LİMİT VE SÜREKLİLİK

FATİH İHTİYAROĞLU - BARIŞ ŞAHBAZ

Kapak Tasarım : Apotemi Tasarım Ekibi

Dizgi : Apotemi Dizgi

Basım Yeri : Feryal Matbaa

M. Gökçek Bulvarı 1485. Cad. No: 15

İvedik Organize Sanayi/ANKARA

(0.312) 395 22 37 - 38

APOTEMİ

apotemigrup@gmail.com

www.apotemi.com

İÇİNDEKİLER

LİMİT

SÜREKLİLİK

MARATON TESTLERİ

YENİ MÜFREDAT HAKKINDA

Sevgili öğrenciler;

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 2013 yılında almış olduğu kararla orta öğretim Matematik dersi öğretim müfredatı değişmiştir. Ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programlarının 2013-2014 Öğretim Yılından itibaren 9'uncu sınıflardan başlamak üzere kademeli olarak değiştirilmesi kararlaştırılmış ve bu dönüşüm süreci 2016-2017 öğretim yılı itibariyle tamamlanmış olacaktır.

Yeni programda öğrencilere

9. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 47 kazanım

10. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 44 kazanım

11. sınıfta matematik dersinde 216 saatte 38 kazanım

12. sınıfta matematik dersinde 216 saatte 38 kazanım

verilmektedir.

Yeni programda **LİMİT ve SÜREKLİLİK** konusu, 12. sınıfta 14 saatte sunulmaktadır. **Limit ve Süreklilik konusu 12. sınıf (ileri düzey) lise müfredatındaki 216 saatlik matematik dersi öğretim programının oran olarak %6 sını oluşturmaktadır. Ayrıca Limit ve Süreklilik konusunda elde edilen kazanımlar Türev ve İntegral gibi konularda da temel oluşturmaktadır. Bu nedenle konunun LYS deki önemi ortadadır.**

Yukarıda saydığımız tüm gelişmeleri ve konunun öneminin dikkate alarak, **Limit ve Süreklilik** konusunu elinizdeki bu kitapta size en güzel şekilde sunmaya çalıştık. **Apotemi Yayınları** olarak kitaptan en iyi verimi almanızı dileriz.

Kitapla ve yayınlarımızla ilgili görüş, öneri, istek ve yorumlarınızı aşağıdaki mail adreslerine iletmeniz bizi çok memnun edecek ve çalışmalarımızı güzelleştirme yolunda çok yararlı olacaktır.

fatihihtiyaroglu@gmail.com

apotemigrup@gmail.com

ÖNSÖZ

Sevgili Öğrenciler;

Limit sonsuzluk kavramına olan ilginin bir sonucu olarak matematikte de merak uyandırmış ve fonksiyonların sonsuzdaki davranışları ya da bir noktanın çok yakınındaki durumları incelenmiş ve bunlar Türev, İntegral gibi pek çok matematik konusunun gelişmesine katkı yapmıştır. **Limit** ve devamında **Süreklilik**; Türev, İntegral gibi önemli konuların da alt yapısını oluşturduğundan iyi öğrenilmesi ve pekiştirilmesi gereken konulardır. **Limit ve Süreklilik** sağlam bir temele oturtulmazsa saydığımız diğer konularda sıkıntılarla karşılaşmanız muhtemel olacaktır. Bu temel konunun en iyi şekilde anlaşılabilmesi, detaylı bir konu anlatımı ve bol örnek çözülmesi ile mümkün olabilir. Bunun gerçekleşebilmesi adına **Apotemi Yayınları** olarak 'tek konu tek kitap' kitap serimizde bu kitabı **LİMİT ve SÜREKLİLİK** konusuna ayırdık.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için kitabın anlatımında **Adımlama Tekniğini** uyguladık. İlk defa **Apotemi Yayınları** tarafından uygulanan bu konu anlatım tekniğini özgün sorularla destekleyerek, sizleri **LİMİT ve SÜREKLİLİK** konusunda karşılaşabileceğiniz her türlü soruya hazırlamak amaçlanmıştır.

Adımlama Tekniğinde, Limit ve Süreklilik ile ilgili her konu alt başlıklara ayrıldı. Her alt başlıkla ilgili gerekli bilgiler '**Adım**' başlığıyla verilip '**ADIM PEKİŞTİRME**' testleriyle bilgiler sağlamlaştırıldı. Ve ilgili konuların bitiminde '**ADIM GÜÇLENDİRME**' testleriyle takviye yapıldı. Kitabın sonuna '**MARATON TESTLERİ**' konularak bir çok kaynakta yer almayan özgün sorularla son bir genel tekrar yapıldı.

Ciddi bir emek ve titiz bir çalışma sonucunda hazırlanan bu kitabın siz değerli öğrencilerimize faydalı olması dileğiyle...

Apotemi Grup adına

FATİH İHTİYAROĞLU

BARIŞ ŞAHBAZ

LİMİT

A) Limitin Tanımı

B) Limit İşleminin Özellikleri

C) Parçalı Fonksiyon Limiti

D) Mutlak Değerli Fonksiyon Limiti

E) Genişletilmiş Gerçel Sayılar Kümesi

F) Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

G) Limitte Belirsizlik Durumları

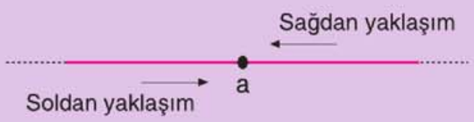
ADIM

LİMİT

Limit konusuna geçmeden önce limiti tarif ederken kullanacağımız bir kavramı, yaklaşım kavramını öncelikle ele alalım.

Bir noktaya yaklaşım

Sayı doğrusu üzerinde bulunan herhangi bir a noktasına aşağıdaki gibi sağ ve sol olmak üzere iki farklı taraftan yaklaşılabilir.



★ a sayısına a dan daha büyük sayıların bulunduğu taraftan yaklaşılırsa buna **a ya sağdan yaklaşma** adı verilir ve $\mathbf{a^+}$ ile sembolize edilir.

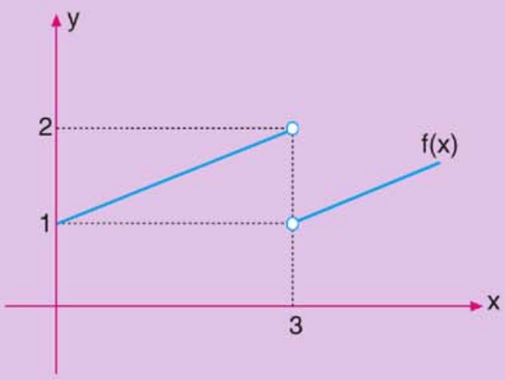
★ a sayısına a dan daha küçük sayıların bulunduğu taraftan yaklaşılırsa buna **a ya soldan yaklaşma** adı verilir ve $\mathbf{a^-}$ ile sembolize edilir.

Örneğin:

Bir x değişkeninin 3 sayısına sağdan yaklaşımı $x \to 3^+$ biçiminde

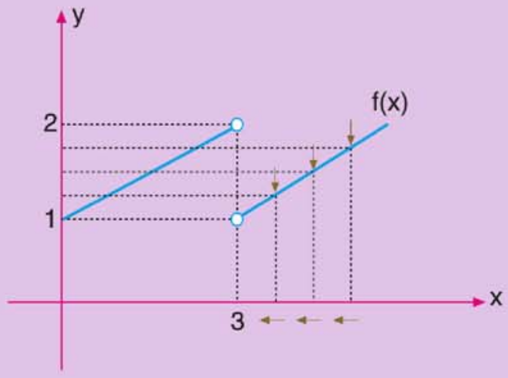
Bir x değişkeninin 3 sayısına soldan yaklaşımı $x \to 3^-$ biçiminde gösterilir.

Bir noktaya yaklaşımı bir de fonksiyon grafiği üzerinde örneklendirmeye çalışalım.



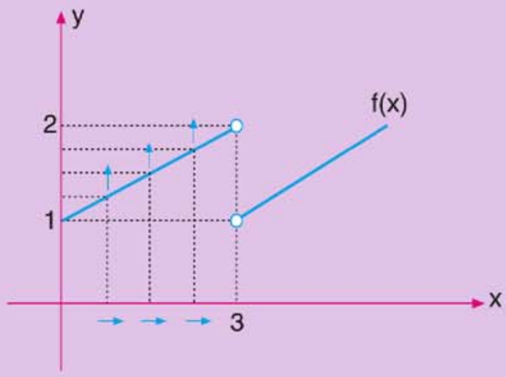
Grafiği verilen f(x) fonksiyonu üzerinde sağdan ve soldan yaklaşma kavramlarını inceleyelim.

★ x değişkeni değiştikçe f(x) fonksiyonunda buna bağlı olarak değişmeler gözlenmektedir. Grafiğe bakarak x, 3 e sağdan yaklaştıkça f(x) değerlerinde bir azalma olacağı görülmektedir.



Yani bu durum "*x değişkeni 3 e sağdan yaklaştıkça f(x) değerleri azalarak 1 e doğru yaklaşacaktır.*" şeklinde yorumlanabilir.

★ Yine grafiğe bakarak x, 3 e soldan yaklaştıkça f(x) değerlerinde bir artma olacağı görülmektedir.



Yani bu durum "*x değişkeni 3 e soldan yaklaştıkça f(x) değerleri artarak 2 ye doğru yaklaşacaktır.*" şeklinde yorumlanabilir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi bir noktaya yaklaşım kavramı kullanılarak fonksiyonun yapısı, hareketi hakkında yorumlar çıkartılabilmektedir.

Grafik üzerinde izah etmeye çalıştığımız durumu bir de sayısal değerler kullanarak görmeye çalışalım.

Örneğin:

Reel sayılarda tanımlı $f(x) = x + 1$ fonksiyonunu ele alalım.

Bu fonksiyonun $x = 2$ noktasının sağından ve solundan yaklaşıldığında nasıl hareket ettiğini sayı değerleri yardımıyla gözlemleyelim.

x	...	1,9	1,95	1,99	2	2,001	2,01	2,1	...
f(x)	...	2,9	2,95	2,99	3	3,001	3,01	3,1	...

Dikkat edilirse x, 2 ye soldan ne kadar yakın seçilirse f(x) değeri 3 e o kadar yaklaşmaktadır. Aynı şekilde x, 2 ye sağdan ne kadar yakın seçilirse f(x) değeri 3 e o kadar yaklaşmaktadır.

Özetle fonksiyonun x in değişen değerlerine karşılık bir değere yaklaşmasına, bir başka ifadeyle f(x) in bir değere doğru yığılmasına **fonksiyonun o noktadaki limiti** adı verilir.

Yukarda x in 2 ye sağdan ve soldan yaklaşmasıyla ortaya koymaya çalıştığımız limit kavramı matematiksel olarak şu şekilde gösterilir.

★ x, 2 ye soldan yaklaşırken f(x) in limiti

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Bu gösterim soldan limiti ifade eder.

★ x, 2 ye sağdan yaklaşırken f(x) in limiti

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Bu gösterim sağdan limiti ifade eder.

O halde şu soruyu sorabiliriz, x 2 ye giderken f(x) in limiti kaçtır?

Birazdan limit tanımında ifade edeceğimiz limitin var olma koşuluna burada biraz değinelim.

Bir noktada limitin var olabilimesi için o noktaya sağdan ve soldan yaklaşıldığında fonksiyonun aynı değere yakınsaması (yığılması) gerekir.

O halde örneğimizde f in 2 ye giderkenki limiti (sağ ve sol limitlerin her ikisi de 3 e yakınsandığından)

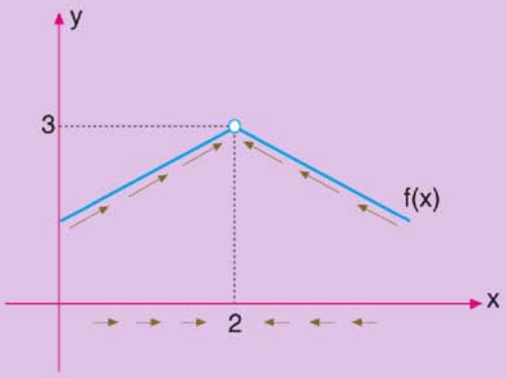
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

bulunur.

DİKKAT !

Fonksiyonun bir noktada limitinin var olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerekmez.

Aşağıdaki grafiği inceleyelim.



f(x) fonksiyonu x = 2 de tanımlı değil. Peki f in bu noktada limitinden söz edilebilir mi?

Fonksiyonun bir noktada limitini araştırırken sağdan ve soldan limitine bakılması ve bunların aynı sayıya yığılması gerektiğinden bahsetmiştik.

Bu grafiğe bakılırsa;

x, 2 ye soldan yaklaşırken f(x), 3 e yakınsar.

x, 2 ye sağdan yaklaşırken f(x), 3 e yakınsar.

O halde,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

bulunur. Dolayısıyla f in x = 2 de tanımlı olması gerekmez.

Limit kavramını daha iyi anlayabilmek için yaptığımız bu uzun girişten sonra şimdi limitin tanımını yapalım.

Tanım:

a bir gerçel sayı olmak üzere,

x, a ya yaklaşırken (sağdan ve soldan) f(x) fonksiyonu da k gibi bir gerçel sayıya yakınsıyorsa;

Bunu

"x, a ya yaklaşırken f(x) in limiti k olur." şeklinde ifade ederiz ve aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

Bir fonksiyonun a noktasın limitinin var olması için şu iki koşul sağlanmalıdır:

1. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (soldan limit)

   $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (sağdan limit)

   limitler var olmalı

2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ olmalıdır.

   Yani a noktasında sağ limit ve sol limit birbirine eşit olmalıdır.

★ Eğer sağ ve sol limitler eşit değilse "O noktada limit yoktur." denir.

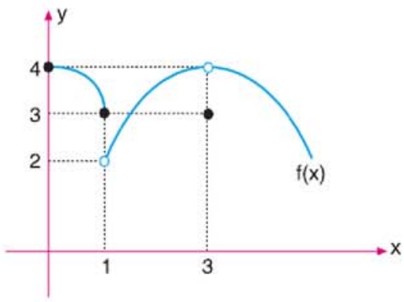
DİKKAT !

★ Bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olması için fonksiyon o noktada tanımlı olmak zorunda değildir.

★ Bir fonksiyonun a gibi bir gerçel sayı için limiti varsa bu limit sadece bir gerçel sayıya eşit olmalıdır. Yani fonksiyonun o noktadaki limiti birden fazla sayıya eşit olamaz.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyon için

a. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

limitlerini hesaplayınız.

Çözüm

a. Grafiğe bakılırsa x, 1 e sağdan yaklaşırken f(x) değerlerinin azalarak 2 ye yaklaştığı görülmektedir.

O halde, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

b. x, 1 e soldan yaklaşırken f(x) değerlerinin azalarak 3 e yaklaştığı görülmektedir. O halde, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

c. x, 1 yaklaşırken f(x) in limitinin var olabilmesi için 1 e soldan ve sağdan yaklaştığımızda limitlerinin eşit olması gerekir.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

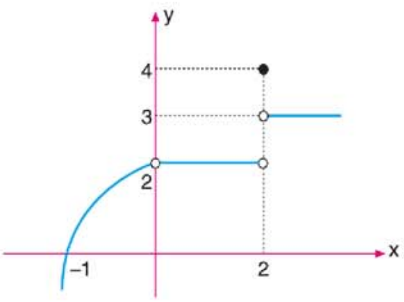
d. Grafiğe bakılırsa x, 3 e soldan ve sağdan yaklaştığında f(x) değerlerinin 4 e yaklaştığı görülmektedir. O halde x, 3 e giderken f(x) in limiti 4 olarak bulunur.

Yani, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ bulunur.

Burada f(3) = 3 olması f(x) in limitini değiştirmez. Çünkü limit tanımı hatırlanırsa f in bir noktada limitinin olma şartı, o noktada f in sağ ve sol limitlerinin birbirine eşit olmasıdır.

ÖRNEK 2



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyon için

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

limitlerini hesaplayınız.

Çözüm

a. Grafiğe bakıldığında x sıfıra soldan ve sağdan yaklaştığında f(x) değerlerinin 2 ye yaklaştığı görülmektedir. Yani,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ bulunur.

b. Grafik incelenirse x, 2 ye sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) değerlerinin farklı değerlere yakınsadığı görülmektedir.

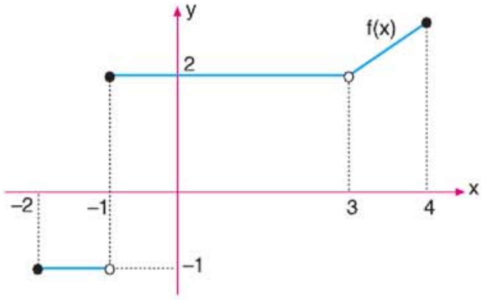
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$$

$x \to 2$ için sağ ve sol limitler eşit olmadığından

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK 3

f: [–2, 4] → R olmak üzere,



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2$ **olduğuna göre, a nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?**

Çözüm

$x \to a$ için f(x) in limitinin 2 olması isteniyor. Yani x, a tam sayısına sağdan yaklaştığında f(x) in 2 ye yakınsamasını istiyoruz. Bunu sağlayan a tam sayıları 0, 1, 2 ve 3 tür.

Burada $x \to -1$ için f(x) in limiti 2 olamaz.

Çünkü,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2 \text{ iken } \lim_{x\to -1^-} f(x) = -1 \text{ dir.}$$

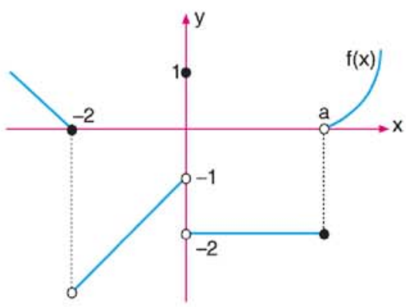
Sağ ve sol limitler eşit olmadığından

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ yoktur.

O halde a nın alabileceği tam sayı değerleri toplamı

0 + 1 + 2 + 3 = 6 bulunur.

ÖRNEK 4



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$

olduğuna göre, f(b) kaçtır?

Çözüm

Grafik incelenirse x, a ya sağdan yaklaşırken f(x) değerinin sıfıra yakınsadığı görülmektedir.

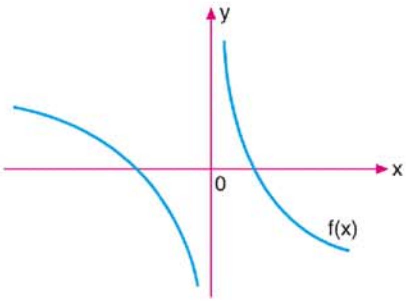
Burada $x \to a^+$ için f(x) değerinin sıfırın sağından sıfıra doğru geldiğine dikkat ediniz.

O halde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0 = b$ olur.

f(b) yi bulmak için f in x = b için aldığı değere bakılmalıdır.

b = 0 olduğuna göre, f(b) = f(0) = 1 bulunur.

ÖRNEK 5



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyon için

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

limitlerini hesaplayınız.

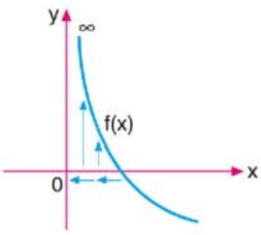
Çözüm

a. Grafik incelenirse x sıfıra sağdan yaklaşırken f(x) değerlerinin artarak artı sonsuza (+∞) ıraksadığı görülecektir.

Yani $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ olur.

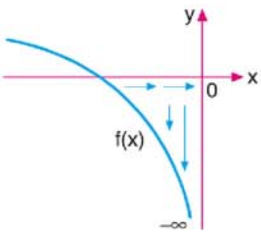
+∞ yerine genellikle ∞ şeklinde yazılır.

Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ olur.



b. x sıfıra soldan yaklaşırken f(x) değerlerinin azalarak eksi sonsuza (–∞) ıraksadığı görülmektedir.

Yani $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ olur.

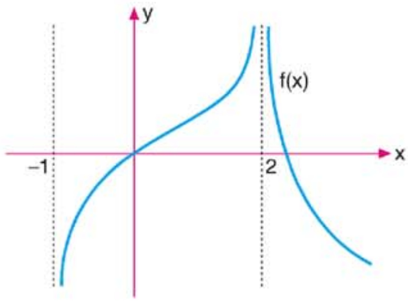


DİKKAT !

★ ∞ veya –∞ bir reel sayı değildir.

★ Bir limit işleminin ∞ veya –∞ ile gösterilmesi o noktada limit olduğu anlamına gelmez. Sonsuza ıraksanmak olarak da ifade edilen yukarıdaki gibi örneklerde "limit yoktur" yerine sonuç genellikle ∞ veya –∞ sembolleri kullanılarak gösterilir.

ÖRNEK 6



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyon için

a. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

limitlerini hesaplayınız.

Çözüm

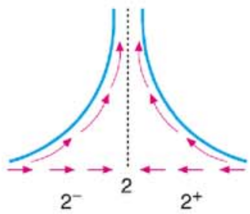
a. Grafik incelenirse x, –1 e sağdan yaklaşırken f(x) değerlerinin azalarak –∞ a ıraksadığı görülecektir.

Yani $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

b. x → 2 için limiti araştırıyoruz. Araştırma yaptığımız nokta f in grafiğinin kesintiye uğradığı bir nokta. Yani kritik nokta bu noktada sağ ve sol limitlere bakarak limitin varlığı araştırılır.

x, 2 ye sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) değerlerinin artarak ∞ a gittiği görülecektir.

Yani



olduğundan

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ olur.

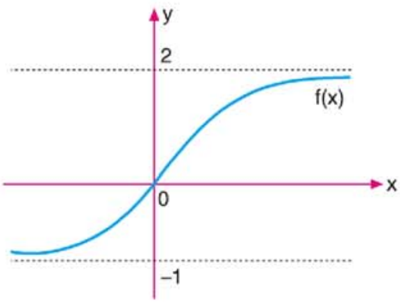
DİKKAT !

Yukarıdaki sonuca göre

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$$

gösterimi kullanılabilir. Ancak x → 2 için limitin olmadığı unutulmamalıdır.

ÖRNEK 7



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyon için

a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

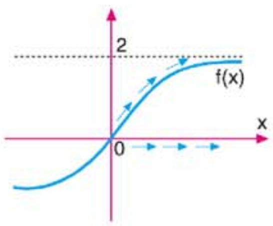
limitlerini hesaplayınız.

Çözüm

a. $x \to \infty$ gösterimi x e istenildiği kadar büyük pozitif değer verildiği anlamı taşır.

Grafiğe bakılırsa $x \to \infty$ için (x sonsuza giderken) f(x) değerlerinin y = 2 doğrusuna yaklaştığı görülmektedir.

Yani x sonsuza giderken grafiğin kolu y = 2 doğrusuna neredeyse değecek hale gelir.

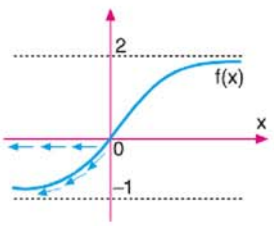


Bu durumda $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ bulunur.

b. $x \to -\infty$ gösterimi x e istenildiği kadar küçük negatif değer verildiği anlamı taşır.

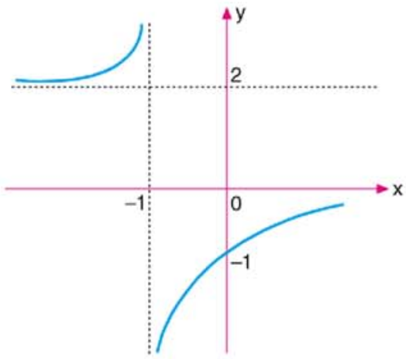
Grafiğe bakılırsa $x \to -\infty$ için (x eksi sonsuza giderken) f(x) değerlerinin –1 e yaklaştığı görülmektedir.

Yani x sonsuza giderken grafiğin kolu y = –1 doğrusuna yaklaşır.



Bu durumda $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ bulunur.

ÖRNEK 8



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x)$$

ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

Her bir limiti ayrı ayrı hesaplayalım.

Grafik incelenirse,

★ $x \to -\infty$ için f fonksiyonunun bir kolu y = 2 doğrusuna yakınsanmaktadır.

Bu durumda $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ olur.

★ $x \to \infty$ için f fonksiyonunun bir kolu y = 0 doğrusuna yakınsanmaktadır.

Bu durumda $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olur.

★ $x \to 0$ için f fonksiyonunun y ekseninin –1 de kestiği görülmektedir.

Bu durumda $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ olur.

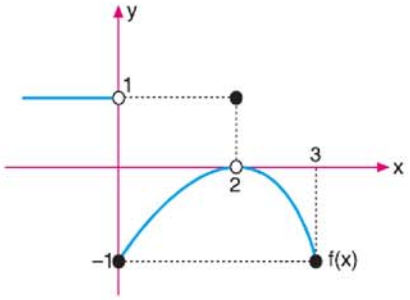
O halde limitler toplamı;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x) = 2 + 0 - 1$$

$$= 1 \text{ bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

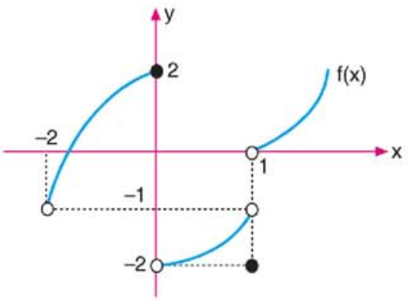
II. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

III. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -1$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

2.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

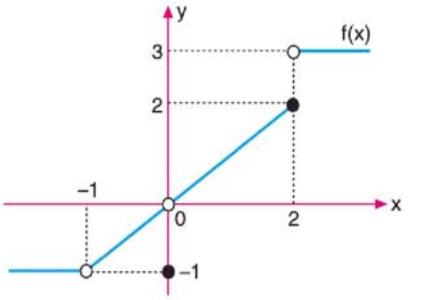
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) - \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

1) B 2) E

3.



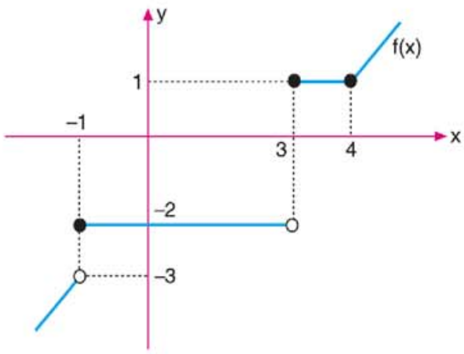
Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

olduğuna göre, x_0 kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

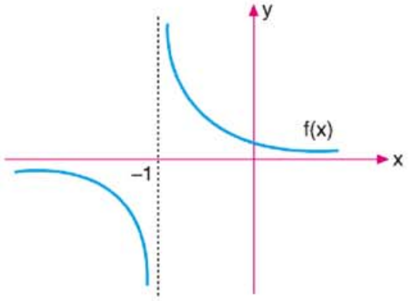
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

eşitliğini sağlayan kaç farklı a tam sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3) B 4) C

5.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

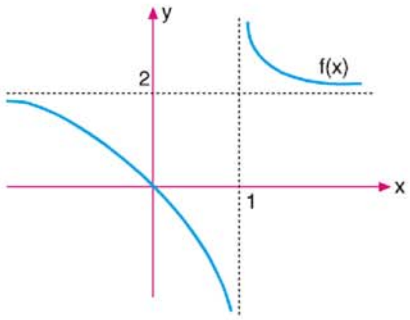
II. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

III. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) II ve III E) I, II ve III

6.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \infty$

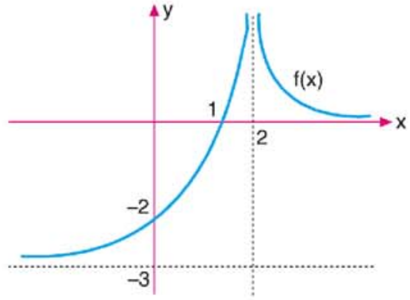
B) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) > 1$

C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

D) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$

E) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ yoktur.

7.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

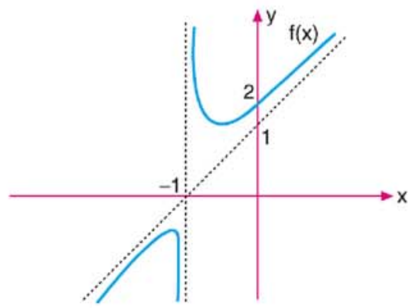
II. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ yoktur.

III. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) < 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

8.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

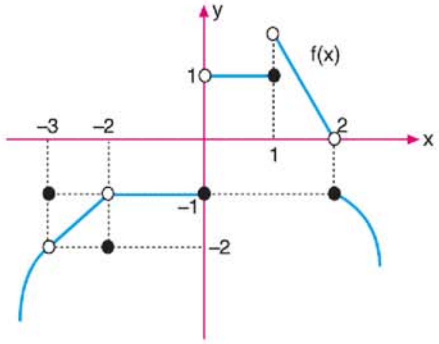
C) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

D) $\lim\limits_{x\to-2} f(x) < 0$

E) $\lim\limits_{x\to2} f(x) < 2$

5) B **6) D** **7) D** **8) E**

9.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

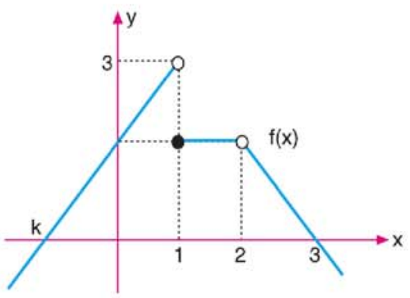
a ∈ (–4, 3) olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

limiti <u>olmadığına</u> göre, a tam sayısı kaç farklı değer alabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

10.

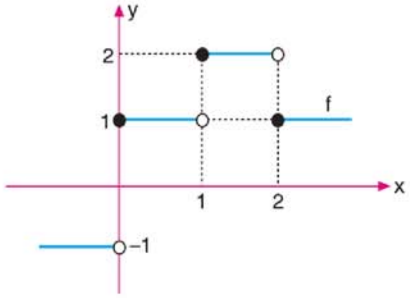


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

x in 0, k, 1 ve 2 deki var olan limitlerinin toplamı 4 olduğuna göre, k kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

11.



f: R → R biçiminde tanımlı f fonksiyonunun grafiği yukarıdaki gibidir.

f fonksiyonu yardımıyla g fonksiyonu her $x_0 \in R$ için

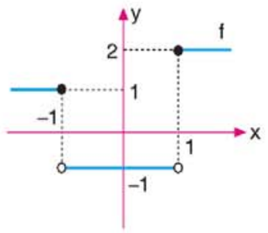
$$g(x_0) = f(-x_0) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

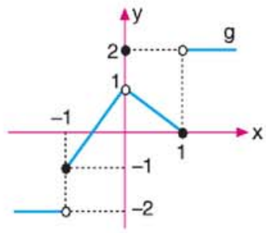
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, (gof)(1) değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

12.





Yukarıda gerçel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

$$(gog)(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

eşitliğini sağlayan x_0 gerçel sayıları için en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 1] B) [–1, 1] C) (–∞, 1]
D) (0, ∞) ∪ {–1} E) [1, ∞) ∪ {–1}

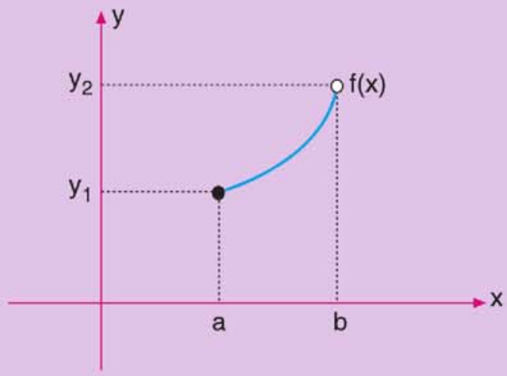
9) D 10) C 11) B 12) E

ADIM

BİR ARALIĞIN UÇ NOKTALARINDA LİMİT

f: [a, b) $\to$ R

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



★ f in a noktasındaki limiti sadece sağdan limit ile belirlenir. Yani

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = y_1$$

★ f in b noktasındaki limiti sadece soldan limit ile belirlenir. Yani

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = y_2$$

NOT: ***Bazı kaynaklarda uç noktada limit incelenirken sadece soldan veya sadece sağdan limiti fonksiyonun o noktadaki limiti olarak da almaktadır.***

Thomas Calculus gibi dünya üniversitelerinden yüzden fazla matematikçinin katkı sağladığı ve kaynak kitap olarak okutulan Calculus kitaplarında uç noktada limitin sadece sol ya da sadece sağdan olarak hesaplanabileceği ifade edilmiş. Yukarıdaki örnekte yer alan f gibi bir fonksiyonda

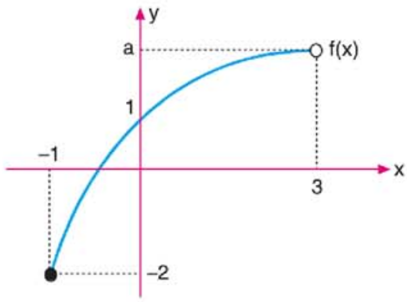
$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to b} f(x)$$

limitlerinin olmadığı ifade edilmiştir. MEB kitaplarında ise uç noktada limit ile ilgili örnek soru kullanılmamıştır.

APOTEMİ Yayınları olarak bu kitapta uç noktada limit kavramını yukarıdaki nedenden dolayı sadece sağdan ve sadece soldan limit biçiminde ele alacağız. Tahminimiz ÖSYM nin sınavda bu konuyu içeren bir soru sormayacağı, sorsa da Calculus kitaplarındaki bilgilerle çelişmeyeceği yönündedir.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1.



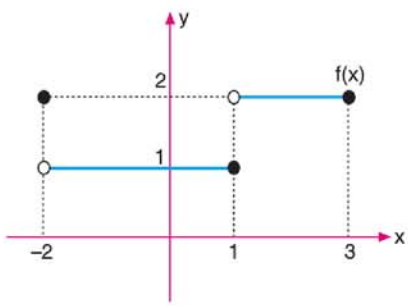
Yukarıda f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.



Yukarıda f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to b^+} f(x) = 1$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

1) D **2) C**

ADIM

LİMİT İŞLEMİ İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

Bu adımda limit alma işlemi yapılırken karşılaşabileceğimiz bazı cebirsel işlemlerin nasıl gerçekleştirileceğini göreceğiz.

★ **a bir gerçel sayı, f ve g fonksiyonları x = a noktasında limiti var olan iki fonksiyon olsun.**

Buna göre,

1. Her k gerçel sayısı için

$$\lim_{x\to a} k = k$$

2. Her k gerçel sayısı için

$$\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

3. k, 1 den farklı gerçel bir sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to a} k^{f(x)} = k^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

4. $$\lim_{x\to a}\big(f(x)\mp g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x)$$

5. $$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

6. $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

7. n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

DİKKAT !

Yukarıdaki tüm kurallar sağdan ve soldan limit alma işlemleri için de geçerlidir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 4$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)-g(x)\big)$ **işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

$$\lim_{x\to 3}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to 3} f(x) - \lim_{x\to 3} g(x)$$

$$= \left(\lim_{x\to 3} 2\right) - 4$$

$$= 2 - 4$$

$= -2$ bulunur.

ÖRNEK 2

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2} 4^{(2f(x)-1)}$ **işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

Adımda verdiğimiz 3. özelliği kullanalım.

$$\lim_{x\to 2} 4^{2f(x)-1} = 4^{\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)-1)}$$

$$\lim_{x\to 2}\big(2f(x)-1\big) = 2\cdot \lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} 1$$

$$= 2\cdot 5 - 1$$

$$= 9$$

olduğundan

$4^{\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)-1)} = 4^9$ bulunur.

NOT: ***Bir polinom fonksiyonunun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.***

ÖRNEK 3

$f(x) = 2x - 1$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = n$

eşitlikleri veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 2$

olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$

f(x) bir polinom fonksiyon olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ olur.

O halde

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$

$(-1) \cdot n = 2$

$n = -2$ bulunur.

ÖRNEK 4

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 4$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 5} \left(x^2 - f^2(x)\right)^3$ **ifadesinin limitini bulalım.**

Çözüm

Soruyu daha kolay çözebilmek için adımda verdiğimiz 7. özelliği kullanalım.

$$\lim_{x \to 5} \left(x^2 - f^2(x)\right)^3 = \left[\lim_{x \to 5} \left(x^2 - f^2(x)\right)\right]^3$$

$$= \left[\lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} f^2(x)\right]^3$$

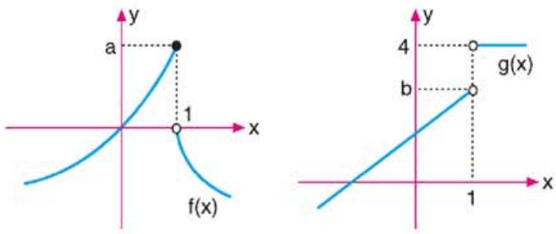
$$\lim_{x \to 5} f^2(x) = \left(\lim_{x \to 5} f(x)\right)^2 = 4^2 = 16$$

olduğuna göre,

$$\left[\lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} f^2(x)\right]^3 = \left[25 - 16\right]^3$$

$$= 9^3 = 3^6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 5



Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(f(x) - g(x)\right) = a - 2b$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(f(x) + g(x)\right) = 2a + 1$

olduğuna göre, a.b değerini bulalım.

Çözüm

Adımda verdiğimiz 4. özelliği kullanalım.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) - \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = a - 2b$

$0 - 4 = a - 2b$

$-4 = a - 2b$ ...(1)

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2a + 1$

$a + b = 2a + 1$

$a - b = -1$ ...(2)

(1) ve (2) ortak çözülürse

a = 2 ve b = 3 bulunur.

O halde

a.b = 2.3 = 6 bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. f ve g fonksiyonlarının x = 2 için limitleri var olmak üzere,

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)+x\right)=3$$

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)-g(x)\right)=2$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

2. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{x\cdot f(x)}=16$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) $\frac{4}{3}$ E) 1

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x-f(x)\right)^2=0$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) –2

1) D 2) D 3) E

4. f(x) pozitif değerli tüm gerçel sayılarda limiti var olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{f(x)+x}{f^2(x)}\right)=2$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

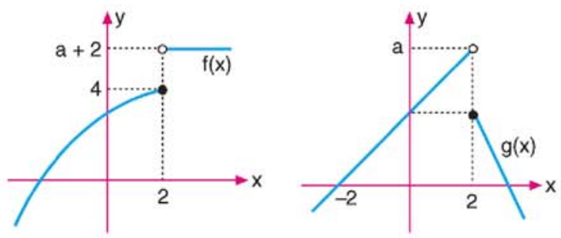
5. y > 1 olmak üzere,

$$\lim_{x\to y}\frac{x^2y-xy}{xy-1}=1$$

olduğuna göre, y kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

6.



Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$$\lim_{x\to 2^+}\left(f(x)+g(-x)\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{f(x)+2}{g(x)-3}\right)$$

olduğuna göre, f(a) kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

4) B 5) A 6) B

ADIM

LİMİT İŞLEMİ İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

8. • n tek doğal sayı olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

• n çift doğal sayı ve $f(x) \geq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

9. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to a} f(x)\right|$

10. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti var olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} (\log f(x)) = \log\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x+2}}}{\sqrt[3]{x+6}}$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 2} x + \sqrt{\lim\limits_{x \to 2}(x+2)}}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 2}(x+6)}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{4}}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 2}(x+6)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+2}}{\sqrt[3]{8}}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$= 1$ bulunur.

ÖRNEK 2

$$\lim_{x \to 3} \frac{|x-1| + x}{|x-4|}$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\left|\lim\limits_{x \to 3}(x-1)\right| + \lim\limits_{x \to 3} x}{\left|\lim\limits_{x \to 3}(x-4)\right|} = \frac{2+3}{|-1|}$$

$= 5$ bulunur.

ÖRNEK 3

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{A^3}{B^2}\right) = e^4$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 3} (2\ln B - 3\ln A)$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

Öncelikle limiti istenen ifadeyi düzenleyelim.

$$2\ln B - 3\ln A = \ln B^2 - \ln A^3 = \ln\left(\frac{B^2}{A^3}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 3} (2\ln B - 3\ln A) = \lim\limits_{x \to 3} \ln\left(\frac{B^2}{A^3}\right)$ özelliği kullanırsak;

$= \ln\left(\lim\limits_{x \to 3} \frac{B^2}{A^3}\right)$ şeklinde yazılabilir.

$\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{A^3}{B^2}\right) = e^4$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{B^2}{A^3}\right) = \frac{1}{e^4}$ olur.

O halde

$$\ln\left(\lim_{x \to 3} \frac{B^2}{A^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$$

$$= \ln(e^{-4})$$

$= -4$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x+n}} = 3$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 2 E) 4

2. f(x) her x gerçel sayısı için limiti olan bir fonksiyon olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{f(x)} = 3$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{f(x)+\sqrt[3]{f(x)}}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt[3]{6}$ C) $\sqrt[3]{9}$ D) $\sqrt[3]{12}$ E) $\sqrt[3]{30}$

3. f: $[1, \infty) \to [1, \infty)$ olmak üzere,

$f(e^x) = \sqrt{x} - 1$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to e^4} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) ln2 C) –1 D) $\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)$ E) 1

1) B 2) E 3) E

4. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 1} \left| f(x) - |f(x) - 3| \right|$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 3 E) 1

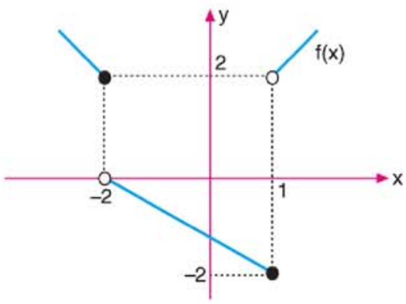
5. Her x gerçel sayısı için f(x) > 0 olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to 1} \left[\ln f(x) + \ln\big(x.f(x)\big) \right] = 2$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **kaçtır?**

A) 2e B) $\sqrt{e}$ C) e D) $\dfrac{e^2}{2}$ E) 2

6.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to 1} |f(x)|$ limiti yoktur.

II. $\lim\limits_{x \to -2} |f(x)|$ limiti vardır.

III. $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ limiti vardır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) II ve III E) I, II ve III

4) A 5) C 6) C

ADIM

BİLEŞKE FONKSİYONUN LİMİTİ

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ ve $\lim\limits_{x \to m} f(x) = n$

olmak üzere,

$$\boxed{\lim_{x \to a} (fog)(x) = \lim_{x \to a} f\left(g(x)\right) = n}$$

Eğer f fonksiyonu x = m de tanımlı ve bu noktada limiti f(m) ye eşit ise

$$\boxed{\lim_{x \to a} (fog)(x) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(m)}$$

şeklinde gösterilebilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \quad \text{ve} \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \to 2} (fog)(x)$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} = 3 \text{ olur.}$$

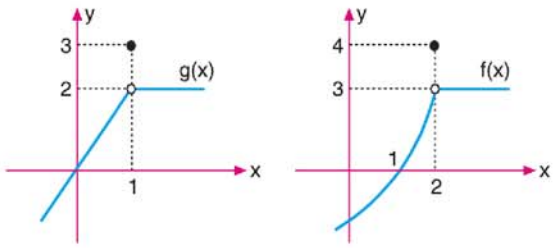
x = 3 için

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{10}{4} = f(3)$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 2} (fog)(x) = f\left(\lim_{x \to 2} g(x)\right) = f(3) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 2



Yukarıda g ve f fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 1} (fog)(x)$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ ve $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 1} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to 3} f\left(g(x)\right) = 3$ bulunur.

Dikkat edilirse

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ olduğundan adımda verilen ikinci eşitlik yani $\lim\limits_{x \to 1} (fog)(x) = f\left(\lim\limits_{x \to 1} g(x)\right)$ gösterimi şartlar sağlanmadığından kullanılmadı.

ÖRNEK 3

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyon için

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(2x-1)}{f(5-x)}$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

Öncelikle $x \to 2^+$ gerçekleşirken 2x – 1 ve 5 – x ifadelerinin hareketini gözlemleyelim.

x in 2 ye sağdan yaklaşması 2 den büyük çok küçük değerlerle 2 ye yaklaşması demektir.

Birkaç sayı değeri yardımıyla $2x - 1$ ve $5 - x$ ifadelerini gözlemleyelim.

x	2	2,01	2,1
2x – 1	3	3,02	3,2
5 – x	3	2,99	2,9

Yukarıdaki tablo ile $x \to 2^+$ için

- $2x - 1$ ifadesi 3 e sağdan yaklaşmakta. Bu nedenle

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(\underbrace{2x-1}_{3^+}) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$ eşitliği yazılabilir.

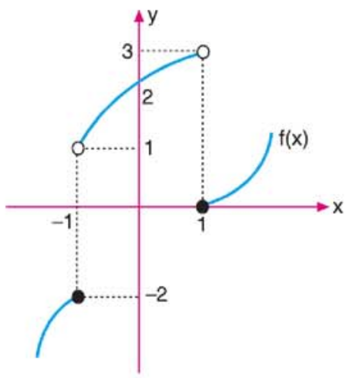
- $5 - x$ ifadesi 3 e soldan yaklaşmakta. Bu nedenle

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(\underbrace{5-x}_{3^-}) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$ eşitliği yazılabilir.

  Buna göre,

  $$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(2x-1)}{f(5-x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 4



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x-1) + \lim_{x \to -1^-} f(-x)$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

- x, sıfıra sağdan yaklaşırken $x - 1$ in hareketini inceleyelim.

x	0	0,10	0,11
x – 1	–1	–0,90	–0,89

Yukarıdaki tabloya göre $x \to 0^+$ için $x - 1$ ifadesi -1 e sağdan yaklaşmaktadır.

O halde

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$ olur.

- x, –1 e soldan yaklaşırken –x in hareketini gözlemleyelim.

x	–1,11	–1,10	–1
–x	1,11	1,10	1

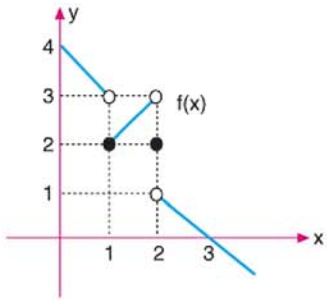
Yukarıdaki tabloya göre $x \to -1^-$ için $-x$ ifadesi 1 e sağdan yaklaşmaktadır.

O halde

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(\underbrace{-x}_{1^+}) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x-1) + \lim\limits_{x \to -1^-} f(-x) = 1 + 0 = 1$ olur.

ÖRNEK 5



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 2^+} (fof)(x)$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

$\lim\limits_{x \to 2^+} (fof)(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f\big(f(x)\big)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

Grafiğe dikkat edilirse x, 2 ye sağdan yaklaşırken f(x) değerleri de y ekseninde 1 e soldan yaklaşmaktadır.

Yani $x \to 2^+$ ise $f(x) \to 1^-$ dir.

Şimdi bu bilgi yardımıyla bileşke fonksiyonun limitinin değerini bulalım.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f\big(\underbrace{f(x)}_{1^-}\big) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $g(x) = 2^{x+1}$

$f(x) = \sqrt{3x}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 1} (fog)(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 4

2. Gerçel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için

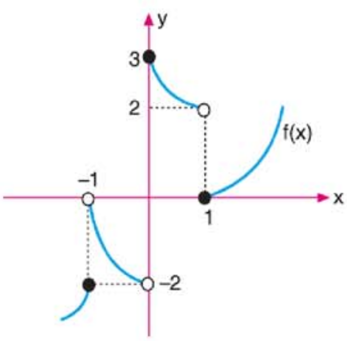
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x-1) - f(5-x)}{f(x^2-3)} = 2$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –4 B) –1 C) 1 D) 4 E) 8

3.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

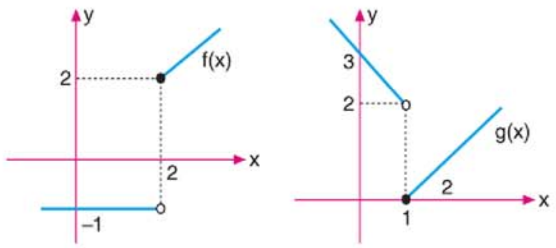
Buna göre,

$$\lim_{x \to 1^+} f(-x) + \lim_{x \to 0^+} f(x-1)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

4.

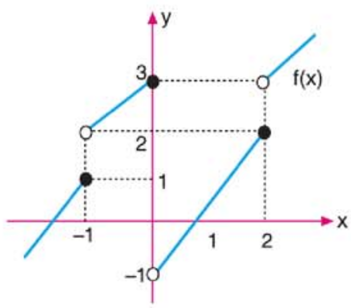


Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 1^-} (fog)(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.

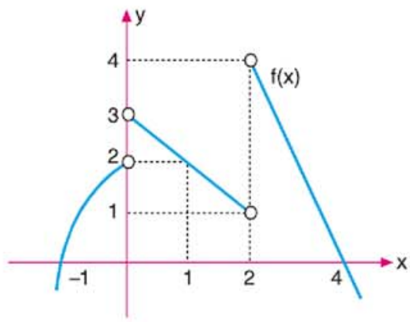


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 0^+} (fofof)(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 2^+} (fof)(2-x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1) C 2) A 3) E 4) C 5) E 6) B

ADIM

PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Parçalı fonksiyonlarda limit hesaplanırken limit alınan nokta kritik nokta ise o noktada sağdan ve soldan limite bakılır. Eğer limit alınan nokta kritik nokta değilse sağdan ve soldan limite bakılmasına gerek duyulmadan limit alınabilir.

Parçalı fonksiyonda alt aralıkların uç noktalarına kritik nokta denildiğini hatırlayalım.

Örneğin:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 1 \\ 5-x & x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun x = 1 , x = 2 ve x = 0 noktalarındaki limitlerini bulalım.

- x = 1 noktası f in kritik noktası olduğundan bu noktada sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

  $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+2) = 3$$

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (5-x) = 4$$

  Sağdan ve soldan limitler farklı çıktığından $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

- x = 2 noktası f in kritik noktası olmadığından bu noktada sağ ve sol limitlere bakılmasına gerek yoktur. O halde x = 2 için f in geçerli kuralını kullarak limiti bulabiliriz.

  $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

- x = 0 noktası f in kritik noktası olmadığından bu noktada sağ ve sol limitlere bakılmasına gerek yoktur. O halde x = 0 için f in geçerli kuralını kullarak limiti bulabiliriz.

  $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (5-x) = 5$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \begin{cases} x-a & x \ge 2 \\ \dfrac{x+a}{2} & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

limiti var olduğuna göre, a gerçel sayısını bulalım.

Çözüm

x = 2, f için kritik noktadır. Bu noktada limitin var olabilmesi için sağ ve sol limitler birbirine eşit olmalıdır.

O halde, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-a) = 2-a$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{2+a}{2}$$

$$2-a = \frac{2+a}{2} \Rightarrow 4-2a = 2+a$$

$$-3a = -2$$

$$a = \frac{2}{3} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \ge 4 \\ x^2-1 & x < 4 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & x \ge 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 3^+} (fog)(x)$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

$$\lim_{x \to 3^+} (fog)(x) = \lim_{x \to 3^+} f\big(g(x)\big)$$

$$\lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} (x+1) = 4 \quad \text{olur.}$$

$x \to 3^+$ için $g(x) \to 4^+$ bulundu. Şimdi bu bilgiyi kullanalım.

$$\lim_{x \to 3^+} f\big(\underbrace{g(x)}_{4^+}\big) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (x^2+1) = 17 \quad \text{bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x\le 2 \\ 2x-3 & x>2 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **toplamının değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<0 \\ 2x & 0\le x\le 1 \\ x-2 & 1<x \end{cases}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

B) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$

C) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

D) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

E) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

3. $f(x-1)=\begin{cases} ax+1 & x\ge 0 \\ x+2a & x<0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **limitinin var olması için a kaç olmalıdır?**

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) –1 E) $-\frac{3}{2}$

1) A 2) D 3) C

4. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu

$f(x)=\begin{cases} x+2 & x>n \\ 3x-2 & x\le n \end{cases}$

biçiminde verilmiştir.

f fonksiyonunun her gerçel sayı için limiti var olduğuna göre, n kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

5. $f(x)=\begin{cases} 2-x & x<1 \\ 3-x^2 & x\ge 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 1^-}(fof)(x)+\lim\limits_{x\to 1^+}(fof)(x)$ **toplamının değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<-1 \\ 2x^2-1 & x\ge -1 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x+2 & x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

$\lim\limits_{x\to a}(fog)(x)$ **limiti olmadığına göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) 0 D) –1 E) –2

4) B 5) D 6) E

ADIM

MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Mutlak değerli fonksiyonlarda limit hesaplanırken limit alınan nokta kritik nokta ise yani mutlak değerin içini sıfır yapan bir nokta ise o noktada sağdan ve soldan limite bakılır. Eğer limit alınan nokta kritik nokta değilse fonksiyonun limiti o noktadaki görüntüsüne eşittir.

DİKKAT !

Mutlak değerli bir ifadenin bir noktada sağdan veya soldan limite bakılırken önce limit alınan noktaya göre, mutlak değerin içinin işareti belirlenip mutlak değer kaldırılır. Sonra ifadenin limiti alınır.

Örneğin:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Öncelikle limit alınan noktaya göre, mutlak değerlerin içinin işaretini belirleyip mutlak değerleri kaldıralım.

$x \to 0^+$ için $|x| = x$

$x \to 0^-$ için $|x| = -x$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=1-1=0 \quad \text{bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$$

fonksiyonunun $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 0$ noktalarındaki limitlerini bulalım.

Çözüm

★ $x = 2$ de mutlak değeri için sıfır olduğundan bu nokta kritik noktadır. Bu noktada sağ ve sol limite bakmalıyız.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

Sağ ve sol limitler eşit çıkmadığından $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ yoktur.

★ $x = 3$ ve $x = 0$ kritik noktalar değildir. Bu noktalarda sağ ve sol limitlere bakmaya gerek yoktur. Fonksiyonunun bu noktalardaki limitini bulmak için $f(3)$ ve $f(0)$ değerlerini bulmak yeterlidir. O halde,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{|0-2|}{0-2}=-\frac{2}{2}=-1$$

APOEMİ

PRATİK

$|f(x)|$ fonksiyonunun kritik noktalarında sağ ve sol limitler eşit çıkar.

ÖRNEK 2

$f(x) = |x - 2|$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ limitinin değerini bulalım.

Çözüm

f i parçalı fonksiyon biçiminde yazarak yukarıdaki pratik kuralın nasıl geçerli olduğunu görelim.

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=0=f(2) \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 3

$f(x) = |x - |x - 1||$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **limitinin değerini bulalım.**

Çözüm

$x = 2$, $|x - |x - 1||$ ifadesini sıfıra eşit kılar. Pratik kuralımıza göre, bu tip mutlak değerli bir ifadede sağ ve sol limit birbirine eşit çıkar. O halde sağdan ve soldan limit incelemesi yapmamıza gerek yoktur.

Buna göre,

$\lim\limits_{x \to 2} \left|x - |x-1|\right| = 1$ bulunur.

ÖRNEK 4

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|-1 & x \geq 1 \\ |x|+1 & x < 1 \end{cases}$$

olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) + \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$x \to 0$ için

$f(x) = |x| + 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} |x| + 1 = 0 + 1 = 1$

$x \to 3$ için

$f(x) = |x - 2| - 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 3} \left(|x-2|-1\right) = \lim\limits_{x \to 3} (x-2-1) = 0$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) + \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1 + 0 = 0$ bulunur.

ÖRNEK 5

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{|x-4| - x}$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

Öncelikle mutlak değerli ifadelerin $x \to 2^-$ için içlerinin işaretlerini belirleyelim.

★ $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

x		1		2	
	+	○	−	○	+

olduğundan $x \to 2^-$ için $x^2 - 3x + 2 < 0$ dır.

★ $x \to 2^-$ için $x - 4 < 0$ dır.

O halde,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{|x-4| - x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2).(x-1)}{-(x-4)-x}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}.(x-1)}{-2\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 6

$$\lim_{x \to 3} \frac{|2x-6| + |x^2 - 9|}{x-3}$$

limitinin değerini bulalım.

Çözüm

$x = 3$, ifadenin payı için kritik noktadır. Bu nedenle sağ ve sol limitleri incelemeliyiz.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{|2x-6| + |x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x - 6 + x^2 - 9}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+5)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 8$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{|2x-6| + |x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{6 - 2x + 9 - x^2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x+5)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = -8$$

Sağ ve sol limitler farklı çıktığından $x \to 3$ için limit yoktur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

limitinin değeri kaçtır?

A) Yoktur B) 4 C) 2 D) 0 E) –2

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x^2-1|}{x+1}$

limitinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –2 E) Yoktur

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x-|x|} + \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|-x|}{x}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) –1

4. $f(x) = ||x-2|-x| + |x-1|$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Yoktur

1) E	2) E	3) B	4) D

5. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|1-x|}{\sqrt{x-1}}$

limitinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) Yoktur

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x^2-9|}{|x-3|+2x-6}$

limitinin değeri kaçtır?

A) –3 B) 0 C) 3 D) 6 E) Yoktur

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{|2x^2-2x|}$

limitinin değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) –1 E) Yoktur

8. $f(x) = \begin{cases} |x-1|-2 & x \geq 1 \\ \big|x-|x-1|\big| & x < 1 \end{cases}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x-1) + \lim\limits_{x\to 0^+} f(1-x)$

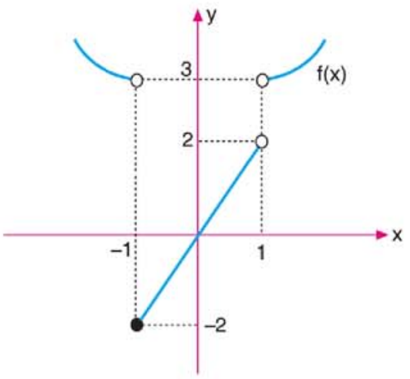
ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

5) C	6) E	7) B	8) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

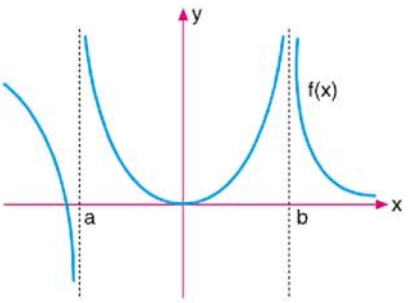
B) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$

C) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

D) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 2$

E) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 3$

2.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

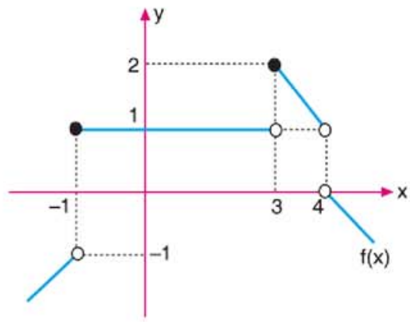
C) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$

D) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$

E) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

1) D **2) D**

3.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

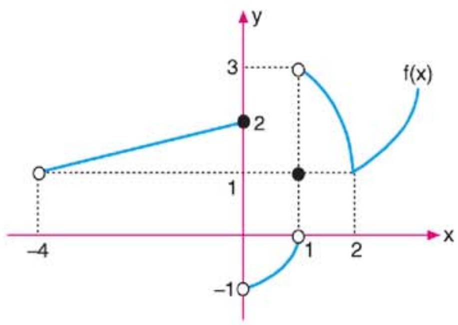
Buna göre,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) + \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

eşitliğini sağlayan a tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

4.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x\to -4^+} (fof)(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x-1) = 1$$

olduğuna göre, x_0 aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

3) B **4) D**

5. f ve g, x = a da limiti var olan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=4$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=1$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{15}{4}$ B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^2+xy-2y}{xy-1}=1$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^3+y^3}{x\cdot y}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(2-x)}{x^2-4}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) 1 E) ∞

5) A **6) E** **7) A**

8. a ve b pozitif tam sayı olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases}2x-a\cdot b & x<-1\\ x+b & -1\leq x<0\\ a+2b & 0\leq x\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)-\lim_{x\to -1^+}f(x)=4$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) –1 D) –3 E) –4

9. n bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to 1}|nx-2|=\left|\lim_{x\to 1}(n-x)\right|$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –4 B) $-\frac{7}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) –1 E) $\frac{1}{2}$

10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a} & x\leq 1\\ x^2-2 & x>1\end{cases}$

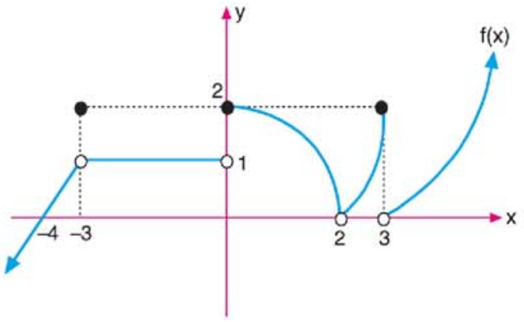
fonksiyonunun her x gerçel sayısı için limiti var olduğuna göre, a gerçel sayısı aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) $\frac{7}{2}$ B) 3 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

8) E **9) B** **10) E**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1.



Yukarıda reel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

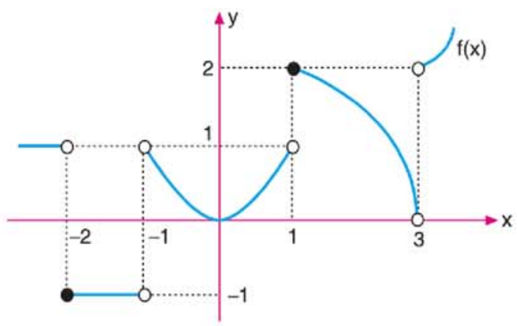
B) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

C) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$

D) $\lim_{x\to a} f(x) = 2$ şartını sağlayan sadece bir a gerçel sayısı vardır.

E) Fonksiyonun üç noktada limiti yoktur.

2.

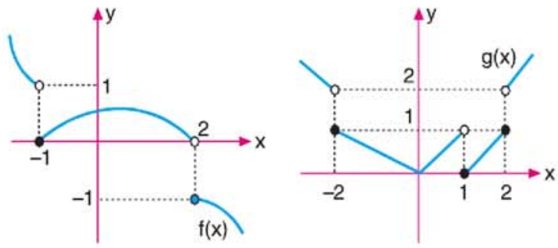


Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(|x|) fonksiyonunun limitinin olmadığı noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) –3

3.



Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$

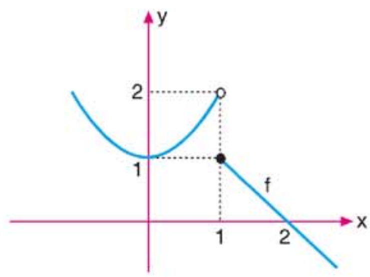
II. $\lim_{x\to 2^+} (fof)(x) = \lim_{x\to -2^-} (gog)(x)$

III. $\lim_{x\to 2^+} (fog)(x) = -1$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

4. f: R → R fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Her x gerçel sayısı için

$$g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

biçiminde bir g fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x-1)}{g(x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

1) E 2) D 3) D 4) B

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+f(x)}{f(x)}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x}=3$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) –1 E) –2

6. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x-1)-f(x-2)}{f\left(|x-3|+1\right)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) $-\frac{5}{3}$ E) –3

7. $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le a \\ 2x+b & a<x<1 \\ x+2 & 1\le x \end{cases}$

fonksiyonunun her x gerçel sayısı için limiti var olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

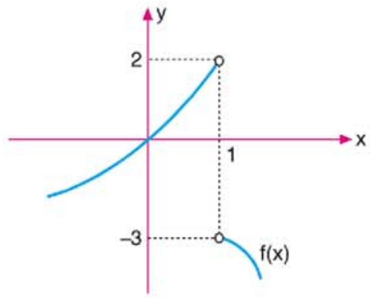
5) A 6) C 7) B

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{|x-2|}$

limitinin değeri kaçtır?

A) –8 B) –4 C) 2 D) 8 E) Yoktur

9.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

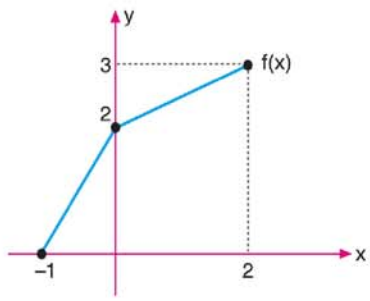
Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 1^-}|f(x)-1|+\lim\limits_{x\to 1^+}|f(x)+2|$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10.



Yukarıda [–1, 2] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|f^{-1}(x)|}{f(x)}+\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|f^{-1}(x)|}{f(x)}$

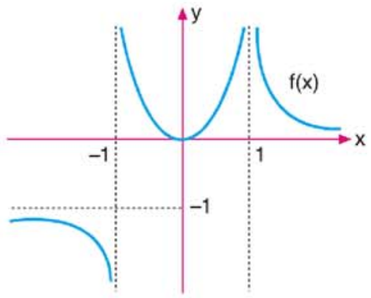
limitinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

8) E 9) C 10) E

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

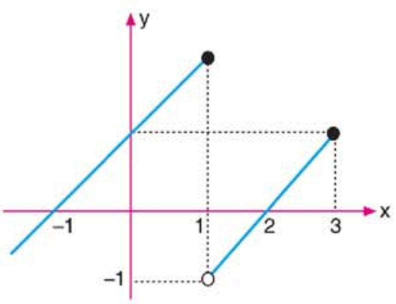
Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{f(-x)-1}$$

limitinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) ∞

2.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

3. $$\lim_{x\to2^+}9^{\frac{|f(x)-2|}{2-f(x)}}=\frac{1}{9}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to2^+}f(x)$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 3

4. $$\lim_{x\to0^-}f(x)=a-2$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=a+b$$

$$\lim_{x\to0}\left(x-f(x)\right)^2=0$$

olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 1 E) 4

5. Her x gerçel sayısı için f ve g fonksiyonlarının limiti var ve sıfırdan farklıdır.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=3$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$ **değeri kaçtır?**

A) –2 B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

1) D 2) A

3) E 4) A 5) C

6. $f(x) = \begin{cases} 4x-3 & x \geq 2 \\ -x+4 & x < 2 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(2x) + \lim\limits_{x\to 2^+} f\left(\dfrac{4}{x}\right)$ **toplamı kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7. $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ \dfrac{x+4}{2} & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 1} f^{-1}(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –2 D) 0 E) 2

8. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}-1}{|x-2|}$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-\dfrac{1}{3}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{3}$ E) 1

6) E **7) C** **8) A**

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

Her x gerçel sayısı için

$h(x_0) = (fog)(x_0) + \lim\limits_{x\to x_0^+} (fog)(x_0)$

eşitliği geçerlidir.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 5 B) 3 C) 2 D) 0 E) –1

10. Her x gerçel sayısı için

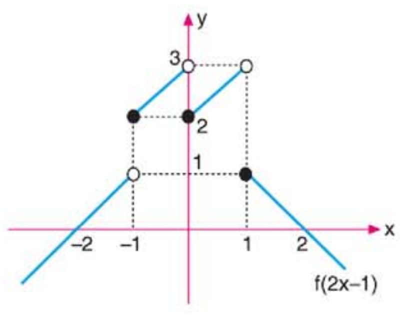
f: x → "x ten küçük en büyük tam sayı"

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{f(x-2)}{(fof)(-2x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) $-\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) 1

11.



Yukarıda f(2x – 1) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

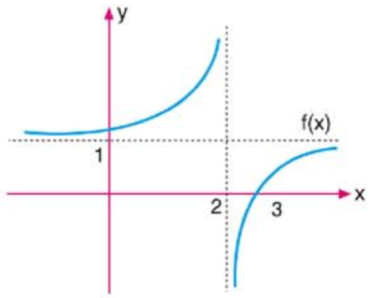
Buna göre, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) + \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ **toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9) B **10) E** **11) A**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ -4 (ÇÖZÜMLÜ)

1.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

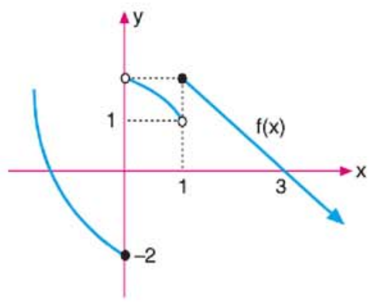
II. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

III. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) < 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

2.



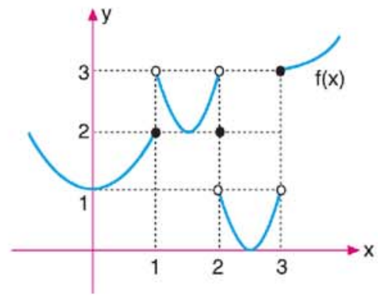
Yukarıda gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x \to 1^+} f(1-x) + \lim_{x \to 2^-} f\left(\frac{4}{x^2}\right) = 1$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

3.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 1^-} (\underbrace{fofofo...of}_{100 \text{ adet}})(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

4. y sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x \to y^+} \left(y^2\right)^{\frac{|x^2-y^2|}{x-y}}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{y^2}$ B) y^2 C) y^4 D) y^{2y} E) y^{4y}

5. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x \cdot |x-1| - x + 1}{|x-1|}$

limitinin değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1) A 2) C 3) C 4) E 5) E

6. a bir gerçel sayı olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases}\left|x-a^2\right| & x\geq 1\\ x+a & x<1\end{cases}$$

fonksiyonunun her gerçel sayısı için limiti var olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

7. k bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x+1)=\lim_{x\to 1^-} g\left(\frac{2}{x}\right)=k$$

olduğuna göre, aşağıdaki limitlerden hangisinin değeri <u>kesinlikle</u> k ya eşittir?

A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x-2)$

B) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x^2-4)$

C) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x^2-1)$

D) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x+3)$

E) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(1-x)$

8. $f(x^2-2x)=(x-1)^2-4$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(|x|)}{|f(x)|}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{6}$ D) 1 E) Yoktur

9. $f(g(x))=\begin{cases}1 & g(x)>0\\ 0 & g(x)=0\\ -1 & g(x)<0\end{cases}$

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x\to 1} f(x-1)$ limiti yoktur.

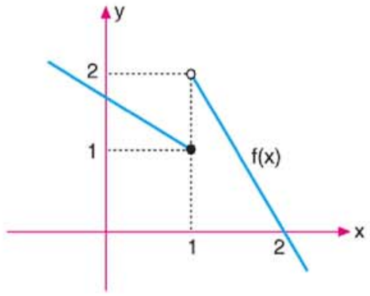
II. $\lim\limits_{x\to 2} f(x^2+x)=1$

III. $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2-x)=0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

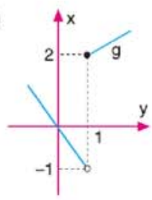
A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

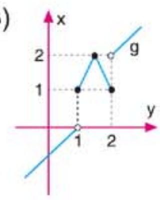
10.

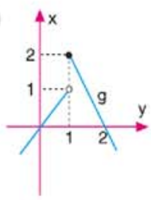


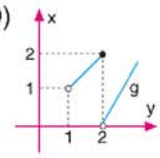
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

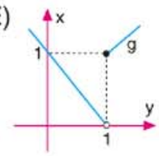
(gof)(x) fonksiyonunun x = 1 için limiti var olduğuna göre, g fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)


B)


C)


D)


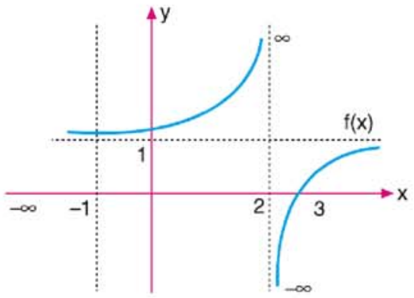
E)


6) E	7) E	8) B

9) D	10) B

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 4 (ÇÖZÜMLER)

1.



Grafik incelenirse

I. doğrudur.

$x \to -\infty$ için fonksiyon grafiğinin bir kolu y = 1 doğrusuna yakınsamaktadır.

Yani $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ eşitliği doğrudur.

II. yanlıştır.

$x \to 2^+$ için fonksiyon grafiğinin $-\infty$ a ıraksandığı görülmektedir.

Yani $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ eşitliği yanlıştır.

III. yanlıştır.

$x \to -1$ için f(x) in y = 1 doğrusu üzerinde değer aldığı görülmektedir.

Dolayısıyla $x \to -1$ için $\lim\limits_{x \to -1} f(x) > 0$ olmalıdır.

Yani $\lim\limits_{x \to -1} f(x) < 0$ eşitsizliği yanlıştır.

Cevap A

2. Soruda verilen limitleri ayrı ayrı hesaplayalım.

★ $x \to 1^+$ için $1 - x \to 0^-$ olduğundan

$$\lim_{x \to 1^+} f(\underbrace{1-x}_{0^-}) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \text{ olur.}$$

Grafik incelenirse $x \to 0^-$ için $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ bulunur.

O halde $\lim\limits_{x \to 1^+} f(1-x) = -2$ olur.

★ $x \to 2^-$ için $\dfrac{4}{x^2} \to 1^+$ olacağından

$$\lim_{x \to 2^-} f\left(\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \text{ olur.}$$

Grafik incelenirse $x \to 1^+$ için $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = a$ olsun.

O halde $\lim\limits_{x \to 2^-} f\left(\dfrac{4}{x^2}\right) = a$ olur.

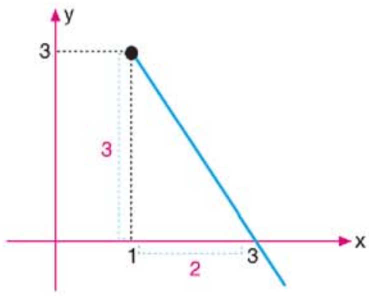
(*) ve (**) da elde ettiğimiz sonuçları kullanalım.

$$\lim_{x \to 1^+} f(1-x) + \lim_{x \to 2^-} f\left(\frac{4}{x^2}\right) = 1$$

$$-2 + a = 1$$

$$a = 3 \text{ bulunur.}$$

Şimdi $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ limitinin değerini bulabilmek için [1, 3] aralığındaki f(x) in denklemini, doğru denklemi yardımıyla elde edelim.



Eğim $= -\dfrac{3}{2}$ ve x = 3 için y = 0 olduğundan

doğrunun denklemi $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$ şeklindedir.

[1, 3] aralığında f(x) in denklemi $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$ olduğundan

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Cevap C

3. Grafik incelenirse

- x, 1 e soldan yaklaşırken f(x) değerleri 2 ye soldan yaklaşmakta
- x, 2 ye soldan yaklaşırken f(x) değerleri 3 e soldan yaklaşmakta
- x, 3 e soldan yaklaşırken f(x) değerleri 1 e soldan yaklaşmaktadır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to1^-}(fofof)(x)=\lim_{x\to2^-}(fof)(x)$$

$$=\lim_{x\to3^-}f(x)=1 \text{ olur.}$$

Yani $x \to 1^-$ için fofof $\to 1^-$ dir.

Dikkat edilirse f üç defa bileşke işlemine girerse limit 1 olarak bulunmakta. Her defasında üçlü bileşke için bu durum tekrarlanacağından 100 adet f bileşke işleminin limiti her üçte bir başa dönüleceğinden aşağıdaki gibi eşitlik yazılabilir.

$$\lim_{x\to1^-}(\underbrace{fofofo...of}_{100\text{ adet}})(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=2 \text{ bulunur.}$$

Cevap C

4. Limit işleminde y sabit bir gerçel sayı olduğundan

$$\lim_{x\to y^+}\left(y^2\right)^{\frac{|x^2-y^2|}{x-y}}=\left(y^2\right)^{\lim\limits_{x\to y^+}\frac{|x^2-y^2|}{x-y}}$$

eşitliği yazılabilir.

$x \to y^+$ için $x^2 - y^2 > 0$ olduğundan

$$\lim_{x\to y^+}\frac{|x^2-y^2|}{x-y}=\lim_{x\to y^+}\frac{x^2-y^2}{x-y}$$

$$=\lim_{x\to y^+}\frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}}$$

$$=2y \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $\left(y^2\right)^{\lim\limits_{x\to y^+}\frac{|x^2-y^2|}{x-y}}=\left(y^2\right)^{2y}=y^{4y}$ olur.

Cevap E

5. $x \to 1^-$ için $x - 1 < 0$ olduğundan

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x\cdot|x-1|-x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\cdot(1-x)-x+1}{1-x}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{x}-x^2-\cancel{x}+1}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{1-x}}=2$$

Cevap E

6. f in her x gerçel sayısı için limiti var olduğuna göre, x = 1 için de limiti olmalıdır.

O halde

$$\lim_{x\to1^+}\left|x-a^2\right|=\lim_{x\to1^-}(x+a) \text{ olmalıdır.}$$

$|1 - a^2| = 1 + a$

$1 - a^2 = 1 + a$	veya	$1 - a^2 = -1 - a$
$a^2 + a = 0$		$a^2 - a - 2 = 0$
$a(a + 1) = 0$		$(a - 2)(a + 1) = 0$
$a = 0$, $a = -1$		$a = 2$, $a = -1$

$\left|1-a^2\right|=1+a$ eşitliğinde

$1+a\geq0\Rightarrow a\geq-1$ olmalıdır.

O halde a nın alabileceği değerler toplamı

$-1 + 0 + 2 = 1$ bulunur.

Cevap E

7. Öncelikle verilen limitleri daha sade yazalım.

$x \to 0^+$ için $x + 1 \to 1^+$ olacağından

$$\lim_{x\to0^+}f(x+1)=\lim_{x\to1^+}f(x) \quad ...(*)$$

$x \to 1^-$ için $\frac{2}{x}\to2^+$ olacağından

$$\lim_{x\to1^-}g\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to2^+}g(x) \quad ...(**)$$

Buna göre, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=k$ olur.

O halde son elde ettiğimiz eşitlik yardımıyla seçeneklerdeki limitleri incelersek E seçeneğinde yer alan limitin k ya eşit olacağı görülecektir. Çünkü

$x \to -1^-$ için $1 - x \to 2^+$

$$\lim_{x\to-1^-}g(1-x)=\lim_{x\to2^+}g(x)=k$$

Diğer seçeneklerdeki limitlerin (*) veya (**) eşitliklerinden birine uymadığından sonuçların k ya eşit olması kesin değildir.

Cevap E

8. Soruyu daha kolay yorumlayabilmek için f in kuralını bulalım.

$$f(x^2-2x)=x^2-2x+1-4$$

$$f(\underbrace{x^2-2x}_{x})=\underbrace{x^2-2x}_{x}-3$$

$$f(x)=x-3 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(|x|)}{|f(x)|}=\lim_{x\to-3}\frac{|x|-3}{|x-3|}=\frac{0}{|-6|}=0 \text{ bulunur.}$$

Cevap B

9. I. doğrudur.

$x\to 1^+$ için $x-1>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x-1)=1$

$x\to 1^-$ için $x-1<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x-1)=-1$

olduğundan $\lim\limits_{x\to1} f(x-1)$ limiti yoktur.

II. doğrudur.

$x\to 2$ için $x^2+x>0$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to2} f(x^2+x)=1$

III. yanlıştır.

$x\to 0^+$ için $x^2-x<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} f(x^2-x)=-1$

$x\to 0^-$ için $x^2-x>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x^2-x)=1$

olduğundan $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ limiti yoktur.

Cevap D

10. $x=1$ için $(gof)(x)$ fonksiyonunun limiti varsa bu noktada sağ ve sol limitler birbirine eşit olmalıdır. Yani

$\lim\limits_{x\to1^+}(gof)(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(gof)(x)$ olmalıdır.

f fonksiyonunun grafiği incelenirse

$x\to 1^+$ için f(x) değerleri 2 ye soldan yaklaşmaktadır.

O halde

$$\lim_{x\to1^+}(gof)(x)=\lim_{x\to1^+} g\,\underbrace{(f(x))}_{2^-}=\lim_{x\to2^-} g(x) \quad ...(1)$$

$x\to 1^-$ için f(x) değerleri 1 e sağdan yaklaşmaktadır.

O halde

$$\lim_{x\to1^-}(gof)(x)=\lim_{x\to1^+} g\,\underbrace{(f(x))}_{1^+}=\lim_{x\to1^+} g(x) \quad ...(2)$$

Buna göre, aradığımız g fonksiyonunun (1) ve (2) deki limitlerin eşit olması gerekmektedir.

Seçenekler incelendiğinde B seçeneğindeki grafiği verilen g fonksiyonu bunu sağlamaktadır.

Çünkü B seçeneğindeki grafiğe göre,

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=1$ bulunur.

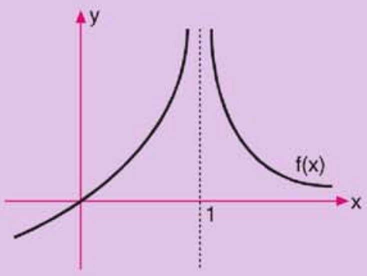
Cevap B

ADIM

GENİŞLETİLMİŞ GERÇEL SAYILAR KÜMESİ

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$

işleminde limit tanımını verirken a ve k yı birer gerçel sayı olarak tanımlamıştık.



Yukarıdaki gibi grafiğe sahip bir f fonksiyonunda x in istenildiği kadar büyük ya da istenildiği kadar küçük seçilme durumlarını ∞ ve $-\infty$ sembolleri ile ifade ederek $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ için limit ne olacağını grafik üzerinden önceki adımlarda yorumlamıştık.

Fonksiyonların yapısı gereği karşımıza çıkan sonsuz kavramını gerçel sayılar kümesi içerisine dahil ederek oluşturulan kümeye **genişletilmiş gerçel sayıları kümesi** denir. Bu küme

$\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$

biçiminde gösterilir.

Burada $-\infty$ ve ∞ un birer gerçel sayı olmadığı unutulmamalıdır. Bu kümenin oluşturulmasında amaç fonksiyonların sonsuzda limitlerini tarif etmektir.

Öncelikle bu kümede bazı işlemlerin nasıl yapıldığını gösterelim.

Genişletilmiş Gerçel Sayılar Kümesinde İşlemler

a herhangi bir gerçel sayı olmak üzere,

- $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$
- $a > 0 \Rightarrow a \cdot \infty = \infty$
- $a < 0 \Rightarrow a \cdot \infty = -\infty$
- $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$
- $a > 1 \Rightarrow a^{\infty} = \infty$
- $|a| < 1 \Rightarrow a^{\infty} = 0$
- $\dfrac{1}{0^+} = \infty$, $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Yukarıda belirtilen durumlar dışında yer alan ve sık karşılaşılan $\infty - \infty$ ve $0.\infty$ işlemleri, ilerideki adımlarda anlatılacak olan limitte belirsizlik durumları içerisinde ele alınacaktır.

Sonsuzda Limit

$x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ için bir fonksiyonun limitini araştırırken bu fonksiyonun tanım kümesinin bütün sonlu sınırları aştığında davranışını belirlemek isteriz.

Örneğin,

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu sıfırdan farklı tüm x değerleri için tanımlıdır.

Bu fonksiyonunun sonsuzda limitini bulalım.

Genişletilmiş gerçel sayılar kümesindeki işlemleri hatırlayarak;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

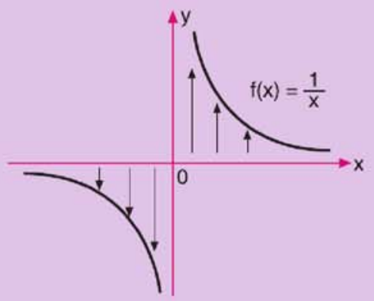
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ bulunur.

Sonsuz Limit

Limit işleminin sonucunun ∞ ve $-\infty$ ile tarif edilmesi, bir fonksiyonun bir noktadaki limiti bulunurken kullanılan bir yazım şeklidir. Daha önce de hatırlattığımız gibi limitin sonucunun ∞ ve $-\infty$ ile gösterilmesi limitin var olduğu anlamına gelmez. Sadece bu gösterimle fonksiyonun ∞ veya $-\infty$ a doğru ıraksandığı anlatılmaya çalışılır.

Örneğin;

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0^+$ ve $x \to 0^-$ için limit işlemlerinin sonuçlarını ∞ ve $-\infty$ sembollerini kullanarak ortaya koyabiliriz.



Yukarıdaki grafik incelenirse x in sıfıra sağdan yaklaşırken $\frac{1}{x}$ ifadesi her defasında büyüyecek ve sınırsız bir biçimde bu büyüme devam edecektir. O halde $x \to 0^+$ için f in bir limiti yoktur ve bu sonucu f in sonsuza yöneldiğini göstermek için

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

şeklinde tarif ederiz.

x in sıfıra soldan yaklaşırken $\frac{1}{x}$ ifadesi her defasında küçülecek ve küçülme sınırsız bir biçimde devam edecektir. O halde $x \to 0^-$ nin f in bir limiti yoktur ve bu sonucu yani f in sınırsız küçülmesi durumunu

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

şeklinde tarif ederiz.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x + 2^{-x} + \frac{1}{x}\right)$$

limitinin sonucunu bulalım.

Çözüm

Genişletilmiş gerçel sayılar kümesindeki işlemleri hatırlarsak;

$x \to \infty$ için $\quad 2^x \to \infty$

$x \to \infty$ için $\quad 2^{-x} = \frac{1}{2^x} \to 0$

$x \to \infty$ için $\quad \frac{1}{x} = 0$ şeklinde sonuçlanır.

O halde,

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x + 2^{-x} + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$

şeklinde sonuçlanır.

ÖRNEK 2

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

limitinin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x \to -\infty$ için $\quad x^2 \to \infty$ olur.

$x \to -\infty$ için $\quad \frac{1}{x} \to 0$ olur.

O halde,

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = \infty - 0 = \infty \text{ olur.}$$

ÖRNEK 3

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

limitinin sonucunu bulalım.

Çözüm

Daha kolay yorumlamak adına değişken dönüşümü kullanılabilir.

$t = \frac{1}{x}$ olacak şekilde düşünülürse

$x \to \infty$ için $\quad t \to 0^+$ olur.

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \sin t = 0 \text{ olur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

limitinin sonucu nedir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+9^{-x}\right)$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

3. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(|x|^3-x^3+3^x\right)$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 3 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}+2^{-x}\right)$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

1) A	2) D	3) A	4) E

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\cos\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 1 C) 0 D) -1 E) $-\infty$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^{(-x+\sin x)}$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 4 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

7. $\lim\limits_{x\to a}\left(2^{-\frac{1}{x}}-2^{-x}+1\right)=1$

olduğuna göre, a yerine

I. ∞

II. $(-\infty)$

III. 0

ifadelerinden hangileri yazılabilir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) Hiçbiri

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^{-x}$

limitinin sonucu nedir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

5) B	6) A	7) E	8) D

ADIM

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Trigonometrik fonksiyon olarak ifade edilen sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant fonksiyonlarının tanım kümesindeki her bir değere karşılık limiti vardır ve bu limitin değeri fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.

Örneğin,

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cot x = \cot\frac{\pi}{4} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\pi} \tan x = \tan\pi = 0$

DİKKAT !

Trigonometrik fonksiyonlarda sağdan ve soldan limit incelemelerinde bu fonksiyonların bölgelere göre işaretlerine dikkat edilmelidir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$m \in [1, 10]$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)-3}{\cos(mx)-1} = 1$$

olduğuna göre, m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulalım.

Çözüm

$x \to \frac{\pi}{2}$ için limitin 1 e eşit olduğu bilgisi verilmiştir.

Limiti alınan ifadede x yerine $\frac{\pi}{2}$ yazalım.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)-3}{\cos(mx)-1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-3}{\cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)-1} = 1$$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ olduğuna göre,

$$\frac{1-3}{\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)-1} = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)-1 = -2$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1 \text{ olur.}$$

$m \in [1, 10]$ olduğu biliniyor.

$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $\frac{m\pi}{2}$ nin π ya da π nin tek katları olması gerekir.

O halde m tam sayısı 2, 6, 10 değerlerini alabilir. Yani 3 farklı m tam sayısı vardır.

ÖRNEK 2

$\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\tan x + \cot x}{\sin x}$ **limitinin eşitini bulalım.**

Çözüm

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\tan x + \cot x}{\sin x} = \frac{\tan\pi + \cos\pi}{\sin\pi}$$

$$= \frac{0-1}{0^-} = -\frac{1}{0^-} = -\left(\frac{1}{0^-}\right) = -(-\infty) = \infty$$

Burada $x \to \pi^+$ olduğundan x in 3. bölgede yer aldığı düşünülmelidir. Bu nedenle, $x \to \pi^+$ için $\sin\pi^+ \to 0^-$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 3

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^-} \dfrac{\sin x}{\cos 3x}$ **limitinin eşitini bulalım.**

Çözüm

$x \to \frac{\pi}{6}^-$ olduğundan $3x \to \frac{\pi}{2}^-$ olur. Yani 3x in 1. bölgede olduğu anlaşılmaktadır.

$x \to \frac{\pi}{6}^-$ için $3x \to \frac{\pi}{2}^-$ ise $\cos 3x \to 0^+$ olur.

Buna göre limitin eşiti

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-} \frac{\sin x}{\cos 3x} = \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = \infty \text{ bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

2. $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 1 C) 0 D) -1 E) $-\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(2^{\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}} \right)$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) 0 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) ∞

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \dfrac{\sin(-x)}{\sin 4x}$

limiti neye eşittir?

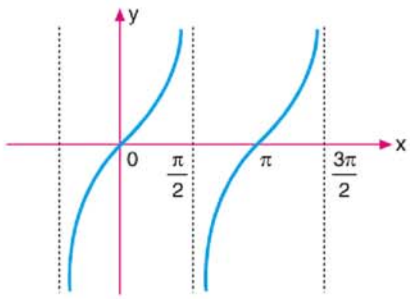
A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2\sin 3x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) ∞

6.



Yukarıda y = tanx fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} 2^{\tan(x-\pi)}$ **limiti neye eşittir?**

A) ∞ B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) $-\infty$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right]$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

8. a tam sayı ve $a \in [0, 8]$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to \left(\frac{a\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{x}{\cos x} \right) = \infty$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 10 E) 16

1) E	2) A	3) B	4) E	5) A	6) D	7) C	8) D

ADIM

LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMLARI

Limitte belirsizlik kavramı, bir fonksiyonun herhangi bir noktada limiti incelenirken ve ilk anda yorum getirilemeyen durumlar için kullanılır.

Bir limit işlemi incelenirken karşılaşılan

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

durumları belirsiz durumlar olarak adlandırılır. Limit incelenirken bu durumlarla karşılaşılırsa cebirsel işlemler (sadeleştirme, payda eşitleme, genişletme gibi) yardımıyla belirsizlik giderilmeye limitin yakınsandığı değer belirlenmeye çalışılır.

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ise

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\frac{0}{0}$ belirsizliğini gidermek için limitte belirsizliğe sebep olan ifade ya da çarpanlar sadeleşme yoluyla ortadan kaldırılmaya çalışılır.

Örneğin:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to y} \frac{x^2y-xy^2}{x-y} = \frac{0}{0}$$

limitlerinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği bulunmaktadır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x}{x^2-1}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

Belirsizliği ortadan kaldırabilmek için pay ve paydadaki ifadeleri düzenleyelim.

$$\frac{x^4-x}{x^2-1} = \frac{x.(x^3-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= x.\frac{\cancel{(x-1)}.(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}.(x+1)}$$

$$= \frac{x.(x^2+x+1)}{(x+1)}$$

Pay ve paydada sıfırı oluşturan çarpan sadeleştirildi. Şimdi limit işlemini gerçekleştirelim.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x.(x^2+x+1)}{(x+1)} = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}$$

Belirsizliği ortadan kaldırabilmek için işlem kolaylığı sağlayacak bir düzenleme yapalım.

Kök dereceleri 2, 3 ve 6 olduğundan bu sayıların okek i olan 6 yı kullanarak $x = t^6$ dönüşümü yapalım.

$x \to 1$ için $t \to 1$ olacağından limit

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{t^6}-\sqrt{t^6}}{\sqrt[6]{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}=\lim_{x\to 1}\frac{t^2-t^3}{t-t^2}$$

şekline dönüşür.

Şimdi belirsizliği giderelim.

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2\cancel{(1-t)}}{t\cancel{(1-t)}}=\lim_{t\to 1}t=1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 3

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{1-\sqrt{x-1}}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{1-\sqrt{x-1}}=\frac{0}{0}$$

Belirsizliği ortadan kaldırabilmek için paydadaki ifadenin eşleniği ile pay ve paydayı çarpalım.

$$\frac{x^2-2x}{1-\sqrt{x-1}}\cdot\frac{(1+\sqrt{x-1})}{(1+\sqrt{x-1})}=\frac{x.(x-2).(1+\sqrt{x-1})}{1-(x-1)}$$

$$=\frac{x.\cancel{(x-2)}.(1+\sqrt{x-1})}{\cancel{2-x}}$$

$$=-x\cdot(1+\sqrt{x-1}) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(-x-x\sqrt{x-1}\right)=-2-2=-4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-ax+b-1}{x^2-x}=1$$

olduğuna göre, a + b toplamını bulalım.

Çözüm

Limit işleminde kesrin paydası $x \to 0$ için sıfıra eşit olurken pay kısmının da $x \to 0$ için sıfıra eşit olmalıdır. Çünkü payda sıfıra giderken limit işleminin 1 gibi bir reel sayıya eşit olabilmesi için $\frac{0}{0}$ belirsizliği oluşmalıdır. Aksi halde payda sıfıra giderken pay kısmı sıfırdan farklı bir sayıya giderse limit $\pm\infty$ a ıraksar, bir reel sayı elde edilemez.

O halde,

$x \to 0$ için $\quad 0-0+b-1=0$

$b = 1$ bulunur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-ax}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2-a)}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{0-a}{0-1}=1\Rightarrow a=1 \text{ olur.}$$

Buna göre, $a + b = 2$ bulunur.

ÖRNEK 5

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 4x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 4x}=\frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için pay ve paydayı düzenleyelim.

HATIRLATMA

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1-\cos^2 4x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^{1}}{\sin^2 4x}$$

$$= \frac{\cos 2x}{\sin^2 4x} \quad \text{elde edilir.}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos 2x}{\sin^2 4x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan sadeleştirmeye devam edelim.

$\sin 4x = 2\sin 2x.\cos 2x$ olduğundan

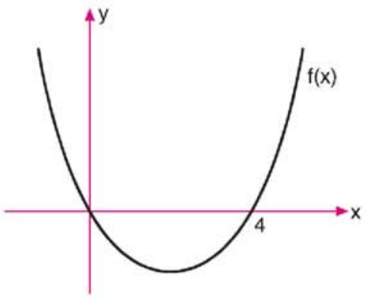
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos 2x}{\sin^2 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cancel{\cos 2x}}{4\sin^2 2x.\underbrace{\cancel{\cos^2 2x}}_{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{4\sin^2 2x.\cos 2x}$$

$$x \to \frac{\pi}{4}^+ \text{ için } \cos 2x \to 0^-$$

$$= \frac{1}{4.1.0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 6



Yukarıda $y = f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(n+h)-f(n)}{h} = f(3)$$

olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(n+h)-f(n)}{h} = \frac{f(n)-f(n)}{0} = \frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için öncelikle f in denklemini yazalım. f parabolünün başkatsayısına a dersek, f fonksiyonu $f(x) = a.x.(x-4) = ax^2 - 4ax$ şeklindedir.

$$f(n+h) = a.(n+h)^2 - 4a(n+h)$$

$$= an^2 + 2anh + ah^2 - 4an - 4ah$$

$$f(n) = an^2 - 4an$$

$$f(n+h) - f(n) = 2anh + ah^2 - 4ah$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2anh + ah^2 - 4ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2an + ah - 4a)}{\cancel{h}}$$

$$= 2an - 4a$$

Parabol denklemi yardımıyla f(3) ün eşitini bulalım.

$$f(3) = a.3^2 - 4a.3 = -3a$$

Şimdi iki sonucu eşitleyelim.

$$2an - 4a = -3a$$

$$2an = a \Rightarrow n = \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x.\cos 2x - \sin x.\sin 2x)^2 - 1}{\sin 6x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x.\cos 2x - \sin x.\sin 2x)^2 - 1}{\sin 6x} = \frac{0}{0}$$

HATIRLATMA

- $\cos a.\cos b - \sin a.\sin b = \cos(a + b)$

Bu hatırlatma yardımıyla limiti düzenleyelim.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x+2x)) - 1}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 3x - 1}{\sin 6x}$$

$\sin 6x = 2\sin 3x.\cos x$ ve $\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$ ise

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{\sin^2 3x}}{2\cancel{\sin 3x}.\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 3x}{2\cos 3x} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^4-x)^2.(x-1).(x+2)}{(x^2-1).(x^2+x-2)^2}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}+e^{2x}-2e^x}{1-e^{-x}}$

limiti neye eşittir?

A) e^2 B) e(e + 2) C) 3e D) 2 E) 3

3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1) D 2) E 3) C

4. $\lim\limits_{e^x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^4-x^2}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) e C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 1

6. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2+ax}=b$$

olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) –5

4) A 5) B 6) E

APOEMİ

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x . \cos 2x . \cos 4x}{\sin 8x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{8}$ E) ∞

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x\sqrt{x}-1)^3}{(x+\sqrt{x}-2).(x-1)^2}$

limiti neye eşittir?

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) $\dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{9}{4}$ E) 0

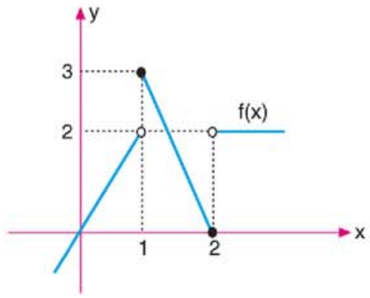
9. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

- Grafiği bir parabol belirtmekte ve x = 2 de x eksenini kesmektedir.
- (1, –1) noktasında f en küçük değerini almaktadır.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x+1)-f^2(2)}{x-1}$ **limiti neye eşittir?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

10.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki limit işlemlerinin hangisinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği gerçekleşir?

A) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x-1}$

B) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x-2)}{f(3-x)}$

C) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(-x)+f(3-x)}{f(x+1)}$

D) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)}{f(x-1)}$

E) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x-1)-f(x)}{x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x+1) = 2$ **olmak üzere,**

$$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(3-x)-2}{f\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x-1) = 0$

B) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

C) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x+1) = 2$

D) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(3-x) = 0$

E) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(1-x) = 0$

7) D **8) D** **9) C** **10) C** **11) D**

ADIM

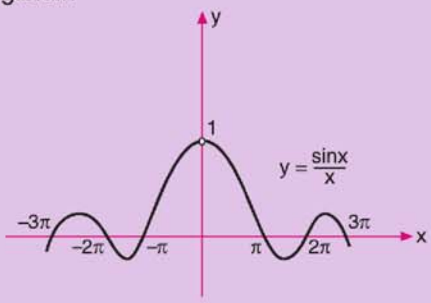
$\dfrac{\sin x}{x}$ İÇEREN LİMİTLER

Bu adımda $x \to 0$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği içeren $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ limitinin eşitini ve bu limitin sonucu olarak bazı $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği içeren limit işlemlerinin sonucunu da öğrenmiş olacağız.

Peki $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ limitinin sonucu neden önemlidir ve bir kural olarak anlatılmaktadır?

Bu limit işlemiyle; f(x) = sinx ve f(x) = cosx fonksiyonlarının türevi hesaplanırken karşılaşılmış ve çözümü aranmıştır. Yani bu limite trigonometrik fonksiyonların türevinin hesaplanmasında ihtiyaç duyulmuştur.

★ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafiğe bakılırsa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ olduğu açıkça görülmektedir.

★ Bu limitin sonucunu bir de cebirsel yolla gösterelim.

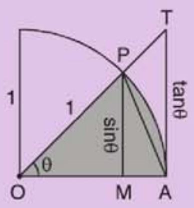
Çeyrek birim çember yardımıyla aşağıdaki gibi alanlar arasında bir sıralama elde edilir.

Taralı dilimin alanı: A(OAP)

$A(\widehat{OAP}) < A(OAP) < A(\widehat{OAT})$

$\dfrac{\sin\theta}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\tan\theta}{2}$

$\sin\theta<\theta<\tan\theta$



Son elde ettiğimiz eşitliği sinθ ya bölelim.

$1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\dfrac{1}{\cos\theta}\Rightarrow 1>\dfrac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$ olur.

Şimdi $\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$ eşitsizliğinin her tarafının $x\to 0$ için limitini hesaplayalım.

$$\lim_{x\to 0}\cos\theta<\lim_{x\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}<\lim_{x\to 0}1$$

$$1<\lim_{x\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

Sıkıştırma teoremi nedeniyle $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ olur.

Bu limit işleminde elde edilen sonuç yardımıyla benzer limit problemlerinin çözümü de hesaplanabilmektedir.

Örneğin:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ **limitinin sonucu bulalım.**

Çözüm:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{0}{0}$$

Limit işleminde x – 2 = t dönüşümü yapalım.

$x\to 2$ için $t\to 0$ olur. O halde,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ bulunur.

Örneğin:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$ **limitinin sonucu bulalım.**

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x.\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}}^{1}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ limitinde 2x = t dönüşümü yapalım.

$x\to 0$ için $t\to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\frac{2}{3}\cdot 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{2}{3}\cdot t}=\frac{3}{2}\overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}^{1}=\frac{3}{2}\ \text{bulunur.}$$

Örneğin:

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}$ **limitinin sonucu bulalım.**

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x.\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}}^{1}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$ işleminde pay ve paydayı x e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{1}=3$$

Şimdi tüm anlattıklarımız sonucunda aşağıdaki genel sonuçları elde edebiliriz.

$x\to a$ için $f(x)\to 0$ olmak üzere,

I. $\lim_{x\to a}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\sin(f(x))}=1$

Yukarıdaki işlemlerde sin yerine tan yazılsa da eşitlikler geçerlidir.

II. $\lim_{x\to a}\frac{\sin(m.f(x))}{n.f(x)}=\frac{m}{n}$

$\lim_{x\to a}\frac{n.f(x)}{\sin(m.f(x))}=\frac{n}{m}$

Yine yukarıdaki eşitliklerde sin yerine tan yazılırsa eşitlikler geçerli olur.

III. $\lim_{x\to a}\frac{\sin(m.f(x))}{\sin(n.f(x))}=\lim_{x\to a}\frac{\tan(m.f(x))}{\tan(n.f(x))}=\frac{m}{n}$

$\lim_{x\to a}\frac{\tan(m.f(x))}{\sin(n.f(x))}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(m.f(x))}{\tan(n.f(x))}=\frac{m}{n}$

DİKKAT !

Yukarıdaki işlemlerin $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaşıldığında geçerli olduğu unutulmamalıdır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 2x}+\frac{x}{\tan 3x}\right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 2x}+\frac{x}{\tan 3x}\right)=\frac{0}{0}$$

Adımda öğrendiğimiz genel sonuçları bu sorunun çözümünde kullanalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 3x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{11}{6}\ \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x.\tan x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x.\tan x}=\frac{0}{0}$$

Verilen limit işlemini düzenleyelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x.\sin 3x}{x.\tan x}=\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}^{3}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}}^{3}$$

$$=3\cdot 3=9\ \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}$$

Verilen işlemi adımda verdiğimiz kuralları uygulayabilecek şekle dönüştürelim.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x).(1+\cos x)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x)}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}}_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

ÖRNEK 4

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$x\to 0$ için $f(x)\to 0$ ise $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ olduğunu biliyoruz.

Bu soruda bu kuralı uygulayabilmek için sinüs içinde yer alan $x^2 - 4$ ifadesi payda da yer almalıdır. Bunun için limitte verilen ifadenin pay ve paydasını $x + 2$ ile genişletelim.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}\cdot\frac{x+2}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2)\right)=\overbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}}^{1}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 2}(x+2)}^{4}$$

$$=1.4=4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x^2+\tan 3x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x^2+\tan 3x}=\frac{0}{0}$$

Adımda verilen kuralları uygulayabilmek için limitte verilen ifadenin pay ve paydasını x e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+\sin 2x}{x}}{\frac{x^2+\tan 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}}{x+\frac{\tan 3x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}}$$

$$=\frac{1+2}{0+3}=1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin\sqrt{x}}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

Adımda verilen kuralları uygulayabilmek için limitte verilen ifadenin pay ve paydasını $\sqrt{x}$ e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin 2x}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 7

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{0}{0}$$

olduğuna göre, bu belirsizliği ortadan kaldırmaya çalışalım.

HATIRLATMA

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

olduğuna göre, $\cos x = 1-2\sin^2 \frac{x}{2}$ olur.

O halde,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= 2\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \text{ olur.}$$

ÖRNEK 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{x.\tan x}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{x.\tan x} = \frac{0}{0}$$

Verilen ifadeyi düzenleyelim.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)\cdot\sin(\sin x)}{x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{0}{0}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)}_{1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\right) \dots (\bigstar)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \frac{0}{0}$$

işleminde kuralı uygulayabilmek için sin(sinx) ifadesinin paydasında sinx bulunmalıdır. Bunun için kesrin pay ve paydasını sinx ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)}_{1}$$

$$= 1.1 = 1 \text{ olur.}$$

Bu sonucu ($\bigstar$) da yerine yazarsak;

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{x.\tan x} = 1.1.1 = 1 \text{ bulunur.}$$

DİKKAT !

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Çünkü $x\to\infty$ için sinx bir sayı olarak davranırken payda sonsuza gider.

Yani

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\text{sayı}}{\infty} = 0 \text{ olur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. I. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin x}{x} = 0$

II. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x} = 1$

III. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x}{\sin x} = 2$

Yukarıda verilen eşitliklerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x.\sin 6x}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) ∞

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2x-2)}{x^3 + x - 2}$

limiti neye eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) 0

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\sin x}{x} - 1}{x - \sin x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

1) B	2) D	3) C	4) A

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2\sin x)}{2\tan x}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 0

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos x)}{x.\cot x}$

limiti neye eşittir?

A) π B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{2}{\pi}$ D) 1 E) 0

7. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x - \sin^6 x}{x^2 \cdot \tan 3x}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **neye eşittir?**

A) ∞ B) 1 C) $\dfrac{1}{3}$ D) 0 E) $-\dfrac{1}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-2\cos^2 x)^2 - 1}{\sin x \cdot \tan 2x}$

limiti neye eşittir?

A) 4 B) 2 C) 1 D) –1 E) –2

5) E	6) C	7) C	8) E

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt{2\tan x}}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 0

10. a sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{a}{x}\right)}{\frac{4}{ax}}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 4 B) 2 C) $\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

9) A **10) C** **11) C**

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\sin 8x}{\tan 6x}$

limiti neye eşittir?

A) –1 B) $-\dfrac{1}{6}$ C) 0 D) 1 E) $\dfrac{4}{3}$

13. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan^3(x-\pi)}{(\pi^2-x^2)\cdot\sin^2 x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\dfrac{1}{2\pi^2}$ B) $-\dfrac{1}{2\pi}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2\pi}$ E) 1

14. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x.\cosh-\sin x-\cos x.\sinh}{h}$

limiti neye eşittir?

A) –1 B) 0 C) –sinx D) –cosx E) sinx – cosx

12) E **13) B** **14) D**

ADIM

$\frac{\infty}{\infty}$ BELİRSİZLİĞİ

$x \to a$ için

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mp\infty$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mp\infty$ eşitlikleri geçerli ise

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için sadeleşme yapılabilir.

Örneğin:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x + 1}{3x^3 + x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

limitinde gerçekleşen belirsizliği sadeleşme yoluyla giderelim.

Bunun için pay ve payda en büyük dereceli terimlerin ortak parantezine alınır.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

Sadeleşme sonucunda son elde edilen limitte

$x \to \infty$ için $\frac{1}{x^2} \to 0$ ve $\frac{1}{x^3} \to 0$ olacağından

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Şimdi yukarıdaki örnekte olduğu gibi pay ve paydasında polinom bulunan ve x için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği içeren limitler için pratik bir kural verelim.

PRATİK

m ve n doğal sayı olmak üzere,

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} n = m & \text{ise } \frac{a_n}{b_m} \\ n > m & \text{ise } \mp\infty \\ n < m & \text{ise } 0 \end{cases}$$

Pratik kurala göre,

- Pay ve paydada en büyük dereceli terimlerin dereceleri eşitse limit, bu terimlerin katsayılar oranı olur.
- Payın derecesi büyükse limit $-\infty$ veya ∞ a eşit olur.
- Paydanın derecesi daha büyükse limit sıfıra eşit olur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)(x^3 + x - 1)}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)(x^3 + x - 1)}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Adımda verilen pratik kuralı uygulayabilmek için pay ve paydayı düzenleyip en büyük dereceli terimleri bulalım.

Pay kısmında çarpma işlemi gerçekleştirirsek en büyük dereceli terim x^5 olur, paydada ise x^6 olur. Diğer terimlerin dereceleri daha küçük olduğundan bu terimlerin limit işleminde bir belirleyiciliği yoktur.

O halde paydanın derecesi daha büyük olduğundan,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)(x^3 + x - 1)}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{x^6} = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+x+1)^3}{x^4+\frac{1}{x^2}}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+x+1)^3}{x^4+\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Pay ve paydadaki en büyük dereceli terimleri bulalım. Bunun için ifadeyi düzenleyelim.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+x+1)^3}{x^4+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+x+1)^3\cdot x^2}{x^6+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left((2x^2)^3+\ldots\right)x^2}{x^6+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(8x^6+\ldots)\cdot x^2}{x^6+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x^8+\ldots}{x^6+1} = \infty$$

Payın derecesi paydanın derecesinden büyük olduğundan limit ∞ a eşit çıkar.

ÖRNEK 3

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b+\frac{x^3+1}{x^2+2}\right) = \frac{3}{2}$$

olduğuna göre, a.b değerini bulalım.

Çözüm

$x \to \infty$ için verilen ifadenin $\frac{3}{2}$ gibi bir reel sayı çıktığı görülüyor. Bunun gerçekleşmesini sağlayan a ve b sayılarını bulabilmek için limiti alınan ifadeyi düzenleyelim. Payda eşitlersek;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3+bx^2+2ax+2b+x^3+1}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(a+1)x^3+bx^2+2ax+2b+1}{x^2+2} = \frac{3}{2}$$

Sonucun $\frac{3}{2}$ çıkabilmesi için pay ve paydadaki en büyük dereceli terimlerin dereceleri aynı olmalıdır. O halde pay kısmında x^3 lü terim bulunmamalıdır. x^3 lü terimin bulunmaması için $a = -1$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{bx^2+2ax+2b+1}{x^2+2} = \frac{b}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

O halde $a\cdot b = (-1)\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ olur.

ÖRNEK 4

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{6x^2+2}-x}{4x+1}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{6x^2+2}-x}{4x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Pay kısmındaki ifade polinom olmadığından pratik kural burada hemen uygulanamaz. Belirsizliği giderebilmek için pay ve paydayı en büyük dereceli terimlerin ortak parantezine alalım.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(6+\frac{2}{x^2}\right)}-x}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{6+\frac{2}{x^2}}-x}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

$x \to -\infty$ için $|x| = -x$ olur.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)\cdot\sqrt{6+\frac{2}{x^2}}-x}{x\cdot\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{(-x)}\cdot\left[\sqrt{6+\frac{2}{x^2}}+1\right]}{\cancel{x}\cdot\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{6+\frac{2}{x^2}}+1}{4+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{6}-1}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}+2^x+1}{2\cdot 3^x-2^x+3}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}+2^x+1}{2\cdot 3^x-2^x+3}=\frac{\infty}{\infty}$$

Belirsizliği ortadan kaldırabilmek için tıpkı pay ve payda polinom olduğu durumlardaki gibi en büyük terimlerin parantezine alma düşünülebilir.

$x\to\infty$ için $2^x<3^x$ olduğundan pay ve paydadaki en büyük terimler 3^x li terimlerdir. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3^x}\left(3+\frac{2^x}{3^x}+\frac{1}{3^x}\right)}{\cancel{3^x}\left(2-\frac{2^x}{3^x}+\frac{3}{3^x}\right)}$$

$x\to\infty$ için $\frac{2^x}{3^x}\to 0$ ve $\frac{1}{3^x}\to 0$ dır.

Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\overset{0}{\cancel{\frac{2^x}{3^x}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{3^x}}}}{2-\underset{0}{\cancel{\frac{2^x}{3^x}}}+\underset{0}{\cancel{\frac{3}{3^x}}}}=\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 6

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x+2^{x-1}}{5^{x+1}+2^{x+2}}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x+2^{x-1}}{5^{x+1}+2^{x+2}}=\frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

Çünkü $x\to-\infty$ için $5^x\to 0$ ve $2^x\to 0$ dır.

Bu soruyu da bir önceki örnekteki gibi düşünelim. Yani önce $x\to-\infty$ için en büyük terimleri belirleyelim.

$x\to-\infty$ için $5^x<2^x$ dir.

O halde pay ve paydayı 2^x li terim parantezine alalım.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2^x}\left(\frac{5^x}{2^x}+2^{-1}\right)}{\cancel{2^x}\left(\frac{5^{x+1}}{2^x}+2^2\right)}$$

$x\to-\infty$ için $\frac{5^x}{2^x}\to 0$ dır. Çünkü payda $x\to-\infty$ için daha büyüktür. Buna göre,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{5^x}{2^x}}}+\frac{1}{2}}{\underset{0}{\cancel{\frac{5^x}{2^x}}}+4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 7

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x+1}+3^x+4}{4^x+2^x-1}$$

limitinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x+1}+3^x+4}{4^x+2^x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

Pay ve paydadaki en büyük terimleri belirleyelim.

$2^{2x}=4^x$ olduğundan pay kısmında en büyük terim 4^x li terimdir. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x\cdot 2+3^x+4}{4^x+2^x-1}=\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{4^x}\left(2+\frac{3^x}{4^x}+\frac{4}{4^x}\right)}{\cancel{4^x}\left(1+\frac{2^x}{4^x}-\frac{1}{4^x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{2+\overset{0}{\cancel{\frac{3^x}{4^x}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{4}{4^x}}}}{1+\underset{0}{\cancel{\frac{2^x}{4^x}}}-\underset{0}{\cancel{\frac{1}{4^x}}}}$$

$$=\frac{2}{1}=2 \text{ bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-2x^2)\cdot(2x-1)}{(2x+1)^3}$

limiti neye eşittir?

A) –4 B) –2 C) $-\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) ∞

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^3-1)^2}{x^2\cdot(x^3+1)}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 1 C) 0 D) –1 E) –∞

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+1}{2x}}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{4}$ C) 1 D) 4 E) ∞

1) C 2) E 3) D

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{\left(\frac{x^3+1}{x^2+x}\right)}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) ∞

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(a-2)\cdot x^3+x\cdot(x^2+1)}{3x^3+2}=2$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 2 E) $\dfrac{3}{2}$

6. k, m ve n gerçel sayılar olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(k-3m)x^4-(n+1)x^2+1}{(n-1)x^3-mx^2+2}=3$

olduğuna göre, k.m.n kaçtır?

A) 6 B) 2 C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

4) A 5) B 6) C

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-2x}{4x-\sqrt{x^2+1}}$

limiti neye eşittir?

A) –1 B) $-\dfrac{3}{5}$ C) $-\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) 1

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^{x-1}+2^{x-2}+1}{3^{-x}+3^{x+1}+2^{x+1}}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{9}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) 1 E) ∞

7) B 8) B

9. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(1+2+...+n)^2}{n^2+1}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) ∞

10. a bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{2a+4}+x^{6a-4}}{x^{6-a}+x^{5a+1}}$

işleminin sonucu bir gerçel sayıya eşit olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 10 D) 15 E) 21

9) E 10) D

11. $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{\ln x}$

olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) e^2 C) e D) $\dfrac{1}{e}$ E) 0

12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x} & x<0\\ \dfrac{|x-2|}{x^2-4} & x\geq 0\end{cases}$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

13. Bir ürünün x adetinin satışa sunulurken toplam maliyeti (TL)

$$f(x)=2000+\frac{x}{2}+\frac{4}{x}$$

fonksiyonu ile verilmektedir.

Buna göre, 1 adet ürünün en düşük maliyeti kaç TL olur?

A) 20 B) 10 C) 1 D) 0,5 E) 0,2

14. I. $\lim\limits_{x\to\infty}(-2)^{\frac{x^2+1}{x}}=\infty$

II. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}=1$

III. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5^x}{2^x}+\dfrac{2^x}{5^x}\right)=0$

Yukarıda verilen eşitliklerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

APOTEMİ

11) D **12) B** **13) D** **14) D**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|x^2+x-6|}$

limiti neye eşittir?

A) –1 B) $-\dfrac{4}{5}$ C) 0 D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{4}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^{x-1}-3^{x-1}}{8^{x-1}-27^{x-1}}$

limiti neye eşittir?

A) 9 B) 4 C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) 0

3. k, m, n birer gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+mx+x+m+n}{x^2-1} = \frac{k}{2}$$

olduğuna göre, k + m + n toplamı kaçtır?

A) 2 B) $\dfrac{3}{2}$ C) 1 D) 0 E) –1

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{4x-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}+x+1}$

limiti neye eşittir?

A) 4 B) 2 C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 0

5. $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{x-1}{x}} & x > 0 \\ \dfrac{1}{x}+\tan x & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ **toplamı neye eşittir?**

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) –∞

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sin x+\cos x}{\tan x}$

limiti neye eşittir?

A) –∞ B) –1 C) 0 D) 1 E) ∞

7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4\sqrt{x^2+1}-x+1}{\sqrt{4x^2+1}-5\sqrt{x^2+1}}$

limiti neye eşittir?

A) –5 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 2x-\cos^2 4x}{\sin^2 6x}$

limiti neye eşittir?

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{4}{9}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) 1

1) B	2) D	3) C	4) E	5) E	6) C	7) D	8) D

APOTEMİ

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^4 - 1)}{\tan(x - 1)}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

10. $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ ve $C(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!.r!}$

olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(n, 2) + P(n, 3)}{C(n, 3)}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) 3 E) 6

11. a pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a^+} \left(\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{a} - a + 3}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right) = \dfrac{1}{6}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 36

9) A	10) E	11) D

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x + \sin x}{2^{x+1} + 4 \sin x}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 3 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) 0

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) e E) ∞

14. I. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sin\sqrt{x}} = 0$

II. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$

III. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sin 2x}{\tan x} = 2$

Yukarıda verilen eşitliklerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) I, II ve III

12) C	13) A	14) A

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1. a bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{ax}}-2^{ax}+1\right)=1$$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $-\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{x-2}\right)$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) 1 E) ∞

3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\tan x+\cot x}{\sin x-\cos x}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) 0 E) $-\infty$

1) E 2) E 3) A

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 4x}{(\sin x.\cos 3x-\cos x.\sin 3x)^2-1}$

limiti neye eşittir?

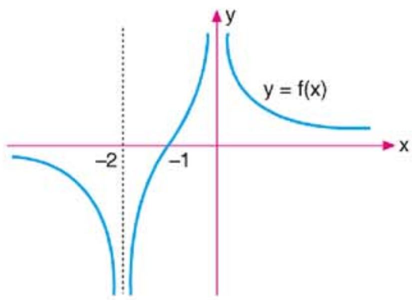
A) 4 B) 0 C) –2 D) –4 E) $-\infty$

5. $\lim_{2^x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^3+3x}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) ∞

6.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)-f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)+1}$$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $-\infty$

4) D 5) A 6) A

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x+\ldots}{x^3}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 3 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

8. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x-1)-f(x^2-1)}{f(x-2)-1}=\dfrac{1}{2}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

B) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x+1)=1$

C) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(-x)=0$

D) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x+1)=1$

E) $\lim\limits_{x\to -1} f(x-1)=0$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(1-\cos^2 x)}{\sin^2 2x}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

7) A **8) D** **9) B**

10. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 3x.\sin 2x}{\tan x}$

limiti neye eşittir?

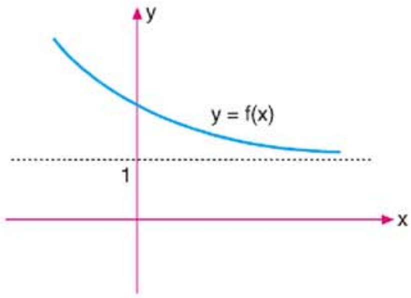
A) -2 B) -1 C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 2

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(\dfrac{2}{x^2.e^x}\right)\cdot \ln(e^x\cdot 2^x)\right]$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) $\dfrac{2\ln 2}{e}$ C) $\dfrac{2}{e}$ D) 1 E) 0

12.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{x\to \infty}\left[(fog)(x)+(gof)(x)\right]$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

10) A **11) E** **12) B**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1. $f(x) = \dfrac{4}{2 + 3^{\frac{1}{x}}}$

fonksiyonu veriliyor.

f in x = 0 noktasında sağdan ve soldan limitleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 1) B) (0, 2) C) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

D) $(-\infty, \infty)$ E) $(\infty, -\infty)$

2. a ve b birer gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a-2)n^3 + 3n - 7}{(b+1)n + 2} = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x^2 - 4x \cdot |x|}}{x}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **limiti neye eşittir?**

A) 3 B) 1 C) 0 D) –1 E) –3

1) B	2) D	3) E

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x^2)}{x^2}$

limiti neye eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{a - \sqrt{a+x}}{x-2}$

limitinin bir gerçel sayıya eşit olduğu bilindiğine göre, a kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

6. m bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-m}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

limiti veriliyor.

Buna göre,

I. m = 3 için limit yoktur.

II. m = 2 için limit 1 dir.

III. m = –2 için limit 0 dır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III

D) II ve III E) I, II ve III

4) A	5) D	6) E

7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x.\cosh - \sin x.\sinh - \cos x}{h}$

limiti aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –1 B) 0 C) cosx D) –sinx E) cosx – sinx

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{x.\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) 1 E) ∞

9. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin $x \to 0^+$ için limiti yoktur?

A) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{|x|}$

B) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^2+x}$

C) $f(x)=\dfrac{2x}{|x|}$

D) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

E) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^{-x}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\dfrac{\sin^2 x+\cos x}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{\tan x}\right]$

limiti neye eşittir?

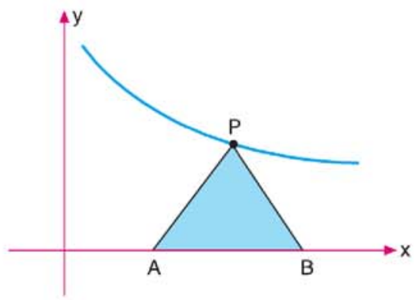
A) ∞ B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) $-\infty$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan(x-2\pi)}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

12.



Yukarıda $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3x}}$ eğrisinin grafiği verilmiştir.

Yukarıdaki gibi tabanı x ekseni üzerinde, tepe noktası eğri üzerinde olan bir PAB eşkenar üçgeni alınıyor.

P(x, y) olmak üzere, $\lim\limits_{x\to\infty}$ Alan($\widehat{PAB}$) limiti neye eşittir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) 1

7) D 8) B 9) D

10) A 11) C 12) C

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3^x \cdot 3^{1-x} + 2^{\frac{1}{x}}\right)$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 4 C) 3 D) 2 E) 0

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan x - \cot x}{\cos x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) ∞

3. $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{\sin(\cos x + \sin x)}{\cos(\sin x - \cos x)} = 0$

olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) π D) $\dfrac{7\pi}{4}$ E) 2π

1) B	2) E	3) D

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x}}$

limiti neye eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) 0

5. a ve b birer gerçel sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x-1} + ax - b\right) = 3$

olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) -3 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6. $f(x) = \dfrac{\sin(\sin^2 x)}{x^2}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **limiti neye eşittir?**

A) 2 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) 0

4) B	5) D	6) B

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 2x)-1}{x\cdot(x-\sin 2x)}$

limiti neye eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 0

8. a bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{ax-\sqrt{x^2+2}}{x+9} = 4$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 8 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}-x+2}{x-\dfrac{1}{x}}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

7) A **8) D** **9) D**

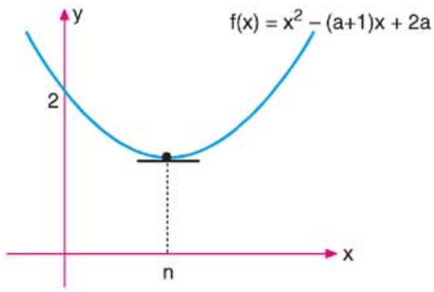
10. m bir pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{m+1}\cdot\frac{1}{\tan(mx)}\right]=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{3}{2}$

11.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to n} \frac{f^2(x)-1}{f^3(x)-1}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 0

10) C **11) C**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5 (ÇÖZÜMLÜ)

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4^x - 3x + 2}{5^{\frac{1}{x}} + 6^x}$

limiti neye eşittir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{4x} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4x} \cdot (x^2 - 1)}$

limiti neye eşittir?

A) $\dfrac{1}{16}$ B) $\dfrac{3}{32}$ C) $\dfrac{1}{8}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{3}{2}$

3. a sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{\sin(x^2 - a^2)}$

limiti neye eşittir?

A) $3a^2$ B) $\dfrac{3a^2}{2}$ C) $\dfrac{a}{3}$ D) $\dfrac{3a}{2}$ E) a

1) A **2) B** **3) D**

4. $\lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{2x}{1 - \ln x}$

limiti neye eşittir?

A) ∞ B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\infty$

5. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

limiti neye eşittir?

A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

6. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 6x - \sin 2x}{\cos x \cdot \sin 4x}$

limiti neye eşittir?

A) –2 B) –1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) 2

4) E **5) A** **6) B**

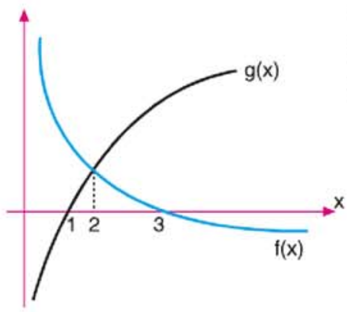
7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{\tan 2x \cdot \sin 3x} & x > 0 \\ \dfrac{x^2}{\tan x} & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **toplamı neye eşittir?**

A) ∞ B) 1 C) $\frac{1}{6}$ D) 0 E) $-\infty$

8.



Yanda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

II. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$

III. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

eşitliklerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) I, II ve III

7) C 8) A

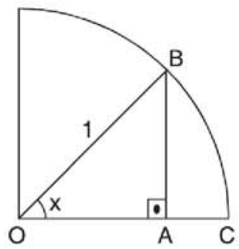
9. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 2r, A açısının ölçüsü α ve |BC| = x olduğuna göre,

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{x}{2\alpha}$

limiti neye eşittir?

A) $\frac{1}{2r}$ B) r C) 2r D) 4r E) ∞

10.



Yandaki O merkezli çeyrek birim çemberde

$m(B\widehat{O}A) = x$

$[BA] \perp [OC]$

Buna göre, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|\overset{\frown}{BC}| \cdot |BA|}{|AC|}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 2

11. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{\alpha^2 . \sin^2 \alpha}$

limitinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 1

9) C 10) E 11) A

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5 (ÇÖZÜMLER)

1. $x \to 0^-$ için pay ve paydayı inceleyelim.

- Pay kısmında yer alan $4^x \to 1$ ve $-3x \to 0$ olur.
- Paydada yer alan $5^{\frac{1}{x}} \to 0$ dır.

  Çünkü $x \to 0^-$ için $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ ve $5^{-\infty} \to 0$ dır.
- Yine payda da yer alan $6^x \to 1$ dir.

O halde

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4^x - 3x + 2}{5^{\frac{1}{x}} + 6^x} = \frac{1-0+2}{0+1} = 3 \text{ bulunur.}$$

Cevap A

2. Öncelikle limiti alınan ifadeyi düzenleyelim.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{4x}\cdot(x^2-1)} = \frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için pay ve paydayı $\sqrt{4x} + \sqrt{x+3}$ ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{4x} - \sqrt{x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{4x} + \sqrt{x+3}\right)}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{4x}\cdot(x^2-1)\cdot(\sqrt{4x} + \sqrt{x+3})}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-(x+3)}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{4x}\cdot(x^2-1)\cdot(\sqrt{4x} + \sqrt{x+3})}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3\cdot\cancel{(x-1)}}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{4x}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot(\sqrt{4x} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot(2+2)} = \frac{3}{32} \text{ bulunur.}$$

Cevap B

3. $$\lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{\sin(x^2 - a^2)} = \frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için ifadeyi düzenleyelim.

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)}{\sin(x^2-a^2)}$$

Pay ve paydayı $(x + a)$ ile genişletirsek

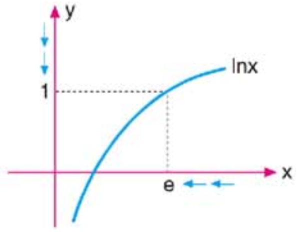
$$\lim_{x\to a} \frac{(x+a)\cdot(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)}{(x+a)\cdot\sin(x^2-a^2)}$$

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\frac{(x^2-a^2)}{\sin(x^2-a^2)}}_{1}\cdot\frac{(x^2+ax+a)}{(x+a)} = \frac{a^2+a^2+a^2}{2a}$$

$$= \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \text{ olur.}$$

Cevap D

4.



$x \to e^+$ için $\ln x \to 1^+$ olur. Bu yorumu $\ln x$ grafiğini düşünürek de yapabiliriz.

O halde

$$\lim_{x\to e^+} \frac{2x}{1-\ln x} = \frac{2e}{1-(1^+)} = \frac{2e}{0^-} = -\infty \text{ bulunur.}$$

Cevap E

5. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$

I. yol

Belirsizliği gidermek için ifadeyi düzenleyelim.

Hatırlatma: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

O halde $\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ yazılabilir.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\sin x}$$

$x\to 0^-$ için $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)<0$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}}_{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{olur.}$$

II. yol

Pay ve paydayı $\sqrt{1+\cos x}$ ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}.\sqrt{1+\cos x}}{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{bulunur.}$$

Cevap A

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 6x-\sin 2x}{\cos x\cdot\sin 4x}=\dfrac{0}{0}$

Belirsizliği gidermek için pay kısmında sinüs dönüşüm formülünü uygulayalım.

Hatırlatma:

$$\sin a-\sin b=2\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Hatırlatma yardımıyla;

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x}{\cos x\cdot\sin 4x}=\frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için şimdi sadeleşme yapalım.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{\sin 2x}\cdot\cos 4x}{\cos x\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\sin 2x}\cdot\cos 2x}=\frac{1}{(-1)\cdot 1}=-1\ \text{olur.}$$

Cevap B

7. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot\overbrace{\dfrac{x}{\tan x}}^{1}=0$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2)}{\tan 2x\cdot\sin 3x}=\frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için pay ve paydayı x^2 ile genişletelim.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\tan 2x\cdot\sin 3x}$$

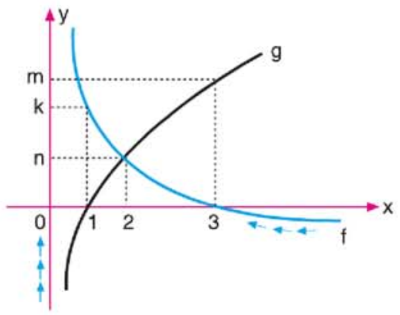
$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\tan 2x}}_{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin 3x}}_{\frac{1}{3}}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)+\lim_{x\to 0^+}f(x)=0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\ \text{bulunur.}$$

Cevap C

8. Her bir maddeyi ayrı ayrı inceleyelim.



I. Yukarıdaki grafiği incelersek

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, ifadesi k gibi sıfırdan farklı bir gerçel sayıya eşittir.

O halde, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{0}{k} = 0$

O halde I doğrudur.

II. Grafiğe bakılırsa

$\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$, m gibi bir gerçel sayıya eşittir.

$x \to 3^+$ için $f(x) \to 0^-$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{m}{0^-} = -\infty$ bulunur.

O halde II yanlıştır.

III. Grafiğe bakarsak

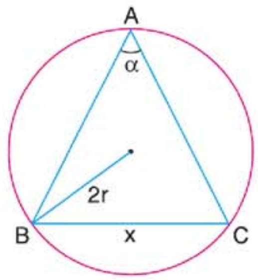
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = n$ ve $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = n$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ olmalıdır.

O halde III yanlıştır.

Cevap A

9.



ABC üçgeninde sinüs teoremi uygularsak

$\dfrac{|BC|}{\sin A} = 2 \cdot (2r)$ dir.

O halde

$\dfrac{|BC|}{\sin \alpha} = 4r \Rightarrow x = 4r \cdot \sin \alpha$ olur.

Şimdi elde ettiğimiz sonucu limitte kullanalım.

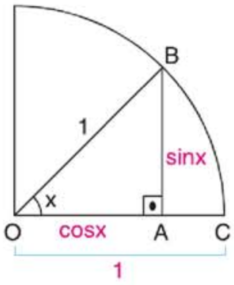
$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{x}{2\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{4r \sin \alpha}{2\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} 2r \cdot \overbrace{\frac{\sin \alpha}{\alpha}}^{1}$$

$$= 2r \cdot 1 = 2r \text{ bulunur.}$$

Cevap C

10.



$|OA| = \cos x$

$|BA| = \sin x$

$|AC| = 1 - \cos x$

BC yayının uzunluğu, BOA açısının ölçüsü x olduğundan $|\overset{\frown}{BC}| = x$ dir.

O halde,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\overset{\frown}{BC}|\cdot|BA|}{|AC|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \sin x}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

Belirsizliği gidermek için limiti alınan ifadeyi düzenleyip sadeleşme gerçekleştirelim.

Yarım açı formülü yardımıyla

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ yazılabilir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \sin x}{1-\left(1-2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \sin x}{2\cdot \sin^2 . \dfrac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \sin x}{2\cdot \sin \dfrac{x}{2}\cdot \sin \dfrac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot \boxed{\frac{x}{\sin \dfrac{x}{2}}}\cdot \boxed{\frac{\sin x}{\sin \dfrac{x}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\dfrac{1}{2}}\cdot \frac{1}{\dfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \text{ bulunur.}$$

Cevap E

11. $\displaystyle \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{\alpha^2 . \sin^2 \alpha} = \frac{0}{0}$

Belirsizliği gidermek için ifadeyi düzenleyelim.

$\displaystyle \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = a$ olsun.

İşlem kolaylığı olması için $\alpha = 2x$ dönüşümü yapalım.

$\alpha \to 0 \Rightarrow x \to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{4x^2}\right) = a$$

$\sin 2x = 2.\sin x \cos x$ ve $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4.\sin^2 x.\cos^2 x} - \frac{1}{4x^2}\right) = a$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4.\cos^2 x} + \frac{1}{4.\sin^2 x} - \frac{1}{4x^2}\right) = a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4.\cos^2 x} + \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)}_{a} = a$$

$$\frac{1}{4} + \frac{a}{4} = a$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{3a}{4}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Cevap A

SÜREKLİLİK

A) Süreklilik Tanımı

B) Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

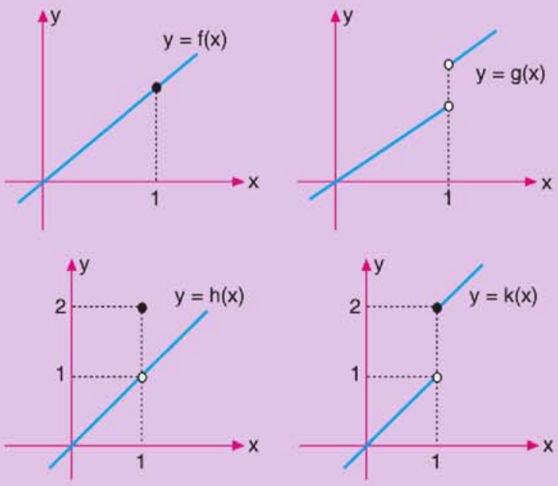
ADIM

SÜREKLİLİK

Bu adımda fonksiyonlarda süreklilik kavramını ele alacağız.

Sürekli bir fonksiyon basitçe, "Tanım kümesi üzerinde elimizi kaldırmadan grafiği çizilebilen fonksiyondur." biçiminde tarif edilebilir.

Bu tarife uyan ve uymayan birkaç fonksiyona grafikleri yardımıyla örnek verelim.



Yukarıda verilen grafikler incelenirse f her x için sürekli bir fonksiyon olarak adlandırılırken g, h ve k fonksiyonlarının grafiklerinde x = 1 noktasında kopma olduğundan bu fonksiyonlar x = 1 noktasında süreksiz fonksiyonlar olarak adlandırılır.

Şimdi bir fonksiyonun bir noktada sürekli olmasını matematiksel olarak ifade edelim.

Tanım: Süreklilik

$A \subset R$ ve f: $A \to R$ biçiminde tanımlı bir f fonksiyonu var olsun.

$a \in A$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna x = a noktasında "**süreklidir**" denir.

f fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında sürekli ise "**f tanım kümesinde süreklidir**" denir.

f in x = a noktasında sürekli olması için gerekli şartları sıralayalım.

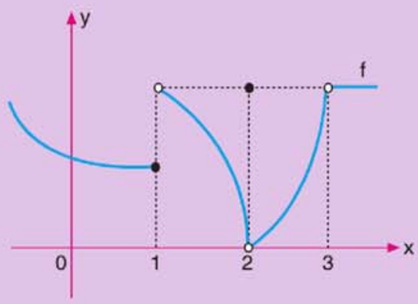
i. f fonksiyonu x = a noktasında tanımlı olmalıdır.

ii. x = a noktasında limiti olmalıdır.

iii. f in x = a noktasındaki limiti, f in x = a daki değerine eşit olmalıdır.

Bu üç koşuldan en az biri <u>sağlanmıyorsa</u> f fonksiyonuna x = a noktasında "**sürekli değildi**r" veya "**süreksizdir**" denir.

Örneğin:



Yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine bakılırsa fonksiyon x =1, x = 2 ve x = 3 apsisli noktalarda süreklilik şartlarını sağlamadığından bu noktalarda f için süreksizdir denir.

f fonksiyonu bu noktalar dışındaki tanım kümesine ait diğer tüm noktalarda süreklidir.

x = 2 apsisli ve x = 3 apsisli noktalarda f in limiti olduğu halde sürekli olmadığına dikkat ediniz.

Bir Aralığın Uç Noktalarında Süreklilik

Fonksiyonların uç noktalarında limit araştırılırken tek taraflı limitlere bakabildiğimizi daha önce limit konusunda görmüştük.

Bir noktada tek taraflı limite bakılabiliyor ve burada limit değeri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit oluyorsa fonksiyon o noktada sürekli kabul edilir.

Yukarıda ifade ettiğimiz uç noktada süreklilik kavramını matematiksel olarak tanımlayalım.

Tanım: Uç Noktada Süreklilik

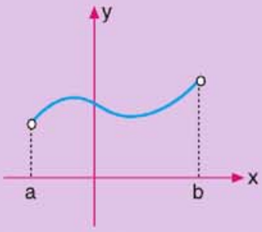
f: [a, b] $\rightarrow$ R biçiminde tanımlı ve (a, b) aralığında sürekli olsun.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

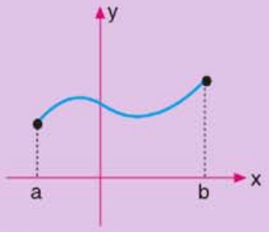
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

eşitlikleri geçerli ise fonksiyon uç noktalarda da sürekli olur. Böylelikle f [a, b] aralığının her noktasında sürekli kabul edilir.

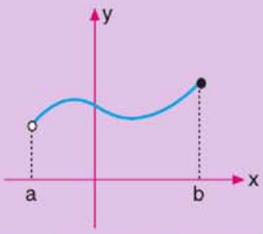
Şimdi anlattıklarımızı grafik üzerinde örnekleyelim.



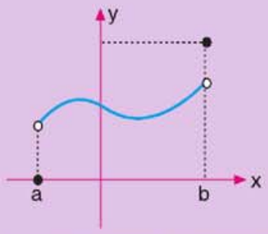
f, (a, b) aralığında süreklidir.



f, [a, b] aralığında süreklidir.

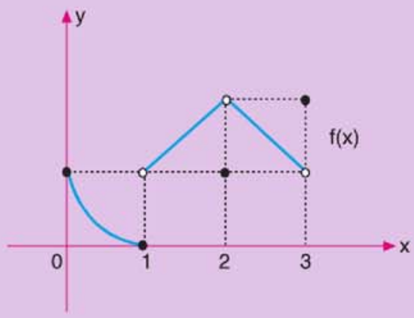


f, (a, b] aralığında süreklidir.



f, (a, b) aralığında sürekli iken f, [a, b] aralığında x=a ve x=b için süreksizdir.

Örneğin:



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli iken x = 1, x = 2 ve x = 3 apsisli noktalarda süreksizdir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulalım.

Çözüm

Fonksiyonun kuralına bakıldığında her x değeri için tanımlı olduğu görülmektedir. Peki bu noktada limiti var mıdır? Bunu merak etmemizin nedeni her noktada tanımlı olmak fonksiyonun sürekliliği için yeterli değildir.

Burada verilen f parçalı fonksiyonu kritik noktaları olan x = 1 ve x = 2 apsisli noktalarda kırılma yapmıştır.

Bu noktalarda sağ ve sol limitleri araştıralım.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2$$

O halde $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ bulunur.

f in x = 1 için değeri 2 olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(2)$ süreklilik şartı sağlanır ve f, x = 1 de süreklidir denir.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+1) = 3$$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur. Dolayısıyla f, x = 2 de süreksizdir.

ÖRNEK 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 2x - 2 & 0 \le x \le 1 \\ 2^{\frac{1}{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulalım.

Çözüm

Fonksiyonun kuralına bakıldığında f fonksiyonu her x gerçel sayısı için tanımlıdır.

Fonksiyonun kırılma yaptığı noktalarda limit araştıralım.

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{1} \neq \underbrace{\lim_{x \to 0^+} 2x - 2}_{-2}$$

olduğundan f in x = 0 da limiti yoktur. Dolayısıyla f bu noktada süreksizdir. Şimdi diğer kırılma noktalarını inceleyelim.

$$\lim_{x \to 1^-} (2x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \to 1^+} 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

olduğundan f in x = 1 için limiti vardır.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$ olduğundan f, x = 1 de süreklidir.

ÖRNEK 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1} & x < 1 \\ ax + b & x = 1 \\ x - b & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, a.b değerini bulalım.

Çözüm

Fonksiyon her x değeri için sürekli ise kırılma noktası olan x = 1 de de sürekli olmalıdır. O halde,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -1 - x = -2$$

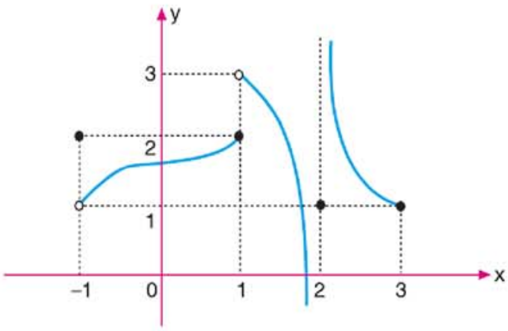
$\lim\limits_{x \to 1^+} x - b = 1 - b$ olduğundan $-2 = 1 - b \Rightarrow b = 3$ olur.

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ eşitliğini kullanarak a yı bulalım.

$a + b = -2 \Rightarrow a + 3 = -2 \Rightarrow a = -5$

Buradan a.b = (–5).3 = –15 bulunur.

ÖRNEK 4



Yukarıda f: [–1, 3] → R fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, fonksiyonunun sürekli ve süreksiz olduğu tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

Önce tanım kümesinin uç değerleri olan x = –1 ve x = 3 noktalarını inceleyelim.

x = –1 için f(–1) = 2 ve $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$ değerleri birbirine eşit olmadığından f, x = –1 de süreksizdir.

- x = 0 da süreklidir.
- x = 1 de $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ olduğundan süreksizdir.
- x = 2 de $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq f(2)$ olduğundan f, bu noktada süreksizdir.
- x = 3 te $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$ olduğundan f, bu noktada süreklidir.

ÖRNEK 5

f: R → R

$$f(x)=\begin{cases} m\cdot\cos x+1 & x<0 \\ n & x=0 \\ \dfrac{\sin 2x}{|x|} & x>0 \end{cases}$$

fonksiyonu x = 0 da sürekli olduğuna göre, m – n farkını bulalım.

Çözüm

f, x = 0 da sürekli ise

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(m\cdot\cos x+1)=m+1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

f(0) = n olduğundan

$m+1=2=n \Rightarrow m=1$, $n=2$ olur.

O halde m – n = –1 bulunur.

ÖRNEK 6

a, b, c ∈ R olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+b}{x-2} & x\neq 2 \\ c & x=2 \end{cases}$$

fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli olduğuna göre, $\frac{a+c}{b}$ oranı kaçtır?

Çözüm

f(x), tüm reel sayılarda sürekli ise x = 2 noktasında da sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+b}{x-2}$$

Limit işleminde x = 2 değeri paydayı 0 yaptığından $\frac{0}{0}$ belirsizliği oluşması için payı da 0 yapmalıdır.

x = 2 için $ax^2+b=0$

$4a+b=0$ ise **$b=-4a$** olur.

O halde

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+b}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-4a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2} a(x+2)=4a \text{ olur.}$$

x = 2 için f(2) = c olduğundan **$c = 4a$** olur.

O halde $\frac{a+c}{b}=\frac{a+4a}{-4a}=-\frac{5}{4}$ bulunur.

ÖRNEK 7

Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7} & x\neq 3 \\ a & x=3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

f(x) fonksiyonu tüm pozitif reel sayılarda sürekli olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm

f(x), tüm reel sayılarda sürekli ise x = 3 noktasında da sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7}}{x-3}\to\frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliğinden kurtulmak için verilen ifade, payın eşleniği ile çarpılmalıdır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7}}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5x+1-(3x+7)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\left(\sqrt{5\cdot 3+1}+\sqrt{3\cdot 3+7}\right)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

O halde x = 3 için $f(x)=f(3)=a=\frac{1}{4}$ olmalıdır.

ÖRNEK 8

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-mx+9}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, m nin hangi aralıkta yer aldığını bulalım.

Çözüm

f fonksiyonunun her x için sürekli olması, paydasında yer alan $x^2 - mx + 9$ ifadesinin sıfırdan farklı olması ile mümkündür.

Buna göre, bu ifadenin diskriminantı (Δ) sıfırdan küçük olmalıdır.

$$\Delta<0 \Rightarrow m^2-4\cdot 9<0$$
$$m^2<36$$
$$-6<m<6 \text{ bulunur.}$$

Yani $m \in (-6, 6)$ olmalıdır.

ÖRNEK 9

$$f(x)=\sqrt{|x-3|-|x+1|}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm

Bu fonksiyonun sürekli olduğu en geniş aralığı bulmak, tanımlı olduğu en geniş aralığı incelemek olacaktır.

Bu arada bir fonksiyonun tanımlı olduğu yerde süreksiz olabileceği unutulmamalıdır. Ancak bu soruda fonksiyonunun denklemi nedeniyle fonksiyon tanımlı olduğu her yerde sürekli olur.

O halde f in en geniş tanım aralığını bularak en geniş sürekli olduğu aralık da tespit edilebilir.

$|x - 3| - |x + 1| \geq 0$ olmalıdır.

$|x - 3| \geq |x + 1|$ eşitsizliğini çözebilmek için her iki tarafın karesi alınabilir. Kare alınırsa mutlak değer kaldırılabilir.

$$(|x-3|)^2 \geq (|x+1|)^2$$
$$x^2-6x+9 \geq x^2+2x+1$$
$$8 \geq 8x$$
$$1 \geq x$$

O halde f in, sürekli olduğu en geniş aralık $(-\infty, 1]$ aralığıdır.

ÖRNEK 10

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm

f fonksiyonu x = 3 te tanımsızdır. Dolayısıyla tanımsız olduğu bu noktada sürekliliğinin araştırılması anlamsızdır.

x = 3 dışında f fonksiyonu her x gerçel sayısı için süreklidir. Yani f in sürekli olduğu en geniş aralık R – {3} tür.

ÖRNEK 11

I. $f(x)=e^{\frac{x+1}{x}}$

II. $g(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

III. $h(x)=2$

fonksiyonlarından hangilerinin gerçel sayılar kümesinde sürekli olduğunu bulalım.

Çözüm

I. fonksiyon x = 0 için süreksizdir.

II. fonksiyon x = 2 için süreksizdir.

III. fonksiyon her x için aynı değeri alır. Dolayısıyla her nokta için limiti o noktanın değerine eşittir. Yani her x gerçel sayısı için süreklidir.

Buna göre, üç fonksiyondan sadece h fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde süreklidir.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x - 1}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–3, 3) B) [–3, 3] C) [0, 3] D) (1, 3) E) [1, 3]

2. $f(x) = \log(x^2 + 2x + m - 1)$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $(0, \infty)$ B) $(2, \infty)$ C) (0, 1) D) $(0, \infty) - \{1\}$ E) (–1, 1)

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 2}{2^{x+1}} & x \geq a \\ \dfrac{|x|}{x} & x < a \end{cases}$

fonksiyonu x = a da sürekli olduğuna göre, a kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) –1

4. I. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$

II. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

III. $f(x) = \ln(x^2 + x)$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangileri gerçel sayılar kümesinde süreklidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + m|x| + 1}$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m > 0$
B) $m > 2$
C) $m < 2$
D) $m \neq 2$ veya $m \neq -2$
E) $-2 < m < 2$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x^2}{3x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli olduğuna göre, k gerçel sayısı kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

1) E 2) B 3) C 4) B 5) E 6) B

7. m ve n sıfırdan farklı birer gerçel sayıdır.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(m-1)x}{nx} & x<0\\ 4n-1 & x=0\\ e^{\frac{x-1}{x}} & x>0\end{cases}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) e^{-2} E) e^{2}

8. Pozitif gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu

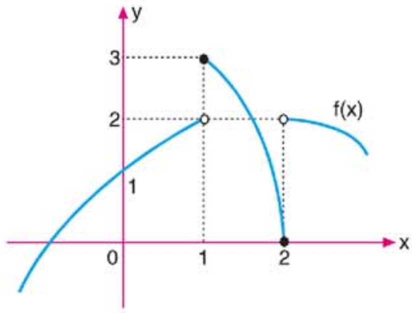
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x-2} & x\neq 2\\ \dfrac{t}{4} & x=2\end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

f fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli olduğuna göre, t kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) $\sqrt{2}$

9.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. $f(x-1)$

II. $\dfrac{1}{f(x-2)}$

III. $f(x^2-3)+f(4-x)$

fonksiyonlarından hangileri x = 2 de süreklidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

10. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi x = 0 da süreklidir?**

A) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & x>0\\ 1 & x\leq 0\end{cases}$

B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

C) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\leq 0\\ \dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$

D) $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ 1 & x\leq 0\end{cases}$

E) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}} & x>0\\ 1-e^{\frac{1}{x}} & x\leq 0\end{cases}$

7) B 8) A

9) B 10) D

ADIM

SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset R$ ve $a \in A$ için

$f: A \to R$, $g: A \to R$

fonksiyonları x = a noktasında sürekli iki fonksiyon olmak üzere,

i. $f + g$, $f - g$, $f.g$ fonksiyonları ve $g(a) \neq 0$ olmak şartıyla $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu x = a da süreklidir.

ii. g fonksiyonu f(a) noktasında sürekli ise gof bileşke fonksiyonu da x = a da süreklidir.

iii. $f: A \to B$ biçiminde tanımlı birebir ve örten f fonksiyonu A da sürekli ise f^{-1} ters fonksiyonu da B de sürekli bir fonksiyondur.

NOT: Polinom fonksiyonları gerçel sayılarda sürekli fonksiyonlardır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq 0 \\ x + b + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - b & x > 0 \\ x - a & x \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor. f fonksiyonu ve f – g fonksiyonu x = 0 da sürekli olduğuna göre, a.b kaçtır?

Çözüm

f, x = 0 da sürekli ise

$$\lim_{x \to 0^+} (x - a) = \lim_{x \to 0^-} (x + b + 1) \Rightarrow -a = b + 1 \text{ olur.}$$

f ve f – g fonksiyonları x = 0 da sürekli ise g fonksiyonu da x = 0 da sürekli olmalıdır.

O halde,

$$\lim_{x \to 0^+} (x - b) = \lim_{x \to 0^-} (x - a) \Rightarrow -b = -a$$

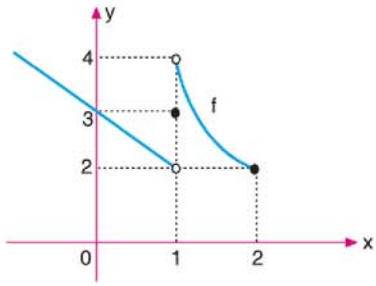
$$\Rightarrow b = a \text{ olur.}$$

–a = b + 1 eşitliğinde b yerine a yazarsak,

$$-a = a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$a \cdot b = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

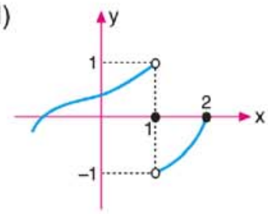
ÖRNEK 2



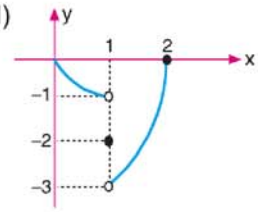
Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

(f + g) fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi g fonksiyonunun grafiği <u>olamaz</u>?

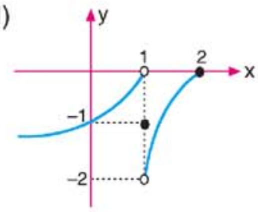
I)



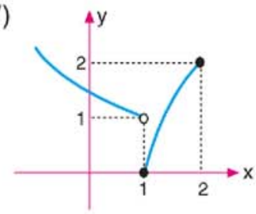
II)



III)



IV)



Çözüm

Her madde tek tek incelenerek

$$\lim_{x \to 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f+g)(x) = (f+g)(1)$$

şartları kontrol edilmelidir. Örneğin I için,

	f	g	f + g
$\lim_{x \to 1^-}$	2	1	3
$\lim_{x \to 1^+}$	4	–1	3
x = 1	3	0	3

tüm şartlar sağlanıyor. Bu şekilde hareketle cevabın IV teki grafik olduğu görülür. Çünkü g nin grafiği IV teki grafik olursa f + g, 1 de sürekli olmaz.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}+1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$

Yukarıda f ve g fonksiyonları verilmiştir.

Buna göre

I. $f+g$

II. $f.g$

III. $\dfrac{f}{g}$

fonksiyonlarından hangileri x = 0 da süreklidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) I, II ve III

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1} & x\geq 1\\ 3-x & x<1\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

f – g fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli olduğuna göre, g fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x>1\\ x-1 & x\leq 1\end{cases}$

B) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x-2} & x\geq 0\\ -2^{-x} & x<0\end{cases}$

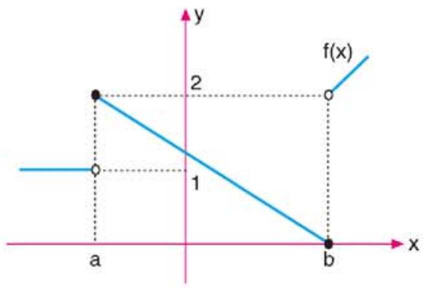
C) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{1-x} & x>1\\ -x & x\leq 1\end{cases}$

D) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\geq 0\\ |x|-1 & x<0\end{cases}$

E) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$

1) E **2) C**

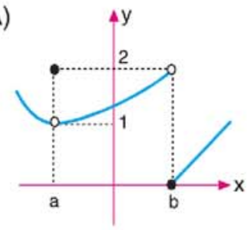
3.



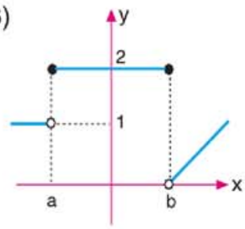
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f + g fonksiyonu x = a da sürekli, x = b de süreksiz olduğuna göre, g fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

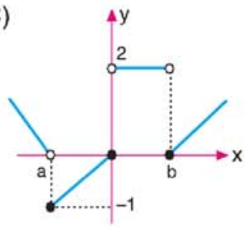
A)



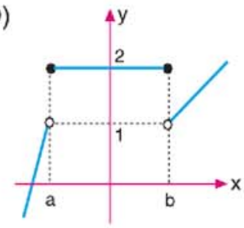
B)



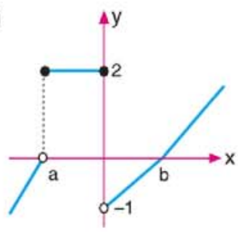
C)



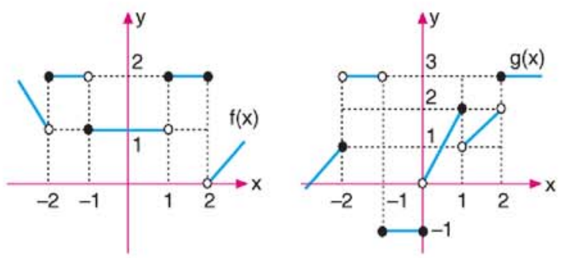
D)



E)



4.



Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre, x in –2, –1, 0, 1, 2 değerlerinden hangisi için f.g fonksiyonu sürekli olur?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

3) C **4) D**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $f(x) = \begin{cases} x+6 & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$

f(x) fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

2. f ve g fonksiyonları x = a noktasında sürekli ve $g(a) \neq 0$ olmak üzere,

I. f + g

II. f – g

III. f.g

IV. $\frac{f}{g}$

V. (fog)

yukarıdaki fonksiyonlardan kaç tanesi x = a noktasında <u>kesinlikle</u> süreklidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3. $f(x) = \begin{cases} kx^2 - k & x \geq 3 \\ k^2 - 9 & x < 3 \end{cases}$

f(x) fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, k nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 8 B) 2 C) 0 D) –1 E) –9

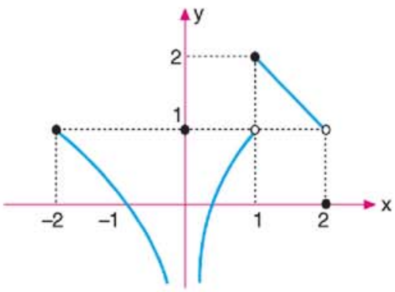
4. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2 - 4x + k}$

fonksiyonunun gerçel sayılarda süreksiz olduğu noktalardan biri x = 1 olduğuna göre, f(x) in süreksiz olduğu diğer noktanın apsisi kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 3 E) 4

1) D 2) B 3) A 4) D

5.



Yukarıda f: [–2, 2] → R fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

A)0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|4-x^2|}{2-x} & x>2\\ 3-x & x\le 2\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

(f.g) fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli olduğuna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\begin{cases}x-1 & x>2\\ x+3 & x\le 2\end{cases}$ B) $\begin{cases}x+2 & x>2\\ x-1 & x\le 2\end{cases}$

C) $\begin{cases}x+1 & x>2\\ x+2 & x\le 2\end{cases}$ D) $\begin{cases}2x-1 & x>2\\ x-1 & x\le 2\end{cases}$

E) $\begin{cases}x-1 & x>2\\ x-6 & x\le 2\end{cases}$

7. Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+a}}{x-2} & x\ne 2\\ b & x=2\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

f(x) fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

APOTEMİ

8. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi R gerçel sayılar kümesinde sürekli bir fonksiyondur?**

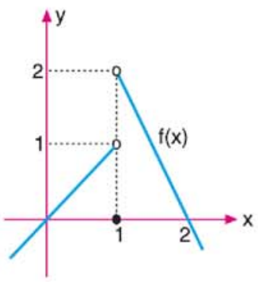
A) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ B) f(x) = x.sinx

C) $f(x)=\dfrac{1}{2^{-x}-1}$ D) f(x) = lnx

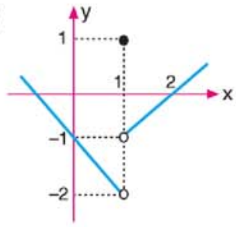
E) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

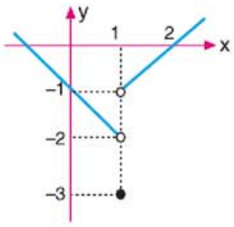
5) D 6) E 7) C 8) B

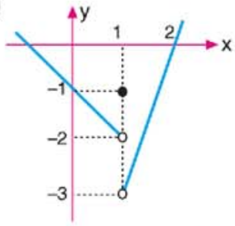
9. Yanda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

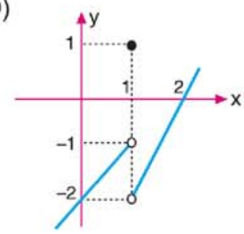


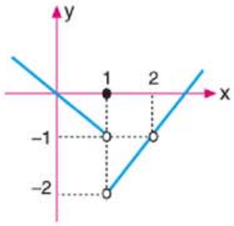
f – g fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli olduğuna göre, g(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)


B)


C)


D)


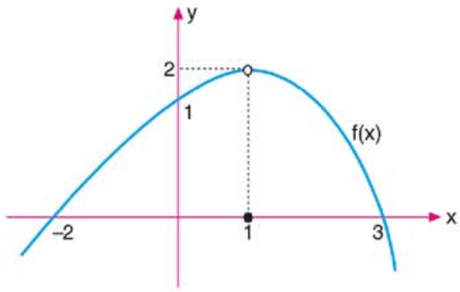
E)


10. $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x<0 \\ ax+b & 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x+3} & x>1 \end{cases}$

f(x) fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

A) –8 B) –3 C) 2 D) 5 E) 8

11.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi x = 4 noktasında süreksizdir?

A) $f(x-1)$ B) $\dfrac{1}{f(x-4)}$ C) $\dfrac{1}{f(x-6)+1}$

D) $\dfrac{1}{f(x-3)-2}$ E) $\dfrac{1}{f(x-1)-1}$

12. $f(x)=\begin{cases} a+b & x>0 \\ x+a+2 & x=0 \\ \dfrac{|\sin x|}{bx} & x<0 \end{cases}$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 0 D) $-\dfrac{1}{2}$ E) –5

9) B **10) E**

11) D **12) E**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

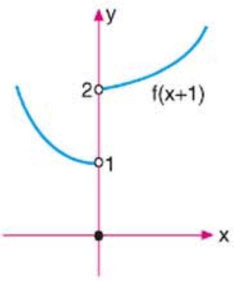
1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x^2}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

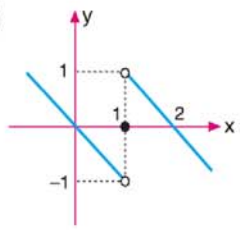
biçiminde verilen f(x) fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli olduğuna göre, f(0) değeri kaçtır?

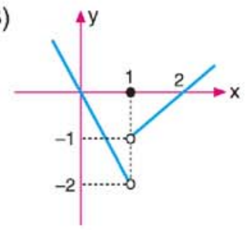
A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

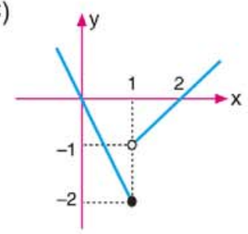
2. Yanda f(x+1) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

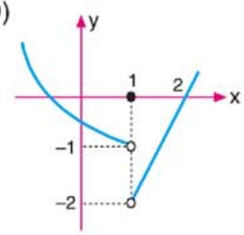
(f + g)(x) fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli olduğuna göre, g(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

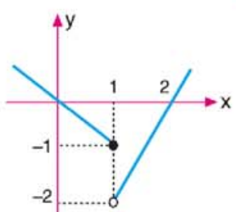


A)


B)


C)


D)


E)


1) B 2) D

3. I. $f(x) = e^x$

II. $g(x) = \tan x$

III. $h(x) = \dfrac{|x| - 1}{x - 1}$

Yukarıdaki fonksiyonlardan hangileri x = 0 noktasında süreklidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

4. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + \sin\alpha \cdot x + \dfrac{\cos^2\alpha}{4}}$

fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli olduğuna göre, α dar açısının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaç derecedir?

A) 14 B) 29 C) 34 D) 44 E) 59

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \\ x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{\ln(x-2)} & x > 2 \end{cases}$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

3) C 4) D 5) A

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-9|}{3-x} & x<3\\ ax-b & x=3\\ \dfrac{\sin(bx-3b)}{x-3} & x>3\end{cases}$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

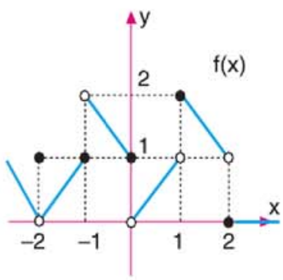
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

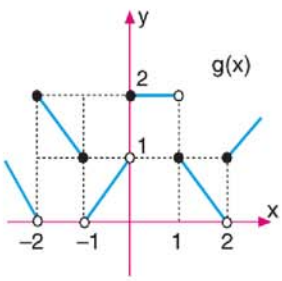
7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2+mx+1} & x>0\\ mx+n & x\le 0\end{cases}$

fonksiyonu tüm gerçel sayılarda sürekli olduğuna göre, m + n toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

8.





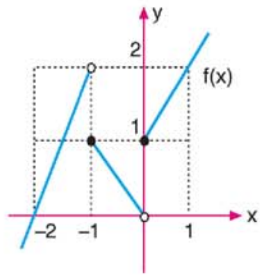
Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, f + g fonksiyonu [–2, 2] aralığındaki kaç tam sayı değeri için süreklidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6) D	**7) C**	**8) C**

9. Yanda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x+1)=1$

II. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(1-x)=0$

III. f(|x|) fonksiyonu tüm reel sayılarda süreklidir.

yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

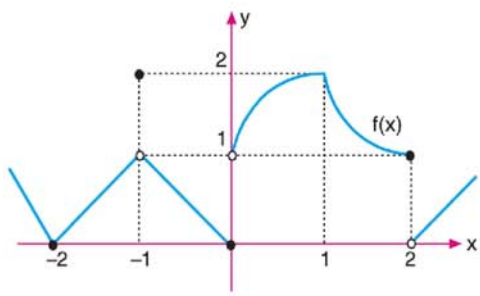
10. $f(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x\le 1\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(x – 2) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisinde süreksizdir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2-9}$ **fonksiyonu (–3, 3) aralığında kaç noktada süreksizdir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9) E	**10) E**	**11) B**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3 (ÇÖZÜMLÜ)

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x} & x<0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2} & x>0 \end{cases}$

fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x}+\cos x & x\neq 0 \\ k & x=0 \end{cases}$

f(x) fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli olduğuna göre k kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

1) D 2) B

3. $a\in R$ olmak üzere,

$f(x)=\begin{cases} x^2-8 & x\geq a \\ x+a & x<a \end{cases}$

fonksiyonu gerçel sayılarda sürekli olduğuna göre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limitinin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

A) –64 B) –32 C) –16 D) –4 E) –1

4. $m\in R$ olmak üzere,

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-m^2}{x+m} & x\neq m \\ 0 & x=m \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. $\lim\limits_{x\to m} f(x)=0$

II. $\lim\limits_{x\to 2m} f(x)=0$

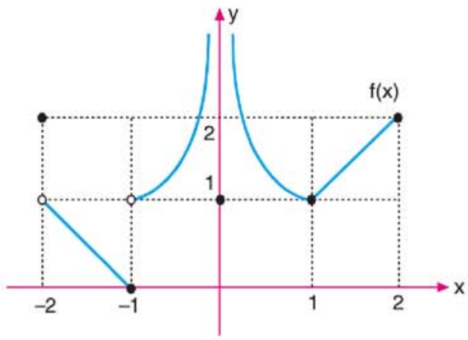
III. f(x) reel sayılarda süreklidir.

yukarıdaki ifadelerden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

3) B 4) D

5.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonu [–2, 2] aralığında kaç tam sayı değeri için süreksizdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-9|}{3-x} & x<3\\ 5-x & x\ge 3\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

f + g fonksiyonu x = 3 noktasında sürekli olduğuna göre, g fonksiyonu için,

I. g(x), x = 3 noktasında süreklidir.

II. $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)-\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=4$

III. g(x) parçalı fonksiyondur.

yukarıdakierden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

7. $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 2\\ -x+5 & x<2\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f(x), tüm reel sayılarda süreklidir.

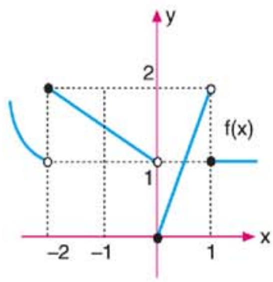
II. $f(x)\ge 3$

III. $g(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ f(x) & x<0\end{cases}$ fonksiyonu tüm reel sayılarda süreklidir.

yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

8.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

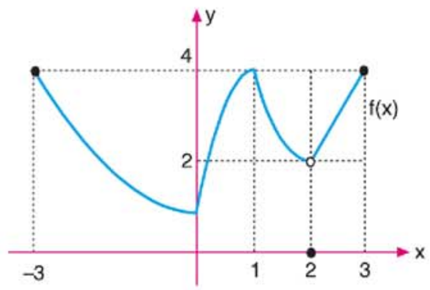
$g(x)=\begin{cases}f(x) & x<-2\\ f(x)-1 & x\ge -2\end{cases}$

olduğuna göre, g fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

5) B 6) E 7) C 8) D

9.

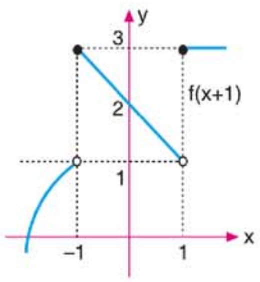


Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $g(x)=\dfrac{x^2+1}{f(x)-3}$ **fonksiyonunun grafiği [–3, 3] aralığında kaç noktada kesintiye uğrar?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

10. Yanda f(x+1) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f(x), x = 1 noktasında süreklidir.

II. f(x – 1), x = 1 noktasında süreklidir.

III. $\lim\limits_{x\to1^+} f(3-x)+\lim\limits_{x\to2^-} f(x-2)=2$ dir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

11. I. $f(x) = \sin(x-1)$

II. $g(x) = e^{x-1}$

III. $h(x)=\left|\,|x-1|-1\,\right|$

Yukarıdaki fonksiyonlardan hangileri x = 1 için süreklidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

9) B **10) D** **11) E**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3 (ÇÖZÜMLER)

1. f(x), x = 0 da sürekli olduğundan

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin(a+1)x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right) = a+1+1 = a+2 \quad ...(1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(x+4-4)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(\sqrt{x+4}+2)}{\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+4}+2 = \sqrt{0+4}+2 = 4 \quad ...(2)$$

$$f(0) = b \quad ...(3)$$

(1), (2) ve (3) nolu ifadeler birbirine eşitlenirse

b = 4 = a + 2 ⇒ b = 4 ve a = 2 olur.

a + b = 2 + 4 = 6

Cevap D

2. f(x), x = 0 da sürekli olduğundan

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\cos x\right)$$

$$= 1+1 = 2$$

$$f(0) = k \Rightarrow k = 2 \quad \text{bulunur.}$$

Cevap B

3. f(x) tüm gerçel sayılarda sürekli ise, x = a noktasında da sürekli olmalıdır. O halde,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{x\to a^-}(x+a) = \lim_{x\to a^+}(x^2-8)$$

$$a+a = a^2-8$$

$$a^2-2a-8 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ veya } a = -2 \text{ olur.}$$

a = 4 için $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$

a = –2 için $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$ bulunur.

Cevap B

4. I. $\lim_{x\to m} f(x)$ i bulmak için $\lim_{x\to m^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to m^+} f(x)$ limitlerini hesaplayalım.

$$\lim_{x\to m^-} f(x) = \lim_{x\to m^+} f(x) = \lim_{x\to m}\frac{x^2-m^2}{x+m}$$

$$\lim_{x\to m}\frac{(x-m)(x+m)}{(x+m)} = \lim_{x\to m}(x-m) = m-m = 0$$

II. $$\lim_{x\to 2m} f(x) = \lim_{x\to 2m}\frac{x^2-m^2}{x+m} = \lim_{x\to 2m}(x-m)$$

$$= 2m-m = m \quad \text{bulunur.}$$

III. $f(m) = 0 = \lim_{x\to m} f(x)$

olduğundan f(x) tüm reel sayılarda süreklidir.

O halde, I ve III doğru, II yanlıştır.

Cevap D