac{8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8}{8^8 + 8^8 + 8^8} = \frac{4 \cdot 8^8}{3 \cdot 8^8} = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

- 6) Üslü bir ifadenin tekrar üssü alındığında taban aynen yazılır, üsler çarpılır.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \text{ dir.}$$

- ♦ $(5^4)^6 = 5^{24}$
- ♦ $(3^{-2})^{-5} = 3^{10}$
- ♦ $(7^{-5})^3 = 7^{-15}$
- ♦ $(2^6)^{-4} = 2^{-24}$ gibi.

Dikkat

$$(a^n)^m = (a^m)^n \text{ dir.}$$

- ♦ $(2^5)^7 = (2^7)^5$
- ♦ $(7^{-4})^{-5} = (7^{-5})^{-4}$
- ♦ $(6^{-3})^7 = (6^7)^{-3}$ gibi.

Örnek 11:

Aşağıda verilen üslü ifadelerin eşitlerini yazalım.

- a) $(2^4)^2$ b) $(3^5)^3$ c) $(6^{-2})^4$
d) $(5^{-3})^{-7}$ e) $(2^{-6})^4$

Çözüm:

- a) $(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$
b) $(3^5)^3 = 3^{5 \cdot 3} = 3^{15}$
c) $(6^{-2})^4 = 6^{-2 \cdot 4} = 6^{-8}$
d) $(5^{-3})^{-7} = 5^{(-3) \cdot (-7)} = 5^{21}$
e) $(2^{-6})^4 = 2^{(-6) \cdot 4} = 2^{-24}$ olur.

Örnek 12:

$$(2^4)^6 + (2^8)^3 + (2^{-2})^{-12}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $5 \cdot 2^{24}$ B) $3 \cdot 2^{24}$ C) 2^{24} D) 2^{36} E) 2^{72}

Çözüm:

$$(2^4)^6 = 2^{4 \cdot 6} = 2^{24}$$

$$(2^8)^3 = 2^{8 \cdot 3} = 2^{24}$$

$$(2^{-2})^{-12} = 2^{(-2) \cdot (-12)} = 2^{24} \text{ olacağından,}$$

sonuç, $2^{24} + 2^{24} + 2^{24} = 3 \cdot 2^{24}$ tür.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

17. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $[(-2)^3]^2=64$
 B) $[(-3)^{-1}]^{-3}=-27$
 C) $[(-2)^{-2}]^{-1}=-4$
 D) $[(-5)^{-1}]^{-1}=-5$
 E) $[(-4)^{-1}]^{-2}=16$

18. $x=8^5 \cdot 4^{-7}$
 $y=25^4 \cdot 5^{-7}$

olduğuna göre, $x+y$ toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Örnek 13:

$$2^x=m$$

$$3^x=n$$

olduğuna göre, $8^x \cdot 9^x$ ifadesinin m ve n cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $m^3 \cdot n^2$ B) $m^2 \cdot n^3$ C) $m^2 \cdot n^2$ D) $\frac{m^3}{n^2}$ E) $\frac{m^2}{n^3}$

Çözüm:

$$8^x=(2^3)^x=(2^x)^3=m^3$$

$$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2=n^2 \text{ olacağından}$$

$$8^x \cdot 9^x=m^3 \cdot n^2 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

7) Üslü sayılarda çarpma işlemlerinde,

a) $a^x \cdot a^y=a^{x+y}$

b) $a^x \cdot b^x=(a \cdot b)^x$

eşitlikleri kullanılır.

♦ $2^3 \cdot 2^4=2^{3+4}=2^7$

♦ $3^6 \cdot 3^8=3^{6+8}=3^{14}$

♦ $2^9 \cdot 2^{-5}=2^{9+(-5)}=2^4$

♦ $(-5)^{-3} \cdot (-5)^{-10}=(-5)^{(-3)+(-10)}=(-5)^{-13}$ gibi.

♦ $2^{10} \cdot 3^{10}=(2 \cdot 3)^{10}=6^{10}$

♦ $5^8 \cdot 3^8=(5 \cdot 3)^8=15^8$

♦ $3^{-6} \cdot 4^{-6}=(3 \cdot 4)^{-6}=12^{-6}$

♦ $2^{-7} \cdot 3^{-7}=(2 \cdot 3)^{-7}=6^{-7}$ gibi.

Örnek 14:

Aşağıda verilen üslü işlemlerin eşitlerini bulalım.

a) $6^3 \cdot 6^5$

b) $7^8 \cdot 7^{-2}$

c) $10^{-6} \cdot 10^{-2}$

d) $2^8 \cdot 5^8$

e) $3^{-4} \cdot 7^{-4}$

f) $(-3)^{10} \cdot (-2)^{10}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Çözüm:

- a) $6^3 \cdot 6^5 = 6^{3+5} = 6^8$
 b) $7^8 \cdot 7^{-2} = 7^{8+(-2)} = 7^6$
 c) $10^{-6} \cdot 10^{-2} = 10^{(-6)+(-2)} = 10^{-8}$
 d) $2^8 \cdot 5^8 = (2 \cdot 5)^8 = 10^8$
 e) $3^{-4} \cdot 7^{-4} = (3 \cdot 7)^{-4} = 21^{-4}$
 f) $(-3)^{10} \cdot (-2)^{10} = [(-3) \cdot (-2)]^{10} = 6^{10}$ olur.

Örnek 15:

$$2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 6^{-8}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 48 B) 36 C) 24 D) 12 E) 6

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 6^{-8} &= (2 \cdot 3)^{10} \cdot 6^{-8} \\ &= 6^{10} \cdot 6^{-8} \\ &= 6^{10+(-8)} \\ &= 6^2 \\ &= 36 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 16:

$$5 \cdot 2^{10} + 6 \cdot 2^{10} - 3 \cdot 2^{10}$$

işleminin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2^{18} B) $5 \cdot 2^{10}$ C) 2^{13} D) 2^{14} E) $3 \cdot 2^{13}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^{10} + 6 \cdot 2^{10} - 3 \cdot 2^{10} &= (5+6-3) \cdot 2^{10} \\ &= 8 \cdot 2^{10} \\ &= 2^3 \cdot 2^{10} \\ &= 2^{13} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 17:

$$8^{16} \cdot 4^8$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2^{64} B) 2^{62} C) 2^{60} D) 2^{58} E) 2^{56}

Çözüm:

$$\begin{aligned} 8^{16} &= (2^3)^{16} = 2^{3 \cdot 16} = 2^{48} \\ 4^8 &= (2^2)^8 = 2^{2 \cdot 8} = 2^{16} \text{ olacağından,} \\ 8^{16} \cdot 4^8 &= 2^{48} \cdot 2^{16} = 2^{48+16} = 2^{64} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 18:

$$27^6 \cdot 9^{-5} \cdot 81^{-2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

Çözüm:

$$\begin{aligned} 27^6 &= (3^3)^6 = 3^{18} \\ 9^{-5} &= (3^2)^{-5} = 3^{-10} \\ 81^{-2} &= (3^4)^{-2} = 3^{-8} \text{ olacağından,} \\ 27^6 \cdot 9^{-5} \cdot 81^{-2} &= 3^{18} \cdot 3^{-10} \cdot 3^{-8} \\ &= 3^{18+(-10)+(-8)} \\ &= 3^0 \\ &= 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

19. $3^a = p$

olduğuna göre, 9^{a+1} ifadesinin p türünden eşitli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $9p^2$ B) $27p^2$ C) $3p^2$
D) $27p$ E) $81p$

20. $2^m = a$

$3^m = b$

olduğuna göre, 6^{m+1} ifadesinin a ve b cinsinden eşitli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6(a+b)$ B) ab^2 C) $a^2 \cdot b$
D) $3ab$ E) $6ab$

Örnek 19:

$$2^a = x$$

$$3^a = y$$

olduğuna göre, 36^a ifadesinin x ve y cinsinden eşitli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^3 \cdot y$ B) $x^2 \cdot y^2$ C) $x \cdot y^3$ D) $\frac{x^4}{y^2}$ E) $\frac{x^3}{y}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} 36^a &= (4 \cdot 9)^a = 4^a \cdot 9^a \\ &= (2^2)^a \cdot (3^2)^a \\ &= (2^a)^2 \cdot (3^a)^2 \\ &= x^2 \cdot y^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 20:

$$2^x = m$$

olduğuna göre, 2^{x+2} ifadesinin m cinsinden eşitli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $m+4$ B) $2m^2$ C) m^2 D) $4m$ E) $2m$

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2^{x+2} &= 2^x \cdot 2^2 \text{ şeklinde yazılabilir.} \\ 2^{x+2} &= 2^x \cdot 2^2 \\ &= 2^x \cdot 4 \text{ (} 2^x = m \text{ idi.)} \\ &= m \cdot 4 \\ &= 4m \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 21:

$$\frac{2^{x+3} + 2^{x+1}}{2^x}$$

işleminin eşitli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2^x B) $3 \cdot 2^x$ C) 10 D) 8 E) 4

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Çözüm:

$$\frac{2^{x+3} + 2^{x+1}}{2^x} = \frac{2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^1}{2^x} = \frac{8 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x}{2^x}$$

$$= \frac{(8+2) \cdot 2^x}{2^x}$$

$$= 10 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 22:

$$\frac{3^{40} + 3^{39}}{3^{40} - 3^{39}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm:

$$\frac{3^{40} + 3^{39}}{3^{40} - 3^{39}} = \frac{3^1 \cdot 3^{39} + 3^{39}}{3^1 \cdot 3^{39} - 3^{39}} = \frac{(3+1) \cdot 3^{39}}{(3-1) \cdot 3^{39}}$$

$$= \frac{4 \cdot 3^{39}}{2 \cdot 3^{39}}$$

$$= 2 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 23:

$a \neq 0$ olmak üzere,

$$(-a^3)^4 \cdot (-a^2)^3$$

işleminin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-a^{12}$ B) $-a^{18}$ C) a^{12} D) a^{18} E) a^{24}

Çözüm:

$$(-a^3)^4 = a^{12}, \quad (-a^2)^3 = -a^6 \text{ olacağından,}$$

$$(-a^3)^4 \cdot (-a^2)^3 = a^{12} \cdot (-a^6) = -a^{12+6}$$

$$= -a^{18} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

8) Üslü sayılarda bölme işlemlerinde,

a) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

b) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ eşitlikleri kullanılır.

♦ $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$

♦ $\frac{5^{10}}{5^{-3}} = 5^{10-(-3)} = 5^{13}$

♦ $\frac{2^{-4}}{2^{-10}} = 2^{(-4)-(-10)} = 2^6$

♦ $\frac{7^{-6}}{7^4} = 7^{-6-4} = 7^{-10}$

♦ $\frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

♦ $\frac{10^4}{5^4} = \left(\frac{10}{5}\right)^4 = 2^4$

♦ $\frac{6^{-8}}{2^{-8}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{-8} = 3^{-8}$

♦ $\frac{5^6}{7^6} = \left(\frac{5}{7}\right)^6$ gibi.

Örnek 24:

Aşağıda verilen üslü işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\frac{4^5}{2^5}$

b) $\frac{10^3}{5^3}$

c) $\frac{6^{-2}}{2^{-2}}$

d) $\frac{15^4}{5^4}$

e) $\frac{12^{-3}}{6^{-3}}$

Çözüm:

a) $\frac{4^5}{2^5} = \left(\frac{4}{2}\right)^5 = 2^5 = 32$

b) $\frac{10^3}{5^3} = \left(\frac{10}{5}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $\frac{6^{-2}}{2^{-2}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

d) $\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81$

e) $\frac{12^{-3}}{6^{-3}} = \left(\frac{12}{6}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 25:

$$\frac{6^{20}}{3^{20}} \cdot 8^{-6}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{6^{20}}{3^{20}} \cdot 8^{-6} &= \left(\frac{6}{3}\right)^{20} \cdot (2^3)^{-6} \\ &= 2^{20} \cdot 2^{-18} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 26:

$$\frac{8^4}{4^5} + \frac{9^{10}}{27^6}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{8^4}{4^5} + \frac{9^{10}}{27^6} &= \frac{(2^3)^4}{(2^2)^5} + \frac{(3^2)^{10}}{(3^3)^6} = \frac{2^{12}}{2^{10}} + \frac{3^{20}}{3^{18}} \\ &= 2^{12-10} + 3^{20-18} \\ &= 2^2 + 3^2 \\ &= 4 + 9 = 13 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 27:

$$\frac{4^{x+1}}{2^{2x+1}} + \frac{27^{x+1}}{3^{3x+2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{4^{x+1}}{2^{2x+1}} + \frac{27^{x+1}}{3^{3x+2}} &= \frac{(2^2)^{x+1}}{2^{2x+1}} + \frac{(3^3)^{x+1}}{3^{3x+2}} \\ &= \frac{2^{2x+2}}{2^{2x+1}} + \frac{3^{3x+3}}{3^{3x+2}} \\ &= 2^{(2x+2)-(2x+1)} + 3^{(3x+3)-(3x+2)} \\ &= 2^1 + 3^1 \\ &= 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 28:

$$3^x = p$$

olduğuna göre, $\frac{15^{x+1}}{5^{x-1}}$ ifadesinin p cinsinden eşiti aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) 75p B) 50p C) 15p² D) 6p² E) 15p

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{15^{x+1}}{5^{x-1}} &= \frac{15^x \cdot 15^1}{5^x \cdot 5^{-1}} = \left(\frac{15}{5}\right)^x \cdot \frac{15}{\frac{1}{5}} = 3^x \cdot 75 \quad (3^x = p \text{ idi.}) \\ &= 75p \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 29:

$$\frac{15^{20} + 15^{20} + 15^{20}}{5^{20} + 5^{20} + 5^{20}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5^{20} B) 3^{20} C) 3^{60} D) 5^{60} E) 3

Çözüm:

$$\frac{15^{20} + 15^{20} + 15^{20}}{5^{20} + 5^{20} + 5^{20}} = \frac{3 \cdot 15^{20}}{3 \cdot 5^{20}} = \left(\frac{15}{5}\right)^{20} = 3^{20} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 30:

$$(0,002)^6 \cdot (0,04)^{-3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 10^{-12} B) 10^{-8} C) $2 \cdot 10^{-10}$ D) $4 \cdot 10^{-6}$ E) $2 \cdot 10^{-6}$

Çözüm:

$0,002 = 2 \cdot 10^{-3}$ ve $0,04 = 4 \cdot 10^{-2}$ olacağından,

$$\begin{aligned} (0,002)^6 \cdot (0,04)^{-3} &= (2 \cdot 10^{-3})^6 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^{-3} \\ &= 2^6 \cdot 10^{-18} \cdot (2^2)^{-3} \cdot (10^6)^{-3} \\ &= 2^6 \cdot 2^{-6} \cdot 10^{-18} \cdot 10^{-6} \\ &= 2^0 \cdot 10^{-12} \\ &= 10^{-12} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 31:

$$2^{p-1} \cdot 3^{p-1} = m$$

olduğuna göre, $\frac{12^p}{2^{p+1}}$ ifadesinin m cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2m B) 3m C) $\frac{m}{12}$ D) $\frac{m}{18}$ E) $\frac{2m}{9}$

Çözüm:

$$2^{p-1} \cdot 3^{p-1} = m \Rightarrow m = (2 \cdot 3)^{p-1}$$

$$m = 6^{p-1}$$

$$m = 6^p \cdot 6^{-1}$$

$$m = 6^p \cdot \frac{1}{6}$$

$6m = 6^p$ elde edilir.

$$\frac{12^p}{2^{p+1}} = \frac{12^p}{2^p \cdot 2^1} = \left(\frac{12}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 6^p \cdot \frac{1}{2} \quad (6^p = 6m \text{ idi.})$$

$$= 6m \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 3m \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 32:

$$\frac{8^{16} + 8^{16} + 8^{16} + 8^{16}}{16^8 + 16^8}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2^{17} B) 2^{16} C) 2^{15} D) 2^{14} E) 2^{13}

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{8^{16} + 8^{16} + 8^{16} + 8^{16}}{16^8 + 16^8} &= \frac{4 \cdot 8^{16}}{2 \cdot 16^8} = \frac{2^2 \cdot (2^3)^{16}}{2 \cdot (2^4)^8} \\ &= \frac{2^2 \cdot 2^{48}}{2^1 \cdot 2^{32}} = \frac{2^{50}}{2^{33}} = 2^{50-33} \\ &= 2^{17} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

21. $3^{x+2}=9^3$
 $5^{y-1}=25^2$

olduğuna göre, $x+y$ toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

22. $3^{x+1}+3^x=108$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÜSLÜ DENKLEMLER

1) $a \notin \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere,

$a^x=a^y$ ise $x=y$ dir.

♦ $2^x=2^5 \Rightarrow x=5$

♦ $3^m=3^{-6} \Rightarrow m=-6$

♦ $5^{x+2}=5^7 \Rightarrow x+2=7$

$x=5$ gibi.

Örnek 33:

$4^{m+1}=8^{m-2}$

eşitliğini sağlayan m değeri kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm:

$4^{m+1}=8^{m-2} \Rightarrow (2^2)^{m+1}=(2^3)^{m-2}$

$2^{2m+2}=2^{3m-6}$

$2m+2=3m-6$

$m=8$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

2) $n \neq 0$ olmak üzere, $a^n=b^n$ eşitliğinde,

♦ n tek ise $a=b$ dir.

$a^3=5^3 \Rightarrow a=5$ gibi.

♦ n çift ise $|a|=|b|$ dir.

$x^4=2^4 \Rightarrow |x|=|2|$

$x=2$ veya $x=-2$ gibi.

Örnek 34:

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(x+1)^5=7^5$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Çözüm:

Eşitlikteki üs 5 (tek) olduğundan,

$$x+1=7$$

$$x=6 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 35:

x gerçek sayı olmak üzere,

$$(2x)^4=(x+6)^4$$

eşitliğini sağlayan x in alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

Eşitlikteki üs 4 (çift) olduğundan,

$$|2x|=|x+6| \text{ olur.}$$

- $2x=x+6 \Rightarrow x=6$
- $2x=-(x+6) \Rightarrow 2x=-x-6$
 $\Rightarrow 3x=-6$
 $x=-2 \text{ dir.}$

O halde x değerlerinin toplamı $6+(-2)=4$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 36:

$x \in \mathcal{R}$ olmak üzere,

$$(x-3)^4=16$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm:

$(x-3)^4=2^4$ olacağından üs çift olur.

O halde,

$$|x-3|=|2| \text{ olacaktır.}$$

- $x-3=2 \Rightarrow x=5$
- $x-3=-2 \Rightarrow x=1 \text{ olur.}$

x değerlerinin toplamı $5+1=6$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 37:

m gerçek sayı olmak üzere,

$$(2m-1)^6=(m+4)^6$$

eşitliğini sağlayan m'nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

Eşitlikteki üsler çift olduğundan,

$$|2m-1|=|m+4| \text{ olacaktır.}$$

- $2m-1=m+4 \Rightarrow m=5$
- $2m-1=-(m+4) \Rightarrow 2m-1=-m-4$

$$3m=-3$$

$$m=-1 \text{ dir.}$$

m değerlerinin toplamı $5+(-1)=4$ olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

3) $a^b=1$ ise

- ♦ $a=1$
- ♦ $b=0$ ve $a \neq 0$
- ♦ $a=-1$ ve b çift sayı

durumları incelenir.

İLK ADIM SORULARI

23. $(x-3)^{x+4}=1$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-4, 4\}$ B) $\{-3, 2, 4\}$
C) $\{-5, 1, 4\}$ D) $\{-4, 2, 4\}$
E) $\{-4, 2, 5\}$

24. x ve y birer tam sayı olmak üzere,

$$3^{x-2}=5^{y+5}$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) -10 B) -8 C) -6 D) 4 E) 9

Örnek 38:

$$(m-4)^{2m-8}=1$$

eşitliğinde m nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm:

- 1) $m-4=1$ ise $m=5$ tir.
2) $2m-8=0$ ise $m=4$ olur. Fakat $m=4$ değeri tabanı da sıfır yaptığından üslü ifade 0^0 belirsizliğine döner. Dolayısıyla $m=4$ değeri denklemi sağlamaz.
3) $m-4=-1$ ise $m=3$ olur. $m=3$ değeri üssü çift yaptığından denklemi sağlar. O halde, m değerleri 5 ve 3 olur. Toplamları $5+3=8$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

- 4) Taban veya üslerin eşitlenemediği denklemlerde üsler sıfır yapılarak eşitlik sağlanır.
♦ $a^x=b^y$ ise $x=0$ ve $y=0$ olur.

Örnek 39:

a ve b tam sayılar olmak üzere,

$$2^{a-b-2}=7^{a+b-10}$$

eşitliğini sağlayan a ve b değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

Çözüm:

Taban ve üsler farklı olduğundan,

$$a-b-2=0 \text{ ve } a+b-10=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$a-b-2=0 \text{ ise } a-b=2$$

$$a+b-10=0 \text{ ise } a+b=10 \text{ dur.}$$

Denklemleri alt alta toplarsak

$$a-b = 2$$

$$+ a+b = 10$$

$$2a = 12$$

$$a = 6 \text{ ve } b=4 \text{ bulunur.}$$

O halde $a.b=6.4=24$ tür.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

ÜSLÜ İFADELERDE EŞİTSİZLİK VE SIRALAMA

$a \notin \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere, $a^x < a^y$ eşitsizliğinde

- 1) $a > 1$ ise $x < y$ dir.
- 2) $0 < a < 1$ ise $x > y$ dir.

Örnek 40:

$$2^x < 16$$

eşitsizliğini sağlayan x in alabileceği farklı doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$2^x < 16 \text{ ise } 2^x < 2^4 \text{ tür.}$$

$$2 > 1 \text{ olduğundan } x < 4 \text{ olur.}$$

O halde x in alabileceği doğal sayı değerleri 0, 1, 2 ve 3 olacaktır.

$$\text{Toplamları } 0+1+2+3=6 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 41:

$$3^{m-1} > 9^4$$

eşitsizliğini sağlayan m nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:

$$3^{m-1} > 9^4 \text{ ise } 3^{m-1} > (3^2)^4$$

$$3^{m-1} > 3^8 \text{ (} 3 > 1 \text{ olduğundan)}$$

$$m-1 > 8$$

$$m > 9 \text{ elde edilir.}$$

O halde m nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 10 olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 42:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} < \left(\frac{4}{9}\right)^{3-x}$$

eşitsizliğinde x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} < \left(\frac{4}{9}\right)^{3-x} \text{ ise } \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} < \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{3-x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} < \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2x} \quad \left(0 < \frac{2}{3} < 1 \text{ olduğundan}\right)$$

$$x+3 > 6-2x$$

$$3x > 3$$

$$x > 1 \text{ elde edilir.}$$

O halde, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 2 olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 43:

$$a=4^{11}, \quad b=8^7, \quad c=16^6$$

olduğuna göre, a , b ve c sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $c < a < b$ B) $b < c < a$ C) $b < a < c$ D) $c < b < a$ E) $a < b < c$

Çözüm:

$$\bullet a=4^{11}=(2^2)^{11}=2^{22}$$

$$\bullet b=8^7=(2^3)^7=2^{21}$$

$$\bullet c=16^6=(2^4)^6=2^{24} \text{ tür.}$$

$$2^{21} < 2^{22} < 2^{24} \text{ olacağından } b < a < c \text{ sıralaması elde edilir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü Sayılar

Örnek 44:

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 8$$

eşitsizlik sisteminde x in alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} \text{ ve } 8 = 2^3 \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 8 \Rightarrow 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^3 \text{ yazılabilir.}$$

Üslü ifadelerdeki taban 1 den büyük olduğu için,

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \text{ olur.}$$

x in alabileceği tam sayı değerleri -2, -1, 0, 1, 2 ve 3 olacağından toplamı 3 olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 45:

$$a=2^{80}, b=3^{60} \text{ ve } c=5^{40}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $c > b > a$ B) $a > b > c$ C) $a > c > b$ D) $b > a > c$ E) $b > c > a$

Çözüm:

$$a = 2^{80} = (2^4)^{20} = 16^{20}$$

$$b = 3^{60} = (3^3)^{20} = 27^{20}$$

$$c = 5^{40} = (5^2)^{20} = 25^{20} \text{ yazabiliriz.}$$

$$27^{20} > 25^{20} > 16^{20} \text{ olacağından}$$

sıralama $b > c > a$ şeklinde olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 46:

x ve y gerçel sayılardır.

$$2^x < 3 \text{ ve } 2^y < 10$$

olduğuna göre, x+y toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

Eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$2^x < 3$$

$$2^y < 10$$

$$2^x \cdot 2^y < 30$$

$$2^{x+y} < 30$$

olduğuna göre, x+y toplamı tam sayı olarak en çok 4 olabilir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 47:

a ve b gerçel sayılardır.

$$2^{a-2} < 1 < 5^{4-b}$$

olduğuna göre, a+b toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$$2^{a-2} < 1 \Rightarrow 2^{a-2} < 2^0$$

$$a-2 < 0$$

$$a < 2 \dots \textcircled{1} \text{ olur.}$$

$$5^{4-b} > 1 \Rightarrow 5^{4-b} > 5^0$$

$$4-b > 0$$

$$b < 4 \dots \textcircled{2} \text{ olur.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ numaralı eşitsizlikler alt alta toplanırsa

$$a < 2$$

$$b < 4$$

$$+ \quad \quad \quad$$

$$a+b < 6$$

olacağından a+b toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri 5 olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜSLÜ SAYILAR

Test : 10

1. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $5.5.5.5 = 5^4$ B) $3.3.3.3 = 3^4$
C) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ D) $4.4.4.4.4 = 5^4$
E) $7.7.7.7.7 = 7^5$

2. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi doğrudur?

- A) $3^3=9$ B) $4^3=32$ C) $-2^6=64$
D) $(-6)^2=-36$ E) $(-5)^3=-125$

3. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ B) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ C) $5^0 = 1$
D) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ E) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{9}{25}$

4. $2^{-2} + 4^{-1} + 8^0$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

5.

$$(-3)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6.

$$-2^{-2} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} - 6^0$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{23}{4}$ B) $-\frac{25}{4}$ C) $-\frac{19}{2}$ D) $-\frac{7}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

ÜSLÜ SAYILAR

Test : 10

7. $m = -2$
 $n = -1$
 olduğuna göre, $m^m + n^n + m^n$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -1 B) -2 C) $-\frac{5}{4}$ D) $-\frac{7}{2}$ E) $-\frac{9}{4}$

8. $2^m = \frac{1}{8}$
 $3^n = \frac{1}{9}$
 olduğuna göre, n^m ifadesinin değeri kaçtır?
- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $-\frac{1}{9}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) $-\frac{1}{8}$

9. $\frac{5 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^5}{5 \cdot 7^5 - 3 \cdot 7^5}$
 işleminin sonucu kaçtır?
- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 4 E) 8



10. $2^a = 3$
 $3^b = 5$
 $5^c = 64$
 olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ çarpımı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

www.bireyakademi.com

11. $\frac{3^{a+1} + 3^a}{3^{a-1}}$
 ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
- A) 3^a B) $2 \cdot 3^a$ C) 3^{a+1} D) 9 E) 12



12. $3^6 + 9^3 + 27^2 = x \cdot 3^6$
 eşitliğini sağlayan x kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

www.bireyakademi.com

1. $5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5^{25} B) 25^5 C) 25^{25} D) 5^6 E) 5^{10}

2. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $3^5 \cdot 3^6 = 3^{11}$ B) $5^7 \cdot 5^{-7} = 1$ C) $\frac{7^6}{7^3} = 7^3$
D) $\frac{10^6}{10^{-2}} = 10^8$ E) $6^3 \cdot 6^{-2} = 6^{-6}$

3. $8^5 \cdot 4^6 = 2^x$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 27 B) 25 C) 21 D) 18 E) 15

4. $\left(\frac{1}{27}\right)^4 \cdot 9^7$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 243

5. $2^a = p$

olduğuna göre, 2^{a+2} ifadesinin p cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $p+4$ B) $2p+2$ C) $4p$ D) p^2 E) $2p^2$

6. $(-a^3)^2 \cdot (-a^{-3})^{-3}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a^{15} B) a^{12} C) $-a^{10}$ D) $-a^{12}$ E) $-a^{15}$

ÜSLÜ SAYILAR

Test : 11

7. $6^m = x$
olduğuna göre, $2^{m+2} \cdot 3^{m+1}$ ifadesinin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x$ B) $6x$ C) $12x$ D) $4x^2$ E) $6x^2$



8. $\frac{3}{1+a^{x-y}} + \frac{3}{1+a^{y-x}}$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) a^x B) a^y C) a^{x+y} D) 1 E) 3

www.bireyakademi.com

9. $(0,5)^{m+6} = (0,25)^{m-1}$
eşitliğini sağlayan m değeri kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

10. $(x+1)^4 = 7^4$
eşitliğini sağlayan x 'in alabileceği farklı değerler çarpımı kaçtır?

A) -60 B) -48 C) -36 D) -32 E) -24



11. $(x-2)^{x+5} = 1$
eşitliğini sağlayan x 'in alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

www.bireyakademi.com



12. $5^{m-4} > 25^2$
 $3^{n+1} > \left(\frac{1}{27}\right)^{-2}$
eşitsizliklerinde $m+n$ toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

www.bireyakademi.com

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

KAREKÖKLÜ SAYILAR

Karesi pozitif bir gerçekte sayıya eşit olan iki sayı vardır. Bu sayılardan pozitif olanına bu gerçekte sayının *pozitif karekökü*, negatif olanına ise bu gerçekte sayının *negatif karekökü* denir.

♦ Örneğin; karesi 25 olan iki sayı vardır. Bunlar +5 ve -5 tir.

$$\bullet (+5)^2=25 \quad \bullet (-5)^2=25$$

Karesi 25 e eşit olan bu iki sayıdan +5 sayısına 25 in *pozitif karekökü*, -5 sayısına ise 25 in *negatif karekökü* denir. Bu durum;

♦ 25 in pozitif karekökü, $+\sqrt{25}=+5$

♦ 25 in negatif karekökü, $-\sqrt{25}=-5$ şeklinde ifade edilir.

$$\bullet x^2=16 \text{ ise } x=+\sqrt{16} \text{ veya } x=-\sqrt{16}$$

$$x=+4 \quad \text{veya} \quad x=-4$$

$$\bullet a^2=\frac{4}{9} \text{ ise } a=+\sqrt{\frac{4}{9}} \text{ veya } a=-\sqrt{\frac{4}{9}},$$

$$a=+\frac{2}{3} \quad \text{veya} \quad a=-\frac{2}{3} \text{ gibi.}$$

♦ Karekök alma işlemi sayının pozitif karekökünün hesaplanması işlemidir.

$$\bullet \sqrt{16}=+4$$

$$\bullet \sqrt{49}=+7$$

$$\bullet \sqrt{\frac{25}{81}}=+\frac{5}{9} \text{ gibi.}$$

$$\bullet a \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } \sqrt{a^2}=|a| \text{ dir.}$$

Örnek 1:

Aşağıda verilen eşitlikleri inceleyiniz.

$$a) \sqrt{81}=\sqrt{9^2}=|9|=9$$

$$b) \sqrt{\frac{64}{25}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\left|\frac{8}{5}\right|=\frac{8}{5}$$

$$c) \sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$$

$$d) \sqrt{(-13)^2}=|-13|=13$$

$$e) \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

$$f) \sqrt{0,04}=\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2}=\left|\frac{2}{10}\right|=\frac{2}{10}=0,2$$

Örnek 2:

$$\sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 11

B) 10

C) 9

D) 8

E) 7

Çözüm:

$$\bullet \sqrt{9}=\sqrt{3^2}=|3|=3$$

$$\bullet \sqrt{36}=\sqrt{6^2}=|6|=6$$

$$\bullet \sqrt{1}=\sqrt{1^2}=|1|=1 \text{ olacağından,}$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{1}=3+6-1=8 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 3:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{7^2} + \sqrt{(-12)^2}}{\sqrt{(-11)^2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{7^2} + \sqrt{(-12)^2}}{\sqrt{(-11)^2}} &= \frac{|-3| + |7| + |-12|}{|-11|} \\ &= \frac{3 + 7 + 12}{11} \\ &= \frac{22}{11} \\ &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 4:

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{0,09} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{0,09} &= \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2} \text{ olacağından,} \\ \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{0,09} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} &= \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{3}{10}\right| - \left|-\frac{5}{6}\right| \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{10} - \frac{5}{6} \\ &= \frac{10}{30} + \frac{9}{30} - \frac{25}{30} \\ &= -\frac{6}{30} \\ &= -\frac{1}{5} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

RASYONEL KUVVET (n. Dereceden Kök)

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve a gerçekte sayı olmak üzere, $x^n = a$ denklemini sağlayan x gerçekte sayılarına " a sayısının n . dereceden kökleri" denir.

- ♦ $x^3 = 8$ denklemini sağlayan 2 sayısına " 8 sayısının 3. dereceden kökü" denir.
- ♦ $x^4 = 16$ denklemini sağlayan 2 ve -2 sayılarına " 16 sayısının 4. dereceden kökleri" denir.
- ♦ $a^3 = -27$ denklemini sağlayan -3 sayısına " -27 sayısının 3. dereceden kökü" denir.
- ♦ $a^4 = -16$ denklemini sağlayan bir a gerçekte sayısı bulunamayacağından, -16 sayısının 4. dereceden kökü yoktur. Yani gerçekte sayılarda çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

O halde, $x^n = a$ denkleminde

1) $a > 0$ olduğunda

- ♦ n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$
- ♦ n çift ise $x = \pm \sqrt[n]{a}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

2) $a < 0$ olduğunda

- ♦ n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$
- ♦ n çift ise a nın gerçekte sayı kökü yoktur.
- $x^3 = 27$ ise $x = \sqrt[3]{27} = 3$
- $x^3 = -8$ ise $x = \sqrt[3]{-8} = -2$
- $x^4 = 81$ ise $x = \sqrt[4]{81} = \pm 3$
- $x^4 = -81$ ise $\emptyset$ gibi.

! Dikkat

n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$, a gerçekte sayı olmak üzere, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases}$ olur.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{7^3} = 7, \quad \sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2}{3} \\ & \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2, \quad \sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5, \\ & \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5, \quad \sqrt[8]{7^8} = |7| = 7 \text{ gibi.} \end{aligned}$$

Her köklü ifade bir gerçekte sayı belirtmez. $\sqrt[n]{a}$ sayısının daima gerçekte sayı belirtmesi için $a \geq 0$ ya da n tek sayı olmalıdır.

- ♦ $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[5]{-6}$ sayıları gerçekte sayılardır.
- ♦ $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[8]{2}$ sayıları gerçekte sayılardır.
- ♦ $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[6]{-7}$, $\sqrt[8]{-5}$ sayıları gerçekte sayılar değildir.

Örnek 5:

$$\sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[4]{(-2)^4} + \sqrt[6]{(-3)^6}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

- $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
 - $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$
 - $\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$ olacağından,
- $$\sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[4]{(-2)^4} + \sqrt[6]{(-3)^6} = (-5) + 2 + 3 = 0 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 6:

$$\sqrt{(-10)^2} + \sqrt[3]{(-7)^3} - \sqrt[5]{(-4)^5}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-10)^2} + \sqrt[3]{(-7)^3} - \sqrt[5]{(-4)^5} &= |-10| + (-7) - (-4) \\ &= 10 - 7 + 4 \\ &= 7 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

25.

$$\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{3}\right)^4}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{9}$ B) -1 C) $-\frac{4}{3}$
D) $-\frac{5}{3}$ E) -2

26.

$$\sqrt{7 + \sqrt[3]{5 + \sqrt[3]{27}}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

Örnek 7:

$$\frac{\sqrt[3]{2^9} + \sqrt[8]{(-2)^8}}{\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt{(-6)^2}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) 0

Çözüm:

$$\frac{\sqrt[3]{2^9} + \sqrt[8]{(-2)^8}}{\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt{(-6)^2}} = \frac{2 + |-2|}{(-3) + |-6|} = \frac{2+2}{(-3)+6} = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 8:

$$A = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-8}$$

$$B = \sqrt[4]{16} + \sqrt[6]{(-2)^6}$$

olduğuna göre, A+B toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$A = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{(-2)^3} = 3 + (-2) = 1$$

$$B = \sqrt[4]{16} + \sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[4]{2^4} + \sqrt[6]{(-2)^6} = |2| + |-2| = 2 + 2 = 4$$

olacağından $A+B=1+4=5$ tir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 9:

$$A = \sqrt[4]{a-2} + \sqrt[6]{5-a}$$

eşitliği veriliyor.

A sayısının tanımlı (gerçek sayı) olabilmesi için a yerine yazılabilecek tam sayıların toplamı kaçtır?

- A) 16 B) 14 C) 12 D) 9 E) 7

Çözüm:

A sayısının tanımlı (gerçek sayı) olabilmesi için $\sqrt[4]{a-2}$ ve $\sqrt[6]{5-a}$ sayılarının gerçek sayı belirtmesi gerekir.

- $\sqrt[4]{a-2}$ gerçek sayı ise $a-2 \geq 0$
 $a \geq 2$
- $\sqrt[6]{5-a}$ gerçek sayı ise $5-a \geq 0$
 $5 \geq a$ olmalıdır.

O halde $2 \leq a \leq 5$ bulunur.

a'nın alabileceği tam sayı değerleri 2, 3, 4 ve 5 olduğundan toplamaları 14 olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 10:

$a < 0 < b$ olmak üzere,

$$\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[4]{(a-b)^4}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2a B) -2b C) -2a D) -2a+2b E) 2a-2b

Çözüm:

- $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ ($a < 0$ olduğundan)
- $\sqrt[3]{b^3} = b$
- $\sqrt[4]{(a-b)^4} = |a-b| = -a+b$ ($a-b < 0$ olduğundan)

O halde,

$$\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{b^3} + \sqrt[4]{(a-b)^4} = (-a) + b + (-a+b) = -2a + 2b \text{ dir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 11:

$a < 0 < b < c$ olmak üzere,

$$\sqrt{(b+c)^2} + \sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt[4]{(a-c)^4}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2a-2b-2c$ B) $-2a+2b-2c$ C) $2a-2b+2c$
D) $-2b$ E) $2c$

Çözüm:

- $b+c > 0$ olduğundan, $\sqrt{(b+c)^2} = |b+c| = b+c$
- $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a-b$
- $a-c < 0$ olduğundan,
 $\sqrt[4]{(a-c)^4} = |a-c| = -(a-c) = -a+c$ olur.

O halde,

$$\begin{aligned} \sqrt{(b+c)^2} + \sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt[4]{(a-c)^4} &= (b+c) + (a-b) + (-a+c) \\ &= b+c+a-b-a+c \\ &= 2c \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 12:

$$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt[4]{(3-\sqrt{5})^4}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2\sqrt{5}-2$ B) -2 C) 2 D) $2\sqrt{5}+2$ E) $2-2\sqrt{5}$

Çözüm:

- $1 < \sqrt{5}$ olduğundan,
 $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) = -1 + \sqrt{5}$
- $3 > \sqrt{5}$ olduğundan,
 $\sqrt[4]{(3-\sqrt{5})^4} = |3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$ olur.

O halde,

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt[4]{(3-\sqrt{5})^4} &= -1 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

! Dikkat

m ile n birer tam sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \diamond \sqrt[4]{2^3} &= 2^{\frac{3}{4}}, & \sqrt[3]{3^5} &= 3^{\frac{5}{3}} \\ \diamond \sqrt{5^3} &= 5^{\frac{3}{2}}, & \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{1}{3}} \text{ gibi.} \end{aligned}$$

Örnek 13:

Aşağıda köklü ifadelerin bir tam sayının rasyonel kuvveti biçiminde yazılışları verilmiştir. İnceleyiniz.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} & \text{b) } \sqrt[4]{27} &= \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}} \\ \text{c) } \sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{6^1} = 6^{\frac{1}{3}} & \text{d) } \sqrt{8} &= \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} \\ \text{e) } \sqrt[6]{16} &= \sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} & \text{f) } \sqrt[4]{125} &= \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Örnek 14:

Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

$$\begin{aligned} \text{A) } \sqrt[12]{2^4} &= 2^{\frac{1}{3}} & \text{B) } \sqrt[9]{5^6} &= 5^{\frac{2}{3}} & \text{C) } \sqrt[10]{32} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ \text{D) } \sqrt[4]{27} &= 3^{\frac{4}{3}} & \text{E) } \sqrt[8]{64} &= 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{A) } \sqrt[12]{2^4} &= 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Doğru}) \\ \text{B) } \sqrt[9]{5^6} &= 5^{\frac{6}{9}} = 5^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Doğru}) \\ \text{C) } \sqrt[10]{32} &= \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Doğru}) \\ \text{D) } \sqrt[4]{27} &= \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}} \quad (\text{Yanlış}) \\ \text{E) } \sqrt[8]{64} &= \sqrt[8]{2^6} = 2^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} \quad (\text{Doğru}) \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 15:

$$\sqrt[24]{3^{11} + 3^{11} + 3^{11}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

$$\text{A) } \sqrt{3} \quad \text{B) } \sqrt[3]{3} \quad \text{C) } \sqrt[3]{9} \quad \text{D) } \sqrt[4]{27} \quad \text{E) } \sqrt[12]{243}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt[24]{3^{11} + 3^{11} + 3^{11}} &= \sqrt[24]{3 \cdot 3^{11}} = \sqrt[24]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{24}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Köklü Sayıların Özellikleri

1) Toplama ve Çıkarma

$$a \cdot \sqrt{x} + b \cdot \sqrt{x} - c \cdot \sqrt{x} = (a + b - c) \cdot \sqrt{x}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} - c \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b - c) \cdot \sqrt[n]{x} \text{ tir.}$$

$$\diamond 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (3 + 7 - 2) \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

$$\diamond 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (6 - 2 + 5) \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\diamond 5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 7\sqrt[3]{2} = (5 + 6 - 7) \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} \text{ gibi.}$$

! Dikkat

Köklü sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilmemiz için kök içlerinin aynı ve kök derecelerinin eşit olması gerekir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 16:

$$\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{7\sqrt{6}-4\sqrt{6}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $3\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{6}$

Çözüm:

$$\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{7\sqrt{6}-4\sqrt{6}} = \frac{(4+3+2)\sqrt{6}}{(7-4)\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

2) Çarpma ve Bölme

Köklü sayılarda çarpma ve bölme işlemlerinde,

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} &= \sqrt{x \cdot y} & \text{b) } \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{x \cdot y} \\ \text{c) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} &= \sqrt{\frac{x}{y}} & \text{d) } \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} &= \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılır.

$$\begin{aligned} \diamond \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} &= \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}, & \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} &= \sqrt{6 \cdot 7} = \sqrt{42} \\ \diamond \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}, & \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{6} &= \sqrt[4]{5 \cdot 6} = \sqrt[4]{30} \\ \diamond \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}, & \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3} \\ \diamond \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} &= \sqrt[3]{\frac{10}{2}} = \sqrt[3]{5}, & \frac{\sqrt[5]{24}}{\sqrt[5]{6}} &= \sqrt[5]{\frac{24}{6}} = \sqrt[5]{4} \text{ gibi.} \end{aligned}$$

İLK ADIM SORULARI

27. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $3\sqrt{30}$ B) $2\sqrt{30}$ C) $2\sqrt{15}$
D) $3\sqrt{15}$ E) $4\sqrt{10}$

28. $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{6}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 17:

$$A = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{10}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{15}}$$

olduğuna göre, A+B toplamı kaçtır?

- A) $4\sqrt{15}$ B) $3\sqrt{10}$ C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

$$A = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 15}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = \sqrt{9} = 3$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{15}} = \frac{\sqrt[3]{12 \cdot 10}}{\sqrt[3]{15}} = \frac{\sqrt[3]{120}}{\sqrt[3]{15}} = \sqrt[3]{\frac{120}{15}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

olacağından $A+B=3+2=5$ tir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ dir. ($a \geq 0$)

♦ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$,

♦ $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$ gibi.

Örnek 18:

$$\sqrt{6} \cdot a = \sqrt{54}$$

$$\sqrt{5} \cdot b = \sqrt{20}$$

olduğuna göre, a+b toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$\sqrt{6} \cdot a = \sqrt{54} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{5} \cdot b = \sqrt{20} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

olacağından $a+b=3+2=5$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 19:

$$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$$

olduğuna göre, $\sqrt{A^3}$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm:

$$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} + \sqrt[3]{\frac{24}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4 \text{ olur.}$$

$$A = 4 \text{ ise } \sqrt{A^3} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

3) $a, b \in \mathbb{R}^+$, $n > 2$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a^2 \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \text{ dir.}$$

♦ $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$,

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

♦ $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$,

$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

Örnek 20:

$$\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $4\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{2}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{2} &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 21:

$$5\sqrt{45} + 3\sqrt{20}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $21\sqrt{5}$ B) $16\sqrt{5}$ C) $12\sqrt{5}$ D) $8\sqrt{10}$ E) $10\sqrt{6}$

Çözüm:

- $5\sqrt{45} = 5\sqrt{9 \cdot 5} = 5 \cdot 3\sqrt{5} = 15\sqrt{5}$
- $3\sqrt{20} = 3\sqrt{4 \cdot 5} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

olacağından, $5\sqrt{45} + 3\sqrt{20} = 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 21\sqrt{5}$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 22:

$$\frac{\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $4\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{12} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{9 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{6}}{\sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \sqrt{6}}{2\sqrt{3} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{6}{3}} = 4\sqrt{2} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 23:

$$\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $6\sqrt[3]{3}$ B) $5\sqrt[3]{3}$ C) $2\sqrt[3]{9}$ D) $6\sqrt[3]{6}$ E) $8\sqrt[3]{2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{27 \cdot 3} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} \\ &= 5\sqrt[3]{3} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 24:

$$\sqrt{2} = a$$

$$\sqrt{5} = b$$

olduğuna göre, $\sqrt{90}$ sayısının a ve b cinsinden eşiti aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) $2ab^2$ B) $3a^2b$ C) $9ab$ D) $3ab$ E) a^2b

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{90} &= \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 5} \\ &= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \\ &= 3 \cdot a \cdot b \\ &= 3ab \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 25:

$\sqrt{180}$ sayısı aşağıdakilerden hangisine bölünürse sonuç bir tam sayı olur?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{10}$

Çözüm:

180 sayısını asal çarpanlarına ayırırsak,

180	2	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olur.
90	2	
45	3	
15	3	
5	5	
1		

O halde, $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ olur.

$6\sqrt{5}$ sayısının tam sayı olabilmesi için sayının şıklarda verilen $\sqrt{5}$ sayısı ile bölünmesi gerekir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 26:

$$A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$$

olduğuna göre, $\sqrt{A+B}$ değeri kaçtır?

- A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

Çözüm:

$$A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$$

$$B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{4} + \sqrt{100} = 2 + 10 = 12$$

olacağından,

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{8+12} = \sqrt{20}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 27:

$$(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$$(2 + \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ olacağından,}$$

$$(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= 7 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Dikkat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

eşitliklerini hatırlayınız.

Örnek 28:

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm:

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4} - \sqrt{6}$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 29:

$$\sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} &= \sqrt{(\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1)} \\ &= \sqrt{\sqrt{25} - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1} \\ &= \sqrt{5-1} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Dikkat

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

eşitliğini hatırlayınız.

Örnek 30:

$$\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{-3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $-\sqrt[3]{3}$ D) $-2\sqrt[3]{3}$ E) $-3\sqrt[3]{3}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\bullet \sqrt[3]{-24} &= \sqrt[3]{-8 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3} = -2 \cdot \sqrt[3]{3} \\ \bullet \sqrt[3]{-3} &= \sqrt[3]{(-1) \cdot 3} = -\sqrt[3]{3} \text{ olacağından,} \\ \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{-3} &= (-2\sqrt[3]{3}) + (-\sqrt[3]{3}) \\ &= -3\sqrt[3]{3} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

29.

$$\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

30.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 3 E) 2

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

4) Kök Derecesini Genişletme ve Sadeleştirme

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[k \cdot m]{a^{k \cdot n}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^k}} \text{ dir.}$$

$$\diamond \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5 \cdot 2]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[10]{2^6}$$

$$\diamond \sqrt[15]{3^{10}} = \sqrt[15 \cdot 5]{3^{10 \cdot 5}} = \sqrt[75]{3^{50}} = \sqrt[3]{3^2} \text{ gibi.}$$

Örnek 31:

$$\sqrt[12]{2^6} + \sqrt[10]{2^5}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt[6]{2}$ E) $\sqrt[5]{2}$

Çözüm:

$$\bullet \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12 \cdot 6]{2^{6 \cdot 6}} = \sqrt[72]{2^{36}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$\bullet \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10 \cdot 5]{2^{5 \cdot 5}} = \sqrt[50]{2^{25}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2} \text{ olacağından,}$$

$$\sqrt[12]{2^6} + \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 32:

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt[4]{2}$ B) $2\sqrt[6]{2}$ C) $4\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt[6]{2}$ E) $\sqrt[3]{4}$

Çözüm:

I. yol : Kök derecelerini 6 da eşitlersek,

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^4}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^3} \text{ olur.}$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2\sqrt[6]{2} \text{ bulunur.}$$

II. yol : $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2\sqrt[6]{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 33:

$$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[6]{2}$ C) $\sqrt[12]{2}$ D) $\sqrt[12]{32}$ E) $\sqrt[6]{32}$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[2]{2^1}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 34:

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt[6]{12}$ B) $\sqrt[6]{18}$ C) $\sqrt[6]{6}$ D) $\sqrt[3]{12}$ E) $\sqrt[3]{6}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Çözüm:

Kök derecelerini 6 da eşitlersek,

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{12^{1.2}}}{3 \cdot \sqrt[3]{2^{1.3}}} = \frac{\sqrt[6]{12^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{144}}{\sqrt[6]{8}} \\ = \sqrt[6]{\frac{144}{8}} = \sqrt[6]{18} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

5) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ dir.

- ♦ $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$
- ♦ $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$
- ♦ $(\sqrt[5]{6^3})^4 = \sqrt[5]{(6^3)^4} = \sqrt[5]{6^{12}}$ gibi.

Örnek 35:

$$(\sqrt[4]{3})^2 \cdot (\sqrt[4]{2})^3$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{24}$ C) $\sqrt{12}$ D) $\sqrt[4]{36}$ E) $\sqrt[4]{72}$

Çözüm:

$$(\sqrt[4]{3})^2 \cdot (\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{2^3} \\ = \sqrt[4]{9 \cdot 8} \\ = \sqrt[4]{9 \cdot 8} \\ = \sqrt[4]{72} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 36:

$$a = \sqrt[5]{x^3 \cdot y^4}$$

$$b = \sqrt[5]{x^4 \cdot y^2}$$

olduğuna göre, $a^4 \cdot b^2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $x^4 y^4$ B) $x^2 y^4$ C) $x^4 y^2$ D) $x^3 y^3$ E) $x^2 y^2$

Çözüm:

- $a = \sqrt[5]{x^3 \cdot y^4}$ ise $a^4 = (\sqrt[5]{x^3 \cdot y^4})^4 = \sqrt[5]{(x^3)^4 \cdot (y^4)^4} = \sqrt[5]{x^{12} \cdot y^{16}}$
- $b = \sqrt[5]{x^4 \cdot y^2}$ ise $b^2 = (\sqrt[5]{x^4 \cdot y^2})^2 = \sqrt[5]{(x^4)^2 \cdot (y^2)^2} = \sqrt[5]{x^8 \cdot y^4}$ olacağından,

$$a^4 \cdot b^2 = \sqrt[5]{x^{12} \cdot y^{16}} \cdot \sqrt[5]{x^8 \cdot y^4} \\ = \sqrt[5]{x^{12} \cdot y^{16} \cdot x^8 \cdot y^4} \\ = \sqrt[5]{x^{20} \cdot y^{20}} \\ = x^{\frac{20}{5}} \cdot y^{\frac{20}{5}} \\ = x^4 \cdot y^4 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

6) İç İçe Kökler

a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

b) $\sqrt[n]{b \sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{b^n \cdot a}$

- ♦ $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$, $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[5 \cdot 4]{3} = \sqrt[20]{3}$
- ♦ $\sqrt[3]{2 \sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2 \cdot 5} = \sqrt[6]{20}$, $\sqrt[4]{3 \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4 \cdot 3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[12]{54}$ gibi.

Örnek 37:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt[6]{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt[4]{10}$ D) $\sqrt[6]{20}$ E) $\sqrt[6]{10}$

Çözüm:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} \cdot \sqrt[3 \cdot 3]{5} \\ = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[9]{5} \\ = \sqrt[6 \cdot 3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[18]{40} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 38:

$$\sqrt{2^3 \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt[6]{2}$ E) $\sqrt[6]{32}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{2^3 \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}} &= \sqrt{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \\ &= \sqrt{2^{\frac{13}{6}}} \\ &= \sqrt[6]{2^6} \\ &= 2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 39:

$$\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2^x$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm:

I. yol : $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2^x$ ise

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} &= \sqrt{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^3} \\ &= \sqrt[3]{2^3} = 2 \\ 2 &= 2^x \text{ olduğundan,} \\ 2^1 &= 2^x \\ x &= 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

II. yol : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} &= \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^2} \\ &= \sqrt{2^1 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} = 2 \text{ olur.} \\ 2^x &= 2^1 \text{ ise } x = 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 40:

$$\sqrt{2^3 \sqrt{6}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{x}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{2^3 \sqrt{6}} &\text{ işleminde, } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ eşitliğini kullanırsak,} \\ \sqrt{2^3 \sqrt{6}} &= \sqrt{2^3} \cdot \sqrt[6]{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{6} \text{ olacaktır.} \\ \text{O halde,} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{6} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{x} \\ \sqrt[6]{6} &= \sqrt[6]{x} \\ x &= 6 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

c) $\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}}$ Şeklindeki Köklü İfadeler

- ♦ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ sayısının eşitini bulalım.

$$\begin{aligned} 5+2\sqrt{6} &= 3+2+2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \quad (a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2) \text{ idi.} \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde,

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ olacaktır.}$$

- ♦ $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ sayısının eşitini bulalım.

$$\begin{aligned} 8-2\sqrt{15} &= 5+3-2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \quad (a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2) \text{ idi.} \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde,

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{5} - \sqrt{3}| = \sqrt{5} - \sqrt{3} \text{ olacaktır.}$$

Kural :

$\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}}$ ifadesinde $x+y=a$, $x \cdot y=b$ ve $x>y$ olacak şekilde x ve y sayıları için; $\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$ dir.

Kural içteki köklü ifadenin katsayısı 2 olduğunda kullanılır.

♦ $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 3+2 & 3 \cdot 2 \end{array}$

♦ $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 5+3 & 5 \cdot 3 \end{array}$

♦ $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 2+1 & 2 \cdot 1 \end{array}$

♦ $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ gibi.
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 4+3 & 4 \cdot 3 \end{array}$

Örnek 41:

$$\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{7}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{7}$ D) $1 - \sqrt{7}$ E) 7 A) 2 B) 6 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

Örnek 42:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + \sqrt{1} = \sqrt{7} + 1$ olacağından,
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 7+1 & 7 \cdot 1 \end{array}$

$\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} = 1$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Çözüm:

• $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 3+1 & 3 \cdot 1 \end{array}$

• $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$ olacağından,
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 3+1 & 3 \cdot 1 \end{array}$

$\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1$
 $= 2\sqrt{3}$ bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

31. $\sqrt{9+2\sqrt{20}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{5}-2$ B) $\sqrt{5}+2$ C) $\sqrt{5}$
D) 3 E) 1

32. $\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) -2 E) 1

Örnek 43:

$$\sqrt{6+\sqrt{20}}-1$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

Çözüm:

$$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{6+\sqrt{4 \cdot 5}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5+1+2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5}+1 \text{ olacağından,}$$

$$\sqrt{6+\sqrt{20}}-1 = \sqrt{5}+1-1 = \sqrt{5} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

7) Paydayı Rasyonel Yapma

a) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ (Pay ve payda $\sqrt{b}$ ile çarpıldı.)

işlemleri yapılarak payda rasyonel hale getirilebilir.

♦ $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

♦ $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

♦ $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ gibi.

b) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$ (Pay ve payda $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ ile genişletildi.)

$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$ (Pay ve payda $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ile genişletildi.)

işlemleri yapılarak payda rasyonel hale getirilebilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

$$\diamond \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$\diamond \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\diamond \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$\diamond \frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{(3-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})} = \frac{1 \cdot (3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7} \text{ gibi.}$$

Örnek 44:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{2}} + \sqrt{18} &= \frac{4}{\sqrt{2}} + \sqrt{9 \cdot 2} \\ &= \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{6}} - \sqrt{5} &= \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{6}} - \sqrt{5} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{5} + \frac{12\sqrt{6}}{6} - \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} + 2\sqrt{6} - \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{6} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 46:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad (\text{Paydaları eşitleyelim.}) \\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{6}} \quad (\text{Pay ve paydayı } \sqrt{6} \text{ ile çarpalım.}) \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 45:

$$\frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{6}} - \sqrt{5}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 47:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{2}+1$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{2} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 48:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 2 E) 5

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} + \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} + \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3} + \sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{5} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 49:

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $\sqrt{5}$ E) $2+\sqrt{5}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} &= \frac{4 \cdot (3-\sqrt{5})}{9-5} + \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{4 \cdot (3-\sqrt{5})}{4} + \sqrt{5} \\ &= 3-\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= 3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

KÖKLÜ İFADELERDE DENKLEM VE SIRALAMA

- 1) $\sqrt[n]{x} = a$ şeklindeki denklem çözümlerinde eşitliğin her iki yanının n. dereceden kuvveti alınarak işlem yapılır.

♦ n çift ise $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek 50:

$$\sqrt{x-2}=5$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 29 B) 27 C) 25 D) 23 E) 21

Çözüm:

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\sqrt{x-2}=5 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2=(5)^2$$

$$x-2=25$$

$$x=27 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 51:

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+7}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) {8} B) {4} C) {-2} D) {-8, 8} E) {4, 8}

Çözüm:

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{x+7})^2 \Rightarrow 2x-1 = x+7$$

$$x = 8 \text{ olur.}$$

$x=8$ değeri denklemde yerine yazıldığında eşitliğin sağlandığı görülür.

O halde, $\mathcal{C} = \{8\}$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 52:

$$\sqrt{3x-2} = \sqrt{x-10}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) {-4, 4} B) {0} C) {-4} D) $\mathcal{R}$ E) $\emptyset$

Çözüm:

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (\sqrt{x-10})^2 \Rightarrow 3x-2 = x-10$$

$$2x = -8$$

$$x = -4 \text{ bulunur.}$$

$x = -4$ değeri denklemde yerine yazıldığında köklü ifadelerin kök içlerinin negatif olduğu görülür. Dolayısıyla $x = -4$ için köklü ifadeler tanımlı (gerçek sayı) değildir.

O halde, $\mathcal{C} = \emptyset$ dir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

33. $\sqrt[3]{2x-6} = 2$
eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

34. $\sqrt{x^2-1} = 2\sqrt{2}$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\emptyset$ B) {1, 3} C) {-1, 2}
D) {-3, 3} E) {0, 3}

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

! Dikkat

Kök derecelerinin çift olduğu eşitliklerde bulunan değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

! Dikkat

Kök derecelerinin eşit olmadığı denklemlerde $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ eşitliği kullanılır.

Örnek 53:

$$\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[3]{2^x}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm:

$$\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[3]{2^x} \text{ ise } 2^{\frac{x-1}{2}} = 2^{\frac{x}{3}} \text{ elde edilir.}$$

Üslü denklemlerde tabanlar eşit ise üsler de eşit olacaktır;

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3x-3=2x$$

$$x=3 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

Köklü sayılarla sıralama işlemi yapabilmemiz için kök derecelerinin eşit olması gerekir. Kök dereceleri eşit değil ise önce dereceler eşitlenir sonra sıralama yapılır.

Örnek 54:

$$a=\sqrt{10}, b=3\sqrt{2}, c=2\sqrt{3}$$

sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $b < c < a$ B) $c < b < a$ C) $a < c < b$ D) $c < a < b$ E) $a < b < c$

Çözüm:

- $a=\sqrt{10}$
- $b=3\sqrt{2}=\sqrt{9 \cdot 2}=\sqrt{18}$
- $c=2\sqrt{3}=\sqrt{4 \cdot 3}=\sqrt{12}$ yazılabileceğinden,

$\sqrt{10} < \sqrt{12} < \sqrt{18}$ sıralaması elde edilir. O halde doğru sıralama $a < c < b$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 55:

$$a=\sqrt[3]{5}, b=\sqrt{3}, c=\sqrt[6]{22}$$

sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a < b < c$ B) $b < c < a$ C) $b < a < c$ D) $c < b < a$ E) $c < a < b$

Çözüm:

Kök dereceleri eşit olmadığından dereceleri 6 da eşitleyelim.

- $a=\sqrt[3]{5}$ ise $a=\sqrt[2 \cdot 3]{5^{2 \cdot 1}}=\sqrt[6]{25}$
- $b=\sqrt{3}$ ise $b=\sqrt[3 \cdot 2]{3^{3 \cdot 1}}=\sqrt[6]{27}$
- $c=\sqrt[6]{22}$

yazılabileceğinden,

$\sqrt[6]{22} < \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$ sıralaması elde edilir. O halde, doğru sıralama $c < a < b$ dir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Köklü Sayılar

Örnek 56:

$$\sqrt{x-1} < 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{y+3} < 3\sqrt{2}$$

olduğuna göre, $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

Çözüm:

$$\sqrt{x-1} < 2\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 < (2\sqrt{3})^2$$

$$x-1 < 12$$

$$x < 13 \dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{y+3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{y+3})^2 < (3\sqrt{2})^2$$

$$y+3 < 18$$

$$y < 15 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ numaralı eşitsizlikler alt alta toplanırsa

$$x < 13$$

$$y < 15$$

$$\begin{array}{r} x < 13 \\ + \quad y < 15 \\ \hline x+y < 28 \end{array} \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri 27 dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 57:

$$\sqrt{2x-4} \leq \sqrt{x+4}$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 38 B) 35 C) 32 D) 27 E) 21

Çözüm:

$$\sqrt{2x-4} \leq \sqrt{x+4} \Rightarrow (\sqrt{2x-4})^2 \leq (\sqrt{x+4})^2$$

$$2x-4 \leq x+4$$

$$x \leq 8 \dots \textcircled{1} \text{ olur.}$$

Ayrıca köklü ifadelerin tanımlı (reel) olabilmesi için

$$2x-4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 4$$

$$x \geq 2 \dots \textcircled{2}$$

$$x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ ve $\textcircled{3}$ numaralı eşitsizliklerden $2 \leq x \leq 8$ elde edilir.

x in alabileceği tam sayı değerleri 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 olup toplamı 35 tir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 58:

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{10}, \quad b = \sqrt{5} + \sqrt{8}, \quad c = \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $b > c > a$ B) $b > a > c$ C) $a > b > c$ D) $c > a > b$ E) $c > b > a$

Çözüm:

$$\bullet \quad a = \sqrt{3} + \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{10})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$$

$$a^2 = 3 + 10 + 2\sqrt{30}$$

$$a^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

$$\bullet \quad b = \sqrt{5} + \sqrt{8} \Rightarrow b^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8}$$

$$b^2 = 5 + 8 + 2\sqrt{40}$$

$$b^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$\bullet \quad c = \sqrt{6} + \sqrt{7} \Rightarrow c^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{7})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$$

$$c^2 = 6 + 7 + 2\sqrt{42}$$

$$c^2 = 13 + 2\sqrt{42} \text{ olur.}$$

a^2 , b^2 ve c^2 sayılarının sadece kök içleri farklı olduğundan sıralama $c > b > a$ şeklinde olacaktır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Üslü ve Köklü Sayılar

Etkinlik - 5

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "✗" ile işaretleyiniz.

- a) $2^{-2} = \frac{1}{4}$ ☐ b) $3^5 + 3^5 = 3^{10}$ ☐
- c) $5^4 \cdot 5^4 = 5^8$ ☐ d) $2^6 : 2^{-6} = 1$ ☐
- e) $(-2^3)^2 = (-2)^6$ ☐ f) $(3^4)^5 = (3^5)^4$ ☐

Etkinlik - 6

$$x = -3$$

$$y = -1$$

$$z = 2$$

değerleri için aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

- a) $x^y + z^x = (.....)$
- b) $y^z + z^y = (.....)$
- c) $(x+z)^y = (.....)$
- d) $y^x - z^{-x} = (.....)$
- e) $(x+y+z)^{x-y} = (.....)$

Etkinlik - 7

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "✗" ile işaretleyiniz.

- a) $\sqrt{(-7)^2} = -7$ ☐ b) $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ ☐
- c) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - 1$ ☐ d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$ ☐
- e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$ ☐ f) $(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) = 2$ ☐

Etkinlik - 8

1. Aşağıda verilen köklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.

- a) $\sqrt{50} =$ b) $\sqrt{63} =$
- c) $\sqrt{98} =$ d) $\sqrt{216} =$
- e) $\sqrt{150} =$ f) $\sqrt{600} =$

2. Aşağıdaki işlemlerden hangilerinin sonucu rasyonel bir sayıdır? İşaretleyiniz.

- a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}-1)$ ☐ b) $(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)$ ☐
- c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ ☐ d) $\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ ☐
- e) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{8}}$ ☐ f) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ ☐

KÖKLÜ SAYILAR

Test : 12

1. $\sqrt{(-8)^2} + \sqrt[3]{(-3)^3}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 11 B) 5 C) -2 D) -5 E) -11

2. $\sqrt{1 - \frac{3}{4}} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

3. $\sqrt{0,16} + \sqrt{0,25} + \sqrt{0,01}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0,8 B) 0,9 C) 1 D) 1,1 E) 1,2

4. $\sqrt[3]{1 - \frac{9}{8}} + \sqrt[4]{1 - \frac{15}{16}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

5. Aşağıdaki sayılardan hangisi gerçek sayı değildir?

- A) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B) $\sqrt[3]{-2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt[5]{-1}$ E) $\sqrt[4]{-1}$

6. $\frac{\sqrt[7]{3^7} + \sqrt[5]{(-5)^5}}{\sqrt[4]{(-2)^4}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

KÖKLÜ SAYILAR

Test : 12



7. $\sqrt{m-3} + \sqrt{6-m}$

İfadesi bir gerçak sayı belirttiğine göre, m'nin alabileceği farklı tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

- A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

www.birey akademi.com

8. $x < 0 < y$ olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x} + \frac{\sqrt[4]{y^4}}{y} + \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9. $\sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + \sqrt[3]{(3-\sqrt{6})^3}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B)
- $2\sqrt{6}-4$
- C)
- $2-2\sqrt{6}$
-
- D)
- $\sqrt{6}$
- E)
- $-2-2\sqrt{6}$

10. $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A)
- $-2\sqrt{3}$
- B)
- $-\sqrt{3}$
- C) 0 D)
- $\sqrt{3}$
- E)
- $2\sqrt{3}$

11. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

A) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ C) $\frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

D) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ E) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$



12. $x\sqrt{2} - \sqrt{27} = \sqrt{18} - x\sqrt{3}$

Eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C)
- $\sqrt{2}$
- D)
- $\sqrt{3}$
- E)
- $\sqrt{6}$

www.birey akademi.com

1. $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + 1) - 5$
işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) -5 D) $-\sqrt{5}$ E) $5 + \sqrt{5}$



2. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 10 B) 9 C) $3\sqrt{11}$ D) $1 - 3\sqrt{11}$ E) 11

www.bireyakađemi.com

3. $\left(\frac{6}{\sqrt{6}} + \sqrt{24} \right) : \frac{1}{\sqrt{6}}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 3 B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{6}$ E) 18

4. $\sqrt{3} \cdot a = \sqrt{12}$

$\sqrt{2} \cdot b = \sqrt{50}$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

A) $2\sqrt{20} + 4\sqrt{45} = 16\sqrt{5}$

B) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} = \sqrt{2}$

C) $\sqrt{24} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$

D) $\sqrt{98} - \sqrt{72} = 2\sqrt{2}$

E) $2\sqrt{90} + 3\sqrt{40} = 12\sqrt{10}$



6. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{3} - 1$ E) $\sqrt{2} + 1$

www.bireyakađemi.com

KÖKLÜ SAYILAR

Test : 13

7. $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \cdot \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 4 B)
- $2\sqrt{2}$
- C)
- $\sqrt{2}$
- D) 2 E) 1

8. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A)
- $\sqrt[4]{8}$
- B)
- $\sqrt{2}$
- C)
- $\sqrt[3]{2}$
- D)
- $\sqrt[8]{8}$
- E)
- $\sqrt[8]{2}$

9. $\sqrt{2}=a$
 $\sqrt{3}=b$

olduğuna göre, $\sqrt{150}$ sayısının a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 5ab B) 10ab C)
- $20a^2b$
- D)
- $a^2 \cdot b^3$
- E)
- $5ab^2$

10. $\sqrt{5\sqrt{5}} = 5^{x-1}$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 2 B)
- $\frac{7}{4}$
- C)
- $\frac{5}{2}$
- D)
- $\frac{1}{3}$
- E) 1

11. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B)
- $\sqrt{2}$
- C)
- $\sqrt{3}$
- D)
- $\sqrt{5}$
- E)
- $\sqrt{15}$

12. $\sqrt{10+2\sqrt{21}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B)
- $\sqrt{10}$
- C)
- $\sqrt{3}-1$
- D)
- $2\sqrt{7}$
- E)
- $\sqrt{7}-1$



13. $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A)
- $3-\sqrt{5}$
- B)
- $\sqrt{5}+2$
- C)
- $4\sqrt{5}$
- D) 3 E) 5

www.birey akademi.com

14. $a = 2\sqrt[3]{15}$

$b = 3\sqrt[3]{4}$

$c = 4\sqrt[3]{2}$

sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $b > c > a$
- B)
- $a > b > c$
- C)
- $a > c > b$
-
- D)
- $c > a > b$
- E)
- $c > b > a$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Oranti

1 - ORAN

Aynı türden olan ya da aynı birime sahip iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına **oran** denir. a ve b gerçel sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesine **a'nın b'ye oranı** denir.

- ♦ a=6 cm ve b=8 cm ise a'nın b'ye oranı;

$$\frac{a}{b} = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- ♦ x=25 lira ve y=35 lira ise x'in y'ye oranı;

$$\frac{x}{y} = \frac{25 \text{ lira}}{35 \text{ lira}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

- ♦ x=30 gram ve y=10 gram ise x+y'nin x-y'ye oranı;

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{30 \text{ gram} + 10 \text{ gram}}{30 \text{ gram} - 10 \text{ gram}} = \frac{40 \text{ gram}}{20 \text{ gram}} = 2$$

- ♦ m=20 kg ve n=30 kg ise m'nin n'ye oranı;

$$\frac{m}{n} = \frac{20 \text{ kg}}{30 \text{ kg}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

- ♦ a=0,5 m ve b=0,8 m ise a'nın b'ye oranı;

$$\frac{a}{b} = \frac{0,5 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8}$$

- ♦ a=4 cm, b=6 cm ve c=8 cm ise a.b'nin c²'ye oranı;

$$\frac{a \cdot b}{c^2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{(8 \text{ cm})^2} = \frac{24 \text{ cm}^2}{64 \text{ cm}^2} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

Örnek 1:

30 kişilik bir sınıfta 18 erkek öğrenci vardır.

Buna göre,

- a) Erkek öğrenci sayısının kız öğrenci sayısına oranını
b) Kız öğrenci sayısının sınıf mevcuduna oranını bulalım.

Çözüm:

30 kişilik bir sınıfta 18 erkek öğrenci olduğundan kız öğrenci sayısı 30 - 18 = 12 olur.

a) $\frac{\text{Erkek öğrenci sayısı}}{\text{Kız öğrenci sayısı}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{\text{Kız öğrenci sayısı}}{\text{Sınıf mevcudu}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Örnek 2:

80 kg domates alan bir manav domateslerden 16 kilosunun çürük olduğunu görüyor.

Buna göre, sağlam domates miktarının aldığı tüm domateslerin miktarına oranı kaçtır?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm:

80 kg domatesin 16 kilosunu çürük olduğundan sağlam domates miktarı 80 - 16 = 64 kg olacaktır.

O halde,

$$\frac{\text{Sağlam domates miktarı}}{\text{Tüm domateslerin miktarı}} = \frac{64 \text{ kg}}{80 \text{ kg}} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER

Altın Oran:



AB doğru parçası,

$|AC|=a$ ve $|BC|=b$ birim olacak şekilde iki parçaya ayrılırsın.

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ eşitliğini sağlayan $\frac{a}{b}$ oranının pozitif değerine **Altın Oran** denir.

Bu oran $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ irrasyonel sayısına eşittir ve yaklaşık değeri 1,618 dir.

Altın oran,

- ◆ İdeal ölçülerde bir insan vücudunda
- ◆ Çam kozalaklarında spiraller üzerindeki tanecik sayılarının oranında
- ◆ Ayçiçeğinin sağ ve sol yönünde yer alan çekirdeklerin sayılarında
- ◆ Arı kovanlarındaki dişi ve erkek arı sayıları arasında mevcuttur.

Örnek 3:

Fatih 15, kardeşi Yasemin ise 12 yaşındadır.

6 yıl sonra Fatih'in yaşının Yasemin'in yaşına oranı aşağıdakilerden hangisi olacaktır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{6}$

Çözüm:

15 yaşında olan Fatih 6 yıl sonra $15+6=21$, 12 yaşında olan Yasemin ise 6 yıl sonra $12+6=18$ yaşında olacağından,

$$\frac{\text{Fatih'in yaşı}}{\text{Yasemin'in yaşı}} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6} \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 4:

Çiftçi Hasan Bey'in dikdörtgen biçiminde iki tarlası vardır. Hasan Bey, boyutları 60 ve 90 metre olan tarlasına patates, boyutları 40 ve 120 metre olan diğer tarlasına ise soğan ekmiştir.

Hasan Bey'in patates ektiği tarlasının alanının soğan ektiği tarlasının alanına oranı kaçtır?

- A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{9}{8}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{10}{9}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm:

Patates ekili tarlanın alanı $= 60 \text{ m} \cdot 90 \text{ m} = 5400 \text{ m}^2$

Soğan ekili tarlanın alanı $= 40 \text{ m} \cdot 120 \text{ m} = 4800 \text{ m}^2$ dir.

$$\text{O halde, } \frac{\text{Patates ekili tarlanın alanı}}{\text{Soğan ekili tarlanın alanı}} = \frac{5400 \text{ m}^2}{4800 \text{ m}^2} = \frac{5400}{4800} = \frac{9}{8} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

2 - ORANTI

En az iki oranın eşitliğine **orantı** denir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısında k orantı sabitidir.

- ◆ $\frac{6}{12} = \frac{4}{8}$ ifadesi bir orantıdır. Çünkü $\frac{6}{12}$ ve $\frac{4}{8}$ oranları birbirine eşittir.

$$\frac{6}{12} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ olacağından bu orantının orantı sabiti } k = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Orantının Özellikleri

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $a.d = b.c$ dir.

Burada, a ve d ye **dışlar**, b ve c ye **içler** denir. Dolayısıyla dışların çarpımı içlerin çarpımına eşittir.

$$\diamond \frac{6}{12} = \frac{4}{8} \Rightarrow 6.8 = 12.4$$

$$48 = 48$$

$$\diamond \frac{9}{15} = \frac{6}{10} \Rightarrow 9.10 = 6.15$$

$$90 = 90$$

Örnek 5:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3}$$

orantısında x değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \text{ ise } 2.(x+1) = 3.(x-1) \text{ (içler dışlar çarpımı yapıldı)}$$

$$2x+2=3x-3$$

$$x=5 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 6:

$$\frac{2x+2y-z}{3x+5y+z} = \frac{2}{5}$$

olduğuna göre, $\frac{x}{z}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm:

Verilen orantıda içler dışlar çarpımı yapılırsa,

$$\frac{2x+2y-z}{3x+5y+z} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5.(2x+2y-z) = 2.(3x+5y+z)$$

$$10x + 10y - 5z = 6x + 10y + 2z$$

$$4x = 7z \text{ olur.}$$

$$4x = 7z \text{ ise } \frac{x}{z} = \frac{7}{4} \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

35. $\frac{a-b}{a} = \frac{3}{4}$

olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

36. $\frac{a+2}{a+6} = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise

a) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (oranlar ters çevrilebilir.)

b) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (dışlar yer değişebilir.)

c) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (içler yer değişebilir.)

♦ $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ise

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, $\frac{4}{b} = \frac{3}{a}$, $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ yazılabilir.

3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ve $x \neq 0$, $y \neq 0$ olmak üzere,

♦ $\frac{x.a}{x.b} = \frac{y.c}{y.d} = k$

♦ $\frac{x.a+y.c}{x.b+y.d} = k$

♦ $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = k^2$

♦ $\frac{x.a^2+y.c^2}{x.b^2+y.d^2} = k^2$

♦ $\frac{a.c}{b.d} = k^2$

eşitlikleri yazılabilir.

Örnek 7:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\frac{3a+5c}{3b+5d}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$

B) 3

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{1}{9}$

E) 1

Çözüm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{5c}{5d} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3a+5c}{3b+5d} = \frac{1}{3} \text{ olacaktır.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 8:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{4}$$

$$2a+3c=6$$

olduğuna göre, $2b+3d$ toplamı kaçtır?

A) 16

B) 18

C) 20

D) 22

E) 24

Çözüm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{3c}{3d} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{1}{4} \text{ olacaktır.}$$

$$\frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{2b+3d} = \frac{1}{4}$$

$$2b+3d = 6.4$$

$$2b+3d = 24 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

ORANTI ÇEŞİTLERİ

1) **Doğru Orantılı Çokluklar:** Birbiriyle orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa veya biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu çokluklar doğru orantılıdır.

Örneğin;

a) Tanesi 4 lira olan kalem

1 tane alınırsa 4 lira

2 tane alınırsa 8 lira

3 tane alınırsa 12 lira

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

x tane alınırsa 4.x lira ödeme yapılması gerekir.

O halde, alınan kalemlerin sayısı ile ödenen ücret doğru orantılıdır.

b) Sabit hızla yol alan bir aracın hızı 60 km/sa olduğuna göre,

1 saatte 60 km

2 saatte 120 km

3 saatte 180 km

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

x saatte 60.x km yol alacaktır.

O halde, süre ile alınan yol doğru orantılıdır.

Örnek 9:

Sabit hızla hareket eden bir araç 6 saatte 75 km yol aldığına göre, 10 saatte kaç km yol alır?

- A) 105 B) 125 C) 130 D) 145 E) 150

Çözüm:

6 saatte	↗↘	75 km yol alınırsa	$6 \cdot x = 10 \cdot 75$
10 saatte	↗↘	x km yol alınır	$6x = 750$
Doğru orantı			
$x = 125$ km olur.			

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

bryPLE

! Dikkat

Doğru orantılı ifadelerde "↗↘" şeklinde çarpım yapılarak sonuca ulaşılır.

! Dikkat

y sayısı x sayısı ile doğru orantılı ise $\frac{y}{x} = k$ veya $y = k \cdot x$ yazılabilir. ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$)

Doğru orantılı çoklukların oranı sabittir.

♦ a sayısı b sayısı ile doğru orantılı ise

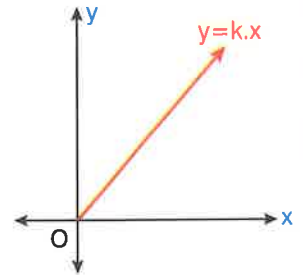
$$\frac{a}{b} = k \text{ veya } a = k \cdot b$$

♦ $(2m-1)$ sayısı (n^2+1) ile doğru orantılı ise

$$\frac{2m-1}{n^2+1} = k \text{ veya } 2m-1 = k(n^2+1) \text{ gibi.}$$

♦ $(a+2)$ sayısı $(b-1)$ sayısı ile doğru orantılı ise

$$\frac{a+2}{b-1} = k \text{ veya } a+2 = k(b-1)$$



DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Örnek 10:

(a+3) sayısı (b+1) sayısı ile doğru orantılıdır.

a=5 iken b=3 olduğuna göre, a=9 iken b kaçtır?

- A) 3,5 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7,5

Çözüm:

(a+3) ile (b+1) doğru orantılı ise $\frac{a+3}{b+1} = k$ yazılabilir.

- Bu eşitlikte a=5 ve b=3 yazarak k değerini bulalım.

$$\frac{a+3}{b+1} = k \Rightarrow \frac{5+3}{3+1} = k$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ olur.}$$

O halde orantı, $\frac{a+3}{b+1} = 2$ şeklindedir.

- a yerine 9 yazarak b değerini bulalım.

$$\frac{a+3}{b+1} = 2 \Rightarrow \frac{9+3}{b+1} = 2$$

$$\Rightarrow 12 = 2b + 2$$

$$\Rightarrow 10 = 2b$$

$$\Rightarrow b = 5 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

x, y ve z çoklukları sırasıyla a, b ve c sayıları ile doğru orantılı ise $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ yazılabilir.

Ayrıca, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ orantısı $x : y : z = a : b : c$

şeklinde de ifade edilebilir.

$$\diamond \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = k \Rightarrow x = 3k, y = 5k, z = 6k$$

$$\diamond x : y : z = 4 : 7 : 10 \Rightarrow x = 4k, y = 7k, z = 10k \text{ olur.}$$

Örnek 11:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$$

$$5a - 2b = 21$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 18 B) 15 C) 12 D) 9 E) 6

Çözüm:

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k$ dersek; a=3k ve b=4k olur.

Bu eşitlikler $5a - 2b = 21$ denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$5.3k - 2.4k = 21$$

$$15k - 8k = 21$$

$$7k = 21$$

$$k = 3 \text{ olur.}$$

k=3 ve a=3k olduğundan, a=3.3=9 bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 12:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$$3x + y - z = 20$$

olduğuna göre, z kaçtır?

- A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

Çözüm:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$ dersek; x=2k, y=3k ve z=5k olur.

Bu eşitlikler $3x + y - z = 20$ denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$3.2k + 3k - 5k = 20$$

$$6k + 3k - 5k = 20$$

$$4k = 20$$

$$k = 5 \text{ olur.}$$

k=5 ve z=5k olduğundan, z=5.5=25 bulunur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Örnek 13:

a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$a:b:c=2:3:4$$

$$a^2+b^2+c^2=116$$

olduğuna göre, $a+b+c$ toplamı kaçtır?

- A) 16 B) 18 C) 24 D) 27 E) 36

Çözüm:

$$a:b:c=2:3:4 \text{ ise}$$

$$a=2k, b=3k \text{ ve } c=4k \text{ olur.}$$

Bu eşitlikler $a^2+b^2+c^2=116$ denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$a^2+b^2+c^2=116 \Rightarrow (2k)^2+(3k)^2+(4k)^2=116$$

$$4k^2+9k^2+16k^2=116$$

$$29.k^2=116$$

$$k^2=4$$

$$k=\pm 2 \text{ olur.}$$

a, b ve c sayıları pozitif olduğundan $k=2$ alınır,

$$a=2k \Rightarrow a=2.2=4$$

$$b=3k \Rightarrow b=3.2=6$$

$$c=4k \Rightarrow c=4.2=8 \text{ elde edilir.}$$

O halde, $a+b+c=4+6+8=18$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 14:

x, y ve z birer gerçel sayıdır.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$$

$$x.y.z = 810$$

olduğuna göre, $x+y+z$ toplamı kaçtır?

- A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

Çözüm:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} = k \text{ dersek; } x=3k, y=5k \text{ ve } z=2k \text{ olur.}$$

Bu eşitlikler $x.y.z=810$ denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$x.y.z=810 \Rightarrow 3k.5k.2k=810$$

$$30.k^3=810$$

$$k^3=27$$

$$k=3 \text{ olur.}$$

Buradan,

$$x=3k \Rightarrow x=3.3=9$$

$$y=5k \Rightarrow y=5.3=15$$

$$z=2k \Rightarrow z=2.3=6 \text{ elde edilir.}$$

O halde, $x+y+z=9+15+6=30$ dur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 15:

120 lira yaşları 8 ve 12 olan iki çocuğa yaşları ile orantılı biçimde paylaştırılıyor.

Buna göre, büyük çocuk kaç lira alır?

- A) 64 B) 72 C) 80 D) 84 E) 96

Çözüm:

Küçük çocuk x, büyük çocuk y lira almış olsun. x ve y sayıları sırasıyla 8 ve 12 ile orantılı (doğru orantılı) olduğundan,

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = k \text{ dersek; } x=8k \text{ ve } y=12k \text{ olur.}$$

$$x+y=120 \Rightarrow 8k+12k=120$$

$$20k=120$$

$$k=6 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$x=8k \Rightarrow x=8.6=48$$

$$y=12k \Rightarrow y=12.6=72 \text{ olacaktır.}$$

Dolayısıyla büyük çocuk 72 lira alır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Örnek 16:

160 soruluk bir sınava giren Mert'in doğru cevapladığı, yanlış cevapladığı ve boş bıraktığı soru sayıları sırasıyla 11, 3 ve 2 ile orantılıdır.

Buna göre, Mert kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

- A) 143 B) 135 C) 132 D) 121 E) 110

Çözüm:

Mert'in doğru cevapladığı (D), yanlış cevapladığı (Y) ve boş bıraktığı (B) soru sayıları sırasıyla 11, 3 ve 2 ile orantılı (doğru orantılı) olduğundan,

$$\frac{D}{11} = \frac{Y}{3} = \frac{B}{2} = k \text{ dersek; } D=11k, Y=3k \text{ ve } B=2k \text{ olur.}$$

Toplam soru sayısı 160 olduğuna göre,

$$D+Y+B=11k+3k+2k=160$$

$$16k=160$$

$$k=10 \text{ bulunur.}$$

Mert'in doğru cevapladığı soru sayısı ise $11k=11.10=110$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 17:

a, b ve c sayıları arasında,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$$

eşitlikleri bulunmaktadır.

$a+b+c=36$ olduğuna göre, b kaçtır?

- A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 9

Çözüm:

a, b ve c sayıları doğru orantılı olduğundan,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ \frac{b}{c} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=k \\ b=3k \\ c=5k \end{array} \text{ yazabiliriz.}$$

$$a+b+c=36 \Rightarrow k+3k+5k=36$$

$$9k=36$$

$$k=4 \text{ olur.}$$

$k=4$ ve $b=3k$ olduğundan, $b=3.4=12$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 18:

Bir orman çiftliğinde çam, meşe ve palamut türlerinden toplam 1800 adet ağaç vardır.

Çam (Ç), meşe (M) ve palamut (P) ağaçlarının sayıları arasında,

$$\frac{\text{Ç}}{\text{M}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{M}}{\text{P}} = \frac{1}{3}$$

eşitlikleri bulunduğu göre, orman çiftliğinde bulunan palamut ağaçlarının sayısı kaçtır?

- A) 1200 B) 1260 C) 1320 D) 1400 E) 1440

Çözüm:

Çam, meşe ve palamut ağaçlarının sayıları doğru orantılı olduğundan

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{Ç}}{\text{M}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\text{M}}{\text{P}} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ç}=k \\ \text{M}=2k \\ \text{P}=6k \end{array} \text{ yazılabilir.}$$

Toplam ağaç sayısı 1800 olduğuna göre,

$$k+2k+6k=1800 \Rightarrow 9k=1800$$

$$k=200 \text{ olur.}$$

Palamut ağaçlarının sayısı ise $P=6.k=6.200=1200$ dür.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

2) **Ters Orantılı Çokluklar:** Birbiriyle orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa veya biri azalırken diğeri aynı oranda artıyorsa bu çokluklar ters orantılıdır.

Örneğin;

1 işçinin 12 saatte yaptığı bir işi eşit kapasiteli

2 işçi 6 saatte

3 işçi 4 saatte

x işçi $\frac{12}{x}$ saatte yapar.

O halde, işçi sayısı ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

Örnek 19:

Eşit kapasiteli 6 işçinin 20 günde bitirdiği bir işi bu işçilerle eşit kapasitede 10 işçi kaç günde bitirir?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 10

Çözüm:

6 işçinin $\longleftrightarrow$ 20 günde bitirdiği işi
10 işçi $\longleftrightarrow$ x günde bitirir

Ters orantı

$$6 \cdot 20 = 10 \cdot x$$

$$120 = 10x$$

$$x = 12 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.



Dikkat

Ters orantılı ifadelerde " $\longleftrightarrow$ " şeklinde çarpım yapılarak sonuca ulaşılır.

İLK ADIM SORULARI

37. 6 günde 16 çift ayakkabı yapan bir usta aynı kapasite ile 9 günde kaç çift ayakkabı yapar?

- A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

38. Eşit miktarda su akıtan 10 musluk boş bir havuzu 12 saatte doldurabiliyor.

Boş havuzun 8 saatte dolabilmesi için aynı kapasitede kaç musluk açılmalıdır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Dikkat

y sayısı x sayısı ile ters orantılı ise $y = \frac{k}{x}$ veya $y \cdot x = k$ yazılabilir. ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$)

Ters orantılı çoklukların çarpımı sabittir.

♦ a sayısı b sayısı ile ters orantılı ise

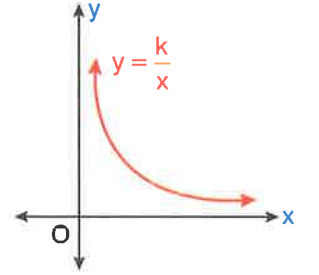
$$a = \frac{k}{b} \text{ veya } a \cdot b = k$$

♦ $(a+2)$ sayısı $(b-3)$ sayısı ile ters orantılı ise

$$a+2 = \frac{k}{b-3} \text{ veya } (a+2) \cdot (b-3) = k$$

♦ (x^2+1) sayısı $(2y+2)$ sayısı ile ters orantılı ise

$$x^2+1 = \frac{k}{2y+2} \text{ veya } (x^2+1) \cdot (2y+2) = k$$



Örnek 20:

$(a+5)$ sayısı $(b+1)$ sayısı ile ters orantılıdır.

$a=1$ iken $b=3$ olduğuna göre, $a=3$ iken b kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

Çözüm:

$(a+5)$ sayısı $(b+1)$ ile ters orantılı ise $(a+5) \cdot (b+1) = k$ yazabiliriz.

$a=1$ ve $b=3$ değerleri bu eşitlikte yazılırsa,

$$(a+5) \cdot (b+1) = k \Rightarrow (1+5) \cdot (3+1) = k$$

$$6 \cdot 4 = k$$

$$k = 24 \text{ olur.}$$

O halde orantı, $(a+5) \cdot (b+1) = 24$ şeklindedir.

$a=3$ için;

$$(3+5) \cdot (b+1) = 24$$

$$8 \cdot (b+1) = 24$$

$$b+1 = 3$$

$$b = 2 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Dikkat

x, y ve z sayıları sırasıyla a, b ve c sayıları ile ters orantılı ise $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k$ yazılabilir.

Bu eşitliklerden $x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}$ ve $z = \frac{k}{c}$ elde edilir.

♦ x, y ve z sayıları sırasıyla 3, 4 ve 5 sayıları ile ters orantılı ise

$$3x = 4y = 5z = k$$

$$x = \frac{k}{3}, y = \frac{k}{4} \text{ ve } z = \frac{k}{5} \text{ yazılabilir.}$$

Örnek 21:

x, y ve z sayıları sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılıdır.

$$x+y+z=39$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Çözüm:

x, y ve z sayıları sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılı ise

$$2x=3y=4z=k \text{ yazılabilir.}$$

Buradan $x = \frac{k}{2}$, $y = \frac{k}{3}$ ve $z = \frac{k}{4}$ olur.

$$x+y+z=39 \Rightarrow \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 39$$

$$\frac{13k}{12} = 39$$

$$k = 36 \text{ bulunur.}$$

$$x = \frac{k}{2} \text{ olduğundan } x = \frac{36}{2} = 18 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 22:

90 lira üç kişiye 3, 4 ve 6 ile ters orantılı biçimde paylaştırılıyor.

Buna göre, en az para alan kişi kaç lira almıştır?

- A) 30 B) 25 C) 24 D) 22 E) 20

Çözüm:

Üç kişinin aldığı para miktarları a, b ve c olsun. a, b ve c sayıları 3, 4 ve 6 ile ters orantılı olduğuna göre,

$$3a = 4b = 6c = k \Rightarrow a = \frac{k}{3}, b = \frac{k}{4} \text{ ve } c = \frac{k}{6} \text{ olur.}$$

a+b+c=90 olacağından

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 90 \Rightarrow \frac{9k}{12} = 90$$

$$k = 120 \text{ olur.}$$

$$\text{En az para alan kişi, } c = \frac{k}{6} \Rightarrow c = \frac{120}{6} = 20 \text{ lira alacaktır.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 23:

Bir işi aynı kapasitedeki 5 işçi 24 günde bitiriyor.

Bu işçilerle aynı kapasitede kaç işçi daha çalışırsa aynı iş 15 günde bitirilebilir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

x işçi daha çalışırsa işçi sayısı 5+x olur.

5 işçinin $\longleftrightarrow$ 24 günde bitirdiği işi

5+x işçi $\longleftrightarrow$ 15 günde bitirir

Ters orantı

$$5 \cdot 24 = (5+x) \cdot 15$$

$$120 = (5+x) \cdot 15$$

$$x=3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

3) **Bileşik Orantı:** İçerisinde ikiden fazla orantı bulunan orantılara *bileşik orantı* denir,

y sayısı x ile doğru, z ile ters orantılı ise $y = \frac{k \cdot x}{z}$ veya $k = \frac{y \cdot z}{x}$ tir. ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$)

$$\diamond (a+2) \text{ sayısı } 2b \text{ ile doğru ve } (c-1) \text{ ile ters orantılı ise } a+2 = \frac{k \cdot 2b}{c-1} \text{ veya } k = \frac{(a+2) \cdot (c-1)}{2b}$$

$$\diamond (2x+1) \text{ sayısı } (y-1) \text{ ile doğru ve } 3z \text{ ile ters orantılı ise } 2x+1 = \frac{k \cdot (y-1)}{3z} \text{ veya } k = \frac{(2x+1) \cdot (3z)}{y-1}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Oran - Orantı

Örnek 24:

(a-1) sayısı (b+1) ile doğru, (c+2) ile ters orantılıdır.

a=4, b=1 iken c=2 olduğuna göre, a=9, b=3 iken c kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

(a-1) sayısı (b+1) ile doğru (c+2) ile ters orantılı ise

$$a-1 = \frac{k \cdot (b+1)}{c+2} \text{ olur.}$$

a=4, b=1 ve c=2 değerleri eşitlikte yazılırsa,

$$a-1 = \frac{k \cdot (b+1)}{c+2} \Rightarrow 4-1 = \frac{k \cdot (1+1)}{2+2}$$

$$3 = \frac{2k}{4}$$

$$2k = 12$$

$$k = 6 \text{ olur.}$$

O halde orantımız, $a-1 = \frac{6 \cdot (b+1)}{c+2}$ şeklindedir.

a=9 ve b=3 için

$$9-1 = \frac{6 \cdot (3+1)}{c+2} \Rightarrow 8 = \frac{24}{c+2}$$

$$8 \cdot (c+2) = 24$$

$$c+2 = 3$$

$$c = 1 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 25:

480 m² arsa iki kardeşe sırasıyla 3 ile doğru, 5 ile ters orantılı biçimde paylaşılıyor.

Buna göre, kardeşlerin aldıkları arsa miktarları arasındaki fark kaç m² dir?

- A) 450 B) 420 C) 400 D) 360 E) 350

Çözüm:

Kardeşlerin aldıkları arsa miktarları a ve b olsun. a sayısı 3 ile doğru, b sayısı 5 ile ters orantılı ise

$$a = 3k \text{ ve } b = \frac{k}{5} \text{ olur.}$$

$$3k + \frac{k}{5} = 480 \Rightarrow \frac{16k}{5} = 480$$

$$k = 150 \text{ olur.}$$

Kardeşlerin aldıkları arazi miktarları,

$$a = 3k \Rightarrow a = 3 \cdot 150 = 450 \text{ m}^2$$

$$b = \frac{k}{5} \Rightarrow b = \frac{150}{5} = 30 \text{ m}^2 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla sonuç, 450-30=420 m² dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 26:

Eşit kapasitede 4 işçi 10 dönüm tarlayı 12 günde işliyorsa, bu işçilerle aynı kapasitede 6 işçi 20 dönüm tarlayı kaç günde işler?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

Bileşik orantı problemlerinde,

$$\frac{\text{I. yapılan iş}}{\text{II. yapılan iş}} = \frac{\text{I. işle ilgili diğer verilerin çarpımı}}{\text{II. işle ilgili diğer verilerin çarpımı}}$$

eşitliği kullanılabilir.

4 işçi 10 dönüm tarlayı 12 günde işlerse

6 işçi 20 dönüm tarlayı x günde işler

$$\frac{10}{20} = \frac{4 \cdot 12}{6 \cdot x} \Rightarrow 10 \cdot 6 \cdot x = 20 \cdot 4 \cdot 12$$

$$x = 16 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ORAN - ORANTI

Test : 14

1. Zeynep'in 10, Funda'nın 8 tokası vardır.

Zeynep 4 tokasını Funda'ya verirse Zeynep'in tokalarının sayısının Funda'nın tokalarının sayısına oranı kaç olur?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

2. Bir manavda 6 kg domates 9 lira, 4 kg biber 10 lira olduğuna göre, 1 kg domatesin fiyatının 1 kg biberin fiyatına oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{3}{8}$

3. Kilogramı 8 lira olan kuruyemiştenden 600 gram alan bir kişi kaç lira ödeme yapar?

- A) 6,4 B) 5,2 C) 5 D) 4,8 E) 4,4

4. 180 km'lik yolu 4 saatte alan bir araç saatteki hızını 15 km artırırsa aynı yolu kaç saatte alır?

- A) 2,5 B) 2,8 C) 3 D) 3,2 E) 3,6

- 5.

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

olduğuna göre, $\frac{a+b}{b}$ oranı kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{9}{5}$

- 6.

$$\frac{2m-3n}{3m+n} = \frac{1}{5}$$

olduğuna göre, $\frac{m}{n}$ oranı kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{16}{7}$ E) $\frac{15}{4}$

ORAN - ORANTI

Test : 14



7. $\frac{a-b}{a+b} = \frac{3}{7}$

olduğuna göre, $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{21}{29}$ B) $\frac{20}{27}$ C) $\frac{17}{23}$ D) $\frac{19}{29}$ E) $\frac{19}{27}$

www.bireyakademi.com

8. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$

olduğuna göre, $\frac{3x}{4y}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

9. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, $\frac{a+b}{b} \cdot \frac{d-c}{c}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

10. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$a+b=20$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

11. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$x+y+z=90$

olduğuna göre, y kaçtır?

- A) 24 B) 27 C) 30 D) 36 E) 42



12. $2x=3y=5z$

$x+y-z=95$

olduğuna göre, z kaçtır?

- A) 30 B) 36 C) 48 D) 54 E) 60

www.bireyakademi.com

ORAN - ORANTI

Test : 15

1. $(a+1)$ sayısı $(3b+1)$ sayısı ile doğru orantılıdır.
 $a=11$ iken $b=1$ olduğuna göre, $a=20$ iken b kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
2. 300 lira üç kardeşe sırasıyla 3, 5 ve 7 ile orantılı biçimde paylaştırılıyor.
Buna göre, en az alan kardeş kaç lira alır?
A) 90 B) 80 C) 75 D) 60 E) 45
3. Un, yağ ve şeker ağırlıkları bakımından sırasıyla 8, 5 ve 3 sayılarıyla orantılı miktarda karıştırılarak 8 kg hamur hazırlanıyor.
Buna göre, hamurda kullanılan yağ miktarı kaç kg dır?
A) 3,5 B) 3,2 C) 3 D) 2,5 E) 2

4.



Yukarıda numaralandırılmış dört kutunun her birinde kutu numaralarının kareleriyle orantılı miktarda bilye vardır.

Kutularda toplam 150 bilye bulunduğuna göre, 3 numaralı kutuda kaç bilye vardır?

- A) 15 B) 30 C) 42 D) 45 E) 54

5.

$(m-2)$ sayısı $(2n+2)$ sayısı ile ters orantılıdır.

$m=6$ iken $n=3$ olduğuna göre, $m=10$ iken n kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

6.

Üç kardeşin yaşları sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılıdır.

Kardeşlerin yaşları toplamı 52 olduğuna göre, en küçük kardeş kaç yaşındadır?

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

ORAN - ORANTI

Test : 15

7. $(m-n)$ ve $(m+n)$ sayıları sırasıyla 5 ve 11 ile doğru orantılıdır.

$$m.n=96$$

olduğuna göre, m nin pozitif değeri kaçtır?

- A) 8 B) 12 C) 16 D) 32 E) 64



8. Birbirini çeviren iki dişli çarktan biri 6 kez döndüğünde diğeri 10 kez dönmektedir.

İki çarkta toplam 120 diş bulunduğuna göre, büyük çark kaç dişlidir?

- A) 75 B) 72 C) 70 D) 65 E) 64

www.bireyakademi.com

9. Eşit kapasiteli 6 işçi bir işi günde 6 saat çalışarak 8 günde bitiriyor.

Aynı kapasitede 8 işçi aynı işi günde 12 saat çalışarak kaç günde bitirir?

- A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

10. 70 lira iki kardeşe 2 ile doğru, 3 ile ters orantılı paylaştırılıyor.

Buna göre, en az alan kardeş kaç lira alır?

- A) 20 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8



11. Bir ressam yeşil (Y), beyaz (B) ve mor (M) renkte boyaları,

$$\frac{Y}{B} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{B}{M} = \frac{6}{5}$$

oranlarında karıştırarak 300 gramlık bir karışım elde ediyor.

Buna göre, karışımındaki beyaz boya kaç gramdır?

- A) 150 B) 120 C) 112 D) 108 E) 100

www.bireyakademi.com



12. Bir izci kampında 15 izciye 10 gün yetecek kadar erzak vardır.

2 gün sonra kamptan 5 izci ayrılırsa kalan erzak kampta kalan diğer izcilere kaç gün yeter?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

www.bireyakademi.com

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

1- SAYI VE KESİR PROBLEMLERİ

Problemlerin çözümünde verilen cümlelerin uygun biçimde matematik diline çevrilmesi gerekir.

Aşağıda bazı ifadelerin matematik diline çevrilerek yazılışı verilmiştir. İnceleyiniz.

Bilinmeyen sayımız x olmak üzere,

- ♦ Bir sayının 4 fazlası : $x+4$
- ♦ Bir sayının 2 eksiği : $x-2$
- ♦ Bir sayının 5 katı : $5 \cdot x$
- ♦ Bir sayının 7 katının 2 fazlası : $7x+2$
- ♦ Bir sayının 2 fazlasının 7 katı : $7(x+2)$
- ♦ Bir sayının $\frac{2}{5}$ i : $\frac{2x}{5}$
- ♦ Bir sayının $\frac{3}{4}$ ünün 1 fazlası : $\frac{3x}{4} + 1$
- ♦ Bir sayının 1 eksiğinin $\frac{7}{10}$ u : $\frac{7(x-1)}{10}$
- ♦ Bir sayının karesinin 4 fazlası : x^2+4
- ♦ Bir sayının 3 eksiğinin karesi : $(x-3)^2$

Ayrıca;

- ♦ Toplamları 20 olan iki sayı : x ve $(20-x)$
- ♦ Farkları 5 olan iki sayı : x ve $(x+5)$
- ♦ Oranları $\frac{2}{7}$ olan iki sayı : $2x$ ve $7x$
- ♦ Ardışık üç tam sayı : $x, x+1, x+2$
- ♦ Ardışık üç çift sayı : $x, x+2, x+4$ (x çift sayı)
- ♦ Ardışık üç tek sayı : $x, x+2, x+4$ (x tek sayı)

yazılabilir.

İLK ADIM SORULARI

39. 2 eksiğinin $\frac{1}{3}$ ü 4 olan sayı kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

40. 4 fazlasının yarısı kendisine eşit olan sayı kaçtır?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 1:

Hangi sayının 3 katının 6 eksiği, aynı sayının 4 eksiğinin 5 katına eşittir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

Sayımız x olsun. O halde denklem,

$$3x - 6 = 5 \cdot (x - 4)$$

olacaktır. Denklem çözümü yapılırsa,

$$3x - 6 = 5 \cdot (x - 4) \Rightarrow 3x - 6 = 5x - 20$$

$$-6 + 20 = 5x - 3x$$

$$14 = 2x$$

$$x = 7 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 2:

Bir sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı kız öğrencilerin sayısının 3 katından 7 eksiktir.

Sınıf mevcudu 33 olduğuna göre, kız öğrenci sayısı kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 19

Çözüm:

Kız öğrenci sayısına x dersek erkek öğrenci sayısı $3x - 7$ olacaktır.

Sınıf mevcudu 33 olduğuna göre,

$$x + (3x - 7) = 33$$

$$4x - 7 = 33$$

$$4x = 40$$

$$x = 10 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 3:

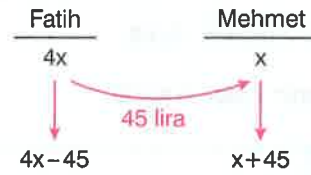
Fatih'in parası Mehmet'in parasının 4 katıdır. Fatih Mehmet'e 45 lira verirse paraları eşit olacaktır.

Buna göre, Mehmet'in kaç lirası vardır?

- A) 30 B) 32 C) 35 D) 36 E) 40

Çözüm:

- Mehmet'in parası : x
- Fatih'in parası : $4x$ olsun.



O halde, $4x - 45 = x + 45 \Rightarrow 4x - x = 45 + 45$

$$3x = 90$$

$$x = 30 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 4:

Bir otobüste 25 erkek, 11 kadın yolcu vardır.

Otobüse kaç evli çift binerse erkek yolcuların sayısı kadın yolcuların sayısının 2 katı olur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:



DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Son durumda erkek yolcu sayısı bayan yolcu sayısının 2 katı olacağından,

$$25+x=2.(11+x)$$

$$25+x=22+2x$$

$$25-22=2x-x$$

$$x=3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 5:

Tavuk ve tavşanların bulunduğu bir kümeste tavuk ve tavşanların toplam 58 ayağı vardır.

Tavuk ve tavşanların toplam sayısı 18 olduğuna göre, tavuk sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm:

- Tavuk sayısı : x
- Tavşan sayısı : $18-x$ olsun.
- Tavukların ayaklarının sayısı : $2.x$
- Tavşanların ayaklarının sayısı : $4.(18-x)$ olur.

Toplam ayak sayısı 58 olacağından,

$$2x+4.(18-x)=58$$

$$2x+72-4x=58$$

$$72-2x=58$$

$$2x=14$$

$$x=7 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 6:

Bir lokantada bazıları 4, bazıları 3 kişilik olmak üzere toplam 22 masa vardır.

Lokantanın toplam müşteri kapasitesi 79 olduğuna göre, 4 kişilik masa sayısı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:

- 4 kişilik masa sayısı : x
- 3 kişilik masa sayısı : $22-x$ olsun.
- 4 kişilik masaların müşteri kapasitesi: $4.x$
- 3 kişilik masaların müşteri kapasitesi: $3.(22-x)$ olur.

Lokantanın toplam müşteri kapasitesi 79 olduğundan,

$$4.x+3.(22-x)=79$$

$$4x+66-3x=79$$

$$x=13 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 7:

Bir torbada sarı ve mor renkte toplam 40 bilye vardır. Torbaya 3 sarı bilye konulup, torbadan 3 mor bilye alındığında sarı bilyelerin sayısının mor bilyelerin sayısına oranı $\frac{2}{3}$ oluyor.

Buna göre, başlangıçta torbadaki sarı bilye sayısı kaçtır?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm:

- Sarı bilye sayısı : x
- Mor bilye sayısı : $40-x$ olsun.

Torbaya 3 sarı bilye konulup torbadan 3 mor bilye alınırsa sarı bilyelerin sayısı $x+3$, mor bilyelerin sayısı $(37-x)$ olur.

$$\text{O halde, } \frac{x+3}{37-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3.(x+3) = 2.(37-x)$$

$$3x+9=74-2x$$

$$5x=65$$

$$x=13 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 8:

Salih bir binanın merdivenlerini ikişer ikişer çıkıp üçer üçer iniyor.

Çıkarken attığı adım sayısı inerken attığı adım sayısından 15 fazla olduğuna göre, binanın merdivenleri toplam kaç basamaktır?

- A) 120 B) 108 C) 96 D) 90 E) 84

Çözüm:

I. yol :

- İnerken attığı adım sayısı : x
- Çıkarken attığı adım sayısı : $x+15$ olsun.

İniş ve çıkıştaki basamak sayıları birbirine eşit olacağından,

Basamak sayısı $= 3 \cdot x = 2 \cdot (x+15)$ olacaktır.

$$3x = 2 \cdot (x+15) \Rightarrow 3x = 2x + 30$$

$$x = 30 \text{ elde edilir.}$$

$x=30$ değeri basamak sayısında yerine yazılırsa, $3 \cdot 30 = 90$ basamak bulunur.

II. yol :

Toplam basamak sayısına x dersek denklem,

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 15 \text{ olacaktır.}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{15}{1} \Rightarrow \frac{3x - 2x}{6} = \frac{90}{6}$$

$$3x - 2x = 90$$

$$x = 90 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 9:

4 öğrenci kiraladıkları bir evin kirasını eşit olarak ödeyecektir. Eğer bir öğrenci daha olsaydı kişi başına ödenecek kira miktarı 40 lira daha az olacaktı.

Buna göre, evin kirası kaç liradır?

- A) 720 B) 800 C) 900 D) 960 E) 1000

Çözüm:

Evin kirası x lira olsun.

- 4 kişi eşit miktarda öderse kişi başına $\frac{x}{4}$ lira,

- 5 kişi eşit miktarda öderse kişi başına $\frac{x}{5}$ lira düşer.

$$\text{O halde, } \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 40 \Rightarrow \frac{5x - 4x}{20} = 40$$

$$\frac{x}{20} = 400$$

$$x = 800 \text{ lira olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 10:

Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişerli oturduğunda 4 öğrenci ayakta kalıyor. Öğrenciler sıralara üçerli oturduğunda 1 sıra boş kalıyor.

Buna göre, sınıf mevcudu kaçtır?

- A) 26 B) 24 C) 22 D) 20 E) 18

Çözüm:

Sıra sayısı x olsun.

- Öğrenciler sıralara ikişerli oturduğunda 4 öğrenci ayakta kaldığına göre, sınıf mevcudu $(2 \cdot x + 4)$ olur.
- Öğrenciler sıralara üçerli oturduğunda 1 sıra boş kaldığına göre, sınıf mevcudu $3 \cdot (x - 1)$ olur.

Her iki durumda sınıf mevcudu aynı olacağından,

$$2x + 4 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x + 4 = 3x - 3$$

$$x = 7 \text{ olur.}$$

$x=7$ değeri $(2x+4)$ ifadesinde yerine yazılırsa sınıf mevcudu $2 \cdot 7 + 4 = 18$ bulunur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 11:

Bir kumbarada 10 ve 25 kuruşluklardan oluşan toplam 30 adet madeni para vardır.

Kumbaradaki paraların toplam tutarı 660 kuruş olduğuna göre, kumbarada 10 kuruşluk kaç madeni para vardır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm:

- 10 kuruşluk madeni para sayısı : x
- 25 kuruşluk madeni para sayısı : 30 - x olsun.

Toplam tutar 660 kuruş olduğundan

$$10 \cdot x + 25 \cdot (30 - x) = 660$$

$$10x + 750 - 25x = 660$$

$$750 - 660 = 25x - 10x$$

$$90 = 15x$$

$$x = 6 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 12:

Bir hastanede çalışan her bir doktora 10 hasta, çalışan her bir hemşireye ise 6 hasta düşmektedir.

Hastanedeki hasta, doktor ve hemşirelerin toplam sayısı 152 olduğuna göre, hasta sayısı kaçtır?

- A) 90 B) 108 C) 110 D) 120 E) 150

Çözüm:

Hasta sayısı x olsun.

- 1 doktora 10 hasta düştüğüne göre
doktor sayısı: $\frac{x}{10}$
- 1 hemşireye 6 hasta düştüğüne göre
hemşire sayısı: $\frac{x}{6}$

Tüm mevcut 152 olduğundan,

$$x + \frac{x}{10} + \frac{x}{6} = 152 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{x}{10} + \frac{x}{6} = 152$$

(30) (3) (5)

$$\frac{38x}{30} = 152$$

$$\frac{38x}{38} = \frac{30 \cdot 152}{38}$$

$$x = 30 \cdot 4$$

$$x = 120 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 13:

Bir taksimetrenin açılış ücreti sabit olup taksimetre her 1 km için yine sabit bir ücret yazmaktadır.

Taksimetre; 6 km yol giden bir müşteri için 12 lira, 10 km yol giden bir müşteri için ise 18 lira ücret yazdığına göre, taksimetrenin açılış ücreti kaç liradır?

- A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Çözüm:

Taksimetrenin açılış ücreti a lira, 1 km için yazdığı ücret ise x lira olsun.

- 6 km yol giden bir müşteri 12 lira ödediğine göre,

$$a + 6x = 12 \dots (1)$$

- 10 km yol giden müşteri 18 lira ödediğine göre,

$$a + 10x = 18 \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) numaralı denklemlerin ortak çözümü yapılırsa,

$$-1 / a + 6x = 12$$

$$a + 10x = 18$$

$$-a - 6x = -12$$

$$a + 10x = 18$$

$$+ \quad +$$

$$4x = 6$$

$$x = 1,5$$

$$a + 10x = 18$$

$$a + 10 \cdot 1,5 = 18$$

$$a + 15 = 18$$

$$a = 3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 14:

Fırından 5 simit ve 3 poğaça alacak olan Zeynep, yanlışlıkla 3 simit ve 5 poğaça almış ve bundan dolayı 240 kuruş daha az ödemiştir.

Buna göre, bir simidin fiyatı bir poğaçanın fiyatından kaç kuruş fazladır?

- A) 120 B) 100 C) 90 D) 80 E) 60

Çözüm:

1 simidin fiyatı x , 1 poğaçanın fiyatı y kuruş olsun.

- Zeynep 5 simit ve 3 poğaça alsaydı $(5x+3y)$ kuruş ödeme yapacaktı.
- Zeynep 3 simit ve 5 poğaça aldığından $(3x+5y)$ kuruş ödeme yapmıştır.

Zeynep ilk duruma göre 240 kuruş daha az ödediğine göre,

$$(5x+3y) - (3x+5y) = 240$$

$$5x+3y-3x-5y=240$$

$$2x-2y=240$$

$$2 \cdot (x-y) = 240$$

$$x-y=120 \text{ olur.}$$

O halde bir simit bir poğaçadan 120 kuruş fazladır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 15:

2 kg elma, 3 kg portakal ve 1 kg çileğin toplam tutarı 18 lira, 3 kg elma, 2 kg portakal ve 4 kg çileğin toplam tutarı ise 32 liradır.

Buna göre, 1 kg elma, 1 kg portakal ve 1 kg çileğin toplam tutarı kaç liradır?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm:

1 kg elma a lira, 1 kg portakal b lira, 1 kg çilek ise c lira olsun.

- 2 kg elma, 3 kg portakal ve 1 kg çilek 18 lira ise,

$$2a+3b+c=18 \dots (1)$$

- 3 kg elma, 2 kg portakal ve 4 kg çilek 32 lira ise,

$$3a+2b+4c=32 \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) numaralı denklemler alt alta yazılarak taraf tarafa toplanırsa,

$$2a+3b+c = 18$$

$$+ 3a+2b+4c = +32$$

$$5a+5b+5c = 50$$

$$5 \cdot (a+b+c) = 50$$

$$a+b+c = 10 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 16:

Sedat parasının $\frac{1}{5}$ i ile kitap, $\frac{1}{4}$ ü ile de kalem alıyor.

Geriye 44 lirası kaldığına göre, Sedat aldığı kitap için kaç lira ödemiştir?

- A) 22 B) 20 C) 18 D) 16 E) 15

Çözüm:

Sedat'ın başlangıçtaki parası x lira olsun.

- Kitaba ödediği miktar $\frac{x}{5}$ lira,
- Kaleme ödediği miktar $\frac{x}{4}$ lira olacağından,

$$x - \frac{x}{5} - \frac{x}{4} = 44$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x}{5} - \frac{x}{4} = \frac{44}{1}$$

$$20x - 4x - 5x = 880$$

$$11x = 880$$

$$x = 80 \text{ olur.}$$

O halde, kitaba ödenen para $\frac{x}{5} = \frac{80}{5} = 16$ liradır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 17:

Bir memur maaşının $\frac{1}{3}$ ünü kiraya, kalanın $\frac{1}{5}$ ini ise mutfak masraflarına harcıyor.

Geriye 1600 lira parası kaldığına göre, memurun maaşı kaç liradır?

- A) 2250 B) 2400 C) 2750 D) 2800 E) 3000

Çözüm:

Memurun maaşı x lira olsun.

- Kiraya ödenen $\frac{x}{3}$ lira, kalan $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$ lira,
- Mutfak masraflarına ödenen $\frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2x}{15}$ lira olur.

Geriye kalan para 1600 lira olduğundan,

$$x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{15} = 1600$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{15} = 1600$$

$$\frac{15x - 5x - 2x}{15} = 1600 \Rightarrow 8x = 1600 \cdot 15$$

$$x = 200 \cdot 15$$

$$x = 3000 \text{ lira olur.}$$

(Memurun maaşına 15x diyerek işlem kolaylığı sağlanabilir.)

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 18:

60 soruluk bir sınavda 4 yanlış bir doğruyu götürmektedir.

Tüm soruları cevaplayan bir öğrencinin 45 neti bulunduğuna göre, öğrenci kaç soruyu yanlış cevaplamıştır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Çözüm:

Öğrencinin yanlış cevapladığı soru sayısı x, doğru cevapladığı soru sayısı (60 - x) olsun.

4 yanlış bir doğruyu götürdüğünden,

$$\text{Net sayısı} = \text{Doğru cevap sayısı} - \frac{\text{Yanlış cevap sayısı}}{4} \text{ olur.}$$

$$\text{O halde, } 45 = (60 - x) - \frac{x}{4}$$

$$45 = 60 - x - \frac{x}{4}$$

$$x + \frac{x}{4} = 60 - 45$$

$$\frac{5x}{4} = 15$$

$$5x = 60$$

$$x = 12 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 19:

Su dolu bir kabin ağırlığı 7 kg dır. Suyun $\frac{1}{3}$ ü kullanıldığında ağırlığı 5 kg oluyor.

Buna göre, boş kabin ağırlığı kaç kg dır?

- A) 0,8 B) 1 C) 1,2 D) 1,5 E) 2

Çözüm:

Boş kabin ağırlığı x, kabin aldığı su miktarının ağırlığı y olsun.

- Su dolu kabin ağırlığı 7 kg olduğundan,

$$x + y = 7 \dots (1)$$

- Suyun $\frac{1}{3}$ ü kullanılırsa geriye $\frac{2}{3}$ ü kalır. $\frac{2}{3}$ ü dolu olan kabin ağırlığı 5 kg olduğundan,

$$x + \frac{2}{3} \cdot y = 5 \dots (2) \text{ yazılır.}$$

(1) ve (2) numaralı denklemler alt alta yazılarak çözüm yapılırsa,

$$\begin{array}{r} -2/ \quad x + y = 7 \\ 3/ \quad x + \frac{2y}{3} = 5 \\ \hline -2x - 2y = -14 \\ 3x + 2y = 15 \\ \hline x = 1 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

2- YAŞ PROBLEMLERİ

Yaş problemlerinin çözümünde sayı ve kesir problemlerinin çözümünde kullandığımız bilgilerin yanında aşağıdaki bilgileri de kullanacağız.

- a) Bir kişinin şimdiki yaşı x ise
- ♦ t yıl sonraki yaşı : $x+t$
 - ♦ t yıl önceki yaşı : $x-t$
- b) İki kişinin şimdiki yaşlarının toplamı x ise
- ♦ t yıl sonraki yaşlarının toplamı : $x+2.t$
 - ♦ t yıl önceki yaşlarının toplamı : $x-2.t$
- c) n kişinin şimdiki yaşlarının toplamı x ise
- ♦ t yıl sonraki yaşlarının toplamı : $x+n.t$
 - ♦ t yıl önceki yaşlarının toplamı : $x-n.t$
- d) Şimdiki yaşı x olan bir kişi doğum tarihinden
- ♦ t yıl sonra doğmuş olsaydı yaşı : $x-t$
 - ♦ t yıl önce doğmuş olsaydı yaşı : $x+t$
- e) İki kişinin yaşları farkı x ise
- ♦ t yıl sonraki yaşları farkı : x
 - ♦ t yıl önceki yaşları farkı : x

! Dikkat

İki kişi arasındaki yaş farkı sabittir. Zamana göre değişmez. Ancak yaşların toplamı, çarpımı ve oranı zamana göre değişir.

Örnek 20:

Arzu'nun 5 yıl sonraki yaşı 3 yıl önceki yaşının 2 katıdır.

Buna göre, Arzu'nun bugünkü yaşı kaçtır?

- A) 19 B) 15 C) 13 D) 11 E) 10

Çözüm:

Arzu'nun şimdiki yaşı x olsun.

- 5 yıl sonraki yaşı : $x+5$
- 3 yıl önceki yaşı : $x-3$ olur.

5 yıl sonraki yaş 3 yıl önceki yaşının 2 katı olduğundan,

$$x+5=2.(x-3) \Rightarrow x+5=2x-6$$

$$x=11 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Çözüm:

Sibel'in yaşı kardeşinin yaşının 3 katı olduğuna göre,

- Kardeşinin yaşı : x
- Sibel'in yaşı : $3x$ olsun.

6 yıl sonra,

- Kardeşinin yaşı : $x+6$
- Sibel'in yaşı : $3x+6$ olacaktır.

Son durumda Sibel'in yaşı kardeşinin yaşının 2 katı olacağından,

$$3x+6=2.(x+6)$$

$$3x+6=2x+12$$

$$x=6 \text{ bulunur.}$$

Sibel'in şimdiki yaşı $3.x=3.6=18$ dir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 21:

Sibel'in yaşı kardeşinin yaşının 3 katıdır.

6 yıl sonra Sibel'in yaşı kardeşinin yaşının 2 katı olacağına göre, Sibel'in şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 36 B) 30 C) 24 D) 21 E) 18

Örnek 22:

Fatih kardeşinden 5 yaş büyüktür.

4 yıl sonra Fatih'in yaşının kardeşinin yaşına oranı $\frac{3}{2}$ olacağına göre, Fatih'in şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Çözüm:

Fatih'in yaşı x , kardeşinin yaşı $x-5$ olsun.

4 yıl sonra,

- Fatih'in yaşı : $x+4$
- Kardeşinin yaşı : $x-5+4=x-1$ olacaktır.

Yaşlarının oranı $\frac{3}{2}$ olacağından,

$$\frac{x+4}{x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x-3 = 2x+8$$

$x = 11$ bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 23:

Metin'in yaşı Bilâl'in yaşının 2 katıdır. Metin 4 yıl önce, Bilâl de 3 yıl sonra doğmuş olsaydı Metin'in yaşı Bilâl'in yaşının 3 katı olacaktı.

Buna göre, Bilâl'in şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm:

Bilâl'in şimdiki yaşı x , Metin'in şimdiki yaşı $2x$ olsun.

- Metin 4 yıl önce doğmuş olsaydı şimdiki yaşı : $2x+4$
- Bilâl 3 yıl sonra doğmuş olsaydı şimdiki yaşı: $x-3$ olacaktı.

Son durumda Metin'in yaşı Bilâl'in yaşının 3 katı olacağından,

$$2x+4=3.(x-3)$$

$$2x+4=3x-9$$

$x=13$ olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 24:

Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 3 katıdır.

5 yıl sonra babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamının 2 katı olacağına göre, babanın şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 42 B) 45 C) 48 D) 51 E) 57

Çözüm:

İki çocuğun yaşları toplamı x , babanın yaşı $3x$ olsun.

- 5 yıl sonra babanın yaşı : $3x+5$
- 5 yıl sonra iki kardeşin yaşları toplamı : $x+2.5=x+10$ olacaktır.

Son durumda babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katı olacağından,

$$3x+5=2.(x+10) \Rightarrow 3x+5=2x+20$$

$x=15$ olur.

Babanın şimdiki yaşı $3.x=3.15=45$ tir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 25:

Furkan'ın yaşı ablasının yaşının $\frac{1}{3}$ ü kadardır.

Furkan ablasının bugünkü yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 32 olacağına göre, Furkan'ın bugünkü yaşı kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm:

Furkan'ın bugünkü yaşı x , ablasının bugünkü yaşı $3x$ olsun.

Furkan	Ablası
x	$3x$
2x yıl sonra ↓	2x yıl sonra ↓
$3x$	$5x$

Furkan ablasının yaşına geldiğinde ablası $5x$ yaşında olacaktır.

Buradan $3x+5x=32 \Rightarrow x=4$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

41. Serap'ın yaşı kardeşinin yaşının 3 katıdır.

5 yıl sonra Serap'ın yaşı kardeşinin yaşının 2 katından 2 fazla olacağına göre, Serap'ın şimdiki yaşı kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

42. Bir işi Yasemin 4, Merve 12 saatte bitiriyor.

Buna göre, ikisi birlikte bu işin tamamını kaç saatte bitirir?

A) 3,6 B) 3 C) 2,8 D) 2,5 E) 2

3- İŞÇİ PROBLEMLERİ

- ♦ Bir A işçisi bir işi a saatte yapıyor olsun. Bu işçi bir saatte işin $\frac{1}{a}$ sini yapar.
- ♦ Bir B işçisi aynı işi b saatte yapıyor olsun. Bu işçi bir saatte işin $\frac{1}{b}$ sini yapar.

O halde, A ve B işçileri birlikte çalışırlarsa 1 saatte bu işin $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sini yaparlar.

İki işçi bu işin tamamını birlikte t saatte bitirirse $t \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ elde edilir.

Örnek 26:

Bir işi Ahmet tek başına 6 saatte, Burak tek başına 12 saatte ve Can tek başına 24 saatte bitiriyor.

Buna göre,

- Ahmet ve Burak birlikte işin tamamını kaç saatte bitirir?
 - Burak ve Can birlikte işin tamamını kaç saatte bitirir?
 - Ahmet, Burak ve Can birlikte işin tamamını kaç saatte bitirir?
- hesaplayalım.

Çözüm:

$$a) \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 4 \text{ saat olur.}$$

$$b) \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{3}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 8 \text{ saat olur.}$$

$$c) \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{4}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{24}{7} \text{ saat olur.}$$

Örnek 27:

Aslı ve Ceren bir işi sırasıyla 9 ve 18 saatte bitirebilmektedir.

Buna göre, ikisi birlikte aynı işi kaç saatte bitirir?

A) 4 B) 4,8 C) 6 D) 6,4 E) 7,2

Çözüm:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{t} \text{ olacağından,}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{3}{18} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 6 \text{ saat olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 28:

Bir işi Fatih tek başına 12 saatte bitirebilmektedir.

Fatih ve Sinan aynı işi birlikte 4 saatte bitirebildiğine göre, Sinan bu işi tek başına kaç saatte bitirir?

- A) 8 B) 6 C) 5,4 D) 5 E) 4,8

Çözüm:

Sinan'ın bu işi bitirme süresi x saat olsun.

O halde denklem, $\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ olacaktır.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{12}$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ saat olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 29:

Murat bir işin $\frac{1}{2}$ sini 9 saatte, Kerem ise aynı işin $\frac{1}{3}$ ünü 12 saatte bitirebilmektedir.

Buna göre, ikisi birlikte bu işin tamamını kaç saatte bitirir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm:

- Murat işin $\frac{1}{2}$ sini 9 saatte bitiriyorsa tamamını 18 saatte

- Kerem işin $\frac{1}{3}$ ünü 12 saatte bitiriyorsa tamamını 36 saatte bitirir.

O halde, ikisi birlikte işin tamamını,

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2}{36} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 12 \text{ saatte bitirir.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

! Dikkat

Çalışma hızı (kapasite) ile işin bitme süresi ters orantılıdır.

Örnek 30:

Arda'nın çalışma kapasitesi Bilâl'in çalışma kapasitesinin 3 katıdır.

Buna göre, ikisinin birlikte 6 günde bitirebildiği bir işi Bilâl tek başına kaç günde bitirir?

- A) 24 B) 18 C) 15 D) 12 E) 8

Çözüm:

Arda'nın çalışma kapasitesi Bilâl'in çalışma kapasitesinin 3 katı ise Arda'nın işi bitirme süresi Bilâl'in işi bitirme süresinin $\frac{1}{3}$ ü kadardır.

O halde, Bilâl işin tamamını 3x, Arda ise x günde bitirirse

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 8 \text{ olur.}$$

Buradan Bilâl'in işi bitirme süresi $3 \cdot 8 = 24$ bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 31:

Eşit kapasiteli iki işçi bir işi birlikte 6 günde bitiriyor.

Buna göre, işçilerden biri çalışma kapasitesini 2 katına çıkarıp diğeri yarıya düşürürse, birlikte aynı işi kaç günde bitirirler?

- A) 3,6 B) 4 C) 4,2 D) 4,8 E) 6

Çözüm:

İki işçinin işi tek başına bitirme süreleri x gün olsun.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 12 \text{ olur.}$$

İşçilerden biri çalışma kapasitesini 2 katına çıkarırsa işi bitirme süresi $12 : 2 = 6$, diğeri çalışma kapasitesini yarıya düşürürse işi bitirme süresi $12 \cdot 2 = 24$ gün olacaktır.

O halde, işçiler bu kapasitelerle çalışırsa işin tamamını birlikte

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{5}{24} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 4,8 \text{ günde bitirirler.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

4- YÜZDE PROBLEMLERİ

A) YÜZDE KAVRAMI

Yüzde kavramı, kâr-zarar, faiz ve karışım problemlerinin temelini oluşturur. Bu bölümde yüzde hesabı ile ilgili uygulamalar yapacağız. Sıfırdan farklı bir x gerçek sayısının,

♦ %a sı : $x \cdot \frac{a}{100} = \frac{ax}{100}$

♦ %a eksiği : $x - \frac{ax}{100}$

♦ %a sayısının %b si : $\left(\frac{ax}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} = \frac{a \cdot b \cdot x}{100 \cdot 100}$ şeklinde hesaplanır.

♦ %a fazlası : $x + \frac{ax}{100}$

♦ %a sı ile %b sinin toplamı : $\frac{ax}{100} + \frac{bx}{100} = \frac{(a+b)x}{100}$

Örnek 32:

Aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

1) 40 sayısının %30 u : $40 \cdot \frac{30}{100} = \frac{40 \cdot 30}{100} = 12$

2) 60 sayısının %40 ı : $60 \cdot \frac{40}{100} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24$

3) 30 sayısının %20 fazlası : $30 + 30 \cdot \frac{20}{100} = 30 + 6 = 36$

4) 80 sayısının %40 eksiği : $80 - 80 \cdot \frac{40}{100} = 80 - 32 = 48$

5) 120 sayısının %13 ü ile %7 sinin toplamı :

$$120 \cdot \frac{13}{100} + 120 \cdot \frac{7}{100} = \frac{120 \cdot (13 + 7)}{100} = \frac{120 \cdot 20}{100} = 24$$

6) 150 sayısının %33 ü ile %13 ünün farkı :

$$150 \cdot \frac{33}{100} - 150 \cdot \frac{13}{100} = \frac{150 \cdot (33 - 13)}{100} = \frac{150 \cdot 20}{100} = 30$$

7) 120 sayısının %20 sinin %50 si :

$$\left(120 \cdot \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{50}{100} = \frac{120 \cdot 20 \cdot 50}{100 \cdot 100} = 12$$

♦ Yüzde hesaplamaları orantı yardımı ile de yapılabilir.

Örnek 33:

Aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

1) 50 sayısının %30 u :

$$\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \times & 50 \text{ olan sayının} \\ \%30 \text{ u} & \times & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 30 \cdot 50 \\ x = 15$$

2) 80 sayısının %75 i :

$$\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \times & 80 \text{ olan sayının} \\ \%75 \text{ i} & \times & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 75 \cdot 80 \\ x = 60$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

3) 90 sayısının %20 fazlası :

- Bir sayının %20 fazlası o sayının %120 sidir.

O halde,

$$\begin{array}{rcl} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 90 \text{ olan sayının} \\ \%120 \text{ si} & \swarrow \searrow & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$\begin{aligned} 100 \cdot x &= 90 \cdot 120 \\ x &= 108 \end{aligned}$$

4) 160 sayısının %25 eksiği :

- Bir sayının %25 eksiği o sayının %75 idir.

O halde,

$$\begin{array}{rcl} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 160 \text{ olan sayının} \\ \%75 \text{ i} & \swarrow \searrow & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$\begin{aligned} 100 \cdot x &= 160 \cdot 75 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

5) 180 sayısının %12 si ile %18 inin toplamı :

- Bir sayının %12 si ile %18 inin toplamı o sayının %30 dur.

O halde,

$$\begin{array}{rcl} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 180 \text{ olan sayının} \\ \%30 \text{ u} & \swarrow \searrow & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$\begin{aligned} 100 \cdot x &= 180 \cdot 30 \\ x &= 54 \end{aligned}$$

6) 150 sayısının %16 sı ile %6 sının farkı :

- Bir sayının %16 sı ile %6 sının farkı o sayının %10 udur.

O halde,

$$\begin{array}{rcl} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 150 \text{ olan sayının} \\ \%10 \text{ u} & \swarrow \searrow & x \end{array}$$

Doğru orantı

$$\begin{aligned} 100 \cdot x &= 150 \cdot 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

İLK ADIM SORULARI

43. 140 sayısının %40 ı a, %20 fazlası b ise a+b toplamı kaçtır?

- A) 208 B) 224 C) 232
D) 240 E) 256

44. A ve B sıfırdan farklı gerçek sayılardır. A sayısının %40 fazlası B sayısının %20 eksiğine eşittir.

Buna göre, $\frac{A}{B}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{9}{14}$ C) $\frac{5}{14}$
D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 34:

Bir sayının 15 fazlasının %40 ı, aynı sayının 15 eksiğinin %60 ına eşittir.

Buna göre, bu sayı kaçtır?

- A) 60 B) 72 C) 75 D) 90 E) 120

Çözüm:

Sayımız x olsun.

- x sayısının 15 fazlasının %40 ı : $(x + 15) \cdot \frac{40}{100}$
- x sayısının 15 eksiğinin %60 ı : $(x - 15) \cdot \frac{60}{100}$ olur.

Buradan,

$$(x + 15) \cdot \frac{40}{100} = (x - 15) \cdot \frac{60}{100} \quad \dots (100 \text{ ile genişletildi.})$$

$$40 \cdot (x + 15) = 60 \cdot (x - 15) \quad \dots (20 \text{ ile sadeleştirildi.})$$

$$2x + 30 = 3x - 45$$

$$-x = -75$$

$$x = 75 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 35:

x, y ve z sayıları sıfırdan farklı gerçekte sayılardır. x sayısı y sayısının %40 ına, y sayısı ise z sayısının %60 ına eşittir.

Buna göre, x sayısı z sayısının yüzde kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 18 E) 24

Çözüm:

- x sayısı y sayısının %40 ı ise $x = \frac{40y}{100}$ ①
- y sayısı z sayısının %60 ı ise $y = \frac{60z}{100}$ ② olur.

② numaralı eşitlikteki y değeri ① numaralı eşitlikte yerine yazılırsa,

$$x = \frac{40 \cdot \left(\frac{60z}{100} \right)}{100} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 60 \cdot z}{100 \cdot 100}$$

$$x = \frac{24 \cdot z}{100} \text{ elde edilir.}$$

O halde, x sayısı z sayısının %24 üdür.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 36:

Bir sınıftaki öğrencilerin %60 ı erkek öğrencidir.

Erkek öğrenci sayısı kız öğrenci sayısından 8 fazla olduğuna göre, sınıf mevcudu kaçtır?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

Çözüm:

Sınıfın %60 ı erkek öğrenci ise geriye kalan %40 ı kız öğrencidir.

Sınıf mevcudunun %60 ı ile %40 ı arasındaki fark sınıf mevcudunun %20 si olacağından,

%20 si	8 ise	$20 \cdot x = 8 \cdot 100$
%100 ü	x	$x = 40 \text{ olur.}$

Doğru orantı

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 37:

Bir lastiğin boyu çekildiğinde %80 artıyor.

Çekildiğinde boyu 108 cm olan bu lastiğin çekilmeden önceki boyu kaç cm dir?

- A) 60 B) 64 C) 70 D) 72 E) 75

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Çözüm:

Lastik çekildiğinde boyu %80 arttığına göre, çekilmiş haldeki boyu ilk boyunun %180 i kadardır.

O halde,

$$\begin{array}{ccc} \%180 \text{ i} & 108 \text{ cm ise} & 180 \cdot x = 100 \cdot 108 \\ \%100 \text{ ü} & x & x = 60 \text{ cm olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 38:

3 günde toplam 400 soru çözecek olan Serap, 1. gün soruların %40 ını, 2. gün kalan soruların %50 sini çözüyor.

3. gün kalan soruların tamamını çözdüğüne göre, 1. gün 3. günden kaç soru fazla çözmüştür?

- A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

Çözüm:

- 1. gün çözülen soru sayısı : $400 \cdot \frac{40}{100} = 160$

Geriye kalan soru sayısı : $400 - 160 = 240$

- 2. gün çözülen soru sayısı : $240 \cdot \frac{50}{100} = 120$

Geriye kalan soru sayısı : $240 - 120 = 120$

- 3. gün çözülen soru sayısı : 120

O halde sonuç, $160 - 120 = 40$ olacaktır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 39:

Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının %40 ını kaybetmektedir.

Buna göre, 48 kg kuru üzüm elde edebilmek için kaç kg yaş üzümme ihtiyaç vardır?

- A) 60 B) 75 C) 80 D) 85 E) 90

Çözüm:

Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının %40 ını kaybettiğine göre, yaş üzümün %60 ı kadar kuru üzüm elde edilir.

O halde,

$$\begin{array}{ccc} \%60 \text{ i} & 48 \text{ kg ise} & 60 \cdot x = 48 \cdot 100 \\ \%100 \text{ ü} & x & x = 80 \text{ kg olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 40:

Bir miktar süttan ağırlığının %40 ı kadar yoğurt, yoğurttan da ağırlığının %30 u kadar süzme yoğurt elde edilmektedir.

Buna göre, 18 kg süzme yoğurt elde edebilmek için kaç kg süte ihtiyaç vardır?

- A) 200 B) 180 C) 160 D) 150 E) 120

Çözüm:

- Yoğurttan ağırlığının %30 u kadar süzme yoğurt elde edildiğine göre, 18 kg süzme yoğurt için gerekli olan yoğurt miktarı,

$$\begin{array}{ccc} \%30 \text{ u} & 18 \text{ kg ise} & 30 \cdot x = 100 \cdot 18 \\ \%100 \text{ ü} & x & x = 60 \text{ kg olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

- Süttan ağırlığının %40 ı kadar yoğurt elde edildiğine göre, 60 kg yoğurt için gerekli olan süt miktarı,

$$\begin{array}{ccc} \%40 \text{ i} & 60 \text{ kg ise} & 40 \cdot y = 60 \cdot 100 \\ \%100 \text{ ü} & y & y = 150 \text{ kg olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

O halde, 18 kg süzme yoğurt elde edebilmek için 150 kg süte ihtiyaç vardır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

B) KÂR - ZARAR PROBLEMLERİ

Kâr-zarar problemlerine geçmeden önce problemlerde kullanılan bazı kavramları hatırlayalım.

Alış Fiyatı : Bir ürünün satın alındığı fiyattır.

Maliyet : Bir ürünün alış fiyatıyla birlikte ürünle ilgili yapılan tüm harcamaların toplamıdır.

Etiket Fiyatı : Ürün üzerinde yazılı olan satış fiyatıdır.

Satış Fiyatı : Ürünün satıldığı fiyattır.

Kâr : Bir ürünün maliyet fiyatının üzerinde satılması durumunda satış fiyatı ile maliyet fiyatı arasındaki farktır.

Zarar : Bir ürünün maliyet fiyatının altında satılması durumunda maliyet fiyatı ile satış fiyatı arasındaki farktır.

- ♦ Bir ürünün satışından kâr elde edilmiş ise $\text{Satış fiyatı} = \text{Maliyet} + \text{Kâr miktarı}$
- ♦ Bir ürünün satışından zarar elde edilmiş ise $\text{Satış fiyatı} = \text{Maliyet} - \text{Zarar miktarı}$
- ♦ Bir ürünün satışından ne kâr ne de zarar elde edilmiş ise $\text{Satış fiyatı} = \text{Maliyet}$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca;

x liraya mal edilen bir ürünün

- ♦ %a kârla satılması durumunda satış fiyatı : $x + \frac{x \cdot a}{100}$
- ♦ %a zararla satılması durumunda satış fiyatı : $x - \frac{x \cdot a}{100}$ ile hesaplanabilir.

Bu eşitliklerin yanında orantı kullanılarak işlem yapılabilir.

Örnek 41:

Aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

1) 80 liraya alınan bir ürün %20 kârla satılırsa satış fiyatı :

I. Yol: $80 + 80 \cdot \frac{20}{100} = 80 + 16$
= 96 lira

II. Yol: %100 ü 80 lira olan bir ürünün
%120 si x lira

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 80 \cdot 120$$

$$x = 96 \text{ lira olur.}$$

2) 160 liraya alınan bir ürün %25 zararla satılırsa satış fiyatı :

I. Yol: $160 - 160 \cdot \frac{25}{100} = 160 - 40$
= 120 lira

II. Yol: %100 ü 160 lira olan bir ürünün
%75 i x lira

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 75 \cdot 160$$

$$x = 120 \text{ lira olur.}$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

- 3) 140 liraya alınan bir ürün %40 kârla satılırsa kâr miktarı :

I. Yol: $140 \cdot \frac{40}{100} = 56$ lira

II. Yol: $\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 140 \text{ lira olan bir ürünün} \\ \%40 \text{ i} & \swarrow \searrow & x \text{ lira} \end{array}$

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 40 \cdot 140$$

$$x = 56 \text{ lira olur.}$$

- 4) 250 liraya alınan bir ürün %20 zararla satılırsa zarar miktarı :

I. Yol: $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$ lira

II. Yol: $\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 250 \text{ lira olan bir ürünün} \\ \%20 \text{ si} & \swarrow \searrow & x \text{ lira} \end{array}$

Doğru orantı

$$100 \cdot x = 20 \cdot 250$$

$$x = 50 \text{ lira olur.}$$

Örnek 42:

60 liraya alınan bir gömlek %25 kârla, 80 liraya alınan bir pantolon ise %10 kârla satılmıştır.

Buna göre, bu iki ürünün satışından elde edilen kâr miktarı toplam kaç liradır?

- A) 18 B) 20 C) 23 D) 25 E) 27

Çözüm:

• $\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 60 \text{ lira olan gömleğin} \\ \%25 \text{ i} & \swarrow \searrow & x \text{ lira} \end{array}$ $100 \cdot x = 25 \cdot 60$
Doğru orantı $x = 15$ lira olur.

• $\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \swarrow \searrow & 80 \text{ lira olan pantolonun} \\ \%10 \text{ u} & \swarrow \searrow & y \text{ lira} \end{array}$ $100 \cdot y = 10 \cdot 80$
Doğru orantı $y = 8$ lira olur.

O halde, bu iki ürünün satışından elde edilen kâr miktarı toplam, $15 + 8 = 23$ lira olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

45. %40 kârla satılan bir ürünün satış fiyatı 350 liradır.

Buna göre, bu ürünün maliyeti kaç liradır?

- A) 240 B) 250 C) 260
D) 280 E) 300

46. %50 kârla satılmakta olan bir ürün satış fiyatı üzerinden %20 indirimle satılıyor.

Buna göre, bu ürünün satışından elde edilen kâr miktarı yüzde kaçtır?

- A) 30 B) 28 C) 25 D) 20 E) 18

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 43:

Bir mağaza aldığı iki farklı üründen birincisini %20 kârla 600 liraya, ikincisini ise %25 zararla 240 liraya satıyor.

Mağazanın bu iki ürünün satışından elde ettiği toplam kâr miktarı kaç liradır?

- A) 20 B) 24 C) 28 D) 30 E) 32

Çözüm:

- Birinci üründen elde edilen kâr miktarını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} \%120 \text{ si} & \times & 600 \text{ lira} \\ \%20 \text{ si} & \times & x \text{ lira} \end{array} \quad 120 \cdot x = 20 \cdot 600$$

$$x = 100 \text{ lira olur.}$$

Doğru orantı

- İkinci üründen elde edilen zarar miktarını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} \%75 \text{ i} & \times & 240 \text{ lira} \\ \%25 \text{ i} & \times & y \text{ lira} \end{array} \quad 75 \cdot y = 25 \cdot 240$$

$$y = 80 \text{ lira olur.}$$

Doğru orantı

Mağaza birinci üründen 100 lira kâr, ikinci üründen ise 80 lira zarar etmiştir.

O halde, iki ürünün satışından elde edilen kâr miktarı $100 - 80 = 20$ lira olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 44:

Bir manav 4 tanesini 5 liraya aldığı karpuzların 3 tanesini 8 liraya satıyor.

Tüm satış sonunda 85 lira kâr ettiğine göre, manavın sattığı karpuzların sayısı kaçtır?

- A) 108 B) 90 C) 75 D) 72 E) 60

Çözüm:

- 1 adet karpuzun alış fiyatını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} 4 \text{ tanesi} & \times & 5 \text{ lira} \\ 1 \text{ tanesi} & \times & x \text{ lira} \end{array} \quad 4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ lira}$$

Doğru orantı

- 1 adet karpuzun satış fiyatını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} 3 \text{ tanesi} & \times & 8 \text{ lira} \\ 1 \text{ tanesi} & \times & y \text{ lira} \end{array} \quad 3y = 8$$

$$y = \frac{8}{3} \text{ lira}$$

Doğru orantı

$$1 \text{ adet karpuzdan elde edilen kâr} : \frac{8}{3} - \frac{5}{4} = \frac{17}{12} \text{ liradır.}$$

O halde,

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ karpuzdan} & \times & \frac{17}{12} \text{ lira kâr edilirse} \\ a \text{ karpuzdan} & \times & 85 \text{ lira kâr edilir} \end{array} \quad a \cdot \frac{17}{12} = 85 \cdot 1$$

$$a = 60 \text{ olur.}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 45:

Bir manav aldığı kavunların tanesini 4 liradan satarsa 40 lira zarar, tanesini 7 liradan satarsa 80 lira kâr ediyor.

Buna göre, manavın aldığı kavunların sayısı kaçtır?

- A) 55 B) 50 C) 45 D) 40 E) 35

Çözüm:

Manav x tane kavun alsın.

- Tanesini 4 liradan sattığında 40 lira zarar ediyorsa maliyet fiyatı $(4x + 40)$ lira olmalıdır.
- Tanesini 7 liradan sattığında 80 lira kâr ediyorsa maliyet fiyatı $(7x - 80)$ lira olmalıdır.

$$O \text{ halde, } 7x - 80 = 4x + 40 \Rightarrow 3x = 120$$

$$x = 40 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 46:

Bir kilogram fındık x liradır.

Fındığa %25 zam yapılırsa x liraya kaç kilogram fındık alınabilir?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm:

Fiyatı x lira olan 1 kg fındığa %25 zam yapılırsa fiyatı;

$$x + \frac{25 \cdot x}{100} = \frac{125x}{100} = \frac{5x}{4} \text{ lira olur.}$$

O halde,

$$\begin{array}{ccc} \frac{5x}{4} \text{ liraya} & \text{1 kg fındık alınır} & a \cdot \frac{5x}{4} = x \cdot 1 \\ x \text{ liraya} & \text{a kg fındık alınır} & a = \frac{4}{5} \text{ kg olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 47:

Bir tüccar kilogramını 4 liradan aldığı yaş üzümünü kurutarak kuru üzümün kilogramını 15 liradan satıyor.

Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının %60 ını kaybettiğine göre, tüccarın kâr oranı alış fiyatı üzerinden yüzde kaçtır?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

Çözüm:

Tüccar kilogramını 4 liradan x kg yaş üzüm almış olsun.

O halde maliyet 4.x lira olacaktır.

x kg yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığının %60 ını kaybettiğinden, $x \cdot \frac{40}{100} = \frac{2x}{5}$ kg kuru üzüm elde edilir.

Kuru üzümün kilogramı 15 liradan satılırsa elde edilen gelir,

$$15 \cdot \frac{2x}{5} = 6x \text{ lira olacaktır.}$$

Dolayısıyla 4x liraya mal edilen bir ürün 6x liraya satılmış olacağından 2x lira kâr edilmiştir.

$$\begin{array}{ccc} 4x \text{ lirada} & \text{2x lira kâr edilirse} & 4x \cdot y = 2x \cdot 100 \\ 100 \text{ lirada} & y \text{ lira kâr edilir} & y = 50 \end{array}$$

Doğru orantı bulunur.

O halde tüccar bu alış veriştten %50 kâr elde etmiştir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 48:

Bir kuru yemişçi kilosu 20 liradan 30 kg fındık ve kilosu 10 liradan 20 kg fıstık alıyor.

Aldığı tüm fındık ve fıstıkları karıştıran kuru yemişçi bu karışımın kilosunu kaç liradan satarsa %75 kâr elde eder?

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 30

Çözüm:

Alınan ürünlerin toplam maliyetini bulalım.

$$20 \cdot 30 + 10 \cdot 20 = 600 + 200 = 800 \text{ lira}$$

800 liraya alınan bir ürün %75 kârla;

$$800 + 800 \cdot \frac{75}{100} = 1400 \text{ liraya satılır.}$$

50 kg karışımın satış fiyatı 1400 liraya olacağından,

$$1 \text{ kilogram karışımın satış fiyatı, } \frac{1400}{50} = 28 \text{ lira olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 49:

Bir terzi bir top kumaşın %40' ını %30 kârla, kalanını ise %50 kârla satıyor.

Buna göre, terzinin bir top kumaştan elde ettiği kâr yüzde kaçtır?

- A) 42 B) 40 C) 38 D) 36 E) 35

Çözüm:

Bir top kumaşın maliyeti x lira olsun.

- x liralık ürünün %40' ı %30 kârla satılırsa,

$$\left(x \cdot \frac{40}{100}\right) \cdot \frac{30}{100} = \frac{12x}{100} \text{ lira kâr elde edilir.}$$

- x liralık bir ürünün geriye kalan %60' ı %50 kârla satılırsa,

$$\left(x \cdot \frac{60}{100}\right) \cdot \frac{50}{100} = \frac{30x}{100} \text{ lira kâr elde edilir.}$$

Her iki durumda elde edilen kâr miktarlarının toplamı;

$$\frac{12x}{100} + \frac{30x}{100} = \frac{42x}{100}$$

olacağına göre, tüm satıştan elde edilen kâr miktarı %42 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

C) KARIŞIM PROBLEMLERİ

Karışım problemleri iki veya daha fazla maddenin karıştırılmasıyla oluşturulan yeni karışımındaki madde oranına dayalı problemlerdir.

Öncesinde bir karışımındaki madde miktarlarının ve yüzde oranlarının nasıl hesaplandığını öğrenelim.

- Şeker oranı %25 olan 60 gramlık şekerli su karışımındaki şeker ve su miktarlarını bulalım.

%100 ü	60 gram	$100 \cdot x = 60 \cdot 25$
%25 i	x gram	$x = 15 \text{ gram}$

Doğru orantı

O halde, 60 gramlık karışımında 15 gram şeker bulunmaktadır. Dolayısıyla karışımındaki su miktarı $60 - 15 = 45$ gram bulunur.

- 24 kg tuz ile 36 kg su karıştırılıyor.

Elde edilen karışımın tuz ve su miktarının yüzde oranlarını bulalım.

24 kg tuz ile 36 kg su karıştırıldığında oluşan karışım $24 + 36 = 60$ kg olur.

60 kg karışımında	24 kg tuz varsa	$60 \cdot x = 24 \cdot 100$
100 kg karışımında	x kg tuz	$x = 40$

Doğru orantı

O halde, karışımın tuz oranı %40 tır. Dolayısıyla su oranı da $\%100 - \%40 = \%60$ olur.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 50:

600 gramlık tuzlu su karışımının tuz oranı %15 tir.

Buna göre, karışımdaki tuz miktarı kaç gramdır?

- A) 72 B) 75 C) 80 D) 84 E) 90

Çözüm:

$$\begin{array}{ccc} \%100 \text{ ü} & \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} & 600 \text{ gram} \\ \%15 \text{ i} & & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 100 \cdot x = 600 \cdot 15 \\ x = 90 \text{ gram olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 51:

Un, şeker ve yağdan oluşan bir karışımda 600 gram un, 300 gram şeker ve 300 gram yağ vardır. Buna göre,

- I. Karışımın un oranı %50 dir.
- II. Karışımın yağ oranı %20 dir.
- III. Karışımın yağ oranı şeker oranına eşittir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) II ve III D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm:

Karışım toplam, $600+300+300=1200$ gramdır.

- Karışımın un oranını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} 1200 \text{ gramda} & \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} & 600 \text{ gram un} \\ 100 \text{ gramda} & & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1200 \cdot x = 600 \cdot 100 \\ x = 50 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

O halde, karışımın un oranı %50 dir.

- Karışımın yağ oranını bulalım.

$$\begin{array}{ccc} 1200 \text{ gramda} & \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} & 300 \text{ gram yağ} \\ 100 \text{ gramda} & & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1200 \cdot x = 100 \cdot 300 \\ x = 25 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

O halde karışımın yağ oranı %25 tir.

- Karışımın eşit miktarda yağ ve şeker bulunduğu karışımın yağ ve şeker oranları eşittir.

Dolayısıyla I ve III doğru, II yanlıştır.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 52:

Şeker ve sudan oluşan bir karışımın şeker oranı %25 tir.

Karışımdaki su miktarı şeker miktarından 240 gram fazla olduğuna göre, karışımın şeker miktarı kaç gramdır?

- A) 120 B) 125 C) 140 D) 150 E) 160

Çözüm:

Karışımdaki şeker miktarına x dersek su miktarı $x+240$ olur.

Karışımın şeker oranı %25 olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+x+240} &= \frac{25}{100} \Rightarrow \frac{x}{2x+240} = \frac{1}{4} \\ 4x &= 2x+240 \\ 2x &= 240 \\ x &= 120 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 53:

Tuz oranı %30 olan 40 gram tuzlu suya 10 gram tuz ekleniyor.

Elde edilen yeni karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

- A) 40 B) 44 C) 45 D) 48 E) 52

Çözüm:

Tuz oranı %30 olan 40 gram tuzlu sudaki tuz miktarı,

$$40 \cdot \frac{30}{100} = 12 \text{ gramdır.}$$

Karışma 10 gram tuz eklendiğinde karışım $40 + 10 = 50$ gram, karışımındaki tuz miktarı ise $12 + 10 = 22$ gram olacaktır.

O halde,

$$\begin{array}{ccc} 50 \text{ gramda} & \times & 22 \text{ gram tuz} \\ 100 \text{ gramda} & \times & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 50 \cdot x = 100 \cdot 22 \\ x = 44 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 54:

Şeker oranı %20 olan 600 gram şekerli suya 200 gram saf su ekleniyor.

Elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Çözüm:

600 gramlık karışımın %20 si şeker olduğundan, karışım-

$$\text{ki şeker miktarı } 600 \cdot \frac{20}{100} = 120 \text{ gramdır.}$$

Karışma 200 gram saf su eklendiğinde karışım

$$600 + 200 = 800 \text{ gram}$$

olacak fakat şeker miktarı değişmeyecektir.

O halde,

$$\begin{array}{ccc} 800 \text{ gramda} & \times & 120 \text{ gram şeker} \\ 100 \text{ gramda} & \times & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 800 \cdot x = 120 \cdot 100 \\ x = 15 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Dolayısıyla yeni karışımın şeker oranı %15 tir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 55:

Alkol oranı %10 olan 300 dL kolonyanın %20 si dökülerek dökülen kolonyanın yerine dökülen miktar kadar saf su ekleniyor.

Son durumda kolonyanın alkol yüzdesi kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7,5 D) 7 E) 6,5

Çözüm:

300 dL kolonyanın %20 si döküldüğünden, dökülen miktar,

$$300 \cdot \frac{20}{100} = 60 \text{ dL , kalan miktar ise } 300 - 60 = 240 \text{ dL olur.}$$

240 dL kolonyanın alkol oranı %10 olduğundan, kolonyadaki

$$\text{alkol miktarı, } 240 \cdot \frac{10}{100} = 24 \text{ dL dir.}$$

Kolonyaya, dökülen miktar kadar yani 60 dL saf su eklendiğinde karışım miktarı tekrar 300 dL olacak fakat alkol miktarı 24 dL değişmeyecektir.

O halde,

$$\begin{array}{ccc} 300 \text{ dL de} & \times & 24 \text{ dL alkol} \\ 100 \text{ dL de} & \times & x \text{ dL} \end{array} \quad \begin{array}{l} 300 \cdot x = 100 \cdot 24 \\ x = 8 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Dolayısıyla son durumda kolonyanın alkol yüzdesi %8 dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 56:

Şeker oranı %12 olan 600 gram şekerli su ile şeker oranı %22 olan 400 gram şekerli su karıştırılıyor.

Elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

- 600 gramlık şekerli suyun $600 \cdot \frac{12}{100} = 72$ gramı şeker
- 400 gramlık şekerli suyun $400 \cdot \frac{22}{100} = 88$ gramı şekerdir.

İki karışım karıştırıldığında $600+400=1000$ gramlık bir karışım elde edilecektir.

Bu karışımın $72+88=160$ gram şeker bulunacağından,

$$\begin{array}{rcl} 1000 \text{ gramda} & \swarrow \searrow & 160 \text{ gram şeker} \\ 100 \text{ gramda} & \swarrow \searrow & x \text{ gram} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1000 \cdot x = 100 \cdot 160 \\ x = 16 \text{ olur.} \end{array}$$

Doğru orantı

Dolayısıyla elde edilen yeni karışımın şeker oranı %16'dır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

bryPLE bryPLE bryPLE

Örnek 57:

Tuz oranı %8 olan 4 kg tuzlu su ile tuz oranı %13 olan 6 kg tuzlu su karıştırılıyor.

Oluşan yeni karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

- A) 9,6 B) 10,2 C) 10,8 D) 11 E) 12

Çözüm:

$$\begin{array}{rcl} \%8 \text{ lik} & 4 \text{ kg} & \\ \%13 \text{ lük} & 6 \text{ kg} & \end{array} \Rightarrow \frac{8 \cdot 4 + 13 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{32 + 78}{10} = 11$$

O halde, yeni karışımın tuz oranı %11'dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 58:

Alkol oranı %10 olan A litre kolonya ile alkol oranı %20 olan B litre kolonya karıştırılıyor.

Oluşan yeni karışımın alkol oranı %16 olduğuna göre, $\frac{A}{B}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm:

$$\begin{array}{rcl} \%10 \text{ luk} & A \text{ litre} & \\ \%20 \text{ lik} & B \text{ litre} & \end{array} \Rightarrow \frac{10 \cdot A + 20 \cdot B}{A + B} = 16$$

$$16A + 16B = 10A + 20B$$

$$16A - 10A = 20B - 16B$$

$$6A = 4B$$

$$\frac{A}{B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat

%a'lık x gram karışım ile %b'lik y gram karışım karıştırıldığında oluşan yeni karışımın yüzde oranı:

$$\begin{array}{rcl} \%a & x & \\ \%b & y & \end{array} \Rightarrow \frac{a \cdot x + b \cdot y}{x + y}$$

ile daha kolay hesaplanabilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 59:

Tuz oranı %15 olan 60 gram tuzlu suya kaç gram saf su eklenirse tuz oranı %10 olur?

- A) 32 B) 30 C) 28 D) 25 E) 20

Çözüm:

Karışıma eklenen saf suda tuz bulunmadığından tuz oranı %0 dır. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} \%15 \text{ lik } 60 \text{ gram} \\ \%0 \text{ lik } x \text{ gram} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{15 \cdot 60 + 0 \cdot x}{60 + x} = 10$$

$$600 + 10x = 900$$

$$10x = 300$$

$$x = 30 \text{ gram olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 60:

Şeker oranı %25 olan 120 gram şekerli suya kaç gram şeker eklenirse karışımın şeker oranı %40 olur?

- A) 36 B) 35 C) 32 D) 30 E) 25

Çözüm:

Karışıma eklenen şekerin şekerin oranı %100 olacağından,

$$\left. \begin{array}{l} \%25 \text{ lik } 120 \text{ gram} \\ \%100 \text{ lük } x \text{ gram} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{25 \cdot 120 + 100 \cdot x}{120 + x} = 40$$

$$4800 + 40x = 3000 + 100x$$

$$1800 = 60x$$

$$x = 30 \text{ gram olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 61:

$x > y$ olmak üzere, $x - y$ gram tuz ile $x + y$ gram su karıştırılarak bir karışım oluşturuluyor.

Oluşan karışımın tuz yüzdesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{100xy}{x - y}$

B) $\frac{50 \cdot (x - y)}{x + y}$

C) $\frac{100 \cdot (x - y)}{x + y}$

D) $\frac{50 \cdot (x - y)}{y}$

E) $\frac{50 \cdot (x - y)}{x}$

Çözüm:

$x - y$ gram tuz ile $x + y$ gram su karıştırılırsa, $x - y + x + y = 2x$ gram karışım elde edilir.

2x gramlık karışımın $x - y$ gramı tuz olduğundan,

$$\begin{array}{ccc} 2x \text{ gramda} & \swarrow \searrow & x - y \text{ gram tuz} \\ 100 \text{ gramda} & & a \text{ gram tuz} \end{array}$$

Doğru orantı

$$a \cdot 2x = 100 \cdot (x - y)$$

$$a = \frac{100 \cdot (x - y)}{2x}$$

$$a = \frac{50 \cdot (x - y)}{x} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 62:

Alkol oranı %5 olan a litre kolonya ile alkol oranı %10 olan $a + 20$ litre kolonya karıştırılıyor.

Oluşan karışımın alkol oranı %8 olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} \%5 \text{ lik } a \text{ litre} \\ \%10 \text{ luk } a + 20 \text{ litre} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5a + 10(a + 20)}{a + a + 20} = 8$$

$$\frac{15a + 200}{2a + 20} = 8$$

$$16a + 160 = 15a + 200$$

$$16a - 15a = 200 - 160$$

$$a = 40 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

47. Tuz oranı %10 olan 70 gram tuzlu su ile tuz oranı %20 olan 30 gram tuzlu su karıştırılıyor.

Buna göre, elde edilen yeni karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

5- HAREKET (HIZ) PROBLEMLERİ

Sabit hızla hareket eden bir aracın belli bir sürede aldığı yol, aracın hızı ile sürenin çarpımına eşittir.

Saatteki hızı v km olan bir aracın t saatte aldığı yol x km ise

$$\text{Yol} = \text{hız} \cdot \text{zaman}$$

$$x = v \cdot t \text{ olur.}$$

Örnek 63:

Aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

- a) Saatte 80 km hızla giden bir aracın 6 saatte aldığı yol;

$$x = 80 \cdot 6 \Rightarrow x = 480 \text{ km dir.}$$

- b) Saatte 90 km hızla giden bir araç 450 km lik bir yolu;

$$450 = 90 \cdot t \Rightarrow t = 5 \text{ saatte alır.}$$

- c) 4 saatte 180 km yol giden bir aracın saatteki ortalama hızı;

$$180 = v \cdot 4 \Rightarrow v = 45 \text{ km/sa tir.}$$

48. Bir araç A ve B şehirleri arasındaki yolu 60 km/sa hızla 12 saatte almıştır.

Araç hızını %50 artırsaydı aynı yolu kaç saatte alırdı?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 64:

Bir araç A noktasından B noktasına $(v-10)$ km/sa hızla gidip, $(v+15)$ km/sa hızla geri dönmüştür.

Gidiş 10, dönüş ise 8 saat sürdüğüne göre, A ve B noktaları arasındaki uzaklık kaç km'dir?

- A) 1000 B) 1200 C) 1440 D) 1600 E) 1720

Çözüm:

- Araç $(v-10)$ km/sa hızla 10 saatte;
 $x = (v-10) \cdot 10 \Rightarrow x = 10v - 100$ km yol gitmiştir.
 - Araç $(v+15)$ km/sa hızla 8 saatte;
 $x = (v+15) \cdot 8 \Rightarrow x = 8v + 120$ km yol gitmiştir.
- Gidiş ve dönüşte alınan yollar eşit olduğundan,
- $$10v - 100 = 8v + 120$$
- $$2v = 220$$
- $$v = 110 \text{ km/sa bulunur.}$$
- $v = 110$ değeri $x = (v-10) \cdot 10$ eşitliğinde yerine yazılırsa,
- $$x = (110 - 10) \cdot 10 \Rightarrow x = 1000 \text{ km olur.}$$
- Doğru cevap "A" seçeneğidir.**

Örnek 65:



A ve B şehirleri arasındaki yolun bir kısmı toprak kalan kısmı ise asfalt yoldur. A şehrinden yola çıkan bir araç toprak yolda 40 km/sa hızla, asfalt yolda ise 90 km/sa hızla hareket ederek 9 saatte B şehrine varmıştır.

A ve B şehirleri arasındaki mesafe 660 km olduğuna göre, toprak yolun uzunluğu kaç km'dir?

- A) 120 B) 108 C) 100 D) 80 E) 60

Çözüm:

Toprak yolun uzunluğu x km, asfalt yolun uzunluğu ise $660 - x$ km olsun.

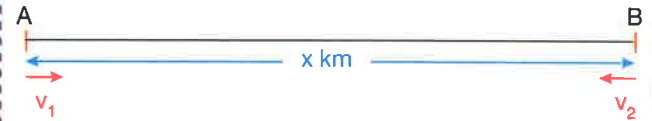


- Araç x km lik toprak yolu 40 km/sa hızla $\frac{x}{40}$ saatte alır.
 - Araç $660 - x$ km lik asfalt yolu 90 km/sa hızla $\frac{660 - x}{90}$ saatte alır.
 - Araç A dan B ye toplam 9 saatte gittiğine göre,
- $$\frac{x}{40} + \frac{660 - x}{90} = 9 \Rightarrow \frac{x}{40} + \frac{660 - x}{90} = \frac{9}{1}$$
- $$9x + 4 \cdot (660 - x) = 9 \cdot 360$$
- $$9x + 2640 - 4x = 3240$$
- $$5x = 600$$
- $$x = 120 \text{ km olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Dikkat

1) Zıt Yönlü Hareket



A ve B noktalarından v_1 ve v_2 km/sa hızlarla birbirine doğru aynı anda hareket eden iki araç t saat sonra karşılaşırsa;

$$x = (v_1 + v_2) \cdot t$$

eşitliği elde edilir.

2) Aynı Yönlü Hareket



A ve B noktalarından v_1 ve v_2 km/sa hızlarla aynı anda aynı yönde hareket eden iki araç t saat sonra yan yana gelirse;

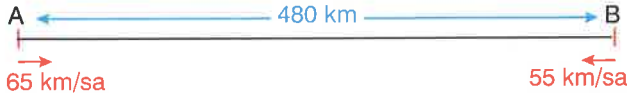
$$x = (v_1 - v_2) \cdot t \quad (v_1 > v_2)$$

eşitliği elde edilir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 66:



A ve B şehirlerinden iki araç şekildeki hızlarla aynı anda birbirine doğru harekete başlıyor.

A ve B şehirleri arasındaki uzaklık 480 km olduğuna göre, bu iki araç kaç saat sonra karşılaşır?

- A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} x = 480 \text{ km} \\ v_1 = 65 \text{ km/sa} \\ v_2 = 55 \text{ km/sa} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (v_1 + v_2) \cdot t \\ 480 = (65 + 55) \cdot t \\ 480 = 120 \cdot t \\ t = 4 \text{ saat olur.} \end{array}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 67:



A ve B şehirlerinden iki araç şekildeki hızlarla aynı anda aynı yönde harekete başlıyor.

Bu iki araç 5 saat sonra yan yana geldiğine göre, A ve B şehirleri arasındaki uzaklık kaç km dir?

- A) 90 B) 100 C) 105 D) 125 E) 140

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = x \text{ km} \\ v_1 = 85 \text{ km/sa} \\ v_2 = 60 \text{ km/sa} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (v_1 - v_2) \cdot t \text{ (Aynı yönde hareket)} \\ x = (85 - 60) \cdot t \\ t = 5 \text{ saat} \\ x = 25 \cdot 5 \\ x = 125 \text{ km olur.} \end{array}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 68:



A ve B şehirlerinden iki araç şekildeki hızlarla aynı anda birbirine doğru harekete başlıyor.

Bu iki araç 4 saat sonra karşılaştığına göre, A ve B şehirleri arasındaki uzaklık kaç km'dir?

- A) 540 B) 480 C) 420 D) 400 E) 360

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = x \text{ km} \\ v_1 = (v + 20) \text{ km/sa} \\ v_2 = (70 - v) \text{ km/sa} \\ t = 4 \text{ saat} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (v_1 + v_2) \cdot t \text{ (Zıt yönde hareket)} \\ x = (v + 20 + 70 - v) \cdot 4 \\ x = 90 \cdot 4 \\ x = 360 \text{ km olur.} \end{array}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 69:



A ve B noktalarından iki araç şekildeki hızlarla aynı anda ve aynı yönde harekete başlıyor.

Bu iki araç C noktasında yan yana geldiğine göre, B ve C noktaları arasındaki uzaklık kaç km'dir?

- A) 180 B) 195 C) 218 D) 225 E) 240

Çözüm:

İki aracın kaç saat sonra C noktasında yan yana geldiğini bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = x = 45 \text{ km} \\ v_1 = 80 \text{ km/sa} \\ v_2 = 65 \text{ km/sa} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (v_1 - v_2) \cdot t \\ 45 = (80 - 65) \cdot t \\ 45 = 15 \cdot t \\ t = 3 \text{ saat} \end{array}$$

B noktasından hareket eden araç 3 saat sonra C noktasında olacağına göre,

$$|BC| = 65 \cdot 3 = 195 \text{ km olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

! Dikkat

İki aracın eşit zamanda aldıkları yolların oranı hızlarının oranına eşittir.

Aynı sürede hızı v_1 olan araç x km, hızı v_2 olan araç y km yol aldıysa, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{y}$ dir.

Örnek 70:

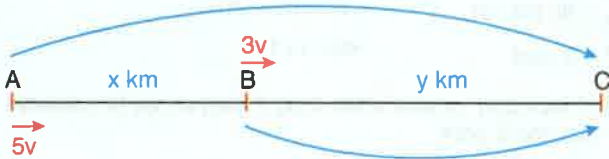


Hızları $5v$ ve $3v$ km/sa olan iki araç A ve B noktalarından şekildeki gibi aynı anda aynı yönde harekete başlıyor.

Bu iki araç C noktasında yan yana geldiğine göre, $\frac{|AB|}{|BC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm:



$|AB| = x$ km, $|BC| = y$ km olsun.

Hızı $5v$ olan araç $x+y$ km, hızı $3v$ olan araç y km yol almış olacağından,

$$\frac{5x}{3y} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{x+y}{y}$$

$$3x + 3y = 5y$$

$$3x = 2y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 71:

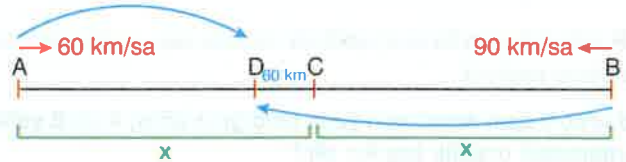
Hızları 60 ve 90 km/sa olan iki araç A ve B noktalarından aynı anda birbirine doğru harekete başlıyor.

İki araç AB yolunun orta noktasından 60 km uzakta karşılaştığına göre, AB yolu kaç km'dir?

- A) 450 B) 480 C) 500 D) 540 E) 600

Çözüm:

Yolun orta noktası C olsun. İki araç D noktasında karşılaşılsın ve $|AB| = 2x$ km olsun.



$$|AD| = (x - 60) \text{ km, } |BD| = (x + 60) \text{ km olur.}$$

Araçların hızları 60 ve 90 km/sa, aldıkları yollar ise $x - 60$ ve $x + 60$ km olduğuna göre,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{60}{90} = \frac{x-60}{x+60} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x-60}{x+60}$$

$$3x - 180 = 2x + 120$$

$$x = 300 \text{ km olur.}$$

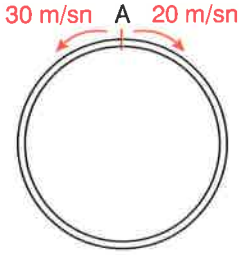
$|AB| = 2x$ olduğundan, $|AB| = 2 \cdot 300 = 600$ km bulunur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Örnek 72:



Çevresi 1200 m olan dairesel bir pistin A noktasından iki araç 30 m/sn ve 20 m/sn hızlarla aynı anda zıt yönde harekete başlıyor.

Buna göre, araçlar kaç saniye sonra karşılaşırlar?

- A) 24 B) 30 C) 32 D) 36 E) 40

Çözüm:

Araçlar arasındaki mesafe pistin çevresine eşittir.

Araçlar zıt yönde hareket ettiğinden,

$$\left. \begin{array}{l} x = 1200 \text{ m} \\ v_1 = 30 \text{ m/sn} \\ v_2 = 20 \text{ m/sn} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (v_1 + v_2) \cdot t \\ 1200 = (30 + 20) \cdot t \\ 1200 = 50 \cdot t \end{array}$$

$$t = 24 \text{ saniye olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 74:

Bir araç belli bir yolu 20 km/sa hızla gidip 30 km/sa hızla geri dönüyor.

Buna göre, aracın gidiş dönüşteki ortalama hızı saatte kaç km dir?

- A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 28

Çözüm:



Araç 20 km/sa hızla x km lik yolu $\frac{x}{20}$ saatte, 30 km/sa hızla x km lik yolu $\frac{x}{30}$ saatte alır.

Aracın gidiş dönüşteki ortalama hızı,

$$\text{Ortalama hız} = \frac{\text{Alınan toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$$

$$= \frac{x + x}{\frac{x}{20} + \frac{x}{30}}$$

$$= \frac{2x}{\frac{3x + 2x}{60}}$$

$$= 2x \cdot \frac{60}{5x}$$

$$= 24 \text{ km/sa olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

Bir araç belli bir yolu farklı hızlarla gitmiş olsun. Bu aracın yol boyunca ortalama hızı,

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Alınan Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$$

ile hesaplanır.

Örnek 73:

Bir araç 300 km lik bir yolun 120 km sini 60 km/sa hızla, kalanını ise 90 km/sa hızla gidiyor.

Aracın bu yoldaki ortalama hızı saatte kaç km dir?

- A) 80 B) 75 C) 72 D) 70 E) 68

EKSTREM BİLGİLER

- ♦ Hız birimlerini birbirine çevilirken orantıdan faydalanabiliriz.

Ortalama hızı 90 km/sa olan bir aracın hızını m/dk ve m/sn türünden hesaplırsak,

- a) 1 saatte 90 km yol giden bir aracın 1 dakikada kaç metre yol aldığını bulalım.

$$1 \text{ saat} = 60 \text{ dk}$$

$$90 \text{ km} = 90000 \text{ m olduğundan}$$

$$\begin{array}{rcl} 60 \text{ dk da} & 90000 \text{ m} & \\ 1 \text{ dk da} & x \text{ m} & \end{array}$$

Doğru orantı

$$60 \cdot x = 90000$$

$$x = 1500 \text{ m dir.}$$

O halde, aracın ortalama hızı

1500 m/dk olur.

- b) 1 saatte 90 km yol giden bir aracın 1 saniyede kaç metre yol aldığını bulalım.

$$1 \text{ saat} = 3600 \text{ sn olduğundan}$$

$$\begin{array}{rcl} 3600 \text{ sn de} & 90000 \text{ m} & \\ 1 \text{ sn de} & x \text{ m} & \end{array}$$

Doğru orantı

$$3600 \cdot x = 90000$$

$$x = 25 \text{ m dir.}$$

O halde, aracın ortalama hızı

25 m/sn olur.

Örnek 75:

300 metre uzunluğundaki bir tren 1200 metre uzunluğundaki bir tüneli 50 saniyede geçiyor.

Buna göre, trenin ortalama hızı kaç km/sa tir?

A) 90

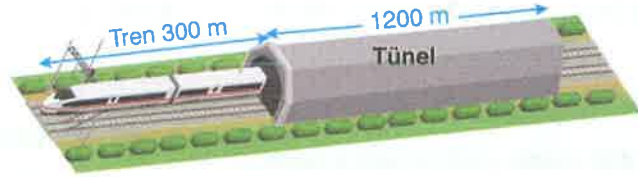
B) 100

C) 108

D) 112

E) 120

Çözüm:



Bir trenin tüneli geçmesi için tünel boyu ve kendi boyunun toplamı kadar yol gitmesi gerekir.

O halde tren 50 saniyede toplam $1200 + 300 = 1500 \text{ m}$ yol almış demektir.

$$\begin{aligned} \text{Ortalama hız} &= \frac{\text{Alınan toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} \\ &= \frac{1500}{50} \\ &= 30 \text{ m/sn olur.} \end{aligned}$$

Şimdi de trenin hızını km/sa türünden hesaplayalım.

Trenin hızı 30 m/sn ise bu, trenin 1 saniyede 30 metre yol gittiği anlamına gelir.

1 saat 3600 saniye olduğundan,

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ saniyede} & 30 \text{ metre yol alırsa} & \\ 3600 \text{ saniyede} & x \text{ metre yol alır} & \\ \hline & \text{Doğru orantı} & \end{array}$$

$$1 \cdot x = 30 \cdot 3600 \Rightarrow x = 108000 \text{ m olur.}$$

$108000 \text{ m} = 108 \text{ km}$ olduğundan trenin hızı ortalama 108 km/sa olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Problemler

Etkinlik - 9

$$A = [1, 5]$$

$$B = [0, 3]$$

$$C = [-2, 2]$$

veriliyor.

Aşağıdaki işlemlerin sonucunu yazınız.

a) $A \cup B =$ b) $B \cap C =$

c) $A - B =$ d) $C - A =$

Etkinlik - 10

Aşağıda verilen eşitsizlik ve denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $4x - 12 \leq 0$ b) $-2x + 10 > 0$

c) $\frac{x}{2} - 2 < 1$ d) $\frac{-x}{2} < 1$

e) $|x| + |x| + |-x| = 12$ f) $|2a - 2| + |4 - 4a| = 18$

g) $|3x - 10| = |x + 6|$ h) $|3x| = x - 12$

Etkinlik - 11

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "✗" ile işaretleyiniz.

1. $|-2| + |-3| = -5$ ☐ 2. $|-4 - 2| = 6$ ☐

3. $|a - 2| = 0$ ise $a = 2$ ☐ 4. $|x| < 0$ ise $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ ☐

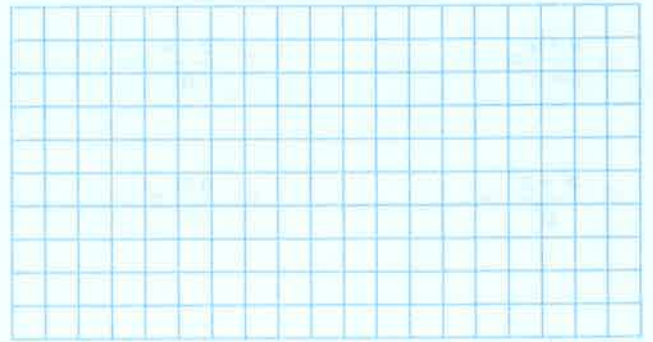
5. $|x| \leq 2$ ise $\mathbb{C} = [-2, 2]$ ☐ 6. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$ ☐

Etkinlik - 12

Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

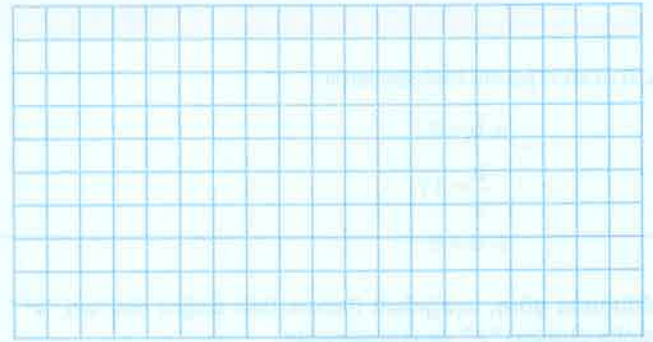
a) $3x + 2y = 11$

$$x - y = 2$$



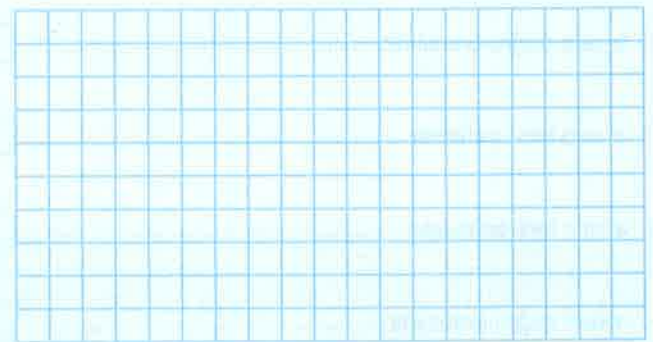
b) $7x - 3y = 10$

$$2x + y = 1$$



c) $x + \frac{y}{3} = -1$

$$\frac{x}{2} - y = 3$$



PROBLEMLER

Test : 16

1. "Hangi sayının 2 katının 4 eksiği aynı sayının 6 fazlasına eşittir?"

Yukarıdaki problemin çözümünü veren denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x - 4 = 6 - x$ B) $2x - 4 = x + 6$
C) $2 \cdot (x - 4) = x + 6$ D) $\frac{x}{2} + 4 = x - 6$
E) $2x + 4 = x - 6$

2. Hangi sayının yarısının 1 fazlası aynı sayının 5 eksiğine eşittir?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

3. İki sayının toplamı 65 tir. Sayılardan biri diğerinin 2 katından 5 fazladır.

Buna göre, küçük sayı kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 25

4. Fatih'in parası Murat'ın parasının yarısına, Sinan'ın parasının ise 10 lira fazlasına eşittir.

Üçünün paraları toplamı 150 lira olduğuna göre, Fatih'in parası kaç liradır?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

5. Yasemin'in parası Esmâ'nın parasının 3 katıdır. Yasemin Esmâ'ya 60 lira verirse paraları eşit olacaktır.

Buna göre, Yasemin'in parası kaç liradır?

- A) 120 B) 150 C) 180 D) 210 E) 240

6. Farkları 108 olan pozitif iki sayıdan büyük olanı küçük olanın 6 katından 13 fazladır.

Buna göre, küçük sayı kaçtır?

- A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

PROBLEMLER

Test : 16

7. Metin kardeşine 200 lira verirse paraları eşit oluyor. Eğer kardeşi Metin'e 200 lira verirse Metin'in parası kardeşinin parasının 3 katı oluyor.

Buna göre, Metin'in başlangıçtaki parası kaç liradır?

- A) 1000 B) 1150 C) 1250 D) 1300 E) 1600

8. Tavuk ve koyunların bulunduğu bir çiftlikte toplam 80 hayvan vardır.

Çiftlikteki hayvanların ayaklarının sayısı 250 olduğuna göre, çiftlikteki koyun sayısı kaçtır?

- A) 52 B) 50 C) 48 D) 45 E) 42

9. Bir kumbarada 10 ve 25 kuruşluk toplam 60 madeni para vardır.

Kumbaradaki paraların toplam tutarı 1260 kuruş olduğuna göre, kumbaradaki 10 kuruşlukların sayısı kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22



10. 4 öğrencinin kaldığı bir evde öğrenciler ev kirasını eşit miktarda para ödeyerek karşılamaktadır. Bir öğrenci evden ayrıldığında kişi başına düşen kira miktarı 60 lira artıyor.

Buna göre, bu evin kirası kaç liradır?

- A) 800 B) 780 C) 720 D) 600 E) 540

www.bireyakademi.com



11. Bir pastanede 3 simit, 2 açma ve 3 çayın fiyatı 12 lira, 2 simit, 3 açma ve 2 çayın fiyatı ise 13 liradır.

Buna göre, bu pastanede 1 simit, 1 açma ve 1 çay siparişi veren bir kişi kaç lira öder?

- A) 4,5 B) 5 C) 5,5 D) 6 E) 6,5

www.bireyakademi.com

12. Fırat fiyatı aynı olan kalemlerden 3 tane alırsa 8 lirası artıyor, 5 tane alırsa 4 lirası eksik kalıyor.

Buna göre, Fırat'ın kaç lirası vardır?

- A) 36 B) 30 C) 28 D) 26 E) 24

bryPLE

PROBLEMLER

Test : 17

1. Toplamları 26 olan iki doğal sayının farkı 4 tür.

Buna göre, bu sayıların çarpımı kaçtır?

- A) 165 B) 172 C) 180 D) 192 E) 196

2. Ardışık iki çift doğal sayının kareleri farkı 52 dir.

Buna göre, küçük sayı kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

3. Uzunluğu 3 metre olan bir çubuk, her parça bir önceki parçadan 20 cm uzun olacak şekilde üç parçaya bölünüyor.

Buna göre, en uzun parça kaç cm'dir?

- A) 115 B) 120 C) 125 D) 130 E) 140

4. Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişer ikişer oturursa 8 kişi ayakta kalıyor. Öğrenciler sıralara üçer üçer oturursa 3 sıra boş kalıyor.

Buna göre, sınıfta bulunan sıraların sayısı kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17



5. Bir kuş satıcısı kuşlarını dükkandaki kafeslere beşer beşer koyduğunda 12 kuşu açıkta kalıyor. Kuşları kafeslere yedişer yedişer koyduğunda ise 4 kafesi boş kalıyor.

Buna göre, satıcının dükkanında bulunan kuşların sayısı kaçtır?

- A) 140 B) 127 C) 122 D) 112 E) 102

www.bireyakademi.com

6. Ege bir binanın merdivenlerini ikişer ikişer çıkıp, üçer üçer iniyor.

Ege iniş ve çıkışta toplam 75 adım attığına göre, bu binanın merdivenleri kaç basamaklıdır?

- A) 84 B) 90 C) 96 D) 112 E) 120

PROBLEMLER

Test : 17

7. Bir tel eşit boyda 10 parçaya ayrılıyor. Parçaların her birinin boyu 6 cm daha kısa olsaydı tel 12 eşit parçaya ayrılabilirdi.

Buna göre, telin boyu kaç cm dir?

- A) 600 B) 520 C) 480 D) 420 E) 360

8. Bir atıcıya her başarılı atışı için 5 puan verilmekte, her başarısız atışı için ise atıcıdan 3 puan silinmektedir.

20 atış sonunda 44 puan toplayan atıcının kaç atışı başarılı olmuştur?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 11



9. Bir kutuda mavi ve yeşil bilyeler bulunmaktadır. Kutuya 2 mavi ve 2 yeşil bilye konulursa mavi bilyelerin sayısı yeşil bilyelerin sayısının 2 katı olacaktır. Kutudan 2 mavi ve 2 yeşil bilye alınırsa mavi bilyelerin sayısı yeşil bilyelerin sayısının 3 katı olacaktır.

Buna göre, başlangıçta kutuda toplam kaç bilye vardır?

- A) 28 B) 26 C) 24 D) 22 E) 20

www.bireyakademi.com



10. Bir iş yerinde usta, kalfa ve çırak olmak üzere, toplam 60 kişi çalışmaktadır. İş yerinde çalışan kalfa sayısı çırak sayısına eşittir. Usta, kalfa ve çırakların her birinin günlük yevmiyesi sırasıyla 120, 70 ve 30 liradır.

Bu iş yeri tüm çalışanlarına bir günde 3700 lira yevmiye ödediğine göre, iş yerinde çalışan usta sayısı kaçtır?

- A) 15 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

www.bireyakademi.com

11. Bir toplulukta 28 erkek, 11 bayan bulunmaktadır.

Bu topluluğa kaç evli çift gelirse erkeklerin sayısı bayanların sayısının 2 katı olur?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. A bitkisinin boyu B bitkisinin boyunun 2 katından 6 cm eksiktir. Bir yılda A bitkisinin boyu 4, B bitkisinin boyu 10 cm uzamaktadır.

4 yıl sonra bu iki bitkinin boyu birbirine eşit olacağına göre, başlangıçta iki bitkinin boyları toplamı kaç cm'dir?

- A) 84 B) 92 C) 96 D) 108 E) 112

bryPLE

PROBLEMLER

Test : 18

1. Hangi sayının 4 fazlasının $\frac{1}{4}$ ü aynı sayının $\frac{1}{3}$ üne eşittir?

A) 48 B) 36 C) 24 D) 20 E) 12

2. Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısı sınıf mevcudunun $\frac{2}{5}$ 'idir.

Sınıfta 18 erkek öğrenci olduğuna göre, sınıf mevcudu kaçtır?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

3. $\frac{2}{5}$ i su ile dolu olan bir kaba 15 litre su ilave edilirse kabın yarısı dolacaktır.

Buna göre, kabın tamamı kaç litre su alır?

A) 120 B) 150 C) 160 D) 180 E) 200

4. Arda parasının $\frac{1}{4}$ ü ile kalem, $\frac{2}{3}$ ü ile kitap alıyor.

Geriye 6 lirası kalan Arda'nın başlangıçtaki parası kaç liradır?

A) 60 B) 72 C) 84 D) 90 E) 120

5. Tamamen su ile dolu olan bir deponun 1. gün $\frac{1}{7}$ si, 2. gün ise kalan suyun $\frac{1}{3}$ ü boşaltılıyor.

Depoda 16 litre su kaldığına göre, başlangıçta depoda kaç litre su vardı?

A) 42 B) 35 C) 28 D) 24 E) 14

6. İki sınıfın öğrenci sayılarının oranı $\frac{4}{5}$ tir. Sınıf mevcudu fazla olan sınıftan 4 öğrenci diğer sınıfa geçtiğinde her iki sınıfın öğrenci sayıları birbirine eşit olacaktır.

Buna göre, bu iki sınıftaki toplam öğrenci sayısı kaçtır?

A) 54 B) 63 C) 64 D) 72 E) 81

PROBLEMLER

Test : 18

7. Bir lastik çekildiğinde boyu kendi uzunluğunun $\frac{5}{3}$ ü kadar artıyor.

Buna göre, çekilmiş haldeki boyu 40 cm olan bu lastiğin çekilmeden önceki boyu kaç cm dir?

- A) 15 B) 20 C) 24 D) 25 E) 30



8. Bir hastanedeki hizmetli sayısının hasta bakıcı sayısına oranı $\frac{5}{9}$, hasta bakıcı sayısının doktor sayısına oranı ise $\frac{3}{4}$ tür.

Hastanedeki doktor sayısı hizmetli sayısından 28 fazla olduğuna göre, hastanede çalışan hasta bakıcı sayısı kaçtır?

- A) 24 B) 30 C) 36 D) 40 E) 48

www.bireyakademi.com



9. Su dolu bir şişenin ağırlığı a gramdır. Şişedeki suyun yarısı kullanıldığında şişenin ağırlığı b gram olmaktadır.

Buna göre, boş şişenin ağırlığı kaç gramdır?

- A) $3b - 2a$ B) $3a - 2b$ C) $a - b$
D) $2b - a$ E) $2a - b$

www.bireyakademi.com

10. Bir memur maaşının $\frac{3}{7}$ sini ev kirasına, kalanın $\frac{1}{4}$ ünü mutfak masraflarına, kalanın $\frac{1}{3}$ ünü de diğer masraflara harcıyor.

Geriye 800 lirası kaldığına göre, bu memurun maaşı kaç liradır?

- A) 2100 B) 2800 C) 3200 D) 3500 E) 4200



11. Yakıt deposu tamamen dolu olan bir araç 180 km yol gittiğinde yakıt deposunun $\frac{3}{4}$ ü kadar yakıt kalıyor.

Bu araç yakıt deposu tamamen dolu iken 240 km yol giderse depoda kalan yakıt tüm deponun kaçta kaç olur?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

www.bireyakademi.com

12. Bir fidanın boyu her yıl bir önceki boyunun $\frac{1}{3}$ ü kadar uzuyor.

Fidan dikildikten 2 yıl sonra boyu 32 cm olduğuna göre, dikildiğinde boyu kaç cm idi?

- A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

bryPLE

PROBLEMLER

Test : 19

1. Oğuz'un 6 yıl sonraki yaşı şimdiki yaşının 3 katıdır.

Buna göre, Oğuz'un şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

2. Aylin'in yaşı kardeşinin yaşının 3 katından 4 eksiktir.

4 yıl sonra ikisinin yaşları toplamı 24 olacağına göre, Aylin'in şimdiki yaşı kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

3. Sinan doğduğunda Mustafa 12 yaşındaydı.

Sinan'ın yaşının Mustafa'nın yaşına oranı $\frac{2}{5}$ olduğunda ikisinin yaşları toplamı kaç olacaktır?

- A) 21 B) 24 C) 28 D) 35 E) 42

4. Fatih'in yaşı Mehmet'in yaşının 3 katıdır. Fatih 4 yıl sonra, Mehmet 6 yıl önce doğsaydı yaşları eşit olacaktı.

Buna göre, Mehmet kaç yaşındadır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5. Serap'ın yaşı annesinin yaşının $\frac{1}{6}$ sına eşittir.

İkisinin yaşları toplamı 35 olduğuna göre, Serap doğduğunda annesi kaç yaşındaydı?

- A) 24 B) 25 C) 28 D) 30 E) 32



6. Kenan doğduğunda Mert 4 yaşında, Mert doğduğunda Eren 6 yaşındaydı.

Eren'in yaşı Kenan'ın yaşının 3 katı olduğuna göre, Mert kaç yaşındadır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 19

7. Bir babanın yaşı oğlunun yaşının 4 katıdır.

6 yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının 3 katı olacağına göre, babanın şimdiki yaşı kaçtır?

A) 48 B) 45 C) 44 D) 40 E) 36

8. Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 3 katıdır.

3 yıl sonra babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katından 4 fazla olacağına göre, babanın şimdiki yaşı kaçtır?

A) 45 B) 42 C) 39 D) 36 E) 33

9. Faruk'un yaşı Yavuz'un yaşının 2 katından 6 fazladır.

Yavuz Faruk'un yaşına geldiğinde Faruk 33 yaşında olacağına göre, Yavuz'un şimdiki yaşı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10. 10 ve 15 yaşlarında çocukların bulunduğu bir grubun yaş ortalaması 12 dir.

Buna göre, 10 yaşındaki çocuk sayısının 15 yaşındaki çocuk sayısına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{5}$



11. Bir babanın yaşı üçer yıl arayla doğmuş üç çocuğunun yaşları toplamına eşittir.

En büyük çocuk doğduğunda baba 33 yaşında olduğuna göre, en küçük çocuğun şimdiki yaşı kaçtır?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

www.bireyakademi.com



12. Beril ile Yasemin'in yaşları toplamı 40 tır.

Beril Yasemin'in yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 60 olacağına göre, Beril'in şimdiki yaşı kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 20

1. Ahmet bir işin $\frac{2}{3}$ ünü 6 saatte bitirebildiğine göre, işin tamamını kaç saatte bitirir?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

2. %20 si 60 olan sayının %20 eksigi kaçtır?

A) 360 B) 300 C) 280 D) 240 E) 200

3. A sayısının %50 fazlası B sayısına, B sayısının %50 eksigi C sayısına eşittir.

Buna göre, aşağıdaki eşitliklerden hangisi doğrudur?

A) $A=C$ B) $3A=4C$ C) $4A=3C$
D) $A=2C$ E) $2A=3C$

4. İki işçi bir işi sırasıyla 15 ve 30 saatte bitirebilmektedir.

Buna göre, iki işçi birlikte bu işin tamamını kaç saatte bitirebilir?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

5. Bir sınıftaki öğrencilerin %40 ı kız öğrencidir. Kız öğrencilerin %15 i gözlüklüdür.

Buna göre, gözlüklü kız öğrenci sayısı sınıf mevcudunun yüzde kaçıdır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6. Üç işçi bir işi sırasıyla x, 2x ve 4x saatte bitiriyor.

Üçü birlikte bu işin tamamını 12 saatte bitirebildiğine göre, x kaçtır?

A) 30 B) 28 C) 24 D) 21 E) 18

PROBLEMLER

Test : 20

7. Yaş üzüm kurduğunda ağırlığının %70 ini kaybediyor.

Buna göre, 24 kg kuru üzüm elde edebilmek için kaç kg yaş üzüme ihtiyaç vardır?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

8. Ferhat'ın parası Mert'in parasının %35'ine eşittir. Mert Ferhat'a 260 lira verirse paraları eşit olacaktır.

Buna göre, Mert'in kaç lirası vardır?

A) 800 B) 900 C) 1000 D) 1200 E) 1400

9. Serpil Hanım parasının %20 si ile domates, kalan parasının %25 i ile patates alıyor.

Geriye 24 lirası kaldığına göre, Serpil Hanım'ın başlangıçtaki parası kaç liradır?

A) 36 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

10. A kabının hacmi B kabının hacminin %150 si kadardır. A kabının %20 si, B kabının ise %50 si su ile doludur. B kabinin 16 litre su A kabına aktarılınca kaplardaki su miktarı eşit oluyor.

Buna göre, B kabının tamamı kaç litre su alır?

A) 250 B) 240 C) 200 D) 160 E) 150



11. Bir traktörün ön tekerleğinin yarıçapı arka tekerleğinin yarıçapının %40 ına eşittir.

Buna göre, ön tekerlek 200 defa döndüğünde arka tekerlek kaç defa döner?

A) 120 B) 100 C) 90 D) 80 E) 75

www.bireyakademi.com



12. Tavuk, kaz ve ördeklerin bulunduğu bir kümeste toplam 60 hayvan vardır. Kümesteki hayvanların %50 si tavuktur. Kazların sayısı ördeklerin sayısının %50 si kadardır.

Buna göre, bu çiftlikteki ördeklerin sayısı kaçtır?

A) 30 B) 25 C) 20 D) 18 E) 10

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 21

1. %30 kârla satılan bir üründen 90 lira kâr edilmiştir.
Buna göre, bu ürünün maliyet fiyatı kaç liradır?

A) 200 B) 250 C) 300 D) 350 E) 400

2. %20 zararla 48 liraya satılan bir ürün %10 kârla kaç liraya satılır?

A) 74 B) 72 C) 70 D) 68 E) 66

3. 400 liraya alınan bir ürün %15 kârla, 600 liraya alınan bir ürün ise %10 zararla satılıyor.

Bu iki ürünün satışından elde edilen kâr-zarar durumu aşağıdakilerden hangisidir?

A) Ne kâr - ne zarar B) 6 lira kâr
C) 10 lira kâr D) 6 lira zarar
E) 10 lira zarar

4. Farklı iki üründen birincisi %40 kârla, ikincisi ise %20 zararla aynı fiyattan satılıyor.

Bu iki ürünün maliyet fiyatlarının oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{14}$

5. Alınan bir miktar yumurtanın bir kısmı taşıma esnasında kırılıyor.

Bu durum maliyeti %40 artırdığına göre, kırılan yumurta sayısının başlangıçtaki yumurta sayısına oranı kaçtır?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{5}{14}$



6. %80 kârla satış yapan bir mağaza öğrencilere satış fiyatı üzerinden %30 indirim yapıyor.

Buna göre, mağazanın öğrencilerden elde ettiği kâr oranı yüzde kaçtır?

A) 24 B) 26 C) 30 D) 48 E) 50

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 21

7. %80 kârla satış yapan bir mağazada "2 gömlek alana 1 gömlek bedava" kampanyası düzenleniyor.

Buna göre, mağazanın kampanyalı satışlardaki kâr oranı yüzde kaçtır?

- A) 18 B) 20 C) 24 D) 25 E) 30

8. 1 kg un x liradır.

Una %25 zam yapıldığında x liraya kaç kg un alınabilir?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{8}$

9. %12 kârla satılan bir ürün 40 lira daha ucuza satılırsa %8 zarar edilecektir.

Buna göre, bu ürünün maliyet fiyatı kaç liradır?

- A) 200 B) 160 C) 120 D) 80 E) 50



10. Yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığı %60 azalıyor. Yaş üzümün kilosunu 2 liradan alan bir kişi üzümleri kurutarak satıyor.

Bu kişi satış sonunda %100 kâr elde ettiğine göre, kuru üzümün kilosunu kaç liraya satmıştır?

- A) 6 B) 7,5 C) 8 D) 10 E) 12,5

www.bireyakademi.com



11. Etiket fiyatının %20 eksikliğine alınan bir ürün etiket fiyatının %10 eksikliğine satılıyor.

Bu ürünün satışından 20 lira kâr elde edildiğine göre, ürünün etiket fiyatı kaç liradır?

- A) 160 B) 200 C) 250 D) 280 E) 300

www.bireyakademi.com

12. Bir mağaza fiyatlarında %40 indirim yaptığında satış yaptığı ürün sayısında %40 artış olduğu görülüyor.

Bu durumda mağazanın gelirindeki değişim miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) %10 artar. B) %16 artar.
C) %10 azalır. D) %16 azalır.
E) Değişmez.

PROBLEMLER

Test : 22

1. 16 kg un ile 12 kg şeker karıştırılıyor.

Şeker miktarının elde edilen karışım miktarına oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{8}$

2. 4 kg şeker ile 16 kg su karıştırılıyor.

Elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 28 E) 30

3. 1000 gram un, 600 gram şeker ve 400 gram yağ karıştırılıyor.

Elde edilen karışımın yağ oranı yüzde kaçtır?

- A) 40 B) 30 C) 25 D) 20 E) 15

4. Tuz oranı %15 olan 800 gram tuzlu sudaki tuz miktarı kaç gramdır?

- A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

5. Şeker oranı %25 olan 600 gram şekerli suya 400 gram su eklenirse elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaç olur?

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

6. Tuz oranı %40 olan 150 gram tuzlu su karışımına 50 gram tuz ilave ediliyor.

Son durumda karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

- A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

PROBLEMLER

Test : 22

7. Şeker oranı %10 olan 400 gram şekerli suya kaç gram şeker eklenirse karışımın şeker oranı %20 olur?

A) 80 B) 60 C) 55 D) 50 E) 40

8. Alkol oranı %8 olan 300 gram kolonya ile alkol oranı %12 olan 200 gram kolonya karıştırılıyor.

Buna göre, elde edilen karışımın alkol oranı yüzde kaçtır?

A) 9 B) 9,6 C) 10 D) 10,2 E) 10,8

9. Şeker oranı %30 olan x kg şekerli su ile şeker oranı %50 olan y kg şekerli su karıştırılıyor.

Oluşan karışımın şeker oranı %36 olduğuna göre, $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{7}{3}$

10. Tuz oranı %30 olan 400 gram tuzlu suya kaç gram su eklenirse karışımın tuz oranı %20 olur?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300



11. Şeker oranı %10 olan bir karışım ile şeker oranı %20 olan bir karışım karıştırılarak şeker oranı %16 olan 200 gramlık bir karışım elde ediliyor.

Buna göre, şeker oranı %20 olan karışımdan kaç gram kullanılmıştır?

A) 120 B) 108 C) 100 D) 92 E) 90

www.bireyakademi.com



12. Tuz oranı %12 olan bir karışımın %20 si dökülerek yerine dökülen miktar kadar su ilave ediliyor.

Buna göre, son durumda karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

A) 8 B) 8,4 C) 9,2 D) 9,6 E) 10

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 23

1. Bir hareketli A noktasından B noktasına 60 km/sa hızla 10 saatte gidiyor.

Bu hareketli B noktasından A noktasına 8 saatte döndüğüne göre, dönüşteki hızı kaç km/sa tir?

- A) 65 B) 70 C) 72 D) 75 E) 80

2. 

Bir hareketli A kentinden B kentine 75 km/sa hızla gidip, 100 km/sa hızla geri dönüyor.

Gidiş dönüş toplam 14 saat sürdüğüne göre, A ve B kentleri arası uzaklık kaç km dir?

- A) 600 B) 750 C) 900 D) 1000 E) 1200

3. 

Hızları 55 ve 70 km/sa olan iki araç A ve B noktalarından aynı anda ve zıt yönde harekete başlıyor.

Bu iki araç 4 saat sonra karşılaştığına göre, A ve B noktaları arası uzaklık kaç km dir?

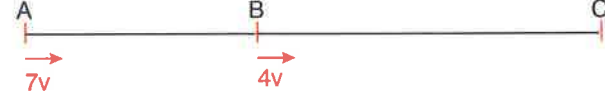
- A) 750 B) 650 C) 600 D) 550 F) 500

4. 

A ve B şehirlerinden iki araç şekildeki hızlarla aynı anda yola çıkıyor.

İki araç C şehrinde yan yana geldiğine göre, B ve C şehirleri arasındaki uzaklık kaç km dir?

- A) 240 B) 220 C) 200 D) 180 E) 160

5. 

A ve B noktalarından iki araç aynı anda aynı yönde şekildeki gibi 7v ve 4v lik hızlarıyla harekete başlıyor.

İki araç C noktasında yan yana geldiğine göre, $\frac{|AB|}{|BC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{4}$



6. Uzunluğu 500 km olan bir yolun bir kısmı asfalt, bir kısmı ise toprak yoldur.

Asfalt yoldaki hızı 90 km/sa, toprak yoldaki hızı 40 km/sa olan bir araç tüm yolu 10 saatte aldığına göre, toprak yolun uzunluğu kaç km dir?

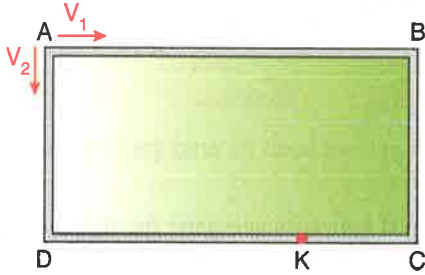
- A) 270 B) 280 C) 300 D) 320 E) 360

www.bireyakademi.com

PROBLEMLER

Test : 23

7.



Dikdörtgen biçimindeki bir yolda A noktasından iki araç aynı anda şekildeki yönlerde harekete başlıyor.

Dikdörtgenin çevresi 108 km ve $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$ tür.

İki araç ilk kez K noktasında karşılaştığına göre, |KC| kaç km dir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

8. Saatteki hızı 90 km olan bir araç 18 saniyede kaç metre yol alır?

- A) 450 B) 420 C) 360 D) 350 E) 270



9. Emre, evden okula 90 m/dak hızla yürürse istediği süreden 4 dakika geç, 120 m/dak hızla yürürse istediği süreden 6 dakika erken ulaşıyor.

Buna göre, Emre'nin evi ile okulu arası uzaklık kaç metredir?

- A) 2700 B) 2720 C) 2880 D) 3240 E) 3600

www.bireyakademi.com



10. Hızı 60 km/sa olan bir trenin uzunluğu 110 metredir.

Buna göre, bu tren 90 metre uzunluğundaki bir tüneli kaç saniyede geçer?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

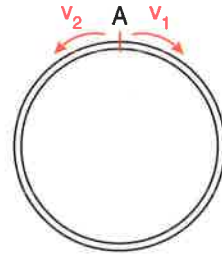
www.bireyakademi.com

11. A noktasından B noktasına ulaşmak isteyen bir araç yolun $\frac{1}{3}$ ünü 60 km/sa hızla, kalanını ise 90 km/sa hızla gidiyor.

Buna göre, aracın yol boyunca ortalama hızı saatte kaç km dir?

- A) $\frac{540}{7}$ B) $\frac{520}{11}$ C) $\frac{400}{3}$ D) $\frac{360}{11}$ E) $\frac{480}{7}$

12.



Dairesel bir pistin A noktasından iki araç aynı anda ve zıt yönde hareket ettiğinde 6 dakika sonra karşılaşıyor. Araçlar aynı noktadan aynı yönde hareket etselerdi 20 dakika sonra tekrar yan yana geleceklerdi.

$v_1 > v_2$ olduğuna göre, $\frac{v_1}{v_2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{11}{9}$ E) $\frac{13}{7}$

Ünite IV

Üçgenler

Yazardan

Sevgili öğrenciler!

Bu ünitemiz matematiğin geometri bölümüne ait, üçgende temel kavramlar, üçgenin yardımcı elemanları, üçgenlerde eşlik ve benzerlik, dik üçgen, trigonometri ve üçgende alan konularından oluşan kapsamlı bir ünedir.

Bu konular bir bakıma önceki yıllarda işlediğiniz konuların genel bir tekrarıdır. Çok iyi çalışılması ve temel özelliklerinin çok iyi kavranması gerekir. Bu yüzden konu kısmını çalıştıktan sonra bol miktarda soru çözerek konuların pekiştirilmesi gerekir.

KAZANIMLAR

9.4.1 : Üçgenlerde Temel Kavramlar

9.4.1.1 : Üçgende açı özellikleri ile ilgili işlemler yapar.

9.4.1.2 : Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açıların ölçülerini ilişkilendirir.

9.4.1.3 : Uzunlukları verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturduğunu değerlendirir.

9.4.2 : Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik

9.4.2.1 : İki üçgenin eş olması için gerekli olan asgari koşulları değerlendirir.

9.4.2.2 : İki üçgenin benzer olması için gerekli olan asgari koşulları değerlendirir.

9.4.2.3 : Üçgenin bir kenarına paralel ve diğer iki kenarı kesecek şekilde çizilen doğrunun ayırdığı doğru parçaları arasındaki ilişkiyi kurar.

9.4.2.4 : Üçgenlerin benzerliği ile ilgili problemler çözer.

9.4.3 : Üçgenin Yardımcı Elemanları

9.4.3.1 : Üçgenin iç ve dış açıortaylarının özelliklerini elde eder.

9.4.3.2 : Üçgenin kenarortaylarının özelliklerini elde eder.

9.4.3.3 : Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini gösterir.

9.4.3.4 : Üçgenin çeşidine göre yüksekliklerinin kesiştiği noktanın konumunu belirler.

9.4.4 : Dik Üçgen ve Trigonometri

9.4.4.1 : Dik üçgende Pisagor teoremini elde ederek problemler çözer.

9.4.4.2 : Öklid teoremini elde ederek problemler çözer.

9.4.4.3 : Dik üçgende dar açılarının trigonometrik oranlarını hesaplar.

9.4.4.4 : Birim çemberi tanımlar ve trigonometrik oranları birim çemberin üzerindeki noktanın koordinatlarıyla ilişkilendirir.

9.4.5 : Üçgenin Alanı

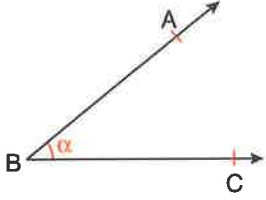
9.4.5.1 : Üçgenin alanı ile ilgili problemler çözer.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

ÜÇGENLERDE AÇI ÖZELLİKLERİ

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine "**açı**" denir. Başlangıç noktasına **açının köşesi**, ışınlara da **açının kenarları** denir.



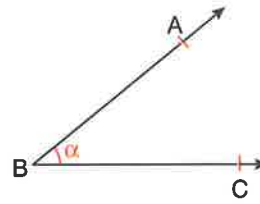
Yanda verilen şekilde,

- ♦ B noktası açının köşesidir.
- ♦ [BA ve [BC açının kenarlarıdır.
- ♦ α açısı $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ veya $\widehat{B}$ ile gösterilir.
- ♦ α açısının ölçüsü $m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{CBA})$ veya $m(\widehat{B})$ şeklinde ifade edilir.

Açı Çeşitleri

1) **Dar Açı:** Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara **dar açı** denir.

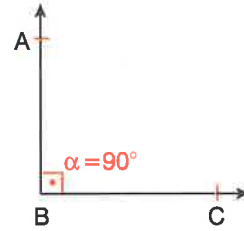
α açısı dar açı ise $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ dir.



2) **Dik Açı:** Ölçüsü 90° olan açılara **dik açı** denir.

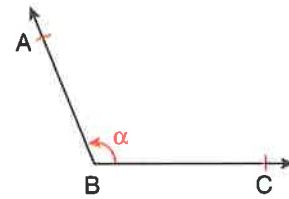
α açısı dik açı ise $\alpha = 90^\circ$ dir.

Ayrıca; $[BA \perp [BC$ dir.



3) **Geniş Açı:** Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açılara **geniş açı** denir.

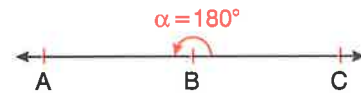
α açısı geniş açı ise $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ dir.



4) **Doğru Açı:** Ölçüsü 180° olan açılara **doğru açı** denir.

$\alpha = 180^\circ$ dir.

A, B ve C noktaları doğrusaldır.



5) **Tam Açı:** Ölçüsü 360° olan açılara **tam açı** denir.

$\alpha = 360^\circ$ dir.



ÜÇGENLER

Örnek 1:

$3x - 15^\circ$ lik bir açı dar açı olduğuna göre, x in en geniş tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

$3x - 15^\circ$ lik bir açı dar açı ise bu açı 0° ile 90° arasında olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned} 0^\circ < 3x - 15^\circ < 90^\circ &\Rightarrow 15^\circ < 3x < 105^\circ \\ &\Rightarrow 5^\circ < x < 35^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 2:

Ölçüleri birer tam sayı olan iki açıdan biri dar diğeri geniş açıdır.

Bu iki açının ölçüleri toplamının alabileceği en büyük değer kaç derecedir?

- A) 179 B) 180 C) 268 D) 269 E) 270

Çözüm:

Dar açı α , geniş açı β olsun.

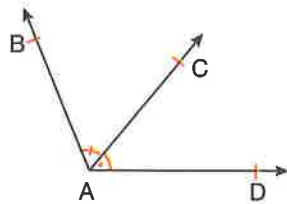
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha \text{ en çok } 89^\circ \text{ olur. } (\alpha \text{ bir tam sayı})$$

$$90^\circ < \beta < 180^\circ \Rightarrow \beta \text{ en çok } 179^\circ \text{ olur. } (\beta \text{ bir tam sayı})$$

O halde, $\alpha + \beta$ en çok $89 + 179 = 268^\circ$ olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Komşu Açılar: Birer ışını ortak olan açılardır. $\widehat{BAC}$ ile $\widehat{CAD}$ komşu açılardır. [AC ortak ışındır.

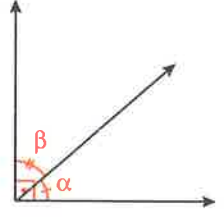


Üçgenlerde Temel Kavramlar

Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90°

olan iki açıya **tümler açılar** denir.

$\alpha + \beta = 90^\circ$ ise α ile β tümler açılardır.



Örnek 3:

Tümler iki açıdan biri diğeri 4 katından 15° eksiktir.

Buna göre, **küçük** açı kaç derecedir?

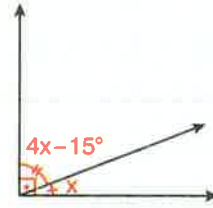
- A) 18 B) 21 C) 24 D) 25 E) 29

Çözüm:

Bir açı x ise diğeri $4x - 15^\circ$ olacaktır.

Açıların toplamı 90° olacağından,

$$x + 4x - 15 = 90 \Rightarrow 5x = 105 \Rightarrow x = 21^\circ \text{ olur.}$$



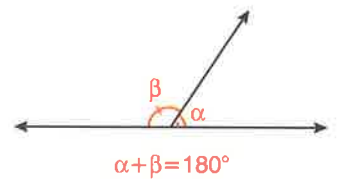
Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı

180° olan iki açıya **bütünler açılar**

denir. α ile β bütünler açılar ise

$\alpha + \beta = 180^\circ$ dir.



ÜÇGENLER

Örnek 4:

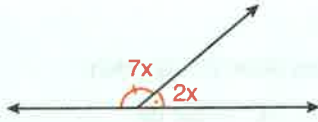
Bütünler iki açıdan birinin diğerine oranı $\frac{2}{7}$ dir.

Buna göre, **küçük** açının tümleri kaç derecedir?

- A) 20 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

Çözüm:

Küçük açı $2x$, büyük açı $7x$ olsun.



Açıların toplamı 180° olacağından,

$$2x + 7x = 180^\circ \Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ \text{ olur.}$$

O halde küçük açı $2x = 2 \cdot 20 = 40^\circ$ ve büyük açı $7x = 7 \cdot 20 = 140^\circ$ olur.

Buradan küçük açının tümleri $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

Bir α açısının;

Tümleyeni: $90 - \alpha$, **Bütünleyeni:** $180 - \alpha$ dir.

Örnek 5:

Tümlelerinin bütünlerine oranı $\frac{1}{4}$ olan açı kaç derecedir?

- A) 75 B) 60 C) 55 D) 50 E) 45

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Çözüm:

Açımız α olsun. O halde, tümleleri $90^\circ - \alpha$ ve bütünleleri $180^\circ - \alpha$ olacaktır.

$$\frac{90^\circ - \alpha}{180^\circ - \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow 180^\circ - \alpha = 360^\circ - 4\alpha$$

$$3\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 6:

$24^\circ < \alpha < 72^\circ$ olduğuna göre, α açısının tümleleri ile bütünlelerinin toplamının en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(96^\circ, 244^\circ)$ B) $(108^\circ, 216^\circ)$ C) $(126^\circ, 222^\circ)$
D) $(144^\circ, 270^\circ)$ E) $(132^\circ, 248^\circ)$

Çözüm:

α açısının tümleleri ile bütünlelerinin toplamı;
 $90^\circ - \alpha + 180^\circ - \alpha = 270^\circ - 2\alpha$ dir.

$$-2 / 24^\circ < \alpha < 72^\circ \Rightarrow -48^\circ > -2\alpha > -144^\circ$$

$$-48^\circ + 270^\circ > -2\alpha + 270^\circ > -144^\circ + 270^\circ$$

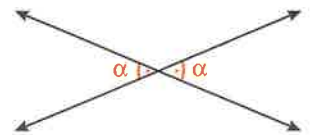
$$222^\circ > 270^\circ - 2\alpha > 126^\circ \text{ olur.}$$

O halde, en geniş aralık $(126^\circ, 222^\circ)$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Ters Açılar: İki doğrunun kesişim noktasında oluşan, komşu olmayan açılara **ters açılar** denir.

Ters açılarının ölçüleri eşittir.



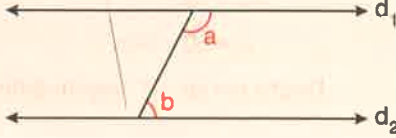
ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

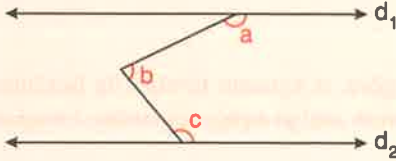
EKSTREM BİLGİLER

- ◆ Karşit durumlu iki açının toplamı 180° dir.

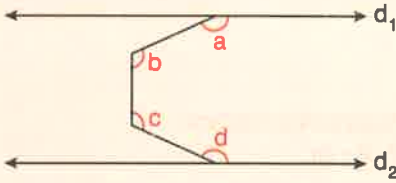
$d_1 // d_2$ olmak üzere, $a+b=180^\circ$ dir.



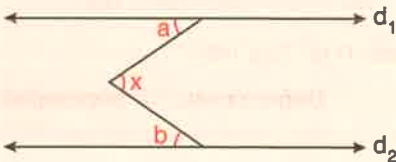
- ◆ $d_1 // d_2$ olmak üzere, $a+b+c=360^\circ$ dir.



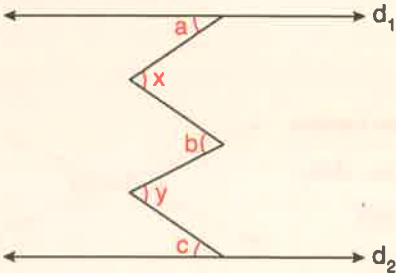
- ◆ $d_1 // d_2$ olmak üzere, $a+b+c+d=540^\circ$ dir.



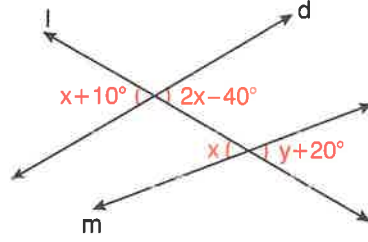
- ◆ $d_1 // d_2$ olmak üzere, $x=a+b$ dir.



- ◆ $d_1 // d_2$ olmak üzere, $x+y=a+b+c$ dir.



Örnek 7:



Yanda d, l ve m doğrularının kesişmesiyle oluşan açılar ölçüleri verilmiştir.

Buna göre, y kaç derecedir?

A) 30

B) 35

C) 36

D) 40

E) 45

Çözüm:

- $2x-40^\circ$ ve $x+10^\circ$ ters açılar olduğundan;

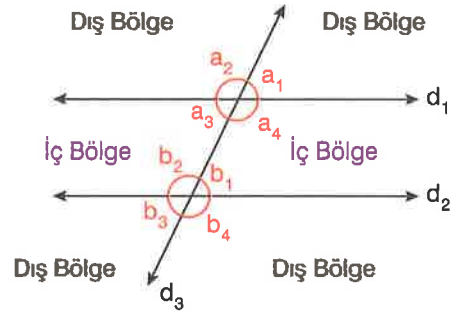
$$2x-40^\circ = x+10^\circ \Rightarrow x=50^\circ \text{ dir.}$$

- x ve $y+20^\circ$ ters açılar olduğundan;

$$x=y+20^\circ \Rightarrow 50^\circ=y+20^\circ \Rightarrow y=30^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Oluşturduğu Açılar



$d_1 // d_2$ ve d_3 bu doğruları kesen bir doğru

- a) Ters açılar ölçüleri birbirine eşittir.

$$a_1=a_3, a_2=a_4, b_1=b_3 \text{ ve } b_2=b_4 \text{ tür.}$$

- b) Yöndeş açılar ölçüleri birbirine eşittir.

$$a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3 \text{ ve } a_4=b_4 \text{ tür.}$$

- c) İç ters açılar ölçüleri birbirine eşittir.

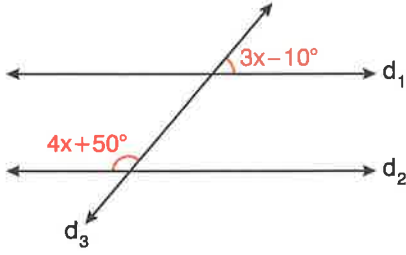
$$a_3=b_1 \text{ ve } a_4=b_2$$

- d) Dış ters açılar ölçüleri birbirine eşittir.

$$a_1=b_3 \text{ ve } a_2=b_4 \text{ tür.}$$

ÜÇGENLER

Örnek 8:



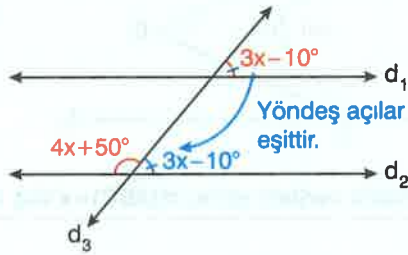
Yandaki şekilde
 $d_1 // d_2$ dir.

d_3 doğrusunun d_1 ve d_2 doğruları ile oluşturduğu açılar $3x - 10^\circ$ ve $4x + 50^\circ$ dir.

Buna göre, x kaç derecedir?

- A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 25

Çözüm:



Yöndeş açılardan eşitliğinden d_3 ile d_2 arasındaki diğer açı $3x - 10^\circ$ olacaktır.

$4x + 50^\circ$ ile $3x - 10^\circ$ bütünler açılar olduğundan,

$$4x + 50^\circ + 3x - 10^\circ = 180^\circ$$

$$7x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$7x = 140^\circ$$

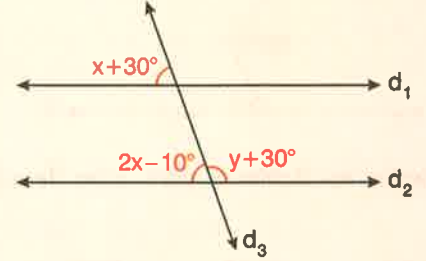
$$x = 20^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Üçgenlerde Temel Kavramlar

İLK ADIM SORULARI

1.



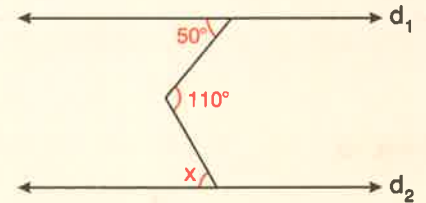
Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ dir.

d_3 doğrusunun d_1 ve d_2 doğruları ile oluşturduğu açılar $x + 30^\circ$, $2x - 10^\circ$ ve $y + 30^\circ$ dir.

Buna göre, y kaç derecedir?

- A) 100 B) 95 C) 90 D) 85 E) 80

2.



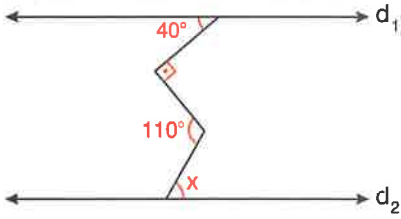
Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ dir.

Verilen ölçülere göre, x kaç derecedir?

- A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

ÜÇGENLER

Örnek 9:



Yandaki şekilde
 $d_1 \parallel d_2$ dir.

Verilen açı ölçülerine göre, x kaç derecedir?

- A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

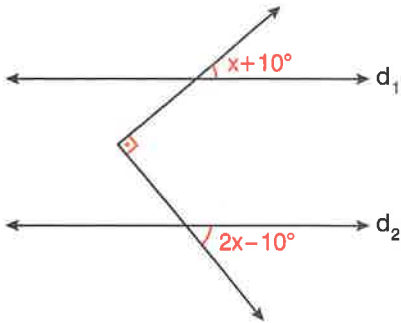
Çözüm:

$40^\circ + 110^\circ = 90^\circ + x$ olacağından,

$$150 = 90 + x \Rightarrow x = 60^\circ \text{ dir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 10:



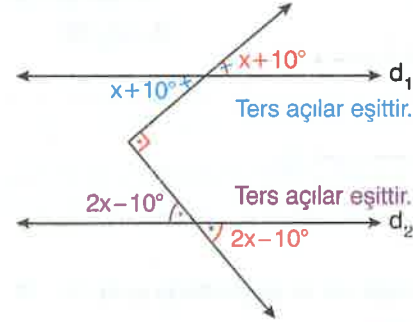
Yandaki şekilde
 $d_1 \parallel d_2$ dir.

Verilen açı ölçülerine göre, x kaç derecedir?

- A) 30 B) 36 C) 40 D) 45 E) 48

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Çözüm:



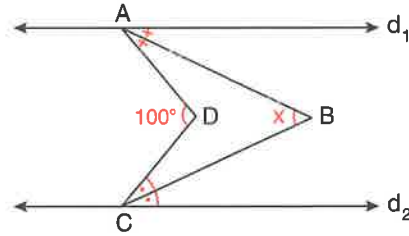
$$x + 10^\circ + 2x - 10^\circ = 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 11:



Yandaki şekilde
 $d_1 \parallel d_2$ dir.
[AB] ve [CB] açıortay
 $m(\widehat{ADC}) = 100^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 80

Çözüm:

Eş açılarının ölçülerini a ve b ile ifade edersek,

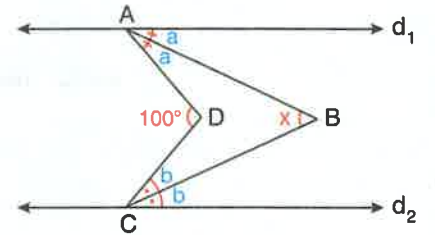
$$2a + 2b = 100^\circ \text{ ise}$$

$$2(a + b) = 100^\circ$$

$$a + b = 50^\circ \text{ olur.}$$

$x = a + b$ olduğuna göre, $x = 50^\circ$ dir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.



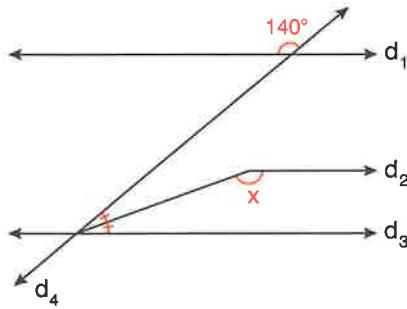
ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Dikkat

$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere,
 $m(\widehat{ABC}) = x$ ise
 $m(\widehat{ADC}) = 2x$ tir.

Örnek 12:



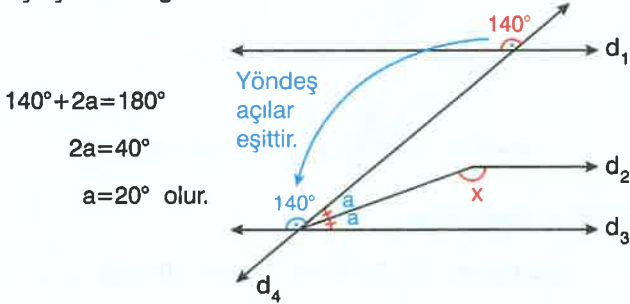
Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ tür.

Verilen bilgilere göre, x kaç derecedir?

- A) 150 B) 155 C) 160 D) 165 E) 170

Çözüm:

Eş açları a ile gösterelim.



$$140^\circ + 2a = 180^\circ$$

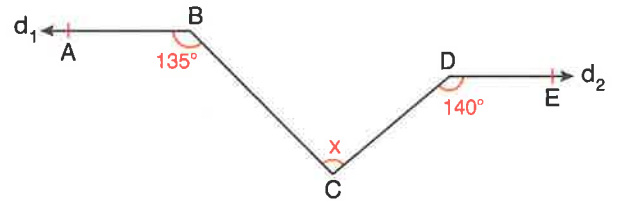
$$2a = 40^\circ$$

$$a = 20^\circ \text{ olur.}$$

$$a + x = 180^\circ \text{ olacağından, } 20^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 160^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 13:



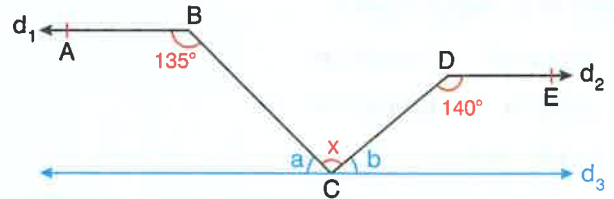
Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{ABC}) = 135^\circ$, $m(\widehat{CDE}) = 140^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 95 B) 90 C) 85 D) 80 E) 75

Çözüm:

C noktasından geçen ve d_1 ile d_2 doğrularına paralel olan d_3 doğrusunu çizelim.



$$135^\circ + a = 180^\circ \Rightarrow a = 45^\circ$$

$$140^\circ + b = 180^\circ \Rightarrow b = 40^\circ \text{ olur.}$$

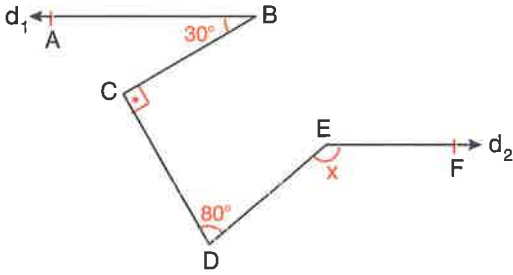
$$a + b + x = 180^\circ \text{ olacağından, } 45^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 95^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 14:

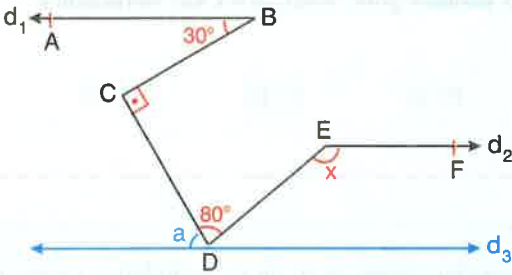


Şekilde $d_1 \parallel d_2$, $[BC] \perp [CD]$, $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$, $m(\widehat{CDE}) = 80^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{DEF}) = x$ kaç derecedir?

- A) 120 B) 125 C) 130 D) 135 E) 140

Çözüm:



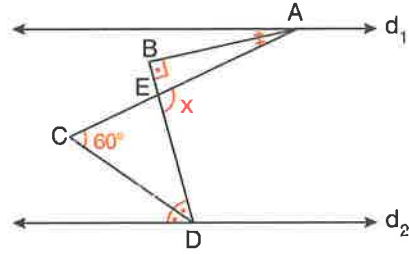
d_1 ve d_2 doğrularına paralel olacak şekilde D noktasından geçen bir d_3 doğrusu çizelim.

- $30^\circ + a = 90^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$ dir.
- $a + 80^\circ = x \Rightarrow 60^\circ + 80^\circ = x$
 $x = 140^\circ$ olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 15:



Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2$
[AB] ve [CD] açıortay
[AB] $\perp$ [BD]
 $m(\widehat{ACD}) = 60^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{AED}) = x$ kaç derecedir?

- A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

Çözüm:

Eş açların ölçülerini a ve b ile gösterelim.

$$a + 2b = 90^\circ \text{ ve } 2a + b = 60^\circ \text{ dir.}$$

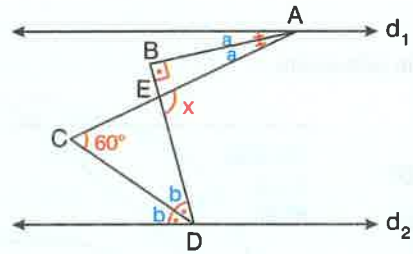
$$a + 2b = 90^\circ$$

$$+ 2a + b = 60^\circ$$

$$3a + 3b = 90^\circ + 60^\circ$$

$$3(a + b) = 150^\circ$$

$$a + b = 50^\circ \text{ bulunur.}$$



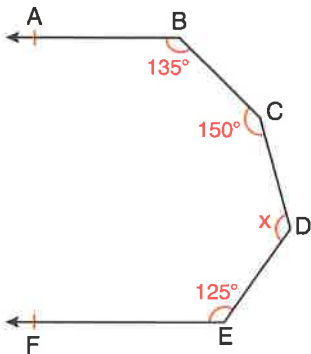
$2a + 2b = x$ olacağından

$$2(a + b) = x \Rightarrow 2 \cdot 50^\circ = x \Rightarrow x = 100^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 16:



Yandaki şekilde
[BA // [EF
 $m(\widehat{ABC}) = 135^\circ$
 $m(\widehat{BCD}) = 150^\circ$
 $m(\widehat{DEF}) = 125^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{CDE}) = x$ kaç derecedir?

- A) 130 B) 135 C) 140 D) 145 E) 150

Çözüm:

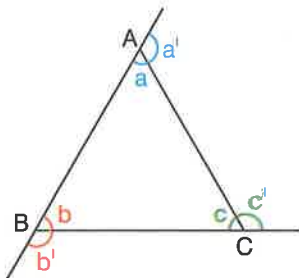
$$135^\circ + 150^\circ + x + 125^\circ = 540^\circ \Rightarrow 410^\circ + x = 540^\circ$$

$$x = 130^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgende Açı Özellikleri

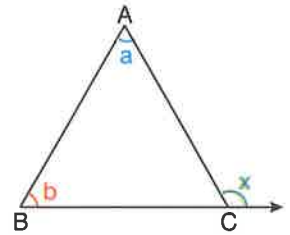
- Tüm üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.
 $a + b + c = 180^\circ$ dir.



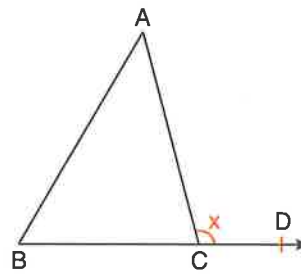
- Tüm üçgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.
 $a' + b' + c' = 360^\circ$ dir.

Üçgenlerde Temel Kavramlar

- Bir üçgende herhangi iki iç açının ölçüleri toplamı bunlarla komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir.
 $a + b = x$ tir.



Örnek 17:



ABC üçgeninde

$$\frac{m(\widehat{A})}{3} = \frac{m(\widehat{B})}{4} = \frac{m(\widehat{C})}{5}$$

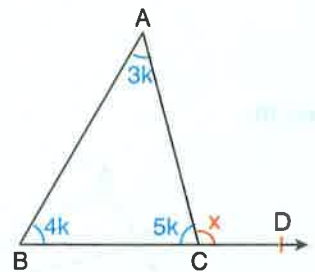
Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ACD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 125 B) 120 C) 115 D) 110 E) 105

Çözüm:

$$\frac{m(\widehat{A})}{3} = \frac{m(\widehat{B})}{4} = \frac{m(\widehat{C})}{5} = k$$

olsun. O halde, $m(\widehat{A}) = 3k$,
 $m(\widehat{B}) = 4k$, $m(\widehat{C}) = 5k$ olur.



Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$$3k + 4k + 5k = 180^\circ \Rightarrow 12k = 180^\circ \Rightarrow k = 15^\circ \text{ olur.}$$

$$5k + x = 180^\circ \text{ olacağından;}$$

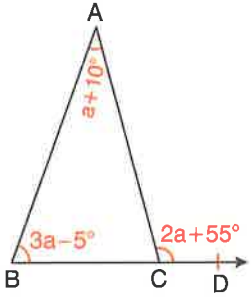
$$5 \cdot 15 + x = 180^\circ \Rightarrow 75 + x = 180^\circ$$

$$x = 105^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 18:



ABC üçgeninde
 $m(\widehat{BAC}) = a + 10^\circ$
 $m(\widehat{ABC}) = 3a - 5^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 2a + 55^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

- A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

Çözüm:

$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$ eşitliğinden,

$$a + 10^\circ + 3a - 5^\circ = 2a + 55^\circ$$

$$4a + 5^\circ = 2a + 55^\circ$$

$$2a = 50^\circ$$

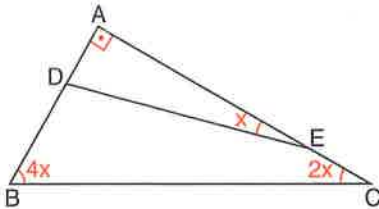
$$a = 25^\circ \text{ olur.}$$

$$m(\widehat{ACD}) = 2a + 55^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 2 \cdot 25^\circ + 55^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 105^\circ$$

$$m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 75^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 19:



ABC dik üçgeninde, $[AB] \perp [AC]$, $m(\widehat{ABC}) = 4x$, $m(\widehat{ACB}) = 2x$
 $m(\widehat{AED}) = x$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ADE})$ kaç derecedir?

- A) 75 B) 72 C) 70 D) 64 E) 60

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Çözüm:

ABC üçgeninde,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 4x + 2x = 180^\circ$$

$$6x = 90^\circ$$

$$x = 15^\circ \text{ olur.}$$

ADE üçgeninde, $x = 15^\circ$ olduğundan,

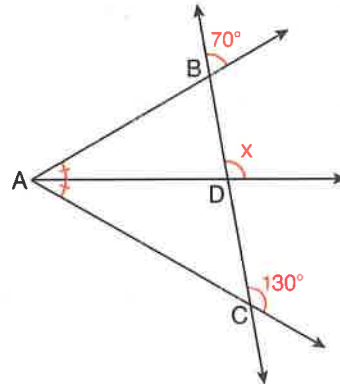
$$m(\widehat{ADE}) = 180^\circ - (90^\circ + 15^\circ)$$

$$= 180^\circ - 105^\circ$$

$$= 75^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 20:



Yandaki şekilde $[AD]$, A açısının açıortayıdır.

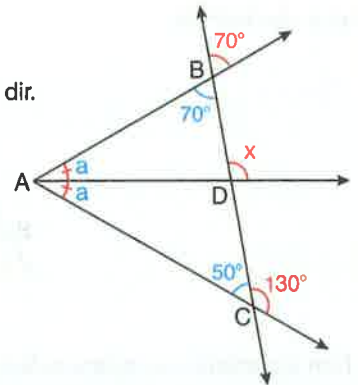
Verilen açı ölçülerine göre, x kaç derecedir?

- A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

Çözüm:

$$m(\widehat{ABC}) = 70^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \text{ dir.}$$



ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$$2a + 70^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2a + 120^\circ = 180^\circ$$

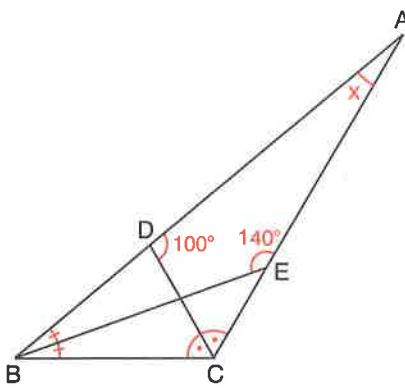
$$2a = 60^\circ$$

$$a = 30^\circ \text{ olur.}$$

ABC üçgeninde; $a + 70^\circ = x \Rightarrow 30^\circ + 70^\circ = x \Rightarrow x = 100^\circ$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 21:



Şekildeki ABC
üçgeninde
[BE] ve [CD] açıortay
 $m(\widehat{ADC}) = 100^\circ$
 $m(\widehat{AEB}) = 140^\circ$

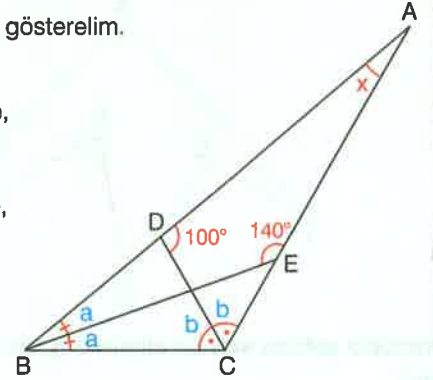
Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Çözüm:

Eş açları a ve b ile gösterelim.

- DBC üçgeninde,
 $2a + b = 100^\circ$
- BCE üçgeninde,
 $a + 2b = 140^\circ$ dir.



İki denklemi alt alta toplayalım.

$$2a + b = 100^\circ$$

$$+ \quad a + 2b = 140^\circ$$

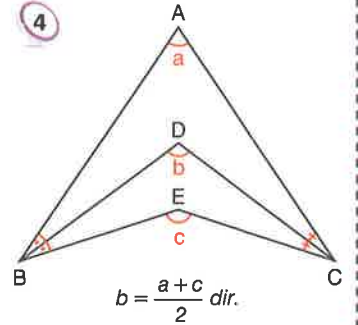
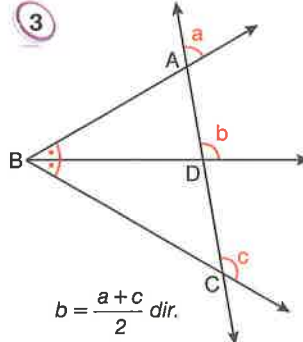
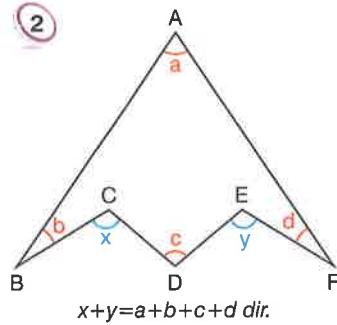
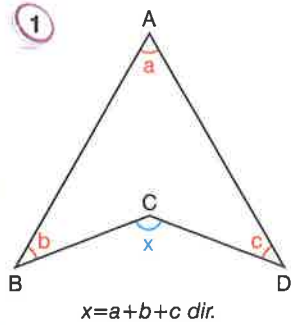
$$3a + 3b = 240^\circ$$

$$3.(a + b) = 240^\circ \Rightarrow a + b = 80^\circ \text{ olur.}$$

- ABC üçgeninde,
 $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow x + 2a + 2b = 180^\circ$
 $x + 2.(a + b) = 180^\circ$
 $x + 2.80^\circ = 180^\circ$
 $x + 160^\circ = 180^\circ$
 $x = 20^\circ \text{ olur.}$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

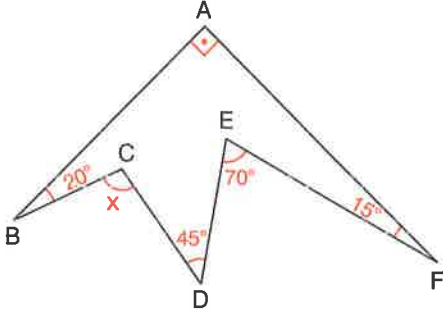
! Dikkat



ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 22:



Yukarıdaki şekilde verilen bilgilere göre, $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 90 B) 100 C) 105 D) 110 E) 115

Çözüm:

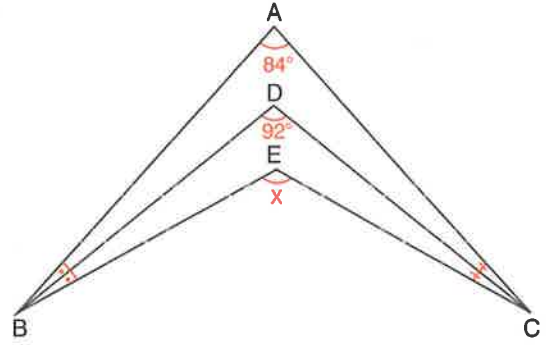
$$90^\circ + 20^\circ + 45^\circ + 15^\circ = x + 70^\circ \quad (\text{2 numaralı özellikten})$$

$$170^\circ = x + 70^\circ$$

$$x = 100^\circ \text{ dir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 23:



Yukarıdaki şekilde [BD] ve [CD] açıortay, $m(\widehat{BAC}) = 84^\circ$
 $m(\widehat{BDC}) = 92^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BEC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 116 B) 112 C) 108 D) 104 E) 100

Çözüm:

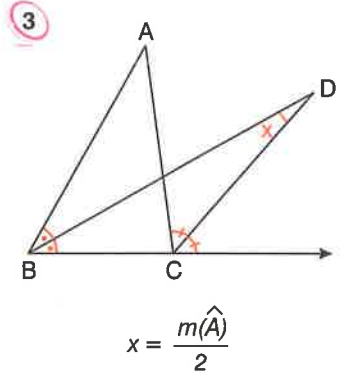
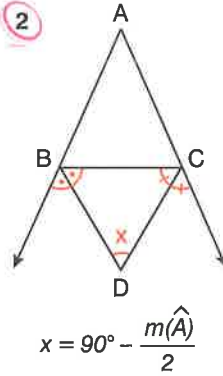
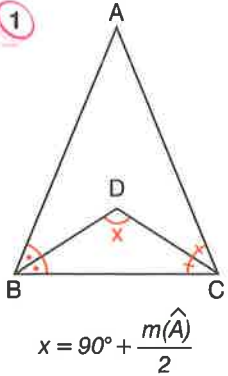
4 numaralı özellikten

$$92^\circ = \frac{84^\circ + x}{2} \Rightarrow 184^\circ = 84^\circ + x$$

$$\Rightarrow x = 100^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

! Dikkat

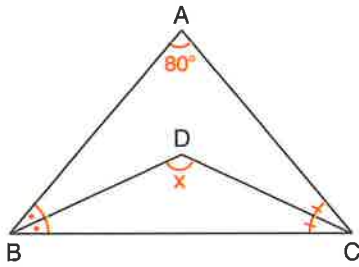


Bu özellikler ve özelliklerle ilgili daha geniş örnek ve çözümler açıortay konusunda işlenecektir.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 24:

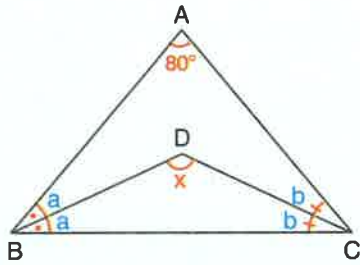


ABC üçgeninde
[BD] ve [CD]
iç açıortaylar
 $m(\widehat{BAC})=80^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BDC})=x$ kaç derecedir?

- A) 145 B) 140 C) 135 D) 130 E) 125

Çözüm:



I. Yol: Eş açıları a ve b ile gösterelim.

- ABC üçgeninden,

$$2a+2b+80^\circ=180^\circ$$

$$2a+2b=100^\circ$$

$$a+b=50^\circ \text{ olur.}$$

- BDC üçgeninden,

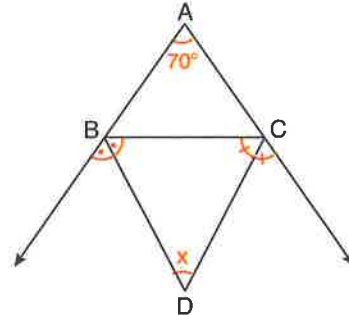
$$a+b+x=180^\circ \Rightarrow 50^\circ+x=180^\circ \Rightarrow x=130^\circ \text{ bulunur.}$$

II. Yol: 1 numaralı özellikten,

$$x = 90^\circ + \frac{m(\widehat{A})}{2} \Rightarrow x = 90^\circ + \frac{80^\circ}{2} \Rightarrow x = 130^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 25:

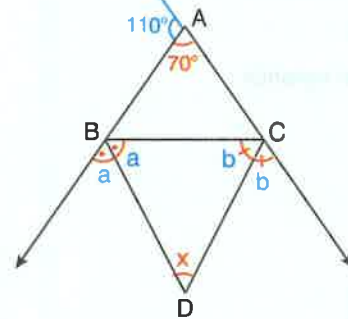


ABC üçgeninde
[BD] ve [CD]
dış açıortaylar
 $m(\widehat{BAC})=70^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BDC})=x$ kaç derecedir?

- A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm:



I. Yol: Eş açıları a ve b ile gösterelim.

A açısının dış açısı 110° olur. ABC üçgeninin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan,

$$2a+2b+110^\circ=360^\circ$$

$$2a+2b=250^\circ$$

$$a+b=125^\circ \text{ olur.}$$

BDC üçgeninden,

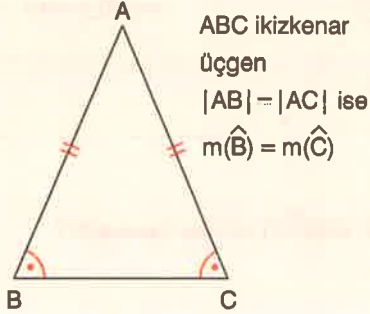
$$a+b+x=180^\circ \Rightarrow 125^\circ+x=180^\circ \Rightarrow x=55^\circ \text{ bulunur.}$$

II. Yol: 2 numaralı özellikten,

$$x = 90^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} \Rightarrow x = 90^\circ - \frac{70^\circ}{2} \Rightarrow x = 55^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER

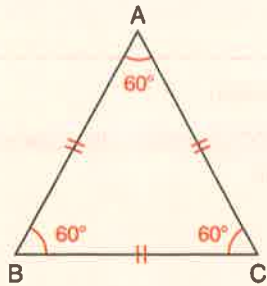


ABC ikizkenar
üçgen
 $|AB| = |AC|$ ise
 $m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

İkizkenar üçgenin iki kenar uzunluğu ve bu kenarların karşısındaki açılar ölçülerle birbirine eşittir.

$\hat{A}$: Tepe açısı,

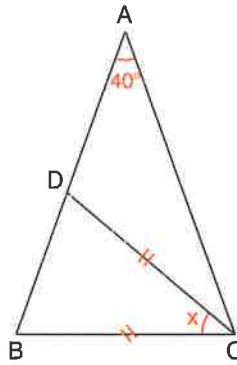
$\hat{B}$ ve $\hat{C}$: Taban açılarıdır.



ABC eşkenar üçgen
 $|AB| = |AC| = |BC|$
 $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ$

Eşkenar üçgenin tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir.
Ayrıca tüm iç açılarının ölçülerle birbirine eşit ve 60° dir.

Örnek 26:



ABC üçgeninde

$$|AB| = |AC|$$

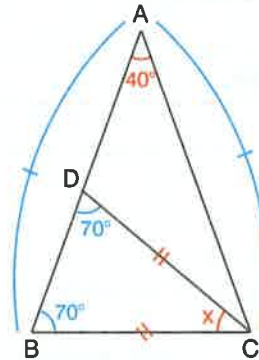
$$|BC| = |DC|$$

$$m(\hat{BAC}) = 40^\circ$$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\hat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

Çözüm:



- ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ olduğundan,

$$m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \text{ olur.}$$

- BDC üçgeninde $|BC| = |DC|$ olduğundan,

$$m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 70^\circ \text{ dir.}$$

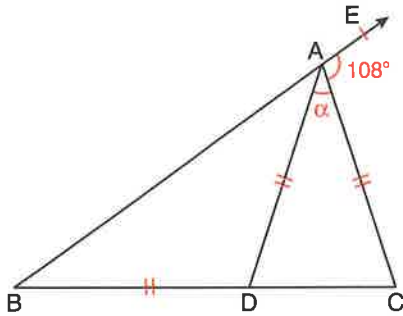
$$\text{O halde, } 70^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \text{ dir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 27:

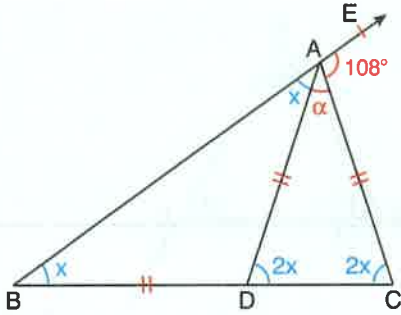


ABC üçgeninde
 $|AD| = |BD| = |AC|$
 $m(\widehat{CAE}) = 108^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ kaç derecedir?

- A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

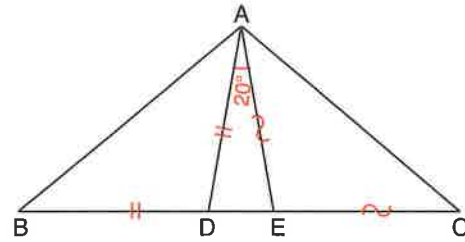
Çözüm:



- ABC üçgeninde $|BD| = |AD|$ olduğundan,
 $m(\widehat{ABD}) = x$ dersek, $m(\widehat{BAD}) = x$ olur.
 Ayrıca, $m(\widehat{ADC}) = x + x = 2x$ tir.
- ADC üçgeninde, $|AD| = |AC|$ olduğundan,
 $m(\widehat{ADC}) = 2x$ ise $m(\widehat{ACD}) = 2x$ tir.
- ABC üçgeninde,
 $x + 2x = 108^\circ \Rightarrow 3x = 108^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$ olur.
 $x + \alpha + 108^\circ = 180^\circ$ olacağından,
 $36^\circ + \alpha + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$ bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 28:

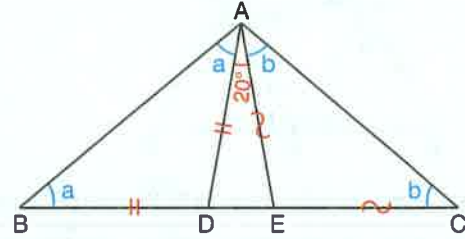


ABC üçgeninde
 $|BD| = |AD|$
 $|AE| = |EC|$
 $m(\widehat{DAE}) = 20^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 130 B) 120 C) 110 D) 100 E) 90

Çözüm:



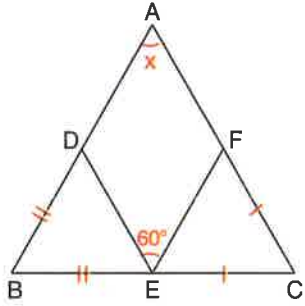
- ABD üçgeninde $|BD| = |AD|$ olduğundan,
 $m(\widehat{ABD}) = a$ dersek, $m(\widehat{BAD}) = a$ olur.
 - AEC üçgeninde, $|AE| = |EC|$ olduğundan,
 $m(\widehat{ACE}) = b$ dersek, $m(\widehat{EAC}) = b$ olur.
- ABC üçgeninin iç açıları toplamından;
 $a + a + 20^\circ + b + b = 180^\circ \Rightarrow 2a + 2b = 160^\circ$
 $\Rightarrow a + b = 80^\circ$ olur.

O halde, $m(\widehat{BAC}) = a + b + 20^\circ = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$ bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 29:

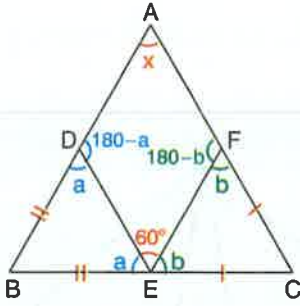


ABC üçgeninde
 $|BD| = |BE|$
 $|FC| = |EC|$
 $m(\widehat{DEF}) = 60^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 60 B) 66 C) 70 D) 72 E) 75

Çözüm:



BDE ikizkenar üçgen olduğundan, $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BED}) = a$
 FCE ikizkenar üçgen olduğundan, $m(\widehat{FEC}) = m(\widehat{EFC}) = b$ olsun.

E noktasında oluşan açılardan;

$$a + 60^\circ + b = 180^\circ \Rightarrow a + b = 120^\circ \text{ olur.}$$

$m(\widehat{ADE}) = 180^\circ - a$ ve $m(\widehat{AFE}) = 180^\circ - b$ olacaktır.

ADEF dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° olacağından,

$$180^\circ - a + 180^\circ - b + 60^\circ + x = 360^\circ$$

$$360^\circ + 60^\circ + x = 360^\circ + \overset{120^\circ}{a+b}$$

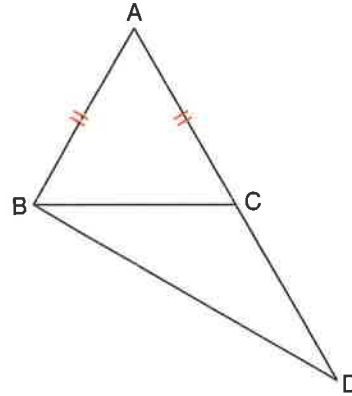
$$60^\circ + x = 120^\circ$$

$$x = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 30:

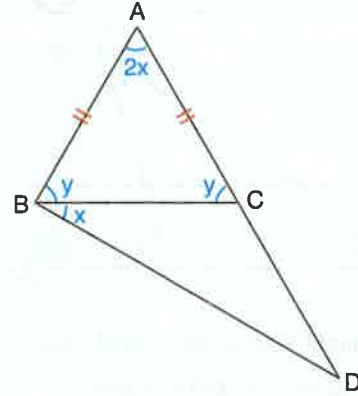


Yandaki şekilde,
 $|AB| = |AC|$
 $m(\widehat{BAD}) = 2 \cdot m(\widehat{DBC})$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ABD})$ kaç derecedir?

- A) 60 B) 72 C) 90 D) 100 E) 120

Çözüm:



$m(\widehat{DBC}) = x$ dersek, $m(\widehat{BAC}) = 2x$ olur.

ABC üçgeni ikizkenar olduğundan, $m(\widehat{ABC}) = y$ dersek,
 $m(\widehat{ACB}) = y$ olur.

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından,

$$2x + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ$$

$$x + y = 90^\circ \text{ olur.}$$

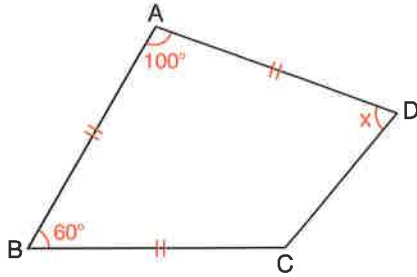
O halde, $m(\widehat{ABD}) = x + y = 90^\circ$ dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 31:

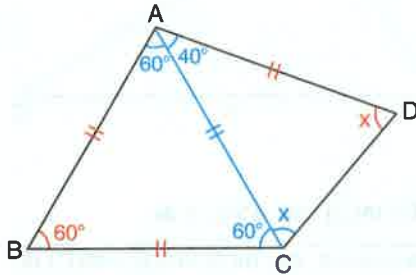


Yandaki şekilde
 $|AB| = |BC| = |AD|$
 $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$
 $m(\widehat{BAD}) = 100^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ADC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 85 B) 80 C) 75 D) 70 E) 65

Çözüm:



[AC] çizilirse $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{B}) = 60^\circ$ olduğundan ABC üçgeni eşkenar üçgen olur.

O halde, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 60^\circ$ ve $|AB| = |BC| = |AC|$ olacaktır.

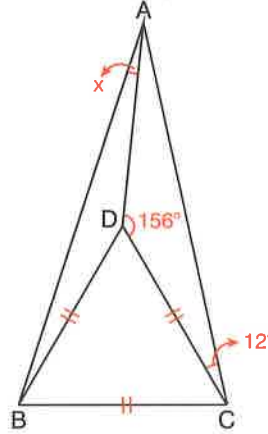
$m(\widehat{BAD}) = 100^\circ$ olduğundan, $m(\widehat{CAD}) = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ dir.

$|AC| = |AD|$ elde edildiğinden $m(\widehat{ADC}) = x$ ise $m(\widehat{ACD}) = x$ olur.

O halde, ADC üçgeninden, $x + x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 32:

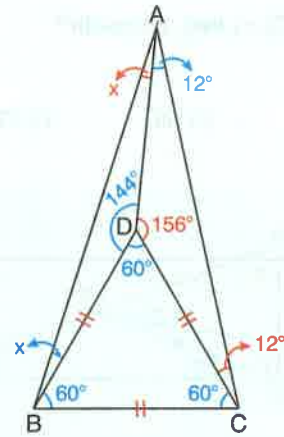


ABC üçgeninde
 $|BD| = |DC| = |BC|$
 $m(\widehat{ADC}) = 156^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 12^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 12 B) 18 C) 20 D) 24 E) 26

Çözüm:



BDC üçgeni eşkenar üçgen olduğundan açıları eşit ve 60° dir.

$$\begin{aligned} \text{ABC üçgeninde, } m(\widehat{DAC}) &= 180^\circ - (156^\circ + 12^\circ) \\ &= 180^\circ - 168^\circ \\ &= 12^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla ADC üçgeni ikizkenardır. $|AD| = |DC|$ dir.

$|BD| = |AD|$ elde edildiğinden $m(\widehat{ABD}) = x$ olur.

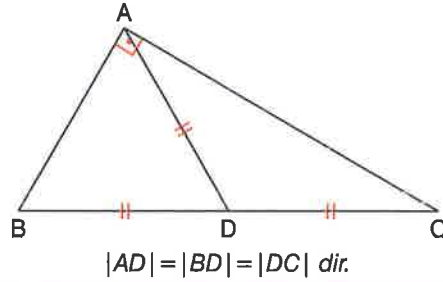
$$m(\widehat{ADB}) = 360^\circ - (156^\circ + 60^\circ) = 144^\circ \text{ dir.}$$

$$\text{ABD üçgeninden; } x + x + 144^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \text{ olur.}$$

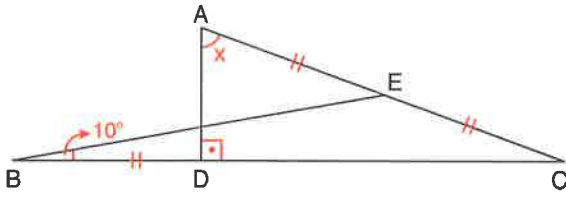
Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Dikkat

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.



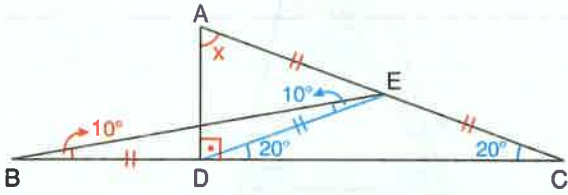
Örnek 33:



Yukarıdaki şekilde, $[AD] \perp [BC]$, $|AE| = |EC| = |BD|$, $m(\widehat{EBC}) = 10^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{DAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 80

Çözüm:



ADC dik üçgeninde hipotenüse ait kenarortay olan $[DE]$ yi çizerek

$|DE| = |AE| = |EC|$ olur.

$|BD| = |DE|$ elde edildiğinden BDE üçgeni ikizkenardır.

Dolayısıyla $m(\widehat{BED}) = 10^\circ$ olur. Buradan,

$m(\widehat{EDC}) = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$ dir.

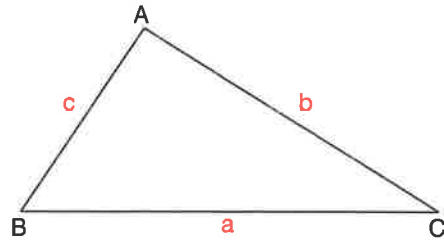
$|DE| = |EC|$ olduğundan, $m(\widehat{ECD}) = 20^\circ$ olacaktır.

ADC üçgeninde, $x + 90^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENDE AÇI VE KENAR İLİŞKİLERİ

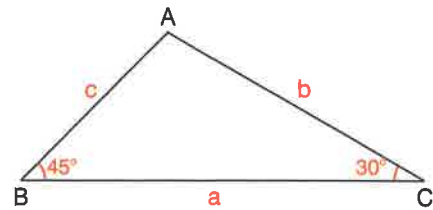
Kenar uzunlukları farklı olan üçgenlerde büyük olan kenarın karşısındaki açının ölçüsü küçük olan kenarın karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür.



♦ $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ ise $a > b > c$ dir.

Aynı şekilde $a > b > c$ ise $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ dir.

Örnek 34:

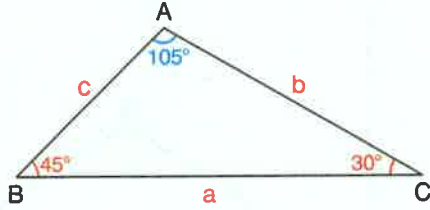


Yukarıda verilen üçgenin kenar uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

ÜÇGENLER

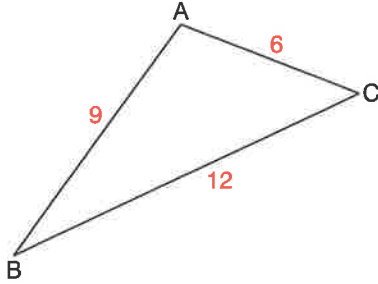
Üçgenlerde Temel Kavramlar

Çözüm:



$m(\hat{B})=45^\circ$, $m(\hat{C})=30^\circ$ olduğundan $m(\hat{A})=105^\circ$ olur.
 $m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ ise $a > b > c$ 'dir.

Örnek 35:



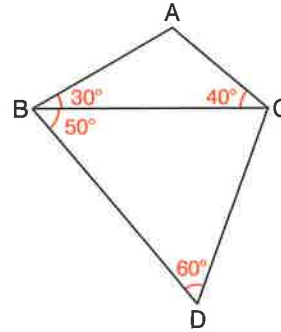
Yukarıda verilen üçgenin iç açılarının ölçülerini büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm:

Üçgenlerde uzun kenarın karşısındaki açının ölçüsü kısa kenarın karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür.

$|BC| > |AB| > |AC|$ olduğundan $m(\hat{A}) > m(\hat{C}) > m(\hat{B})$ olur.

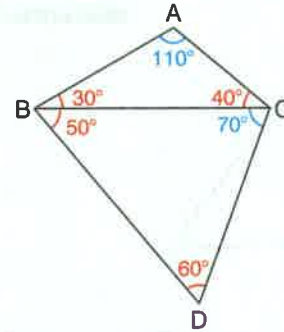
Örnek 36:



Yandaki şekilde verilenlere göre, **en uzun** kenar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [AB] B) [AC] C) [BC] D) [BD] E) [CD]

Çözüm:



$m(\hat{BAC})=110^\circ$ ve $m(\hat{BCD})=70^\circ$ olur.

- ABC üçgeninde, $m(\hat{A}) > m(\hat{C}) > m(\hat{B})$ olduğundan, $|BC| > |AB| > |AC|$ dir.

Dolayısıyla ABC üçgeninin en uzun kenarı [BC] dir.

- BCD üçgeninde, $m(\hat{C}) > m(\hat{D}) > m(\hat{B})$ olduğundan, $|BD| > |BC| > |CD|$ olur.

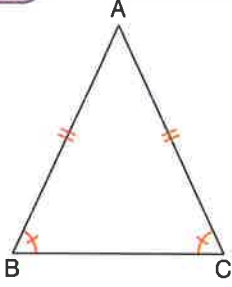
Dolayısıyla $|BD| > |BC|$ olduğundan en uzun kenar [BD] dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

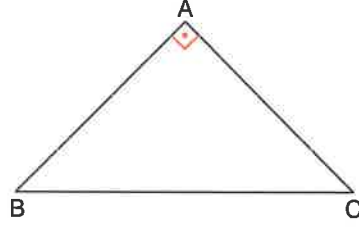
Üçgenlerde Temel Kavramlar

! Dikkat



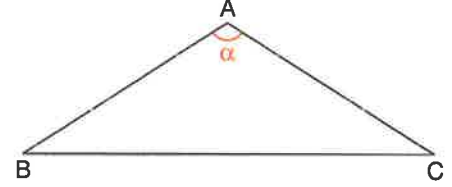
Eşit uzunluktaki kenarların karşısında bulunan açılarının ölçüleri de eşittir.

$$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C}) \text{ dir.}$$



Bir dik üçgende en uzun kenar hipotenüstür.

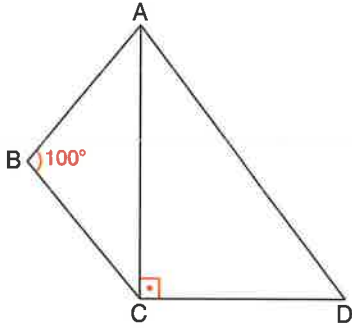
$$m(\hat{A}) = 90 \text{ ise } |BC| \text{ en uzun kenardır.}$$



Geniş açılı üçgende en uzun kenar geniş açının karşısındaki kenardır.

$$\alpha > 90^\circ \text{ ise } |BC| \text{ en uzun kenardır.}$$

Örnek 37:



Yandaki şekilde verilenlere göre, **en uzun** kenar aşağıdakilerden hangisidir?

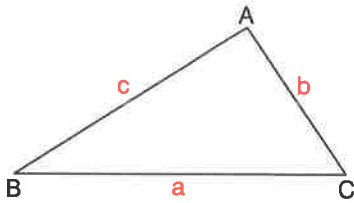
- A) [AD] B) [CD] C) [AC] D) [AB] E) [BC]

Çözüm:

- ABC üçgeni geniş açılı bir üçgen olduğundan bu üçgenin en uzun kenarı [AC] dir.
 - ACD üçgeni dik üçgen olduğundan bu üçgenin en uzun kenarı hipotenüs olan [AD] dir.
- $|AD| > |AC|$ olacağından en uzun kenar [AD] dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ



ABC üçgeninin a, b ve c kenarları arasında;

$$|b - c| < a < b + c$$

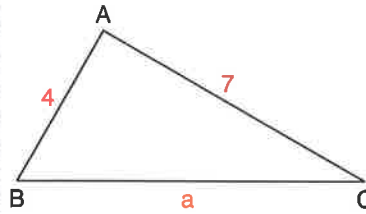
$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

eşitsizlikleri vardır.

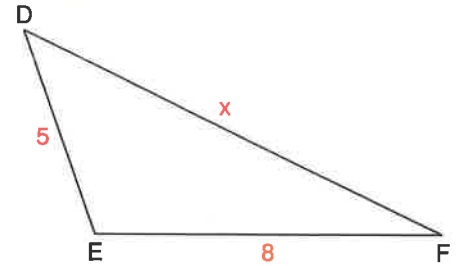
Bu eşitsizliklerin her birine **üçgen eşitsizliği** adı verilir.

! Dikkat



$$|7 - 4| < a < 7 + 4$$

$$3 < a < 11$$



$$|8 - 5| < x < 8 + 5$$

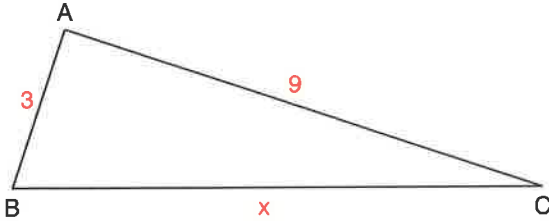
$$3 < x < 13$$

- ♦ Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyüktür.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 38:



ABC üçgeninde, $|AB| = 3$ birim, $|AC| = 9$ birim, $|BC| = x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm:

ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden

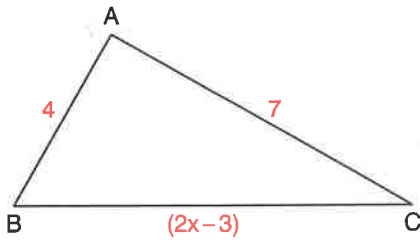
$$|9-3| < x < 9+3 \Rightarrow 6 < x < 12 \text{ olur.}$$

O halde, x in alabileceği tam sayı değerleri 7, 8, 9, 10 ve 11 olur.

Dolayısıyla x in alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı da $11+7=18$ olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 39:



ABC üçgeninde

$|AB| = 4$ birim

$|AC| = 7$ birim

$|BC| = (2x-3)$ birim

Buna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

ABC nde üçgen eşitsizliğinden,

$$|7-4| < 2x-3 < 7+4 \Rightarrow 3 < 2x-3 < 11$$

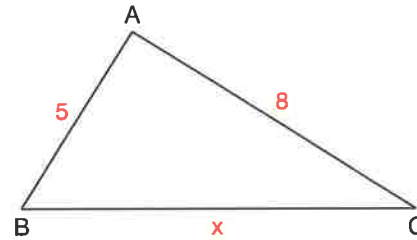
$$6 < 2x < 14$$

$$3 < x < 7 \text{ olur.}$$

x in alabileceği tam sayı değerleri 4, 5 ve 6 olmak üzere 3 tanedir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 40:



ABC üçgeninde

$|AB| = 5$ birim

$|AC| = 8$ birim

$|BC| = x$ birim

$m(\hat{A}) > m(\hat{B})$

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 48 B) 46 C) 44 D) 42 E) 40

Çözüm:

ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden,

$$|8-5| < x < 8+5 \Rightarrow 3 < x < 13 \dots \textcircled{1} \text{ dir.}$$

$$m(\hat{A}) > m(\hat{B}) \Rightarrow x > 8 \dots \textcircled{2} \text{ dir.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den, $8 < x < 13$ elde edilir.

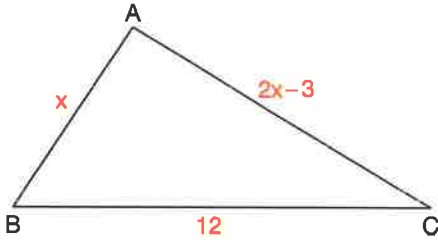
x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı

$$9+10+11+12=42 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 41:



ABC üçgeninde
 $|AB| = x$ birim
 $|AC| = (2x-3)$ birim
 $|BC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x in en geniş değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $7 < x < 16$ B) $5 < x < 15$ C) $3 < x < 12$
 D) $6 < x < 14$ E) $8 < x < 16$

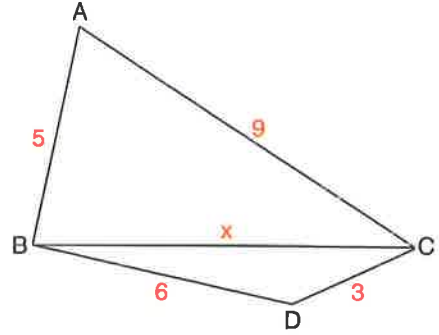
Çözüm:

ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |2x-3-x| < 12 < 2x-3+x &\Rightarrow |x-3| < 12 < 3x-3 \\ &\Rightarrow |x-3| < 12 \text{ ve } 12 < 3x-3 \\ &\Rightarrow -12 < x-3 < 12 \text{ ve } 15 < 3x \\ &\Rightarrow -9 < x < 15 \text{ ve } 5 < x \\ &\Rightarrow 5 < x < 15 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 42:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, x in en geniş değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4 < x < 9$ B) $3 < x < 14$ C) $5 < x < 10$ D) $4 < x < 14$ E) $3 < x < 9$

Çözüm:

$\triangle ABC$ nde üçgen eşitsizliğinden,

$$|9-5| < x < 9+5 \Rightarrow 4 < x < 14 \dots \textcircled{1} \text{ dir.}$$

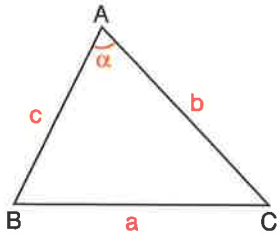
$\triangle BCD$ nde üçgen eşitsizliğinden,

$$|6-3| < x < 6+3 \Rightarrow 3 < x < 9 \dots \textcircled{2} \text{ dir.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den, x in en geniş değer aralığı $4 < x < 9$ olur.

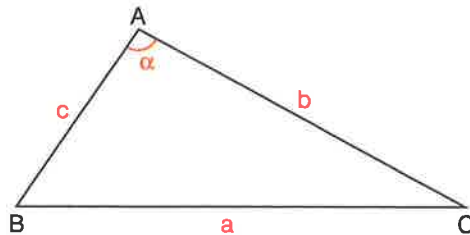
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat



$\alpha < 90^\circ$ ise

$$|b-c| < a < \sqrt{b^2+c^2}$$



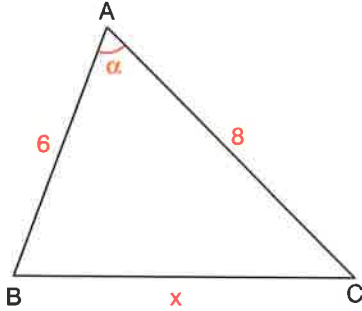
$\alpha > 90^\circ$ ise

$$\sqrt{b^2+c^2} < a < b+c$$

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 43:



ABC üçgeninde, $|AB|=6$ birim, $|AC|=8$ birim, $|BC|=x$ birim $\alpha < 90^\circ$ olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm:

$\alpha < 90^\circ$ olduğundan,

$$|8 - 6| < x < \sqrt{8^2 + 6^2}$$

$$2 < x < \sqrt{64 + 36}$$

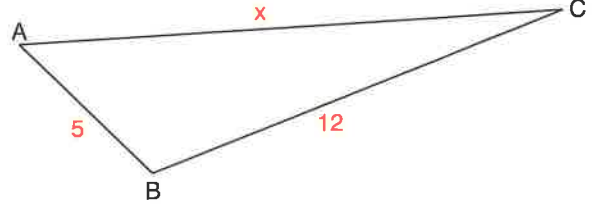
$$2 < x < \sqrt{100}$$

$$2 < x < 10 \text{ olur.}$$

O halde x ; 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 olmak üzere 7 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 44:



$\triangle ABC$ nde, $|AB|=5$ birim, $|BC|=12$ birim $|AC|=x$ birim, $m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri ile en büyük tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

- A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

Çözüm:

$m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$ olduğundan;

$$\sqrt{12^2 + 5^2} < x < 12 + 5 \Rightarrow \sqrt{144 + 25} < x < 17$$

$$\sqrt{169} < x < 17$$

$$13 < x < 17 \text{ olur.}$$

x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 14, en büyük tam sayı değeri ise 16 dir.

Dolayısıyla sonuç $14 + 16 = 30$ olur.

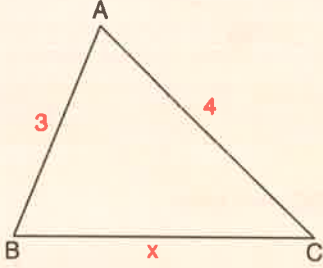
Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

İLK ADIM SORULARI

3.

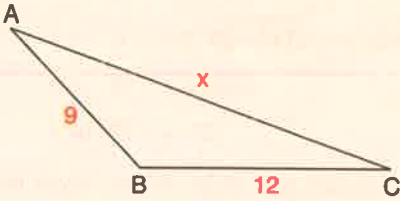


Şekildeki ABC üçgeninde, $|AB|=3$ birim
 $|AC|=4$ birim, $|BC|=x$ birim
 $m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$

Buna göre, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4.

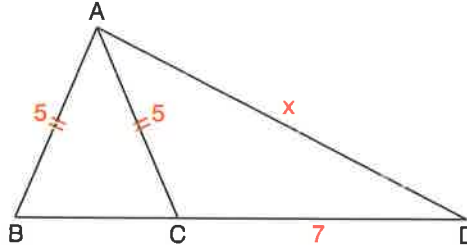


Şekildeki ABC üçgeninde, $|AB|=9$ birim
 $|BC|=12$ birim, $|AC|=x$ birim
 $m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$

Buna göre, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 47

Örnek 45:

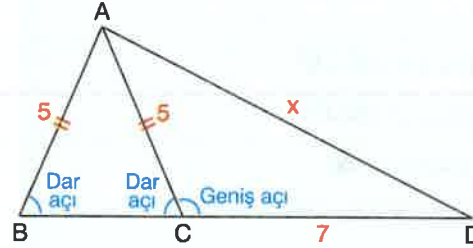


ABC üçgeninde
 $|AB|=|AC|=5$ birim
 $|CD|=7$ birim
 $|AD|=x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 32 B) 30 C) 28 D) 26 E) 24

Çözüm:



ABC üçgeni ikizkenardır. İkizkenar üçgende eş olan açılar dar açı olmak zorundadır. Dolayısıyla $\widehat{ACD}$ geniş açıdır.

ACD üçgeninde $m(\widehat{ACD}) > 90^\circ$ olduğundan;

$$\sqrt{7^2 + 5^2} < x < 7 + 5$$

$$\sqrt{49 + 25} < x < 12$$

$$\sqrt{74} < x < 12 \text{ olur.}$$

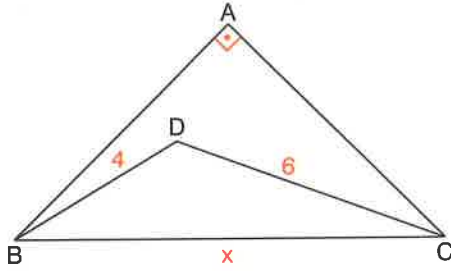
Dolayısıyla x ; 9, 10 ve 11 tam sayı değerlerini alabilir.

O halde toplam $9+10+11=30$ olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 46:



ABC dik üçgen

$$|BD| = 4 \text{ birim}$$

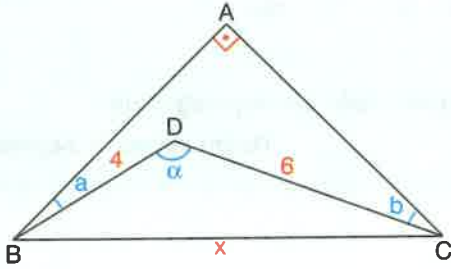
$$|CD| = 6 \text{ birim}$$

$$|BC| = x \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm:



$m(\widehat{BDC}) = \alpha$, $m(\widehat{ABD}) = a$, $m(\widehat{ACD}) = b$ dersek $\alpha = 90^\circ + a + b$ olacaktır. Dolayısıyla α açısı 90° den büyüktür.

O halde, $\sqrt{6^2 + 4^2} < x < 6 + 4$

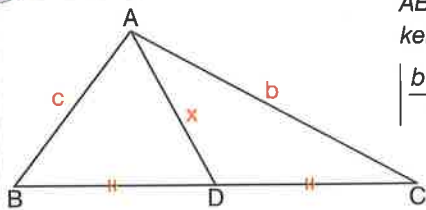
$$\sqrt{36 + 16} < x < 10$$

$$\sqrt{52} < x < 10 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla x in alabileceği tam sayı değerleri 8 ve 9 olup toplamı ise 17 dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Dikkat

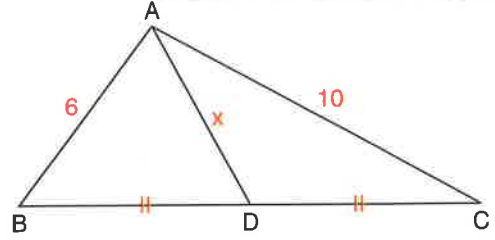


ABC üçgeninde [AD] kenarortay ise,

$$\left| \frac{b-c}{2} \right| < x < \frac{b+c}{2} \text{ dir.}$$

Üçgenlerde Temel Kavramlar

Örnek 47:

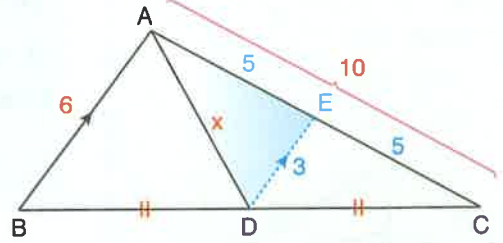


ABC üçgeninde, $|BD| = |DC|$, $|AB| = 6$ birim, $|AC| = 10$ birim $|AD| = x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x in en geniş değer aralığı aşağıdaki-lerden hangisidir?

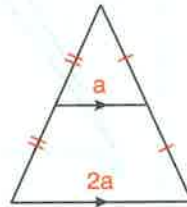
- A) (4, 6) B) (6, 10) C) (3, 5) D) (4, 10) E) (2, 8)

Çözüm:



I. Yol: Kuralımızı kullanmadan önce genel bir çözüm yapalım.

$|AE| = |EC| = 5$ birim olacak şekilde [DE] yi çizelim. $|DE| \parallel [AB]$ dir.



Yanda verilen orta taban bilgisini hatırlarsak;

$$|DE| = \frac{|AB|}{2} \Rightarrow |DE| = \frac{6}{2} = 3 \text{ birim olur.}$$

Oluşan ADE üçgenimizde üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$|5-3| < x < 5+3 \Rightarrow 2 < x < 8 \text{ elde edilir.}$$

II. Yol: Kuralımızı uygularsak,

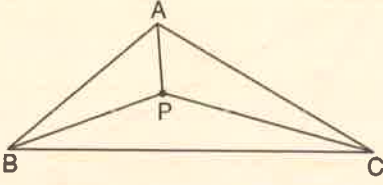
$$\left| \frac{10-6}{2} \right| < x < \frac{10+6}{2} \Rightarrow 2 < x < 8 \text{ elde edilir.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenlerde Temel Kavramlar

EKSTREM BİLGİLER

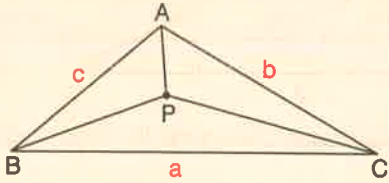


ABC üçgeninde P üçgenin iç bölgesinde bir noktadır.

Çevre(ABC) verilmiş ise,

$$\frac{\text{Ç}(ABC)}{2} < |AP| + |BP| + |CP| < \text{Ç}(ABC)$$

eşitsizliği mevcuttur.



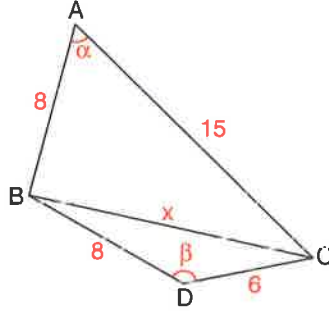
ABC üçgeninde a, b ve c kenar uzunlukları verilmiş ise,

$c < b < a$ olmak üzere

$$\frac{a+b+c}{2} < |AP| + |BP| + |CP| < a+b$$

eşitsizliği mevcuttur.

Örnek 48:



ABC ve BDC üçgen, $|AB|=8$ birim, $|AC|=15$ birim
 $|BD|=8$ birim, $|CD|=6$ birim ve $|BC|=x$ birimdir.

$\alpha < 90^\circ$ ve $\beta > 90^\circ$ olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

ABC üçgeninde $\alpha < 90^\circ$ olduğundan

$$|15 - 8| < x < \sqrt{8^2 + 15^2} \Rightarrow 7 < x < 17 \dots (1) \text{ olur.}$$

BDC üçgeninde $\beta > 90^\circ$ olduğundan,

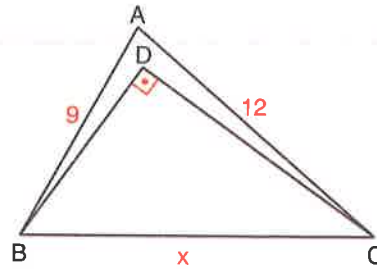
$$\sqrt{6^2 + 8^2} < x < 8 + 6 \Rightarrow 10 < x < 14 \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) den $10 < x < 14$ olur.

O halde x; 11, 12 ve 13 olmak üzere 3 farklı tam sayı değeri alır.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 49:



Yandaki şekilde, $[BD] \perp [CD]$, $|AB|=9$ birim
 $|AC|=12$ birim ve $|BC|=x$ birimdir.

D, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta olduğuna göre, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

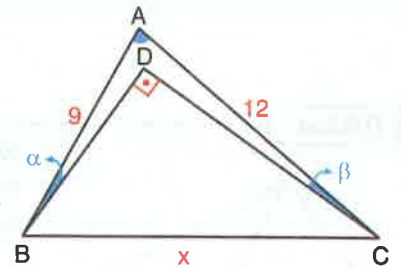
Çözüm:

Şekilde, $\alpha + \beta + m(\hat{A}) = 90^\circ$ olacağından A açısının ölçüsü 90° den küçük olmalıdır.

O halde ABC üçgeninde,

$$|12 - 9| < x < \sqrt{12^2 + 9^2} \Rightarrow 3 < x < 15 \text{ olur.}$$

Buradan, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri 14 tür.

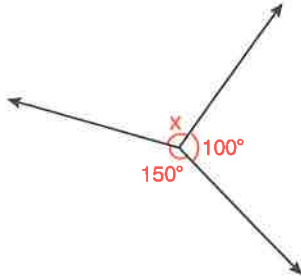


Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Test : 01

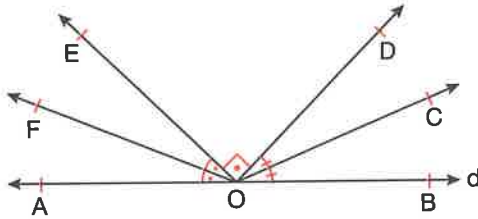
1.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, x kaç derecedir?

- A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

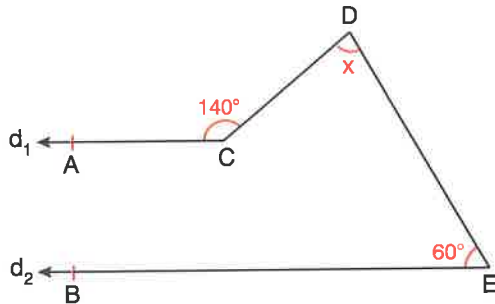
2.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, $m(\widehat{FOC})$ kaç derecedir?

- A) 120 B) 125 C) 135 D) 140 E) 150

3.

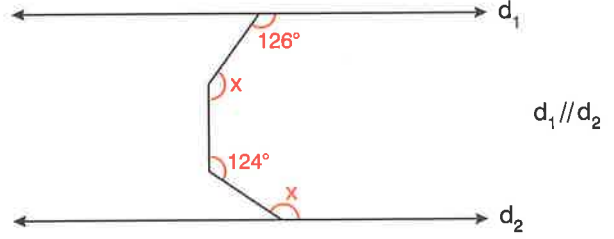


Yukarıdaki şekilde, $d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{ACD}) = 140^\circ$
 $m(\widehat{BED}) = 60^\circ$ dir.

Buna göre, x kaç derecedir?

- A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

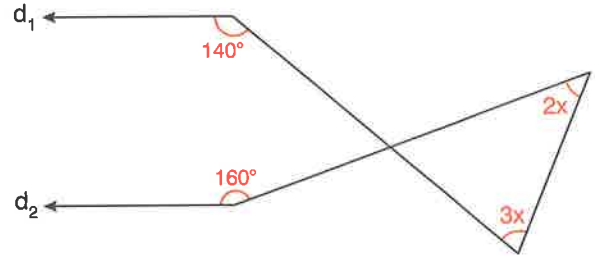
4.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, x kaç derecedir?

- A) 136 B) 140 C) 142 D) 145 E) 150

5.



Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2$ dir.

Verilen açı ölçülerine göre, x kaç derecedir?

- A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

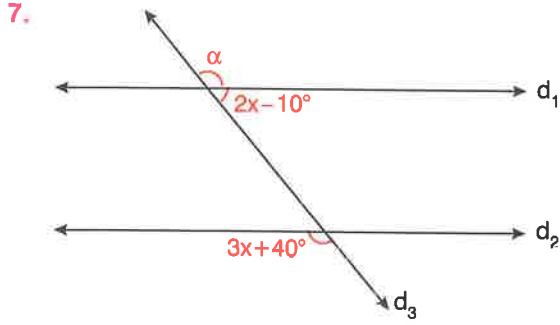
6. Tümler iki açının birbirine oranı $\frac{2}{3}$ tür.

Buna göre, küçük açı kaç derecedir?

- A) 40 B) 36 C) 32 D) 30 E) 24

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

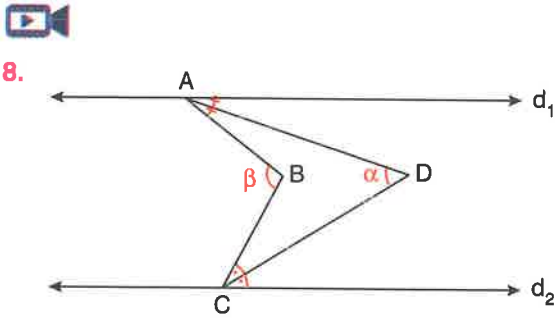
Test : 01



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ dir.

Verilen bilgilere göre, α kaç derecedir?

- A) 125 B) 130 C) 135 D) 140 E) 150

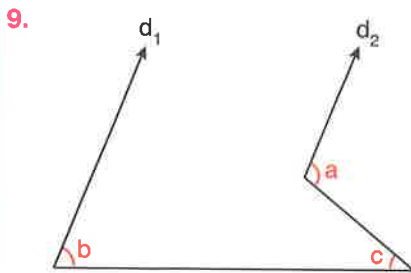


Yukarıda verilen şekilde $d_1 // d_2$, [AD] ile [CD] açkırtay, $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ABC}) = \beta$ dir.

$\alpha + \beta = 150^\circ$ olduğuna göre, β kaç derecedir?

- A) 90 B) 96 C) 100 D) 108 E) 110

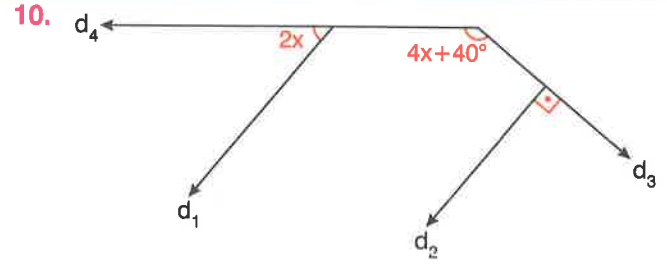
www.bireyakademi.com



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ dir.

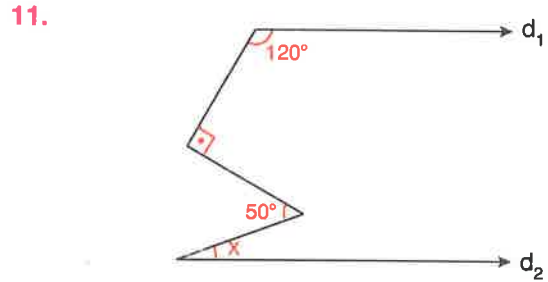
$a + b + c = 216^\circ$ olduğuna göre, a kaç derecedir?

- A) 118 B) 116 C) 112 D) 108 E) 102



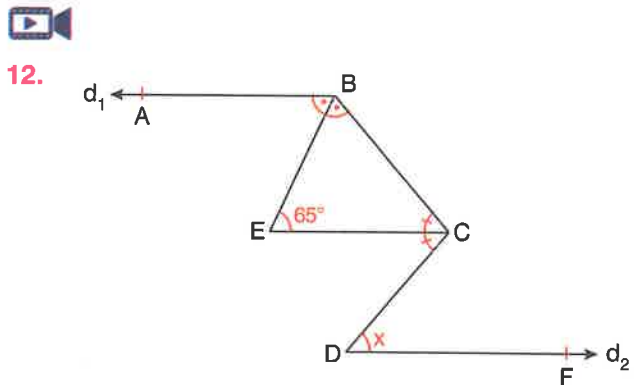
Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ ve $d_2 \perp d_3$ olduğuna göre, x kaç derecedir?

- A) 38 B) 35 C) 32 D) 30 E) 25



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ olduğuna göre, x kaç derecedir?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$, [BE] ile [CE] açkırtaylar $m(\widehat{BEC}) = 65^\circ$ dir.

Buna göre, $m(\widehat{CDF}) = x$ kaç derecedir?

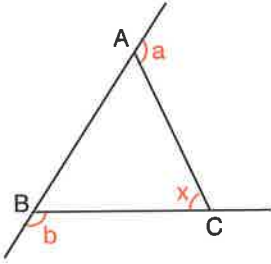
- A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

www.bireyakademi.com

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Test : 02

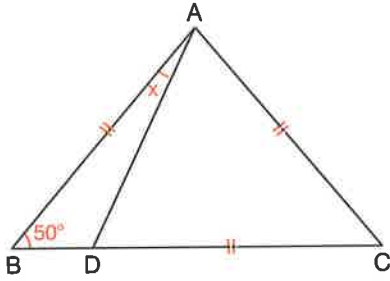
1.



Yukarıda verilen ABC üçgeninde $a + b = 245^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{ACB}) = x$ kaç derecedir?

- A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

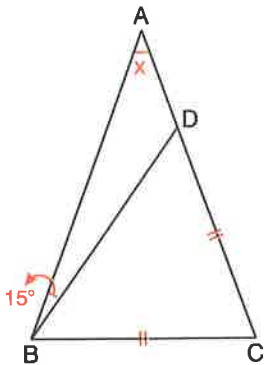
2.



ABC üçgeninde, $|AB| = |AC| = |CD|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{BAD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

3.

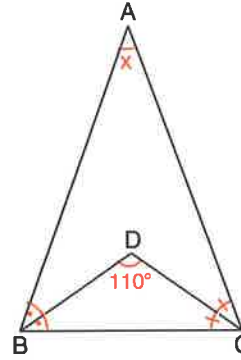


ABC üçgeninde
 $|AB| = |AC|$
 $|CD| = |BC|$
 $m(\widehat{ABD}) = 15^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 60 B) 50 C) 45 D) 40 E) 35

4.

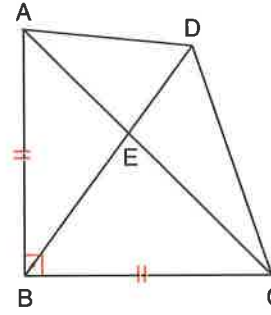


ABC üçgeninde
 $[BD]$ ve $[CD]$ iç açıortaylar
 $m(\widehat{BDC}) = 110^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

5.

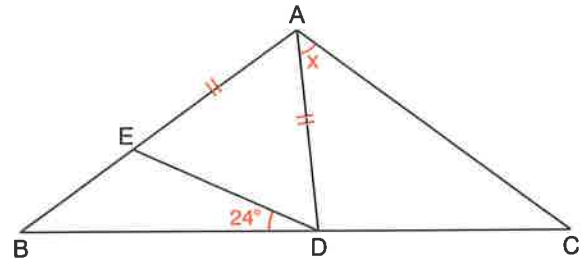


Yukarıdaki şekilde ABC ikizkenar dik üçgen, BDC eşkenar üçgendir.

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{CAD})$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 20 C) 30 D) 45 E) 60

6.



ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, $|AE| = |AD|$ ve
 $m(\widehat{BDE}) = 24^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{DAC}) = x$ kaç derecedir?

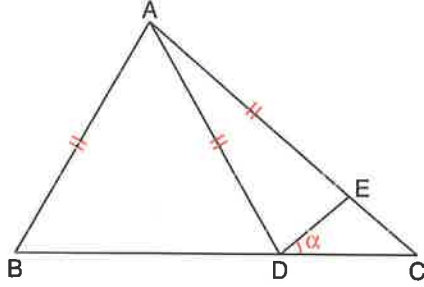
- A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Test : 02



7.



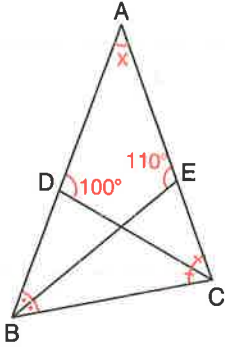
ABC üçgeninde, $|AB| = |AD| = |AE|$ ve $m(\widehat{CDE}) = \alpha$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC})$ nin α türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2α B) $180^\circ - 2\alpha$ C) $90^\circ - \alpha$
D) $270^\circ - 2\alpha$ E) $3\alpha - 45$

www.bireyakademi.com

8.

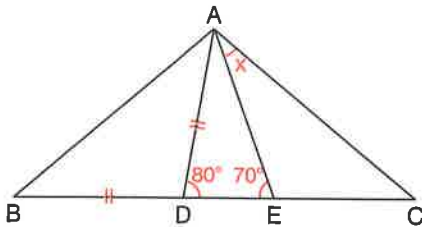


ABC üçgeninde
[BE] ile [CD] iç açıortaylar
 $m(\widehat{ADC}) = 100^\circ$
 $m(\widehat{AEB}) = 110^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 55 B) 50 C) 45 D) 40 E) 35

9.

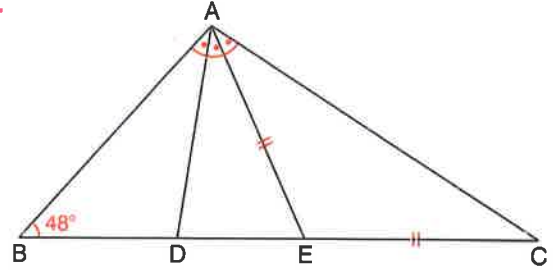


ABC üçgeninde, $|AD| = |BD|$, $|BE| = |AC|$, $m(\widehat{ADC}) = 80^\circ$
 $m(\widehat{AEB}) = 70^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{CAE}) = x$ kaç derecedir?

- A) 20 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

10.



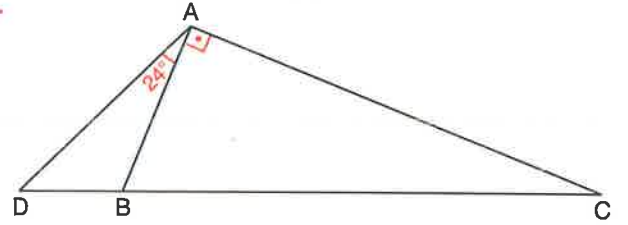
ABC üçgeninde, $\widehat{A}$ açısı üç eşit parçaya bölünmüştür.
 $|AE| = |EC|$, $m(\widehat{ABC}) = 48^\circ$ dir.

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{AED})$ kaç derecedir?

- A) 58 B) 60 C) 62 D) 64 E) 66



11.



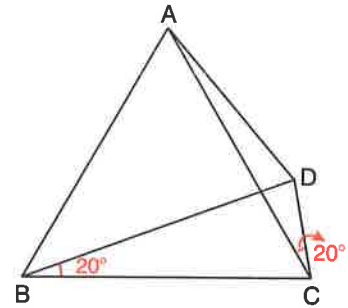
Yukarıdaki şekilde, $[AB] \perp [AC]$, $|BC| = 2 \cdot |AD|$ ve
 $m(\widehat{DAB}) = 24^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

- A) 44 B) 42 C) 40 D) 38 E) 36

www.bireyakademi.com

12.



ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACD}) = 20^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{DAC})$ kaç derecedir?

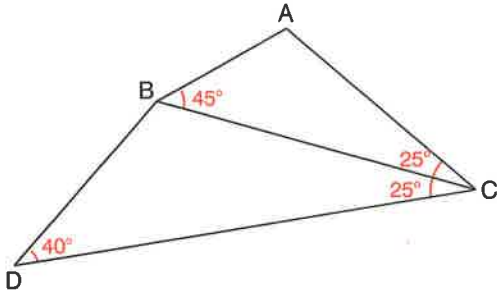
- A) 25 B) 20 C) 15 D) 10 E) 5

bryPLE

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Test : 03

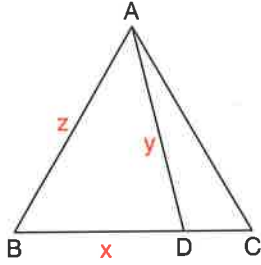
1.



Yukarıdaki şekilde verilen bilgilere göre, en uzun kenar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [AB] B) [AC] C) [BC] D) [BD] E) [CD]

2.

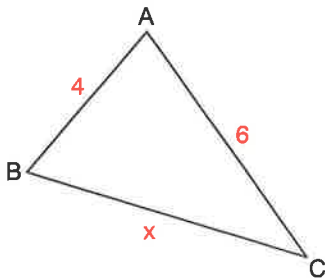


Yukarıdaki şekilde ABC eşkenar üçgendir.

Buna göre, ABD üçgeninin kenar uzunlukları olan x , y ve z sayılarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x > y > z$ B) $z > y > x$ C) $z > x > y$
D) $x > z > y$ E) $y > x > z$

3.

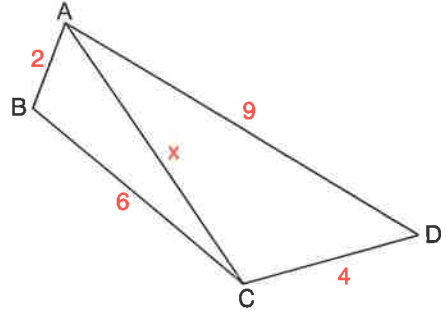


ABC üçgeninde
 $|AB| = 4$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|BC| = x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

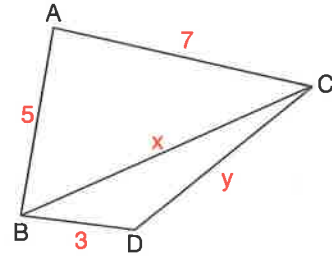
4.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

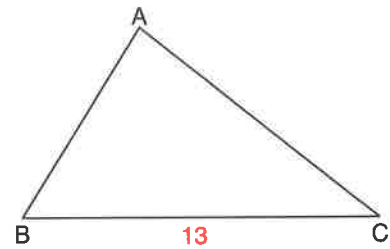


Yukarıdaki şekilde x ve y birer tam sayıdır.

Buna göre, $x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

6.



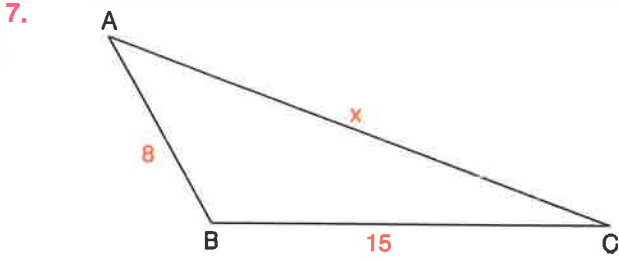
Şekilde verilen ABC üçgeninde, $|BC| = 13$ birimdir.

Buna göre, ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaç birimdir?

- A) 30 B) 29 C) 28 D) 27 E) 26

ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Test : 03



ABC üçgeninde, $|AB| = 8$ birim, $|BC| = 15$ birim
 $m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

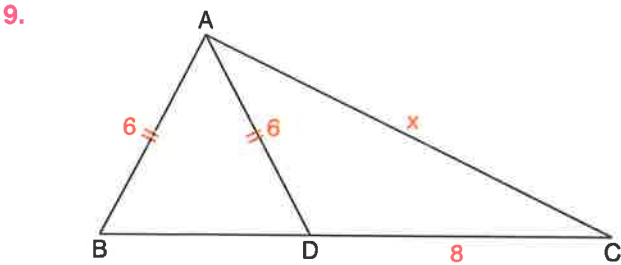
- A) 14 B) 15 C) 17 D) 18 E) 19



8. ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) < 3.m(\widehat{A})$ olduğuna göre, A açısının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaç derecedir?

- A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 48

www.bireyakademi.com

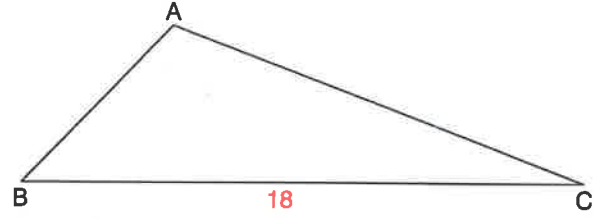


ABC üçgen, $|AB| = |AD| = 6$ birim, $|DC| = 8$ birim
 $|AC| = x$ birim

Yukarıdaki verilere, x 'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

10.



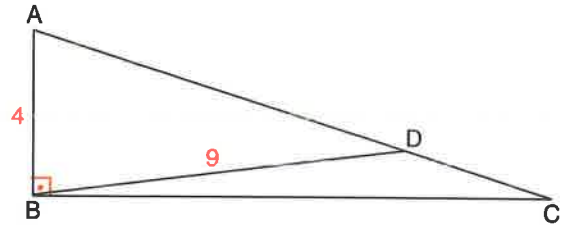
Şekilde verilen ABC üçgeninin kenarları birim türünden birer tam sayıdır. $|AC| = 2 \cdot |AB|$ dir.

Buna göre, ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41



11.



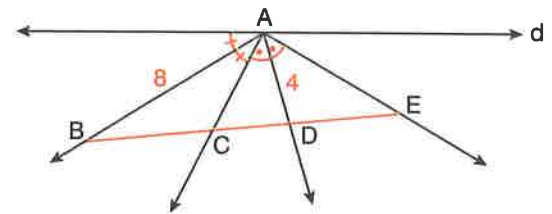
ABC dik üçgen, $D \in]AC[$, $|AB| = 4$ birim ve $|BD| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD|$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

www.bireyakademi.com

12.



$[AB]$ ve $[AD]$ açıortay, $|AB| = 8$ birim ve $|AD| = 4$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BD|$ nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaç birimdir?

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

A) ÜÇGENDE EŞLİK TEOREMLERİ

1) Kenar - Açı - Kenar (K.A.K) Eşlik Teoremi

Karşılıklı iki kenarın uzunluğu ve bu iki kenar arasında kalan açının ölçüleri eşit olan üçgenler eşittir. Bu eşlik teoremine **Kenar - Açı - Kenar (K.A.K) eşitliği** denir. Eşlik sembolü " $\cong$ " ile gösterilir.

♦ Yanda verilen ABC ve DEF üçgenlerinde

$$|AB| = |DE|$$

$$|AC| = |DF|$$

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$$

eşitlikleri verilmiştir. Bu eşitliklerden iki üçgen Kenar - Açı - Kenar eşliği-ne göre eş üçgenlerdir. Bu eşlik, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ şeklindedir.

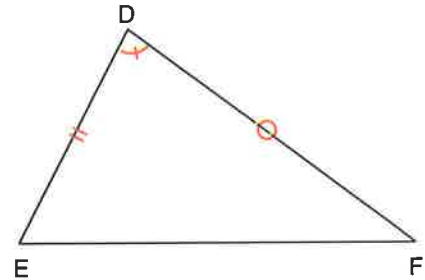
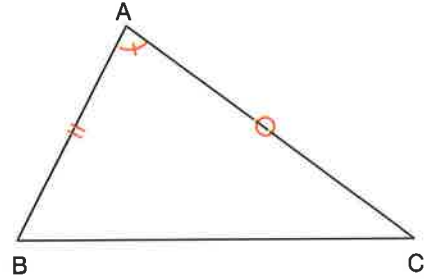
♦ İki üçgenin eşliği yazılırken harflerin sırası önemlidir. Çünkü

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ gösterimi;}$$

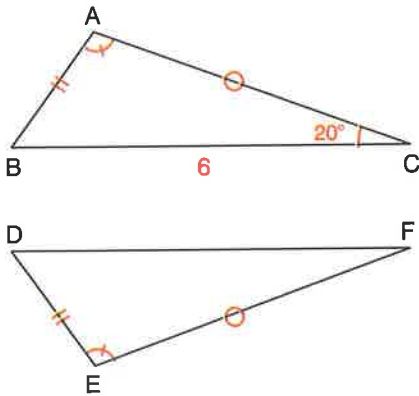
$$\bullet |AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |BC| = |EF|$$

$$\bullet m(\hat{A}) = m(\hat{D}), m(\hat{B}) = m(\hat{E}), m(\hat{C}) = m(\hat{F})$$

olduğu anlamına gelir.



Örnek 1:



Yukarıda verilen üçgenlere göre, $|DF|$ ve $m(\hat{F})$ yi bulalım.

Çözüm:

Verilen iki üçgende, $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ ve $m(\hat{A}) = m(\hat{E})$ olduğundan üçgenler K.A.K eşlik teoremine göre eşittir.

Dolayısıyla $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ yazılabilir.

Buradan, $|BC| = |DF| \Rightarrow |DF| = 6$ birim

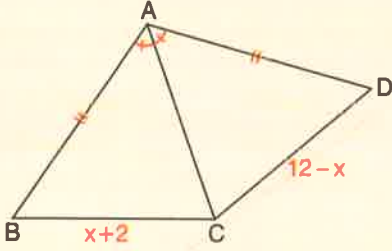
$$m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \Rightarrow m(\hat{F}) = 20^\circ \text{ olur.}$$

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

İLK ADIM SORULARI

5.



Şekilde $[AC]$, $\widehat{BAD}$ açısının açıortayı

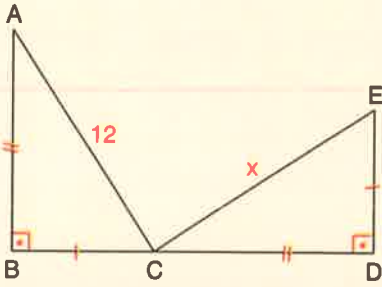
$|AB| = |AD|$, $|BC| = (x+2)$ birim

$|CD| = (12-x)$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x kaç birimdir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6.



Şekilde, $[AB] \perp [BD]$, $[ED] \perp [BD]$

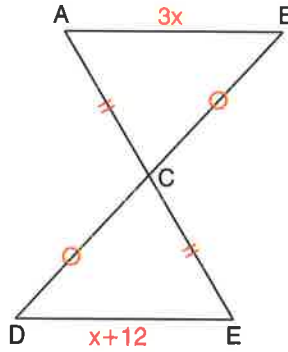
$|AB| = |CD|$, $|BC| = |ED|$

$|AC| = 12$ birim

Buna göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

Örnek 2:



Yanda verilen şekilde

$|AC| = |CE|$

$|BC| = |CD|$

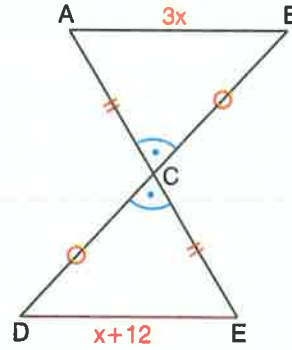
$|AB| = 3x$ birim

$|DE| = (x+12)$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Çözüm:



Ters açıların eşliğinden, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$ dir.

ABC ve EDC üçgenlerinde $|AC| = |EC|$, $|BC| = |DC|$ ve

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$ olduğundan iki üçgen eşittir.

Bu eşlik $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ile gösterilebilir.

Dolayısıyla, $|AB| = |ED| \Rightarrow 3x = x+12$

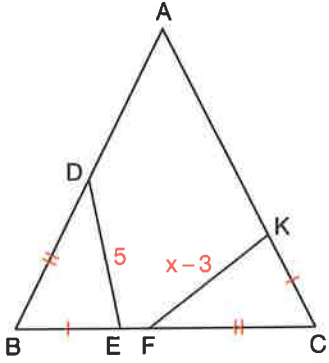
$\Rightarrow x = 6$ birimdir.

Buradan, $|AB| = 3 \cdot x = 3 \cdot 6 = 18$ birim bulunur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 3:

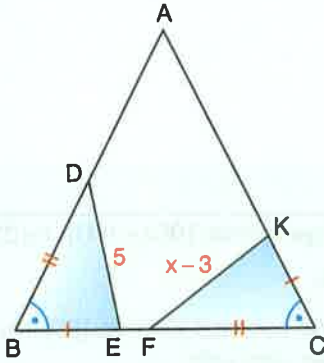


Yanda verilen
ABC üçgeninde
 $|AB| = |AC|$
 $|BD| = |FC|$
 $|BE| = |KC|$
 $|KF| = x - 3$ birim
 $|DE| = 5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

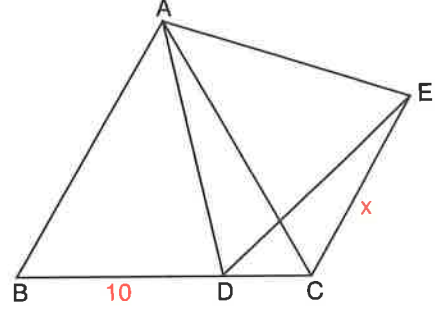
Çözüm:



ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$ olduğundan ABC ikizkenardır. Dolayısıyla $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ dir.
DBE ve FCK üçgenlerinde $|DB| = |FC|$, $|BE| = |CK|$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olduğundan iki üçgen eşittir.
Yani, $\triangle DBE \cong \triangle FCK$ yazılabilir.
Buradan, $|DE| = |FK|$ olacağından
 $x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$ birimdir.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 4:

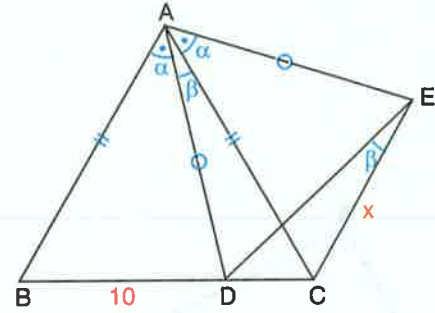


Şekilde ABC ve ADE eşkenar üçgenlerdir. $|BD| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 5 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20

Çözüm:



$|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |AE|$ dir.

$m(\widehat{BAD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{DAC}) = \beta$ dersek $\alpha + \beta = 60^\circ$ olur.

ADE eşkenar üçgeninde $m(\widehat{DAE}) = 60^\circ$ ve $\alpha + \beta = 60^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{CAE}) = \alpha$ olacaktır.

ABD ve ACE üçgenlerinde $|AB| = |AC|$, $|AD| = |AE|$ ve

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAE})$ olduğundan $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ dir.

Dolayısıyla $|CE| = |BD|$ olacağından, $x = 10$ birimdir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

2) Açı - Kenar - Açı (A.K.A) Eşlik Teoremi

İki üçgende karşılıklı birer kenar uzunluğu eşit ve bu kenara komşu olan açılar eş ise bu iki üçgen eştir. Bu eşlik teoremine **Açı - Kenar - Açı (A.K.A) eşliği** denir.

♦ Yanda verilen ABC ve DEF üçgenlerinde

$$|BC| = |EF|$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{E})$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{F})$$

eşitlikleri verilmiştir. Bu eşitliklerden, iki üçgen, Açı - Kenar - Açı (A.K.A) eşliğine göre eş üçgenlerdir.

Dolayısıyla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ yazılabilir.

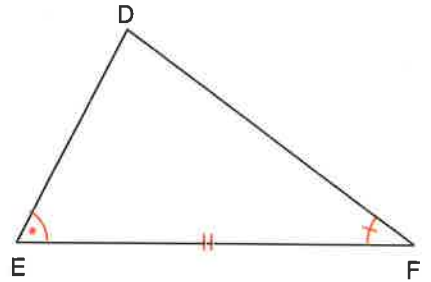
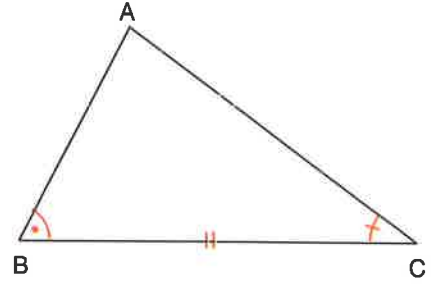
♦ Ayrıca $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğundan,

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$$

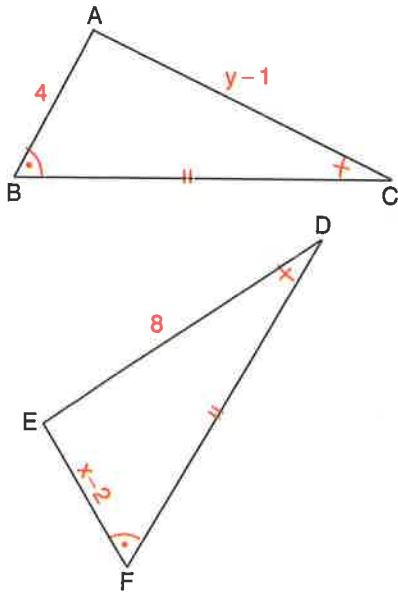
$$|AB| = |DE|$$

$$|AC| = |DF|$$

eşitlikleri de mevcuttur.



Örnek 5:



Yukarıda verilen üçgenlere göre $x+y$ toplamını bulalım.

Çözüm:

ABC ve EFD üçgenlerinde $|BC| = |FD|$, $m(\hat{B}) = m(\hat{F})$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$ dir.

Yani, iki üçgende eşit olan $|BC|$ ve $|FD|$ nin bu kenarlara komşu olan ikişer açısı eştir.

Dolayısıyla ABC ile EFD, Açı - Kenar - Açı (A.K.A) eşliğine göre eş üçgenlerdir.

Yani $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ yazılabilir.

$$|AB| = |EF| \Rightarrow 4 = x - 2 \Rightarrow x = 6$$

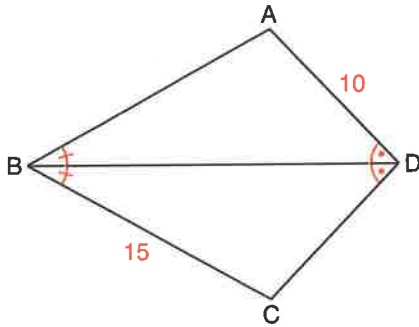
$$|AC| = |ED| \Rightarrow y - 1 = 8 \Rightarrow y = 9 \text{ dur.}$$

Buradan $x+y=6+9=15$ bulunur.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 6:



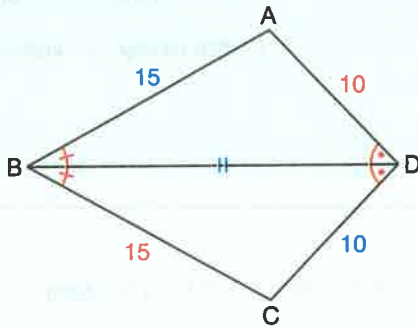
Yukarıdaki şekilde $[BD]$, $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{ADC}$ nin açıortayıdır.

$|BC|=15$ birim, $|AD|=10$ birim

olduğuna göre, $|BD|$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm:



ABD ve CBD üçgenlerinde $[BD]$ ortak kenardır. Her iki üçgende $[BD]$ ye komşu olan açılar eş açılarıdır.

Yani, $m(\widehat{ABD})=m(\widehat{CBD})$ ve $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{CDB})$ dir.

Bu eşitliklerden dolayı $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$|AB|=|CB|=15$ birim ve $|CD|=|AD|=10$ birimdir.

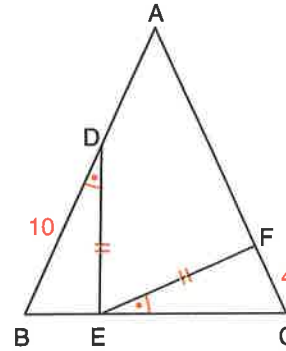
- ABD üçgeninde üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$|15-10| < |BD| < 15+10 \Rightarrow 5 < |BD| < 25 \text{ olur.}$$

Buradan, $|BD|$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 24 bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 7:



Yandaki şekilde
ABC ikizkenar üçgen

$$|AB|=|AC|$$

$$|DE|=|EF|$$

$$m(\widehat{BDE})=m(\widehat{FEC})$$

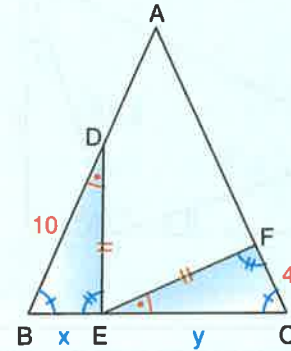
$$|BD|=10 \text{ birim}$$

$$|FC|=4 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:



ABC üçgeni ikizkenar olduğundan $m(\widehat{B})=m(\widehat{C})$ dir.

BDE ve EFC üçgenlerinin ikişer açısı eşit olduğundan diğer açılarda eşit olacağından, $m(\widehat{BED})=m(\widehat{FEC})$ dir.

- DBE ve ECF üçgenlerinde; $|DE|=|EF|$,
 $m(\widehat{BDE})=m(\widehat{CEF})$ ve $m(\widehat{BED})=m(\widehat{FEC})$ eşitlikleri olduğuna göre, iki üçgen Açı - Kenar - Açı (A.K.A) eşitliğine göre eş üçgenlerdir.

Dolayısıyla, $\triangle DBE \cong \triangle ECF$ olur.

$$|BE|=|CF| \Rightarrow x=4 \text{ birim}$$

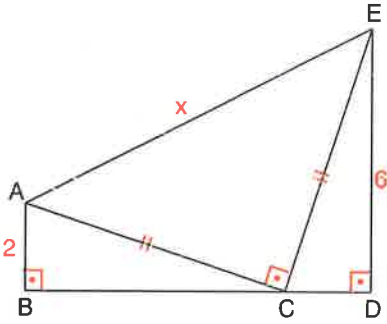
$$|BD|=|EC| \Rightarrow y=10 \text{ birimdir.}$$

Buradan, $|BC|=4+10=14$ birimdir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 8:

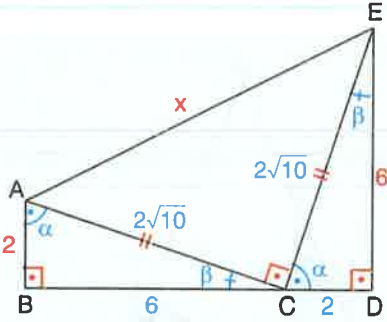


Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [BD]$
 $[ED] \perp [BD]$
 $|AC| = |CE|$
 $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ$
 $|AB| = 2$ birim
 $|DE| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AE| = x$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) $3\sqrt{10}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{6}$

Çözüm:



ABC dik üçgeninde açıları α ve β ile gösterirsek $\alpha + \beta = 90^\circ$ olacağından $m(\widehat{DCE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CED}) = \beta$ olacaktır.

ABC ve CDE üçgenlerinden $|AC| = |CE|$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCE})$ ve $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CED})$ olduğundan iki üçgen eşittir. Yani, $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ yazabiliriz.

Dolayısıyla $|BC| = |DE|$ olacağından $|BC| = 6$ birim ve $|AB| = |CD|$ olacağından $|CD| = 2$ birim olur.

ABC üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak

$$|AC|^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow |AC|^2 = 4 + 36 \Rightarrow |AC|^2 = 40$$

$$\Rightarrow |AC| = 2\sqrt{10} \text{ birim olur.}$$

$|AC| = |CE|$ olduğuna göre, $|CE| = 2\sqrt{10}$ birimdir.

ACE dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak

$$x^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 = 40 + 40$$

$$x^2 = 80$$

$$x = 4\sqrt{5} \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

3) Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K) Eşlik Teoremi

İki üçgenin karşılıklı kenarları birbirine eş ise bu iki üçgen eşittir. Bu eşlik teoremine **Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K) eşliği** denir.

♦ Yanda verilen ABC ve DEF üçgenlerinde

$$|AB| = |DE|, |BC| = |EF| \text{ ve } |AC| = |DF|$$

eşitlikleri gösterilmiştir.

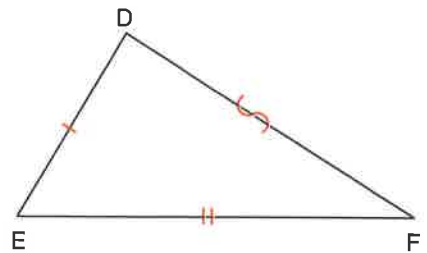
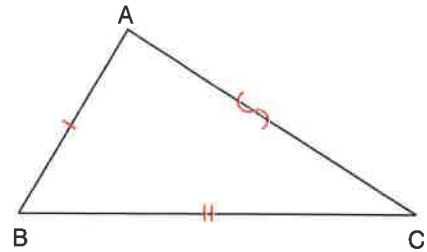
Bu eşitliklerden, iki üçgen Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K) eşliğine göre eş üçgenlerdir.

Dolayısıyla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ yazılabilir.

♦ Ayrıca $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğundan,

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}), m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \text{ ve } m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$$

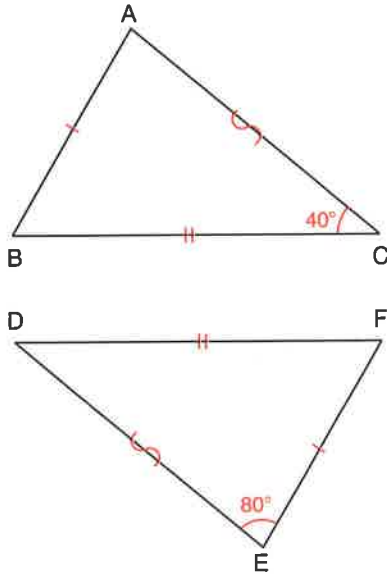
eşitlikleri de mevcuttur.



ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 9:



Yukarıdaki üçgenlerin diğer iç açılarının ölçülerini bulalım.

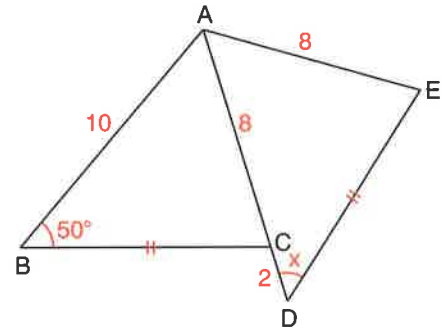
Bu eşlikten $m(\hat{A}) = m(\hat{E}) \Rightarrow m(\hat{A}) = 80^\circ$

$m(\hat{C}) = m(\hat{D}) \Rightarrow m(\hat{D}) = 40^\circ$ olur.

Üçgenlerin iç açılarının toplamı 180° olacağından

$m(\hat{B}) = m(\hat{F}) = 60^\circ$ dir.

Örnek 10:



Yukarıdaki şekilde, $|BC| = |DE|$, $|AB| = 10$ birim

$|AC| = |AE| = 8$ birim, $|CD| = 2$ birim, $m(\hat{ABC}) = 50^\circ$

Buna göre, $m(\hat{ADE}) = x$ kaç derecedir?

- A) 70 B) 60 C) 55 D) 50 E) 40

Çözüm:

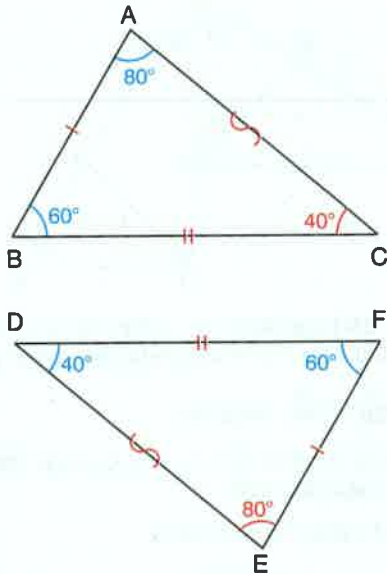
ABC ve ADE üçgenlerinde, $|BC| = |DE|$, $|AB| = |AD|$ ve $|AC| = |AE|$ eşitlikleri vardır.

O halde $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ yazabiliriz.

Dolayısıyla $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ olacağından $x = 50^\circ$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Çözüm:

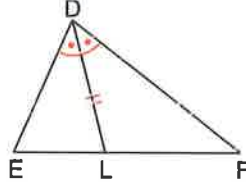
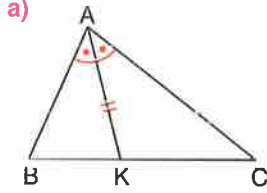


ABC ve DEF üçgenlerinin karşılıklı tüm kenarları eşittir.

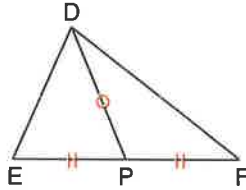
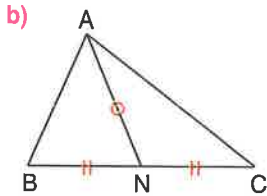
Dolayısıyla $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ yazabiliriz.

Dikkat

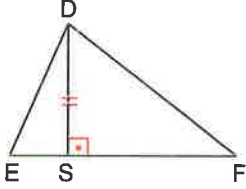
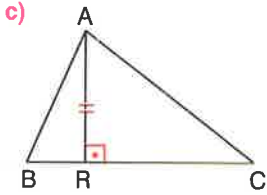
Eş üçgenlerin karşılıklı açıortayları, kenarortayları ve yükseklikleri de eşittir.



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise
 $|AK| = |DL|$ dir.
($n_A = n_D$)

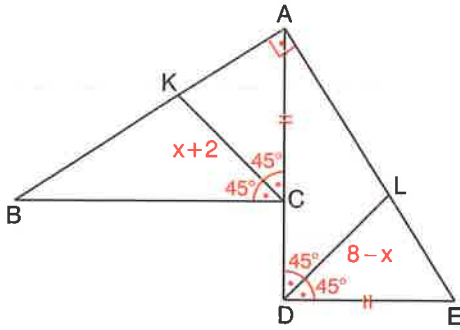


$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise
 $|AN| = |DP|$ dir.
($V_a = V_d$)



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise
 $|AR| = |DS|$ dir.
($h_a = h_d$)

Örnek 11:



Yukarıdaki şekilde, $[AB] \perp [AE]$, $|AC| = |DE|$, $m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{BCK}) = 45^\circ$
 $m(\widehat{ADL}) = m(\widehat{EDL}) = 45^\circ$, $|KC| = x+2$ birim, $|DL| = 8-x$ birim

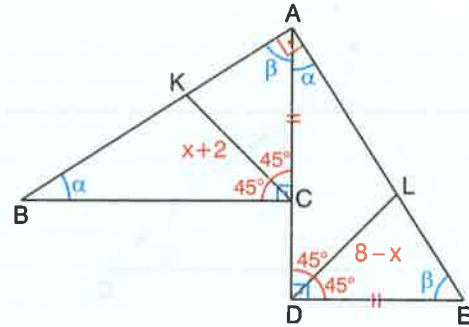
Yukarıdaki verilere göre, x kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

ABC dik üçgeninin iç açıları α ve β ile gösterelim.
 $\alpha + \beta = 90^\circ$ dir.

$m(\widehat{BAE}) = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{DAE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{AED}) = \beta$ olacaktır.



ABC ve ADE dik üçgenlerinin iç açıları eş ve karşılıklı AC ve DE kenar uzunlukları eşit olduğundan iki üçgen eşittir.

Dolayısıyla $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ yazılabilir.

ABC ve EAD eş üçgenlerinde $n_C = n_D$ olacağından $[CK]$ açıortayı ile $[DL]$ açıortayı eşittir.

O halde $|CK| = |DL| \Rightarrow x+2 = 8-x$

$$\Rightarrow 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ birim dir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

B) ÜÇGENLERDE BENZERLİK TEOREMLERİ

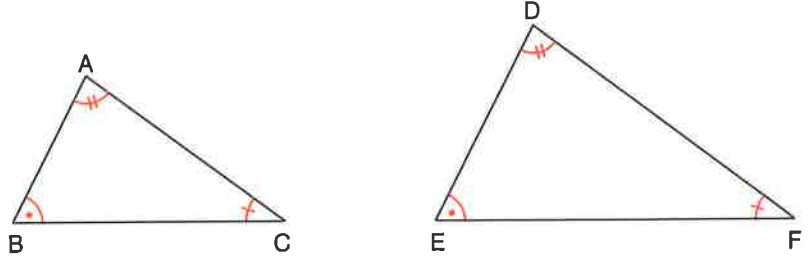
Karşılıklı açıları birbirine eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olan üçgenlere "**Benzer Üçgenler**" denir.

Yanda verilen üçgenlerde

$$m(\hat{A})=m(\hat{D}), m(\hat{B})=m(\hat{E}), m(\hat{C})=m(\hat{F}) \text{ ve}$$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

eşitlikleri varsa iki üçgen benzerdir.



Benzerlik " $\sim$ " sembolü ile gösterildiğinden $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ olur.

Burada $k \in \mathbb{R}^+$ sayısına "**Benzerlik oranı**" denir.

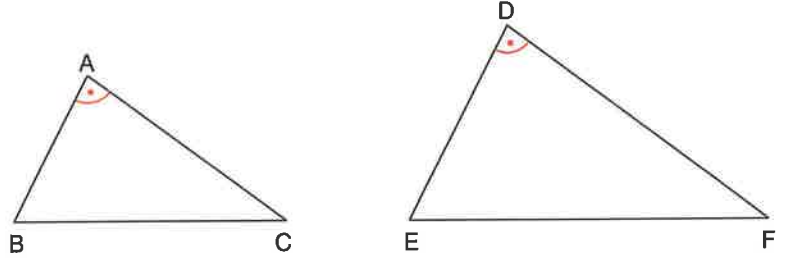
1) Kenar - Açı - Kenar (K.A.K) Benzerliği

Karşılıklı iki kenarının uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açıları eş olan üçgenler benzerdir. Bu benzerliği, **Kenar - Açı - Kenar benzerliği** denir.

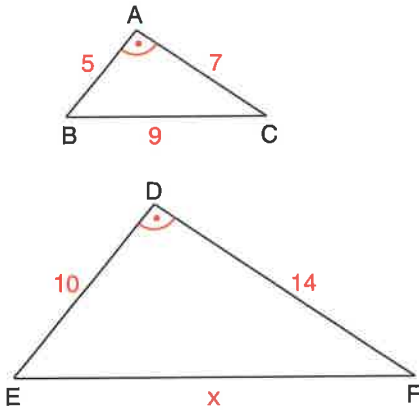
Yanda verilen üçgenlerde, $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$ ve $m(\hat{A})=m(\hat{D})$

eşitlikleri olduğundan iki üçgen benzerdir.

O halde $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ olur.



Örnek 12:



Yukarıda verilen üçgenlerin benzerliğini gösterelim ve x değerini bulalım.

Çözüm:

ABC ve DEF üçgenlerinde

$$\left. \begin{aligned} \frac{|AB|}{|DE|} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \frac{|AC|}{|DF|} &= \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{1}{2}$$

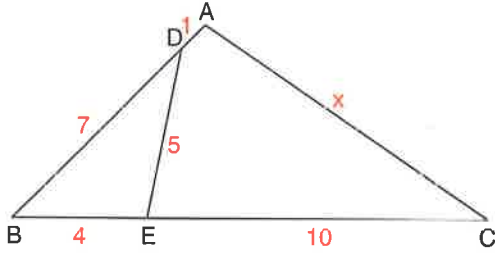
$m(\hat{A})=m(\hat{D})$ eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ dir.

İki üçgenin benzerliğinden $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$ olacağına göre,

$$\frac{9}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 18 \text{ olur.}$$

ÜÇGENLER

Örnek 13:

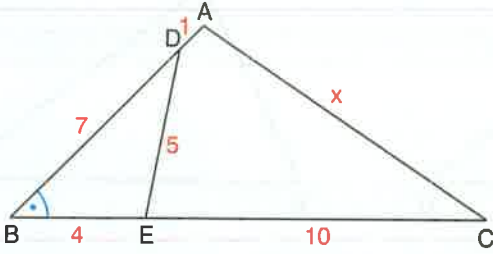


Yukarıda verilen ABC üçgeninde, $|AD|=1$ birim, $|BD|=7$ birim
 $|BE|=4$ birim, $|EC|=10$ birim, $|DE|=5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|=x$ kaç birimdir?

- A) 16 B) 15 C) 12 D) 10 E) 9

Çözüm:



ABC ve DBE üçgenlerinde $\hat{B}$ ortak açıdır.

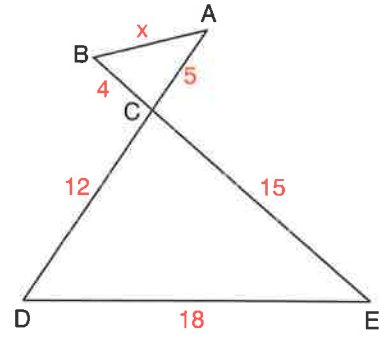
$$\text{Ayrıca } \left. \begin{array}{l} \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{1}{2}$$

eşitlikleri olduğundan, $\triangle DBE \sim \triangle CBA$ yazabiliriz.

$$\text{Buradan; } \frac{|DE|}{|CA|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 14:

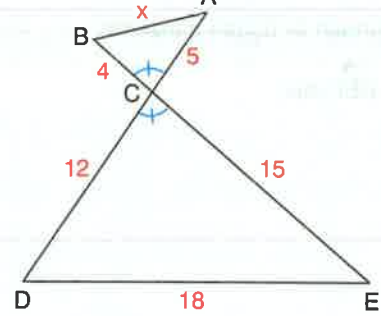


Yukarıdaki şekilde, A, C, D ve B, C, E noktaları doğrusaldır.

Verilen uzunluk değerlerine göre, x kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:



ABC ve CDE üçgenlerinde ters açıların eşitliğinden
 $m(\hat{ACB}) = m(\hat{DCE})$ dir. Ayrıca,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \\ \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ yazabiliriz.

$$\text{Buradan; } \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 18$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

2) Açı - Açı (A.A) Benzerliği

İki üçgenin karşılıklı iki açısı eş ise bu üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe **Açı - Açı (A.A) benzerliği** denir.

- ♦ İkişer açısı eş olan üçgenlerin üçüncü açıları da eştir.

Yanda verilen ABC ve DEF üçgenlerinde

$$m(\hat{A}) = m(\hat{D})$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{E})$$

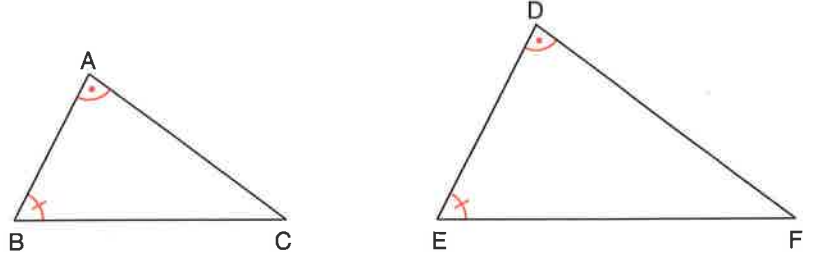
eşitlikleri verilmiştir.

Dolayısıyla iki üçgen Açı - Açı (A.A) benzerliğine göre benzer üçgenlerdir.

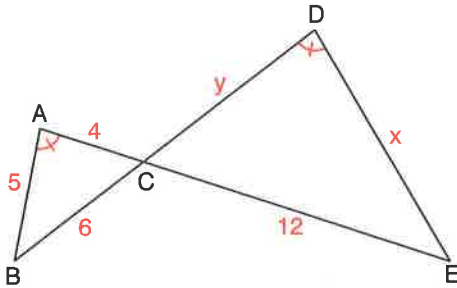
Bu benzerlik; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şeklinde gösterilebilir.

$$\text{Dolayısıyla, } m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \text{ ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

eşitlikleri de mevcuttur.



Örnek 15:



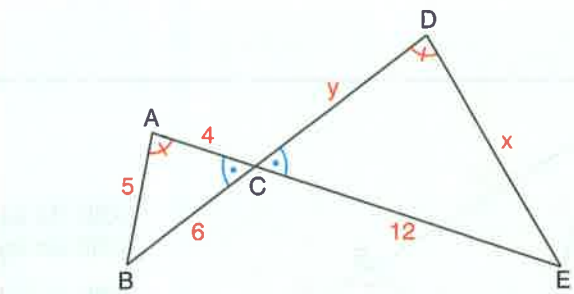
Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $x+y$ toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

Çözüm:

Ters açıların eşitliğinden $m(\hat{ACB}) = m(\hat{ECD})$ dir.

Ayrıca $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$ olduğundan ABC ve CDE üçgenlerinin ikişer açısı eşittir. Dolayısıyla bu üçgenler Açı - Açı (A.A) benzerlik kuralına göre benzerdir.



O halde $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|DC|} \text{ olacaktır.}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{12} = \frac{4}{y} \Rightarrow x = 10 \text{ ve } y = 8 \text{ olur.}$$

$$x + y = 10 + 8 = 18 \text{ bulunur.}$$

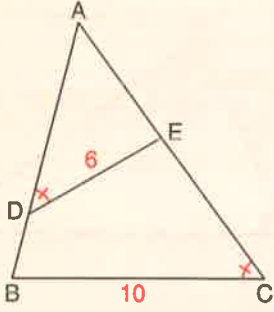
Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

İLK ADIM SORULARI

7.



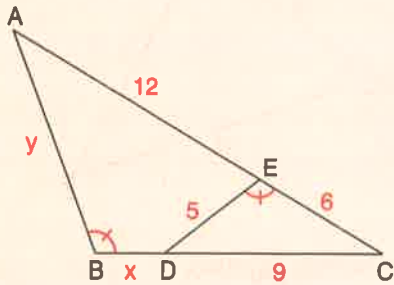
ABC üçgeninde $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$ dir.

$|DE| = 6$ birim, $|BC| = 10$ birim

Buna göre, $\frac{|AE|}{|AB|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

8.

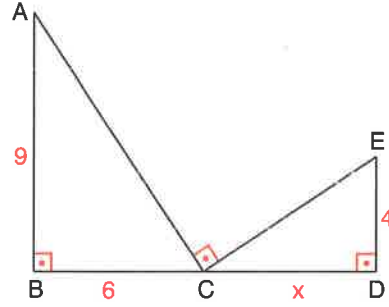


Yukarıda verilen ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEC})$ dir.

Verilen uzunluk bilgilerine göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Örnek 16:

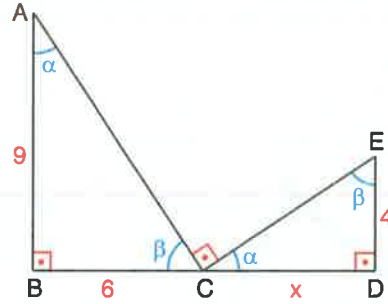


Yukarıdaki şekilde ABC ve CDE dik üçgenler $[AC] \perp [CE]$ dir.

Verilen uzunluk bilgilerine göre, x değeri kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm:



ABC dik üçgeninin diğer açılarını α ve β ile gösterirsek $\alpha + \beta = 90^\circ$ olduğundan CDE dik üçgeninde $m(\widehat{C}) = \alpha$ ve $m(\widehat{E}) = \beta$ dir.

ABC ve CDE üçgenlerinde,

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{E}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta CDE \text{ olur.} \end{array}$$

$$\text{O halde } \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{6}{4} \Rightarrow 6x = 36$$

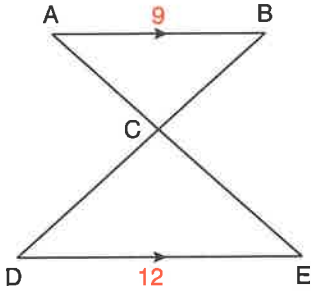
$$\Rightarrow x = 6 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 17:

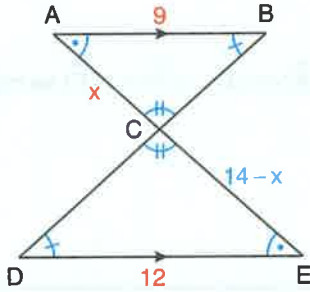


Yukarıdaki şekilde, $[AB] \parallel [DE]$, $|AB| = 9$ birim, $|DE| = 12$ birim
 $|AE| = 14$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:



$[AB] \parallel [DE]$ olduğundan iç ters açılarının eşitliğine göre,
 $m(\hat{A}) = m(\hat{E})$ ve $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ dir.

Ayrıca ters açılarının eşitliğinden $m(\hat{ACB}) = m(\hat{DCE})$ dir.

$\triangle ABC$ ile $\triangle EDC$ nin karşılıklı açıları birbirine eş olduğundan

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ yazabiliriz.

$|AC| = x$ dersek $|CE| = 14 - x$ olur.

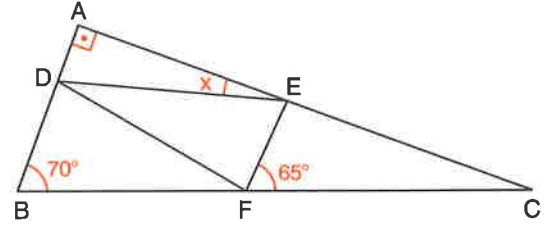
$$\text{O halde } \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|EC|} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{x}{14-x} \Rightarrow 4x = 42 - 3x$$

$$\Rightarrow 7x = 42$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 18:

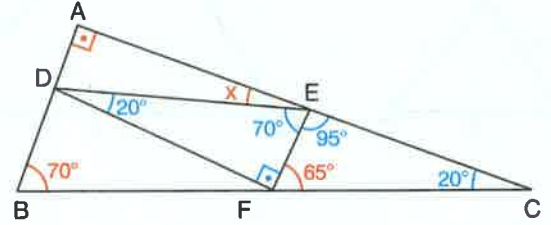


Yukarıdaki şekilde, $\triangle ABC$ dik üçgen, $m(\hat{ABC}) = 70^\circ$, $m(\hat{EFC}) = 65^\circ$

$\triangle ABC \sim \triangle FED$ olduğuna göre, $m(\hat{AED}) = x$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

Çözüm:



$\triangle ABC$ dik üçgeninde $m(\hat{C}) = 20^\circ$ dir.

$\triangle ABC \sim \triangle FED$ olduğuna göre, $m(\hat{A}) = m(\hat{F}) = 90^\circ$

$m(\hat{B}) = m(\hat{E}) = 70^\circ$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 20^\circ$ olacaktır.

Buradan, $\triangle EFC$ nde $m(\hat{FEC}) = 180^\circ - (65^\circ + 20^\circ) = 95^\circ$ olur.

O halde $x + 70^\circ + 95^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

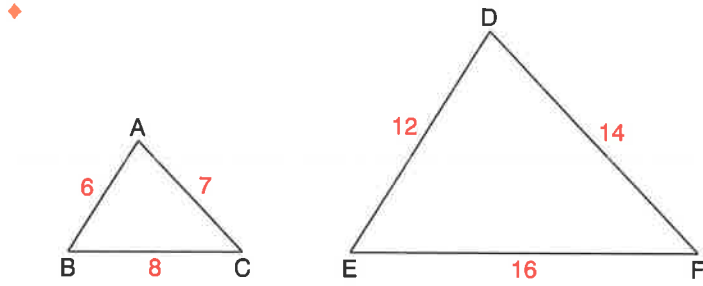
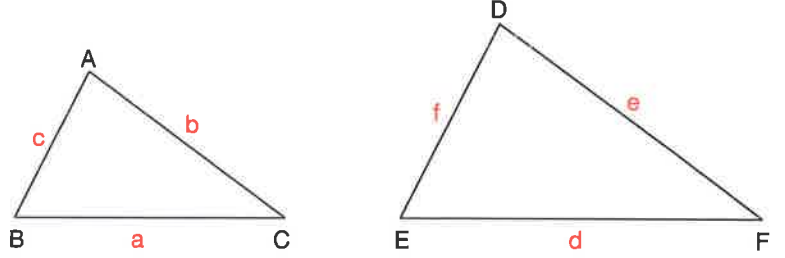
3) Kenar - Kenar - Kenar Benzerliği

Kenar uzunlukları küçükten büyüğe doğru sıralanarak yazıldığında karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe **Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K) benzerliği** denir.

♦ $c < b < a$ ve $f < e < d$ olsun.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k \text{ ise } \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$ olur.

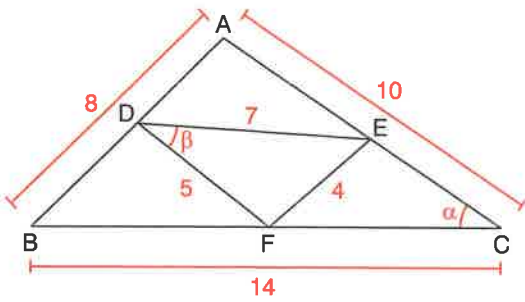


Yandaki üçgenlerde $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ dir.

Dolayısıyla $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$ ve $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$ olur.

Örnek 19:



Yukarıda verilen şekilde, $|AB|=8$ cm, $|AC|=10$ cm, $|BC|=14$ cm
 $|EF|=4$ cm, $|FD|=5$ cm, $|DE|=7$ cm, $m(\hat{ACB})=\alpha$, $m(\hat{FDE})=\beta$

Yukarıdaki verilere göre, α ile β arasındaki aşağıdaki eşitliklerden hangisi vardır?

- A) $\alpha=2\beta$ B) $\beta=2\alpha$ C) $\alpha-\beta=10^\circ$
D) $\beta-\alpha=15^\circ$ E) $\alpha=\beta$

Çözüm:

ABC üçgeninin kenar uzunlukları; $|AB|=8$ cm,

$|AC|=10$ cm, $|BC|=14$ cm, DEF üçgeninin kenar uzunlukları; $|EF|=4$ cm, $|FD|=5$ cm, $|DE|=7$ cm ve

$$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|AC|}{|FD|} = \frac{|BC|}{|DE|} = 2 \text{ dir.}$$

O halde, $\triangle ABC \sim \triangle FED$ yazılabilir. Dolayısıyla $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$ olacaktır. Buradan, $\alpha = \beta$ olduğu görülür.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

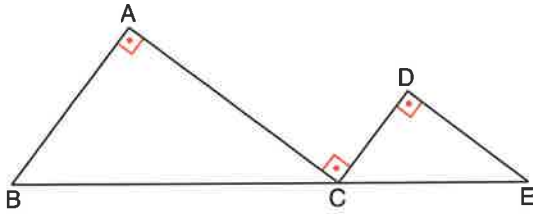
! Dikkat

Benzer üçgenlerin çevreleri oranı benzerlik oranına eşittir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 20:



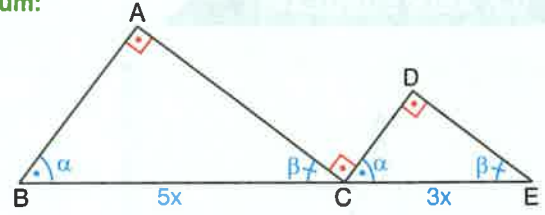
Yukarıdaki şekilde, ABC ve DCE dik üçgen, $[AC] \perp [CD]$

B, C ve E doğrusal, $|BE| = 24$ birim, $\frac{\text{Çevre}(\triangle ABC)}{\text{Çevre}(\triangle DCE)} = \frac{5}{3}$

Yukarıdaki verilere göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:



İki dik üçgenin iç açıları şekildeki gibi olacağından üçgenlerin karşılıklı iç açıları birbirine eşittir.

Dolayısıyla $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ dir. Benzer üçgenlerin çevreleri oranı

$\frac{5}{3}$ olduğuna göre, $\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CE|} = \frac{5}{3}$ bulunur.

O halde, $|BC| = 5x$ dersek, $|CE| = 3x$ olur.

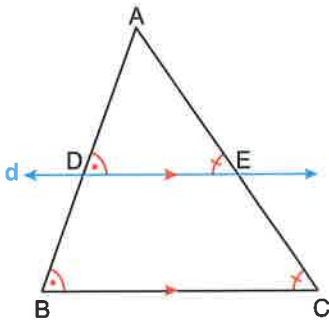
$5x + 3x = 24 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$ birimdir.

Buradan, $|BC| = 5x = 5 \cdot 3 = 15$ birim bulunur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Temel Benzerlik Teoremi

Bir üçgende iki kenarı farklı noktalarda kesen ve üçüncü kenara paralel olan doğrular üçgenin kestiği kenarlarını orantılı bir şekilde parçalara ayırır.



Şekilde, $d \parallel [BC]$, $\triangle ABC$ ve $\triangle ADE$ nde

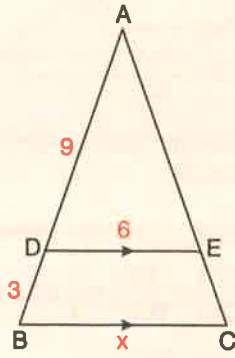
- ♦ $\hat{A}$ ortak açı
- ♦ $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ (Yöndeş açılar)
- ♦ $m(\hat{C}) = m(\hat{E})$ (Yöndeş açılar)

olduğundan $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ olur.

Buradan, $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|} = k$ yazabiliriz. Ayrıca, $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ eşitliği de mevcuttur.

İLK ADIM SORULARI

9.



Şekildeki ABC'nde, $[DE] \parallel [BC]$

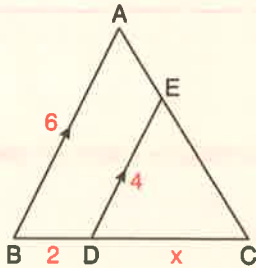
$|AD| = 9$ birim, $|BD| = 3$ birim

$|DE| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BC| = x$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 18

10.



Şekildeki ABC üçgeninde, $[AB] \parallel [DE]$

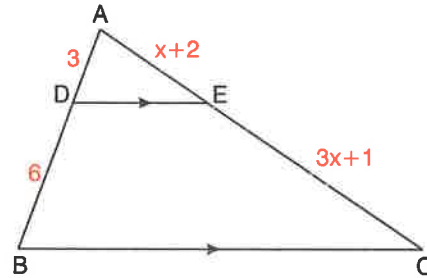
$|AB| = 6$ birim, $|ED| = 4$ birim

$|BD| = 2$ birim

Buna göre, $|CD| = x$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Örnek 21:



Yukarıdaki şekilde, $[DE] \parallel [BC]$, $|AD| = 3$ birim, $|BD| = 6$ birim, $|AE| = x+2$ birim

$|EC| = 3x+1$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x değeri kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm:

$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan temel benzerlik teoremine göre,

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{x+2}{4x+3} \Rightarrow 4x+3 = 3x+6$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Ayrıca $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ eşitliğini kullanarak da x değeri bulunabilir.

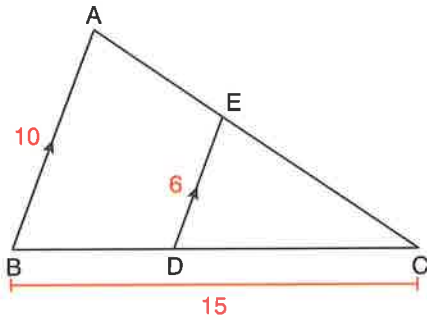
$$\frac{3}{6} = \frac{x+2}{3x+1} \Rightarrow 3x+1 = 2x+4 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 22:

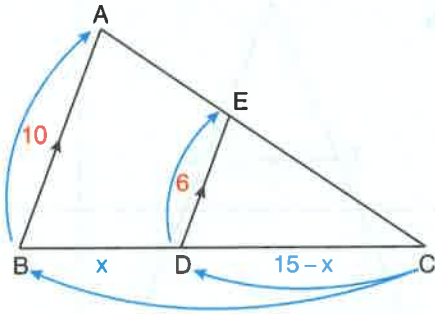


Yukarıda verilen ABC üçgeninde, $[AB] \parallel [ED]$, $|AB| = 10$ birim
 $|DE| = 6$ birim, $|BC| = 15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BD|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:



$|BD| = x$ dersek $|DC| = 15 - x$ olur.

$[DE] \parallel [AB]$ olduğundan temel benzerlik teoremine göre,

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|DE|}{|AB|} \text{ eşitliğinden}$$

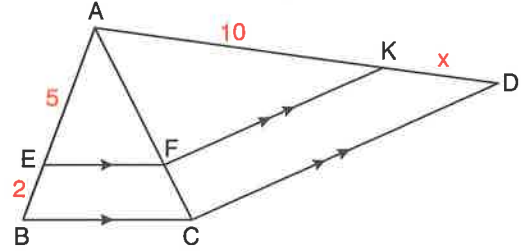
$$\frac{15-x}{15} = \frac{6}{10} \Rightarrow 75 - 5x = 45$$

$$\Rightarrow 5x = 30$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 23:



Yukarıda verilen şekilde, $[EF] \parallel [BC]$, $[FK] \parallel [CD]$, $|AE| = 5$ birim
 $|EB| = 2$ birim, $|AK| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|KD| = x$ kaç birimdir?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm:

- ABC üçgeninde $[EF] \parallel [BC]$ olduğundan

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AF|}{|FC|} \dots \textcircled{1} \text{ dir.}$$

- ACD üçgeninde $[FK] \parallel [CD]$ olduğundan

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AK|}{|KD|} \dots \textcircled{2} \text{ dir.}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ nolu eşitliklerden, $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AK|}{|KD|}$ yazabiliriz.

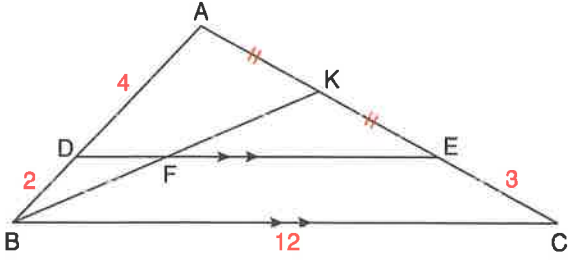
$$\text{O halde, } \frac{5}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \text{ birimdir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 24:



Yukarıda verilen şekilde, $[DE] \parallel [BC]$, $|AK| = |KE|$, $|AD| = 4$ birim
 $|DB| = 2$ birim, $|EC| = 3$ birim, $|BC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|FE|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm:

$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan, $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ yazabiliriz.

$|AK| = |KE| = x$ dersek

$$\frac{4}{2} = \frac{2x}{3} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

BKC üçgeninde $[FE] \parallel [BC]$ olacağından

$$\frac{|KE|}{|KC|} = \frac{|FE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{|FE|}{12} \Rightarrow |FE| = 6 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

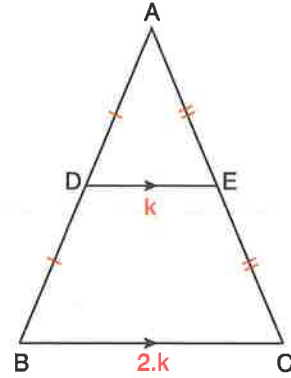
! Dikkat

Bir üçgenin herhangi bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarı iki eş parçaya bölen doğru parçasına paralel olduğu kenarın orta tabanı denir.

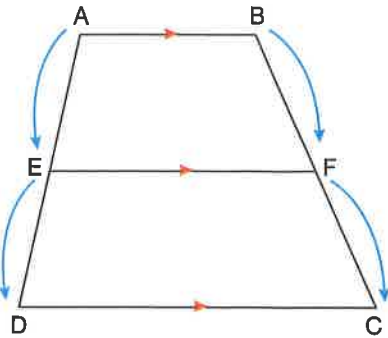
♦ $[DE]$, $[BC]$ kenarının orta tabanıdır.

♦ $|DE| = \frac{|BC|}{2}$ dir.

$|DE| = k$ ise $|BC| = 2k$ olur.



Thales Teoremi



$[AB] \parallel [EF] \parallel [DC]$ ise

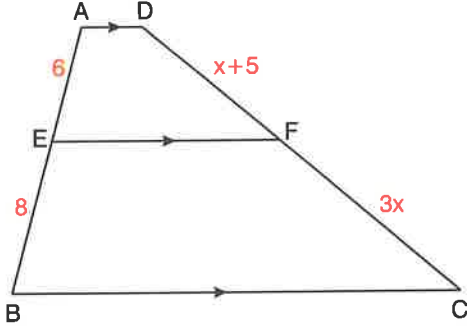
Thales teoremine göre, $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BF|}{|FC|}$ dir.

Ayrıca; $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|AB| - |EF|}{|EF| - |DC|}$ eşitliği de mevcuttur.

ÜÇGENLER

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 25:

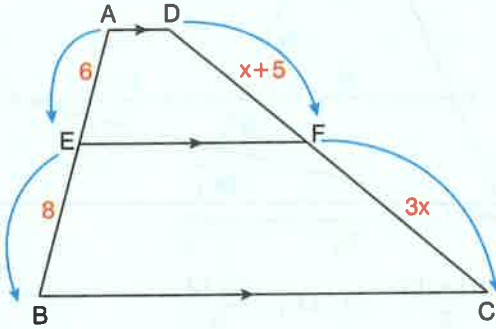


Yukarıdaki şekilde, $[AD]//[EF]//[BC]$, $|AE|=6$ birim, $|EB|=8$ birim
 $|DF|=(x+5)$ birim, $|FC|=3x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, x değeri kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm:



Thales teoremine göre,

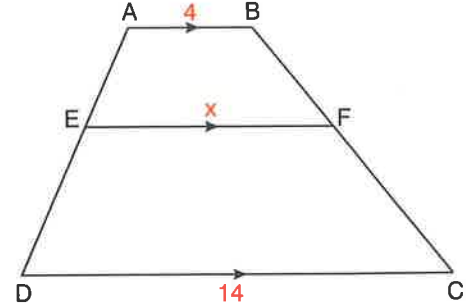
$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DF|}{|FC|} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{x+5}{3x} \Rightarrow 9x = 4x + 20$$

$$\Rightarrow 5x = 20$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 26:

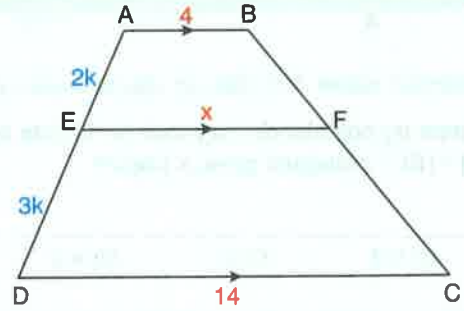


Yukarıdaki şekilde, $[AB]//[EF]//[DC]$, $|AB|=4$ birim
 $|DC|=14$ birim, $3 \cdot |AE| = 2 \cdot |ED|$

Yukarıdaki verilere göre, x değeri kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm:



$|AE|=2k$ dersek $|ED|=3k$ olur.

Thales teoreminden elde edilen eşitliğe göre,

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AB| - |EF|}{|EF| - |DC|} \text{ ise}$$

$$\frac{2k}{3k} = \frac{4-x}{x-14} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4-x}{x-14}$$

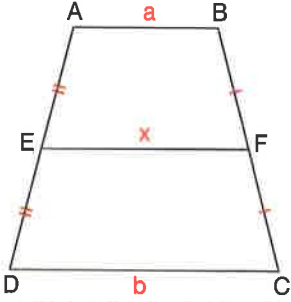
$$\Rightarrow 2x - 28 = 12 - 3x$$

$$\Rightarrow 5x = 40$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

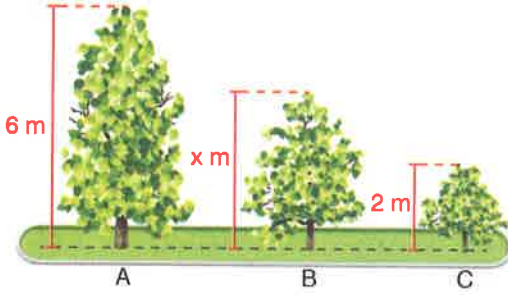
ÜÇGENLER

! Dikkat



$$\begin{aligned} &[AB] \parallel [DC] \parallel [EF] \\ &|AE| = |ED| \\ &|BF| = |FC| \text{ ise} \\ &x = \frac{a+b}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek 27:

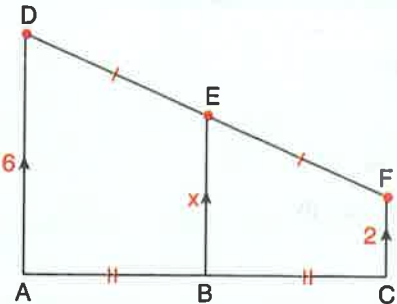


Yukarıda doğrusal olarak dikili olan üç ağacın boyları verilmiştir. Ağaçların tepe uç noktalarında doğrusal bir hizada bulunduğuna ve $|AB| = |BC|$ olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 3 B) 3,6 C) 4 D) 4,2 E) 4,5

Çözüm:

Verilen şekli modellersek

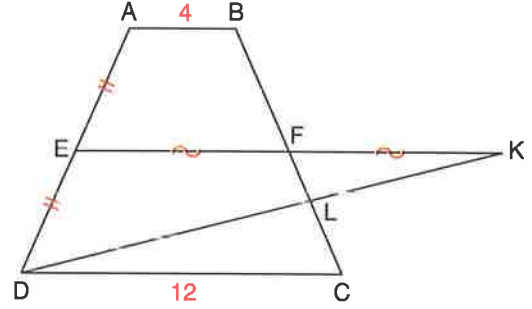


$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{6+2}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{8}{2} = 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Üçgende Eşlik ve Benzerlik

Örnek 28:

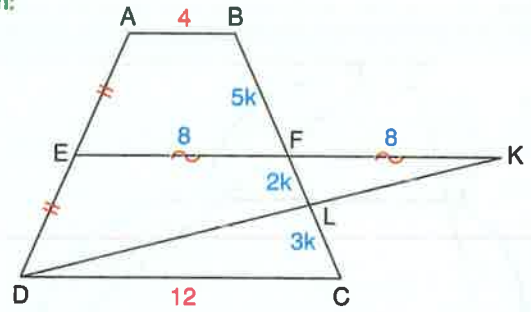


Yukarıdaki şekilde $[AB] \parallel [EK] \parallel [DC]$, $|AE| = |ED|$, $|EF| = |FK|$
 $|AB| = 4$ birim, $|DC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\frac{|FB|}{|LC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm:



$$\begin{aligned} |EF| &= \frac{|AB| + |DC|}{2} \Rightarrow |EF| = \frac{4+12}{2} \\ &\Rightarrow |EF| = 8 \text{ birimdir.} \end{aligned}$$

$$|EF| = |FK| \Rightarrow |FK| = 8 \text{ birim olur.}$$

$[FK] \parallel [DC]$ olacağından,

$$\frac{|FK|}{|DC|} = \frac{|FL|}{|LC|} \Rightarrow \frac{|FL|}{|LC|} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

$$|FL| = 2k \text{ dersek } |LC| = 3k \text{ olacaktır.}$$

$$|AE| = |ED| \Rightarrow |BF| = |FC| \text{ olacağından } |BF| = 5k \text{ olur.}$$

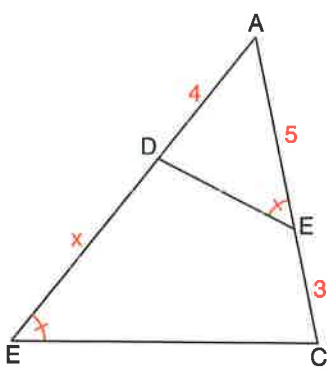
$$\text{O halde, } \frac{|BF|}{|LC|} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3} \text{ tür.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENDE EŞLİK VE BENZERLİK

Test : 04

7.

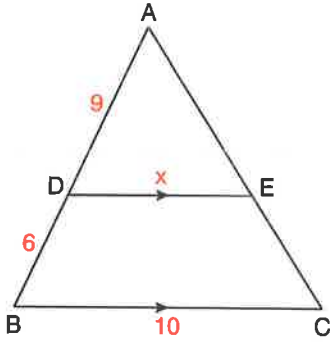


Yanda verilen $\triangle ABC$ nde
 $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ABC})$
 $|AD| = 4$ birim
 $|AE| = 5$ birim
 $|EC| = 3$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BD| = x$ kaç birimdir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8.

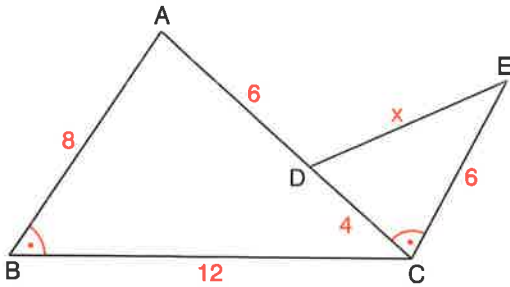


Yanda verilen şekilde
 $[DE] \parallel [BC]$
 $|AD| = 9$ birim
 $|BD| = 6$ birim
 $|BC| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|DE| = x$ kaç birimdir?

- A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

9.

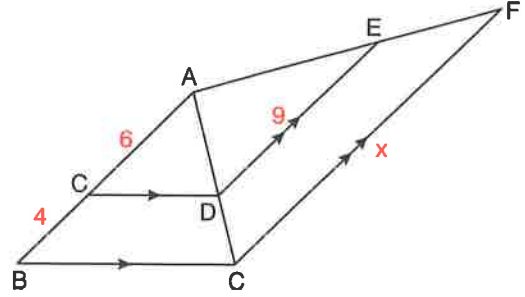


Yandaki şekilde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DCE})$ dir.

Verilen uzunluk bilgilerine göre, x kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.

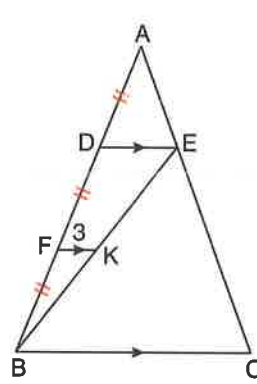


Şekilde, $[CD] \parallel [BC]$, $[DE] \parallel [CF]$, $|AC| = 6$ birim
 $|BC| = 4$ birim, $|DE| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CF| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

11.

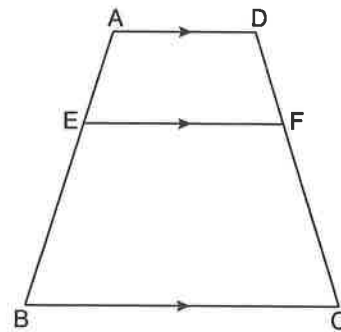


Şekildeki $\triangle ABC$ nde
 $|AD| = |DF| = |FB|$
 $[DE] \parallel [FK] \parallel [BC]$
 $|FK| = 3$ birim

Buna göre, $|DE| + |BC|$ toplamı kaç birimdir?

- A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 29

12.



Yandaki şekilde
 $[AD] \parallel [EF] \parallel [BC]$
 $|EB| = 3 \cdot |EA|$
 $|DC| = 24$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|DF|$ kaç birimdir?

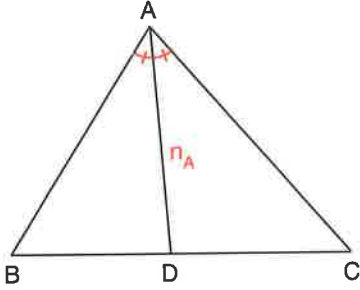
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

AÇIORTAY VE ÖZELLİKLERİ

1) Üçgende İç Açıortayın Özellikleri



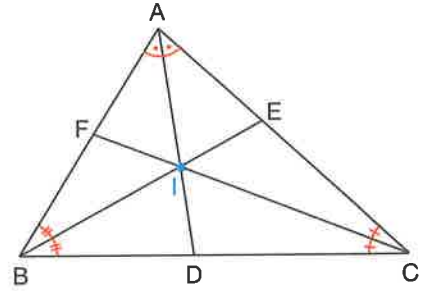
Bir üçgende herhangi bir açığı iki eşit parçaya bölen ışına o açının **açıortayı** denir.

- Yandaki şekilde, [AD], A açısının iç açıortayıdır ve n_A ile gösterilir.

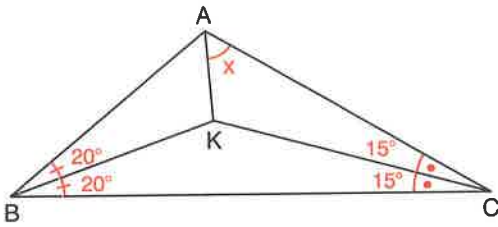
! Dikkat

Bütün üçgenlerde iç açıortaylar bir noktada kesişirler.

- I noktası ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.
- İç açıortayların kesim noktası daima üçgenin iç bölgesindedir.



Örnek 1:



Şekildeki ABC üçgeninde [BK] ve [CK] iç açıortaylardır.

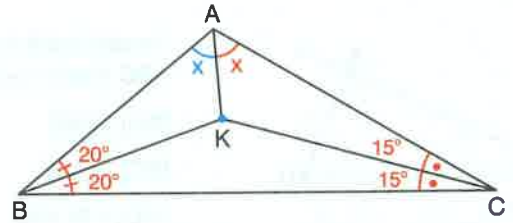
$$m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{KBC}) = 20, m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{KCB}) = 15^\circ$$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{KAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 55 B) 50 C) 45 D) 40 E) 30

Çözüm:

Tüm üçgenlerde iç açıortaylar bir noktada kesişir. O halde K noktası ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.



Dolayısıyla, $m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{KAC}) = x$ olmalıdır.

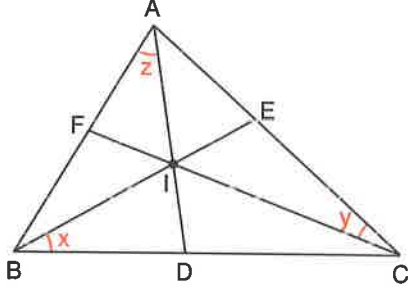
ABC üçgeninin iç açıları toplamından,

$$2x + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 110^\circ \Rightarrow x = 55 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 2:



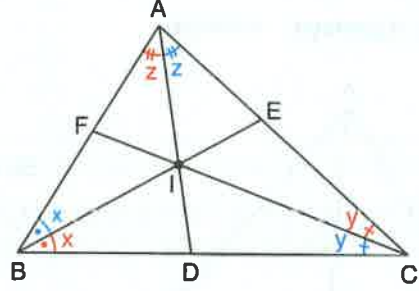
Şekilde verilen ABC üçgeninde, I noktası üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.

Buna göre, $x+y+z$ toplamı kaç derecedir?

- A) 60 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Çözüm:



I, ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktası olduğundan $m(\widehat{ABE})=x$, $m(\widehat{FCB})=y$ ve $m(\widehat{CAD})=z$ olur.

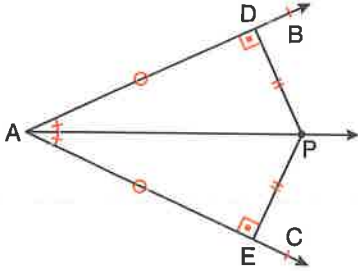
O halde ABC üçgeninde

$$2x+2y+2z=180^\circ \Rightarrow 2(x+y+z)=180^\circ$$

$$\Rightarrow x+y+z=90 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat



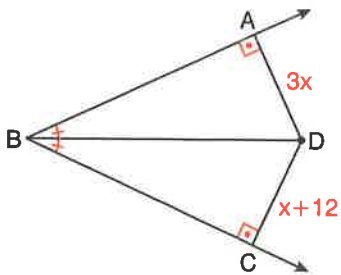
Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına çizilen dikmeler birbirine eşittir.

[AP, $\widehat{BAC}$ nin açıortayı ise

$$\diamond |PD| = |PE|$$

$$\diamond |AD| = |AE|$$

Örnek 3:



Yandaki şekilde [BD], ABC açısının açıortayıdır.

$$[AD] \perp [AB]$$

$$[BC] \perp [CD]$$

$$|AD| = 3x \text{ birim}$$

$$|CD| = x+12 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm:

[BD açıortayı üzerinde alınan D noktasından [BA ve [BC ye inilen [DA] ve [DC] dikmeleri eşit uzunluktadır.

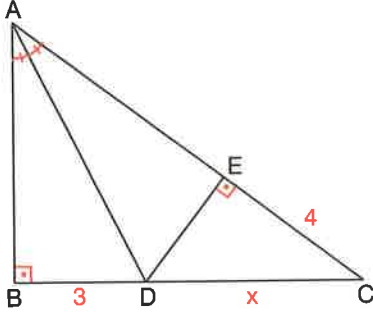
$$|DA| = |DC| \text{ olacağından}$$

$$3x = x+12 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6 \text{ birimdir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 4:

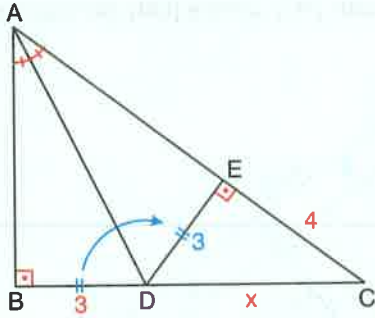


Şekildeki ABC dik üçgeninde
[AD] açıortay
[ED] $\perp$ [AC]
|BD| = 3 birim
|EC| = 4 birim

Yukarıdaki verilere göre, |CD| = x kaç birimdir?

- A) $6\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 5 E) 6

Çözüm:



[AD] açıortay olduğundan, |BD| = |DE| = 3 birim olur.

DEC üçgeninde pisagor bağıntısından,

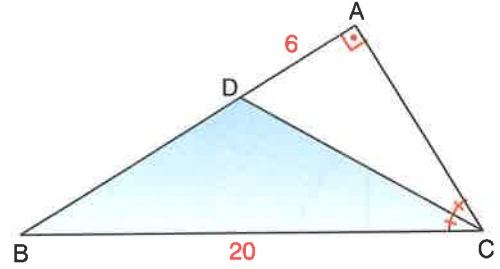
$$3^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow 9 + 16 = x^2 \Rightarrow x^2 = 25$$

x = 5 olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 5:



Şekildeki ABC dik üçgeninde, [CD] iç açıortay, |AD| = 6 birim

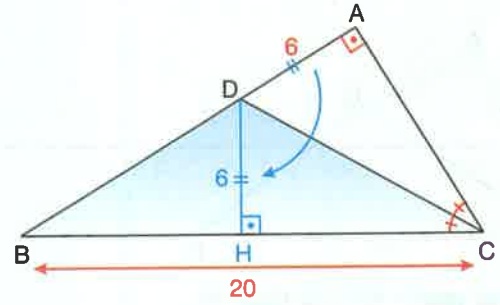
|BC| = 20 birim

Yukarıdaki verilere göre, Alan($\triangle BDC$) kaç birimkaredir?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 60 E) 90

Çözüm:

[CD] açıortayı üzerindeki D noktasından [BC] ye [DH] dikmesini çizersek



|AD| = |DH| = 6 birim olur.

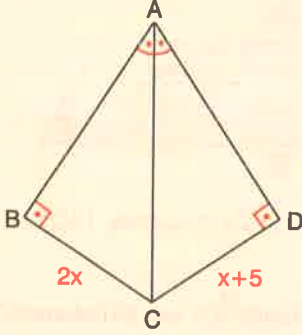
$$A(\triangle BDC) = \frac{20 \cdot 6}{2} = 60 \text{ birimkaredir.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

İLK ADIM SORULARI

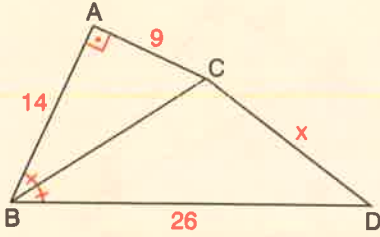
11.



Yukarıdaki şekilde, $[AB] \perp [BC]$
 $[AD] \perp [CD]$, $[AC]$, A açısının açıortayı
 $|BC| = 2x$ birim, $|CD| = x+5$ birim
 Buna göre, x kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

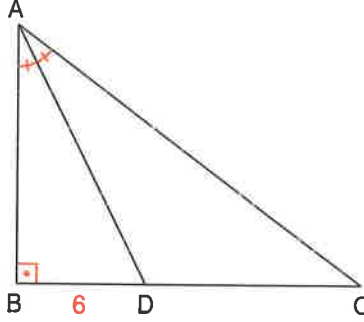
12.



Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgendir.
 $[BD]$, B açısının açıortayı, $|AC| = 9$ birim
 $|AB| = 14$ birim, $|BD| = 26$ birim
 Bu verilere göre, $|CD| = x$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$
 D) 14 E) 15

Örnek 6:



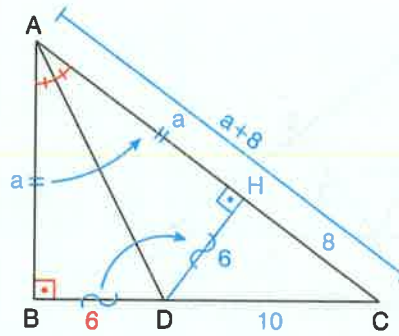
ABC dik üçgen
 $[AD]$, A açısının açıortayı
 $|BD| = 6$ birim
 $|AC| = |AB| + 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD|$ kaç birimdir?

- A) $6\sqrt{2}$ B) 12 C) 10 D) $3\sqrt{5}$ E) 14

Çözüm:

$[AD]$ açıortayı üzerindeki D noktasından $[AC]$ üzerine $[DH]$ dikmesini çizelim.



$|AB| = a$ dersek $|AC| = a+8$ olur.
 $|AH| = |AB|$ olacağından $|AH| = a$ birim, $|HC| = 8$ birim ve
 $|BD| = |DH|$ olacağından $|DH| = 6$ birim olur.
 DHC dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak

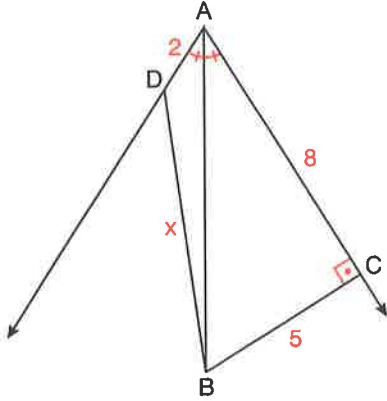
$$\begin{aligned} |CD|^2 &= 6^2 + 8^2 \Rightarrow |CD|^2 = 36 + 64 \\ &\Rightarrow |CD|^2 = 100 \\ &\Rightarrow |CD| = 10 \text{ birim olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 7:



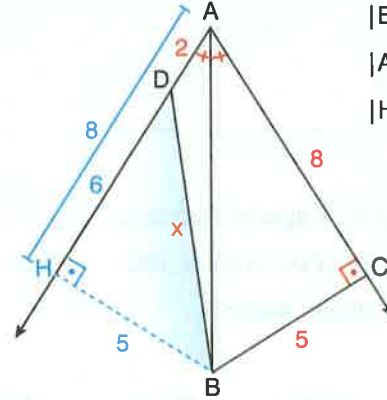
Yukarıdaki şekilde, $[AC] \perp [BC]$, $[AB]$, DAC açısının açıortayı
 $|AD|=2$ birim, $|AC|=8$ birim ve $|BC|=5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BD|=x$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{3}$ B) 7 C) 8 D) $\sqrt{61}$ E) $6\sqrt{2}$

Çözüm:

$[AB]$ açıortayı üzerindeki B noktasından $[AD]$ üzerine $[BH]$ dikmesini çizersek



$|BH|=|BC|=5$ birim
 $|AH|=|AC|=8$ birim ve
 $|HD|=8-2=6$ birim olur.

BDH üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$x^2 = 6^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 25$$

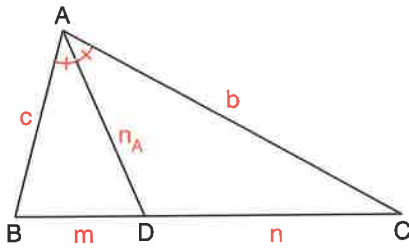
$$\Rightarrow x^2 = 61$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{61} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

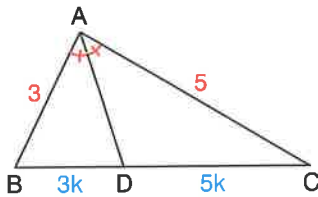
İç Açıortay Teoremi: ABC üçgeninde A açısının iç açıortayı $[BC]$ yi D de kessin.



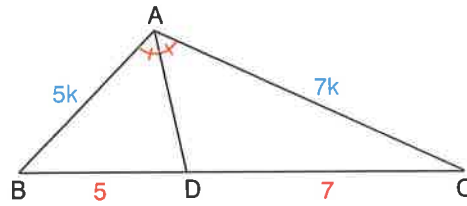
$$\diamond \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \text{ dir. Yani } \frac{c}{b} = \frac{m}{n} \text{ olur.}$$

$$\diamond |AD| = n_A \text{ ile gösterilir.}$$

Orantı özelliği kullanılırsa,

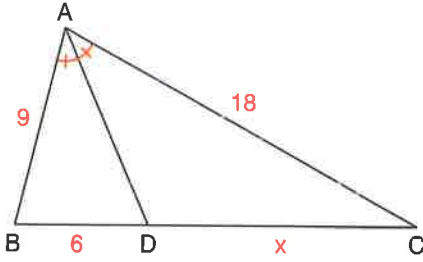


şeklinde yazılabilir.



ÜÇGENLER

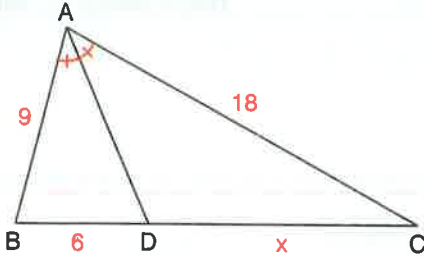
Örnek 8:



Şekildeki ABC üçgeninde [AD], A açısının açıortayıdır.
 $|AB|=9$ birim, $|AC|=18$ birim, $|BD|=6$ birim, $|DC|=x$ birim
 Yukarıdaki verilere göre, x değeri kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Çözüm:



ABC üçgeninde iç açıortay teoremine göre,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \text{ ise}$$

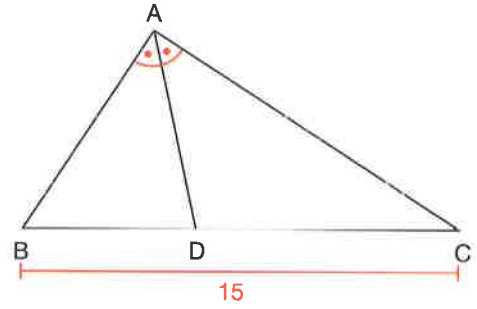
$$\frac{9}{18} = \frac{6}{x} \Rightarrow 9 \cdot x = 6 \cdot 18$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ dir.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

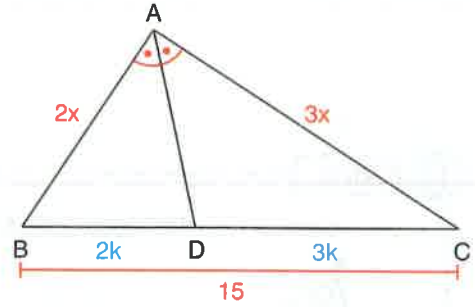
Örnek 9:



Şekildeki ABC üçgeninde [AD], A açısının açıortayı
 $2|AC|=3|AB|$ ve $|BC|=15$ birim
 Yukarıdaki verilere göre, $|BD|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:



2. $|AC|=3 \cdot |AB|$ eşitliğinde, $|AC|=3x$ dersek $|AB|=2x$ olur.

İç açıortay teoremine göre, $|BD|=2k$ ve $|CD|=3k$ yazabiliriz.

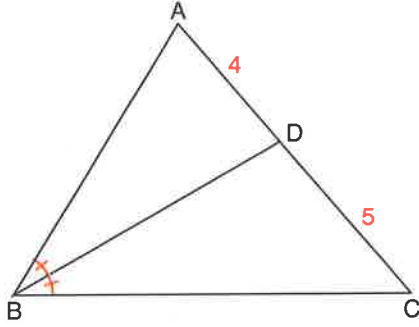
$$2k+3k=15 \Rightarrow 5k=15 \Rightarrow k=3 \text{ olur.}$$

$$|BD|=2 \cdot k=2 \cdot 3=6 \text{ birim bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 10:

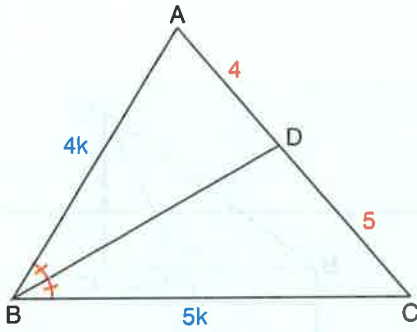


Şekildeki ABC üçgeninde [BD], $\widehat{ABC}$ nin açıortayı, $|AD|=4$ birim
 $|DC|=5$ birim, $\text{Çevre}(ABC)=27$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm:



ABC üçgeninde iç açıortay teoremine göre, $|AB|=4k$ ve $|BC|=5k$ dersek,

$$\text{Çevre}(ABC)=27 \Rightarrow 4k+5k+9=27$$

$$\Rightarrow 9k=18$$

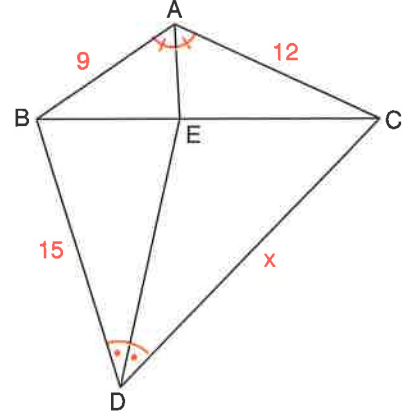
$$\Rightarrow k=2 \text{ olur.}$$

Buradan, $|BC|=5k=5 \cdot 2=10$ birim bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 11:



Yukarıdaki şekilde, [AE] ve [DE] açıortay, $|AB|=9$ birim
 $|AC|=12$ birim, $|BD|=15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD|=x$ kaç birimdir?

- A) 27 B) 25 C) 22 D) 20 E) 18

Çözüm:

ABC üçgeninde iç açıortay teoreminden: $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{9}{12}$

BDC üçgeninde iç açıortay teoreminden: $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{15}{x}$

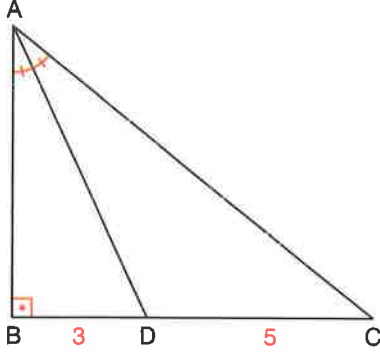
olacağından

$$\frac{9}{12} = \frac{15}{x} \Rightarrow 9x = 12 \cdot 15 \Rightarrow x = 20 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 12:

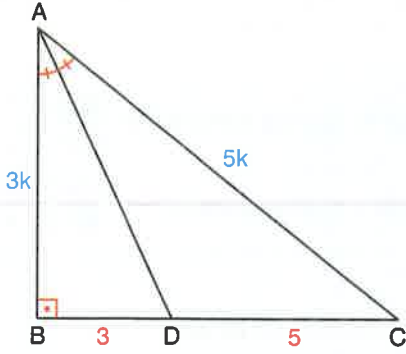


Şekildeki ABC dik üçgeninde, [AD], A açısının açıortayı
|BD|=3 birim, |DC|=5 birim

Yukarıdaki verilere göre, |AC| kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 17

Çözüm:



İç açıortay teoreminden, |AB|=3k ve |AC|=5k dersek

ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısından

$$(3k)^2 + 8^2 = (5k)^2$$

$$9k^2 + 64 = 25k^2$$

$$64 = 16k^2$$

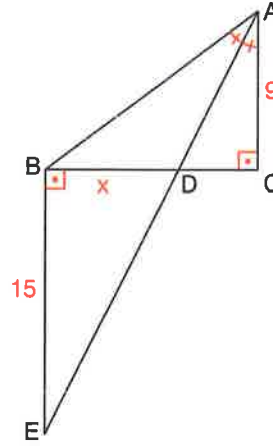
$$k^2 = 4$$

$$k = 2 \text{ olur.}$$

$$|AC| = 5k = 5 \cdot 2 = 10 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 13:



Yandaki şekilde

$$[AC] \perp [BC]$$

$$[BE] \perp [BC]$$

$$[AE] \text{ açıortay}$$

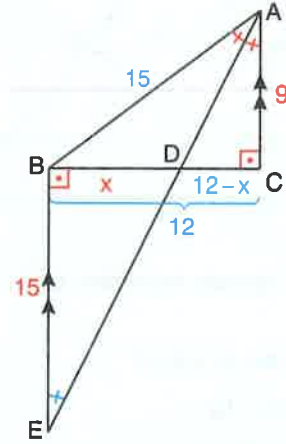
$$|AC| = 9 \text{ birim}$$

$$|BE| = 15 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, |BD|=x kaç birimdir?

- A) $\frac{15}{2}$ B) 6 C) 7 D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{21}{4}$

Çözüm:



[AC]//[BE] olacağından, iç ters açılardan

eşitliğinden $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{EAC})$ dir.

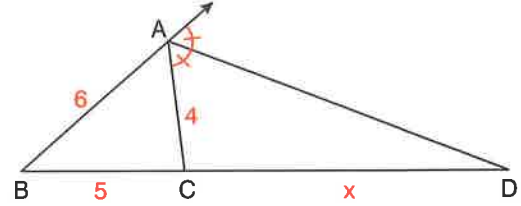
Dolayısıyla $\triangle ABE$ ikizkenardır.

$$|AB| = |BE| = 15 \text{ birim olur.}$$

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 14:



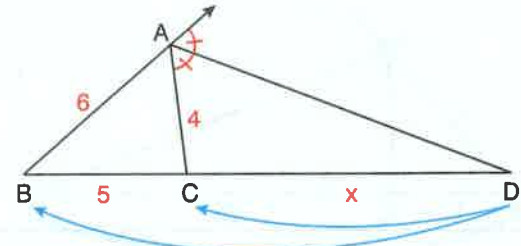
Yukarıda verilen $\triangle ABC$ nde, $[AD]$, A açısının dış açıortayı

$|AB|=6$ birim, $|AC|=4$ birim, $|BC|=5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD|=x$ kaç birimdir?

- A) 20 B) 15 C) 12 D) 10 E) 9

Çözüm:



$\triangle ABC$ nde dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ ise}$$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{6} \Rightarrow 3x = 2x + 10$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$9^2 + |BC|^2 = 15^2 \Rightarrow 81 + |BC|^2 = 225$$

$$\Rightarrow |BC|^2 = 144$$

$$\Rightarrow |BC| = 12 \text{ birimdir.}$$

$|BD|=x$ ise $|DC|=12-x$ olur. İç açıortay teoremine göre,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \Rightarrow \frac{15}{4} = \frac{x}{12-x}$$

$$\Rightarrow 3x = 60 - 5x$$

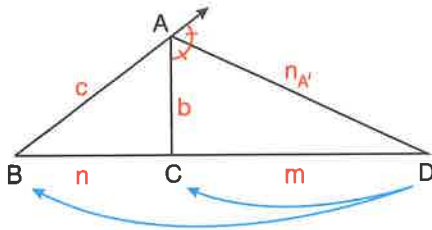
$$\Rightarrow 8x = 60$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat

Dış Açıortay Teoremi: ABC üçgeninde A açısının dış açıortayı $[BC]$ yi D de kessin.



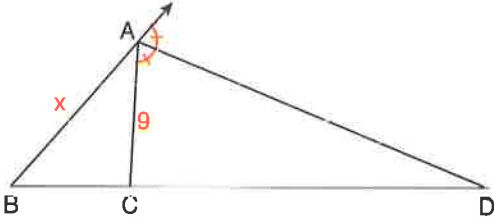
Dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ dir. Yani; } \frac{m}{m+n} = \frac{b}{c} \text{ olur.}$$

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|n_A|}{|AB|} \text{ ile ifade edilir.}$$

ÜÇGENLER

Örnek 15:

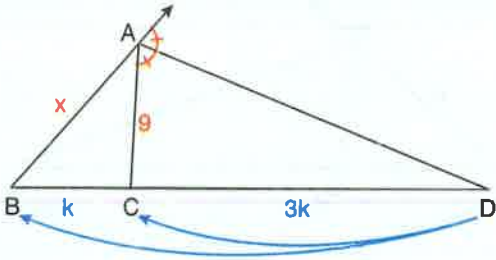


ABC üçgeninde, [AD], A açısının dış açıortayı, $|CD| = 3 \cdot |BC|$
 $|AC| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AB| = x$ kaç birimdir?

- A) 24 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

Çözüm:



$|BC| = k$ dersek $|CD| = 3k$ olur. Dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ ise}$$

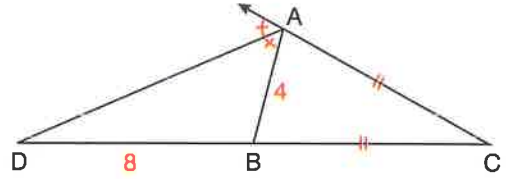
$$\frac{3k}{4k} = \frac{9}{x} \Rightarrow 3x = 36$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 16:

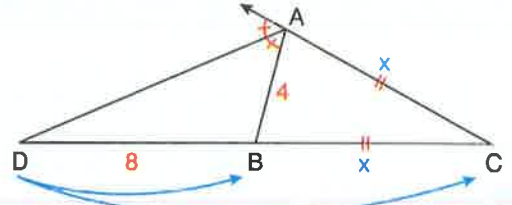


ABC üçgeninde, [AD], A açısının dış açıortayı, $|AC| = |BC|$
 $|AB| = 4$ birim, $|DB| = 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, Çevre(ABC) kaç birimdir?

- A) 18 B) 20 C) 24 D) 27 E) 32

Çözüm:



$|AC| = |BC| = x$ dersek, dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } \frac{8}{8+x} = \frac{4}{x} \Rightarrow 8x = 32 + 4x$$

$$\Rightarrow 4x = 32$$

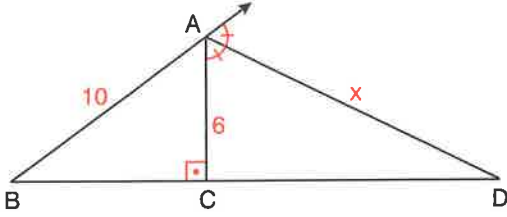
$$\Rightarrow x = 8 \text{ birimdir.}$$

O halde, Çevre(ABC) = $4 + 8 + 8 = 20$ birim bulunur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 17:

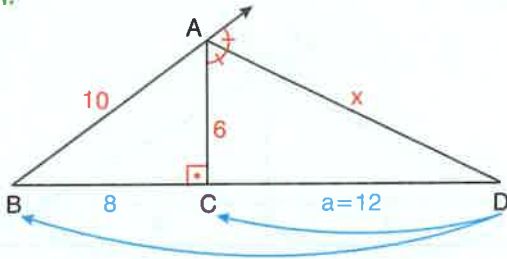


ABC dik üçgeninde, [AD], A açısının dış açıortayı, $|AC|=6$ birim
 $|AB|=10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD|=x$ kaç birimdir?

- A) $9\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{5}$ D) 13 E) 14

Çözüm:



$|CD|=a$ diyelim. Dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{a}{a+8} = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow 5a = 3a + 24$$

$$\Rightarrow 2a = 24$$

$$\Rightarrow a = 12 \text{ olur.}$$

ACD dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak

$$x^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 144$$

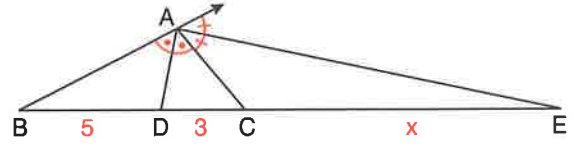
$$\Rightarrow x^2 = 180$$

$$\Rightarrow x = 6\sqrt{5} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 18:



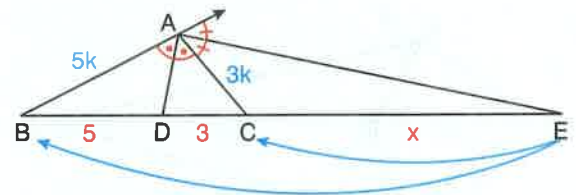
$\triangle ABC$ nde, A açısının iç açıortayı [AD], dış açıortayı [AE] dir.

$|BD|=5$ birim, $|CD|=3$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CE|=x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

Çözüm:



$\triangle ABC$ nde iç açıortay teoremine göre, $|AC|=3k$ ve $|AB|=5k$ diyelim.

Dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{3k}{5k}$$

$$\Rightarrow 5x = 3x + 24$$

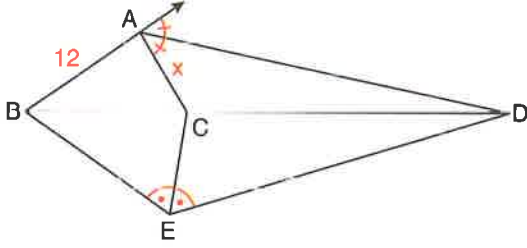
$$\Rightarrow 2x = 24$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 19:

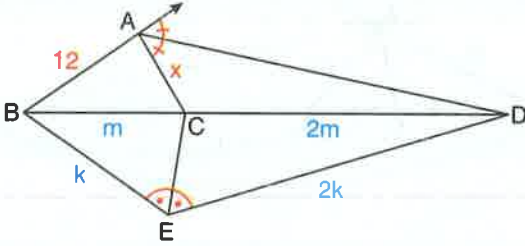


Yukarıdaki şekilde [AD], A açısının dış açıortayı ve [EC], E açısının iç açıortayıdır. $|ED|=2$, $|EB|=k$ ve $|AB|=12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|=x$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm:



$\triangle BED$ nde iç açıortay teoremine göre, $|BE|=k$, $|ED|=2k$ dersek

$|BC|=m$ ise $|CD|=2m$ olur.

$\triangle ABC$ nde dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{2m}{3m} = \frac{x}{12}$$

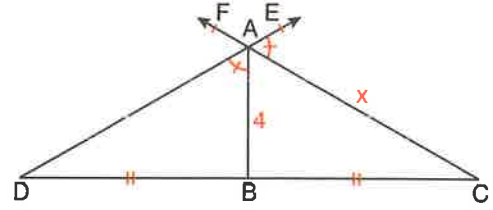
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{12}$$

$$\Rightarrow 3x = 24$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 20:



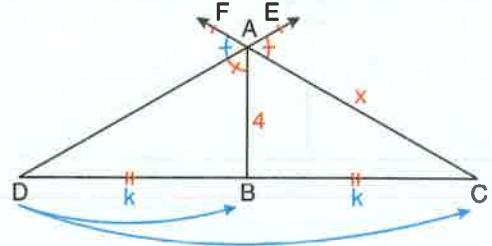
Yukarıdaki şekilde, $m(\widehat{DAB})=m(\widehat{CAE})$, $|DB|=|BC|$

$|AB|=4$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|=x$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm:



Ters açıların eşitliğinden $m(\widehat{DAF})=m(\widehat{CAE})$ olur.

Dolayısıyla [AD], A açısının dış açıortayıdır.

Dış açıortay teoremine göre,

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \frac{k}{2k} = \frac{4}{x}$$

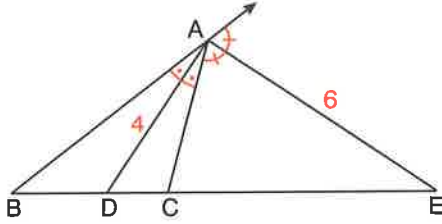
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ birimdir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 21:



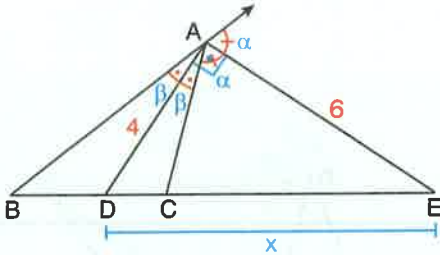
$\triangle ABC$ nde A açısının iç açıortayı [AD] dış açıortayı ise [AE] dir.

$|AD| = 4$ birim, $|AE| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|DE|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) $6\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{13}$

Çözüm:



Eşit açılar α ve β ile ifade edersek $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ ise $\alpha + \beta = 90^\circ$ olur.

O halde ADE üçgeninde $m(\widehat{DAE}) = 90^\circ$ dir.

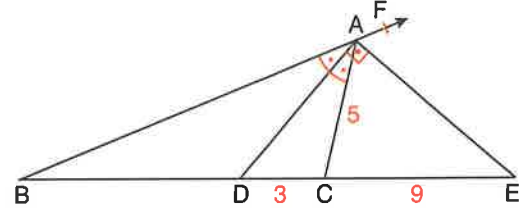
ADE dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak

$$\begin{aligned} |DE|^2 &= |AD|^2 + |AE|^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 + 6^2 \\ &\Rightarrow x^2 = 16 + 36 \\ &\Rightarrow x^2 = 52 \\ &\Rightarrow x = 2\sqrt{13} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 22:



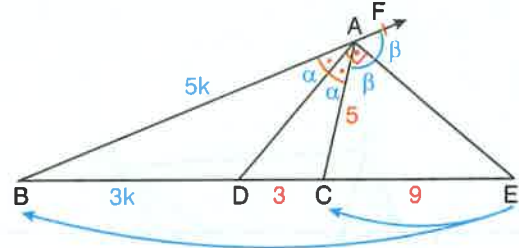
Yukarıdaki şekilde, $[AD] \perp [AE]$, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$, $|AC| = 5$ birim

$|DC| = 3$ birim, $|EC| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BD|$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{10}$ C) 8 D) 6 E) 4

Çözüm:



$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CAE}) = \beta$ dersek

$\alpha + \beta = 90^\circ$ olduğundan $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ olacaktır.

Dolayısıyla $m(\widehat{EAF}) = \beta$ olur.

$\triangle ABC$ nde iç açıortay teoremine göre,

$|BD| = 3k$ ve $|AB| = 5k$ diyelim.

O halde $\triangle ABC$ nde dış açıortay teoreminden

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{9}{3k + 12} = \frac{5}{5k} \Rightarrow 45k = 15k + 60 \Rightarrow 30k = 60$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ olur.}$$

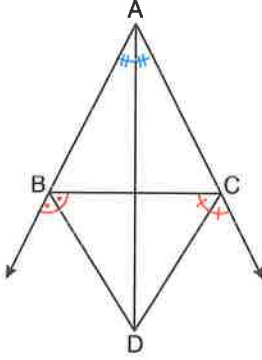
Buradan, $|BD| = 3k = 3 \cdot 2 = 6$ birim olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

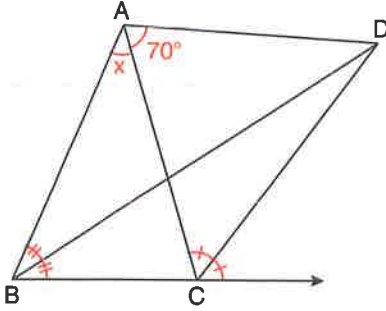
! Dikkat



ABC üçgeninde B ve C açılarının dış açıortayları D noktasında kesişsin. O zaman [AD], A açısının iç açıortayı olur.

- ♦ Bir üçgende iki dış açıortayın kesiştiği nokta üçgenin diğer köşesi ile birleştirildiğinde elde edilen doğru parçası o köşeye ait açının iç açıortayı olur.

Örnek 23:

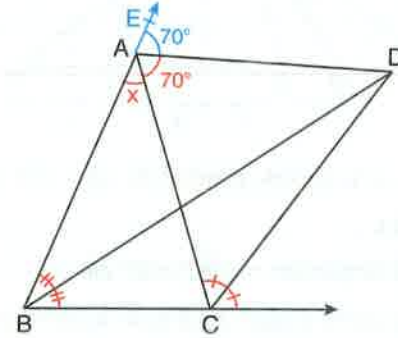


ABC üçgeninde [BD], B açısının iç açıortayı, [CD] C açısının dış açıortayı ve $m(\widehat{CAD}) = 70^\circ$ dir.

Buna göre, $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?

- A) 70 B) 55 C) 45 D) 40 E) 30

Çözüm:



[BD] ve [CD] açıortaylar olduğundan [AD], A açısının dış açıortayı olacaktır.

O halde $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{CAD}) = 70^\circ$ olur.

Buradan

$$70^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 40 \text{ bulunur.}$$

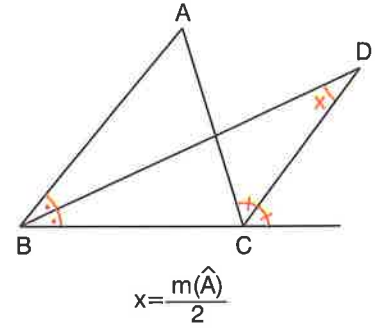
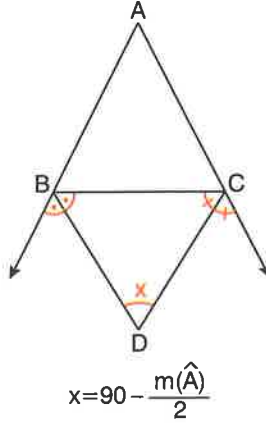
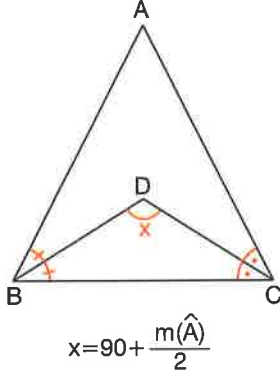
Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

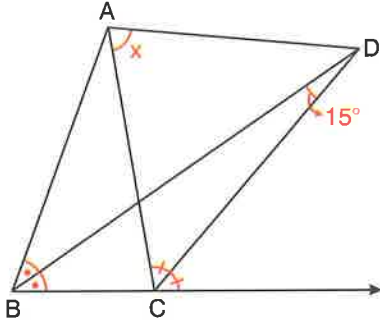
! Dikkat

Ayrıca,



Özelliklerini hatırlayalım.

Örnek 24:

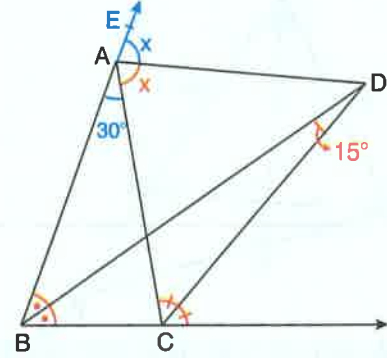


ABC üçgeninde, [BD] iç açıortay, [CD] dış açıortay
 $m(\hat{BDC}) = 15^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\hat{CAD}) = x$ kaç derecedir?

- A) 75 B) 65 C) 60 D) 50 E) 30

Çözüm:



ABC üçgeninde [BD] iç açıortay, [CD] dış açıortay olduğundan;

$$m(\hat{BDC}) = \frac{m(\hat{BAC})}{2} \text{ ise}$$

$$15^\circ = \frac{m(\hat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\hat{BAC}) = 30^\circ \text{ olur.}$$

Ayrıca; [AD], A açısının dış açıortayıdır.

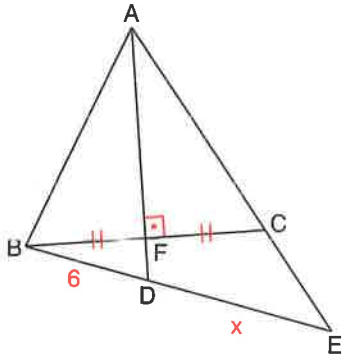
Dolayısıyla $m(\hat{DAE}) = m(\hat{CAD}) = x$ olacaktır.

Buradan, $30^\circ + x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$ bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 25:

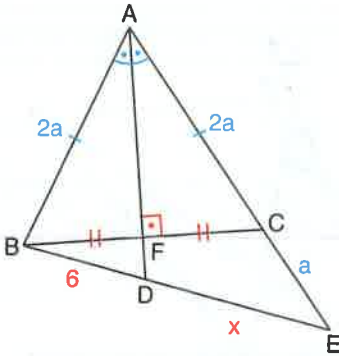


ABE üçgeninde
 $[AD] \perp [BC]$
 $|BF| = |FC|$
 $|AC| = 2 \cdot |CE|$
 $|BD| = 6$ birim
 $|DE| = x$

Yukarıdaki verilere göre, $|DE| = x$ kaç birimdir?

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm:



ABC üçgeninde $[AF] \perp [BC]$ ve $|BF| = |FC|$ olduğundan,
 $\triangle ABC$ ikizkenardır.

$|AB| = |AC| = 2a$ dersek $|CE| = a$ olur.

ABC üçgeni ikizkenar olduğundan $[AD]$, A açısının açıortayıdır.

ABE üçgeninde iç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|DE|} \Rightarrow \frac{2a}{3a} = \frac{6}{x}$$

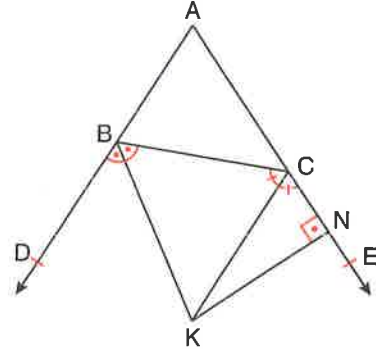
$$\Rightarrow 2x = 18$$

$x = 9$ birim olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Açıortay)

Örnek 26:

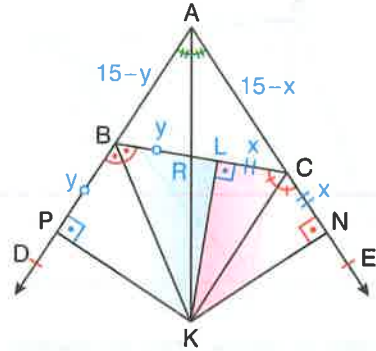


ABC üçgeninde $[BK]$ ve $[CK]$ dış açıortaydır.

$|AN| = 15$ birim olduğuna göre, ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?

- A) 15 B) 24 C) 30 D) 36 E) 45

Çözüm:



$[AK]$ çizilirse A açısının iç açıortayı olur.

K noktasından $[BC]$ ve $[AD]$ ye dikmeler çizilirse

$|CN| = x$ dersek $|CL| = x$ ve $|BP| = y$ dersek $|BL| = y$ olur.

Ayrıca $|AN| = |AP| = 15$ birim olacağından

$|AC| = 15 - x$ ve $|AB| = 15 - y$ olacaktır.

ABC üçgeninin çevresi,

$$|AB| + |AC| + |BC| = 15 - y + 15 - x + y + x$$

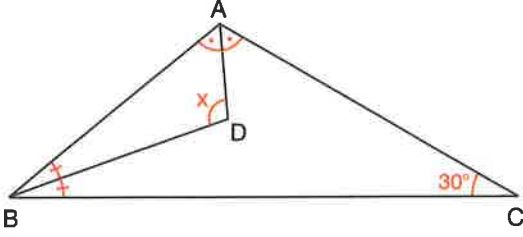
$$= 30 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (AÇIORTAY)

Test : 05

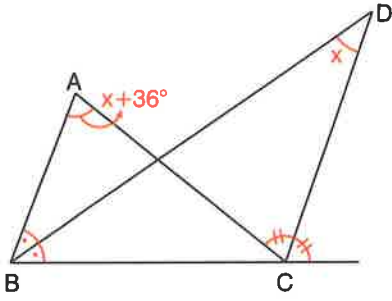
1.



Şekildeki ABC üçgeninde, [AD] ve [BD] iç açıortaylar $m(\hat{C})=30^\circ$ olduğuna göre, $m(\hat{D})=x$ kaç derecedir?

- A) 100 B) 105 C) 110 D) 115 E) 120

2.

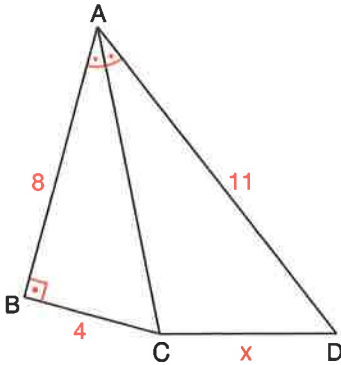


Şekildeki ABC üçgeninde
[BD] iç açıortay
[CD] dış açıortay
 $m(\hat{D})=x$
 $m(\hat{A})=x+36^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) 72

3.

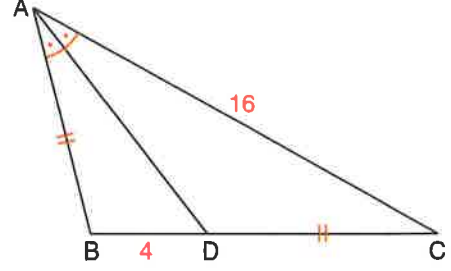


Yandaki şekilde,
[AB] $\perp$ [BC]
 $m(\hat{BAC})=m(\hat{CAD})$
|AB|=8 birim
|BC|=4 birim
|AD|=11 birim

Yukarıdaki verilere göre, |CD|=x kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4.

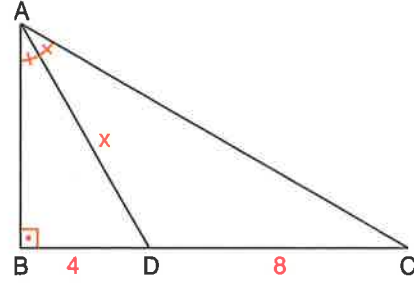


Şekildeki $\triangle ABC$ nde [AD], iç açıortay, |AB|=|CD|
|BD|=4 birim, |AC|=16 birim

Yukarıdaki verilere göre, Çevre(ABC) kaç birimdir?

- A) 48 B) 44 C) 40 D) 36 E) 32

5.

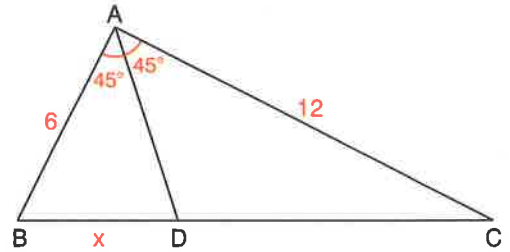


Şekildeki ABC üçgeninde
[AD] iç açıortay
|BD|=4 birim
|DC|=8 birim

Yukarıdaki verilere göre, |AD|=x kaç birimdir?

- A) $6\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 8 D) 10 E) 12

6.



Şekildeki ABC üçgeninde, $m(\hat{BAD})=m(\hat{DAC})=45^\circ$
|AB|=6 birim, |AC|=12 birim

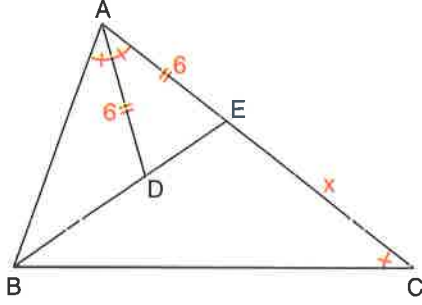
Yukarıdaki verilere göre, |BD|=x kaç birimdir?

- A) 3 B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (AÇIORTAY)

Test : 05

7.



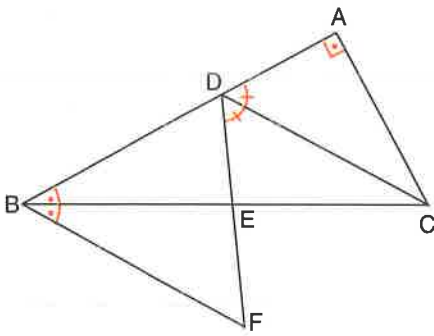
Şekildeki ABC üçgeninde, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{ACB})$
 $|AD| = |AE| = 6$ birim ve $3 \cdot |AB| = 2 \cdot |BC|$

Yukarıdaki verilere göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12



8.



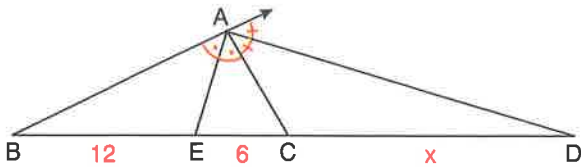
Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [AC]$
 $[BC]$ ve $[DC]$
 açıortay
 $|AB| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\widehat{BDF}$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

www.birey akademi.com

9.



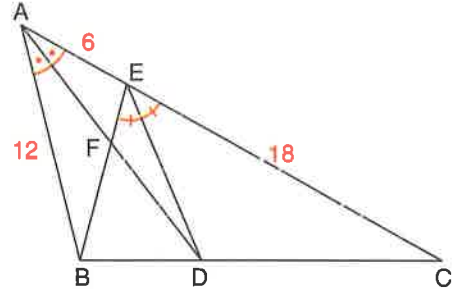
Şekildeki ABC üçgeninde, $[AE]$ iç açıortay, $[AD]$ dış açıortay
 $|BE| = 12$ birim, $|EC| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD| = x$ kaç birimdir?

- A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 9



10.



Şekildeki ABC üçgeninde $[AD]$, A açısının iç açıortayı
 $\triangle BEC$ nde ise $[DE]$ E açısının iç açıortayı

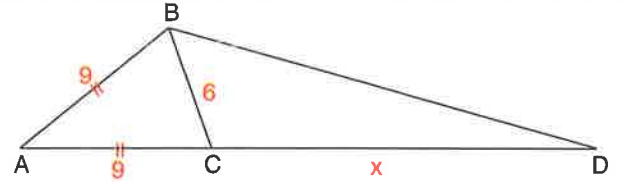
$|AB| = 12$ birim, $|AE| = 6$ birim, $|EC| = 18$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|FB|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

www.birey akademi.com

11.



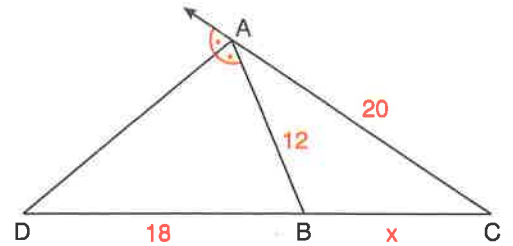
Yukarıdaki şekilde, $m(\widehat{BCD}) = 2 \cdot m(\widehat{CBD})$

$|AB| = |AC| = 9$ birim, $|BC| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|CD| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

12.



Şekildeki ABC üçgeninde $[AD]$, A açısının dış açıortayı

$|AC| = 20$ birim, $|AB| = 12$ birim, $|BD| = 18$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BC| = x$ kaç birimdir?

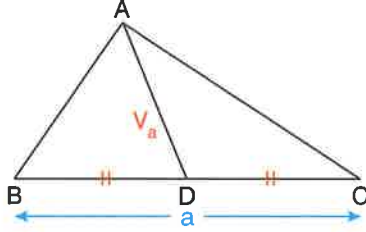
- A) 20 B) 18 C) 14 D) 12 E) 10

bryPLE

ÜÇGENLER

KENARORTAY VE ÖZELLİKLERİ

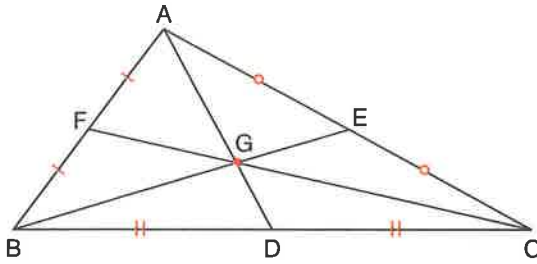
Bir üçgende herhangi bir köşeyi karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına bu kenarın **kenarortayı** denir.



♦ $[BC]$ ye ait kenarortay $[AD]$ dir.

♦ $|AD| = V_a$ ile gösterilir.

! Dikkat



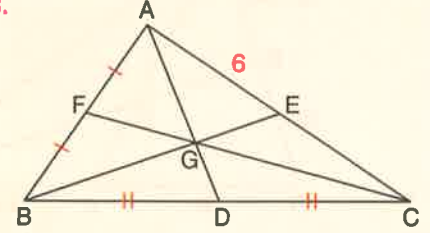
Bütün üçgenlerde kenarortaylar bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin "**ağırlık merkezi**" denir. İki kenarortayın kesiştiği noktadan üçüncü kenarortay da geçer.

- ♦ $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ üçgenin kenarortaylarıdır.
- ♦ $|AD| = V_a$, $|BE| = V_b$ ve $|CF| = V_c$ ile gösterilir.
- ♦ G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.
- ♦ Ağırlık merkezi üçgenin daima iç bölgesindedir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

İLK ADIM SORULARI

13.



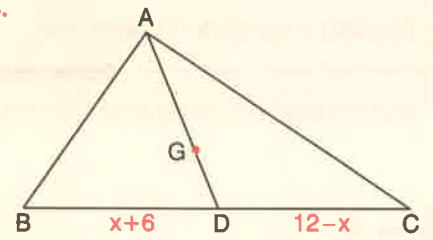
ABC üçgeninde, $|BD| = |DC|$

$|AF| = |FB|$, $|AE| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

14.



ABC üçgeninde G, ağırlık merkezidir.

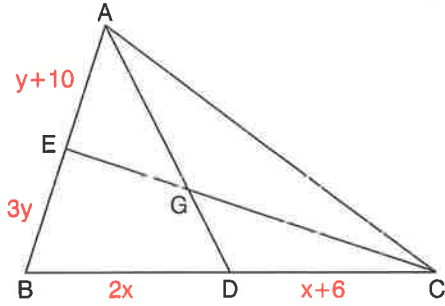
$|BD| = x+6$ birim, $|CD| = 12-x$ birim

Buna göre, x kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

ÜÇGENLER

Örnek 27:



ABC üçgeninde, G ağırlık merkezidir.

$|BD| = 2x$ birim, $|DC| = (x+6)$ birim, $|AE| = (y+10)$ birim

$|BE| = 3y$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $x+y$ toplamı kaç birimdir?

- A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

Çözüm:

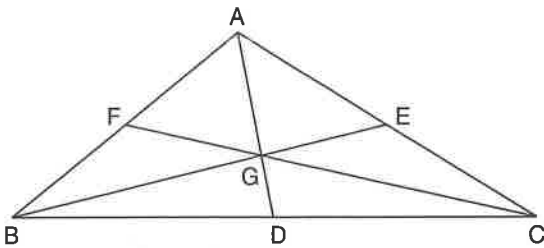
G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan, $[AD]$ ve $[CE]$ kenarortaydır. Dolayısıyla,

- $|BD| = |DC| \Rightarrow 2x = x+6 \Rightarrow x=6$ birim
- $|AE| = |EB| \Rightarrow y+10=3y \Rightarrow y=5$ birimdir.

Buradan $x+y=6+5=11$ birim olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 28:



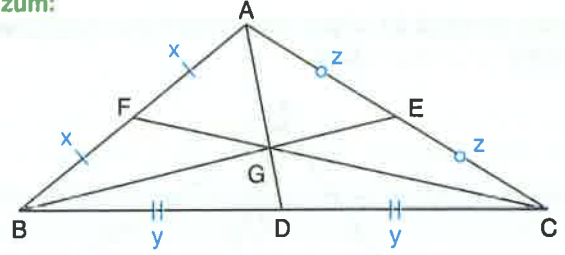
ABC üçgeninde, G ağırlık merkezidir. $|AF| + |BD| + |CE| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\triangle ABC$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Çözüm:



G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan,

$|AF| = |FB| = x$, $|BD| = |DC| = y$ ve $|CE| = |EA| = z$ diyelim.

$|AF| + |BD| + |CE| = 10 \Rightarrow x+y+z=10$ dur.

$$\text{Çevre}(\triangle ABC) = 2x + 2y + 2z$$

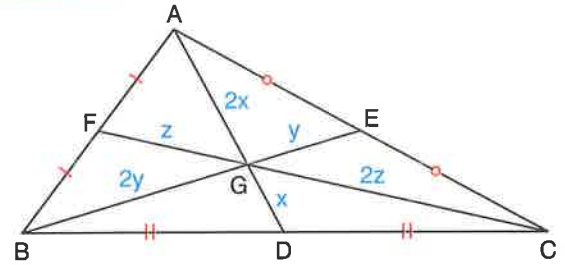
$$= 2 \cdot (x+y+z)$$

$$= 2 \cdot 10$$

$$= 20 \text{ birimdir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat



ABC üçgeninde, G ağırlık merkezi ise

$$\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GF|} = 2$$

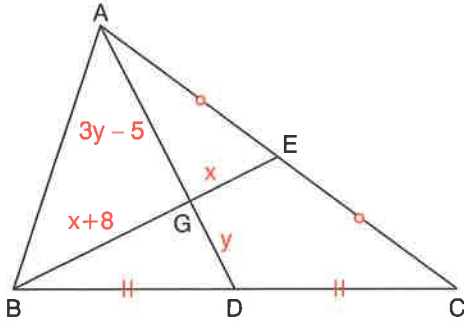
eşitlikleri vardır.

♦ Ağırlık merkezi, üzerinde bulunduğu kenarortayı 1 : 2 oranında böler.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Örnek 29:



ABC üçgeninde, $|BD| = |DC|$, $|AE| = |EC|$, $|AG| = 3y - 5$ birim
 $|GD| = y$ birim, $|BG| = x + 8$ birim, $|GE| = x$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $x + y$ toplamı kaç birimdir?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

Çözüm:

[AD] ve [BE] kenarortay olduğundan G noktası $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezidir.

$$\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|BG|}{|GE|} = 2 \text{ olacağından;}$$

$$\frac{3y-5}{y} = 2 \text{ ve } \frac{x+8}{x} = 2 \Rightarrow 3y-5=2y \text{ ve } x+8=2x$$

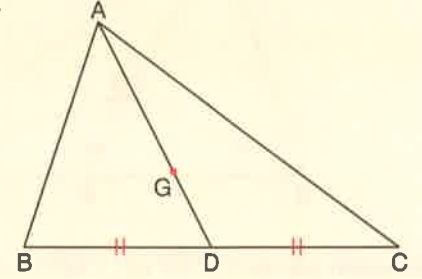
$$y = 5 \text{ ve } x = 8 \text{ olur.}$$

Buradan, $x + y = 8 + 5 = 13$ birim olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

15.

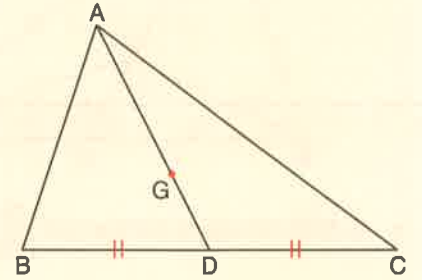


Şekilde, G ABC üçgeninin ağırlık merkezidir. $|AG| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|GD|$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

16.



ABC üçgeninde, G ağırlık merkezidir.

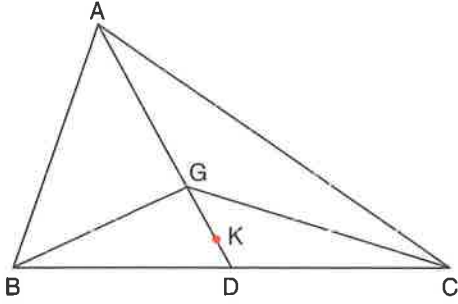
$|AD| = 15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|GD|$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 5 C) 7,5 D) 8 E) 10

ÜÇGENLER

Örnek 30:

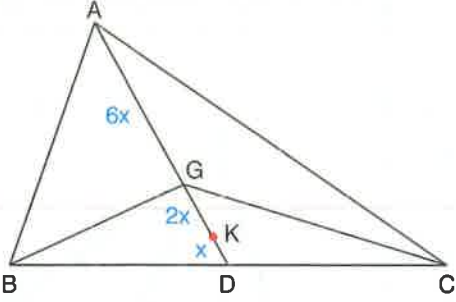


Yukarıdaki şekilde G, $\triangle ABC$ nin, K $\triangle BGC$ nin ağırlık merkezidir.

$|AD| = 36$ birim olduğuna göre, $|GK|$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

Çözüm:



- K, $\triangle BGC$ nin ağırlık merkezi ise $\frac{|GK|}{|KD|} = 2$ olacağından,

$|KD| = x$ dersek, $|GK| = 2x$ olur.

- G, $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezi ise $\frac{|AG|}{|GD|} = 2$ olacağından,

$|GD| = 3x$ iken $|AG| = 6x$ olur.

O halde, $x + 2x + 6x = 36 \Rightarrow 9x = 36$

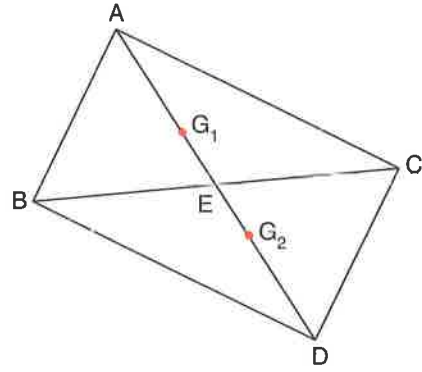
$\Rightarrow x = 4$ birim olur.

$|GK| = 2x = 2 \cdot 4 = 8$ bulunur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Örnek 31:



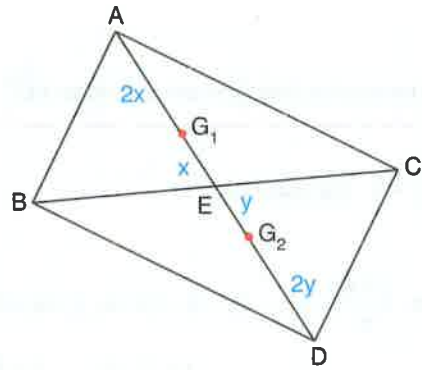
Yukarıdaki şekilde G_1 , $\triangle ABC$ nin, G_2 ise $\triangle BDC$ nin ağırlık merkezidir.

A, G_1 , G_2 ve D doğrusaldır.

$|G_1G_2| = 8$ birim olduğuna göre, $|AD|$ kaç birimdir?

- A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 36

Çözüm:



- G_1 , $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezi olduğundan

$|G_1E| = x$ dersek $|AG_1| = 2x$,

- G_2 , $\triangle BDC$ nin ağırlık merkezi ise

$|G_2E| = y$ dersek $|DG_2| = 2y$ olur.

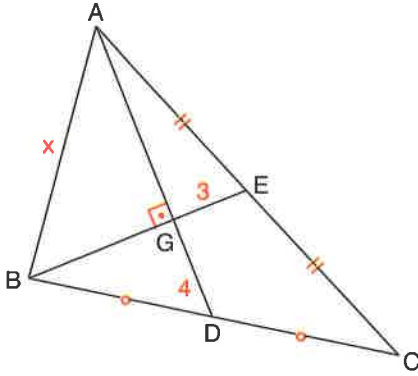
$|G_1G_2| = 8 \Rightarrow x + y = 8$ dir.

$|AD| = 3x + 3y \Rightarrow |AD| = 3 \cdot (x + y) = 3 \cdot 8 = 24$ birim bulunur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 32:



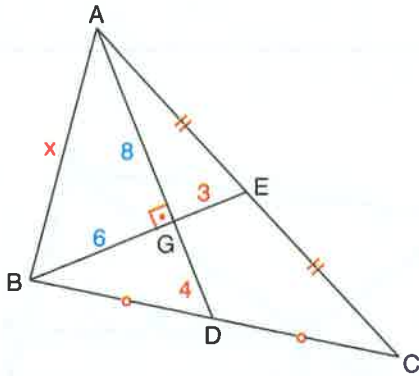
ABC üçgeninde, $|BD| = |DC|$, $|AE| = |EC|$, $[AD] \perp [BE]$

$|DG| = 4$ birim, $|EG| = 3$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AB| = x$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) $6\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{3}$ E) 15

Çözüm:



$[AD]$ ve $[BE]$ kenarortay olduğundan G noktası $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezidir.

$$\frac{|AG|}{|GD|} = 2 \Rightarrow \frac{|AG|}{4} = 2 \Rightarrow |AG| = 8 \text{ birim}$$

$$\frac{|BG|}{|GE|} = 2 \Rightarrow \frac{|BG|}{3} = 2 \Rightarrow |BG| = 6 \text{ birim olur.}$$

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

ABG dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

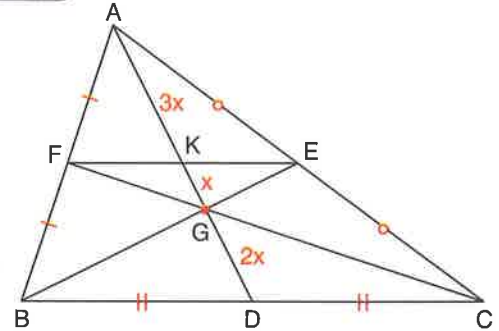
$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 64$$

$$\Rightarrow x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ birim bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat



$\triangle ABC$ nin ağırlık merkezi ise,

$$\diamond [FE] \parallel [BC]$$

$$\diamond |FE| = \frac{|BC|}{2}$$

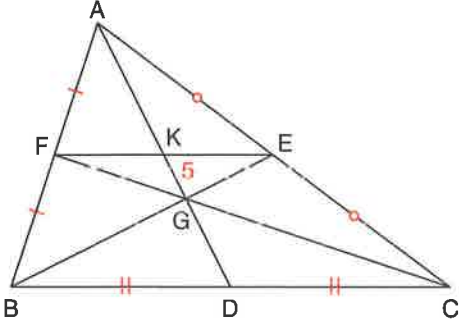
$$\diamond |FK| = \frac{|BD|}{2} \text{ ise } |EK| = \frac{|DC|}{2}$$

$$\diamond |AK| : |KG| : |GD| = 3 : 1 : 2 \text{ dir.}$$

Yani, $|AK| = 3x$, $|KG| = x$ ve $|GD| = 2x$ olur.

ÜÇGENLER

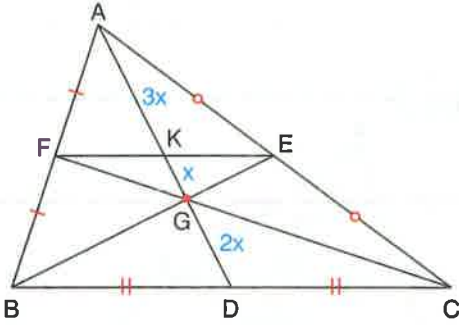
Örnek 33:



ABC üçgeninde, D, E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.
|KG|=5 birim olduğuna göre, |AD| kaç birimdir?

- A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm:



G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan,
[FE]//[BC] dir.

Dolayısıyla |GK|=x dersek,

|AK|=3x ve |GD|=2x olur.

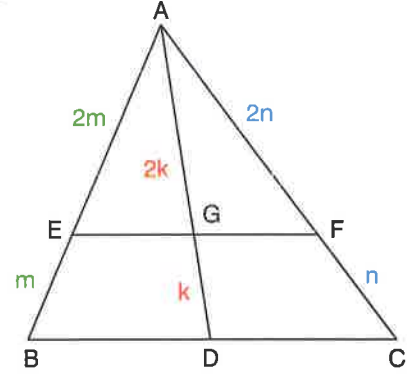
|KG|=5 birim $\Rightarrow x=5$ tir.

|AD|=3x+x+2x=6x=6.5=30 birim olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Dikkat



G, $\triangle ABC$ 'nin ağırlık merkezi ve

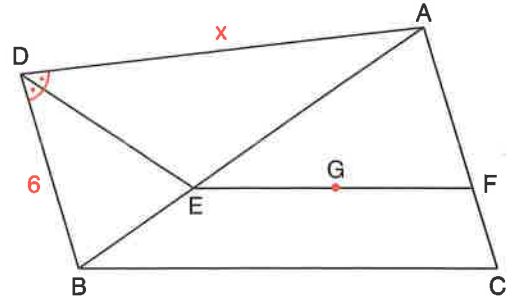
♦ [EF]//[BC] ise

♦ $\frac{|AG|}{|GD|} = 2$ olduğundan,

♦ $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AF|}{|FC|} = 2$ dir.

O halde, |EB|=m dersek |AE|=2m ve
|FC|=n dersek |AF|=2n olur.

Örnek 34:



ABC üçgeninde, G ağırlık merkezi, [DE] açıortay, [EF]//[BC]
|BD|=6 birim

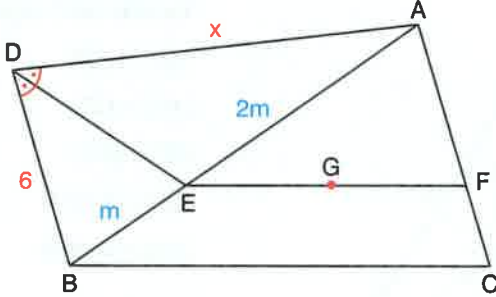
Yukarıdaki verilere göre, |AD|=x kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Çözüm:



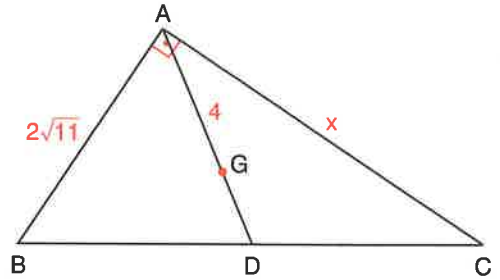
G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi ve $[EF] \parallel [BC]$ olduğundan, $|BE|=m$ dersek $|AE|=2m$ olur.

$\triangle ADB$ nde iç açıortay teoreminden,

$$\frac{|BE|}{|EA|} = \frac{|DB|}{|DA|} \Rightarrow \frac{m}{2m} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 35:

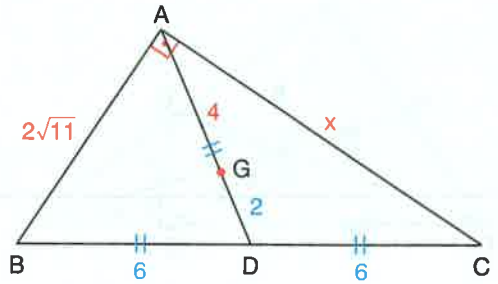


G, ABC nin ağırlık merkezi, $[AB] \perp [AC]$, $|AG|=4$ birim
 $|AB|=2\sqrt{11}$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|=x$ kaç birimdir?

- A) 9 B) 10 C) $3\sqrt{5}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{6}$

Çözüm:



G, ABC dik üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan,
 $|AG|=4$ birim ise
 $|GD|=2$ birim olur.
 $|AD|=|BD|=|DC|$ olacağından, $|BD|=|DC|=6$ birimdir.
Dolayısıyla $|BC|=12$ birim olur.

$\triangle ABC$ nde pisagor bağıntısını kullanırsak;

$$(2\sqrt{11})^2 + x^2 = 12^2 \Rightarrow 44 + x^2 = 144$$

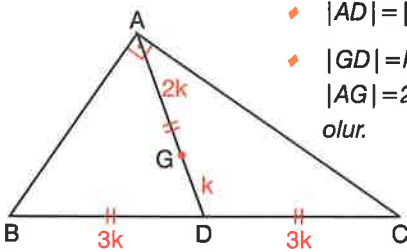
$$x^2 = 100$$

$$x = 10 \text{ birim bulunur.}$$

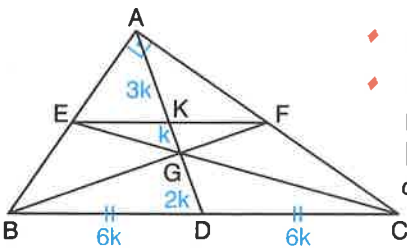
Doğru cevap "B" seçeneğidir.

! Dikkat

G, ABC dik üçgeninin ağırlık merkezi ise,



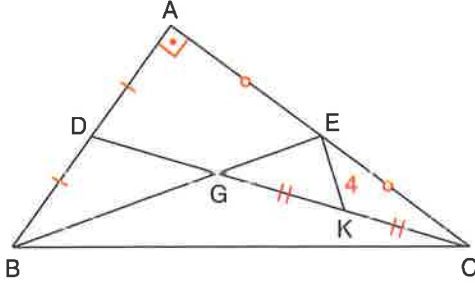
- ♦ $|AD|=|BD|=|DC|$
- ♦ $|GD|=k$ ise
 $|AG|=2k$, $|BD|=|DC|=3k$ olur.



- ♦ $|AD|=|BD|=|DC|$
- ♦ $|GK|=k$ ise
 $|AK|=3k$, $|GD|=2k$
 $|BD|=|DC|=6k$ olur.

ÜÇGENLER

Örnek 36:

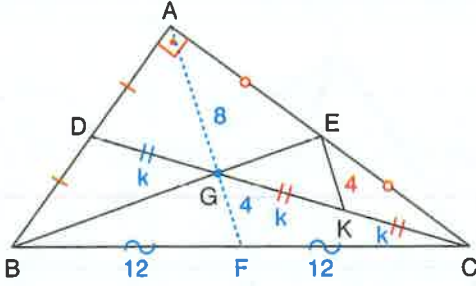


Yukarıdaki ABC dik üçgeninde, $|AD| = |BD|$, $|AE| = |EC|$
 $|GK| = |KC|$, $|EK| = 4$ birimdir.

Buna göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

Çözüm:



G, ABC nin ağırlık merkezidir.

G den geçen [AF] kenarortayını çizelim.

$|GK| = |KC| = k$ dersek $|DG| = k$ olur.

$|AG| // |EK|$ olacağından

[EK], [AG] nin orta tabanıdır.

$|AG| = 2 \cdot |EK| \Rightarrow |AG| = 2 \cdot 4 = 8$ birim olur.

$|AG| = 8$ birim ise $|GF| = 4$ birim ve

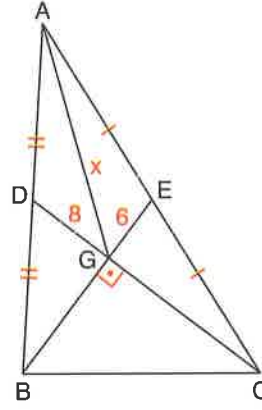
$|BF| = |FC| = |AF| = 12$ birim olur.

Dolayısıyla $|BC| = 12 + 12 = 24$ birimdir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Örnek 37:



Yandaki ABC üçgeninde

$$|AD| = |BD|$$

$$|AE| = |EC|$$

$$[BE] \perp [CD]$$

$$|EG| = 6 \text{ birim}$$

$$|DG| = 8 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, $|AG| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm:

[BE] ve [DC] kenarortay

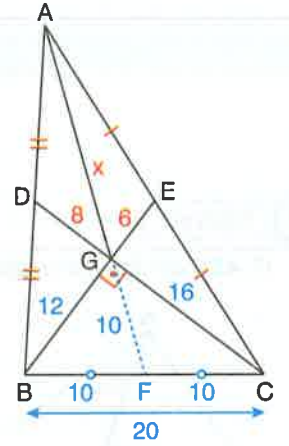
olduğundan,

G, ABC nin ağırlık merkezidir.

Dolayısıyla,

$$|BG| = 2 \cdot 6 = 12 \text{ birim}$$

$$|CG| = 2 \cdot 8 = 16 \text{ birim olur.}$$



[AF] kenarortayını çizersek BGC dik üçgeninde pisagor bağıntısından,

$$|BC|^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow |BC|^2 = 144 + 256$$

$$\Rightarrow |BC|^2 = 400$$

$$\Rightarrow |BC| = 20 \text{ birim bulunur.}$$

Buradan, $|BF| = |FC| = 10$ birim olacağından GBC dik üçgeninde $|GF| = 10$ birim olur.

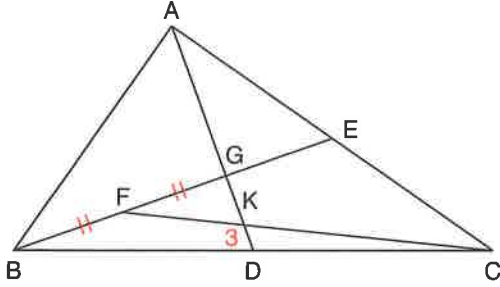
G, ABC nin ağırlık merkezi idi. Dolayısıyla,

$$|AG| = 2 \cdot |GF| \Rightarrow |AG| = 2 \cdot 10 = 20 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 38:

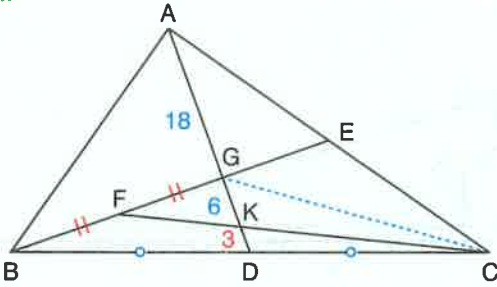


ABC üçgeninde, G ağırlık merkezi, $|BF| = |FG|$, $|KD| = 3$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD|$ kaç birimdir?

- A) 15 B) 18 C) 24 D) 27 E) 30

Çözüm:



G, ABC nin ağırlık merkezi olduğundan $[AD]$ kenarortaydır.

Yani, $|BD| = |DC|$ dir.

$[GC]$ yi çizerek BGC üçgeni oluşturalım.

BGC üçgeninde, $|BD| = |DC|$ ve $|BF| = |FG|$ olduğundan,

K noktası bu üçgenin ağırlık merkezi olur.

Dolayısıyla $|GK| = 2 \cdot |GD|$ olacağından

$|GK| = 2 \cdot 3 = 6$ birimdir.

Ayrıca G, ABC nin ağırlık merkezi olduğundan

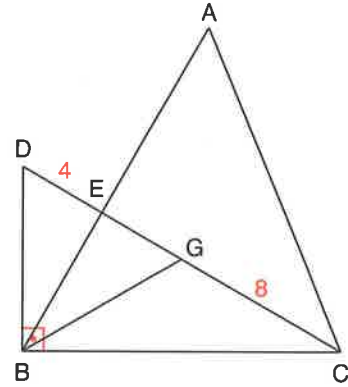
$|AG| = 2 \cdot |GD| \Rightarrow |AG| = 2 \cdot 9 = 18$ birimdir.

Buradan, $|AD| = 18 + 6 + 3 = 27$ birim olur.

Doğru cevap D seçeneğidir.

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

Örnek 39:



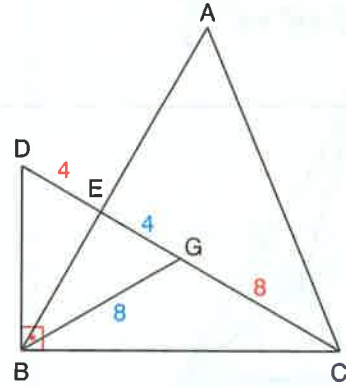
G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi, $[BD] \perp [BC]$, $|DE| = 4$ birim

$|GC| = 8$ birimdir.

Buna göre, $|BG|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm:



G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan

$|GC| = 2 \cdot |GE| \Rightarrow 8 = 2 \cdot |GE| \Rightarrow |GE| = 4$ birimdir.

BDC dik üçgeninde $|DG| = |GC| = 8$ birim olduğundan

$|BG|$ hipotenüse ait kenarortaydır.

$|BG| = |GC| = |DG| \Rightarrow |BG| = 8$ birim bulunur.

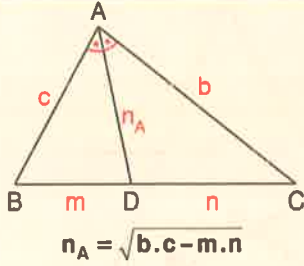
Doğru cevap B seçeneğidir.

ÜÇGENLER

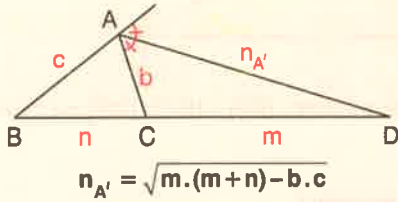
Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenarortay)

EKSTREM BİLGİLER

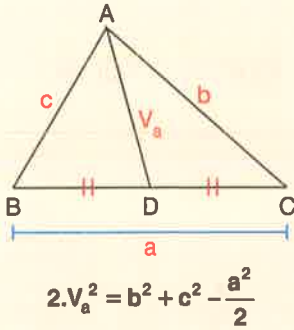
1.



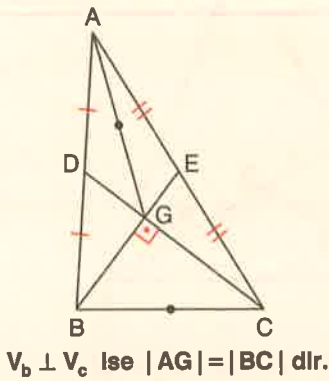
2.



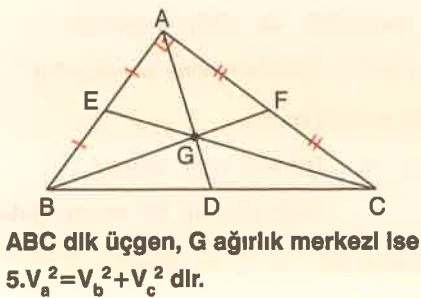
3.



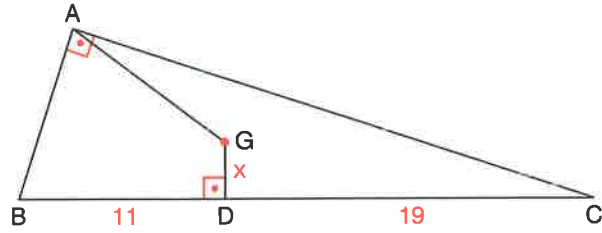
4.



5.



Örnek 40:



Yukarıdaki ABC dik üçgeninde, G ağırlık merkezi, $[GD] \perp [BC]$

$|BD| = 11$ birim, $|DC| = 19$ birimdir.

Buna göre, $|GD| = x$ kaç birimdir?

A) $2\sqrt{6}$

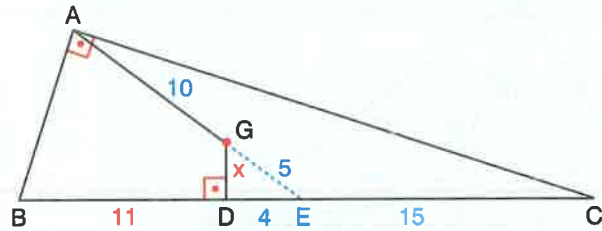
B) $3\sqrt{2}$

C) 3

D) 4

E) $2\sqrt{5}$

Çözüm:



ABC dik üçgeninde hipotenüse ait $[AE]$ kenarortayını çizelim.

$|BC| = 30$ birim olduğundan, $|BE| = |EC| = |AE| = 15$ birim olmalıdır.

Dolayısıyla $|DE| = 4$ birim ve $|AG| = 2 \cdot |GE|$ olduğundan, $|GE| = 5$ birim ve $|AG| = 10$ birim olur.

GDE üçgeninde pisagor bağıntısı kullanırsak,

$$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

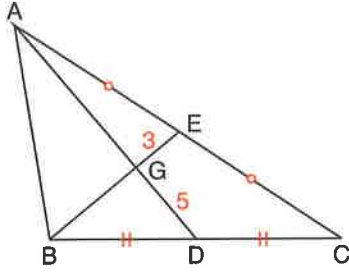
$$\Rightarrow x = 3 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (KENARORTAY)

Test : 06

1.

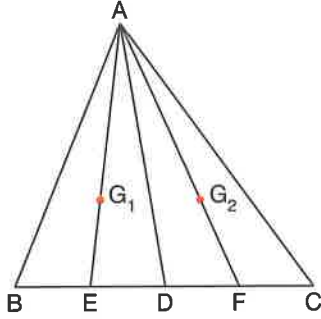


ABC üçgen, $|BD| = |CD|$, $|AE| = |EC|$, $|GE| = 3$ birim
 $|GD| = 5$ birimdir.

Buna göre, $|AD| + |BE|$ kaç birimdir?

- A) 18 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

2.

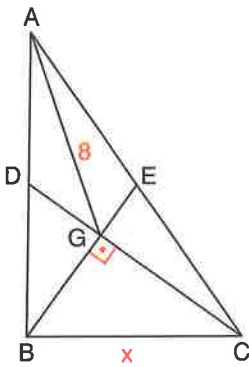


Yukarıdaki şekilde G_1 ABD üçgeninin, G_2 ADC üçgeninin
ağırlık merkezidir.

$|EF| = 6$ birim olduğuna göre, $|BC|$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

3.



G, ABC üçgeninin ağırlık
merkezi

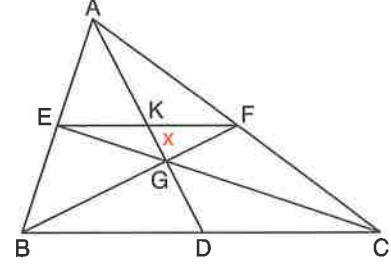
$[BE] \perp [CD]$

$|AG| = 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BC| = x$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

4.

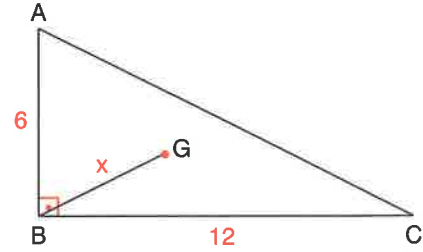


G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi, $|AD| = 18$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|KG| = x$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5.

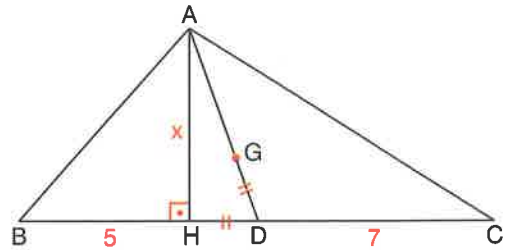


G, ABC dik üçgeninin ağırlık merkezi, $|AB| = 6$ birim
 $|BC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BG| = x$ kaç birimdir?

- A) $\sqrt{10}$ B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{2}$

6.



G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi, $[AH] \perp [BC]$

$|HD| = |GD|$, $|BH| = 5$ birim, $|CD| = 7$ birimdir.

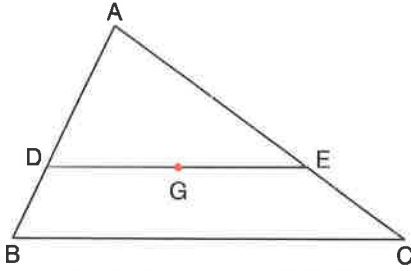
Buna göre, $|AH| = x$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (KENARORTAY)

Test : 06

7.



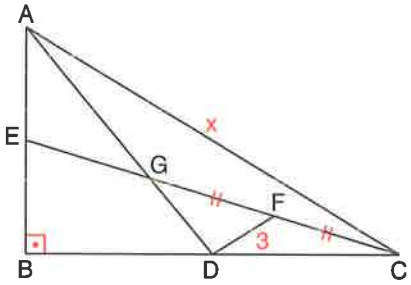
G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi, $[DE] \parallel [BC]$
 $|AB| + |AC| = 24$ birim

Buna göre, $|AD| + |AE|$ toplamı kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20



8.



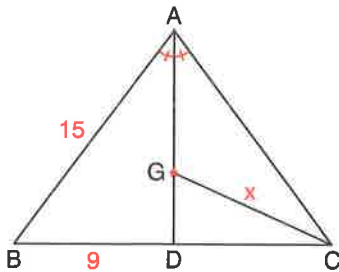
G, ABC dik üçgeninin ağırlık merkezi, $|GF| = |FC|$
 $|DF| = 3$ birimdir.

Buna göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) 18 B) 20 C) 21 D) 24 E) 27

www.bireyakademi.com

9.



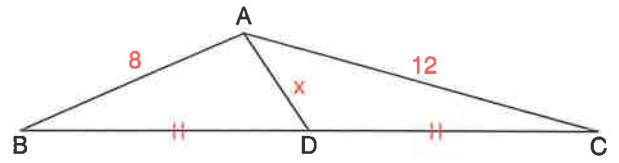
Yukarıdaki şekilde G, ABC nin ağırlık merkezi ve $[AD]$, A açısının iç açıortayıdır.

$|AB| = 15$ birim, $|BD| = 9$ birimdir.

Buna göre, $|GC| = x$ kaç birimdir?

- A) $\sqrt{97}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{21}$ D) $9\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

10.



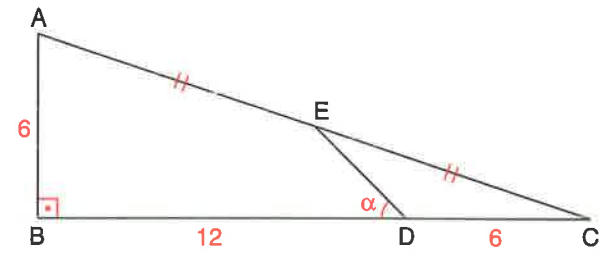
ABC üçgeninde, $|BD| = |DC|$, $|AB| = 8$ birim
 $|AC| = 12$ birim, $|AD| = x$ birimdir.

Buna göre, x in alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 17



11.



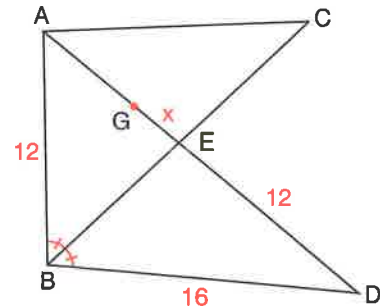
ABC dik üçgen, $|AE| = |EC|$, $|AB| = |CD| = 6$ birim
 $|BD| = 12$ birimdir.

Buna göre, $m(\widehat{BDE}) = \alpha$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 40 C) 45 D) 60 E) 75

www.bireyakademi.com

12.



Yukarıdaki şekilde G, ABC nin ağırlık merkezi ve $[BE]$, B açısının açıortayıdır.

$|AB| = |ED| = 12$ birim, $|BD| = 16$ birim

Buna göre, $|GE| = x$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

bryPLE

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

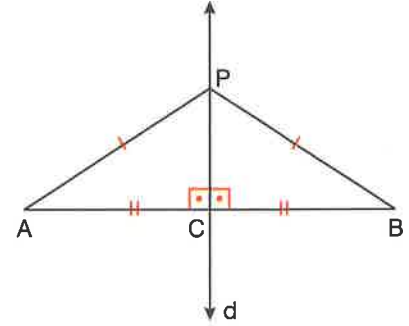
KENAR ORTA DİKME VE YÜKSEKLİKLER

A. ÜÇGENDE KENAR ORTA DİKME

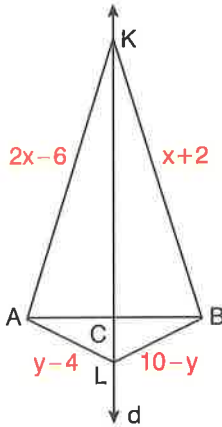
- ♦ Bir doğru parçasının orta dikme doğrusu, bu doğru parçasını iki eşit parçaya bölen ve doğru parçasına dik olan doğrudur.
- ♦ d doğrusu [AB] nin orta dikmesidir.
- ♦ Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta bu doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır.

Yani, $|PA| = |PB|$ dir. Ayrıca;

$\triangle PAC$ ile $\triangle PBC$ orta dikme doğrusuna göre simetrik iki eş üçgendir.



Örnek 41:



Yandaki şekilde d doğrusu [AB] nin orta dikme doğrusudur. d doğrusu üzerinde alınan K ve L noktaları ile AKBL dörtgeni çiziliyor.

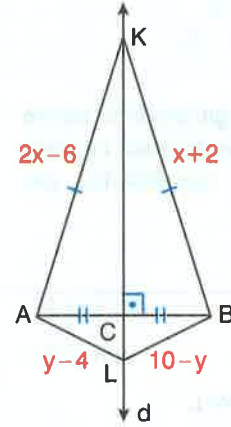
$|AK| = (2x-6)$ birim, $|BK| = (x+2)$ birim, $|AL| = (y-4)$ birim

$|BL| = (10-y)$ birim

Buna göre, AKBL dörtgeninin çevresi kaç birimdir?

- A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

Çözüm:



d doğrusu [AB] nin orta dikme doğrusu olduğundan $d \perp [AB]$ ve $|AC| = |BC|$ dir.

Ayrıca $\triangle AKB$ ile $\triangle ALB$ ikizkenar üçgenlerdir.

- $|AK| = |KB| \Rightarrow 2x-6 = x+2 \Rightarrow x=8$ birim
- $|AL| = |BL| \Rightarrow y-4 = 10-y \Rightarrow y=7$ birim olur.

$x=8$ ve $y=7$ değerleri AKBL dörtgeninde yerlerine yazılırsa,

$|AK| = |KB| = 10$ birim ve $|AL| = |LB| = 3$ birim olur.

Buradan, AKBL dörtgeninin çevresi $10+10+3+3 = 26$ birim bulunur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

İLK ADIM SORULARI

17.



Yukarıda noktalı kağıt üzerinde alınan $[AB]$ nin orta dikme doğrusu aşağıda verilen noktaların hangisinden geçer?

- A) P ve K B) K ve M
C) L ve P D) K ve N
E) M ve L

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

! Dikkat

Düzlemde alınan herhangi iki A ve B noktasına eşit uzaklıkta alınan bir nokta $[AB]$ nin orta dikme doğrusu üzerindedir.

Örnek 42:

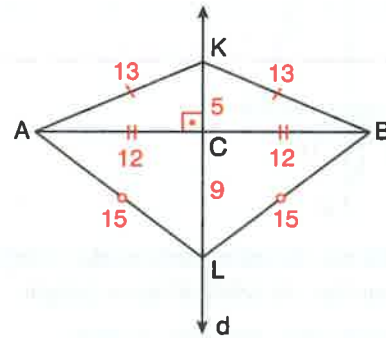
Merve matematik dersindeki bir etkinlik ödevini şu şekilde uyguluyor;

- $|AB| = 24$ cm olacak şekilde $[AB]$ çiziyor.
- A ve B noktalarına 13 cm uzaklıkta bir K noktası ve 15 cm uzaklıkta bir L noktası belirliyor.
- $[KL]$ yi çiziyor.

Buna göre, $|KL|$ nin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulalım.

Çözüm:

- $[KL]$ nin en büyük olabilmesi için K ve L noktaları $[AB]$ nin farklı iki tarafında olmalıdır. K ve L noktaları A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğundan $[AB]$ nin orta dikme doğrusu üzerinde olacaktır.



Dolayısıyla; $d \perp [AB]$, $|AC| = |BC| = 12$ cm

$|AK| = |KB| = 13$ cm ve

$|AL| = |LB| = 15$ cm olur.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

- AKC dik üçgeninde,

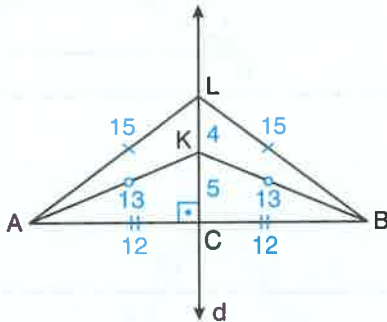
$$\begin{aligned} |KC|^2 + |AC|^2 &= |AK|^2 \Rightarrow |KC|^2 + 12^2 = 13^2 \\ &\Rightarrow |KC|^2 = 25 \\ &\Rightarrow |KC| = 5 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

- ACL dik üçgeninde,

$$\begin{aligned} |AC|^2 + |CL|^2 &= |AL|^2 \Rightarrow 12^2 + |CL|^2 = 15^2 \\ &\Rightarrow |CL|^2 = 81 \\ &\Rightarrow |CL| = 9 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

O halde, $|KL|$ en çok $5+9=14$ cm dir.

- $|KL|$ nin en küçük olabilmesi için K ve L nin $[AB]$ nin aynı tarafında olması gerekir.



- AKC dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$\begin{aligned} |KC|^2 + |AC|^2 &= |AK|^2 \Rightarrow |KC|^2 + 12^2 = 13^2 \\ &\Rightarrow |KC|^2 = 25 \\ &\Rightarrow |KC| = 5 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

- ACL dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

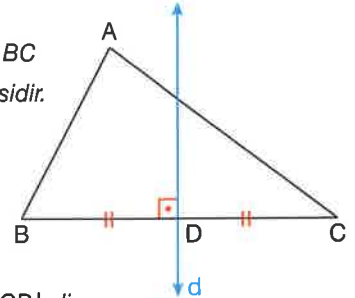
$$\begin{aligned} |AC|^2 + |CL|^2 &= |AL|^2 \Rightarrow 12^2 + |CL|^2 = 15^2 \\ &\Rightarrow |CL|^2 = 81 \\ &\Rightarrow |CL| = 9 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

O halde, $|KL|$ uzunluğu en az $9-5=4$ cm dir.

! Dikkat

Bir üçgende herhangi bir kenarın orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğruya **kenar orta dikme doğrusu** denir.

Yandaki şekilde d doğrusu BC kenarının kenar orta dikmesidir.



♦ $d \perp [BC]$ ve $|BD| = |CD|$ dir.

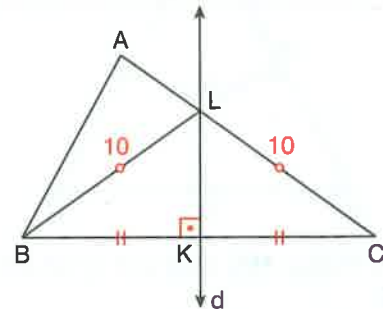
Örnek 43:

Bir ABC üçgeninde BC kenarına ait kenar orta dikme doğrusu $[BC]$ yi K noktasında, $[AC]$ yi ise L noktasında kesiyor.

$|CL| = 10$ birim olduğuna göre, $|BL|$ kaç birimdir?

- A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 15 E) 20

Çözüm:



ABC üçgeni çizerek BC kenarının kenar orta dikmesini belirleyelim. d doğrusunun $[BC]$ yi kestiği nokta K, $[AC]$ yi kestiği nokta L olduğundan $|CL| = 10$ birimdir. L noktası $[BC]$ nin orta dikme doğrusu üzerinde olduğundan $|BL| = |CL|$ olacaktır.

O halde, $|BL| = 10$ birimdir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

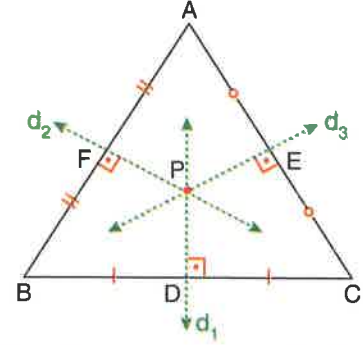
ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

! Dikkat

Herhangi bir üçgende tüm kenar orta dikmeler bir noktada kesişir.

- ♦ d_1 , $[BC]$ nin
- d_2 , $[AB]$ nin
- d_3 , $[AC]$ nin kenar orta dikmesidir.
- ♦ d_1 , d_2 ve d_3 doğruları P noktasında kesişmiştir.
- ♦ $|AF| = |FB|$, $|BD| = |DC|$ ve $|AE| = |EC|$ dir.
- ♦ $d_1 \perp [BC]$, $d_2 \perp [AB]$ ve $d_3 \perp [AC]$ dir.

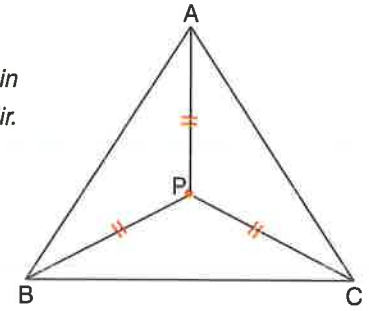


! Dikkat

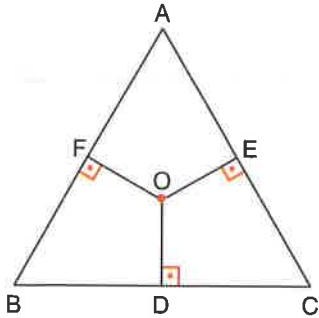
Herhangi bir üçgende,

- ♦ P noktası kenar orta dikmelerin kesim noktası ise P noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları birbirine eşittir.
- ♦ P , ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktası ise $|PA| = |PB| = |PC|$ dir.

Dolayısıyla, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ ve $\triangle PAC$ ikizkenar üçgenlerdir.



Örnek 44:

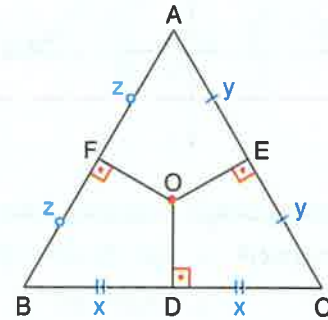


Yandaki şekilde O noktası ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

$|AF| + |BD| + |EC| = 18$ birim olduğuna göre, $\text{Çevre}(ABC)$ kaç birimdir?

- A) 54 B) 48 C) 45 D) 36 E) 24

Çözüm:



O noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktası olduğundan, $|BD| = |DC|$, $|CE| = |AE|$ ve $|AF| = |FB|$ dir.

Eşit kenar uzunluklarını x , y ve z ile gösterirsek

$$x + y + z = 18 \text{ birim} \Rightarrow \text{Çevre}(ABC) = 2x + 2y + 2z$$

$$= 2 \cdot (x + y + z)$$

$$= 2 \cdot 18$$

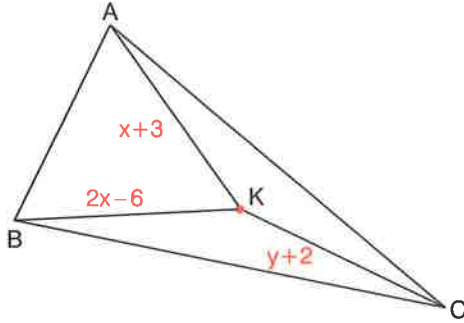
$$= 36 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 45:



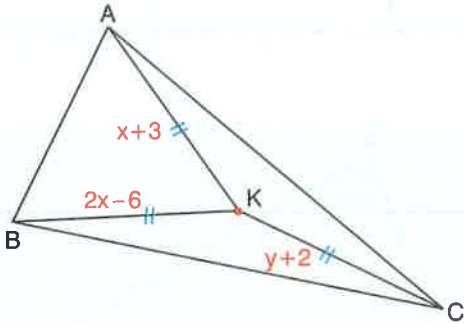
Yandaki şekilde K noktası ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

$|AK| = (x+3)$ birim, $|BK| = (2x-6)$ birim, $|CK| = (y+2)$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $x+y$ toplamı kaç birimdir?

- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Çözüm:



K noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktası olduğundan K noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır.

Yani; $|AK| = |BK| = |CK|$ dir. O halde,

$$x+3=2x-6=y+2 \Rightarrow x+3=2x-6 \text{ ve } 2x-6=y+2$$

$$x=9 \text{ birim} \quad 2 \cdot 9 - 6 = y+2$$

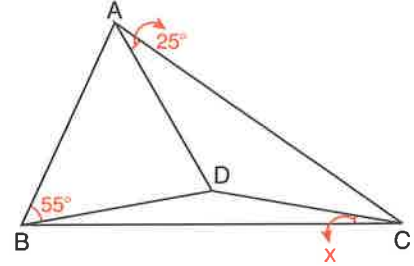
$$12 = y+2$$

$$y=10 \text{ birim olur.}$$

Buradan $x+y=9+10=19$ birimdir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 46:

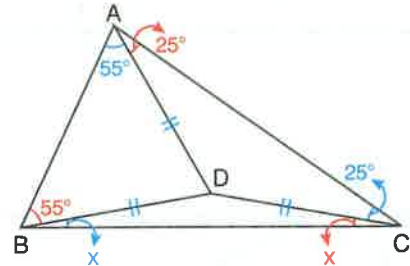


Yandaki şekilde D noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır. $m(\widehat{DAC})=25^\circ$, $m(\widehat{ABD})=55^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{BCD})=x$ kaç derecedir?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm:



D noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktası olduğundan, $|AD| = |BD| = |CD|$ dir.

$$|AD| = |BD| \Rightarrow m(\widehat{BAD})=55^\circ$$

$$|AD| = |CD| \Rightarrow m(\widehat{ACD})=25^\circ$$

$$|BD| = |CD| \Rightarrow m(\widehat{CBD})=x \text{ olacaktır.}$$

$\triangle ABC$ nin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$55^\circ + 55^\circ + 25^\circ + 25^\circ + x + x = 180^\circ$$

$$160^\circ + 2x = 180^\circ$$

$$2x = 20^\circ$$

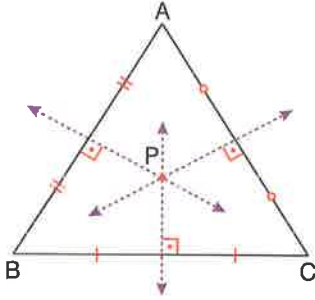
$$x = 10^\circ \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

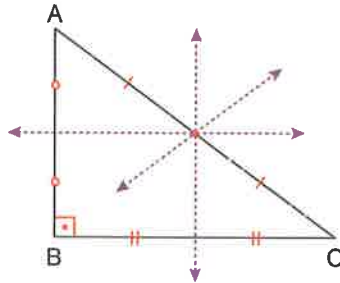
ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

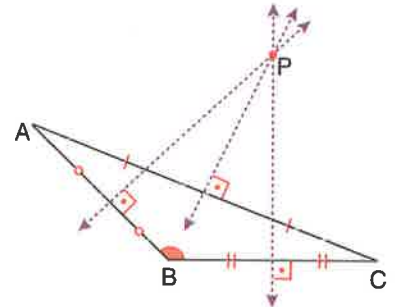
! Dikkat



- ♦ Dar açılı üçgenlerde kenar orta dikmeler üçgenin iç bölgesinde kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani, bir üçgenin kenar orta dikmeleri üçgenin iç bölgesinde kesişiyorsa bu üçgen dar açılı bir üçgendir.
- ♦ $\triangle ABC$ dar açılı ise P noktası üçgenin iç bölgesindedir.
- ♦ P noktası üçgenin iç bölgesinde ise $\triangle ABC$ dar açılı bir üçgendir.

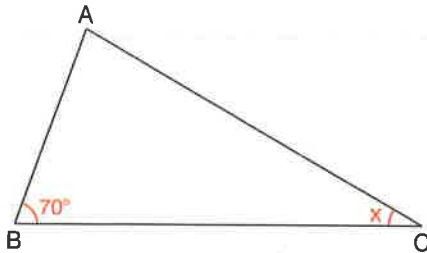


- ♦ Dik üçgenlerde kenar orta dikmeler üçgenin hiptenüsünün orta noktası üzerinde kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani, bir üçgenin kenar orta dikmeleri üçgenin bir kenarının orta noktası üzerinde kesişiyorsa bu üçgen dik üçgendir ve üzerinde kesiştikleri kenar dik üçgenin hiptenüsüdür.



- ♦ Geniş açılı üçgenlerde kenar orta dikmeler üçgenin dış bölgesinde kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani, bir üçgende kenar orta dikmeler üçgenin dış bölgesinde kesişiyorsa bu üçgen geniş açılı bir üçgendir.

Örnek 47:

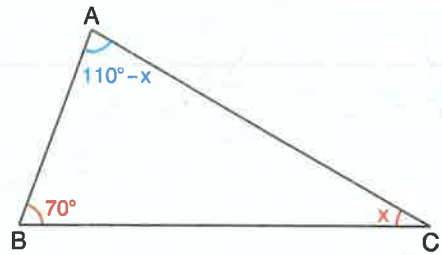


Yanda verilen ABC üçgeninde kenar orta dikmeler üçgenin iç bölgesinde kesişmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{ACB}) = x$ in en geniş değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(20^\circ, 50^\circ)$ B) $(55^\circ, 90^\circ)$ C) $(70^\circ, 90^\circ)$
D) $(20^\circ, 90^\circ)$ E) $(50^\circ, 70^\circ)$

Çözüm:



$\triangle ABC$ nde $m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = x$ olduğuna göre,
 $m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 70^\circ - x$
 $= 110^\circ - x$ olur.

$\triangle ABC$ nin kenar orta dikmeleri üçgenin iç bölgesinde kesiştiğine göre, üçgen dar açılı bir üçgendir.

Dolayısıyla, $x < 90^\circ$ ve $110^\circ - x < 90^\circ$ olacaktır.

$$110^\circ - x < 90^\circ \Rightarrow 20^\circ < x \text{ olur.}$$

$20^\circ < x$ ve $x < 90^\circ$ ise $20^\circ < x < 90^\circ$ dir.

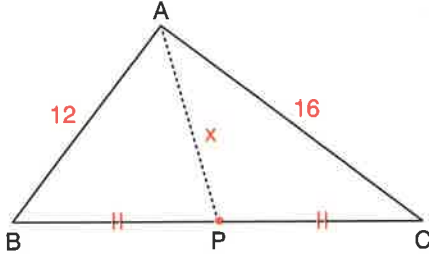
Buradan, x in en geniş değer aralığı $(20^\circ, 90^\circ)$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 48:



Yukarıdaki şekilde P noktası ABC nin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır. $P \in [BC]$, $|AB| = 12$ birim, $|AC| = 16$ birim

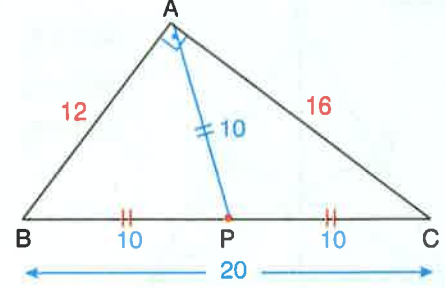
Yukarıdaki verilere göre, $|AP| = x$ kaç birimdir?

- A) 20 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8

Çözüm:

$\triangle ABC$ nin kenar orta dikmeleri $[BC]$ nin orta noktası olan P noktası üzerinde kesiştiğine göre, ABC üçgeni dik üçgendir ve $[BC]$ hipotenüstür.

Dolayısıyla $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ olur.



$\triangle ABC$ nde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$|BC|^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow |BC|^2 = 144 + 256$$

$$\Rightarrow |BC|^2 = 400$$

$$\Rightarrow |BC| = 20 \text{ birim olur.}$$

Dik üçgende hipotenüse ait kenar ortay uzunluğu hipotenüsün iki eş parçasının uzunluğuna eşit olacağından,

$$|AP| = |BP| = |PC| = \frac{20}{2} = 10 \text{ birim olur.}$$

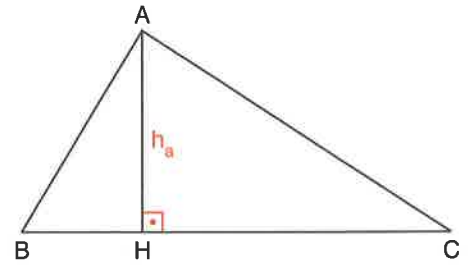
Buradan, $|AP| = x = 10$ birim olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

B. ÜÇGENDE YÜKSEKLİKLER

Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya bu kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasına o kenara ait **yükseklik** denir. Yüksekliğin kenarı kestiği noktaya **dikme ayağı** denir. Yandaki şekilde,

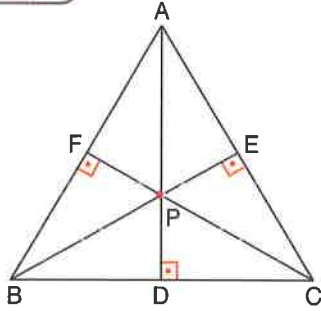
- ♦ $[AH] \perp [BC]$ dir.
- ♦ $[AH]$, $[BC]$ nin yüksekliğidir.
- ♦ H noktası $[BC]$ nin dikme ayağıdır.
- ♦ $|AH| = h_a$ ile gösterilir.



ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

! Dikkat

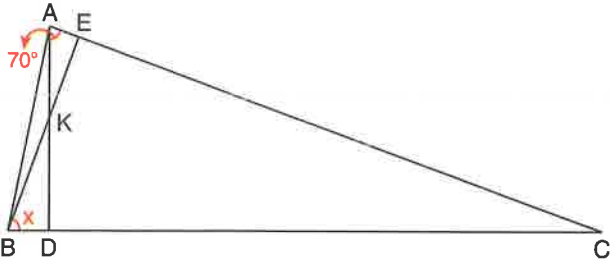


$$\begin{aligned} |AD| &= h_a \\ |BE| &= h_b \\ |CF| &= h_c \end{aligned}$$

Tüm üçgenlerde yükseklikler bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin "diklik merkezi" denir.

♦ P noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.

Örnek 49:

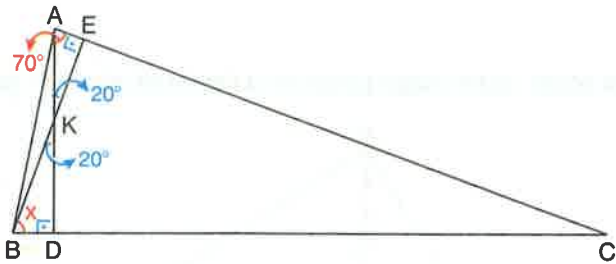


Yukarıdaki şekilde K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

$m(\widehat{DAC}) = 70^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{CBE}) = x$ kaç derecedir?

- A) 80 B) 70 C) 50 D) 40 E) 20

Çözüm:



K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezi olduğundan, $[AD] \perp [BC]$ ve $[BE] \perp [AC]$ dir. AEK dik üçgeninde, $m(\widehat{AKE}) = 20^\circ$ olur.

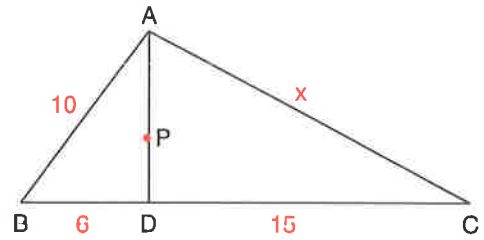
Ters açılardan eşitliğinden $m(\widehat{BKD}) = 20^\circ$ dir.

BDK dik üçgeninde,

$$x + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ \text{ dir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 50:



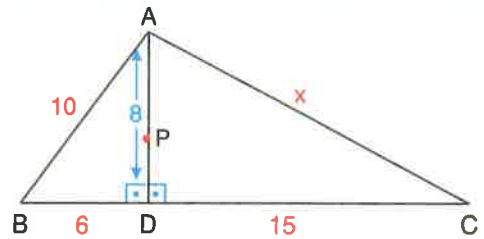
Şekilde P noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

$|AB| = 10$ birim, $|BD| = 6$ birim, $|DC| = 15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) 17 B) 18 C) 20 D) 23 E) 25

Çözüm:



P, ABC üçgeninin diklik merkezi olduğundan $[AD] \perp [BC]$ dir.

- ABD dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak;

$$|AD|^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow |AD| = 8 \text{ birim olur.}$$

- ADC üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak;

$$x^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = 64 + 225 \Rightarrow x^2 = 289 \Rightarrow x = 17 \text{ birim olur.}$$

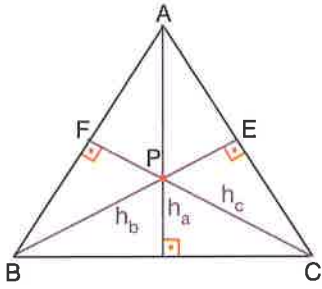
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

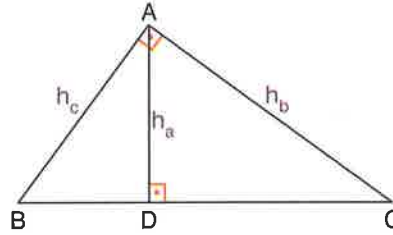
! Dikkat

- Dar açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin iç bölgesinde kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani, bir üçgende yükseklikler üçgenin iç bölgesinde kesişiyorsa bu üçgen dar açılı bir üçgendir.



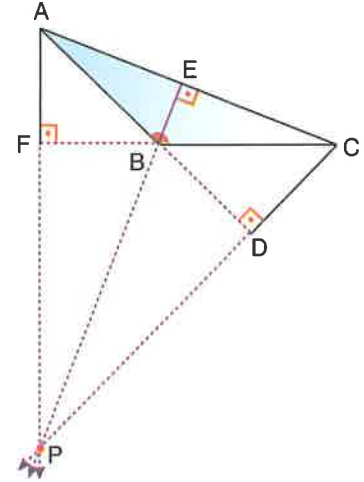
ABC dar açılı üçgen ise P üçgenin iç bölgesindedir.

- Dik üçgenlerde yükseklikler dik açının bulunduğu köşede kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani bir üçgende yükseklikler üçgenin bir köşesinde kesişiyorsa üçgen dik üçgendir ve bu köşe üçgenin dik köşesidir.

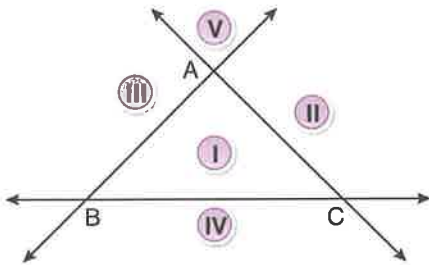


ABC dik üçgen ve $m(\hat{A}) = 90^\circ$ olduğundan A noktası diklik merkezidir.

- Geniş açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin dış bölgesinde ve geniş açının ters tarafında kesişir. Bunun karşısı da doğrudur. Yani, diklik merkezi üçgenin dış bölgesinde ise bu üçgen geniş açılı bir üçgendir.



Örnek 51:



Yukarıdaki şekilde ABC dar açılı bir üçgendir.

Buna göre, ABC üçgeninin diklik merkezi numaralandırılmış bölgelerden hangisidir?

- A) I B) II C) III D) IV E) V

Çözüm:

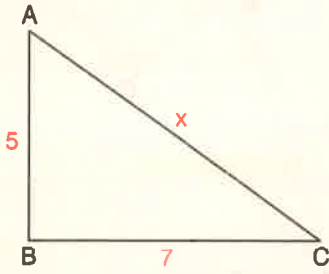
Dar açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin iç bölgesinde kesişeceğinden ABC üçgeninin diklik merkezi I numaralı bölgedir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

İLK ADIM SORULARI

18.



Yukarıdaki şekilde B noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.

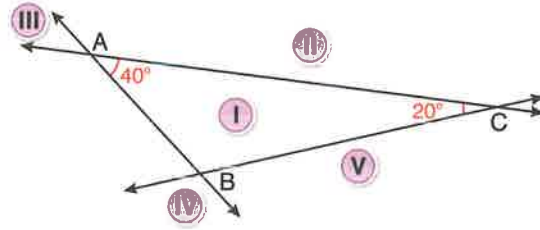
$|AB| = 5$ birim, $|BC| = 7$ birim

Buna göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) 10 B) $\sqrt{74}$ C) $2\sqrt{19}$
D) $3\sqrt{10}$ E) $4\sqrt{5}$

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 52:

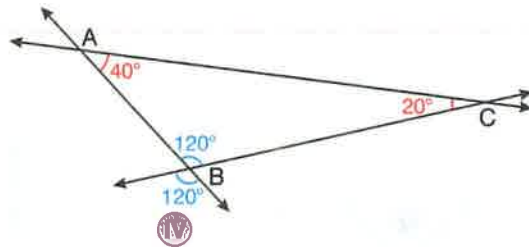


ABC üçgen, $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$

Yukarıdaki verilere göre, ABC üçgeninin diklik merkezi numaralandırılmış bölgelerden hangisidir?

- A) I B) II C) III D) IV E) V

Çözüm:



ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$ dir. ABC açısı geniş açı olduğundan diklik merkezi üçgenin dışında ve bu açının ters tarafındadır.

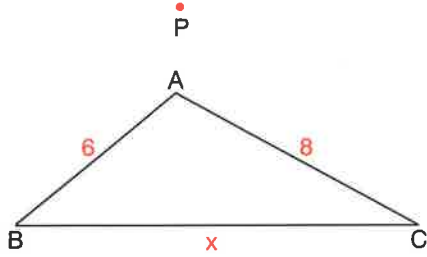
Yani diklik merkez IV numaralı bölgedir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 53:

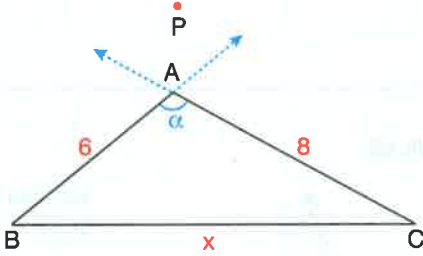


Yandaki şekilde P noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

$|AB| = 6$ birim, $|AC| = 8$ birim olduğuna göre, $|BC| = x$ in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm:



Geniş açılı üçgenlerde diklik merkezi üçgenin dışında ve geniş açının ters tarafında olacağından α açısı geniş açıdır.

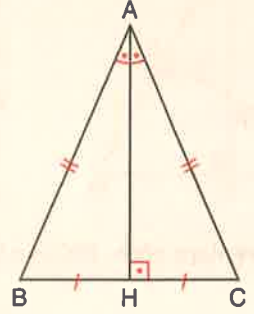
$\alpha > 90^\circ$ olduğundan üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sqrt{6^2 + 8^2} < x < 6 + 8 \Rightarrow 10 < x < 14 \text{ olur.}$$

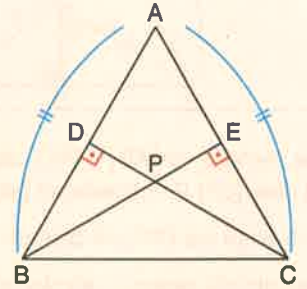
O halde, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 11 dir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER



- ♦ Bir ikizkenar üçgende farklı kenara alt yükseklik üçgenin simetri eksenidir.
- ♦ $|AB| = |AC|$
- ♦ $[AH] \perp [BC]$
- ♦ $|BH| = |HC|$
- ♦ $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH})$

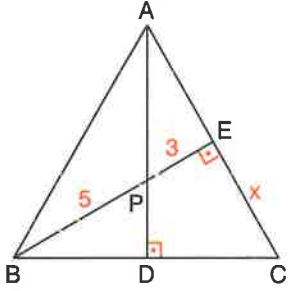


- ♦ İkizkenar üçgende eşit uzunluktaki kenarlara alt yükseklikler de eşit uzunluktadır. Yani, $|BE| = |CD|$ dir.
- Ayrıca;
- ♦ $|DP| = |PE|$ ve $|BP| = |CP|$
- ♦ $|AD| = |AE|$ ve $|BD| = |EC|$ eşitlikleri mevcuttur.
- ♦ P diklik merkezidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 54:



Yandaki şekilde ABC ikizkenar üçgendir.

$$|AB| = |AC|$$

$$[AD] \perp [BC]$$

$$[BE] \perp [AC]$$

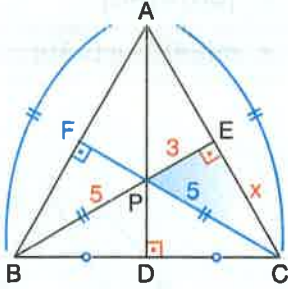
$$|BP| = 5 \text{ birim}$$

$$|PE| = 3 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

Çözüm:



P diklik merkezi ve $|AB| = |AC|$ olduğundan $[AB]$ nin yüksekliği olan $[CF]$ P noktasından geçer ve $|BP| = |PC|$ olur.

$|BP| = 5$ birim ise $|PC| = 5$ birimdir.

PEC üçgeninde pisagor bağıntısından,

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ birim olur.}$$

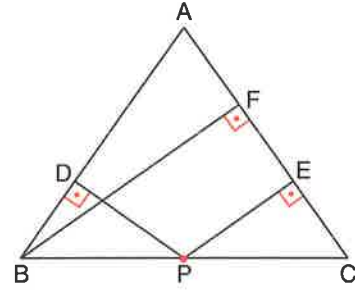
Doğru cevap "B" seçeneğidir.

! Dikkat

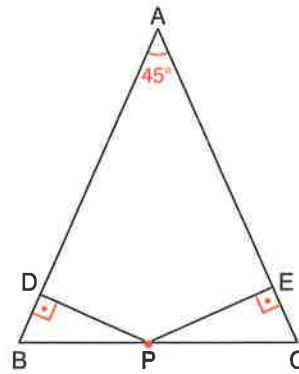
İkizkenar üçgende farklı kenar üzerinde alınan bir noktadan diğer kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı üçgenin eşit uzunluktaki kenarlarına ait olan yüksekliklerin her birinin uzunluğuna eşittir.

$$|AB| = |AC| \text{ ise}$$

$$|PD| + |PE| = |BF| \text{ dir.}$$



Örnek 55:



Yandaki şekilde ABC ikizkenar üçgendir.

$$|AB| = |AC|$$

$$[PD] \perp [AB]$$

$$[PE] \perp [AC]$$

$$m(\hat{A}) = 45^\circ$$

$$|PD| + |PE| = 6 \text{ birim}$$

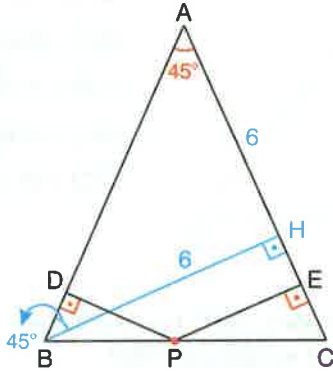
Yukarıdaki verilere göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Çözüm:



[AC] ye ait yükseklik [BH] olsun.

$|PD| + |PE| = |BH|$ olacağından $|BH| = 6$ birimdir.

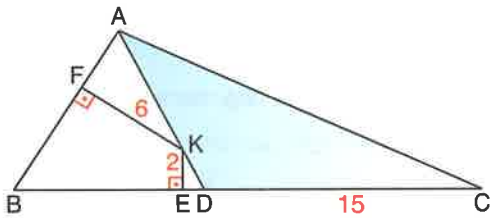
ABH ikizkenar dik üçgen olduğuna göre,

$$|AB|^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow |AB|^2 = 72$$

$$\Rightarrow |AB| = 6\sqrt{2} \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 56:

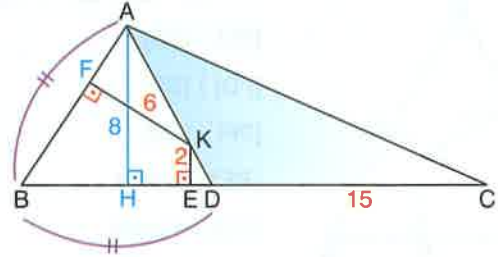


Yukarıdaki şekilde, $|AB| = |BD|$, $[KF] \perp [AB]$, $[KE] \perp [BD]$
 $|KF| = 6$ birim, $|KE| = 2$ birim, $|DC| = 15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\text{Alan}(\triangle ADC)$ kaç birimkaredir?

- A) 80 B) 75 C) 72 D) 60 E) 45

Çözüm:



ABD üçgeninde [AH] dikmesini çizelim. $|AB| = |BD|$ olduğundan

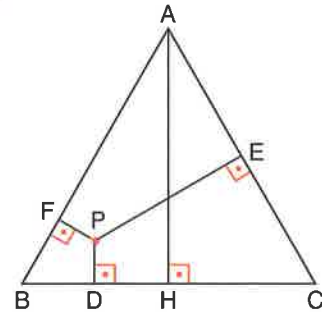
$$|KE| + |KF| = |AH| \text{ olur.}$$

O halde, $|AH| = 6 + 2 = 8$ birimdir.

$$\text{Buradan, } \text{Alan}(\triangle ADC) = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ birimkare olur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

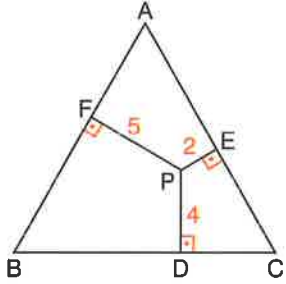


- ♦ Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.
- ♦ Eşkenar üçgenin tüm yükseklikleri birbirine eşittir.
- ♦ ABC eşkenar üçgen ise $|PD| + |PE| + |PF| = |AH|$ dir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

Örnek 57:



Yandaki ABC eşkenar üçgeninde
 $[PE] \perp [AC]$
 $[PD] \perp [BC]$
 $[PF] \perp [AB]$
 $|PE| = 2$ birim
 $|PD| = 4$ birim
 $|PF| = 5$ birim

Buna göre, ABC üçgeninin yüksekliği kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

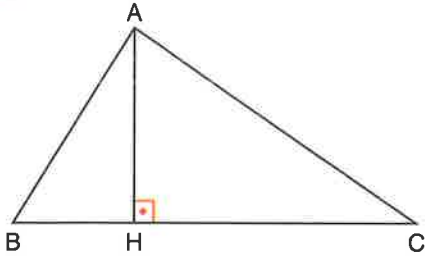
Çözüm:

P noktasından ABC eşkenar üçgeninin tüm kenarlarına dikmeler çizilmiştir. Bu dikmelerin toplamı eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.

O halde, ABC'nin yüksekliği $2+4+5=11$ birimdir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

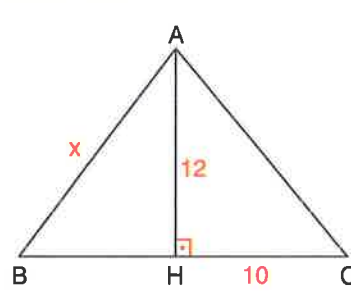
Dikkat



Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara çizilen dikme ayağı diğer iki açıdan büyük olana daha yakındır.

♦ $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ ise
 $|BH| < |HC|$ dir.

Örnek 58:

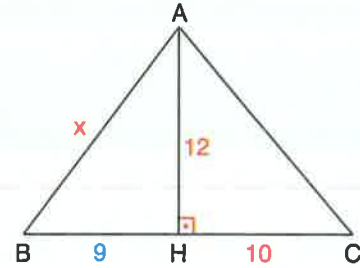


Yanda verilen $\triangle ABC$ nde
 $[AH] \perp [BC]$
 $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$
 $|AH| = 12$ birim
 $|HC| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|BH|$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri için $|AB| = x$ kaç birimdir?

- A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

Çözüm:



$[AH] \perp [BC]$ ve $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ olduğundan $|BH| < |HC|$ dir.

$|BH| < 10$ ise $|BH|$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 9 dur.

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$x^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 81 + 144$$

$$\Rightarrow x^2 = 225$$

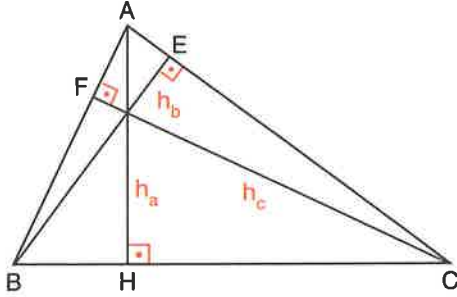
$$\Rightarrow x = 15 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

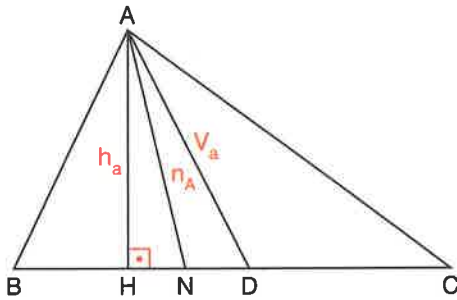
Üçgenin Yardımcı Elemanları (Kenar Orta Dikme ve Yükseklik)

! Dikkat



Herhangi bir çeşitkenar üçgende, üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarlara ait yüksekliklerin uzunlukları ters orantılıdır. Yani, büyük kenara ait yükseklik küçük kenara ait yükseklikten daha küçüktür.

- ♦ ABC üçgeninde
 $a > b > c \Rightarrow h_a < h_b < h_c$ dir.



Herhangi bir çeşitkenar üçgende bir köşeden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunlukları arasında $h < n < V$ bağıntısı vardır.

- ♦ ABC çeşitkenar üçgeninde
 $h_a < n_A < V_a$ dır.

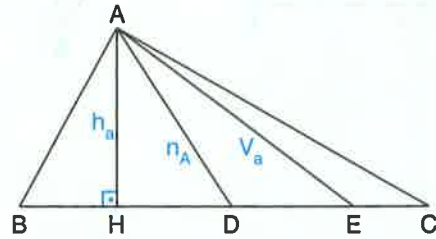
Örnek 59:

Bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik 6 birim, kenarortay 10 birimdir.

Buna göre, üçgenin A açısının iç açıortayının uzunluğu kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:



$h_a = 6$ birim, $V_a = 10$ birim olduğundan,

$h_a < n_A < V_a \Rightarrow 6 < n_A < 10$ olur.

Dolayısıyla, n_A nın alabileceği 7, 8 ve 9 olmak üzere 3 tam sayı değeri vardır.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgenin Yardımcı Elemanları

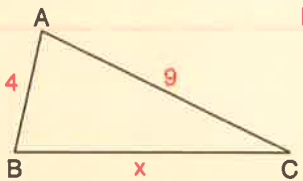
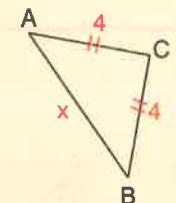
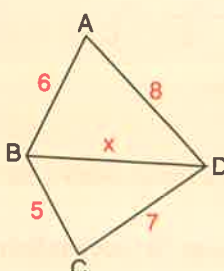
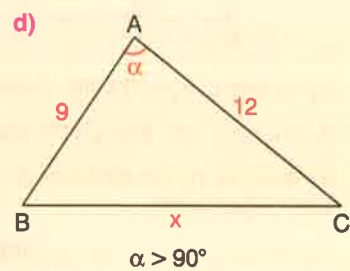
Etkinlik - 1

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanları "✓" ile yanlış olanları "X" ile işaretleyiniz.

- a) Üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir. ☐
- b) Üçgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamı 180° dir. ☐
- c) Tüm üçgenlerde iç açıortaylar üçgenin iç bölgesinde ☐
- d) Tüm üçgenlerde yükseklikler üçgenin iç bölgesinde ☐
- e) Tüm üçgenlerde kenarortaylar üçgenin iç bölgesinde ☐
- f) Dik üçgenlerde yükseklikler üçgenin dik olan köşesi ☐
- g) Dik üçgenlerde kenar orta dikmeler üçgenin hipo- ☐

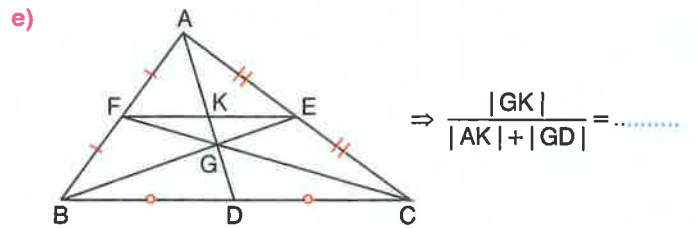
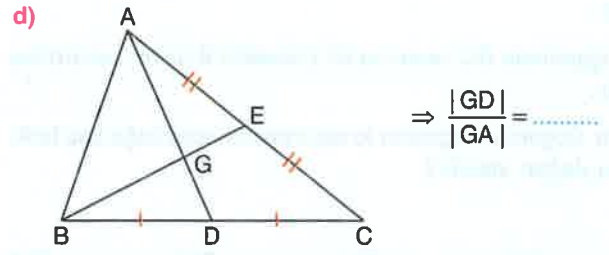
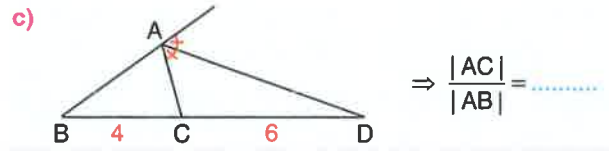
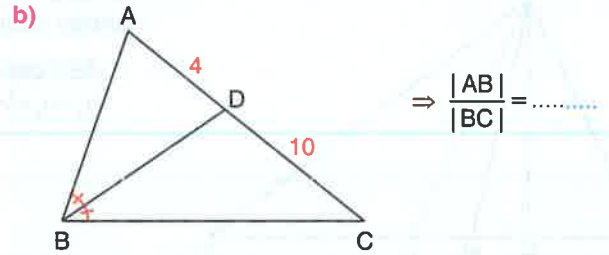
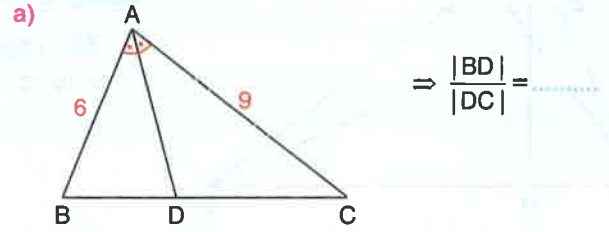
Etkinlik - 2

Aşağıda verilen üçgenlerde x in alabileceği farklı tam sayı değerlerini bulunuz.

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

Etkinlik - 3

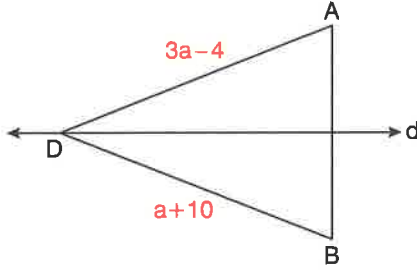
Aşağıdaki şekillerde istenilen oranları yazınız.



ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (KENAR ORTA DİKME VE YÜKSEKLİK)

Test : 07

1.

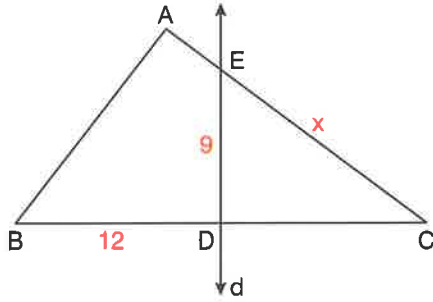


Yukarıdaki şekilde d doğrusu $[AB]$ nin orta dikme doğrusudur. $|AD| = 3a - 4$ birim, $|DB| = a + 10$ birim

Buna göre, a kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.

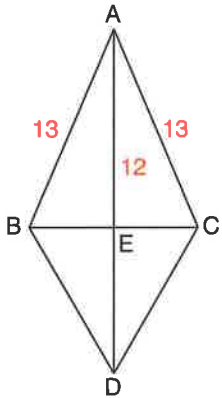


ABC üçgeninde d doğrusu $[BC]$ nin kenar orta dikmesidir. $|BD| = 12$ birim, $|DE| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 14 C) 15 D) 18 E) 20

3.



ABC üçgeninde $[AD]$, BC kenarının kenar orta dikmesidir.

$$|BC| = |CD|$$

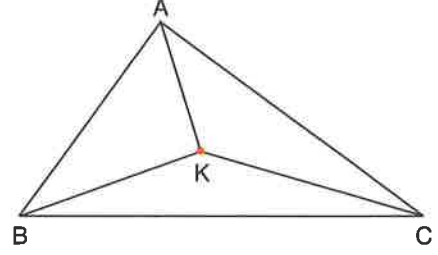
$$|AE| = 12 \text{ birim}$$

$$|AB| = |AC| = 13 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, $\text{Çevre}(BDC)$ kaç birimdir?

- A) 30 B) 32 C) 35 D) 36 E) 42

4.

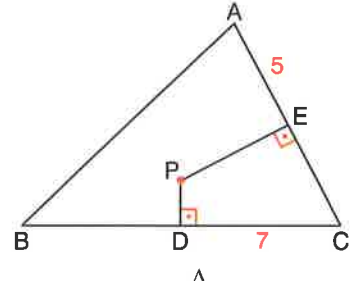


Yukarıdaki şekilde K noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmeleri-
nin kesim noktasıdır. $|AK| + |BK| + |CK| = 60$ birim

Buna göre, $|AK|$ kaç birimdir?

- A) 24 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

5.

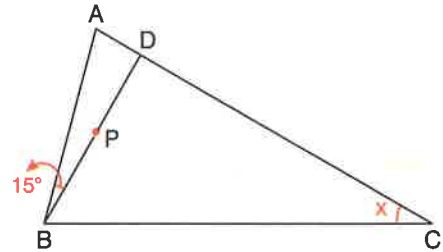


Yukarıdaki şekilde P noktası $\triangle ABC$ nin kenar orta dikmeleri-
nin kesim noktasıdır. $|AE| = 5$ birim, $|DC| = 7$ birim

Buna göre, $|AC| + |BC|$ toplamı kaç birimdir?

- A) 35 B) 32 C) 28 D) 24 E) 22

6.



Şekilde P noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

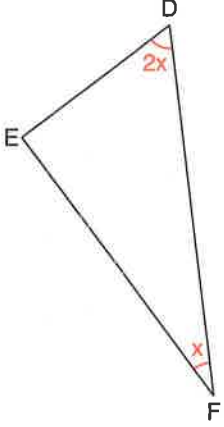
$$m(\widehat{ABD}) = 15^\circ, |AC| = |BC|$$

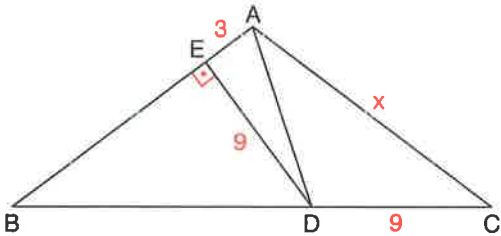
Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ACB}) = x$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 45

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI (KENAR ORTA DİKME VE YÜKSEKLİK)

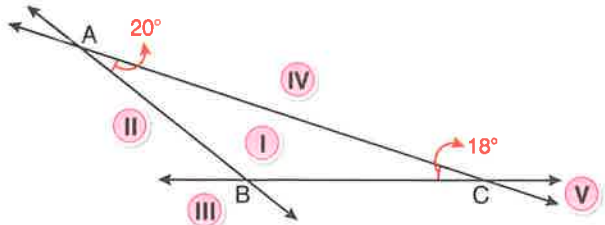
Test : 07

7. Yanda verilen DEF üçgeninde E noktası diklik merkezidir.
 $m(\widehat{DFE}) = x$
 $m(\widehat{EDF}) = 2x$
 Buna göre, x kaç derecedir?
- 
- A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

8. ABC üçgen, $|AB| = |BD|$, $[DE] \perp [AB]$, $|AE| = 3$ birim
 $|ED| = |CD| = 9$ birim
- 
- Yukarıdaki verilere göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

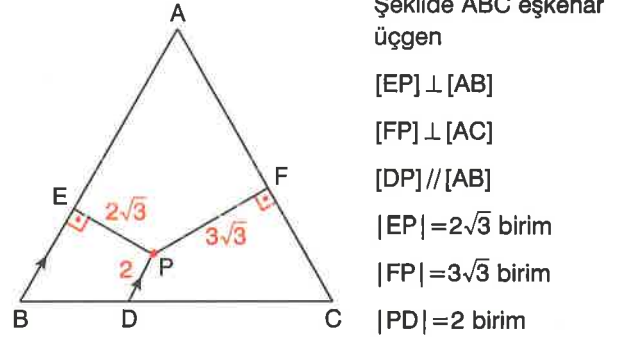
- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 20

www.bireyakademi.com

9. ABC üçgen, $m(\widehat{BAC}) = 20^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 18^\circ$
- 
- Yukarıdaki verilere göre, ABC'nin diklik merkezi numaralandırılmış bölgelerin hangisindedir?
- A) I B) II C) III D) IV E) V



10.

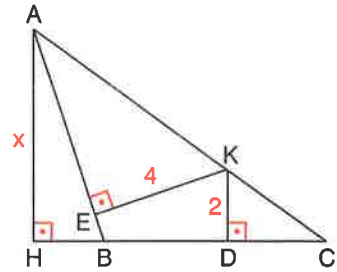


Buna göre, ABC üçgeninin yüksekliği kaç birimdir?

- A) $8\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 6 D) 8 E) 9

www.bireyakademi.com

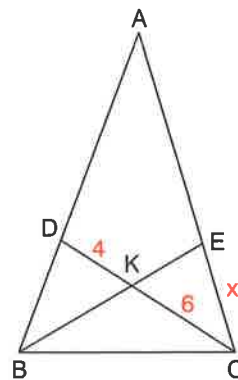
11.



Yukarıdaki verilere göre, $|AH| = x$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

12.



olduğuna göre, $|EC| = x$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{13}$

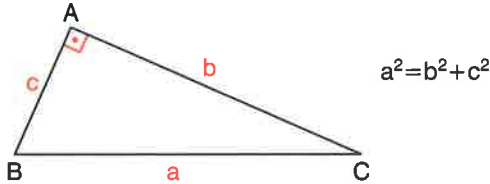
bryPLE

ÜÇGENLER

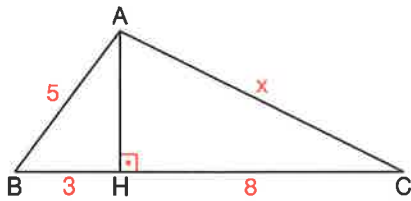
DİK ÜÇGEN

A. PİSAGOR TEOREMİ

Bir dik üçgende hipotenüs uzunluğunun karesi dik kenar uzunluklarının kareleri toplamına eşittir. Buna *Pisagor Teoremi* adı verilir.



Örnek 1:



Yandaki şekilde

$[AH] \perp [BC]$

$|AB| = 5$ birim

$|BH| = 3$ birim

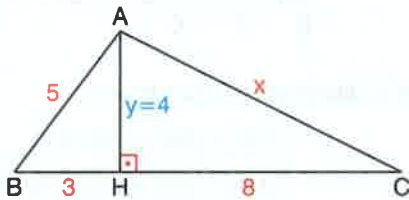
$|HC| = 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) $4\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$ D) 10 E) 12

Çözüm:

$|AH| = y$ dersek



- ABH üçgeninde,
 $5^2 = y^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = y^2 + 9$
 $\Rightarrow y^2 = 16$
 $\Rightarrow y = 4$ birim olur.
- AHC üçgeninde, $4^2 + 8^2 = x^2 \Rightarrow 16 + 64 = x^2$
 $\Rightarrow 80 = x^2$
 $\Rightarrow x = 4\sqrt{5}$ birim olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

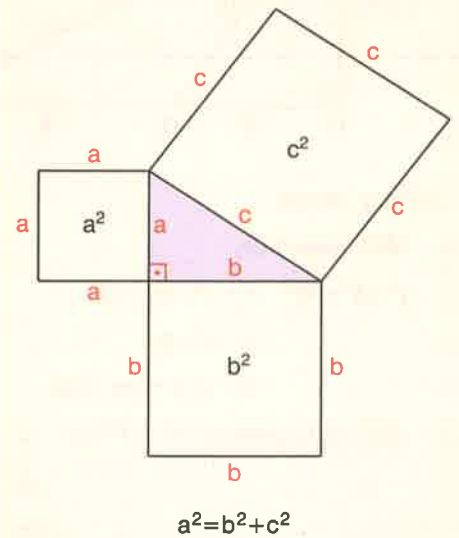
Dik Üçgen ve Trigonometri

EKSTREM BİLGİLER



Pisagor MÖ 580 – MÖ 500 tarihleri arasında yaşamış bir filozoftur. "Sayıların babası" olarak bilinir.

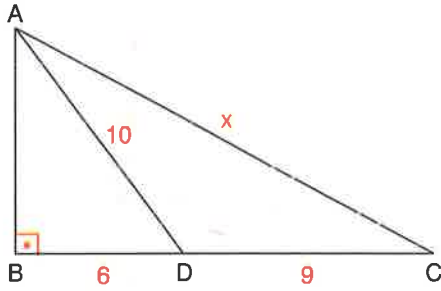
"Düzlemde bir dik üçgende, dik kenarlar üzerine kurulan karelerin alanları toplamı hipotenüs üzerine kurulan karenin alanına eşittir." Bu teoreme Pisagor Teoremi adı verilir.



Pisagor teoremi sayesinde irrasyonel sayılar bulunmuştur.

ÜÇGENLER

Örnek 2:

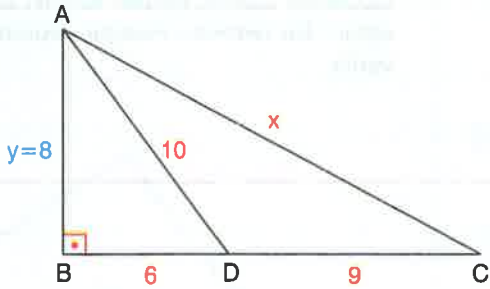


ABC dik üçgeninde
 $|AD| = 10$ birim
 $|BD| = 6$ birim
 $|CD| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 20 E) 25

Çözüm:



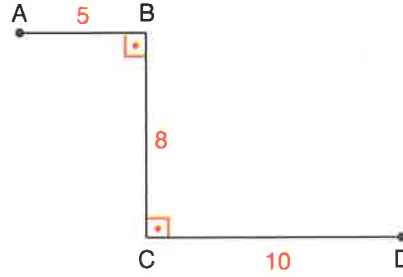
$|AB| = y$ dersek

- ABD üçgeninde,
 $y^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 + 36 = 100$
 $\Rightarrow y^2 = 64$
 $\Rightarrow y = 8$ birim olur.
- ABC dik üçgeninde, $8^2 + 15^2 = x^2 \Rightarrow 64 + 225 = x^2$
 $\Rightarrow 289 = x^2$
 $\Rightarrow x = 17$ birim olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 3:

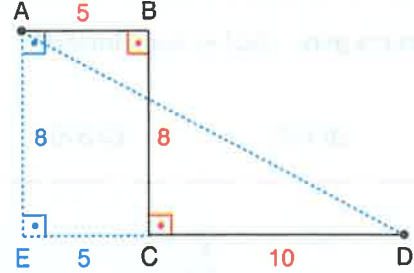


Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [BC]$
 $[BC] \perp [CD]$
 $|AB| = 5$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|CD| = 10$ birim

Buna göre, A ile D arasındaki **en kısa** uzaklık kaç birimdir?

- A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

Çözüm:



ABCE dikdörtgenini oluşturursak,

$$|EC| = |AB| = 5 \text{ birim}$$

$$|AE| = |BC| = 8 \text{ birim olur.}$$

AED dik üçgeninde pisagor teoreminden,

$$|AD|^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow |AD|^2 = 64 + 225$$

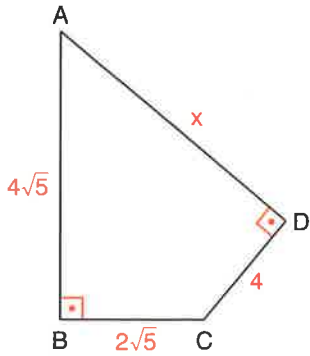
$$\Rightarrow |AD|^2 = 289$$

$$\Rightarrow |AD| = 17 \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 4:

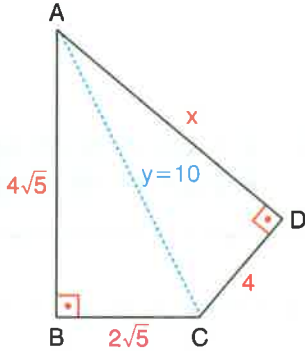


Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [BC]$
 $[AD] \perp [DC]$
 $|AB| = 4\sqrt{5}$ birim
 $|BC| = 2\sqrt{5}$ birim
 $|CD| = 4$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{21}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{6}$ D) 7 E) 9

Çözüm:

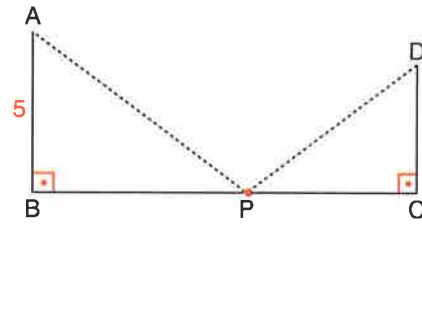


$|AC| = y$ dersek

- ABC üçgeninde pisagor teoreminden,
 $y^2 = (4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow y^2 = 80 + 20$
 $\Rightarrow y^2 = 100$
 $\Rightarrow y = 10$ birim olur.
- ADC dik üçgeninde pisagor teoreminden,
 $10^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow 100 = x^2 + 16$
 $\Rightarrow x^2 = 84$
 $\Rightarrow x = 2\sqrt{21}$ birim olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 5:

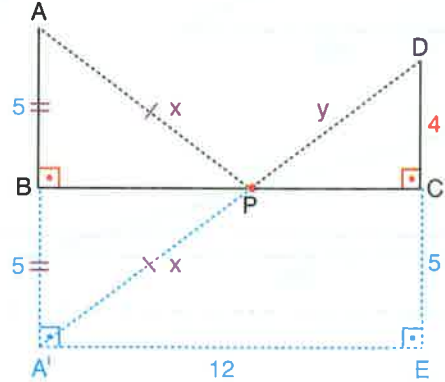


Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [BC]$
 $[DC] \perp [BC]$
 $P \in [BC]$
 $|AB| = 5$ birim
 $|CD| = 4$ birim
 $|BC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AP| + |PD|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaç birimdir?

- A) 21 B) 18 C) 16 D) 15 E) 14

Çözüm:



$|AP| = x$, $|PD| = y$ diyelim. A noktasının $[BC]$ ye göre simetrisi A' olsun. $A'BP$ üçgenini oluşturursak, $|A'B| = 5$ birim ve $|A'P| = x$ birim olur.

$x + y$ toplamının en küçük olabilmesi için A, P ve D noktalarının doğrusal olması gerekir.

$A'DE$ dik üçgenini çizersek,

$|EC| = |A'B| = 5$ birim ve $|A'E| = |BC| = 12$ birim olur.

$A'DE$ dik üçgeninde pisagor teoreminden

$$|A'D|^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow |A'D|^2 = 144 + 25 \Rightarrow |A'D| = \sqrt{169} = 13$$

$$\Rightarrow |A'D| = 13 \text{ birimdir.}$$

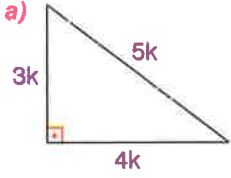
Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

! Dikkat

Kenar Uzunluklarına Göre Bazı Özel Üçgenler



♦ $3k - 4k - 5k$ üçgeni ($k \in \mathbb{R}^+$)

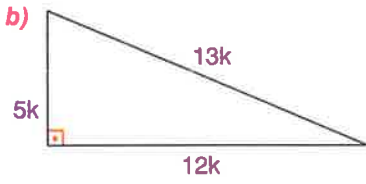
$k=1$ için $3 - 4 - 5$ üçgeni

$k=2$ için $6 - 8 - 10$ üçgeni

$k=3$ için $9 - 12 - 15$ üçgeni

$k=4$ için $12 - 16 - 20$ üçgeni

⋮ ⋮ ⋮



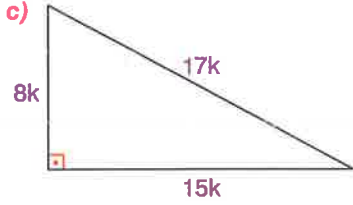
♦ $5k - 12k - 13k$ üçgeni ($k \in \mathbb{R}^+$)

$k=1$ için $5 - 12 - 13$ üçgeni

$k=2$ için $10 - 24 - 26$ üçgeni

$k=3$ için $15 - 36 - 39$ üçgeni

⋮ ⋮ ⋮

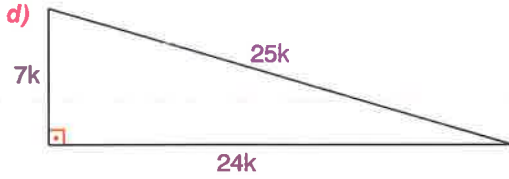


♦ $8k - 15k - 17k$ üçgeni ($k \in \mathbb{R}^+$)

$k=1$ için $8 - 15 - 17$ üçgeni

$k=2$ için $16 - 30 - 34$ üçgeni

⋮ ⋮ ⋮



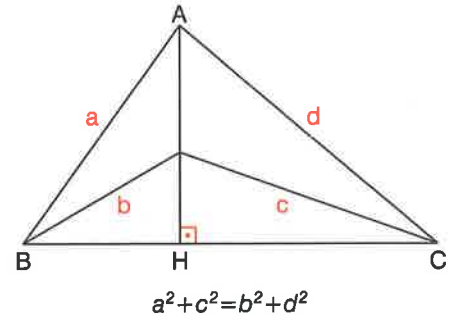
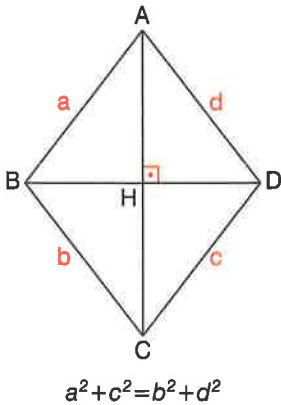
♦ $7k - 24k - 25k$ üçgeni ($k \in \mathbb{R}^+$)

$k=1$ için $7 - 24 - 25$ üçgeni

$k=2$ için $14 - 48 - 50$ üçgeni

⋮ ⋮ ⋮

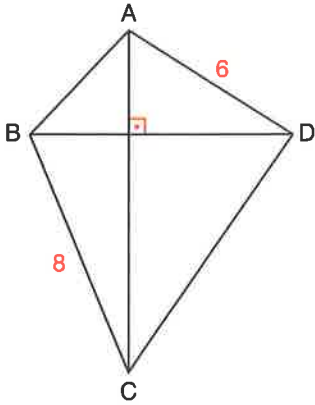
! Dikkat



ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 6:



Yandaki şekilde

$[AC] \perp [BD]$

$|CD| = 2 \cdot |AB|$

$|AD| = 6$ birim

$|BC| = 8$ birim

Buna göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$|AB| = x$ dersek $|CD| = 2x$ olur.

$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$ eşitliğinden

$$x^2 + (2x)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 64 + 36$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 20$$

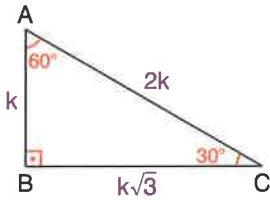
$$\Rightarrow x = 2\sqrt{5} \text{ birim bulunur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

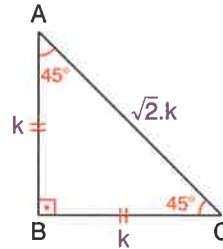
! Dikkat

Açılarına Göre Özel Üçgenler

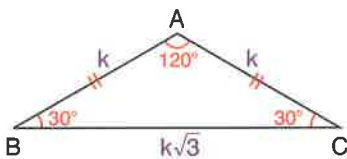
a) $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ Üçgeni



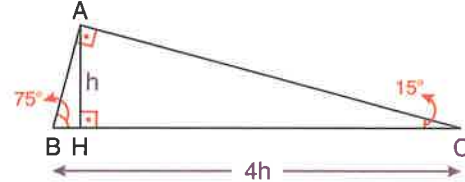
b) $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ Üçgeni



c) $30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ Üçgeni

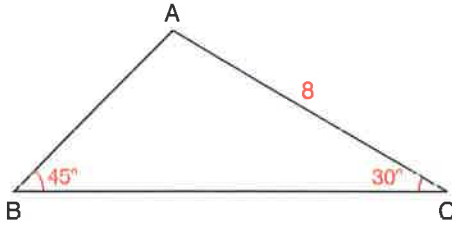


d) $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ Üçgeni



ÜÇGENLER

Örnek 7:

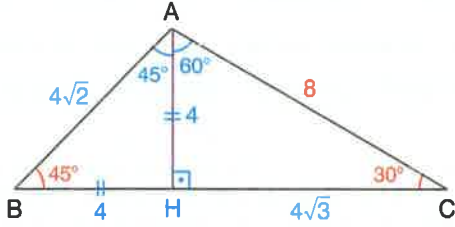


ABC üçgeninde
 $m(\hat{B}) = 45^\circ$
 $m(\hat{C}) = 30^\circ$
 $|AC| = 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 5

Çözüm:

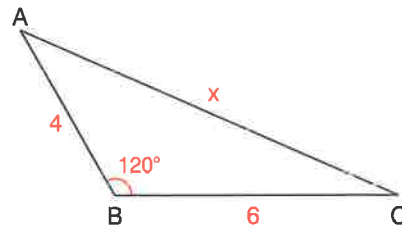


A dan $[BC]$ ye dikme indirelim.

- $\triangle AHC$, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan,
 $|AH| = 4$ birim ve $|HC| = 4\sqrt{3}$ birim olur.
- $\triangle AHB$, $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan,
 $|BH| = 4$ birim ve $|AB| = 4\sqrt{2}$ birim olur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 8:

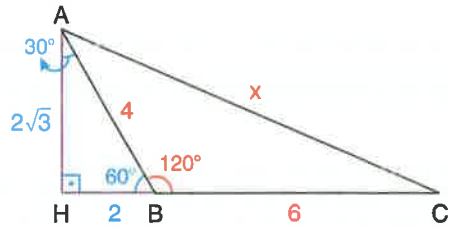


ABC üçgeninde
 $m(\hat{B}) = 120^\circ$
 $|AB| = 4$ birim
 $|BC| = 6$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC| = x$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{6}$ B) $5\sqrt{7}$ C) $4\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{19}$ E) $3\sqrt{11}$

Çözüm:



A dan $[BC]$ nin uzantısına $[AH]$ dikmesini çizersek $\triangle AHB$, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olur.

$|AB| = 4$ birim $\Rightarrow |BH| = 2$ birim ve $|AH| = 2\sqrt{3}$ birim olur.

$\triangle AHC$ dik üçgeninde pisagor teoreminden,

$$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 12 + 64 \Rightarrow x^2 = 76 \Rightarrow x = 2\sqrt{19} \text{ olur.}$$

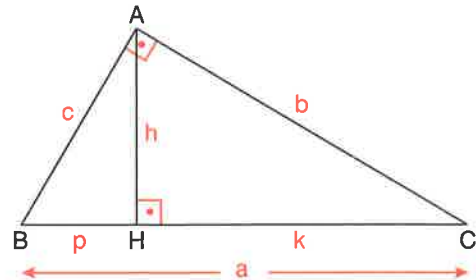
Doğru cevap "D" seçeneğidir.

B. ÖKLİD TEOREMİ

Bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden hipotenüse dikme çizilirse;

- $h^2 = p.k$
- $c^2 = p.a$
- $b^2 = k.a$
- $a.h = b.c$

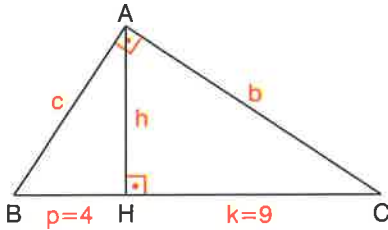
eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere *Öklid Teoremi* denir.



ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 9:

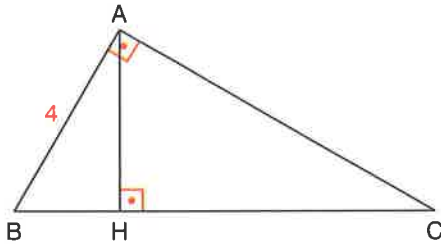


Yukarıdaki dik üçgende öklid teoremindeki eşitlikleri kullanarak b, c ve h değerlerini bulalım.

Çözüm:

- $h^2 = p \cdot k \Rightarrow h^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$
- $c^2 = p \cdot a \Rightarrow c^2 = 4 \cdot (4 + 9) \Rightarrow c^2 = 4 \cdot 13 \Rightarrow c = 2\sqrt{13}$
- $b^2 = k \cdot a \Rightarrow b^2 = 9 \cdot (9 + 4) \Rightarrow b^2 = 9 \cdot 13 \Rightarrow b = 3\sqrt{13}$ olur.

Örnek 10:



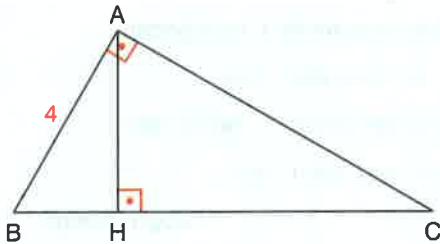
ABC dik üçgeninde
 $[AH] \perp [BC]$
 $|HC| = 3 \cdot |BH|$
 $|AB| = 4$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AH|$ kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{15}$ E) 2

Çözüm:

$|BH| = x$ dersek
 $|HC| = 3x$ olur.



Öklid teoreminin 2. eşitliğine göre,

$$4^2 = x \cdot (x + 3x) \Rightarrow 16 = x \cdot 4x \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2 \text{ olur.}$$

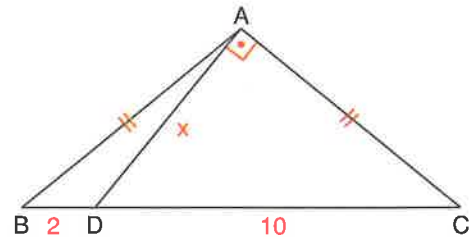
O halde, $|BH| = 2$ birim ve $|HC| = 6$ birimdir.

Öklid teoreminin 1. eşitliğine göre,

$$h^2 = p \cdot k \text{ den } h^2 = 2 \cdot 6 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 11:



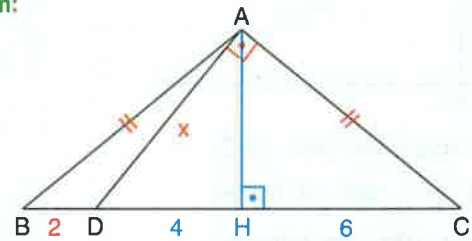
Yukarıdaki ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$, $[AD] \perp [DC]$

$|BD| = 2$ birim, $|DC| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?

- A) $5\sqrt{2}$ B) 8 C) 6 D) $3\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{10}$

Çözüm:



A noktasından $[BC]$ ye $[AH]$ dikmesini çizelim.

$\triangle ABC$ ikizkenar olduğundan $|BH| = |HC| = 6$ birim olacaktır.

Dolayısıyla $|DH| = 4$ birim olur.

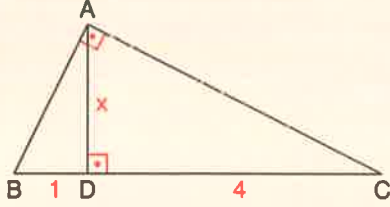
ADC dik üçgeninde öklid teoreminin 2. eşitliğine göre

$$x^2 = 4 \cdot (4 + 6) \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{10} \text{ birim olur.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

19.



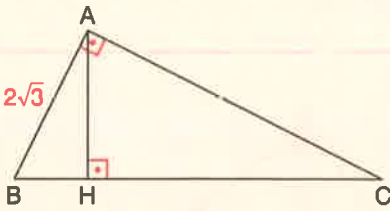
ABC dik üçgeninde, $[AD] \perp [BC]$

$|BD| = 1$ birim, $|CD| = 4$ birim

Buna göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

20.



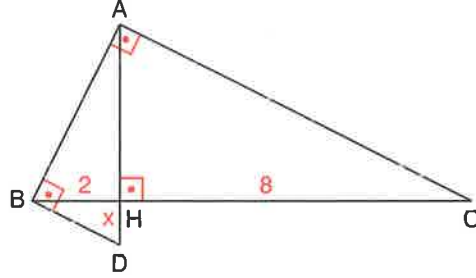
ABC dik üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$

$|HC| = 2 \cdot |BH|$, $|AB| = 2\sqrt{3}$ birim

Buna göre, $|BH|$ kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

Örnek 12:

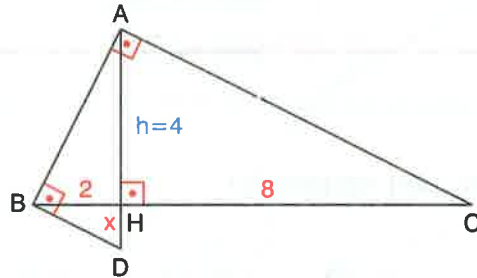


Şekilde ABC ve ABD dik üçgenler, $[AD] \perp [BC]$, $|BH| = 2$ birim, $|HC| = 8$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|HD| = x$ kaç birimdir?

- A) 0,8 B) 1 C) 1,5 D) 1,6 E) 2

Çözüm:



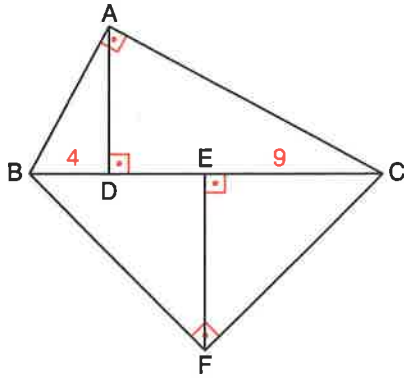
$|AH| = h$ dersek,

- ABC dik üçgeninde öklid teoreminin 1. eşitliğinden
 $h^2 = 2 \cdot 8 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ birim olur.
- ABD dik üçgeninde öklid teoreminin 1. eşitliğinden
 $2^2 = 4 \cdot x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$ birim olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Örnek 13:



Yandaki şekilde ABC ve BFC dik üçgenler

$[AD] \perp [BC]$

$[FE] \perp [BC]$

$|BD| = 4$ birim

$|EC| = 9$ birim

Buna göre, $\frac{|AB|}{|FC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{16}{81}$

Çözüm:

ABC dik üçgeninde öklid teoreminin 2. eşitliğinden,

$$|AB|^2 = |BD| \cdot |BC| \Rightarrow |AB|^2 = 4 \cdot |BC| \dots (1) \text{ olur.}$$

BFC dik üçgeninde öklid teoreminin 2. eşitliğinden,

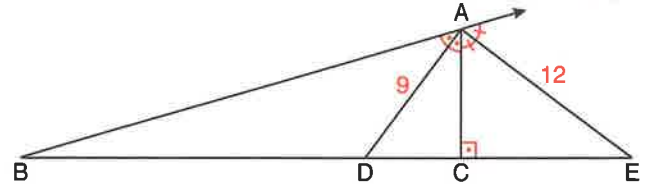
$$|FC|^2 = |CE| \cdot |BC| \Rightarrow |FC|^2 = 9 \cdot |BC| \dots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) numaralı ifadeler taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{|AB|^2}{|FC|^2} = \frac{4 \cdot |BC|}{9 \cdot |BC|} \Rightarrow \left(\frac{|AB|}{|FC|} \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{|AB|}{|FC|} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 14:

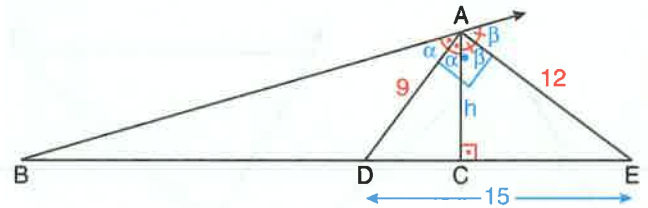


ABC dik üçgeninde $[AD]$, A açısının iç açıortayı, $[AE]$ ise dış açı ortayıdır. $|AD| = 9$ birim, $|AE| = 12$ birim

Buna göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) $\frac{25}{3}$ B) $\frac{36}{5}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{21}{4}$ E) 6

Çözüm:



Eş açılar α ve β ile gösterirsek,

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \text{ olur.}$$

O halde, $m(\widehat{DAE}) = 90^\circ$ dir. ADE dik üçgen olduğuna göre, pisagor teoreminden,

$$9^2 + 12^2 = |DE|^2 \Rightarrow |DE|^2 = 81 + 144$$

$$\Rightarrow |DE|^2 = 225$$

$$\Rightarrow |DE| = 15 \text{ birim olur.}$$

ADE dik üçgeninde öklid teoreminin 4. eşitliğinden;

$$15 \cdot h = 9 \cdot 12 \Rightarrow h = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5} \text{ bulunur.}$$

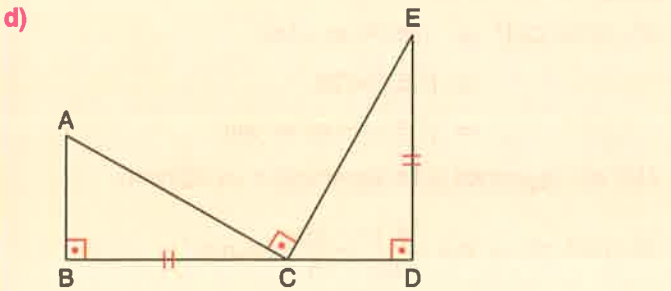
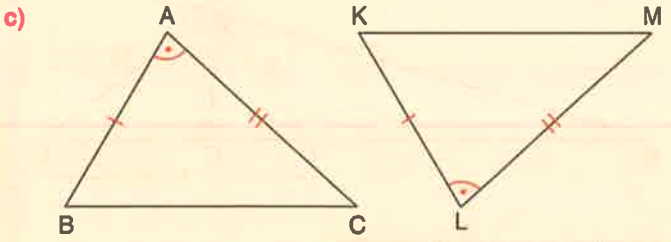
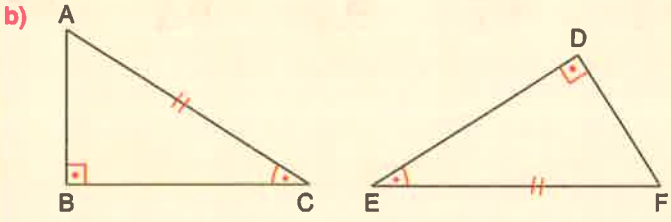
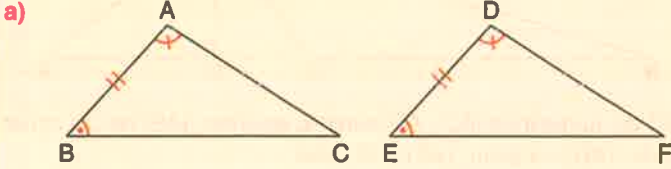
Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

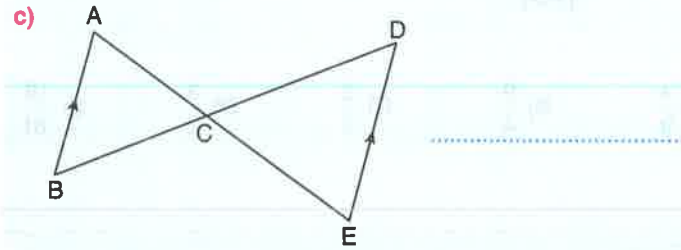
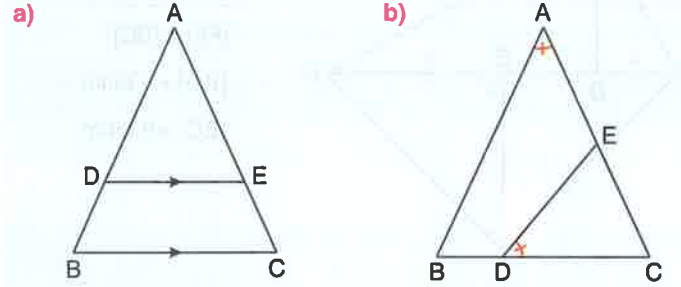
Etkinlik - 4

Aşağıda verilen üçgenlerdeki eşlikleri gösteriniz.

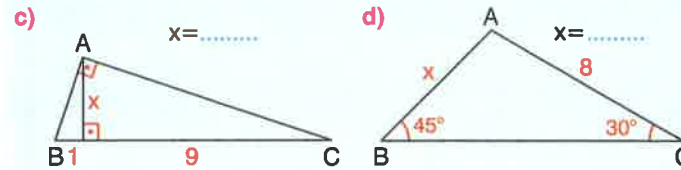
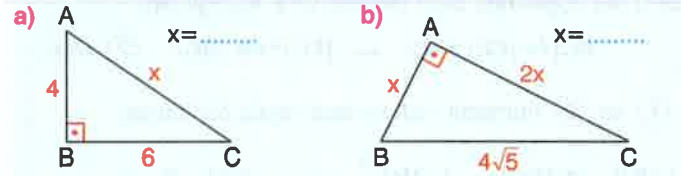


Etkinlik - 5

1. Aşağıda verilen üçgenlerdeki benzerlikleri gösteriniz.

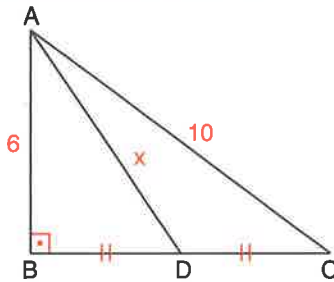


2. Aşağıda bilinmeyen uzunlukları bulunuz.

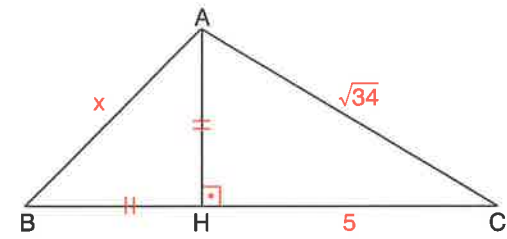


DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

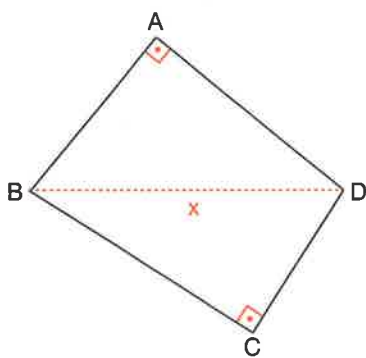
Test : 08

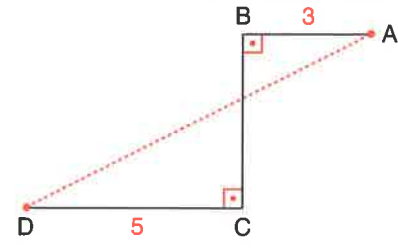
1.  ABC dik üçgeninde
 $|BD| = |DC|$
 $|AB| = 6$ birim
 $|AC| = 10$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?

A) $2\sqrt{13}$ B) $3\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{6}$ D) 7 E) 8

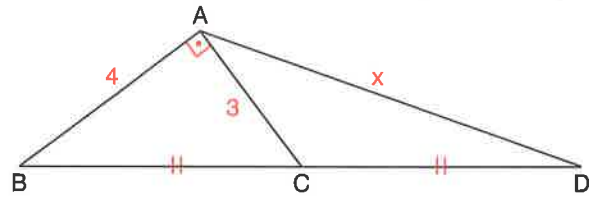
2.  Şekilde, $[AH] \perp [BC]$, $|AH| = |BH|$
 $|AC| = \sqrt{34}$ birim, $|HC| = 5$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AB| = x$ kaç birimdir?

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

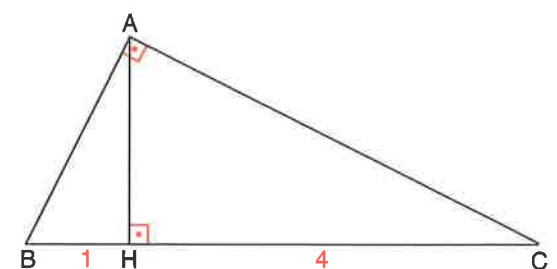
3.  Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [AD]$
 $[BC] \perp [CD]$
- $|AB|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 = 98$ birimkare olduğuna göre, $|BD| = x$ kaç birimdir?
- A) 6 B) 7 C) 8 D) $7\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

4.  Şekilde, $[AB] \perp [BC]$, $[DC] \perp [BC]$, $|AB| = 3$ birim
 $|BC| = 4$ birim, $|DC| = 5$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?
- A) 10 B) 8 C) $4\sqrt{5}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{6}$



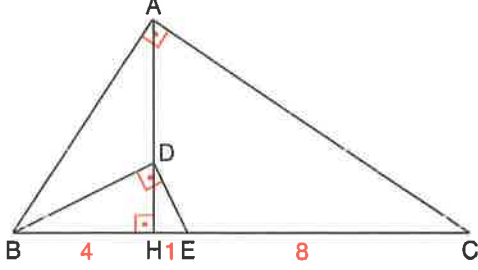
5.  Şekilde, $[BA] \perp [AC]$, $|BC| = |CD|$
 $|AB| = 4$ birim, $|AC| = 3$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?
- A) 5 B) 6 C) 7 D) $2\sqrt{13}$ E) $4\sqrt{7}$

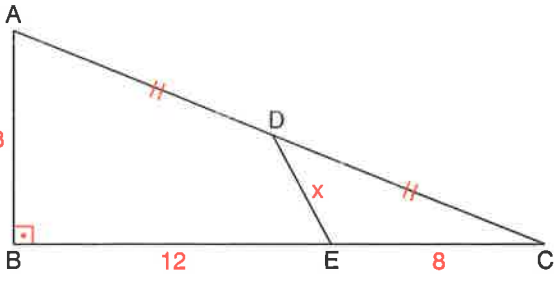
www.bireyakademi.com

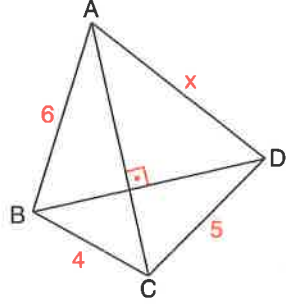
6.  ABC dik üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$, $|BH| = 1$ birim
 $|HC| = 4$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranı kaçtır?
- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{6}$

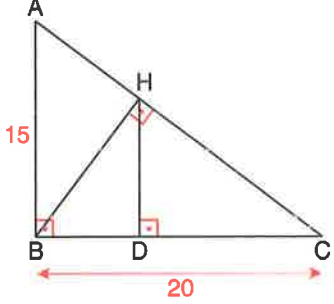
DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

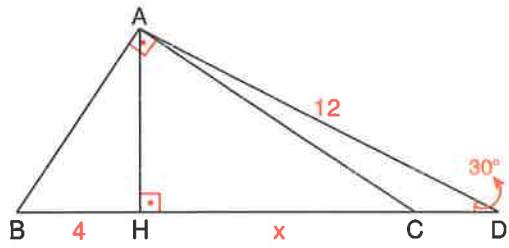
Test : 08

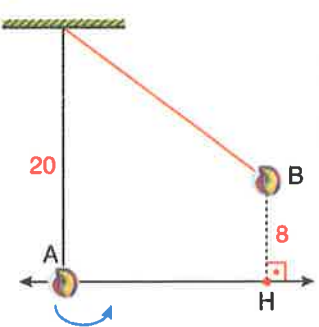
7. 
- ABC ve DBE dik üçgenlerinde, $[AH] \perp [BC]$, $|BH| = 4$ birim
 $|HE| = 1$ birim, $|EC| = 8$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

8. 
- ABC dik üçgeninde, $|AD| = |DC|$, $|AB| = |EC| = 8$ birim
 $|BE| = 12$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|ED| = x$ kaç birimdir?
- A) 5 B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{22}$

9. 
- Yandaki şekilde
 $[AC] \perp [BD]$
 $|AB| = 6$ birim
 $|BC| = 4$ birim
 $|DC| = 5$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|AD| = x$ kaç birimdir?
- A) $2\sqrt{11}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 7 D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{5}$

10. 
- ABC dik üçgeninde
 $[BH] \perp [AC]$
 $[HD] \perp [BC]$
 $|AB| = 15$ birim
 $|BC| = 20$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|BD| = x$ kaç birimdir?
- A) $\frac{36}{5}$ B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{40}{3}$ D) 8 E) 9

11. 
- ABC dik üçgeninde, $[AH] \perp [BD]$, $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$
 $|AD| = 12$ birim, $|BH| = 4$ birim
- Yukarıdaki verilere göre, $|HC| = x$ kaç birimdir?
- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

12. 
- Üst zemine bağlı olan 20 cm uzunluğundaki gergin bir teli ucunda bulunan bilye ok yönünde döndürülerek dikey konumdaki A noktasından 8 cm yukarıda bulunan B noktasına getiriliyor.
- Buna göre, $|AH|$ kaç cm dir?
- A) 20 B) 18 C) 17 D) 16 E) 12

www.bireyakademi.com

www.bireyakademi.com

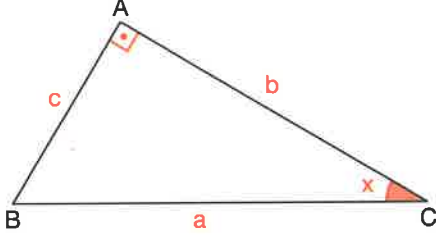
bryPLE

ÜÇGENLER

TRİGONOMETRİ

Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

ABC dik üçgeninde,



- ♦ $|BC|$, hipotenüs uzunluğu
- ♦ $|AB|$, x açısının karşı dik kenar uzunluğu
- ♦ $|AC|$, x açısının komşu dik kenar uzunluğudur.

ABC dik üçgeninde,

- ♦ x açısının sinüsü $\sin x$ ile gösterilir.

$$\sin x = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a} \text{ dir.}$$

- ♦ x açısının kosinüsü $\cos x$ ile gösterilir.

$$\cos x = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \text{ dir.}$$

- ♦ x açısının tanjantı $\tan x$ ile gösterilir.

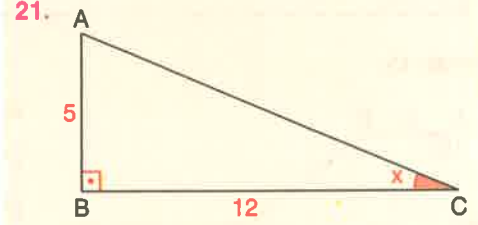
$$\tan x = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b} \text{ dir.}$$

- ♦ x açısının kotanjantı $\cot x$ ile gösterilir.

$$\cot x = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c} \text{ dir.}$$

Dik Üçgen ve Trigonometri

İLK ADIM SORULARI

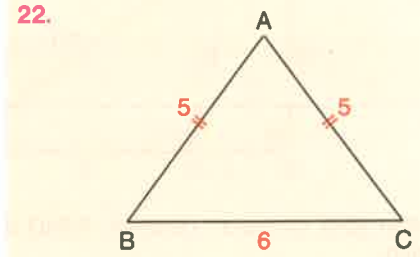


ABC dik üçgeninde, $|AB| = 5$ birim

$|BC| = 12$ birim

Buna göre, $m(\hat{C}) = x$ için $\sin x$, $\tan x$ değerleri kaçtır?

- A) $\frac{65}{12}$ B) $\frac{13}{12}$ C) $\frac{12}{13}$
D) $\frac{25}{144}$ E) $\frac{25}{156}$



ABC üçgeninde, $|AB| = |AC| = 5$ birim

$|BC| = 6$ birim

Buna göre, $\tan(\hat{ABC})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

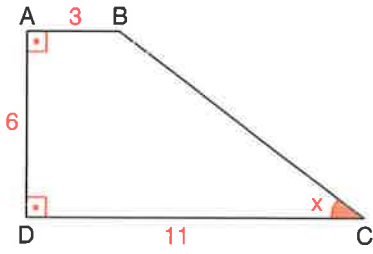
ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

! Dikkat

Trigonometrik oranlar dik üçgen yardımıyla hesaplanır. Trigonometrik oranı istenen açı bir dik üçgene ait değilse bu açığı içine alacak bir dik üçgen oluşturulması gerekir.

Örnek 15:



ABCD dik yamuğunda

$$|AB| = 3 \text{ birim}$$

$$|AD| = 6 \text{ birim}$$

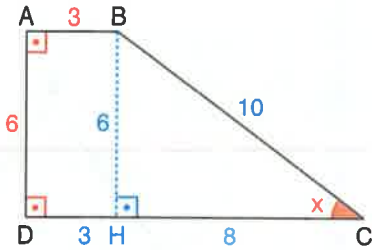
$$|DC| = 11 \text{ birim}$$

$$m(\widehat{BCD}) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, $\sin x \cdot \tan x$ çarpımı kaçtır?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{9}{20}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{15}{16}$

Çözüm:



Şekilde [BH] dikmesini çizersek, ABHD dikdörtgen olacağından,

$$|DH| = |AB| = 3 \text{ birim ve } |BH| = |AD| = 6 \text{ birimdir.}$$

Buradan, $|HC| = 11 - 3 = 8 \text{ birim}$ olur.

BHC dik üçgeninde pisagor bağıntısından,

$$|BC|^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow |BC|^2 = 100 \Rightarrow |BC| = 10 \text{ birim bulunur.}$$

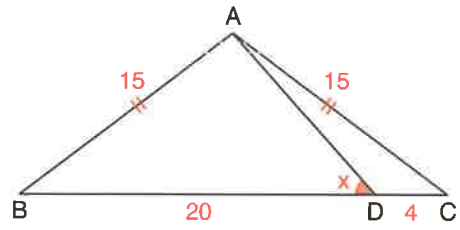
BHC dik üçgeninde x açısı için,

$$\sin x = \frac{|BH|}{|BC|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ ve } \tan x = \frac{|BH|}{|HC|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{olacağından, } \sin x \cdot \tan x = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20} \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 16:



Yandaki şekilde

$$|AB| = |AC| = 15 \text{ birim}$$

$$|BD| = 20 \text{ birim}$$

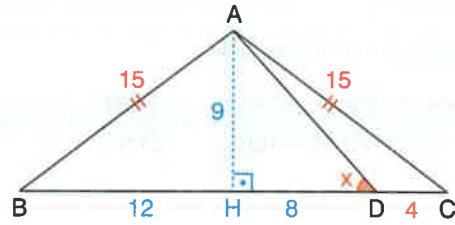
$$|DC| = 4 \text{ birim}$$

$$m(\widehat{ADB}) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, $\tan x + \cot x$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{124}{11}$ E) $\frac{145}{72}$

Çözüm:



ABC ikizkenar üçgen olduğundan [AH] dikmesini çizersek,

$$|BH| = |HC| = \frac{24}{2} = 12 \text{ birim olur.}$$

Dolayısıyla $|HD| = 12 - 4 = 8 \text{ birimdir.}$

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısından,

$$|AH|^2 + |BH|^2 = |AB|^2 \Rightarrow |AH|^2 + 12^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow |AH|^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Rightarrow |AH| = 9 \text{ birim bulunur.}$$

AHD dik üçgeninde x açısı için, $\tan x = \frac{|AH|}{|HD|} = \frac{9}{8}$ ve

$$\cot x = \frac{|HD|}{|AH|} = \frac{8}{9} \text{ olacağından } \tan x + \cot x = \frac{9}{8} + \frac{8}{9} = \frac{145}{72}$$

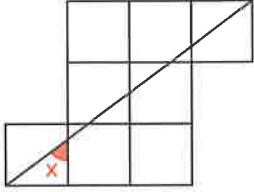
olur.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 17:

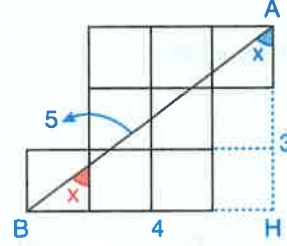


Birim karelerden oluşturulmuş yandaki şekilde verilen x açısı için $\sin x + \cot x$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{31}{20}$ B) $\frac{15}{8}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{35}{20}$

Çözüm:

Birim kareleri şekildeki gibi tamamlayarak ABH dik üçgenini oluşturalım.



$|AH| = 3$ birim ve
 $|BH| = 4$ birim
olmak üzere,

Pisagor bağıntısından

$$|AB|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |AB|^2 = 25 \Rightarrow |AB| = 5 \text{ birim olur.}$$

Yöndeş açılardan eşitliğinden $m(\widehat{BAH}) = x$ olacaktır.

ABH dik üçgeninde x açısı için,

$$\sin x = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{4}{5} \text{ ve } \cot x = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{3}{4} \text{ olacağından,}$$

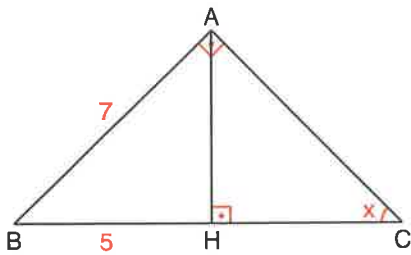
$$\sin x + \cot x = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} = \frac{31}{20} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

! Dikkat

- Birbirini 90° ye tamamlayan iki dar açıdan birinin sinüsü diğerinin cosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin cotanjantına eşittir. Yani, $x+y=90^\circ$ olmak üzere; $\sin x = \cos y$, $\cos x = \sin y$, $\tan x = \cot y$ ve $\cot x = \tan y$ dir.
- Bir açının sinüsünün karesi ile cosinüsünün karesinin toplamı 1 dir. Yani, x açısı için $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dir.
- Bir açının tanjantı ile cotanjantının çarpımı 1 dir. Yani, x açısı için $\tan x \cdot \cot x = 1$ dir.

Örnek 18:



ABC dik üçgeninde

$[AH] \perp [BC]$

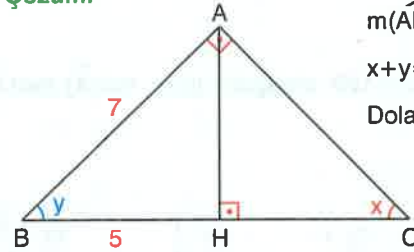
$|AB| = 7$ birim

$|BH| = 5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\sin x$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{49}{25}$ B) $\frac{25}{49}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{12}{35}$

Çözüm:



$m(\widehat{ABC}) = y$ dersek,
 $x+y=90^\circ$ olur.

Dolayısıyla $\sin x = \cos y$ dir.

O halde, ABH dik üçgeninde $\cos y = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{5}{7}$ olur.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 19:

$$\frac{\sin 10^\circ \cdot \cot 50^\circ}{\cos 80^\circ \cdot \tan 40^\circ} + \sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm:

$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$, $\cot 50^\circ = \tan 40^\circ$ ve $\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ = 1$ olduğundan,

$$\frac{\overbrace{\sin 10^\circ}^{\cos 80^\circ} \cdot \overbrace{\cot 50^\circ}^{\tan 40^\circ}}{\cos 80^\circ \cdot \tan 40^\circ} + \underbrace{\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ}_1 = \frac{\cos 80^\circ \cdot \tan 40^\circ}{\cos 80^\circ \cdot \tan 40^\circ} + 1$$

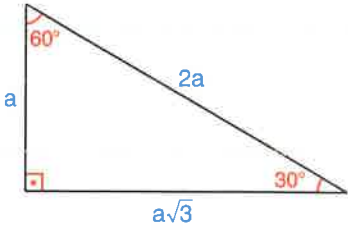
$$= 1 + 1$$

$$= 2 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

30°, 60° ve 45° nin Trigonometrik Oranları

30° - 60° - 90° ve 45° - 45° - 90° üçgenlerini çizelim.

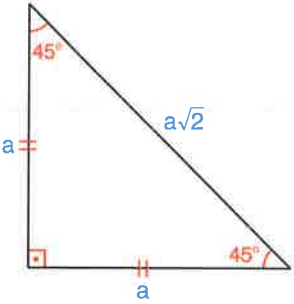


$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Örnek 20:

Bir $\triangle ABC$ nde $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 120^\circ$ olduğuna göre, $\sin(\hat{A}) \cdot \tan(\hat{A})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Çözüm:

$\triangle ABC$ nde $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ olduğundan,
 $m(\hat{A}) + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\hat{A}) = 60^\circ$ olur.

Buradan, $\sin(\hat{A}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\tan(\hat{A}) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ olduğundan,

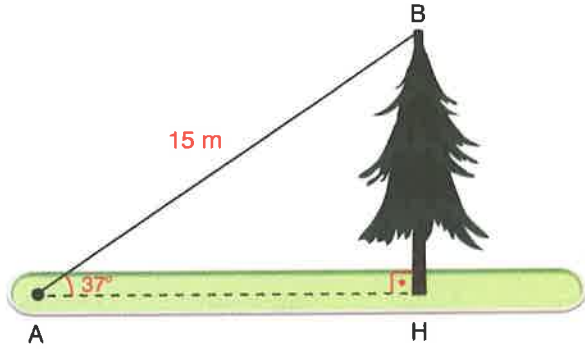
$$\sin(\hat{A}) \cdot \tan(\hat{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Dik Üçgen ve Trigonometri

Örnek 21:

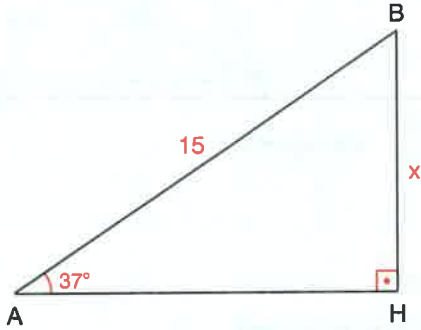


Yukarıdaki şekilde A noktası ile ağacın tepe noktası olan B noktasının oluşturduğu $[AB]$, zeminle 37° lik bir açı yapmaktadır.

$|AB|=15$ m olduğuna göre, ağacın boyu yaklaşık olarak kaç metredir? ($\sin 37^\circ \approx 0,6$)

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 13

Çözüm:

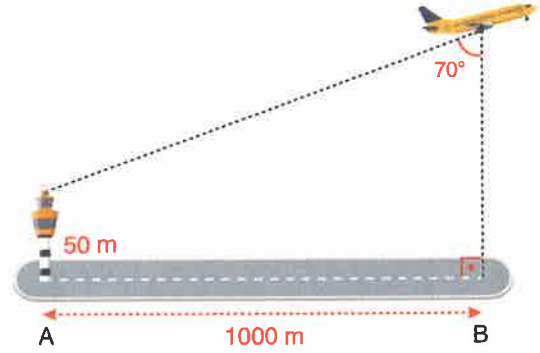


$$|BH|=x \text{ dersek, } \sin 37^\circ = \frac{x}{15} \text{ olur.}$$

$$\sin 37^\circ \approx 0,6 \text{ verildiğinden, } \frac{x}{15} = 0,6 \Rightarrow x = 9 \text{ olur.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 22:



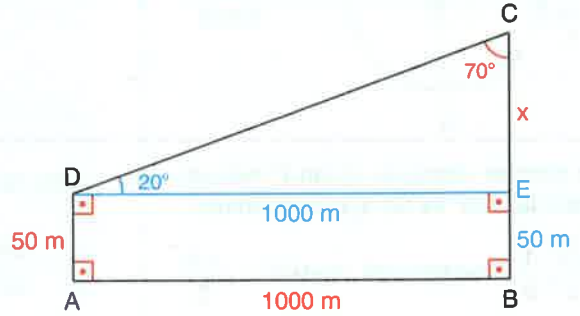
Yukarıdaki şekilde 50 m yüksekliğindeki bir kule ve bir uçak verilmiştir.

$|AB|=1000$ m olduğuna göre, uçağın yerden yüksekliği yaklaşık olarak kaç metredir? ($\tan 20^\circ \approx 0,364$)

- A) 945 B) 920 C) 716 D) 624 E) 414

Çözüm:

Verilen şekli aşağıdaki gibi modelleyelim ve ABED dikdörtgenini oluşturalım.



$$m(\hat{C})=70^\circ \text{ ise } m(\hat{CDE})=20^\circ, |DE|=|AB|=1000 \text{ m ve}$$

$$|EB|=|AD|=50 \text{ m olur.}$$

$$\text{CDE dik üçgeninde, } \tan 20^\circ = \frac{x}{1000} \text{ ve } \tan 20^\circ \approx 0,364 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{x}{1000} = 0,364 \Rightarrow x = 364 \text{ olur.}$$

O halde, uçağın yerden yüksekliği yaklaşık $364+50=414$ metredir.

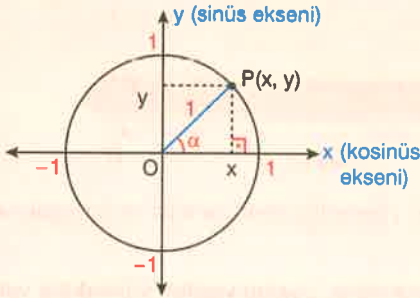
Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

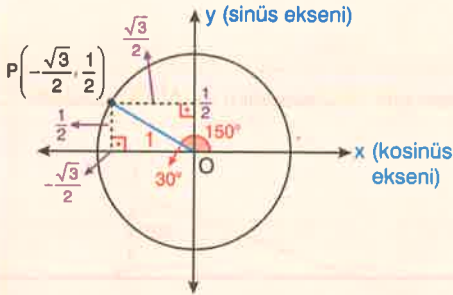
Dik Üçgen ve Trigonometri

EKSTREM BİLGİLER

Birim Çember: Merkezli orijin ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** adı verilir. x eksenine kosinüs eksen, y eksenine sinüs eksen denir.



Birim çember üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktası orijin ile birleştirildiğinde x eksen ile oluşan açı α ise $\cos\alpha = x$ ve $\sin\alpha = y$ dir.



Birim çember üzerinde alınan P noktası x eksen ile 150° lik bir açı yapmaktadır.

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olacağından, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ve $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ olacaktır.

α dar açı olmak üzere,

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

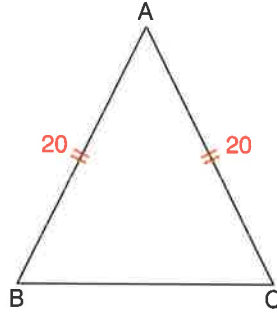
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha \text{ olur.}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Örnek 23:



Şekildeki $\triangle ABC$ nde
 $|AB| = |AC| = 20$ birim
 $\sin(\hat{A}) = \frac{4}{5}$

Yukarıdaki verilere göre, $\cot(\hat{C})$ değeri kaçtır?

A) 2

B) $\frac{3}{2}$

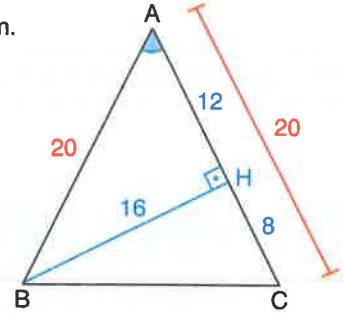
C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{3}$

Çözüm:

ABC üçgeninin $[AC]$ ye ait yüksekliğini çizelim.



ABH dik üçgeninde, $\sin(\hat{A}) = \frac{|BH|}{|AB|}$ olacağından

$$\frac{4}{5} = \frac{|BH|}{20} \Rightarrow 5 \cdot |BH| = 80$$

$$\Rightarrow |BH| = 16 \text{ birim olur.}$$

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısını kullanırsak,

$$|AH|^2 + |BH|^2 = |AB|^2 \Rightarrow |AH|^2 + 16^2 = 20^2$$

$$\Rightarrow |AH|^2 = 400 - 256 = 144$$

$$\Rightarrow |AH| = 12 \text{ birimdir.}$$

Buradan, $|HC| = 20 - 12 = 8$ birim olur.

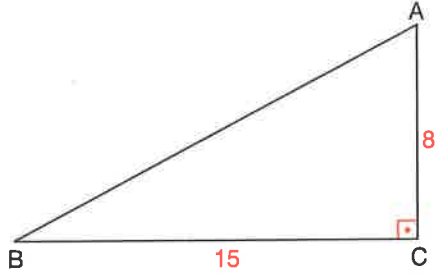
O halde BHC üçgeninde, $\cot(\hat{C}) = \frac{|HC|}{|BH|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ dir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

Test : 09

1.



ABC dik üçgeninde, $|AC|=8$ birim, $|BC|=15$ birim
Buna göre, $\sin(\hat{A}) + \cos(\hat{A})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{19}{17}$ B) $\frac{20}{17}$ C) $\frac{21}{17}$ D) $\frac{23}{17}$ E) $\frac{24}{17}$

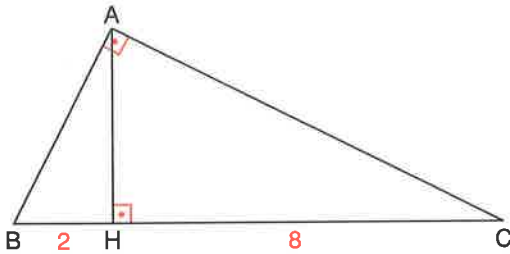
2. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ olmak üzere,

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

olduğuna göre, $\tan \alpha$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{13}{12}$ E) $\frac{13}{5}$

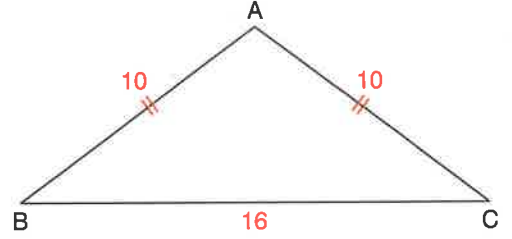
3.



ABC dik üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$, $|BH|=2$ birim
 $|HC|=8$ birim
olduğuna göre, $\tan(\hat{ACB})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) 2 E) 4

4.



Şekildeki ABC'nde, $|AB|=|AC|=10$ birim, $|BC|=16$ birim
Buna göre, $\sin(\hat{B}) + \cos(\hat{C})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

5. α ve β açıları için $\alpha + \beta = 90^\circ$ bilgisi veriliyor.

Buna göre,

I. $\sin \alpha = \cos \beta$

II. $\tan \alpha = \cot \beta$

III. $\sin \alpha + \cos \beta = 1$

İfadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) II ve III
D) I ve II E) I, II ve III

6.

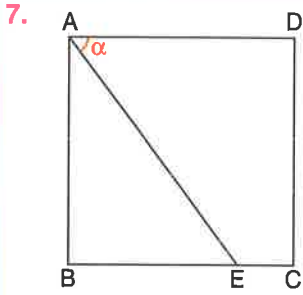
$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}$$

İfadesinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

Test : 09



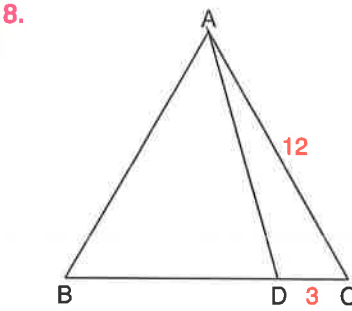
Yandaki şekilde ABCD bir karedir.

$$|BE| = 3, |EC|$$

$$m(\widehat{EAD}) = \alpha$$

olduğuna göre, $\tan \alpha - \sin \alpha$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{9}$



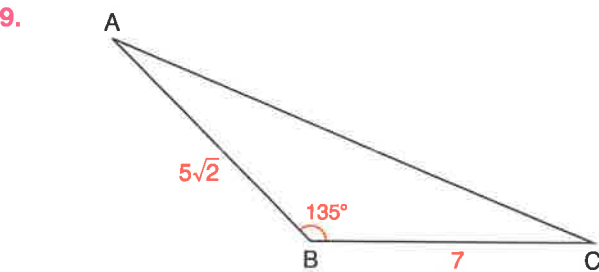
Yandaki şekilde ABC eşkenar üçgendir.

$$|AC| = 12 \text{ birim}$$

$$|DC| = 3 \text{ birim}$$

Yukarıdaki verilere göre, $\tan(\widehat{ADB})$ değeri kaçtır?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$



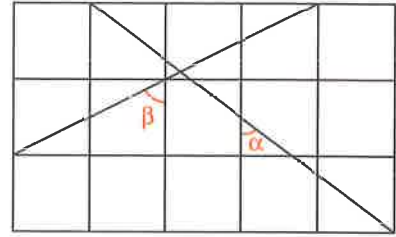
Yukarıdaki $\triangle ABC$ nde, $m(\widehat{ABC}) = 135^\circ$, $|AB| = 5\sqrt{2}$ birim $|BC| = 7$ birimdir.

Buna göre, $\sin(\widehat{C})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{12}{13}$



10.



Birim karelerden oluşturulmuş yukarıdaki şekilde verilen α ve β açıları için $\cos \alpha + \tan \beta$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{13}{5}$ D) $\frac{14}{3}$ E) $\frac{15}{4}$

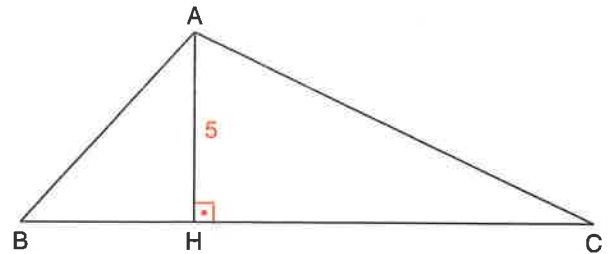
www.bireyakademi.com

11. Aşağıda verilen eşitliklerden hangisi yanlıştır?

- A) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ B) $\cos 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $\tan 77^\circ \cdot \cot 77^\circ = 1$ D) $\sin 26^\circ \cdot \cos 26^\circ = 1$
E) $\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ = 1$



12.



ABC dik üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$, $\cot(\widehat{B}) + \cot(\widehat{C}) = 2$

Yukarıdaki verilere göre, $|BC|$ kaç birimdir?

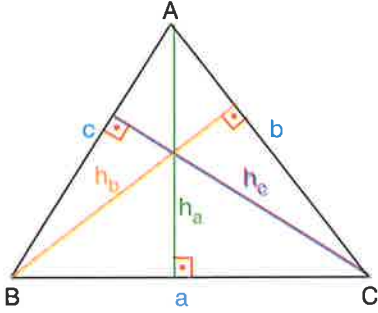
- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

www.bireyakademi.com

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

ÜÇGENDE ALAN

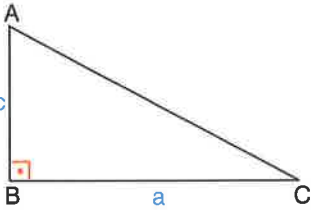


Bir üçgenin alanı, herhangi bir kenarının uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

Kenar uzunlukları a, b ve c birim ve bu kenarlara ait yükseklikleri h_a , h_b ve h_c olan üçgenin alanı;

$$A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ ile hesaplanır.}$$

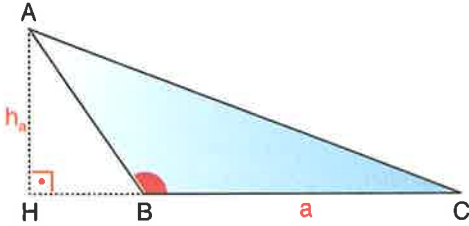
Dik Üçgenin Alanı:



Dik üçgenin alanı dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir.

$$A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot c}{2} \text{ dir.}$$

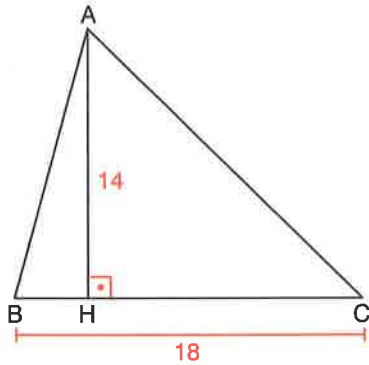
Geniş Açılı Üçgenin Alanı:



Geniş açılı üçgenlerde geniş açılı oluşturan kenarlara ait yükseklikler üçgenin dışındadır.

$$A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ dir.}$$

Örnek 1:



ABC üçgeninde

$[AH] \perp [BC]$

$|AH| = 14$ birim

$|BC| = 18$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 118 B) 126 C) 135 D) 144 E) 148

bryPLE

Çözüm:

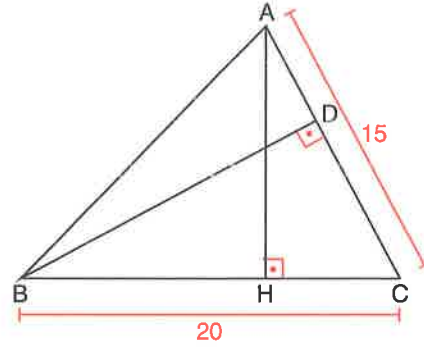
$$A(\triangle ABC) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2} \text{ olacağından,}$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{18 \cdot 14}{2} = 126 \text{ birimkare olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

İLK ADIM SORULARI

Örnek 2:



ABC üçgeninde, $[AH] \perp [BC]$, $[BD] \perp [AC]$, $|AC| = 15$ birim
 $|BC| = 20$ birim, $|AH| = 6$ birimdir.

Buna göre, $|BD|$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm:

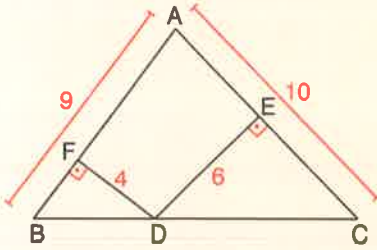
$$A(\triangle ABC) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} \text{ olacağından,}$$

$$\frac{20 \cdot 6}{2} = \frac{15 \cdot |BD|}{2} \Rightarrow 120 = 15 \cdot |BD|$$

$$\Rightarrow |BD| = 8 \text{ birim bulunur.}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

23.



Şekildeki $\triangle ABC$ nde, $[AB] \perp [FD]$

$[AC] \perp [ED]$, $|FD| = 4$ birim

$|DE| = 6$ birim, $|AC| = 10$ birim

$|AB| = 9$ birimdir.

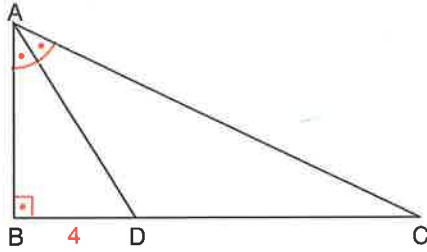
Buna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 56

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 3:

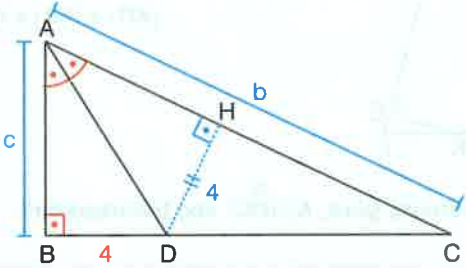


ABC dik üçgeninde, $[AD]$ açıortay, $|BD| = 4$ birim, $|AB| + |AC| = 18$ birimdir.

Buna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 48 B) 44 C) 40 D) 36 E) 32

Çözüm:



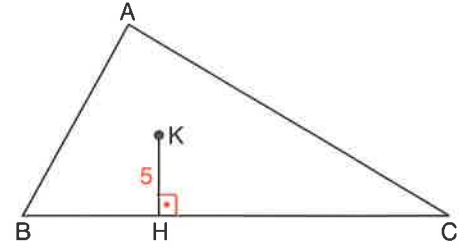
$[DH]$ dikliğini çizerek $[AD]$ açıortay olduğundan $|DH| = |BD| = 4$ birim olur.

$$A(\triangle ABD) = \frac{4 \cdot c}{2} \text{ ve } A(\triangle ADC) = \frac{4 \cdot b}{2} \text{ olacağından}$$

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= \frac{4 \cdot c}{2} + \frac{4 \cdot b}{2} = 2c + 2b \\ &= 2 \cdot (c + b) \quad (|AB| + |AC| = 18 \text{ birim}) \\ &= 2 \cdot 18 \\ &= 36 \text{ birimkare olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

Örnek 4:



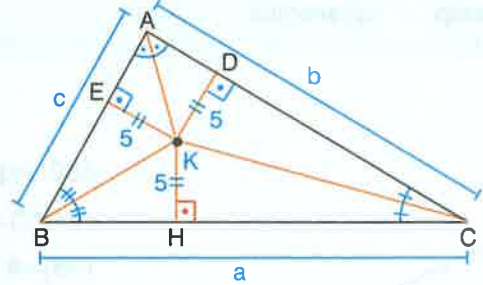
Yukarıdaki şekilde K, ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.

$[KH] \perp [BC]$, $|KH| = 5$ birim, $\text{Çevre}(\triangle ABC) = 30$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 100 B) 90 C) 85 D) 80 E) 75

Çözüm:



K, ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktası olduğundan $[AK]$, $[BK]$ ve $[CK]$ açıortaydır.

Açıortay üzerindeki bir noktadan açının kollarına çizilen dikmeler eşit uzunlukta olacağından,

$|KH| = |KD| = |KE| = 5$ birim olacaktır.

O halde

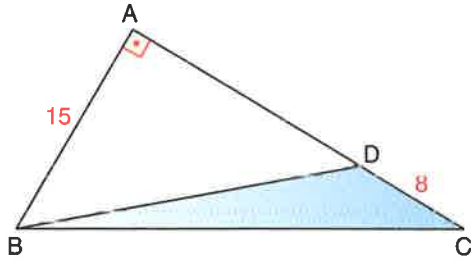
$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle BKC) + A(\triangle CKA) + A(\triangle AKB) \\ &= \frac{5 \cdot a}{2} + \frac{5 \cdot b}{2} + \frac{5 \cdot c}{2} \\ &= \frac{5a + 5b + 5c}{2} \\ &= \frac{5 \cdot (a + b + c)}{2} \quad (a + b + c = 30) \\ &= \frac{5 \cdot 30}{2} = 75 \text{ birimkare olur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 5:



Yandaki şekilde
 $[AB] \perp [AC]$
 $|AB| = 15$ birim
 $|CD| = 8$ birim

Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) 40 B) 45 C) 60 D) 75 E) 70

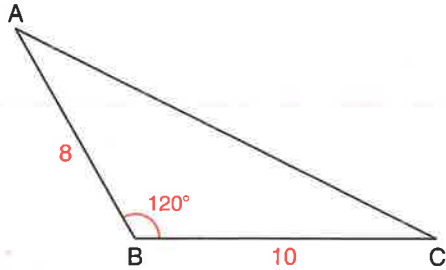
Çözüm:

BDC üçgeninde D açısı geniş açıdır. Dolayısıyla [CD] ya ait yükseklik üçgenin dışındaki [AB] dir.

O halde $A(\triangle BDC) = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60$ birimkaredir.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 6:

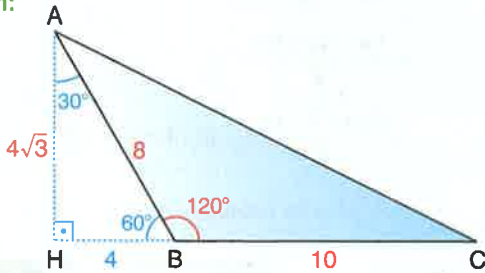


ABC üçgeninde
 $m(\angle B) = 120^\circ$
 $|AB| = 8$ birim
 $|BC| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) $20\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{3}$ C) $40\sqrt{3}$ D) 20 E) 40

Çözüm:



$\triangle ABC$ nde B geniş açı olduğundan [BC] ye ait yükseklik üçgenin dışındaki [AH] tir.

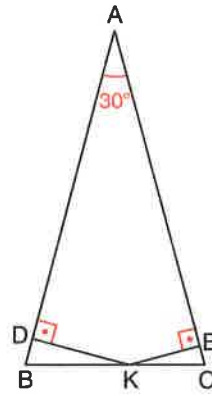
AHB, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olacağından

$|AB| = 8$ birim $\Rightarrow |HB| = 4$ birim ve $|AH| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

O halde, $A(\triangle ABC) = \frac{10 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ birimkaredir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 7:



Şekildeki $\triangle ABC$ nde

$[KD] \perp [AB]$

$[EK] \perp [AC]$

$|AB| = |AC|$

$m(\angle BAC) = 30^\circ$

$|KD| + |KE| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 120 B) 100 C) 90 D) 80 E) 75

Çözüm:

$|AB| = |AC|$ olduğundan ABC ikizkenar üçgeninde

$|BH| = |KD| + |KE|$ olduğunu hatırlayalım.

O halde, $|BH| = 10$ birimdir.

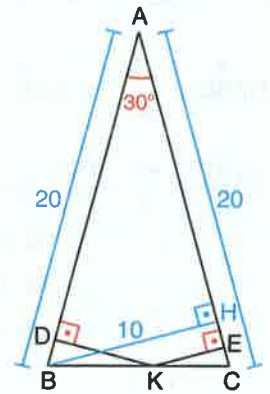
$\triangle ABH$ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan $|BH| = 10$ birim ise

$|AB| = 20$ birim olur.

Dolayısıyla $|AC| = 20$ birimdir.

Buradan $A(\triangle ABC) = \frac{|AC| \cdot |BH|}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100$ birimkare olur.

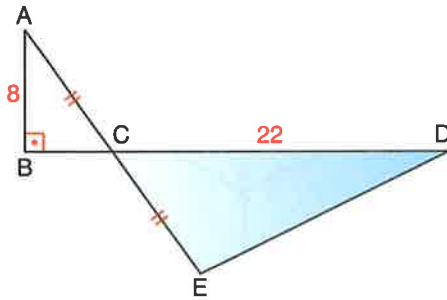
Doğru cevap "B" seçeneğidir.



ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 8:

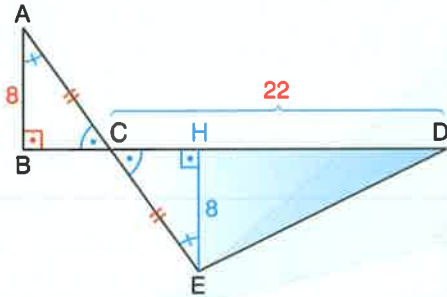


Yukarıdaki şekilde, $[AB] \perp [BD]$, $|AC| = |CE|$, $|AB| = 8$ birim
 $|CD| = 22$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle CDE)$ kaç birimkaredir?

- A) 121 B) 108 C) 96 D) 88 E) 82

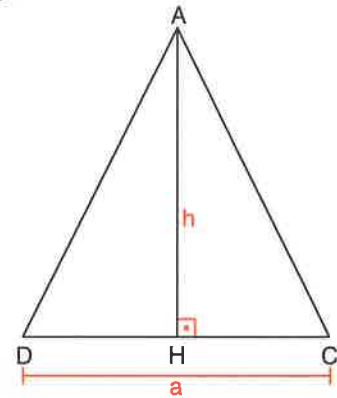
Çözüm:



$\triangle CDE$ nde $[EH]$ dikmesini çizerek, $|AC| = |CE|$ ve
 $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECH})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{H}) = 90^\circ$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CEH})$
olacağından $\triangle ABC$ ile $\triangle EHC$ eş üçgenlerdir.
Dolayısıyla $|EH| = |AB| = 8$ birim olacaktır.
O halde $A(\triangle CDE) = \frac{22 \cdot 8}{2} = 88$ birimkaredir.

Doğru cevap "D" seçeneğidir.

! Dikkat

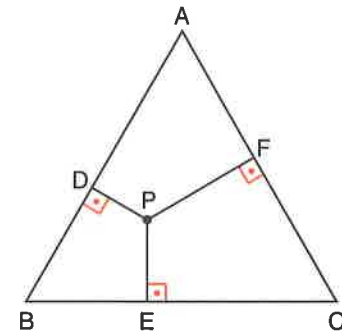


ABC eşkenar üçgen ise $A(\triangle ABC) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ birimkaredir.

$\left(h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ olduğunu hatırlayalım.} \right)$

♦ ABC eşkenar üçgeninin alanını $A(\triangle ABC) = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3}$
ile de hesaplayabiliriz.

Örnek 9:

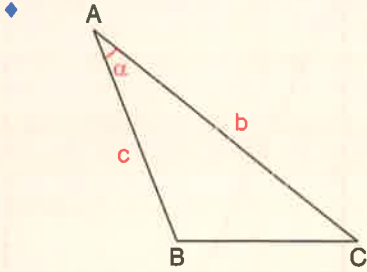


ABC eşkenar üçgen, $[PD] \perp [AB]$, $[PE] \perp [BC]$, $[PF] \perp [AC]$
 $|PD| + |PE| + |PF| = 8\sqrt{3}$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 32 B) 48 C) $48\sqrt{3}$ D) $54\sqrt{3}$ E) $64\sqrt{3}$

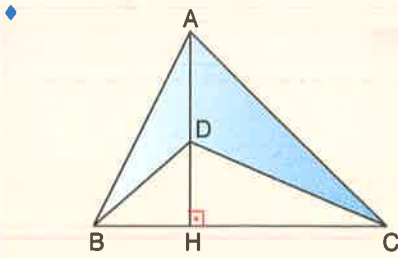
EKSTREM BİLGİLER



İki kenarının uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü verilen üçgenin alanı,

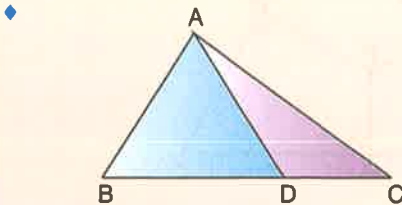
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

ile hesaplanabilir.



[AH] $\perp$ [BC] olmak üzere,

$$\text{Taralı Alan} = \frac{|AD| \cdot |BC|}{2} \text{ dir.}$$

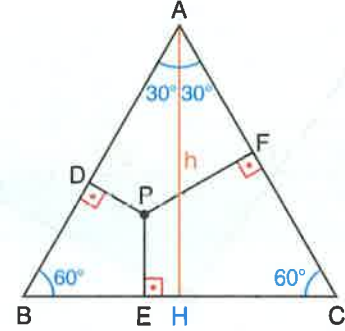


Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı taban uzunlukları oranına eşittir.

$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ADC)} = \frac{|BD|}{|DC|} \text{ dir.}$$

Çözüm:

ABC eşkenar üçgen olduğundan,
|AH| = |PD| + |PE| + |PF| dir.
O halde,
|AH| = h = 8√3 birimdir.



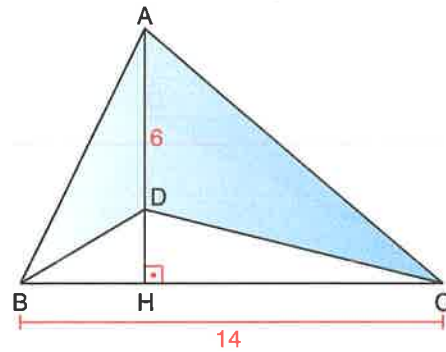
Eşkenar üçgende $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ dir.

$$8\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 16 \text{ birim olur.}$$

$$\text{Buradan, } A(\triangle ABC) = \frac{16^2 \sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ birimkaredir.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 10:



Yukarıdaki şekilde, [AH] $\perp$ [BC], |AD| = 6 birim, |BC| = 14 birim

Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 36

B) 40

C) 42

D) 48

E) 56

Çözüm:

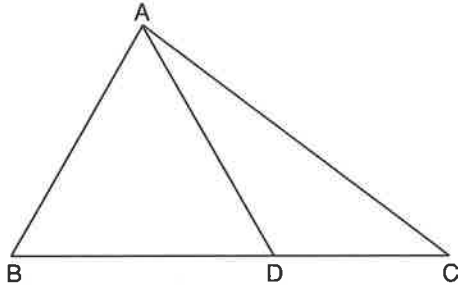
$$\text{Taralı Alan} = \frac{|AD| \cdot |BC|}{2} = \frac{6 \cdot 14}{2} = 42 \text{ birimkaredir.}$$

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 11:

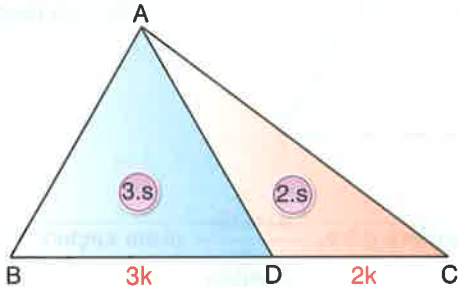


Şekildeki $\triangle ABC$ nde $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{2}$, $A(ABC) = 60$ birimkare

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABD)$ kaç birimkaredir?

- A) 50 B) 48 C) 45 D) 40 E) 36

Çözüm:



$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{2} \text{ ise } |BD| = 3k \text{ ve } |DC| = 2k \text{ dersek } \frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle BDC)} = \frac{3}{2}$$

olacağından,

$$A(\triangle ABD) = 3s \text{ ve } A(\triangle BDC) = 2s \text{ yazabiliriz.}$$

$$A(ABC) = 60 \text{ birimkare} \Rightarrow 3s + 2s = 60 \text{ birimkare}$$

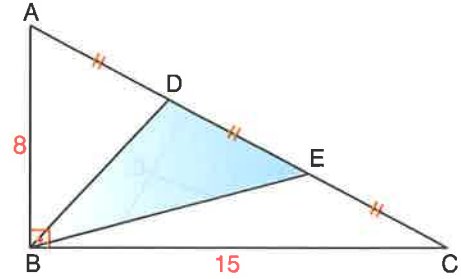
$$\Rightarrow 5s = 60 \text{ birimkare}$$

$$\Rightarrow s = 12 \text{ birimkare olur.}$$

$$\text{Buradan, } A(\triangle ABD) = 3s = 3 \cdot 12 = 36 \text{ birimkaredir.}$$

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Örnek 12:

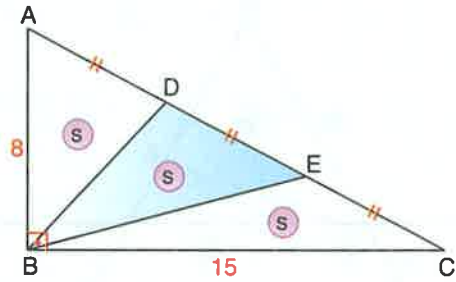


ABC dik üçgeninde, $|AD| = |DE| = |EC|$, $|AB| = 8$ birim
 $|BC| = 15$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle BDE)$ kaç birimkaredir?

- A) 24 B) 20 C) 18 D) 16 E) 15

Çözüm:



$|AD| = |DE| = |EC|$ olduğundan

$$A(\triangle ABD) = A(\triangle BDE) = A(\triangle DEC) = s \text{ diyelim.}$$

$$A(ABC) = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ birimkaredir.}$$

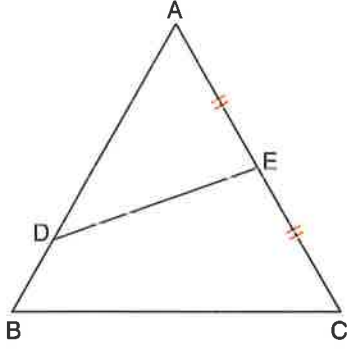
O halde, $3s = 60$ birimkare $\Rightarrow s = 20$ birimkare olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 13:



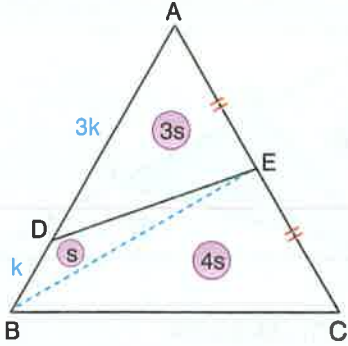
ABC üçgeninde, $|AE| = |EC|$, $|AD| = 3$, $|BD|$

$A(\triangle ABC) = 48$ birimkare

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ADE)$ kaç birimkaredir?

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Çözüm:



[BE] yi çizelim. $|BD| = k$ dersek $|AD| = 3k$ olur.

Dolayısıyla, $A(\triangle BDE) = s$ ise $A(\triangle ADE) = 3s$ olur.

$|AE| = |EC|$ olduğundan $A(\triangle ABE) = A(\triangle EBC)$ dir.

Dolayısıyla $A(\triangle EBC) = s + 3s = 4s$ tir.

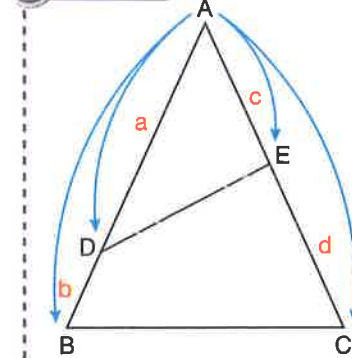
$A(\triangle ABC) = 48$ birimkare $\Rightarrow 8s = 48$ birimkare

$\Rightarrow s = 6$ birimkare bulunur.

$A(\triangle ADE) = 3.s = 3.6 = 18$ birimkaredir.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

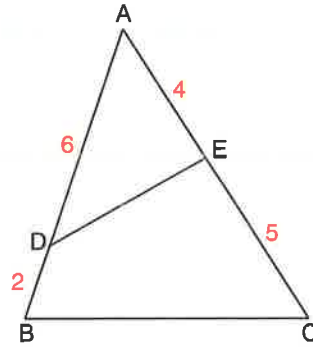
Dikkat



$$\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} = \frac{a.c}{(a+b).(c+d)}$$

eşitliğini kullanarak daha pratik çözüm yapabiliriz.

Örnek 14:



ABC üçgeninde

$|AD| = 6$ birim

$|BD| = 2$ birim

$|AE| = 4$ birim

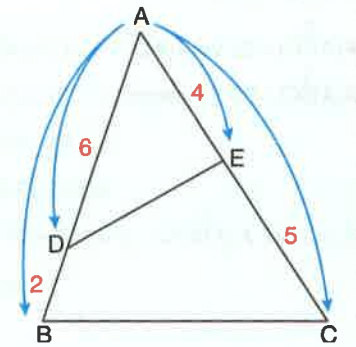
$|EC| = 5$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} &= \frac{|AD| \cdot |AE|}{|AB| \cdot |AC|} \\ &= \frac{6 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{24}{72} \\ &= \frac{1}{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$



Doğru cevap "C" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

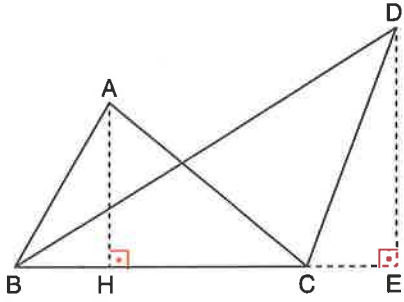
Üçgende Alan

! Dikkat

Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları oranı tabana ait yüksekliklerin oranına eşittir.

ABC ve DBC üçgenlerinde $[BC]$ ortak tabandır.

$$\text{Dolayısıyla, } \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DBC)} = \frac{|AH|}{|DE|} \text{ dir.}$$



Çözüm:

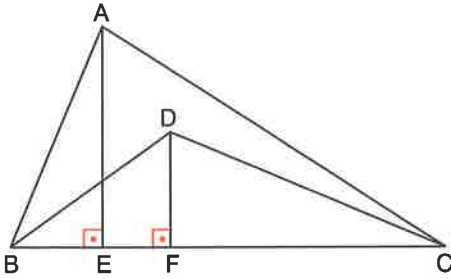
ABC ve DBC üçgenlerinde $[BC]$ ortak kenardır. $[BC]$ ye ait $[AE]$ ve $[DF]$ yüksekliklerinin oranı iki üçgenin alanları oranına eşittir.

$$\text{O halde } \frac{|AE|}{|DF|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DBC)} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } \frac{24}{A(\triangle DBC)} = \frac{3}{2} \Rightarrow A(\triangle DBC) = 16 \text{ birimkaredir.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

Örnek 15:



Şekildeki ABC üçgeninde, $[AE] \perp [BC]$, $[DF] \perp [BC]$, $\frac{|AE|}{|DF|} = \frac{3}{2}$

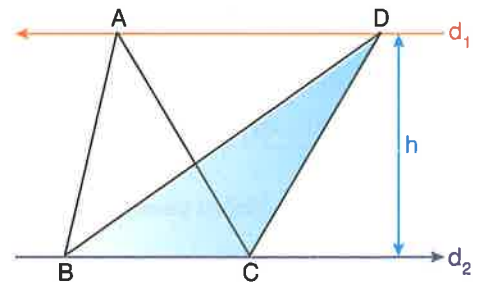
$A(\triangle ABC) = 24$ birimkare

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle DBC)$ kaç birimkaredir?

- A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 12

! Dikkat

Taban uzunlukları eşit ve bu tabanlara ait yükseklikleri de eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.

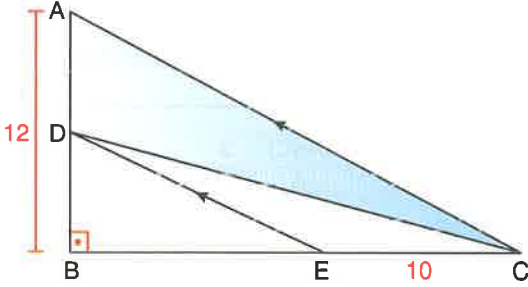


$d_1 \parallel d_2$ olsun. ABC ve DBC üçgenlerinin $[BC]$ ye ait yükseklikleri de eşit olacağından $A(\triangle ABC) = A(\triangle DBC)$ dir.

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 16:



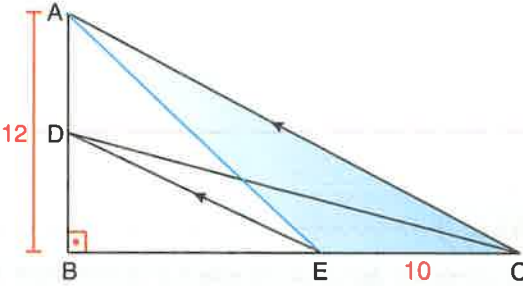
ABC dik üçgende, $[DE] \parallel [AC]$, $|EC| = 10$ birim, $|AB| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ADC)$ kaç birimkaredir?

- A) 60 B) 75 C) 90 D) 108 E) 120

Çözüm:

$[AE]$ yi çizerek AEC yi oluşturalım.



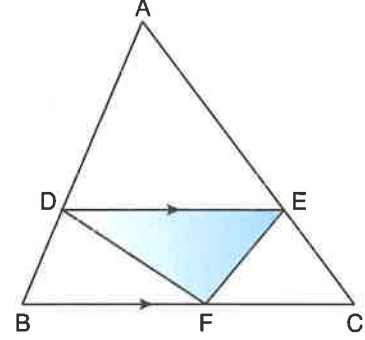
$\triangle AEC$ ile $\triangle ADC$ nin $[AC]$ kenarları ortak ve $[DE] \parallel [AC]$ olduğundan bu kenara ait yükseklikleri de eşit uzunluktadır.

Dolayısıyla $A(\triangle ADC) = A(\triangle AEC)$ dir.

Buradan, $A(\triangle AEC) = \frac{|EC| \cdot |AB|}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$ birimkare olur.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

Örnek 17:



ABC üçgeninde, $[DE] \parallel [BC]$, $|AD| = 2 \cdot |BD|$

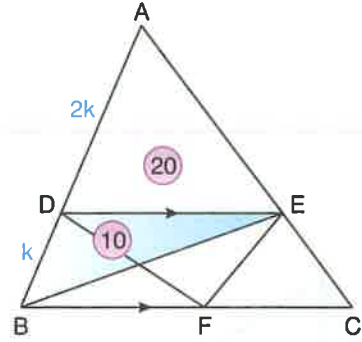
$A(\triangle DEF) = 10$ birimkare

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ADE)$ kaç birimkaredir?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

Çözüm:

$[BE]$ yi çizelim.



$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan $A(\triangle BDE) = A(\triangle DEF)$ olur.

O halde, $A(\triangle BDE) = 10$ birimkaredir.

$|BD| = k$ dersek $|AD| = 2k$ olacağından,

$A(\triangle BDE) = 10$ birimkare ise

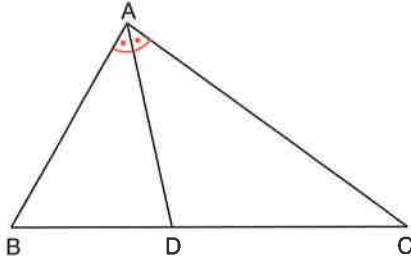
$A(\triangle ADE) = 2 \cdot 10$ birimkare $= 20$ birimkare olur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

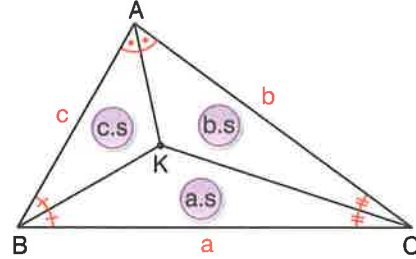
ÜÇGENLER

Üçgende Alan

! Dikkat

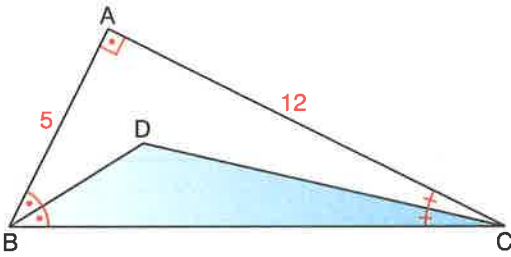


[AD] açıortay ise $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ADC)}$ dir.



K, iç açıortayların kesim noktası ise oluşan ABK, ACK ve BCK üçgenlerinin alanları sırasıyla c, b ve a ile orantılıdır.

Örnek 18:

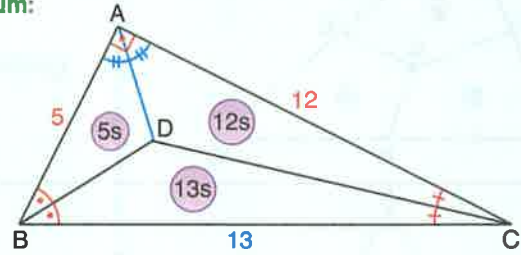


ABC dik üçgeninde, [BD] ve [CD] iç açıortay, $|AB|=5$ birim
 $|AC|=12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle BDC)$ kaç birimkaredir?

- A) 13 B) 15 C) 17 D) 21 E) 26

Çözüm:



[BD] ve [CD] iç açıortay olduğundan [AD] de iç açıortay olur.

$\triangle ABC$ nde pisagor bağıntısından,

$$|BC|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |BC|^2 = 169 \Rightarrow |BC| = 13 \text{ birimdir.}$$

O halde $A(\triangle ABD) = 5s$, $A(\triangle ADC) = 12s$ dersek $A(\triangle BDC) = 13s$ olacaktır.

$$A(\triangle ABC) = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ birimkaredir.}$$

$$5s + 12s + 13s = 30 \text{ birimkare} \Rightarrow 30s = 30 \text{ birimkare}$$

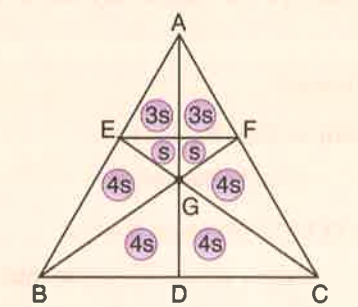
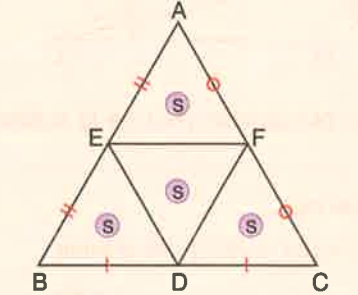
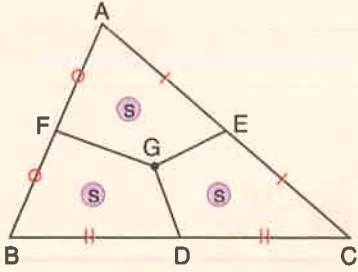
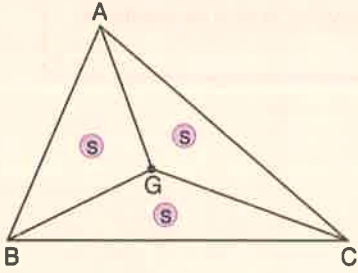
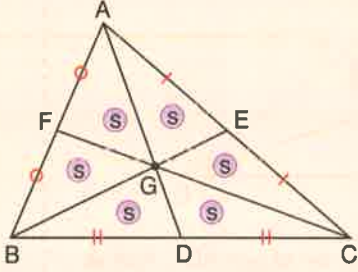
$$\Rightarrow s = 1 \text{ birimkaredir.}$$

Buradan $A(\triangle BDC) = 13 \cdot s = 13 \cdot 1 = 13$ birimkare bulunur.

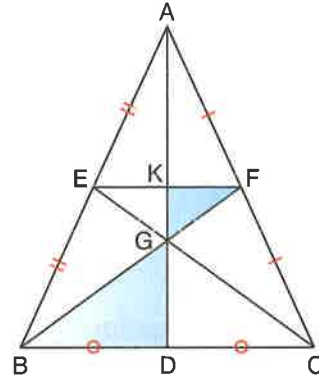
Doğru cevap "A" seçeneğidir.

EKSTREM BİLGİLER

G, ABC üçgenlerinin ağırlık merkezidir.



Örnek 19:



Yukarıdaki şekilde, D, E ve F kenarların orta noktalarıdır,

$A(\triangle GKF) + A(\triangle GBD) = 15$ birimkare olduğuna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

A) 60

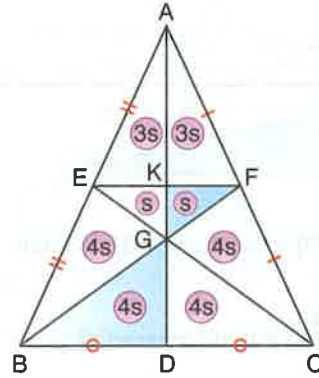
B) 72

C) 84

D) 96

E) 108

Çözüm:



$$s + 4s = 15 \text{ birimkare ise}$$

$$5.s = 15 \text{ birimkare}$$

$$s = 3 \text{ birimkare olur.}$$

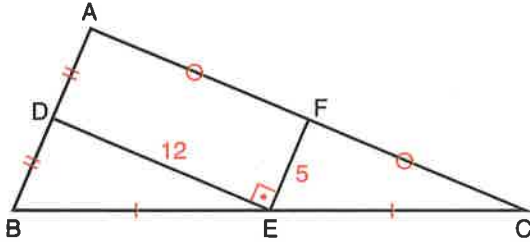
$$A(\triangle ABC) = 24.s = 24.3 = 72 \text{ birimkare olur.}$$

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

ÜÇGENLER

Üçgende Alan

Örnek 20:

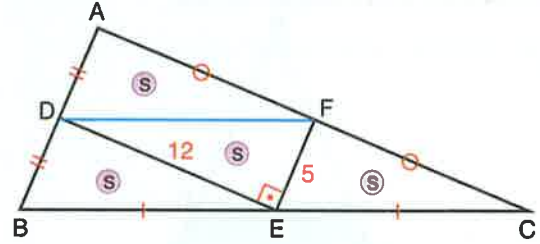


ABC üçgeninde, D, E ve F kenarların orta noktalarıdır.
[DE] ⊥ [EF], |DE| = 12 birim, |EF| = 5 birim

Buna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 60 B) 90 C) 100 D) 108 E) 120

Çözüm:



[DF] yi çizerek D, E ve F kenarların orta noktaları olduğundan oluşan 4 üçgenin alanı birbirine eşit olacaktır.

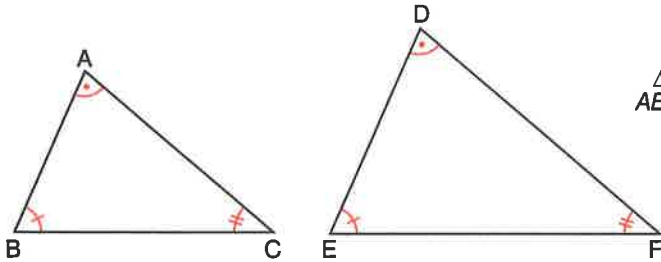
$$A(\triangle DEF) = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ birimkare olacağından}$$

$$A(\triangle ABC) = 4s = 4 \cdot 30 = 120 \text{ birimkaredir.}$$

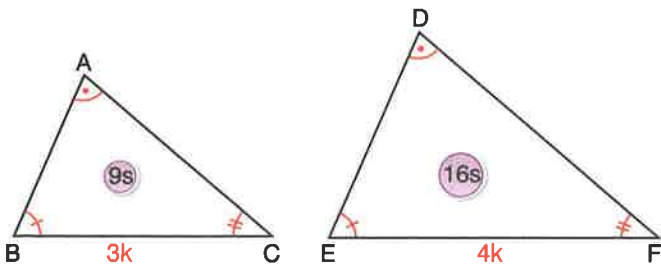
Doğru cevap "E" seçeneğidir.

! Dikkat

Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ olduğundan } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k \text{ ise } \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = k^2 \text{ dir.}$$



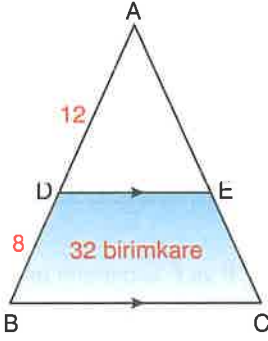
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ ve benzerlik oranı } \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\text{olduğundan } \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ olur.}$$

$$\text{O halde, } A(\triangle ABC) = 9s \text{ ise } A(\triangle DEF) = 16s \text{ yazabiliriz.}$$

ÜÇGENLER

Örnek 21:

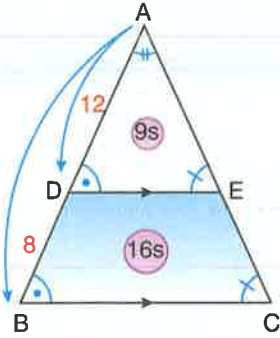


$\triangle ABC$ nde $[DE] \parallel [BC]$, $|AD| = 12$ birim, $|BD| = 8$ birimdir.

Taralı bölgenin alanı 32 birimkare olduğuna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 48 B) 50 C) 56 D) 64 E) 72

Çözüm:



Yöndeş açılardan eşitliğinden A.A benzerlik teoremine göre $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ dir.

Bu iki üçgenin benzerlik oranı $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ olur.

O halde, benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının

karesine eşit olacağından $\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ tir.

Dolayısıyla $A(\triangle ADE) = 9s$ dersek $A(\triangle ABC) = 25s$ olacaktır. Burada taralı bölgenin alanı $16s$ olur.

$16s = 32$ birimkare $\Rightarrow s = 2$ birimkare olacaktır.

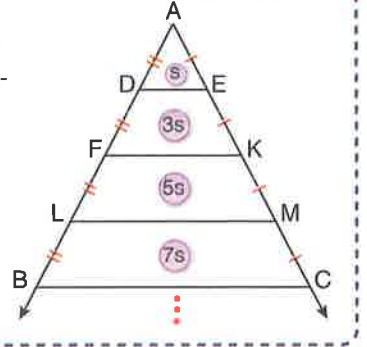
$A(\triangle ABC) = 25.s = 25.2 = 50$ birimkare bulunur.

Doğru cevap "B" seçeneğidir.

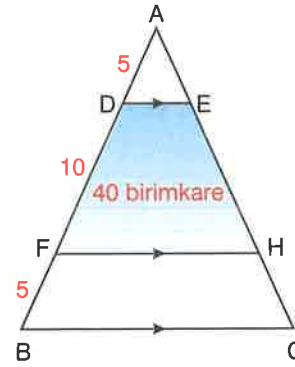
Üçgende Alan

Dikkat

Kenarları eşit aralıklı paralel doğrularla bölünmüş üçgenlerde alt alta alanlar, 1, 3, 5, 7, 9, ... şeklindeki tek sayılarla orantılıdır.



Örnek 22:



ABC üçgeninde,

$[DE] \parallel [FH] \parallel [BC]$

$|AD| = |FB| = 5$ birim

$|DF| = 10$ birimdir.

Taralı bölgenin alanı 40 birimkare olduğuna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 80 B) 96 C) 100 D) 120 E) 160

Çözüm:

$|DK| = |KF| = 5$ birim ve

$[KL] \parallel [BC]$ olacak şekilde

$[KL]$ yi çizersek

$|AD| = |DK| = |KF| = |FB| = 5$ birim

olur.

O halde oluşan alanlar s , $3s$,

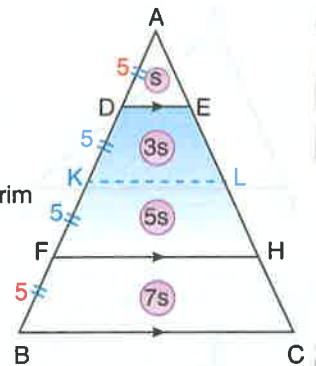
$5s$ ve $7s$ olacaktır.

$3s + 5s = 40$ birimkare $\Rightarrow 8s = 40$ birimkare

$\Rightarrow s = 5$ birimkare olur.

Buradan, $A(\triangle ABC) = 16s = 16.5 = 80$ birimkare bulunur.

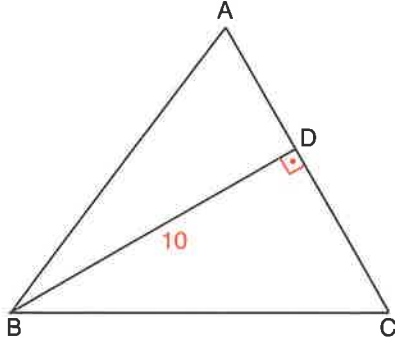
Doğru cevap "A" seçeneğidir.



ÜÇGENDE ALAN

Test : 10

1.

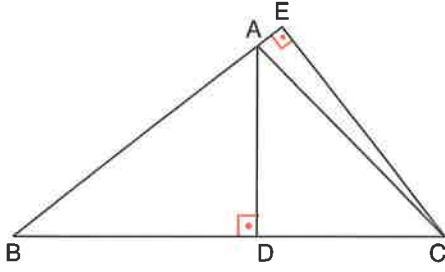


ABC üçgeninde, $[BD] \perp [AC]$, $|BD| = 10$ birim
 $A(\triangle ABC) = 50$ birimkare

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

2.

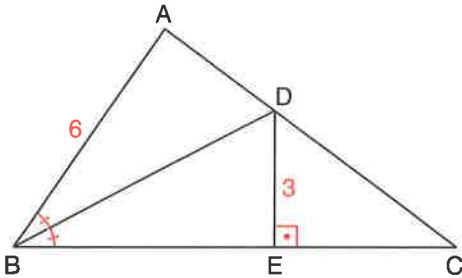


Şekildeki ABC'nde, $[AD] \perp [BC]$, $[EC] \perp [EB]$
 $|BC| = 20$ birim, $|AB| = 15$ birim $|AD| = 9$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

3.

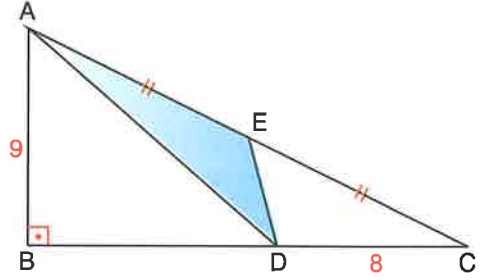


ABC üçgeninde, $[BD]$ iç açıortay, $[DE] \perp [BC]$
 $|AB| = 6$ birim, $|DE| = 3$ birim, $|BC| = 10$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 38 B) 36 C) 34 D) 32 E) 24

4.



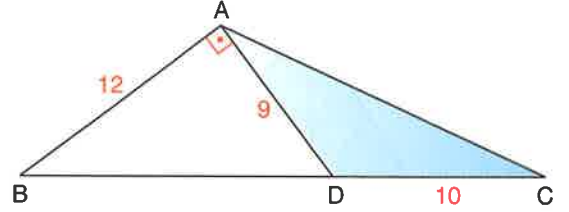
Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgendir.

$|AE| = |EC|$, $|AB| = 9$ birim, $|DC| = 8$ birim

Buna göre, $A(\triangle ADE)$ kaç birimkaredir?

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 36

5.



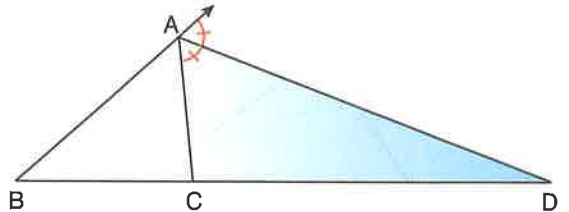
Yukarıdaki şekilde $[AB] \perp [AD]$, $|AB| = 12$ birim

$|AD| = 9$ birim, $|CD| = 10$ birim

Buna göre, $A(\triangle ADC)$ kaç birimkaredir?

- A) 32 B) 36 C) 40 D) 44 E) 45

6.



Yukarıdaki şekilde $[AD]$, A açısının dış açıortayı

2. $|AB| = 3 \cdot |AC|$, $A(\triangle ABC) = 24$ birimkare

Buna göre, $A(\triangle ACD)$ kaç birimkaredir?

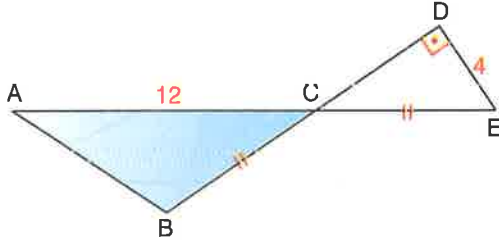
- A) 48 B) 52 C) 56 D) 60 E) 72

ÜÇGENDE ALAN

Test : 10



7.



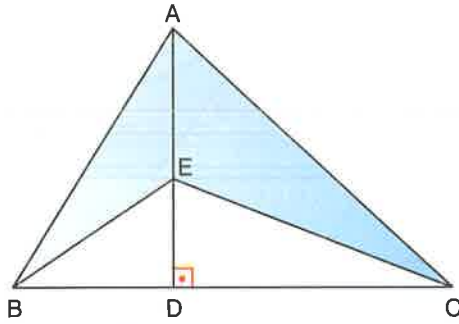
Yukarıdaki şekilde, $[BD] \perp [DE]$, $|DE| = 4$ birim
 $|AC| = 12$ birim

Buna göre, $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 32 B) 30 C) 28 D) 24 E) 20

www.bireyakademi.com

8.

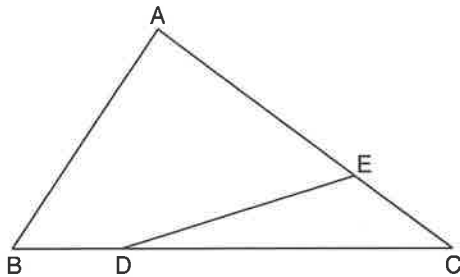


Yukarıdaki şekilde $[AD] \perp [BC]$, $|AE| = 7$ birim
 $|BC| = 12$ birimdir.

Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) 35 B) 40 C) 42 D) 48 E) 56

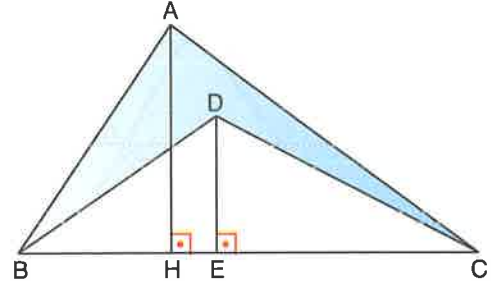
9.



Yukarıda verilen $\triangle ABC$ nde, $|AE| = 2 \cdot |EC|$, $|CD| = 3 \cdot |BD|$
 $A(\triangle ABC) = 24 \text{ cm}^2$ olduğuna göre, $A(\triangle DEC)$ kaç cm^2 dir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10.



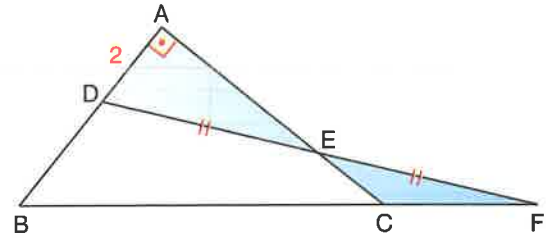
Yukarıda verilen $\triangle ABC$ nde, $[AH] \perp [BC]$, $[DE] \perp [BC]$
 $|AH| = 10$ birim, $|DE| = 6$ birimdir.

Taralı bölgenin alanı 24 birimkare olduğuna göre,
 $A(\triangle ABC)$ kaç birimkaredir?

- A) 48 B) 45 C) 50 D) 54 E) 60



11.



Yukarıdaki şekilde, $\triangle ABC$ dik üçgen, $|DE| = |EF|$

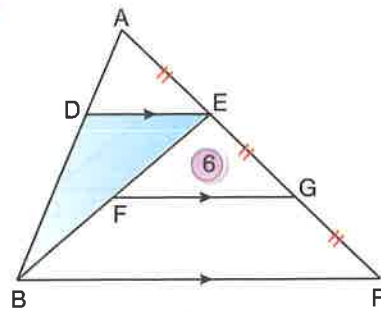
$|AD| = 2$ birim, $|AC| = 9$ birim

Buna göre, $A(\triangle ADE) + A(\triangle ECF)$ kaç birimkaredir?

- A) 18 B) 15 C) 12 D) 10 E) 9

www.bireyakademi.com

12.



Yanda verilen

$\triangle ABC$ nde

$[DE] \parallel [FG] \parallel [BC]$

$|AE| = |EG| = |GC|$

$A(\triangle EFG) = 6$ birimkare

Buna göre, $A(\triangle BDE)$ kaç birimkaredir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

bryPLE



Ünite V

Veri ve Grafik

Yazardan

Sevgili öğrenciler!

Bu ünitemizde veri inceleme ve verilerin analizini yapabilmenizi sağlayacak olan veri ve grafik konusu işlenecektir.

Verilerin analizi ve grafiklerinin yorumlanması öğrenmeniz gereken bir konudur. Günlük yaşantınızda ve ilerideki iş hayatınızda kullanabileceğiniz temel bir konu olduğundan gerekli önem verilmelidir.

KAZANIMLAR

9.5.1 : Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçüleri

9.5.1.1 : Verileri merkezî eğilim ve yayılım ölçülerini hesaplayarak yorumlar.

9.5.2 : Verilerin Grafikle Gösterilmesi

9.5.2.1 : Bir veri grubuna ilişkin histogram oluşturur.

9.5.2.2 : Gerçek hayat durumunu yansıtan veri gruplarını uygun grafik türleriyle temsil ederek yorumlar.

VERİ VE GRAFİK

Herhangi bir konu üzerinde araştırma yapmak ve en iyi sonucu alabilmek için gözlem ve deney gibi yöntemler kullanılır. Bu yöntemler sonucunda elde edilen tüm bilgilere “veri” denir. İstatistik, tüm bu verilerin toplanması ve çözümlenmesi yöntemlerini inceleyen bir bilimdir.

Merkezi Eğilim Ölçüleri

Bir veri grubunda terimlerin hangi değerler etrafında toplandığını gösteren değerlere **Merkezi Eğilim Ölçüleri** denir.

Merkezi eğilim ölçüleri; aritmetik ortalama, ortanca (medyan) ve tepe değer (mod) dur.

Aritmetik Ortalama: Verilerin toplanarak veri sayısına bölünmesine **aritmetik ortalama** denir ve $\bar{X}$ şeklinde gösterilir.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ veri grubunun aritmetik ortalaması $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ ile hesaplanır.

Ortanca (Medyan): Veri grubundaki veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında verileri eşit sayıda iki gruba ayıran sayıdır.

Veri grubunun terim sayısı tek ise ortanca tam ortadaki sayıdır. Veri grubunun terim sayısı çift ise ortaya denk gelen iki sayının toplamının yarısıdır. Ortanca (medyan) veri grubunun bir elemanı olmayabilir.

Tepe Değer (Mod): Veri grubunda en çok tekrar eden sayıya dizinin **tepe değeri (modu)** denir.

Veri grubunda aynı sayıda birden fazla tekrar eden sayı varsa grubun birden fazla tepe değeri vardır. Veri grubunda tekrar eden veri yoksa grubun tepe değeri yoktur.

Örnek 1:

Aşağıdaki veri gruplarının aritmetik ortalama, ortanca ve tepe değerlerini bulalım.

- a) 2, 2, 7, 11, 3, 7, 7, 5, 10, 11, 12
- b) 4, 8, 2, 4, 11, 7, 7, 3, 5, 9
- c) 7, 9, 10, 14, 17, 20

Çözüm:

a) Aritmetik ortalama:

$$\bar{X} = \frac{2+2+7+11+3+7+7+5+10+11+12}{11}$$

$$\bar{X} = \frac{77}{11} = 7 \text{ dir.}$$

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

2, 2, 3, 5, 7, 7, 7, 10, 11, 11, 12

- Grubun tam ortasındaki değer 7 olduğundan ortanca değer 7 dir.
- Grupta en çok tekrar eden değer yine 7 dir. 3 kez tekrar etmiştir. Dolayısıyla grubun tepe değeri (mod) 7 dir.

b) Aritmetik ortalama:

$$\bar{X} = \frac{4+8+2+4+11+7+7+3+5+9}{10}$$

$$\bar{X} = \frac{60}{10} = 6 \text{ dir.}$$

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

2, 3, 4, 4, 5, 7, 7, 8, 9, 11

- Veri sayısı çift olduğundan grubun ortasındaki sayı çiftinin (5 ve 7) aritmetik ortalaması ortanca değeri verecektir. O halde ortanca değer (medyan), $\frac{5+7}{2} = 6$ dir. Ortanca değer (6) grubun bir elemanı değildir.
- Grupta en çok tekrar eden iki sayı vardır. 4 ve 7. Her iki sayıda ikişer kez tekrar etmiştir. Dolayısıyla grubun iki tane tepe değeri vardır. Bunlar 4 ve 7 dir.

c) Aritmetik ortalama: $\bar{X} = \frac{7+9+10+14+17+21}{6}$

$$\bar{X} = \frac{78}{6} = 13 \text{ tür.}$$

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralı olduğundan,

7, 9, 10, 14, 17, 21

- Veri sayısı çift olduğundan ortanca değer $\frac{10+14}{2} = 12$ dir.
- Grupta tekrar eden veri bulunmadığından tepe değeri yoktur.

VERİ VE GRAFİK

Örnek 2:



Her gün düzenli olarak balık tutmaya giden Fatih'in bir hafta boyunca tuttuğu balık sayıları aşağıda verilmiştir.

12, 15, 5, 15, 10, 12, 15

Buna göre, tutulan balık sayılarının merkezi eğilim ölçüleri için

- I. Aritmetik ortalama 12 dir.
- II. Ortanca değer aritmetik ortalamaya eşittir.
- III. Tepe değeri yoktur.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm:

- Verilerin aritmetik ortalaması

$$\bar{X} = \frac{12 + 15 + 5 + 15 + 10 + 12 + 15}{7} = \frac{84}{7} = 12 \text{ dir.}$$

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

5, 10, 12, 12, 15, 15, 15

- Veri grubunun tam ortasındaki sayı 12 olduğunda ortanca (medyan) 12 dir.
- Veri grubunda en çok tekrar eden sayı 3 tekrarlı 15 sayısıdır. O halde tepe değeri 15 tir. O halde I ve II doğru III yanlıştır.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

! Dikkat

Aritmetik ortalama veri grubunun genel durumu hakkında bilgi verir. En büyük ve en küçük değerler aritmetik ortalamayı etkiler. Tepe değeri ve ortanca, aritmetik ortalamaya göre grubun en küçük ve en büyük değerlerinden daha az etkilenir.

Bazı Merkezi Yayılm Ölçüleri

Merkezi yayılım ölçüleri verilerin birbirlerinden ne kadar uzakta olduklarını gösteren ölçülerdir.

Bunlardan bazıları; en büyük değeri, en küçük değeri, açıklık ve standart sapmadır.

En Büyük Değer: Veri grubundaki en büyük sayıdır.

En Küçük Değer: Veri grubundaki en küçük sayıdır.

Açıklık: Veri grubundaki en büyük değeri ile en küçük değeri arasındaki farktır.

Standart Sapma: Veri grubundaki sayıların birbirine yakınlığı ve uzaklığını ölçen, verilerin tutarlılığı hakkında bilgi veren bir yöntemdir. Verilerin aritmetik ortalamaya göre nasıl bir dağılım gösterdiği hakkında bilgi verir. Standart sapma "S" ile gösterilir.

Veri grubunun standart sapması aşağıdaki gibi bulunur.

- 1) Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.
- 2) Her verinin aritmetik ortalama ile farkının karesi alınarak toplanır.
- 3) Elde edilen toplam veri adedinin 1 eksiğine bölünerek sonucun karekökü alınır.

O halde, $x_1, x_2 \dots x_n$ verilerinin standart sapması

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

şeklinde hesaplanır.

VERİ VE GRAFİK

Örnek 3:

Sinan : 10, 14, 10, 14, 12

Emre : 4, 2, 18, 12, 24

Yukarıda iki futbolcunun 5 sezon boyunca attıkları gollerin sayıları verilmiştir.

Verilerin, en büyük ve en küçük değer, açıklık ve standart sapmasını hesaplayalım. Hangi futbolcu attığı gol sayıları bakımından daha istikrarlıdır?

Çözüm:

Sinan: 10, 14, 10, 14, 12 verileri için,

- En büyük değer 14, en küçük değer 10 dur.
- Açıklık, $14 - 10 = 4$ tür.
- Standart sapma için ilk önce aritmetik ortalamayı bulalım.

$$\bar{X} = \frac{10+14+10+14+12}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ dir.}$$

$$S = \sqrt{\frac{(10-12)^2 + (14-12)^2 + (10-12)^2 + (14-12)^2 + (12-12)^2}{5-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{4+4+4+16+0}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \text{ dir.}$$

Emre: 4, 2, 18, 12, 24 verileri için,

- En büyük değer 24, en küçük değer 2 dir.
- Açıklık, $24 - 2 = 22$ dir.
- Standart sapma için ilk önce aritmetik ortalamayı bulalım.

$$\bar{X} = \frac{4+2+18+12+24}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ dir.}$$

$$S = \sqrt{\frac{(4-12)^2 + (2-12)^2 + (18-12)^2 + (12-12)^2 + (24-12)^2}{5-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{64+100+36+0+144}{4}} = \sqrt{\frac{344}{4}} = \sqrt{86} \approx 9,3 \text{ olur.}$$

- Görüldüğü gibi her iki futbolcunun sezon başına gol ortalamaları (12 gol) aynıdır. Dolayısıyla aritmetik ortalama futbolcuların attıkları gol sayıları hakkında genel bir bilgi verir. Fakat iki futbolcuyu kıyasladığımızda hangisinin daha istikrarlı olduğunu anlayamayız.

Sinan'ın verilerinin standart sapması 2, Emre'nin ise yaklaşık olarak 9,3 tür.

Standart sapması düşük olan veri grubunda veriler birbirine ve özellikle aritmetik ortalamaya daha yakındır.

Standart sapma büyüdükçe veriler birbirinden ve özellik aritmetik ortalamadan uzaklaşır. Dolayısıyla Sinan, Emre'ye göre gol sayısı bakımından daha istikrarlı bir futbolcudur.

- Sinan'ın verilerinin açıklığı Emre'nin verilerinin açıklığından daha küçüktür. Bu da Sinan'ın verilerinin birbirine daha yakın olduğunu gösterir.

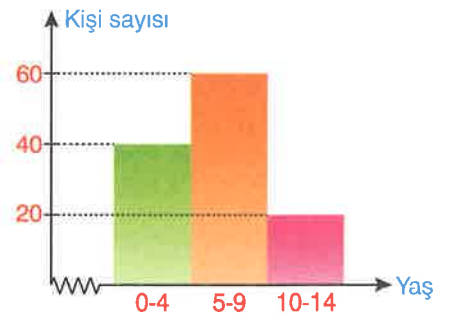
Verilerin Grafikle Gösterilmesi

İçerisinde çok sayıda veri bulunduran veri gruplarının daha iyi anlaşılması ve değerlendirilmesi için verilerin grafik gösterimleri yapılabilir. Grafik sayesinde veriler görsel hale getirilmiş olur. Bu da verileri daha hızlı bir şekilde anlamamızı sağlar.

Histogram Grafiği

Veri grubunda veriler tekrar etme sayılarına göre dikdörtgen biçimindeki sütunlar şeklinde gösterilir.

Çok sayıda veriden oluşan grupların incelenmesinde histogram uygun bir grafik türüdür.



VERİ VE GRAFİK

EKSTREM BİLGİLER

Histogram oluşturulurken aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanır.

2. Açıklık bulunur.

3. İstenilen grup sayısı belirlenir.

4. Grup genişliği,

$$\text{Grup genişliği} > \frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}}$$

eşitsizliği sağlayan **en küçük** tam sayı olarak alınır ve histogram çizilir.

◆ Histogram çizmeden önce verilerin sıklık tablosunu düzenlemek histogram çizmede kolaylık sağlar.

Örnek 4:

Üniversite sınavına hazırlanan bir grup öğrencinin çözmüş oldukları deneme sınavlarının sayısı

4, 4, 2, 10, 16, 7, 7, 13, 25, 9, 12, 22, 6, 6, 15, 8, 8, 5

13, 19, 6, 8, 21, 15, 14, 14,

olarak veriliyor.

Bu verileri 4 gruptan oluşan bir histogram grafiği ile gösterelim.

Çözüm:

• Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

2, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 19, 21, 22, 25

• Grup açıklığı $25 - 2 = 23$ tür.

• İstenilen grup sayısı 4 olduğundan $\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} = \frac{23}{4} = 5,75$ tir.

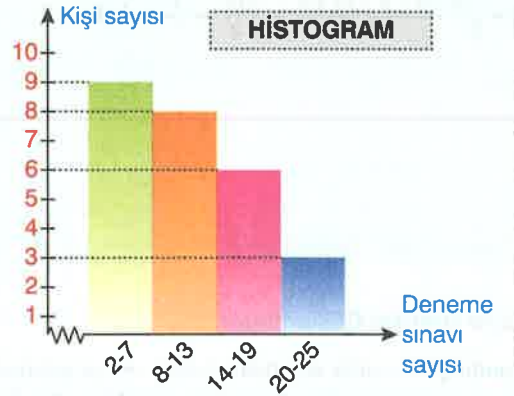
O halde, grup genişliği $> 5,75$ olacağından grup genişliği 6 alınır.

Grup genişliği 6 olarak sıklık tablosunu oluşturalım ve histogramı çizelim.

SIKLIK TABLOSU

Deneme Sınavı Sayısı	Öğrenci Sayısı
2 - 7	9
8 - 13	8
14 - 19	6
20 - 25	3

HISTOGRAM



Kesikli Veri

Belirli bir aralıkta her gerçek sayı değerini alamayan veri gruplarının grafiğinde kesikli veri grafiğini kullanmak daha uygundur. Veriler noktalarla gösterilerek grafik çizilir.

VERİ VE GRAFİK

Örnek 5:

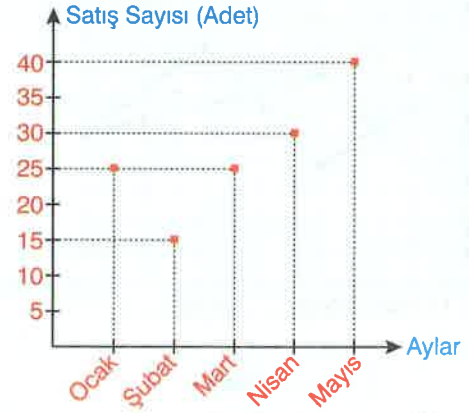
Aylar	Satılan Beyaz Eşya Sayısı
Ocak	25
Şubat	15
Mart	25
Nisan	30
Mayıs	40

Beyaz eşya satan bir mağazada ocak, şubat, mart, nisan ve mayıs aylarında satılan beyaz eşya miktarları yukarıdaki tabloda verilmiştir.

Bu verileri kesikli veri grafiği ile gösterelim.

Çözüm:

Her aya ait satış sayısı nokta ile gösterilerek grafik çizilir.



Sürekli Veri

Belirli bir aralıkta her gerçek sayı değerini alabilen yani aralıksız devam eden veri gruplarıdır.

Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksenle aldıkları değerler işaretlenerek noktaların düz bir çizgi ile birleştirilmesi şeklinde çizilen grafiklerdir.

Örnek 6:

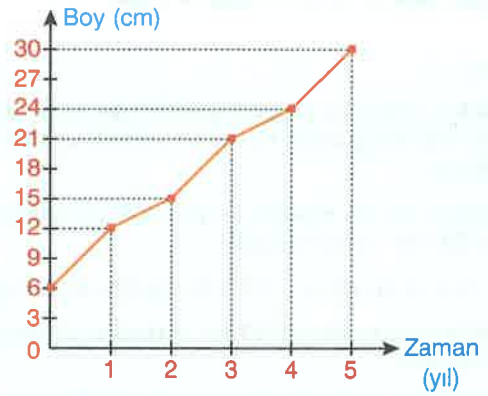
Zaman (yıl)	0	1	2	3	4	5
Boy (cm)	6	12	15	21	24	30

Yukarıdaki tabloda bir bitkinin boyunun yıllara göre değişimi verilmiştir.

Buna en uygun grafik türünü belirleyerek çizelim.

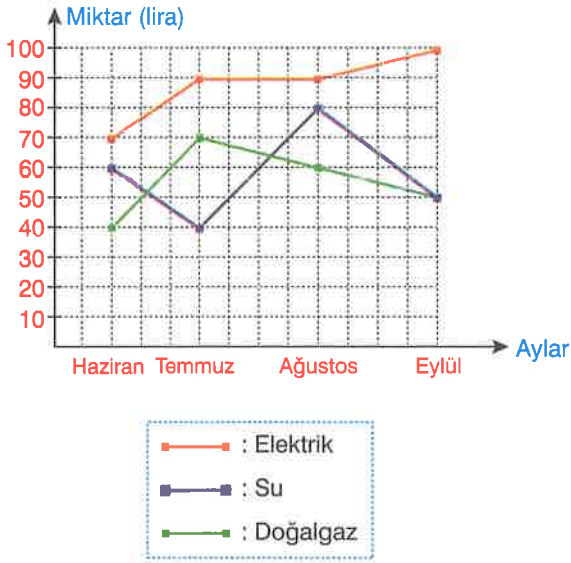
Çözüm:

Büyümekte olan bir bitki verilen aralıklarda her gerçek sayı değerini alacağından sürekli veri grubuna girmektedir. Dolayısıyla en uygun grafik türü çizgi grafiğidir.



VERİ VE GRAFİK

Örnek 7:



Yukarıdaki çizgi grafiği bir ailenin haziran, temmuz, ağustos ve eylül aylarına ait elektrik, su ve doğalgaz faturalarını göstermektedir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

- A) Her ay en yüksek fatura elektrik faturası olmuştur.
- B) Temmuz ayında toplam fatura tutarı 200 liradır.
- C) Su faturası en yüksek ağustos ayında gelmiştir.
- D) Eylül ayında su faturası ile doğalgaz faturası aynı miktarda gelmiştir.
- E) Doğalgaz faturası düzenli olarak artmıştır.

Çözüm:

- A) Elektrik faturasına ait çizgi grafiği diğer çizgi grafiklerin üzerinde olduğundan her ay en yüksek elektrik faturası gelmiştir.
- B) Temmuz ayında elektrik, su ve doğalgaz faturaları toplam $90+40+70=200$ liradır.
- C) Su faturası en yüksek 80 lira ile ağustos ayında gelmiştir.
- D) Eylül ayında su faturası 50 lira, doğalgaz faturası da 50 lira olmuştur.
- E) Doğalgaz faturası temmuz ayında önceki aya göre artmış daha sonraki aylarda ise azalmıştır. Dolayısıyla düzenli olarak artmamıştır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Sütun Grafiği

Verilerin dik koordinat düzleminde yatay ya da dikey olarak sütun biçiminde gösterildiği grafik türüdür.

Örnek 8:

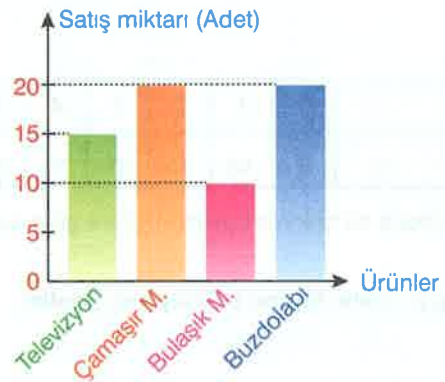
Ürün	Adet
Televizyon	15
Çamaşır Makinesi	20
Bulaşık Makinesi	10
Buzdolabı	20

Yukarıdaki tabloda bir mağazanın bir ay içerisinde satış yaptığı ürünlerin adetleri verilmiştir.

Bu verileri sütun grafiği ile gösterelim.

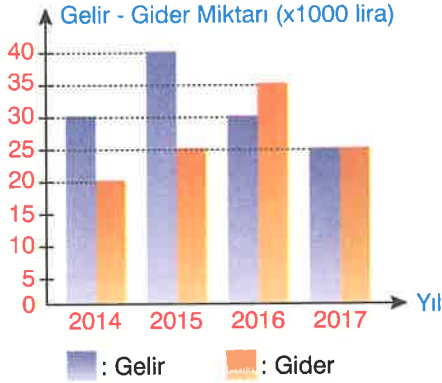
Çözüm:

Yatay eksene ürün çeşitlerini, dikey eksene ise her ürünün satış adedini yazarak aşağıdaki gibi bir sütun grafiği elde edebiliriz.



VERİ VE GRAFİK

Örnek 9:



Yukarıda verilen ikili sütun grafiği bir şirketin gelir ve gider miktarını göstermektedir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

- A) Şirket en yüksek, kârı 2015 yılında yapmıştır.
- B) Şirket 2016 yılında zarar etmiştir.
- C) 2017 yılında gelir ile gider eşittir.
- D) Şirketin bu yıllardaki toplam geliri 125000 liradır.
- E) Şirket bu yıllarda toplam 30000 lira kâr etmiştir.

Çözüm:

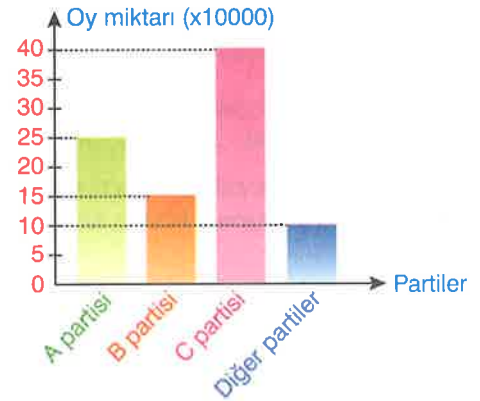
- A) Şirket en yüksek kârını $40000 - 25000 = 15000$ lira ile 2015 yılında gerçekleştirmiştir.
- B) 2016 yılında gelir 30000 lira, gider ise 35000 lira olduğundan bu yıl şirket zarar etmiştir.
- C) 2017 yılında gelir 25000 lira ve gider de 25000 lira olmuştur. Dolayısıyla gelir ile gider eşittir.
- D) Şirketin bu yıllardaki toplam geliri, $30000 + 40000 + 30000 + 25000 = 125000$ liradır.
- E) Şirket,
 - 2014 yılında $30000 - 20000 = 10000$ lira kâr,
 - 2015 yılında $40000 - 25000 = 15000$ lira kâr
 - 2016 yılında $35000 - 30000 = 5000$ lira zarar
 - 2017 yılında $25000 - 25000 = 0$ lira (Ne kâr, ne zarar)
 elde ettiğinden toplam kâr miktarı, $25000 - 5000 = 20000$ liradır. Dolayısıyla verilen 30000 bilgisi yanlıştır.

Doğru cevap "E" seçeneğidir.

Daire Grafiği

Her bir verinin, verilerin tamamına oranını daire dilimleri şeklinde gösteren grafik türüdür. Daire grafiğinde her veri grubuna ait dilimin merkez açısı veri sayısı ile doğru orantılıdır.

Örnek 10:



Bir ülkede yapılan seçimlerde bir bölgeye ait partilerin oy oranları yukarıdaki sütun grafiğinde verilmiştir.

Bu verileri daire grafiği ile gösterelim.

Çözüm:

Tüm partilerin aldıkları oyların tamamı $25 + 15 + 40 + 10 = 90$ (x10000) olur.

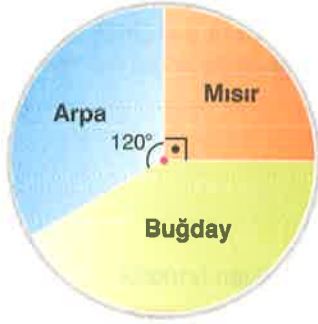
Daire grafiğinde tüm verilerin toplamı 360° ye denk geleceğinden, her 10000 kişi $\frac{360^\circ}{90} = 4^\circ$ ile gösterilir.



- A partisi $25.4 = 100^\circ$
- B partisi $15.4 = 60^\circ$
- C partisi $40.4 = 160^\circ$
- Diğer partiler $10.4 = 40^\circ$ ile gösterilir.

VERİ VE GRAFİK

Örnek 11:



Yukarıdaki daire grafiğinde bir ülkede bir yılda üretilen buğday, arpa ve mısır miktarlarının oranları verilmiştir.

Üretilen buğday miktarı arpa miktarından 60000 ton fazla olduğuna göre, bu yılda üretilen mısır miktarı kaç tondur?

- A) 145000 B) 154000 C) 180000
D) 225000 E) 270000

Çözüm:



Daire grafiğinde mısır 90° , arpa 120° lik daire dilimleri ile gösterildiğinden buğday $360^\circ - (90^\circ + 120^\circ) = 150^\circ$ lik bir dilime sahiptir.

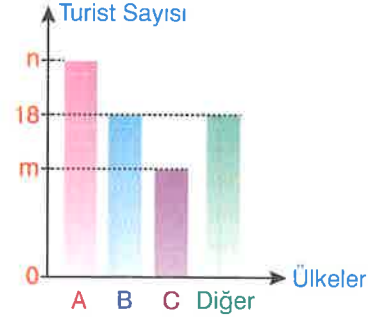
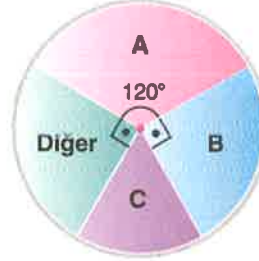
Ürünlerin miktarlarını merkez açılarıyla doğru orantılı olacağından buğday $150x$, arpa $120x$ ve mısır $90x$ ton olarak yazabiliriz.

$$150x - 120x = 60000 \Rightarrow 30x = 60000 \Rightarrow x = 2000 \text{ ton olur.}$$

O halde üretilen mısır miktarı, $90x = 90 \cdot 2000 = 180000$ tondur.

Doğru cevap "C" seçeneğidir.

Örnek 12:



Bir turistik otele yıl içerisinde A, B, C ve diğer ülkelerden gelen turist sayıları ve oranları ile ilgili yukarıdaki grafikler verilmiştir.

Buna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 36 B) 38 C) 40 D) 42 E) 48

Çözüm:

Daire grafiğinde C ülkelerine ait dilimin merkez açısı

$$360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 60^\circ \text{ olacaktır.}$$

Sütun grafiğinde B ve diğer ülkelere ait turist sayısı 18 verilmiş ve daire diliminde 90° ile gösterilmiştir.

O halde,

- 90° ile gösterilen dilim 18 turist ise
 60° ile gösterilen dilim m turist

Doğru orantı

$$90 \cdot m = 60 \cdot 18 \Rightarrow m = 12 \text{ dir.}$$

- 90° ile gösterilen dilim 18 turist ise
 120° ile gösterilen dilim n turist

Doğru orantı

$$90 \cdot n = 120 \cdot 18 \Rightarrow n = 24 \text{ tür.}$$

Buradan, $m + n = 12 + 24 = 36$ dir.

Doğru cevap "A" seçeneğidir.

VERİ VE GRAFİK

Test : 01

1. 6, 9, 9, 12, 18, 20, 20, 20, 21 veri grubu ile ilgili olarak,

- I. Aritmetik ortalama 15 tir.
- II. Ortanca değer 18 dir.
- III. Tepe değer 20 dir.

Bilgilerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) II ve III
D) I ve II E) I, II ve III

2. 6, 6, 8, 11 ve x sayılarının aritmetik ortalaması 9 olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

3. 3, 3, 5, 9, x, 18, 20, 20 verileri küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir veri grubudur.

Grubun ortanca değeri 12 olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

4. 9, 11, 11, 4, 8, 7, 7, 10, 10, 6, 18, 15

veri grubuna aşağıdaki verilerden hangisi eklenirse açıklık değeri değişmez?

- A) 2 B) 3 C) 11 D) 19 E) 21

5. 4, 8, 8, 10, 10 veri grubunun standart sapması kaçtır?

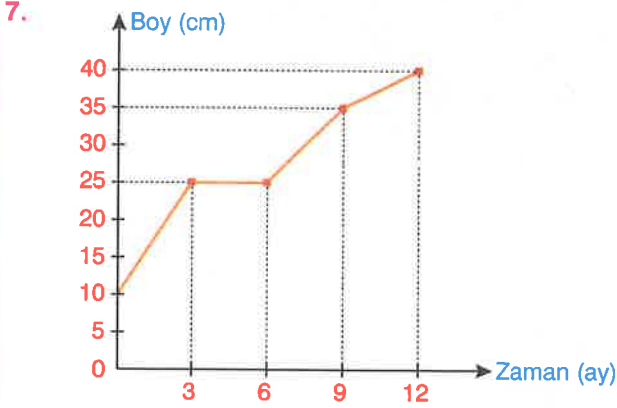
- A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

6. Aşağıda verilen veri gruplarından hangisinin standart sapması **en düşüktür**?

- A) 2, 4, 6, 8, 10
B) 15, 15, 15, 15, 16
C) 5, 10, 15, 20, 25
D) 1, 2, 10, 15, 16
E) 3, 3, 7, 10, 10

VERİ VE GRAFİK

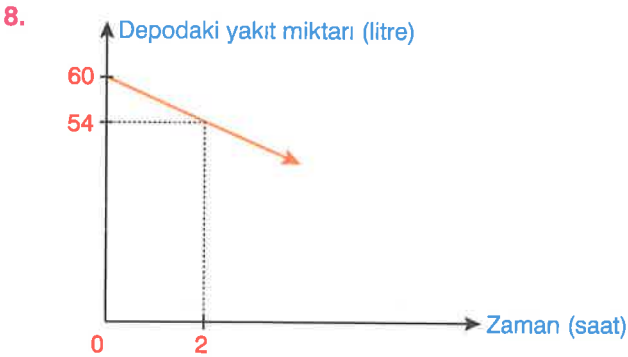
Test : 01



Yukarıda bir bitkinin dikildikten sonraki 12 aylık boy - zaman grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) Bitkinin boyu 6 - 9 ayları arasında 10 cm uzamıştır.
- B) Dikildiği anda bitkinin boyu 10 cm dir.
- C) Bu süre içerisinde bitki 30 cm uzamıştır.
- D) 12 ay sonunda bitkinin boyu 50 cm olmuştur.
- E) 3 - 6 ayları arasında bitkinin boyunda bir değişiklik olmamıştır.

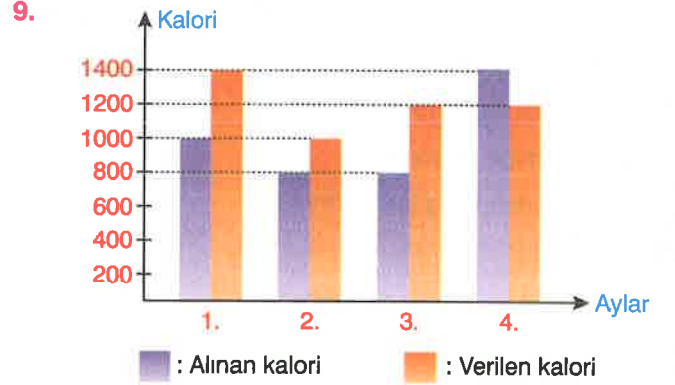


Yukarıdaki grafik bir aracın deposundaki yakıt miktarının zamana göre değişimini göstermektedir.

Buna göre, kaçınıcı saatte depodaki tüm yakıt tamamen biter?

- A) 24
- B) 20
- C) 18
- D) 15
- E) 10

www.bireyakaademi.com



Yandaki ikili sütun grafiği bir sporcunun 4 gün boyunca aldığı ve verildiği kalori miktarını göstermektedir.

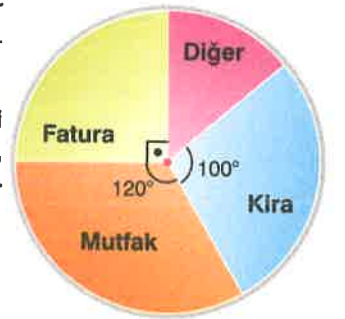
Buna göre, aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

- A) İlk 3 ayda verilen kalori miktarı alınan kalori miktarından daha fazladır.
- B) 2. ve 3. aylarda alınan kalori miktarı eşittir.
- C) 3. ve 4. aylarda verilen kalori miktarı eşittir.
- D) 1. ayda verilen kalori miktarı alınan kalori miktarından 400 kalori fazladır.
- E) 4 ayda toplam verilen kalori miktarı 3600 kaloridir.



10. Yukarıdaki daire grafiği bir ailenin aylık giderlerini göstermektedir.

Ailenin aylık fatura gideri 450 lira olduğuna göre, aşağıda verilen bilgilerden hangisi doğrudur?



- A) Ailenin aylık toplam gideri 1500 liradır.
- B) Diğer giderlerin tutarı 250 liradır.
- C) Ailenin aylık kira gideri 600 liradır.
- D) En yüksek gider kira gideridir.
- E) Mutfak gideri kira giderinden 150 lira fazladır.

www.bireyakaademi.com



Cevap Anahtarı



ÜNİTE I MANTIK

Test - 1 1. D 2. C 3. E 4. A 5. E 6. B 7. A 8. B 9. E 10. B 11. E 12. D

İlk Adım Soruları 1. D 2. D 3. D 4. E 5. D 6. C 7. E 8. E

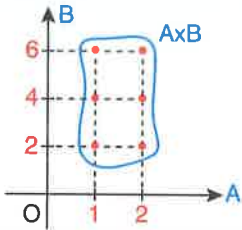
ÜNİTE II KÜMELER

Test - 1 1. E 2. C 3. D 4. A 5. D 6. E 7. B 8. D 9. C 10. C 11. B 12. D

Test - 2 1. A 2. E 3. E 4. C 5. A 6. C 7. C 8. B 9. A 10. E 11. D 12. D

Etkinlik - 1 1. a) ✓ b) ✓ c) ✗ d) ✓ e) ✓ f) ✓ h) ✓ i) ✗ j) ✓ 2. a) ✗ b) ✓ c) ✗ d) ✓ e) ✓ f) ✗ g) ✗

Etkinlik - 2



Etkinlik - 3 1. a) $\in$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\notin$ e) $\notin$ f) $\notin$
2. a) $\subseteq$ b) $\subseteq$ c) $\not\subseteq$ d) $\subseteq$ e) $\subseteq$ f) $\subseteq$

Etkinlik - 4 a) {K, E, R, T, N, L} ve 6 b) {M, E, L, K, T} ve 5 c) {E, T, L} ve 3
d) {K, E, R, T, N, L, M} ve 7 e) {K, R, N} ve 3 f) {M} ve 1

Etkinlik - 5 a) 4 b) 8 c) 4 d) 8 e) 1

İlk Adım Soruları 1. B 2. D 3. C 4. E 5. B 6. E 7. C 8. B

ÜNİTE III DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Etkinlik - 1

Sayı	3 ile	4 ile	5 ile	9 ile
31760		✓	✓	
12483	✓			✓
7245	✓		✓	✓
3721				
40845	✓		✓	

Etkinlik - 2 1. b) ✓ d) ✓
2. a) ✓ f) ✓

Etkinlik - 3 a) ✓ b) ✗ c) ✓ d) ✓ e) ✓ f) ✗

Etkinlik - 4 a) Cumartesi b) Cuma c) Salı d) 13.00 e) 19.00

Etkinlik - 5 a) ✓ b) ✗ c) ✓ d) ✗ e) ✓ f) ✓

Etkinlik - 6 a) $-\frac{5}{24}$ b) $\frac{3}{2}$ c) -1 d) -9 e) $\frac{1}{4}$

Etkinlik - 7 a) ✗ b) ✓ c) ✓ d) ✓ e) ✓ f) ✗

Etkinlik - 8 1. a) $5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{6}$ e) $5\sqrt{6}$ f) $10\sqrt{6}$
2. b) ✓ e) ✓ f) ✓

Etkinlik - 9 a) [0, 5] b) [0, 2] c) (3, 5] d) [-2, 1]

Etkinlik - 10 a) $[-\infty, 3]$ b) $[-\infty, 5]$ c) $[-\infty, 6]$ d) $[-2, \infty)$
e) $\{-4, 4\}$ f) $\{-2, 4\}$ g) $\{1, 8\}$ h) $\emptyset$

Etkinlik - 11 1) ✗ 2) ✓ 3) ✓ 4) ✗ 5) ✓ 6) ✓

Etkinlik - 12 a) $\varnothing = \{(3, 1)\}$ b) $\varnothing = \{(1, -1)\}$ c) $\varnothing = \{(0, -3)\}$



ÜNİTE III

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Etkinlik - 13 a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{8}{3}$

Etkinlik - 14 1) X 2) ✓ 3) ✓ 4) ✓ 5) ✓ 6) ✓

Etkinlik - 15 a) 4 b) 12 c) 40 d) 3

İlk Adım Soruları 1. D 2. C 3. C 4. E 5. C 6. D 7. B 8. E 9. C 10. A 11. B 12. E 13. E 14. C 15. B 16. B 17. C 18. D 19. A 20. E 21. E 22. C 23. D 24. A 25. C 26. A 27. B 28. E 29. A 30. D 31. E 32. A 33. B 34. D 35. D 36. A 37. C 38. C 39. B 40. E 41. C 42. B 43. B 44. E 45. B 46. D 47. D 48. C

Test - 1 1. B 2. D 3. B 4. C 5. C 6. B 7. B 8. E 9. E 10. A 11. D 12. C

Test - 2 1. C 2. E 3. A 4. B 5. B 6. D 7. B 8. C 9. C 10. A 11. C 12. A

Test - 3 1. B 2. D 3. A 4. E 5. B 6. D 7. E 8. D 9. C 10. A 11. D 12. B

Test - 4 1. B 2. E 3. A 4. A 5. B 6. E 7. B 8. A 9. B 10. D 11. B 12. E

Test - 5 1. B 2. D 3. D 4. B 5. D 6. C 7. C 8. A 9. D 10. D 11. B 12. C

Test - 6 1. E 2. C 3. A 4. A 5. E 6. D 7. A 8. E 9. A 10. C 11. C 12. B

Test - 7 1. C 2. A 3. B 4. D 5. D 6. B 7. E 8. D 9. C 10. B 11. D 12. B

Test - 8 1. D 2. A 3. B 4. E 5. D 6. A 7. B 8. B 9. D 10. C 11. E 12. D

Test - 9 1. D 2. A 3. C 4. C 5. B 6. E 7. D 8. A 9. D 10. A

Test - 10 1. D 2. E 3. E 4. A 5. A 6. B 7. C 8. E 9. D 10. B 11. E 12. B

Test - 11 1. D 2. E 3. A 4. B 5. C 6. E 7. C 8. E 9. A 10. B 11. B 12. D

Test - 12 1. B 2. D 3. C 4. C 5. E 6. B 7. A 8. D 9. A 10. C 11. C 12. B

Test - 13 1. A 2. B 3. E 4. D 5. D 6. E 7. D 8. A 9. A 10. B 11. C 12. E 13. E 14. D

Test - 14 1. A 2. B 3. D 4. C 5. E 6. D 7. A 8. B 9. D 10. E 11. C 12. A

Test - 15 1. B 2. D 3. D 4. D 5. B 6. C 7. C 8. A 9. C 10. D 11. B 12. B

Test - 16 1. B 2. E 3. C 4. A 5. C 6. D 7. A 8. D 9. B 10. C 11. B 12. D

Test - 17 1. A 2. C 3. B 4. E 5. D 6. B 7. E 8. D 9. E 10. D 11. E 12. A



ÜNİTE III

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Test - 18 1. E 2. A 3. B 4. B 5. C 6. D 7. A 8. C 9. D 10. B 11. C 12. C

Test - 19 1. E 2. B 3. C 4. D 5. B 6. A 7. A 8. C 9. C 10. C 11. D 12. C

Test - 20 1. A 2. D 3. B 4. B 5. E 6. D 7. A 8. A 9. B 10. D 11. D 12. C

Test - 21 1. C 2. E 3. A 4. D 5. A 6. B 7. B 8. D 9. A 10. D 11. B 12. D

Test - 22 1. C 2. B 3. D 4. A 5. A 6. C 7. D 8. B 9. E 10. C 11. A 12. D

Test - 23 1. D 2. A 3. E 4. A 5. E 6. D 7. B 8. A 9. E 10. B 11. A 12. E

ÜNİTE IV

ÜÇGENLER

Etkinlik - 1 a) ✓ b) X c) ✓ d) X e) ✓ f) ✓ g) ✓

Etkinlik - 2 a. {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} b. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
c. {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} d. {16, 17, 18, 19, 20}

Etkinlik - 3 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{5}$

Etkinlik - 4 a) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ b) $\triangle ABC \cong \triangle FDE$
c) $\triangle ABC \cong \triangle LKM$ d) $\triangle ABC \cong \triangle CDE$

Etkinlik - 5 1. a) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ b) $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ c) $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ 2. a) $2\sqrt{13}$ b) 4 c) 3 d) $4\sqrt{2}$

Test - 1 1. A 2. C 3. C 4. D 5. A 6. B 7. B 8. C 9. D 10. E 11. C 12. A

Test - 2 1. B 2. A 3. D 4. C 5. C 6. E 7. A 8. D 9. B 10. E 11. A 12. D

Test - 3 1. E 2. B 3. D 4. B 5. B 6. D 7. D 8. D 9. D 10. C 11. D 12. C

Test - 4 1. C 2. B 3. D 4. D 5. E 6. D 7. B 8. C 9. C 10. B 11. A 12. D

Test - 5 1. B 2. C 3. B 4. D 5. C 6. E 7. C 8. D 9. A 10. A 11. C 12. D

Test - 6 1. B 2. C 3. A 4. E 5. D 6. D 7. C 8. A 9. A 10. B 11. C 12. A

Test - 7 1. C 2. C 3. A 4. B 5. D 6. D 7. A 8. A 9. C 10. B 11. E 12. D

Test - 8 1. A 2. E 3. B 4. C 5. D 6. B 7. C 8. B 9. E 10. A 11. D 12. D

Test - 9 1. D 2. B 3. A 4. C 5. D 6. C 7. B 8. A 9. C 10. C 11. D 12. A

Test - 10 1. A 2. D 3. E 4. C 5. B 6. A 7. D 8. C 9. A 10. E 11. E 12. A

İlk Adım Soruları

1. E 2. C 3. A
4. D 5. A 6. D
7. E 8. A 9. A
10. B 11. C 12. E
13. B 14. C 15. C
16. B 17. D 18. B
19. A 20. B 21. E
22. E 23. A

ÜNİTE V

VERİ VE GRAFİK

Test - 1 1. E 2. D 3. D 4. C 5. D 6. B 7. D 8. B 9. E 10. B