2011 LYS 1 Sınavı Matematik Soru ve Cevapları

1.

$$\frac{3}{0,2} - (0,25)^{-2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{-2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{15}$ D) -1 E) -3

2.

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

3.

$t^3 - 2 = 0$ **olduğuna göre,** $\frac{1}{t^2+t+1}$ **ifadesinin t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $t+1$ B) $t-2$ C) $t-1$ D) t^2+1 E) t^2+3

4.

a ve b sayılarının geometrik ortalaması 3, aritmetik ortalaması ise 6'dır.

Buna göre, a^2 **ve** b^2 **sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?**

A) 67 B) 65 C) 63 D) 61 E) 57

5.

$x - 2y = 3$ **olduğuna göre,**

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 15

6.

x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x^3 - 3x^2y = 3$$
$$y^3 - 3xy^2 = 11$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $x - y$ **farkı kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) -2 E) -3

7.

İki basamaklı a ve b pozitif tam sayıları için

$$\frac{a!}{b!} = 132$$

olduğuna göre, $a + b$ **toplamı kaçtır?**

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

8.

$$\frac{a^4 - a^3}{a^4 + a^2} \cdot \frac{a^2 + 1}{a^2 - a}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - 1$ B) a C) 1

D) $a + 1$ E) $a^2 + 1$

9.

$$\frac{2(x-y)}{x-y-1} + \frac{x-y-1}{x-y-2} = 3$$

olduğuna göre, $x - y$ **farkı kaçtır?**

A) $\frac{-1}{2}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

10.

$$A = \left\{ n \in Z^+ \;\middle|\; n \le 100;\ n,\ 3\text{'e tam bölünür.} \right\}$$

$$B = \left\{ n \in Z^+ \;\middle|\; n \le 100;\ n,\ 5\text{'e tam bölünür.} \right\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \setminus B$ **fark kümesinin eleman sayısı kaçtır?**

A) 33 B) 32 C) 30 D) 28 E) 27

11.

p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere

$$a = p^4 \cdot q^2$$

$$b = p^2 \cdot q^3$$

veriliyor.

Buna göre, a ve b sayılarının <u>en büyük ortak böleni</u> aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p^5 \cdot q^4$ B) $p^4 \cdot q^3$ C) $p^3 \cdot q^4$

D) $p^2 \cdot q^2$ E) $p^2 \cdot q^3$

12.

$$2^x \equiv 1 \pmod 7$$

$$3^y \equiv 4 \pmod 7$$

denkliklerini sağlayan en küçük x ve en küçük y pozitif tam sayıları için $y - x$ **farkı kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13.

$$\left.\begin{array}{l} x(3-x)>0 \\ (2x+1)(x-2)<0 \end{array}\right\}$$

Yukarıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (a, b) açık aralığı olduğuna göre, $a-b$ farkı kaçtır?

A) -2 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

14.

$A=\{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde Δ işlemi aşağıdaki tabloyla tanımlanıyor. Örneğin a Δ d = c ve d Δ a = a' dır.

Δ	a	b	c	d	e
a	a	b	a	c	d
b	c	b	b	a	e
c	a	b	c	d	e
d	a	a	d	d	b
e	e	e	e	d	a

Bu tabloya göre A kümesinin

- $K=\{b,c,d\}$
- $L=\{a,b,c\}$
- $M=\{c,d,e\}$

alt kümelerinden hangileri Δ işlemine göre kapalıdır?

A) Yalnız K B) Yalnız L C) K ve L

D) K ve M E) L ve M

15.

x bir gerçel sayı ve $|x| \leq 4$ olmak üzere,

$2x+3y=1$

eşitliğini sağlayan y tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

16.

Gerçel katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları veriliyor. Sabit terimi sıfırdan farklı $P(x)$ polinomu için

$P(x)=Q(x) \cdot R(x+1)$

eşitliği sağlanıyor.

P'nin sabit terimi Q'nun sabit teriminin iki katı olduğuna göre, R'nin katsayılarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 2

17.

Baş katsayısı 1 olan, $-i$ ve 2i karmaşık sayılarını kök kabul eden dördüncü dereceden gerçel katsayılı $P(x)$ polinomu için $P(0)$ kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

18.

$P(x)=(x+2)^4+3(x+1)^3$

polinomunda x 'li terimin katsayısı kaçtır?

A) 41 B) 39 C) 37 D) 35 E) 33

19.

6 kız ve 7 erkek öğrencinin bulunduğu bir gruptan 2 temsilci seçiliyor.

Seçilen bu iki temsilciden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{2}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{9}{13}$

20.

$z = a + bi \ (b \neq 0)$ **ve** $w = c + di$ **karmaşık sayıları için** $z + w$ **toplamı ve** $z \cdot w$ **çarpımı birer gerçel sayı olduğuna göre,**

I. z ve w birbirinin eşleniğidir.

II. $z - w$ gerçeldir.

III. $z^2 + w^2$ gerçeldir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

21.

Karmaşık sayılar kümesi üzerinde f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{k=0}^{101} z^k$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $f(i)$ **değeri nedir?**

A) $1+i$ B) $1-i$ C) i D) $-i$ E) 1

22.

$\overline{z}$ **ile z'nin eşleniği gösterildiğine göre** $z^2 = \overline{z}$ **eşitliğini sağlayan ve argümenti** $\frac{\pi}{2}$ **ile** π **arasında olan sıfırdan farklı z karmaşık sayısı nedir?**

A) $\frac{-1}{2} + (\sqrt{3})i$ B) $\frac{-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ C) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)i$ D) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$ E) $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)i$

23.

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) $\ln 2$ D) $\ln 4$ E) $2\ln 4$

24.

$$\log_9 (x^2 + 2x + 1) = t \quad (x > -1)$$

olduğuna göre, x'in t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3^t - 1$ B) 3^{t-1} C) $3 - 2^t$ D) $2 \cdot 3^{t-1}$ E) $3^t - 2$

25.

$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin(x) - 6$ B) $2\sin(x) + 3$

C) $3\sin(x) - 6$ D) $\sin(2x - 6)$

E) $\sin(2x) - 3$

26.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği a birim sağa ve b birim aşağı ötelenerek $g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b|$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

27.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\cot x - 3\tan x = \frac{1}{\sin 2x}$

olduğuna göre, $\sin^2 x$ kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

28.

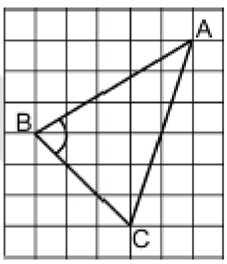
$\cos x = \frac{-4}{5}$

olduğuna göre, $\cos 2x$ kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{12}{13}$

D) $\frac{24}{25}$ E) $\frac{7}{25}$

29.



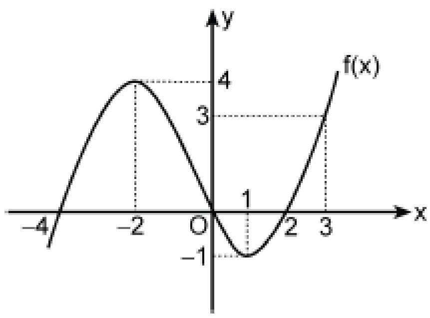
Birim kareler üzerine çizilmiş yukarıdaki ABC üçgeninin B açısının tanjantı kaçtır?

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{34}{5}$ C) $\frac{40}{9}$

D) 4 E) 5

30.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$g(x) = 3 - f(x-2)$ olduğuna göre, $g(-2) + g(5)$ toplamı kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

31.

$y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin sınırları üzerindeki (x, y) noktaları için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 17 D) 13 E) 10

32.

$f : R \to R$ parçalı fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \text{ rasyonelse} \\ x^2, & x \text{ rasyonel değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $(fof)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\sqrt{2} + 2$

B) $\sqrt{2} + 2$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{2}$

E) $\frac{7}{2}$

33.

f fonksiyonu $n \geq 1$ tam sayıları için

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$$

eşitliğini sağlıyor.

$f(0) = 1$ olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

34.

(a_n) dizisi

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1, 2, 3, ...)$

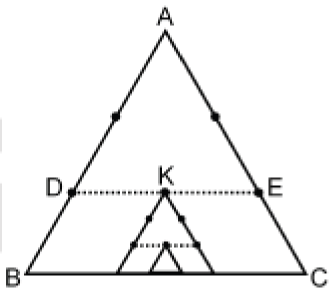
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, a_8 terimi nedir?

A) 4 B) 7 C) 12 D) 15 E) 19

35.

Bir kenar uzunluğu 1 birim olan ABC eşkenar üçgeninin AB ve AC kenarları üç eşit parçaya ayrılarak şekildeki gibi D ve E noktaları işaretleniyor. DE doğru parçasının orta noktası K olmak üzere, bir köşesi K ve bu köşenin karşısındaki kenarı BC üzerinde olan yeni bir eşkenar üçgen çiziliyor ve aynı işlem çizilen yeni eşkenar üçgenlere de uygulanıyor.



Bu şekilde çizilecek iç içe geçmiş tüm üçgensel bölgelerin alanları toplamı kaç birim karedir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{5\sqrt{3}}{16}$ E) $\frac{9\sqrt{3}}{32}$

36.

$$\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$$

sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre, m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

37.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

38.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$

D)1 E)2

39.

$$f(x)=\sin^2(3x^2+2x+1)$$

olduğuna göre, $f'(0)$ değeri kaçtır?

A) $2\cos 2$ B) $2\cos 3$ C) $6\sin 1$

D) $4\sin 2$ E) $2\sin 2$

40.

$$f'(x)=3x^2+4x+3$$

$$f(0)=2$$

olduğuna göre, $f(-1)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

41.

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(g(x))}{x-2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 3 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

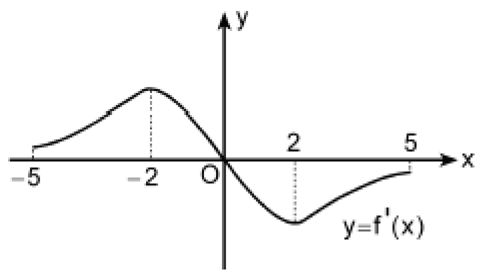
42.

$y = \sin(\pi x) + e^x$ **eğrisine** $x = 1$ **noktasında çizilen teğet y eksenini hangi noktada keser?**

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) $e-1$ E) π

43.

Aşağıda, $[-5, 5]$ aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun <u>türevinin grafiği</u> verilmiştir.



Bu grafiğe göre,

I. f fonksiyonu $x > 0$ için azalandır.

II. $f(-2) > f(0) > f(2)$ dir.

III. f fonksiyonunun $x = -2$ ve $x = 2$ noktalarında yerel ekstremumu vardır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

44.

$(1, 2)$ **noktasından geçen negatif eğimli bir d doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan üçgensel bölgenin alanı <u>en az</u> kaç birim karedir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\dfrac{9}{2}$ E) $\dfrac{7}{2}$

45.

Bir f fonksiyonunun grafiğinin $x=a$ noktasındaki teğetinin eğimi 1, $x=b$ noktasındaki teğetinin eğimi ise $\sqrt{3}$ 'tür.

$f''(x)$ ikinci türev fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğuna göre,

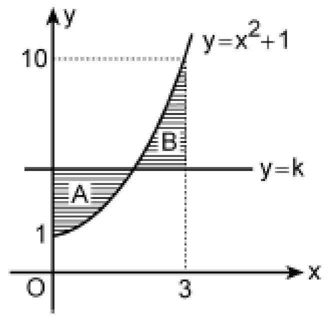
$$\int_b^a f'(x) \cdot f''(x)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

46.

Aşağıdaki grafikte, A ve B bölgelerinin alanları eşit olacak şekilde $y=k$ doğrusu verilmiştir.



Buna göre, k'nin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{11}{2}$

47.

$$\int_1^e \ln^3 x\,dx = 6-2e$$

olduğuna göre, $\int_1^e \ln^4 x\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $7e-16$ B) $8e-18$ C) $9e-24$

D) $10e-26$ E) $11e-28$

48.

$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ **integralinde** $u=\sqrt{x}$ **dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int \ln u\,du$ B) $\int 2\ln u\,du$

C) $\int \frac{\ln u}{u}du$ D) $\int \frac{\ln u}{2u}du$

E) $\int u\ln u\,du$

49.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

Buna göre, $\det(A^2-B^2)$ **kaçtır?**

A) -4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

50.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 9\end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x+y$ **toplamı kaçtır?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜMLER

1.

$$\frac{3}{0,2}-(0,25)^{-2}=\frac{3}{\frac{2}{10}}-(\frac{25}{100})^{-2}$$

$$=\frac{30}{2}-(\frac{1}{4})^{-2}$$

$$=15-(4^{-1})^{-2}$$

$$=15-(4^{(-1).(-2)})$$

$$=15-4^{2}$$

$$=15-16$$

$$=-1$$

2.

I. Yol

$$\sqrt{2}<x<\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^2<x^2<(\sqrt{3})^2 \quad \Rightarrow \quad 2<x^2<3$$

A) $x=\frac{1}{2}$ için : $x^2=\frac{1}{4}$

B) $x=\frac{3}{2}$ için : $x^2=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad 2<\frac{9}{4}<3$

C) $x=\frac{4}{3}$ için : $x^2=\frac{16}{9}$

D) $x=\frac{7}{4}$ için : $x^2=\frac{49}{16}$

E) $x=\frac{6}{5}$ için : $x^2=\frac{36}{25}$

II. Yol

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

2 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

2 den küçük en büyük tam kare 1,

2 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, $a = 1$ ve $b = 4$ dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \frac{2-1}{4-1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ olarak bulunuyor.

3 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

3 den küçük en büyük tam kare 1,

3 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, $a = 1$ ve $b = 4$ dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \frac{3-1}{4-1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ olarak bulunuyor.

$\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad$ 2 ile genişletilirse

$\frac{8}{6} < x < \frac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ elde edilir.

Not :

Bir x pozitif tam sayısının karekökü yaklaşık olarak aşağıdaki yöntemle bulunuyor :

• x sayısından küçük en büyük tam kareyle x sayısından büyük en küçük tam kare bulunuyor.

Bu sayılardan ilki a, ikincisi b olarak adlandırılıyor.

• x sayısının karekökü $\sqrt{x} \approx \sqrt{a} + \frac{x-a}{b-a}$ formülüyle bulunuyor.

3.

$t^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^3 - 1 = 1$

$t^3 - 1 = (t-1).(t^2+t+1)$ olduğuna göre, $t^2 + t + 1 = \frac{t^3-1}{t-1}$

$$\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{\frac{t^3-1}{t-1}} = \frac{t-1}{t^3-1}$$

$t^3 - 1 = 1$ olduğuna göre, $\frac{t-1}{1} = t - 1$ bulunur.

4.

a ve b sayılarının geometrik ortalaması $= \sqrt{a.b} = 3 \quad \Rightarrow \quad a.b = 9$

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması $= \dfrac{a+b}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad a + b = 12$

$$(a+b)^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2.a.b + b^2 = 144$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 144 - 18$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 126$$

a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması $= \dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{126}{2} = 63$ elde edilir.

5.

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3 = x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 2y - 3$$

$$= (x-2y)^2 + x - 2y - 3$$

$x - 2y = 3$ olduğuna göre,

$$= 3^2 + 3 - 3$$

$$= 9$$

6.

$$x^3 - 3x^2y = 3$$

$y^3 - 3xy^2 = 11$ taraf tarafa çıkartılırsa

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3 - 11$$

$$(x-y)^3 = -8$$

$$(x-y)^3 = (-2)^3$$

$x - y = -2$ bulunur.

7.

$$\frac{a!}{b!} = 132 \quad \Rightarrow \quad \frac{a!}{b!} = 12.11 \quad \Rightarrow \quad a! = 12.11.b!.$$

$$\Rightarrow \quad b! = 10! \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$\Rightarrow \quad a! = 12! \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

Buna göre , $a + b = 12 + 10 = 22$ elde edilir.

8.

$$\frac{a^4-a^3}{a^4+a^2}\cdot\frac{a^2+1}{a^2-a}=\frac{a^3.(a-1)}{a^2.(a^2+1)}\cdot\frac{a^2+1}{a.(a-1)}=1$$

9.

$$\frac{2(x-y)}{x-y-1}+\frac{x-y-1}{x-y-2}=3 \quad\Rightarrow\quad x-y=t \text{ olsun.}$$

$$\frac{2.t}{t-1}+\frac{t-1}{t-2}=3 \quad\Rightarrow\quad \frac{2.t}{\underset{t-2}{t-1}}+\frac{t-1}{\underset{t-1}{t-2}}=3$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2.t.(t-2)+(t-1).(t-1)}{(t-1).(t-2)}=3$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2t^2-4t+t^2-2t+1}{t^2-3t+2}=3$$

$$\Rightarrow\quad \frac{3t^2-6t+1}{t^2-3t+2}=3 \text{ içler – dışlar çarpımı yapılırsa}$$

$$\Rightarrow\quad 3t^2-6t+1=3t^2-9t+6$$

$$\Rightarrow\quad 3t=5$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{5}{3}$$

$x-y=t$ olduğuna göre, $x-y=\dfrac{5}{3}$ olur.

10.

s(A \ B) = s(A) – s(A ∩ B)

A için

3'ün katı olan her sayı 3'e kalansız bölünür.

101 den küçük olan ve 3'ün katı olan kaç tane sayı olduğunu bulmak için
101 sayısı 3'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \hline & 33 \\ 2 & \end{array}$$

Buna göre, 33 tane sayı 3 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ s(A) = 33

A ∩ B için

Hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilen sayılar, okek(3 , 5) = 15 ile de tam bölünür.

101 sayısı 15'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 15 \\ \cline{2-2} & 6 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Buna göre, 6 tane sayı 15 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ $s(A \cap B) = 6$

$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$

$= 33 - 6$

$= 27$ bulunur.

11.

Obeb(a , b) = $p^2.q^2$

Not : Ortak bölenlerin en büyüğü (obeb)

Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

Ortak asal çarpanların en küçük üslüleri (üsler eşitse biri) alınır ve çarpılır.

12.

$2^x \equiv 1 \pmod 7$

$x = 3$ için : $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$

$3^y \equiv 4 \pmod 7$

$y = 4$ için : $3^4 = 81 \equiv 4 \pmod 7$

Buna göre, $y - x = 4 - 3 = 1$ olur.

13.

		$-\frac{1}{2}$		0		2		3	
x	− − −		− −	0	+ + +		+ +		+ + +
3 - x	+ + +		+ +		+ + +		+ +	0	− − −
x.(3 - x)	− − −		− −	0	+ + +		+ +	0	− − −
2x + 1	− − −	0	+ +		+ + +		+ +		+ + +
x - 2	− − −		− −		− − −	0	+ +		+ + +
(2x + 1).(x - 2)	+ + +	0	− −		− − −	0	+ +		+ + +

Çözüm kümesi = (0 , 2) = (a , b)

Buna göre, a – b = 0 – 2 = – 2 bulunur.

14.

$K = \{b , c , d\}$ için

$b \Delta d = a \notin K$ olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

$L = \{a , b , c\}$ için

Δ	a	b	c
a	a	b	a
b	c	b	b
c	a	b	c

$\forall a , b , c \in L$ olduğundan Δ işlemine göre kapalıdır.

$M = \{c , d , e\}$ için

$d \Delta e = b \notin M$ olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

15.

$|x| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq x \leq 4$

$2x + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad 3y = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1-2x}{3}$

$-4 \leq x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad (-2).(-4) \geq -2x \geq 4.(-2) \quad \Rightarrow \quad 8 \geq -2x \geq -8$

$1 + 8 \geq 1 - 2x \geq -8 + 1 \quad \Rightarrow \quad 9 \geq 1 - 2x \geq -7$

$\frac{9}{3} \geq \frac{1-2x}{3} \geq \frac{-7}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \geq \frac{1-2x}{3} \geq \frac{-7}{3}$

$\Rightarrow \quad 3 \geq y \geq \frac{-7}{3}$

y tam sayı değerleri $= \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$

y tam sayı değerleri toplamı = 3 olur.

16.

P(x) polinomunun sabit terimi : $P(0) \neq 0$

$P(x) = Q(x).R(x+1) \Rightarrow P(0) = Q(0).R(0+1)$

$\Rightarrow P(0) = Q(0).R(1)$

Q(x) polinomunun sabit terimi : Q(0)

$P(0) = 2.Q(0)$

R(x) polinomunun katsayılarının toplamı : R(1)

$P(0) = Q(0).R(1)$ olduğundan,

$2.Q(0) = Q(0).R(1) \Rightarrow R(1) = 2$ elde edilir.

17.

$x_1 = -i$

$x_2 = 2i$

$P(x) = a.(x+i).(x-i).(x-2i).(x+2i) \Rightarrow a = 1$ olduğuna göre,

$P(x) = 1.(x+i).(x-i).(x-2i).(x+2i) \Rightarrow P(x) = (x+i).(x-i).(x-2i).(x+2i)$

$\Rightarrow P(x) = (x^2-(i)^2).(x^2-(2i)^2)$

$\Rightarrow P(x) = (x^2-i^2).(x^2-4i^2)$

$i^2 = -1$ olduğuna göre, $\Rightarrow P(x) = (x^2+1).(x^2+4)$

$P(0) = (0+1).(0+4) \Rightarrow P(0) = 1.4 \Rightarrow P(0) = 4$ bulunur.

Not :
Gerçel katsayılı bir denklemin köklerinden birisi $z = a + bi$ ise

diğer kök bu kökün eşleniği olan $\bar{z} = a - bi$ dir.

18.

I. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

$P(x) = (x+2)^2.(x+2)^2 + 3(x+1)(x+1)^2$

$P(x) = (x^2+4x+4).(x^2+4x+4) + 3(x+1).(x^2+2x+1)$

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^3 + 16x^2 + 16x + 4x^2 + 16x + 16 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3$

$P(x) = x^4 + 11x^3 + 33x^2 + 41x + 19$

$P(x)$ polinomunda x'li terimin katsayısı = 41 bulunur.

II. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

Binom formülüne göre,

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}.x^4 + \binom{4}{1}.x^3.2 + \binom{4}{2}.x^2.2^2 + \binom{4}{3}.x.2^3 + \binom{4}{4}.2^4$$

x 'li terimin katsayısı $= \binom{4}{3}.2^3 = 32$

Binom formülüne göre,

$$3.(x+1)^3 = 3.\binom{3}{0}.x^3 + 3.\binom{3}{1}.x^2.1 + 3.\binom{3}{2}.x.1^2 + 3.\binom{3}{3}.1^3$$

x 'li terimin katsayısı $= 3.\binom{3}{2}.1^2 = 9$

Buna göre, $P(x)$ polinomunda x 'li terimin katsayısı $= 32 + 9 = 41$ bulunur.

19.

İstenen olasılık $= \dfrac{\binom{6}{1}\binom{7}{1}}{\binom{13}{2}} = \dfrac{6.7}{\dfrac{13!}{11!.2!}} = \dfrac{42}{\dfrac{13.12}{2}} = \dfrac{7}{13}$ elde edilir.

Not : *İstenen olasılık* $= \dfrac{istenen \ \ sec im \ \ sayisi}{tüm \ \ sec im \ \ sayisi}$

20.

$z = a + bi \ (b \neq 0)$

$w = c + di$

$z + w = (a + bi) + (c + di)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(b + d)i = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -d$

$z.w = (a + bi).(c + di)$

$z.w = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(a.d + b.c)i = 0 \quad \Rightarrow \quad a.d + b.c = 0$

$b = -d$ olduğuna göre,

$a.d - d.c = 0 \quad \Rightarrow \quad d.(a - c) = 0 \quad (b \neq 0)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Rightarrow \quad a = c$

$z = a + bi$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{z} = a - bi = c + di = w$

$w = c + di$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{w} = c - di = a + bi = z$

Buna göre, z ve w birbirinin eşleniğidir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$$\begin{aligned} z - w = z - \bar{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= (a - a) + (b + b)i \\ &= 2bi \notin \text{gerçel sayı} \end{aligned}$$

Buna göre, $z - w$ gerçel sayı değildir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$z = a + bi$

$w = a - bi$

$$z^2 + w^2 = (a + bi)^2 + (a - bi)^2$$

$$= a^2 + 2abi - b^2 + a^2 - 2abi - b^2$$

$$= 2a^2 - 2b^2 \in \text{gerçel sayı}$$

Buna göre, $z^2 + w^2$ gerçeldir.

Not :

Karmaşık Sayıların Eşleniği

$z = a + bi$ karmaşık sayısı için $\bar{z} = a - bi$ sayısına z nin eşleniği denir.

Not :

$z = a + bi$ karmaşık sayısında,

a'ya z'nin gerçel (reel) kısmı, b'ye z'nin sanal (imajiner) kısmı denir ve

$Re(z) = a$, $Im(z) = b$ olarak yazılır.

Not :

$z = a + bi$ sayısında $b = 0$ ise $z = a \in R$ dir.

Buna göre her gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır.

Bu nedenle $R \subset C$ dir.

21.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{101} z^k = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \dots\dots\dots + z^{99} + z^{100} + z^{101}$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\dots\dots + z^{99} + z^{100} + z^{101}$$

$$= \frac{1 - z^{102}}{1 - z}$$

$$f(i) = \frac{1 - i^{102}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{51}}{1 - i}$$

$i^2 = -1$ olduğundan,

$$= \frac{1 - (-1)^{51}}{1 - i} = \frac{1 - (-1)}{1 - i} = \frac{1 + 1}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} \text{ bulunur.}$$

Paydanın eşleniği pay ve paydayla çarpılırsa,

$$\frac{2}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{2.(1+i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{2.(1+i)}{1-(-1)}$$

$$= \frac{2.(1+i)}{1+1}$$

$$= \frac{2.(1+i)}{2} = 1 + i \text{ elde edilir.}$$

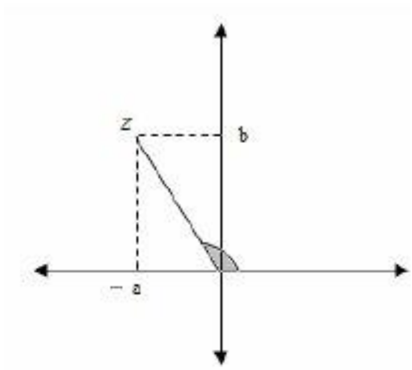
Not :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \ , \ x \neq 1 \ , \ N^+ \text{ için}$$

22.

z karmaşık sayısının argümenti $\frac{\pi}{2}$ ile π arasında ise II. bölgededir.



$z = -\text{a} + \text{b}\,i$ olsun.

z nin eşleniği : $\overline{z} = -\text{a} - \text{b}\,i$

$z^2 = \overline{z}$

$(-\text{a} + \text{b}\,i)^2 = -\text{a} - \text{b}\,i$

$(-\text{a})^2 - 2\text{ab}\,i - \text{b}^2 = -\text{a} - \text{b}\,i$

$\text{a}^2 - \text{b}^2 - 2\text{ab}\,i = -\text{a} - \text{b}\,i$

$-2\text{ab}\,i = -\text{b}\,i \quad \Rightarrow \quad 2\text{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{a} = \frac{1}{2}$ bulunur.

$\text{a}^2 - \text{b}^2 = -\text{a}$ denkleminde a yerine $\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{b}^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - \text{b}^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{b}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{b}^2 = \underset{1}{\frac{1}{4}} + \underset{2}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{b}^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{b}^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ elde edilir.}$$

$z = -\text{a} + \text{b}\,i$ olduğuna göre, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ olur.

23.

$2^{2x}-2.2^{x}-8=0 \quad \Rightarrow \quad (2^{x})^{2}-2.2^{x}-8=0$

$2^{x}=\text{A}$ olsun.

$\text{A}^{2}-2\text{A}-8=0 \quad \Rightarrow \quad (\text{A}-4).(\text{A}+2)=0$

$\Rightarrow \quad \text{A}-4=0 \quad \Rightarrow \quad \text{A}=4$

$\Rightarrow \quad \text{A}+2=0 \quad \Rightarrow \quad \text{A}=-2$ olamaz

$\text{A}=2^{x}=4 \quad \Rightarrow \quad 2^{x}=2^{2}$

Eşitlikte, tabanlar eşit olduğunda üslerde eşit olacağına göre, x = 2 olur.

24.

$\log_{9}(x^{2}+2x+1)=t \quad \Rightarrow \quad x^{2}+2x+1=9^{t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2}=(3^{2})^{t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2}=3^{2t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2}=(3^{t})^{2}$

Eşitlikte, üsler eşit olduğunda tabanlarda eşit olacağına göre,

$x+1=3^{t} \quad \Rightarrow \quad x=3^{t}-1$ olur.

25.

$f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{3}+2\right)$

$y=\arcsin\left(\frac{x}{3}+2\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\ y=\sin\ \arcsin\left(\frac{x}{3}+2\right)$

$\Rightarrow \quad \sin y=\frac{x}{3}+2$

$\Rightarrow \quad \sin y-2=\frac{x}{3}$

$\Rightarrow \quad 3\sin y-6=x$

$y=f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\ (y)=f^{-1}\ f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y)=x$

$\Rightarrow \quad 3\sin y-6=f^{-1}(y)$

f^{-1} ters fonksiyonu için değişken x ve x'in görüntüsü y ile gösterilirse,

$\Rightarrow \quad 3\sin(x)-6=f^{-1}(x)$ elde edilir.

26.

I. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x - 1)^2 + 2$

$g(x) = x^2 - 8x + 14 \quad \Rightarrow \quad g(x) = (x - 4)^2 - 2$

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 1 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 4 birim ötelenirse,

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, $a = 3$ olur.

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin negatif yönünde $|-2|$ birim ötelenirse,

$(x - 4)^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, $b = 4$ olur.

$|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

II. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$r = -\dfrac{(-2)}{2.1} \quad \Rightarrow \quad r = 1$

$k = f(r) \quad \Rightarrow \quad k = f(1) = 1 - 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad k = 2$

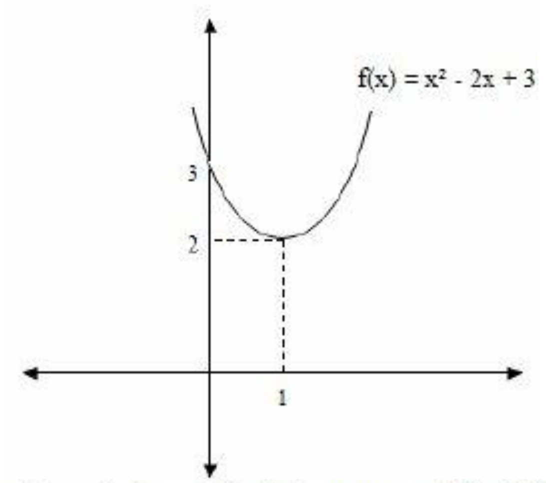
$(r , k) = (1 , 2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için : $y = 3$

$y = 0$ için : $x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ gerçel kök yoktur.

Bu durumda eğri x eksenini kesmez.



$g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$r = -\dfrac{(-8)}{2.1} \Rightarrow r = 4$

$k = f(r) \Rightarrow k = f(4) = 4^2 - 8.4 + 14 \Rightarrow k = -2$

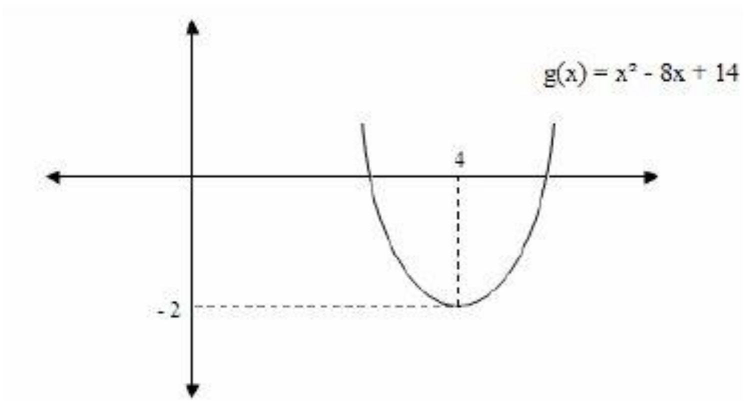
$(r , k) = (4 , -2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

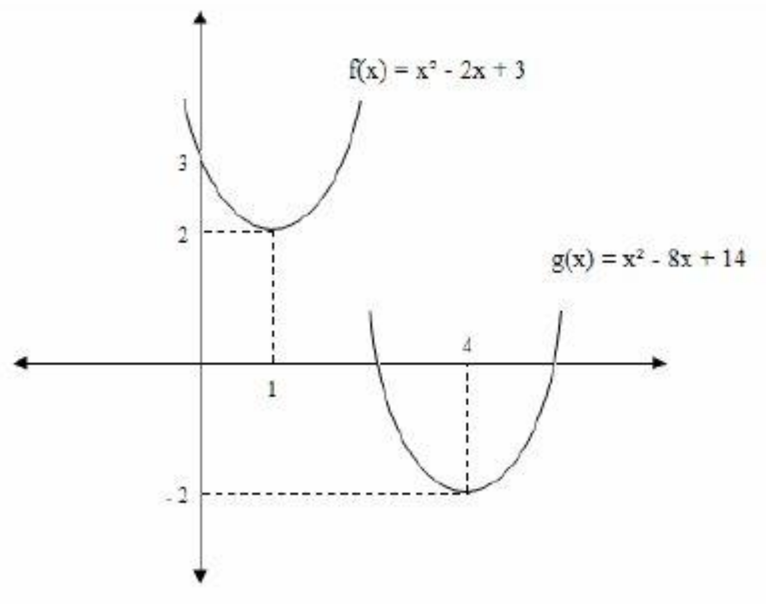
$x = 0$ için : $y = 14$

$y = 0$ için : $x^2 - 8x + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4.1.14 = 8 > 0$

Buna göre, x eksenini iki noktada keser.



Sonuç olarak



$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği 3 birim sağa ve 4 birim aşağı ötelenerek $g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

Not :

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun grafiğinin çizilmesi

– Tepe noktasının koordinatları bulunur.

– Eksenleri kestiği noktalar bulunur ve grafik çizilir.

Not :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki parabollerin

Tepe noktasının apsisi : $r = -\dfrac{b}{2a}$ dır.

Tepe noktasının ordinatı : $k = f(r)$ dir.

Not :

a , b , c birer reel (gerçel) sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

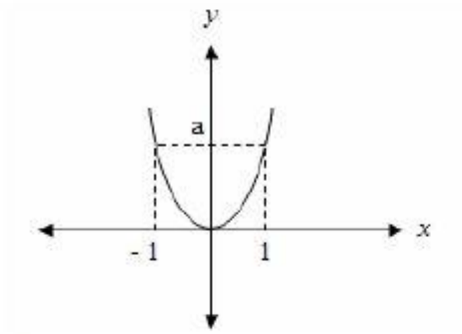
koşulu ile tanımlanan fonksiyonlara ikinci derece fonksiyonları denir.

$\mathrm{I} - f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y		a	0	a	

i)



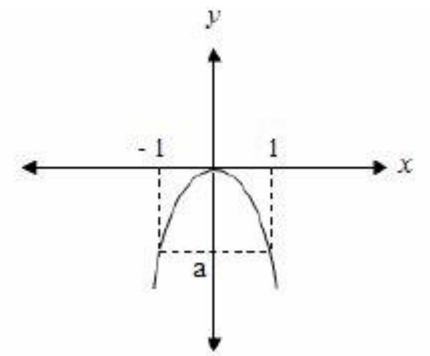
$a > 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin pozitif yönündedir.

Fonksiyon en küçük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^+ \cup \{0\}$ dır.

ii)



$a < 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin negatif yönündedir.

Fonksiyon en büyük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^- \cup \{0\}$ dır.

$II - f: R \to R$

$y = a.(x-r)^2$ fonksiyonunun grafiği

i) $r > 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde r birim ötelenir.

ii) $r < 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin negatif yönünde $|r|$ birim ötelenir.

$III - f: R \to R$

$f(x) = a.(x-r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği

Önce $y = ax^2$ fonksiyonunu grafiği, sonra $y = a.(x-r)^2$ grafiği çizilir.

$y = a.(x-r)^2$ nin grafiği

i) $k > 0$ ise y ekseninin pozitif yönünde k birim kadar ötelenir.

ii) $k < 0$ ise y ekseninin negatif yönünde $|k|$ birim kadar ötelenir.

$IV - f: R \to R$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği

Bu tür fonksiyonları $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ biçimine getirerek grafiğini çizeriz.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

$r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ alınırsa, $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ olur.

27.

$$\cot x - 3\tan x = \frac{1}{\sin 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} - 3\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\underset{\cos x}{\sin x}} - \frac{3\sin x}{\underset{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x}{\sin x.\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos x.\sin x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2.\sin x.\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{1} = \frac{1}{2}$$

İçler – dışlar çarpımı yapılırsa,

$2 - 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{1}{8}$ bulunur.

28.

$\cos x = \dfrac{-4}{5}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğuna göre,

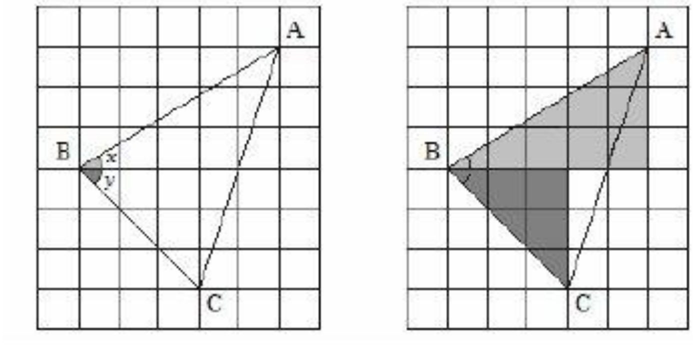
$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$ olur.

$\cos x = \dfrac{-4}{5}$ olduğuna göre,

$\cos 2x = 2.\left(\dfrac{-4}{5}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \dfrac{32}{25} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \dfrac{7}{25}$ elde edilir

---

29.



$$\tan B = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{3}}{1 - \frac{3}{5} . \frac{3}{3}} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5} . \frac{5}{2} = 4$$

30.

$x = -2$ için :

$g(-2) = 3 - f(-2-2) \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3 - f(-4)$

Grafiğe göre, $f(-4) = 0$ olduğundan, $g(-2) = 3 - 0 \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3$

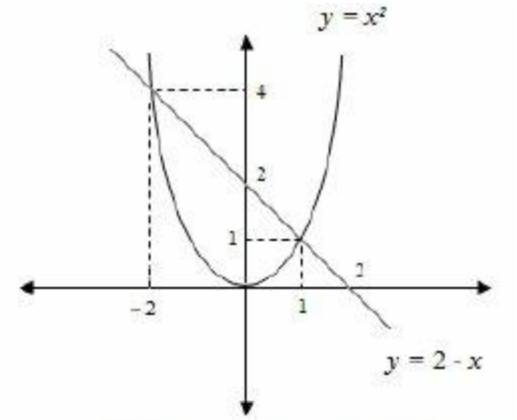
$x = 5$ için :

$g(5) = 3 - f(5-2) \quad \Rightarrow \quad g(5) = 3 - f(3)$

Grafiğe göre, $f(3) = 3$ olduğundan, $g(5) = 3 - 3 \quad \Rightarrow \quad g(5) = 0$

Buna göre, $g(-2) + g(5) = 3 + 0 = 3$ olur.

31.



$y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusunun kesişim noktalarını bulalım.

$x^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 2).(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$\Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$x = -2$ ise $y = (-2)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

$(x , y) = (-2 , 4)$

$x = 1$ ise $y = 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$(x , y) = (1 , 1)$

$x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değer : $(-2)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

32.

$$(fof)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ rasyonel olmadığına göre, $f(x) = x^2$ biçiminde olur.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{2}$ rasyonel olduğuna göre, $f(x) = 3x + 1$ biçiminde olur.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ bulunur.

33.

$f(n) = 2.f(n-1)+1$

$n = 2$ için : $f(2) = 2.f(2-1)+1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2.f(1)+1$

$n = 1$ için : $f(1) = 2.f(1-1)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2.f(0)+1$

$f(0) = 1$ olduğuna göre,

$f(1) = 2.1+1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 3$

$f(2) = 2.3+1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 7$ bulunur.

34.

I. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 40 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 39$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 39 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 37$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 37 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 34$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 34 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 30$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 30 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 25$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 25 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 19$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 19 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 12$ elde edilir

II. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7$ taraf tarafa toplanırsa,

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=a_1-1+a_2-2+a_3-3+a_4-4+a_5-5+a_6-6+a_7-7$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7-1-2-3-4-5-6-7$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7-(1+2+3+4+5+6+7)$$

$$a_8=a_1-(1+2+3+4+5+6+7)$$

$a_1=40$ olduğuna göre,

$$a_8=40-\frac{7.(7+1)}{2}$$

$$a_8=40-28$$

$a_8=12$ elde edilir.

35.

I. Yol

Bir kenar uzunluğu a birim olan eşkenar üçgenin alanı : $a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$ ise

$$(1)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots\ldots$$

$$1.\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{1}{9}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\ldots\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{9}{8}=\frac{9\sqrt{3}}{32}\ \text{olur.}$$

II. Yol

$$a_1 = (1)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{9} . \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$r = \dfrac{a_2}{a_1}$ olduğuna göre, $r = \dfrac{\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{1}{9}$

$$\text{Toplam alan} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ olur.}$$

Not : Geometrik Dizi

Ardışık iki terimin oranı aynı olan dizilere geometrik dizi denir.

$r \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise (a_n) bir geometrik dizidir.

"r" ye dizinin ortak çarpanı denir.

Not : Geometrik Seri

$a_n = a.r^{n-1}$ geometrik dizisinde $|r| < 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = a.(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{k-1} + \ldots) = a.\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

36.

$\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$ sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre,

çarpanları arasındaki 10 sayısının kuvvetleri bulunur.

$$\prod_{n=1}^{7}(3n+2) = (3.1+2).(3.2+2).(3.3+2).(3.4+2).(3.5+2).(3.6+2).(3.7+2)$$

$$= 5.8.11.14.17.20.23$$

$$= 5.2^3.11.2.7.17.2^2.5.23$$

$$= 2^6.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.2^2.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.10^2.7.11.17.23$$

Buna göre, $10^2 = 10^m$ olduğuna göre, m'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri 2 olur.

37.

I. Yol

$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L ' Hospital kuralı uygulanırsa,

$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\arcsin x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2.\cos 2x} = \frac{1+1}{2.\cos 0} = \frac{2}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$ bulunur.

II. Yol

$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}+\frac{\arcsin x}{\sin 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} + \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin f(x)} = 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$$

Pay ve payda 2 ile çarpılırsa, $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2.\sin 2x} = \frac{1}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\arcsin x = y$ olsun.

$\sin \ \arcsin x = \sin \ y \quad \Rightarrow \quad x = \sin y$

$x = 0$ için : $\arcsin 0 = y \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x \to 0$ ise $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(2\sin y)}$$

Pay ve payda $\dfrac{1}{2\sin y}$ ile çarpılırsa, $\lim_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{y}{2\sin y}}{\dfrac{\sin(2\sin y)}{2\sin y}}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

Buna göre, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x} + \lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ elde edilir.

Not : L' Hospital Kuralı

$\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa , $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ olur.

38.

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2})$$

$$= \lim_{x\to\infty}(|x+1| - |x|)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(x+1-x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1$$

$$= 1$$

II. Yol

$x \to +\infty$ için fonksiyonunun $\infty - \infty$ şeklinde bir belirsizliği vardır.

Pay ve payda köklü ifadenin eşleniği ile çarpılırsa

$$\left(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2.\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{2x}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2x}{x.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$x \to +\infty$ için $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ifadeleri sıfır olduğundan,

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Not :

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}.\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

$$g(x) = \sqrt{a}.\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} \text{ alınırsa}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) \text{ olur.}$$

39.

$f(x) = \sin^2(3x^2 + 2x + 1)$

$f'(x) = 2.\sin(3x^2 + 2x + 1).\cos(3x^2 + 2x + 1).(6x + 2)$

$x = 0$ için

$f'(0) = 2.\sin(0 + 0 + 1).\cos(0 + 0 + 1).(0 + 2)$

$f'(0) = 2.\sin 1.\cos 1.2$

$f'(0) = (\sin 2.1).2$

$f'(0) = 2\sin 2$

40.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$\int f'(x) = \int (3x^2 + 4x + 3)$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + c$

$f(0) = 2$ olduğuna göre,

$x = 0$ için : $f(0) = 0 + 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2$ elde edilir.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

x = – 1 için : $f(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 + 3.(-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = -1 + 2 - 3 + 2$

$\Rightarrow \quad f(-1) = 0$ olur.

41.

I. Yol

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(g(x))}{x-2}$

$f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}\right) = 2.\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}\right) - 1 = x - \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{x^2 - x - 2}{x}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\dfrac{x^2 - x - 2}{x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)}$$

$$= \frac{2^2 - 2 - 2}{2.(2-2)}$$

$= \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

Bu durumda pay ve payda çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme yapıldıktan sonra x = 2 yazılır.

Buna göre,

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1).(x-2)}{x.(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

II. Yol

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right) = 2.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)-1 = x-\frac{2}{x}-1 = \frac{x^2-x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-x-2}{x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x.(x-2)} = \frac{2^2-2-2}{2.(2-2)} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L ' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}\frac{f'(g(x)).g'(x)}{1}$$

$f(x) = 2x-1$ verildiğine göre, $f'(x) = 2$

$f'(x) = 2$ sabit fonksiyon olduğuna göre, $f'(g(x)) = 2$ olur.

$g(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{x}$ verildiğine göre, $g'(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(g(x)).g'(x)}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)}{1} = 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) = 2.\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

veya

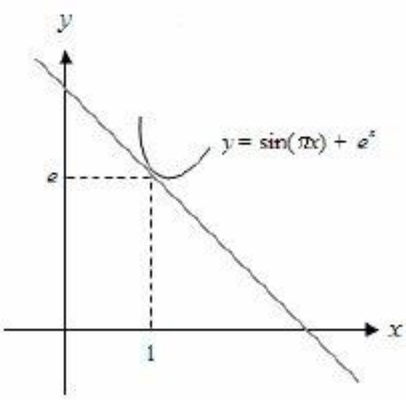
$$f(g(x)) = x-\frac{2}{x}-1$$

$$[f(g(x))]' = \left(x-\frac{2}{x}-1\right)' \Rightarrow [f(g(x))]' = 1+\frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1} = 1+\frac{2}{2^2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

42.

$y = \sin(\pi x) + e^x$



$x = 1$ ise

$y = \sin(\pi.1) + e^1 \Rightarrow y = 0 + e \Rightarrow y = e$

$(1\ ,\ e)$

$y = f(x) = \sin(\pi x) + e^x$

$f'(1) =$ eğim

$y' = \pi.\cos(\pi x) + e^x$

$f'(1) = \pi.\cos(\pi.1) + e^1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \pi.(-1) + e \quad \Rightarrow \quad f'(1) = e - \pi$

$(1\ ,\ e)$ ve eğim $= e - \pi$ ise

Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemine göre,

$y - e = (e - \pi).(x - 1)$

y eksenini kestiği noktanın ordinatı

$x = 0$ için :

$y - e = (e - \pi).(0 - 1)$

$y - e = \pi - e$

$y = \pi$ bulunur.

43.

x		0	
$f'(x)$	+ + +		− − −
$f(x)$	↗		↘

I. f fonksiyonu $x > 0$ için $f'(x) < 0$ olduğundan azalandır.

II. Artan fonksiyon tanımına göre, $-2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2) < f(0)$

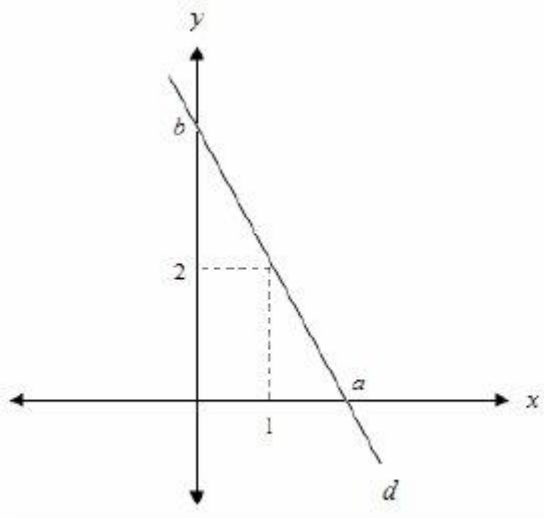
Azalan fonksiyon tanımına göre, $0 < 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) > f(2)$ olmalıdır.

III. Türevli bir fonksiyonun bir noktada yerel ekstremumunun olması için
türevin bu noktada işaret değiştirmesi gerekir ve
türevli fonksiyonlarda yerel ekstremum noktasında türev sıfır olduğundan,

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ yerel ekstremum noktasıdır.

44.

I. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\frac{a.b}{2}$

Şimdi, a ile b arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

d doğrusunun denklemi :

(a , 0) ve (0 , b) ise iki noktası bilinen doğru denkleminden

$$\frac{y-0}{0-b}=\frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad -a.y=-b.(x-a) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{b}{a}x-b$$

(1 , 2) noktası doğru üzerinde olduğundan,

$$2=\frac{b}{a}-b \quad \Rightarrow \quad 2=b\left(\frac{1}{a}-1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{b}=\frac{1-a}{a} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı = $\frac{a.b}{2}=\frac{a\left(\frac{2a}{a-1}\right)}{2}=\frac{a^2}{a-1}$

$$S_{min}=\frac{a^2}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanının en az (minimum) olması için $S' = 0$ olmalıdır

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1) - a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1) - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2 - 2a - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 2a = 0$$

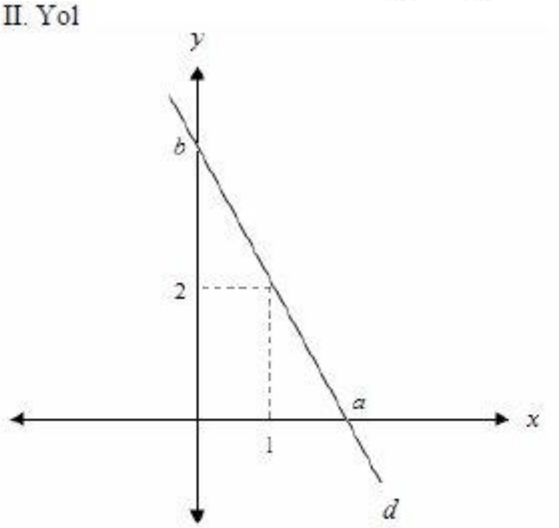
$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı = $S_{min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

II. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2}$

Şimdi, a ile b arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

Benzerlikten,

$$\frac{a-1}{a} = \frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{a\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)}{2} = \dfrac{a^2}{a-1} \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{a^2}{a-1}$

Üçgensel bölgenin alanının en az olması için $S' = 0$ olmalıdır.

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1)-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2-2a-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-2a = 0$$

$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı = $S_{min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

Not : İki noktası bilinen doğru denklemi

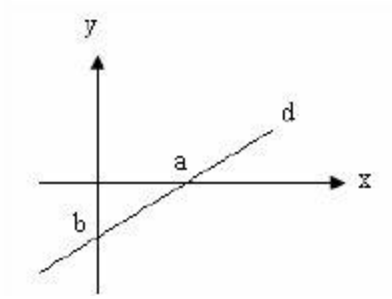
$A(x_1 \, , \, y_1)$ ve $B(x_2 \, , \, y_2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y-y_1}{y_1-y_2} = \dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$

Not : İki noktası bilinen doğrunun eğimi

$A(x_1 \, , \, y_1)$ ve $B(x_2 \, , \, y_2) \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

Not : Doğrunun eksen parçaları türünden denklemi

(a , 0) ve (0 , b) noktalarından geçen doğrunun denklemi = $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



45.

$f'(a) = 1$

$f'(b) = \sqrt{3}$

$\int_b^a f'(x).f''(x)\,dx$

$f'(x) = u$ dönüşümü yapılırsa,

$f''(x)\ dx\ =\ du$

$x = a \quad \Rightarrow \quad u = f'(a) \quad \Rightarrow \quad u = 1$

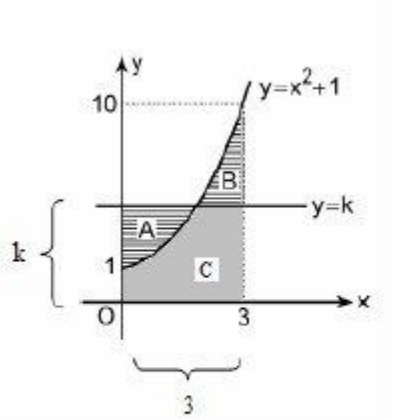
$x = b \quad \Rightarrow \quad u = f'(b) \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3}$

$$\int_b^a f'(x).f''(x)\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{1} u\ du\ = \frac{u^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{1}$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ bulunur.}$$

46.

I. Yol



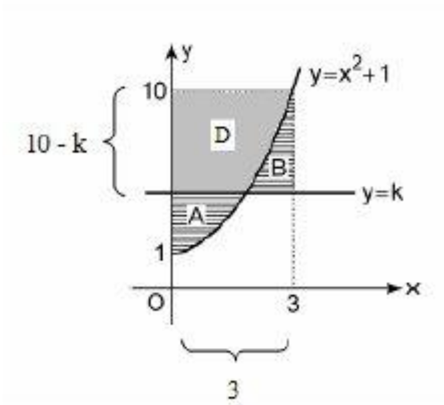
A = B olduğuna göre, A + C = B + C

A + C = 3.k

$$B + C = \int_0^3 (x^2+1)\ dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}+3\right) - \left(\frac{0}{3}+0\right) = 12$$

A + C = B + C olduğuna göre, 3.k = 12 $\quad \Rightarrow \quad$ k = 4 elde edilir.

II. Yol



A = B olduğuna göre, A + D = B + D

B + D = 3.(10 – k)

$y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-1}$

$$A + D = \int_1^{10} \sqrt{y-1}\ dy = \int_1^{10} (y-1)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

$$A + D = \int_1^{10} \sqrt{y-1}\ dy = \int_1^{10} (y-1)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \left.\frac{(y-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{10} = \left.\frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^{10} = \left.\frac{2\sqrt{(y-1)^3}}{3}\right|_1^{10} = \left.\frac{2(y-1)\sqrt{y-1}}{3}\right|_1^{10}$$

$$= \left(\frac{2(10-1)\sqrt{(10-1)}}{3}\right) - \left(\frac{2(1-1\sqrt{1-1})}{3}\right) = \left(\frac{2.9.\sqrt{9}}{3}\right) - 0 = 18$$

A + D = B + D olduğuna göre,

$18 = 3.(10 - k) \quad \Rightarrow \quad 10 - k = 6 \quad \Rightarrow \quad k = 4$ olur.

47.

I. Yol

$$\int_1^e \ln^4 x \, dx$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$\ln^4 x = u \quad \Rightarrow \quad (\ln^4 x)' = (u)' \quad \Rightarrow \quad 4.\ln^3 x.\frac{1}{x}dx = du$$

$$dx = dv \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int dv \quad \Rightarrow \quad x = v$$

$$\int_1^e \ln^4 x \, dx = x.\ln^4 x - \int_1^e x.4\ln^3 x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x.\ln^4 x \Big|_1^e - 4\int_1^e \ln^3 x \, dx$$

$$= (e.\ln^4 e - 1.\ln^4 1) - 4\int_1^e \ln^3 x \, dx$$

$\int_1^e \ln^3 x \, dx = 6 - 2e$ olduğuna göre,

$$= (e.1 - 1.0) - 4.(6 - 2e)$$

$$= e - 24 + 8e$$

$= 9e - 24$ elde edilir.

II. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\, dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$$

$$\Rightarrow \quad (e^t)' = x' \quad \Rightarrow \quad e^t dt = dx$$

$$x = e \quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$\int_1^e \ln^4 x\, dx = \int_0^1 t^4\ e^t dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)' = u' \quad \Rightarrow \quad 4t^3 dt = du$$

$$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$$

$$\int_0^1 t^4 e^t dt = e^t.t^4 - \int_0^1 e^t 4t^3 dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$$

Verilen $\int_1^e \ln^3 x\ dx$ integralide t değişkenine göre düzenlenirse,

$\int_1^e \ln^3 x\ dx = \int_0^1 t^3 e^t dt = 6 - 2e$ olacağına göre,

$$\int_0^1 t^4\ e^t dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 t^3 e^t dt$$

$$= e^t.t^4 \Big|_0^1 - 4.(6 - 2e) = (e - 0) - 24 + 8e = 9e - 24$$

III. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\,dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$

$\quad \Rightarrow \quad (e^t)' = x' \quad \Rightarrow \quad e^t\,dt = dx$

$x = e \quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = \int_0^1 t^4\ e^t\,dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)' = u' \quad \Rightarrow \quad 4t^3\,dt = du$

$e^t\,dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t\,dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^4\ e^t\,dt\ = e^t.t^4 - \int_0^1 e^t\,4t^3\,dt\ = e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3\,dt$$

$$\int_0^1 e^t t^3\,dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^3 = u \quad \Rightarrow \quad (t^3)' = u' \quad \Rightarrow \quad 3t^2\,dt = du$

$e^t\,dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t\,dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^3 e^t\,dt\ = e^t.t^3 - \int_0^1 e^t\,3t^2\,dt\ = e^t.t^3 - 3\int_0^1 e^t t^2\,dt$$

$$\int_0^1 e^t t^2 dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^2 = u \quad \Rightarrow \quad (t^2)' = u' \quad \Rightarrow \quad 2t\ dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e^t.t^2 - \int_0^1 e^t 2t\ dt = e^t.t^2 - 2\int_0^1 e^t t\ dt$$

$$\int_0^1 e^t t\ dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t = u \quad \Rightarrow \quad (t)' = u' \quad \Rightarrow \quad dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 te^t dt = e^t.t - \int_0^1 e^t dt = e^t.t - e^t$$

Buna göre, $\int_1^e \ln^4 x\, dx = \int_0^1 t^4\ e^t dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$

$\int_0^1 t^3 e^t dt = e^t.t^3 - 3\int_0^1 e^t t^2 dt$ olduğuna göre,

$$= e^t.t^4 - 4\left(e^t.t^3 - 3\int_0^1 e^t t^2 dt \right)$$

$\int_0^1 t^2 e^t dt = e^t.t^2 - 2\int_0^1 e^t t\ dt$ olduğuna göre,

$$= e^t.t^4 - 4\left(e^t.t^3 - 3\left(e^t.t^2 - 2\int_0^1 e^t t\ dt \right)\right)$$

$\int_0^1 e^t t\ dt = e^t.t - e^t$ olduğuna göre,

$$= e^t.t^4 - 4.(e^t.t^3 - 3.(e^t.t^2 - 2.(e^t.t - e^t)))$$ elde edilir.

$$= e^t.t^4 - 4.(e^t t^3 - 3.(e^t.t^2 - 2.(e^t t - e^t)))$$

$$= e^t.t^4 - 4.(e^t t^3 - 3.(e^t.t^2 - 2.e^t t + 2e^t))$$

$$= e^t.t^4 - 4.(e^t t^3 - 3.e^t.t^2 + 6.e^t t - 6e^t)$$

$$= e^t.t^4 - 4.e^t t^3 + 12.e^t.t^2 - 24.e^t t + 24e^t$$ olur.

Sonuç olarak

$$\int_0^1 t^4\ e^t dt = e^t.(t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 24t + 24)\Bigg|_0^1$$

$$= (e^1.(1^4 - 4.1^3 + 12.1^2 - 24.1 + 24)) - (e^0.(24)) = e.(1 - 4 + 12 - 24 + 24) - 24$$

$$= 9e - 24$$ bulunur.

Not : Kısmi (parçalı) integrasyon yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında
genelde, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ yazarız.

Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek, $\int (u.v)'\,dx = \int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$ bulunur.

Belirsiz integralin tanımından, $\int (u.v)'\,dx = u.v$ yazılabilir.

Bunu dikkate alarak, $u.v = \int u.v'\,dx + \int v.u'\,dx$ formülünü elde ederiz.

$u' = \dfrac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad u'\,dx = du$,

$v' = \dfrac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad v'\,dx = dv$ olduğundan,

$u.v = \int u\,dv + \int v\,du \quad \Rightarrow \quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du$ elde edilir.

48.

$u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa,

$$u' = (\sqrt{x})' \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 2u\ du = dx$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\ln u}{u} 2u\ du$$

$$= \int 2\ln u\ du \text{ elde edilir.}$$

49.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+1.0 & 1.1+1.1 \\ 0.1+1.0 & 0.1+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.1 & 1.0+0.1 \\ 1.1+1.1 & 1.0+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-0 \\ 0-2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^2 - B^2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.0 - (-2).2 = 4 \text{ bulunur.}$$

50.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x + 2.y \\ -1.x + 3.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ -x + 3y = 9 \\ \hline 5y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow \quad x = -3 \end{array}$$

Buna göre, $x + y = -3 + 2 = -1$ elde edilir.

Kaynak

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA